UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra matematiky

Diplomová práce

Mgr. Hana Minaříková

Grafické znázorňování při řešení matematických úloh na 1. stupni základních škol

Olomouc 2019 vedoucí diplomové práce: PhDr. Radka Dofková, Ph.D.

Prohlašuji, že jsem předloženou diplomovou práci zpracovala samostatně a použila prameny uvedené v seznamu literatury.

V Kroměříži dne ……………..

……………………………………..

podpis

Poděkování

Touto cestou děkuji PhDr. Radce Dofkové, Ph.D. za odborné vedení mé diplomové práce a její cenné rady.

ABSTRAKT

Diplomová práce se zabývá grafickým znázorňováním při řešení matematických úloh na 1. stupně ZŠ.

Teoretická část obsahuje tři kapitoly. První kapitola se věnuje matematice z pohledu Rámcově vzdělávacího programu pro základní vzdělávání. Druhá kapitola se zabývá dělením učebních úloh z pohledu školské praxe. Třetí kapitola je zaměřena na grafické znázorňování při řešení úloh na 1. stupni ZŠ. Úlohy jsou rozděleny podle použité početní operace při jejich řešení. U každého typu úlohy jsou uvedena vhodná grafická znázornění.

Empirická část obsahuje analýzu žákovských řešitelských strategií při řešení nestandardních matematických úloh, které byly součástí didaktického testu. Test psali žáci 5. ročníku základní školy.

V závěru je popsán celkový pohled autora na proběhnuté výzkumné šetření a vysloven závěr, který z didaktického testu vyplývá.

KLÍČOVÁ SLOVA

matematické úlohy, slovní úlohy, řešení úloh, grafické znázorňování

ABSTRACT

This thesis deals with the graphical representation in solution of matematical problems at elementary school. The theoretical part contains three chapters. The first chapter deals with mathematics by looking at the curriculum. The second chapter deals with the division of teaching tasks by looking at the school practice. The third chapter focuses on the graphical representation in solution of matematical problems at elementary school. The tasks are divided according to the use of numerical operations in their solution. Each task contains the appropriate graphical representation.

The empirical part continues with the pupil´s solving strategies analysis. Pupils of 5th year of primary school wrote a didactic test with non-standard word problems.

The conclusion summaries the main points of the research conducted. Finally, some implications of the work are given.

KEYWORDS

mathematics problems, word problems, solutions of problem, graphical representation

OBSAH

ÚVOD

Každý z nás řeší denně nějaký matematický problém. Počítáme, kolik nás bude stát nákup v supermarketu, o kolik korun více zaplatíme u benzinové pumpy, než tomu bylo minulý týden a my rodiče se někdy nemůžeme dopočítat, kolik že to mají naše děti vlastně roků.

Při mé dlouholeté praxi učitelky na 1. stupni základní školy vím, že matematika není u dětí příliš oblíbený předmět. Snažila jsem se vypozorovat, co jim v matematice dělá největší problém. Myslím, že děti mají největší potíže při řešení slovních úloh. Proto jsem se snažila jim toto řešení nějakým způsobem přiblížit a usnadnit. Jako nejvhodnější způsob se mi jeví naučit děti používat při řešení matematických úloh grafické znázorňování. Jsem přesvědčena, že jim to řešení matematických úloh usnadní.

Proto jsem si jako hlavní cíl mojí diplomové práce stanovila zjistit, jestli děti, které při řešení matematických úloh použijí grafické znázornění, budou úspěšnější než ti, kteří jej při řešení nepoužijí. Za tímto účelem jsem vypracovala nestandardizovaný didaktický test a na základě jeho vyhodnocení jsem chtěla zjistit, jestli byl můj předpoklad správný.

Dílčím cílem mojí diplomové práce je shrnutí teoretických poznatků o matematických úlohách a jejich řešení s pomocí grafického znázorňování.

Uvedené cíle korespondují se strukturou mojí diplomové práce, kterou jsem rozdělila na dvě základní části. Na část teoretickou a empirickou.

V teoretické části se nejprve zabývám matematikou na 1. stupni ZŠ v souladu s Rámcově vzdělávacím programem pro základní školy. V druhé kapitole shrnuji poznatky o učebních úlohách. Zvláště se zaměřuji na matematické úlohy a na jejich dělení z pohledu matematické praxe. Tyto teoretické poznatky doplňuji příklady, které jsem vytvořila na základě svého studia a dlouholeté praxe na 1. stupni ZŠ.

Ve třetí kapitole se zaměřuji na grafické znázorňování při řešení úloh na 1. stupni ZŠ. Základní klasifikace těchto úloh je provedena podle užitých početních operací – sčítání, odčítání, násobení a dělení. Velkou pozornost věnuji také úlohám na porovnávání a úlohám charakterizovaným vztahy „o *n* méně“, „o *n* více“, „*n* krát méně“ a „*n* krát více“. Jedna z podkapitol je věnována řešení složených úloh. U jednotlivých typů úloh jsem vždy uvedla příklad a vhodné grafické znázornění.

V empirické části se zabývám nejprve její charakteristikou a pak přecházím k didaktickému testu, který obsahuje devět nestandardních matematických úloh. Test byl předložen žákům pátého ročníku Základní školy ve Kvasicích, kde učím. Úkolem žáků bylo vyřešit jednotlivé úlohy tvořivým způsobem, který jim nejlépe vyhovuje. Různé postupy při řešení těchto matematických úloh jsem za použití metody analýzy textu vyhodnotila, abych tak mohla zjistit, zda grafické znázorňování žákům pomohlo úkol správně vyřešit.

TEORETICKÁ ČÁST

1 Matematika na 1. stupni ZŠ

Matematika na1.stupni základní školy je zaměřena na důkladné a logické osvojení učiva. Při výuce matematiky žáci řeší úlohy zaměřené na situace z reálného života. Matematika je vyučována v souladu s Rámcově vzdělávacím programem pro základní vzdělávání (dále jen RVP ZV).

1.1 Rámcově vzdělávací program pro základní vzdělávání

Základní vzdělávání navazuje na předškolní vzdělávání a na výchovu v rodině. Je založeno na poznávání, respektování a rozvíjení individuálních potřeb, možností a zájmů každého žáka. Vzdělávání svým činnostním a praktickým charakterem a uplatněním odpovídajících metod motivuje žáky k dalšímu učení, vede je k učební aktivitě a k poznání, že je možné hledat, objevovat, tvořit a nalézat vhodnou cestu řešení problémů.

Základní vzdělávání má žákům pomoci utvářet a postupně rozvíjet klíčové kompetence a poskytnout spolehlivý základ všeobecného vzdělání orientovaného zejména na situace blízké životu a na praktické jednání. Vzdělávací obsah základního vzdělávání je v RVP ZV orientačně rozdělen do devíti vzdělávacích oblastí. Jednotlivé vzdělávací oblasti jsou tvořeny jedním vzdělávacím oborem nebo více obsahově blízkými vzdělávacími obory. Řešení matematických úloh je obsaženo ve vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace (RVP ZV, 2016).

RVP ZV, který je platný od 1. 9. 2005, vymezuje závazné rámce vzdělávání pro všechny základní školy. Vychází z nové strategie vzdělávání, která zdůrazňuje klíčové kompetence, jejich provázanost se vzdělávacím obsahem a uplatnění získaných vědomostí a dovedností v praktickém životě.

1.1.1 Matematika a její aplikace

Podle RVP ZV (2016) je vzdělávací oblast matematika rozdělena do čtyř tematických okruhů:

- Číslo a početní operace

- Závislosti, vztahy a práce s daty
- Geometrie v rovině a v prostoru
- Nestandardní aplikační úlohy a problémy

Řešení matematických úloh je součástí výstupů všech výše zmíněných tematických okruhů a to jak pro první tak i pro druhé období. Při vzdělávání je třeba klást důraz na důkladné porozumění základním myšlenkovým postupům a pojmům matematiky a jejich vzájemným vztahům. Rámcově vzdělávací program pro základní vzdělávání klade důraz také na řešení nestandardních aplikačních úloh a problémů, které může být do značné míry nezávislé na znalostech a dovednostech školské matematiky, ale při němž je nutné uplatnit logické myšlení.

„Ať už bude žák v budoucnu pracovat v jakékoliv profesi, schopnosti, které v hodinách matematiky získá, mu pomohou lépe rozumět světu kolem sebe, lépe se rozhodovat, účinněji řídit svůj život. Kvalita jeho života bude vyšší“ (Hejný, 2011, s. 9).

2 Učební úlohy

Učební úlohy se vyskytují ve všech vyučovacích předmětech a měly by být součástí každé vyučovací hodiny, protože podněcují žáky k tvůrčí činnosti. Podle Čížkové (2002) klademe pomocí učební úlohy před žáky požadavek na vykonání souboru činností, které směřují od zadání k cíli, který úloha vytyčuje. Následující kapitola je věnována matematickým úlohám a jejich řešení.

2.1 Matematické úlohy

Obecně platná definice matematické úlohy se v odborné literatuře nevyskytuje. Kuřina (2011) hovoří obecně o učební úloze jako o výzvě k činnosti. Pokud bereme v úvahu matematickou úlohu, pak je tato úloha výzvou k matematické činnosti.

Matematické úlohy vznikly už v dávné historii. V tom nejjednodušším pojetí zřejmě provázela člověka již v dávných dobách jeho fylogenetického vývoje. Domníváme se, že musel zjistit kolik má ovcí, kolik má nepřátel apod. Na vlčí kosti z období lovců mamutů, objevené ve Věstonicích („věstonická vrubovka“) byl objeven nápis, obsahující 55 zářezů sdružených do pěti (Novák, 2005).

Novák (1999) nazývá učební úlohou každou situaci, která podněcuje žáka k uvědomělé činnosti směřující k dosažení stanoveného učebního cíle. Tato činnost je zaměřena na všechny aspekty učení:

- *obsahový,* znamenající objevení nových poznatků, zopakování učiva nebo prověření jeho zvládnutí,
- *operační,* vyjadřující, které činnosti a operace žák při řešení úlohy užije,
- *stimulační,* tvořený zájmy, sklony a potřebami žáka,
- *formativní,* tzn., že kromě dosažení výsledku, vede i k osvojení činnosti, která k němu směřuje,
- *regulativní,* úloha umožňuje žákovu činnost organizovat a řídit.

Dnes tvoří matematické učební úlohy a jejich řešení jádro matematického vyučování na všech typech a stupních škol. Na 1. stupni základní školy se uplatňují ve všech etapách vyučovacího procesu:

- *motivovat* pomocí matematické úlohy znamená vyvolat zájem žáků o následující výklad nebo cvičení,

Příklad 1

Zjisti z jízdního řádu, jak dlouho by trvala cesta z Kvasic do Zlína na hokejový zápas, a který spoj bys musel použít, když zápas začíná v 18.00 hodin.

- *při výkladu nového učiva* matematická úloha umožňuje názorně objasnit podstatu vytvářeného pojmu,

Příklad 2 (Pojem obvod obdélníku)

Naše třída má tvar obdélníku. Změř její strany a vypočítej její obvod.

- *při procvičování a upevňování* získaných poznatků je řešení matematických úloh jedním z důležitých způsobů. Žáci tak mají příležitost využít osvojené vědomosti a dovednosti při řešení praktických, reálných problémů,

Příklad 3

Divadelní představení v naší tělocvičně začalo v 8 h 45 min a skončilo v 9 h 55 minut. Jak dlouho trvalo divadelní představení?

- *diagnostická* funkce matematických úloh je nezastupitelná. Jsou nezastupitelným prostředkem kontroly dosažené úrovně vědomostí, dovedností a vlastností osobnosti žáka (Novák, 1999).

„*Motivace je pro úspěšné vyučování klíčová. Je důsledkem řešení přiměřeně náročných úloh. Žák, jenž řeší úlohy příliš jednoduché, nemůže zažít radost, protože práce jej nudí až otravuje. Na druhé straně žák, který již při přečtení úlohy ztrácí naději, že by ji vyřešil, nemůže zažít radost, protože rezignuje nebo je dokonce frustrován*“ (Hejný, 2011, s. 12).

Matematické úlohy můžeme posuzovat podle různých kritérií. Při školské klasifikaci úloh se zpravidla rozeznávají úlohy důkazové, početní, konstrukční a jiné (Vyšín, 1972).

Aby nedošlo k terminologickému nedorozumění, je nutné pojem matematické úlohy chápat jako nadřazený všem ostatním v matematickém vyučování často používaným pojmům (příklad, problém, otázka, cvičení):

- *příkladem* se rozumí ve vyučování matematice požadavek na obvykle numerický výpočet požadovaného údaje nebo vzorový příklad – text úlohy,
- *cvičením* se rozumí soubor úloh, určených k procvičení probraného učiva. Většinou se jedná o prostou aplikaci jednoho nebo několika algoritmů,
- *problémem* se označuje úloha problémového charakteru, která předpokládá větší podíl řešitelovy aktivity a vynalézavosti,
- *otázkou* rozumíme úlohu zformulovanou jako větu tázací. (Novák, 2013)

J. Vyšín se k tomuto tématu vyjadřuje takto: *„Je zřejmé, že přesnou hranici nelze vést, že však také úloha, která je pro řešitele s nižší matematickou úrovní problémem, je pro školenějšího řešitele prostě cvičením“* (Vyšín, 1972, s. 7).

2.1.1 Dělení matematických úloh z pohledu školské praxe

Z pohledu školské praxe můžeme matematické úlohy posuzovat podle různých kritérií. Podle **matematického obsahu úlohy** (předmětové kritérium). V tomto případě si všímáme toho, které matematické *jevy, poznatky, vědomosti, dovednosti* apod. jsou obsahem úlohy. Podle Nováka (1999) pak rozlišujeme např. úlohy

- aritmetické, geometrické, algebraické,…
- aritmetické úlohy na sčítání, odčítání, násobení,…
- aritmetické úlohy na sčítání v oboru numerace do 100, do 1 000,…
- aritmetické úlohy na sčítání v oboru do 100 bez přechodu přes desítku, s přechodem přes desítku,…

Podle **charakteru objektů** (předmětná komponenta) Novák (1999) rozlišuje úlohy na

- úlohy čistě matematické – předmětovou komponentou jsou matematické symboly.

Příklad 4

Najdi řešení rovnice 7500 – 3 400 = m

- úlohy slovní – předmětovou komponentou jsou reálné objekty z nematematické oblasti.

Příklad 5

Tatínek trhal jablka. Ovoce ukládal do beden. Naplnil celkem 3 bedny. Kolik kilogramů jablek natrhal, když v jedné bedně bylo 12 kg?

Podle **operační náročnosti** můžeme zjednodušeně pro potřeby didaktiky matematiky podle Nováka a Stopenové (1993) dělit matematické úlohy takto:

- Úlohy vyžadující pamětní reprodukci matematických poznatků. Zde je nejčastější formulace: Definuj! Jak se nazývá? Co je to?

Příklad 6

Jak provádíme zkoušku správnosti při odčítání?

- Úlohy vyžadující jednoduché myšlenkové operace s matematickými poznatky. Nejčastější formulace: Zjistěte….! Popište…! Jakým způsobem…..?

Příklad 7

V obchodě prodávají jedno mýdlo za 13 Kč. Pokud si koupíš tři mýdla, zaplatíš 32 koruny. Je výhodné koupit 3 mýdla?

- Úlohy vyžadující složitější myšlenkové operace s matematickými poznatky. Nejčastější formulace: Dokažte….! Ověřte….! Vysvětlete….! Jak rozumíte….?

Příklad 8

Rozhodni, zda můžeš sestrojit trojúhelníky se stranami:

a) *a = 5 cm, b = 7 cm, c = 3 cm*
b) *d = 4 cm, e = 10 cm, f = 3 cm*

- Úlohy vyžadující tvořivé myšlení. Nejčastější formulace: Sestav úlohu! Vymysli příklad!

Příklad 9

Vypočítej (48 : 6) . 9 = . K příkladu pak vytvoř slovní úlohu např. z prostředí prodejny potravin.

Podle **způsobu jazykového vyjádření**

- Úloha má formu pokynu – věta rozkazovací

Příklad 10

Doplň: 320 mm = ____ cm

- Úloha má formu dotazu – věta tázací

Příklad 11

Kolik dní trvají letní prázdniny?

Pro žáky, kteří řeší matematický úkol, je velmi důležité tzv. akční slovo. To zde plní spouštěcí funkci. Nejčastěji je to slovo v imperativu – vypočítejte, určete, ……..nebo také tázací zájmeno, částice, číslovka nebo příslovce – proč, kolik, pro které, jak vypočítáme… (Novák, Stopenová, 1993).

Podle **míry tvořivosti řešitele** při řešení úlohy dělí Novák (2013) úlohy na:

- *standardní,* které k řešení používají známého vzorce, pravidla nebo postupu,

Příklad 12

Zemědělec Zaorálek sklidil 220 pytlů brambor. V jednom pytli je 50 kg. Kolik kilogramů brambor sklidil? Kolik je to tun?

- *nestandardní neboli problémové* úlohy, při jejich řešení musí žák řešit (matematický) problém, hledat a objevovat metodu řešení. Postup úlohy není znám, řešitel hledá cestu k výsledku originálním způsobem.

Příklad 13

Petr si koupil jeden los. Vyhrál na něj trojnásobek ceny losu a ještě prémii 25 Kč. Celkem vyhrál 55 Kč. Kolik korun stál los?

V každé matematické úloze je potřeba také rozlišovat její složitost. Tím se rozumí její objektivní vlastnost a obtížnost matematické úlohy, která vyjadřuje vztah mezi úlohou a jejím řešitelem. Stejná úloha může být pro jednoho jedince obtížná, ale jiným se může zdát lehká. Proto pojem obtížnost úlohy má čistě pragmatický charakter (Květoň, 1990).

Problémové úlohy vyžadují při řešení tvořivý přístup. Úlohu, kterou jeden student řeší na základě známého algoritmu nebo známé teorie, může u jiného studenta vyžadovat tvořivé úsilí. Problémové úlohy vyžadují hluboké soustředění, invenci a čas (Kuřina, 2011).

2.2 Slovní úlohy

Ve výuce matematiky mají zvláštní postavení učební úlohy slovní. Obvykle jimi rozumíme úlohy z praxe, ve kterých je popsána určitá reálná situace, jež vyúsťuje v problém. Ten je možné řešit buďto v realitě nebo matematicky. Slovní úlohy netvoří ve školské matematice samostatný tematický celek, ale prostupují celým matematickým učivem (Divíšek, 1989).

Pod pojmem slovní úlohy se nejčastěji rozumí takové úlohy, které jsou dány v nějakém kontextu, který je řešiteli srozumitelný, a které pokládají otázky, jež se dají zodpovědět pomocí údajů uvedených v textu (Vondrová, Rendl, 2015).

Řešení slovních úloh je považováno za přetrvávající metodický problém, proto slovní úlohy nebývají mnohdy oblíbené ani učiteli, ani žáky. Slovní úlohy bývají charakterizovány třemi znaky:

- svojí *matematickou strukturou,* která je daná probíraným učivem,
- *kontextovou stránkou*, kdy námětem slovní úlohy může být jakákoliv reálná situace,
- *svojí prezentací,* která je závislá především na stáří žáka.

Složitost slovní úlohy a její obtížnost se ve vztahu ke všem výše uvedeným znakům postupně zvyšuje. Přechází se od malých čísel k velkým, od sčítání a odčítání k násobení a dělení. Od úloh, pro jejichž vyřešení stačí jeden úkon k úlohám, při jejichž řešení je třeba několik kroků (Novák, 1999).

2.2.1 Slovní úlohy jednoduché

Slovní úloha jednoduchá se vyznačuje tím, že při jejím řešení žák provádí pouze jeden početní výkon. Použije-li dva nebo více početních výkonů, jedná se o slovní úlohu složitou (Novotná, 2000).

Jednoduché úlohy Novák (2005) dělí podle početních výkonů:

- úlohy s operací *sčítání,*

- úlohy s operací *odčítání,*
- úlohy s operací *násobení,*
- úlohy s operací *dělení.*

Uvedená typologie postihuje pouze nejvíce frekventované úlohy. Z metodického pohledu je však třeba zdůraznit další momenty práce s jednoduchými slovními úlohami. Proto Novák (1999) rozlišuje dále úlohy na *přímé* a *nepřímé*. Přímé úlohy jsou takové, v nichž formulace zadání odpovídá početnímu výkonu, kterým se úloha řeší. Kdežto nepřímé úlohy se obvykle řeší početním výkonem opačným.

Přímá úloha s operací násobení:

Příklad 14

Ve třídě je 28 žáků. Paní učitelka měla svátek, a proto dala každému žákovi 2 banány. Kolik banánů paní učitelka rozdala?

Nepřímá úloha s operací sčítání:

Příklad 15

Jirka dnes přečetl 6 stran. Bylo to 2 o strany méně než jeho sestra Alenka. Kolik stran přečetla Alenka?

2.2.2 Slovní úlohy složené

Obvyklé a žákům známé situace můžeme jen zřídka kdy vyjádřit jednoduchou slovní úlohou. Mnohem častější jsou situace, v nichž jsou objekty v úloze vystupující vzájemně propojeny složitějšími vazbami. Jejich matematickým modelem je obvykle složená slovní úloha (Novák, 2013).

Divíšek (1989) říká, že složená slovní úloha se skládá z několika jednoduchých slovních úloh a z toho vyplývá, že k řešení takové úlohy je třeba tolik početních úkolů, kolik jednoduchých slovních úloh je v ní obsazeno.

Složená úloha však není jen prostou sumou dvou nebo několika jednoduchých úloh, tyto dílčí úlohy na sebe významově navazují a jsou mezi sebou funkčně propojeny. Složená slovní úloha zahrnuje určitý hlavní problém, který je předmětem otázky, ale k jeho vyřešení nejsou v zadání přímo uvedeny potřebné údaje. Tyto údaje řešitel zjistí zformulováním a vyřešením jedné nebo několika dílčích úloh (Novák, 1999).

Příklad 16

Do páté třídy nakupovali nový nábytek. Lavice pro dva žáky stála 1 135 Kč. Židle stála 410 Kč. Do páté třídy chodí 26 žáků. Kolik korun museli za nábytek zaplatit?

2.2.3 Řešení slovních úloh

„ *Cílem učiva o slovních úlohách je naučit žáky řešit tyto úlohy matematicky. To ovšem předpokládá nejprve daný reálný problém umět formulovat jako aritmetickou nebo algebraickou úlohu a tu pak matematicky řešit. Postup, jenž z dané reálné situace s reálným problémem vede k úloze matematické nebo k matematické formulaci daných vztahů, se nazývá matematizace reálné situace nebo slovní úlohy“* (Divíšek, 1989, s. 123).

Blažková a kol. (2011) upozorňuje učitele, aby dávali pozor, aby žáci správně porozuměli textu zadání. Žáci se musí naučit orientovat v textu, aby správně pochopili, jaký je předmět otázky, a se kterými údaji musí pracovat. Po přečtení a porozumění textu následuje jeho rozbor. Důležitá pro řešení slovní úlohy je otázka. Žák vybírá pouze ty údaje, které mu ji pomohou zodpovědět a volí vhodný výběr početní operace. Ke správnému pochopení úlohy často pomáhá vhodný nákres zadání. Ten může být při řešení zásadní a mnohdy usnadní žákům slovní úlohu vyřešit.

Při řešení jednoduché slovní úlohy je vhodné držet se tohoto postupu:

- *rozbor* úlohy, který je doprovázen stručným zápisem nebo grafickým znázorněním,
- vyjádření úlohy *matematickou symbolikou* a její *řešení matematickým aparátem* nebo řešení *úsudkem* nebo grafickými nebo *algebraickými* metodami nebo *experimentem,*
- *kontrola* správnosti řešení úlohy,
- *odpověď* na otázku úlohy.

Jednoduchá slovní úloha:

Příklad 17

Maminka koupila 2 metry červené látky a 3 metry bílé látky. Kolik metrů látky koupila celkem?

Postup řešení složených slovních úloh je možno vyjádřit analogicky. Žáci využijí jednoduchého úsudku a svůj myšlenkový postup vyjadřují výpočty s užitím závorek nebo vhodného grafického schématu nebo úlohu matematizují vhodně sestavenými rovnicemi (Novák, 1999).

V metodické literatuře (Blažková a kol., 2011) se při řešení slovních úloh rozlišují tyto tři metody:

- analytická
- syntetická
- analyticko-syntetická

Analytická metoda je zde popsána tak, že žák musí nejprve zjistit, co je jeho konečným úkolem, co má vypočítat. Dalo by se říci, že začíná od otázky. Pak musí zjistit, jak daného cíle dosáhne. Žák uvažuje, jaké informace potřebuje k vyřešení úlohy a zda jsou ze zadání známy. Pokud ne, provede další analýzu textu, při které zjistí, jak může dané údaje získat. Při této metodě musí řešitel stále sledovat otázku a tak postupně dojde k cíli.

Při syntetické metodě si řešitel vybírá z textu takové údaje, které mu umožní vytvořit jednoduché úlohy. Pomocí takto získaných výsledků tvoří další jednoduché úlohy, až dojde ke konečnému výsledku a může formulovat odpověď na otázku slovní úlohy. Znamená to, že žák od začátku pracuje s konkrétními údaji a musí proto dávat pozor na správný výběr údajů a na to, aby nějaký potřebný údaj neopomenul.

Při řešení složitějších slovních úloh používáme metodu analytickou a syntetickou současně a pak tento postup označujeme jako řešení úloh metodou analyticko-syntetickou.

Příklady složených slovních úloh:

Příklad 18

V obchodě měli na skladě 1 200 balíčků ovocného čaje a 2 600 balíčků cejlonského čaje. Vydali 700 balíčků ovocného čaje a 1 300 balíčků cejlonského čaje. Kolik balíčků čaje jim zbylo?

Příklad 19

Na fotbalový zápas přišlo 824 diváků. Čtvrtina z nich měla lístky k stání za 90 Kč, ostatní seděli na tribuně, kde platily 135 Kč. Za kolik korun se prodaly vstupenky?

Ke způsobu řešení slovních úloh se vyjadřuje také Pavlovičová (in Šedivý, Vallo, 2009, str. 75): *„Na riešenie slovnej úlohy si môžeme vybrať rôzne metódy, ktoré závisia aj od úrovne vedomostí žiakov a znalosti príslušných algoritmov na príslušnom stupni školy. Neraz sme v praxi svedkami toho, ako znalosť niektorých postupov riešenia typových slovných úloh môže skomplikovať samotné riešenie úlohy. Žiakova snaha o využitie rôznych naučených algoritmov, vzorcov alebo rovníc pri riešení slovnej úlohy, ktoré by mali zjednodušiť riešenie, často naopak skomplikuje mnohé elementárne a jednoduché postupy."*

Novák (1999) zdůrazňuje, že řešení typových slovních úloh je pouze jednou stránkou náročné problematiky. Je vhodné řešit jednu úlohu různými postupy, hledat nová originální řešení a samostatně formulovat matematické úlohy. Tím se uplatní větší míra tvořivosti a možnost heuristických postupů. Žáci se snaží objevit nové, jednodušší a efektivnější cesty.

Příklad 20

Na výlet jelo 16 dětí a dva vedoucí. Část cesty jeli vlakem a část autobusem. Děti platily za autobus 18 Kč a za vlak 15 Kč. Dospělí platili dvakrát více než děti. Kolik korun zaplatili celkem za cestu na výlet?

„Některé složené slovní úlohy mají sice poměrně jednoduchý námět, ale velmi složitou strukturu, takže je nemohou žáci dost dobře matematizovat nebo jejich matematizace vede k rovnicím, které nedovedou řešit. V takových případech řešíme úlohu experimentálně a záznamy o provedených pokusech zapisujeme do tabulky" (Divíšek, 1989, s. 146).

Příklad 21

Jenda chtěl své mamince koupit kytici růží. V květinářství měli žluté růže po 15 Kč a bílé růže po 11 Kč. Kolik kterých růží mohl Jenda koupit, když chtěl utratit 100 Kč?

3 Grafické znázorňování při řešení úloh na 1. stupni ZŠ

U dětí ve věku, kdy navštěvují 1. stupeň základní školy, je myšlení úzce vázáno na skutečnost. Logicky chápou stálost počtu, množství a hmotnosti a podstatu konkrétních událostí. Jejich vnímání se zpřesňuje, ale pozornost bývá často kolísavá. Děti jsou schopny pojmenovat vnější příčiny jevů. Nejsou však ještě schopny abstrakce.

„Při řešení praktických problémů a nezbytné komunikaci o nich nebylo vždy dost dobře možné mít k dispozici příslušnou realitu, např. stádo ovcí. Přirozenými reprezentanty různých souborů byly např. množiny oblázků nebo množiny zářezů na holi. Každá z těchto reprezentací má své přednosti: množina oblázků je vhodná k manipulování a některé praktické úlohy lze pomocí ní dobře řešit. Množina zářezů na „vrubovce“ je přehlednější, neboť zářezy jsou uspořádány, nelze však s nimi provádět žádné manipulace“ (Kuřina, 1989, s. 11).

Znázornění matematické situace prostřednictvím symbolického obrázku, např. symbolické znázornění slovní nebo konstrukční úlohy pomocí jednoduchého schematického obrázku slabým žákům řešení umožní, ale i šikovným žákům řešení usnadní (Blažková a kol., 2011).

Proto by bylo podle mého názoru vhodné používat skutečného modelu, což v praxi obvykle není možné a tak se již od prvního ročníku základního vzdělávání využívá při řešení matematických úloh grafického znázorňování. Dětem to usnadní pochopit problém a následně úlohu vyřešit. Na základní škole se nejčastěji používá obrázek, tabulka, schéma, graf nebo číselná osa.

3.1 Úlohy využívající operace sčítání

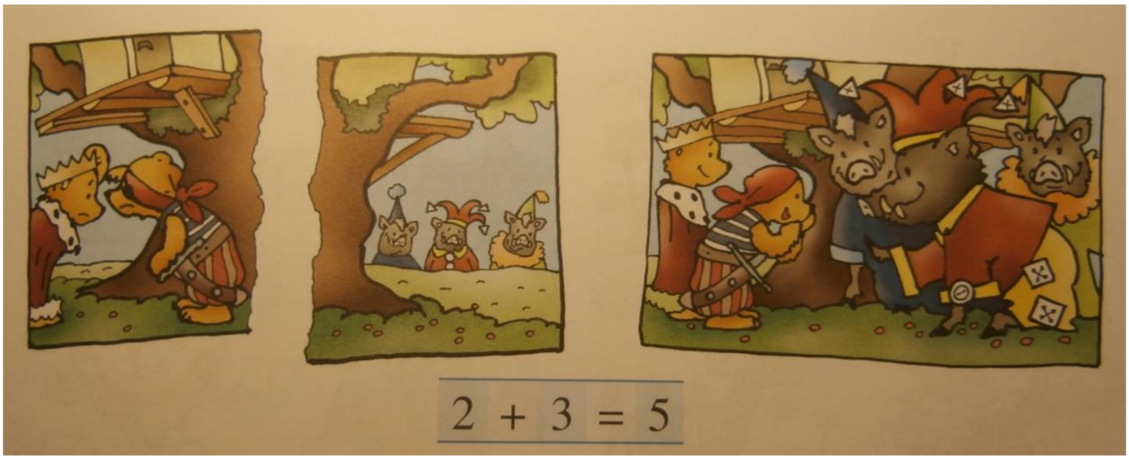
Úlohy na sčítání jsou prvními úlohami, se kterými se žáci při výuce setkávají. V příkladech se nejčastěji objevují slova: přidali, zvětšili, dostali, přijelo, přibylo, celkem, dohromady, o *n* více, o *n* méně, … Z toho hlediska může úlohy dále dělit dle Blažkové a kol. (2011) na níže uvedené typy.

3.1.1 Úlohy na určení součtu

Obrázek je grafickým znázorněním, se kterým se žáci setkávají na základní škole nejdříve. V prvním ročníku jsou obrázky nedílnou součástí výuky matematiky od samotného počátku. Pomocí obrázků se děti učí označovat kvantitu speciálním znakem, symbolem – číslicí, nebo skupinou cifer.

Obrázek 1- Ilustrace z učebnice matematiky (Tarábek, Kopečková, str. 10)

V této úloze obrázek napomáhá při sčítání v oboru do 5.



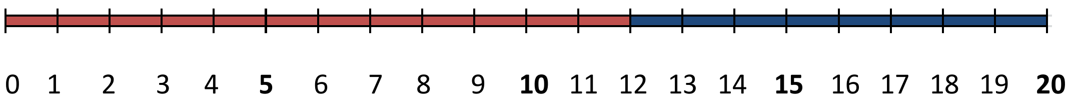
Obrázek 2- Ilustrace z učebnice matematiky (Tarábek, Kopečková, str. 35)

V následujících slovních úlohách uvádím celé zadání úlohy a grafické znázornění. V každé slovní úloze musí být také zápis, řešení, zkouška a odpověď. Tyto však neuvádím, protože nejsou předmětem mojí diplomové práce.

Příklad 22

O víkendu byl Marek se svými rodiči sbírat houby. V sobotu našel 12 hříbků a v neděli jen 8. Kolik hříbků našel celkem?

Grafické znázornění:



Obrázek 3 – Číselná osa

Jedním z nejčastějších způsobů grafického znázorňování je na základní škole číselná osa. V tomto příkladu si děti barevně označí známé hodnoty, to je počet hříbků nasbíraných v jednotlivých dnech. Celkový počet hříbků, které nasbírali, mohou přečíst rovnou z číselné osy, ale je vhodné, aby udělaly i výpočet pomocí sčítání.

Pozn. 1: Osvědčilo se mi ve své dosavadní praxi dávat dětem příklady z prostředí, které dobře znají. Naše škola se nachází v bezprostřední blízkosti pohoří Chřiby a mnohé děti chodí o víkendu se svými rodiči nebo prarodiči houby sbírat.

Dalším velmi často používaným znázorňováním je tabulka. Na obrázku 4 uvádím typ tabulky, která je vhodná na procvičování sčítání s přechodem desítky v oboru čísel do dvaceti.

dané číslo **a**	4	5	6	7	8	9
a + 7						

Obrázek 4 – Tabulka

Pozn. 2: V praxi se mi procvičování početních operací pomocí tabulky osvědčilo. Děti tabulky rády doplňují a tím si také osvojí práci s tabulkou. To se jim později hodí při řešení náročnějších slovních úloh, které je vhodné řešit experimentálně, např. doplňováním číselných hodnot do tabulky.

Tabulky mohou mít různý tvar. Na obrázku 5 je tabulka, která pomáhá žákům při procvičování sčítání do sta v celých desítkách:

+ 30

	70
	100
	40
	50

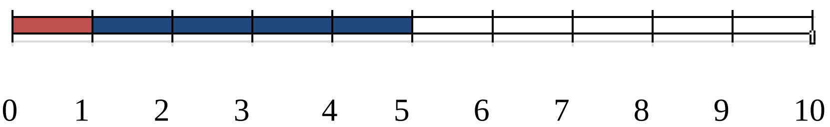
Obrázek 5 – Tabulka

3.1.2 Úlohy na zvětšení o daný počet jednotek

Příklad 23

Na lavičce sedí 1 vrána. Přiletěly další 4 vrány. Kolik vran sedí na lavičce?

<u>Grafické znázornění:</u>



Obrázek 6 – Číselná osa

Číselná osa jako grafické znázornění úlohy na zvětšení o daný počet jednotek, pomůže dětem uvědomit si, jak počet vran na lavičce přibýval. Původní počet 1 vrána je označen červenou barvou a jinou barvou (v našem případě modrou) žák postupně dokresluje další 4 vrány a tak dojde ke konečnému číslu 5. Opět je vhodné, aby žák udělal výpočet.

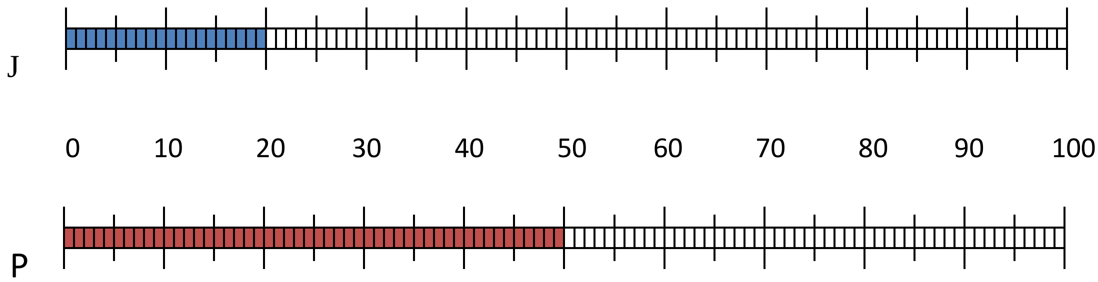
3.1.3 Úlohy charakterizované vztahem „o *n* více“

Grafické znázorňování úloh, ve kterých se vyskytuje porovnávání pomocí vztahů o několik více, o několik méně, je nutno odlišit od úlohy v oddíle 3. 1. 2. I když oba typy úloh vedou ke stejné matematické operaci, je reálná situace v každém typu úlohy jiná, neboť ve výše zmíněné operaci vystupuje jeden jedinec a v úlohách tohoto oddílu budou nejméně dva. Tuto skutečnost musíme respektovat i při grafickém znázornění.

Příklad 24

Jenda má 20 kuliček. Petr má o 30 kuliček více. Kolik kuliček má Petr?

Grafické znázornění:



Obrázek 7 – Číselné osy

V tomto příkladu je uvedena další možnost grafického znázornění pomocí číselných os. Na rozdíl od předchozích příkladů, kde stačila ke znázornění jedna číselná osa, zde musíme použít osy dvě. Jedná se zde totiž o dvě různé osoby, z nichž každá vlastní určitý počet kuliček.

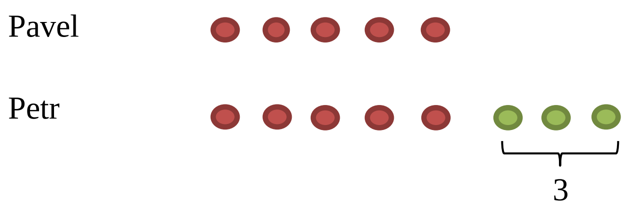
Pozn. 3: Z vlastní praxe vím, že děti je nutné upozornit na to, že nemohou zakreslovat Jendovy a Petrovy kuličky na jednu číselnou osu. Pokud někdo z žáků udělal toto chybné znázornění, navedlo ho to k odpovědi, že chlapci měli celkem 50 kuliček a neuvědomil si, že otázka takto položena nebyla.

Další možností jak dětem usnadnit pochopení zadání slovní úlohy, je grafické znázornění pomocí zástupců konkrétních objektů.

Příklad 25

Pavel přinesl do sběru 5 kg starého papíru, Petr přinesl o 3 kg více než Pavel. Kolik kilogramů starého papíru přinesl Petr?

Grafické znázornění:



Obrázek 8 – Znázornění pomocí zástupců skutečných objektů

Pozn. 4: V praxi se mi osvědčilo u slovních úloh na zvětšení „ o *n* více“ vést děti ke grafickému znázorňování pomocí zástupců skutečných objektů. Nikdy se mi totiž nestalo, že by děti zakreslovaly zástupce do jedné řady. Kdežto chybné znázorňování na jednu osu u těchto typů příkladů děti někdy dělaly.

Příklad 26

Děvčata navlékala korálky. Saša navlékla 24 korálků. Jana navlékla o 8 korálků více než Saša. Kolik korálků navlékla Jana? Úlohu obměňuj a říkej odpovědi.

Saša	24	29	34	41	45	28	15	44	11	19
Jana o 8 více než	32	37								

Obrázek 9 – Tabulka

Znázorňování pomocí tabulky je výhodné zvláště tehdy, pokud požadujeme po dětech obměňování úlohy. Doplňování do tabulky je pro ně snadné a přehledné.

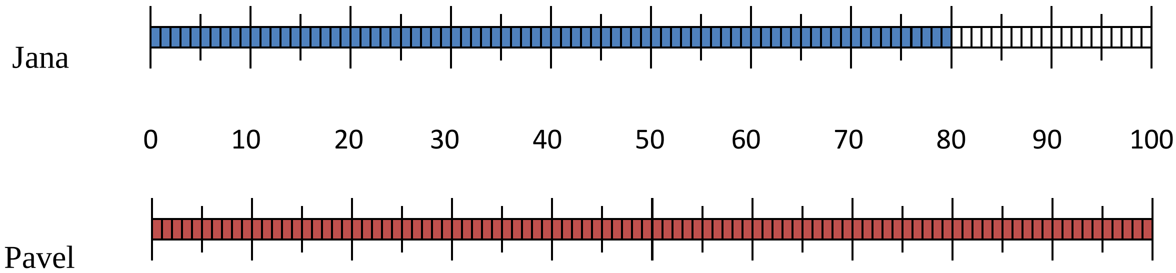
Zvládnutí metodiky řešení i jednoduchých slovních úloh je důležité, protože pokud jim není v průběhu výuky věnována dostatečná pozornost a řeší se pouze formálně, mají v budoucnu žáci problémy s řešením složených slovních úloh, ve kterých se porovnávání vyskytuje (Blažková, 2011).

3.1.4 Úlohy charakterizované vztahem „o *n* méně“ řešené sčítáním.

Příklad 27

Jana si našetřila 80 Kč. Bylo to o 20 Kč méně než Pavel. Kolik korun si našetřil Pavel?

<u>Grafické znázornění:</u>



Obrázek 9 – Číselné osy

V příkladu 27 je výraz „o 20 Kč méně“, což velmi často vede děti k použití operace odčítání. Tomuto typu úlohy říkáme také úloha s antisignálem, protože naznačuje opačnou početní operaci, než kterou je nutno použít. Grafické znázornění je v tomto příkladu velmi vhodné, protože pomůže dětem pochopit, že nemohou odčítat, ale musí sčítat.

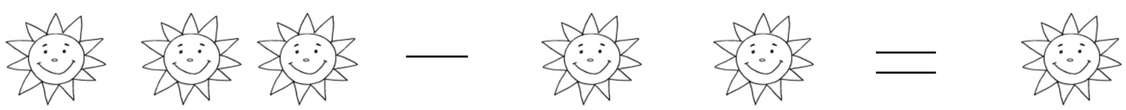
3.2 Úlohy využívající operace odčítání

V úlohách využívajících operace odčítání se nejčastěji objevují slova: ubrali, zmenšili, vrátili, odjelo, ubylo, odvezli, utratili, o *n* méně, o *n* více,… Není však vhodné používat mnemotechnickou pomůcku, která říká, že pokud je v textu úlohy obsažen vztah *více*, pak řešíme úlohu pomocí sčítání, a jestliže je uveden vztah *méně,* pak řešíme úlohu odčítáním (Blažková a kol. 2011).

3.2.1 Úlohy na určení rozdílu

Obrázek je nejčastějším grafickým znázorněním v prvním ročníku základní školy.

3 - 2 = 1



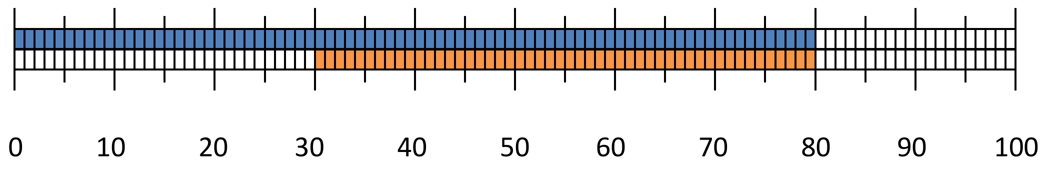
Obrázek 10 – Stanovení počtu předmětů

Při řešení slovních úloh je však nejčastějším znázorněním číselná osa.

Příklad 28

Jana měla v sáčku 80 bonbonů. Dětem rozdala 50 bonbonů. Kolik bonbonů Janě zbylo?

Grafické znázornění:



Obrázek 11 – Číselná osa

V tomto příkladu používáme ke znázornění pouze jednu osu, protože všechny bonbony patří Janě. Modrou barvou jsem označila původní počet bonbonů a oranžovou barvou počet bonbonů, který jí ubyl. Výsledek lze přečíst přímo na číselné ose, ale po dětech je vhodné požadovat výpočet.

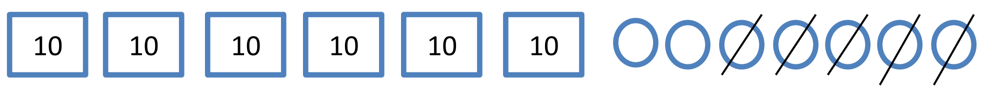
Pozn. 5: V praxi se mi příklady s bonbony velmi osvědčily. Děti zadání velmi rychle pochopí zřejmě proto, že s nimi mají všichni zkušenost. Konkrétně ve třídě, ve které učím, děti jednotlivě přejí každému spolužákovi, který má svátek nebo narozeniny a ten jim na oplátku rozdává bonbony.

3.2.2 Úlohy na zmenšení o daný počet jednotek

Příklad 29

V obchodě měli 67 autíček. Děti si koupily 5 autíček. Kolik autíček zůstalo v obchodě?

Grafické znázornění:



Obrázek 12 – Grafické znázornění pomocí zástupců předmětů

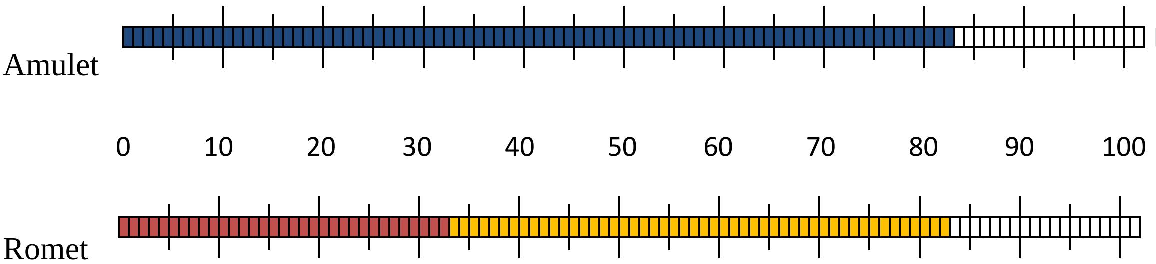
Při počítání s většími čísly je vhodné rozlišit v grafickém znázornění rozdílným symbolem pro desítky a pro jednotky. Znázornění je přehlednější. Přeškrtnutí určitého počtu symbolů dětem jasně naznačí, že mají použít při výpočtu operaci odčítání.

3.2.3 Úlohy na porovnávání vztahem „o *n* méně“.

Příklad 30

V prodejně mají 83 dětských kol značky Amulet. Kol značky Romet mají o 50 méně. Kolik kol značky Romet mají v prodejně?

Grafické znázornění:



Obrázek 13 – Číselné osy

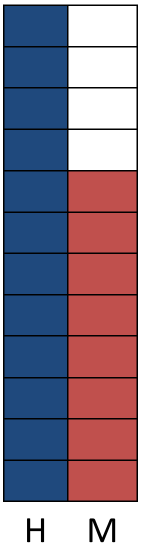
Při grafickém znázorňování v úlohách tohoto typu si musí dát žáci pozor, aby každý druh kol byl znázorněn na jiné číselné ose. Znázornění na jedné ose by bylo chybné. Barevné rozlišení dětem pomůže pochopit, že počet kol značky Romet vypočítají pomocí početní operace odčítání.

3.2.4 Úlohy charakterizované vztahem „o *n* více“ řešené odčítáním.

Příklad 30

Děti soutěžily ve sběru starého papíru. Honza nasbírat 12 kg, což bylo o 4 kg více než Marek. Kolik kilogramů starého papíru nasbíral Marek?

Grafické znázornění:



Obrázek 14 – Diagram

Tento typ příkladů, tzv. příklady s antisignálem, se v učebnicích matematiky na prvním stupni základní školy vyskytují jen sporadicky. Podle mého názoru je to škoda. Příklady tohoto typu nutí děti více přemýšlet a grafické znázornění jim může při řešení hodně pomoci. Aby žák pochopil, že navzdory výrazu „o 4 kg více“ nepoužije při výpočtu operaci sčítání, ale odčítání, musí úlohu správně pochopit, tedy proniknout do jádra problému. Tím dochází nejen k tomu, že žák úlohu správně vyřeší, ale také k rozvoji jeho tvořivého myšlení a jednání.

3.2.5 Úlohy na porovnávání rozdílem

Příklad 31

Jirka má 20 modelů letadel. Vojta má 12 modelů.

a) O kolik modelů má Jirka více než Vojta?

b) O kolik modelů má Vojta méně než Jirka?

Grafické znázornění:

Jirka oooooooooo oooooooooo

o_ více než o_ méně než

Vojta oooooooooo oo

Obrázek 15 – Grafické zobrazení pomocí kroužků

Uvedené grafické znázornění pomůže žákům najít odpověď jak na otázku a) tak na otázku b). Ve výše uvedených příkladech je také patrné, že mezi slovními úlohami řešenými pomocí sčítání a odčítání je určitá souvislost. Ta je dána tím, že odčítání je inverzní operací ke sčítání. Při řešení úloh na porovnávání vztahů „o několik více“, „o několik méně“, bychom měli vždy upozornit žáky na vzájemnou těsnou vazbu těchto vztahů. Např. Jestliže má Petr o 5 Kč více než Pavel, pak Pavel má o 5 Kč méně než Petr (Blažková a kol., 2011).

3.3 Úlohy využívající operace násobení

Výrazy, které se nejčastěji objevují v úlohách využívajících operace násobení jsou: *n* krát, *n* krát více, *n* krát méně.

3.3.1 Úlohy na určení součinu

(jako součtu několika stejných sčítanců)

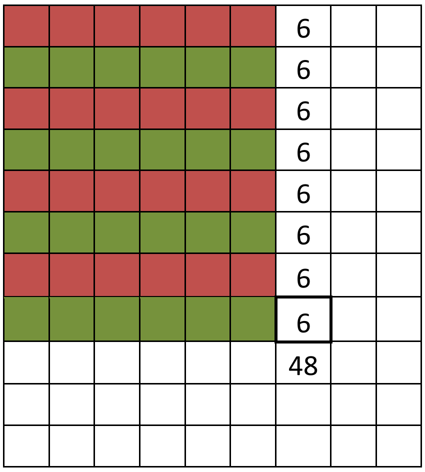
Při řešení úloh s využitím operace násobení se nejčastěji ke grafickému znázornění používá čtvercová síť.

Příklad 32

8 . 6 = 48

Tuto matematickou úlohu můžeme dětem vysvětlit pomocí grafického znázornění tak, že v jedné řadě je vybarveno 6 čtverečků, v 8 řadách je to 8 krát 6 čtverečků. Výsledek tedy určíme pomocí operace násobení (Blažková a kol., 2010).

Grafické znázornění:



Obrázek 16 – Čtvercová síť

Pozn. 6: Ve své praxi jsem zjistila, že naprostá většina dětí velmi ráda vybarvuje různé předtištěné obrázky. Proto si myslím, že zakreslování do čtvercové sítě je výborný způsob, jak dětem pomoci pochopit a procvičit si násobení jednociferným číslem.

V následující úloze je řešen problém se sklenicemi mléka. Podle mého názoru je vhodné, pokud to jde, používat při grafickém znázorňování takových zástupců předmětů, které reálný předmět svým vzhledem připomínají.

Příklad 33

Jirka vypije každý den 2 sklenice mléka. Kolik sklenic mléka vypije za 5 dní?

Grafické znázornění:

Obrázek 17 – Sklenice mléka

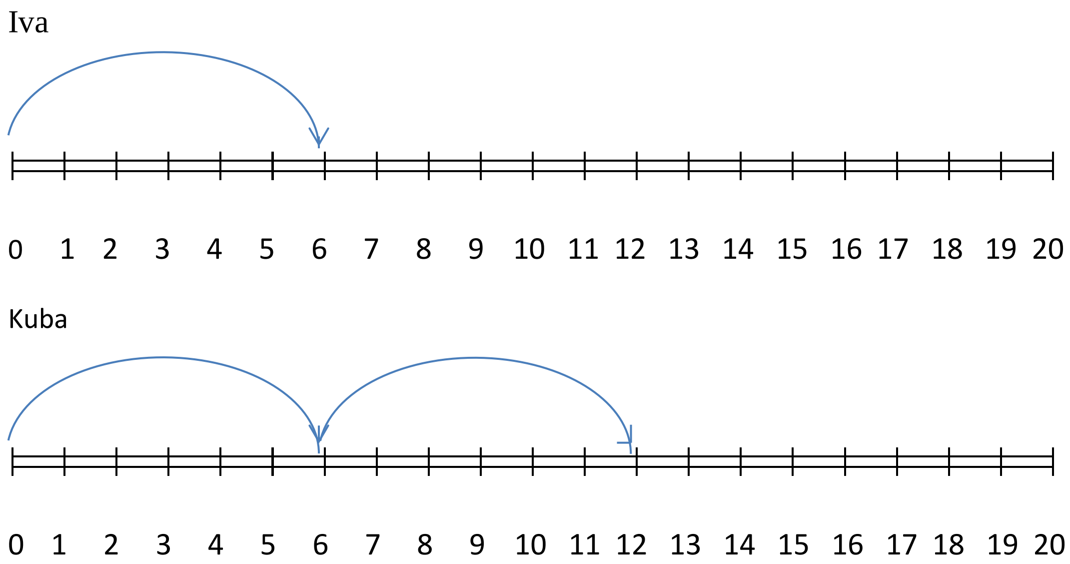
Při grafickém znázorňování dětem k pochopení problému pomáhá, když pro znázornění mohou použít obrázek daného předmětu. Výhodou je, když předmět dobře znají a běžně jej používají.

3.3.2 Úlohy charakterizované vztahem „*n* krát více“

Příklad 34

Janě je 6 let. Markovi je 2 krát více let. Kolik let je Markovi?

<u>Grafické znázornění:</u>



Obrázek 18 – Znázornění šipkami na číselných osách

Při zobrazování na číselných osách úlohu charakterizovanou vztahem „*n* krát více“ je vhodnější místo barevného rozlišené použít šipky. Tím je jasně naznačeno, kolikrát se daný počet zvýšil.

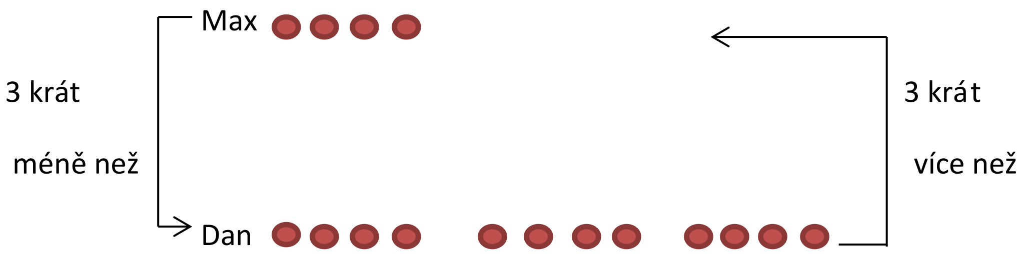
3.3.3 Úlohy charakterizované vztahem „*n* krát méně“ řešené násobením

Při řešení následující úlohy (úloha s antisignálem) je důležité, aby si děti uvědomily, že Max měl třikrát méně kuliček než Dan, tedy Dan měl třikrát více kuliček než Max.

Příklad 35

Max měl 4 kuličky, a to bylo 3 krát méně kuliček, než měl Dan. Kolik kuliček měl Dan?

Grafické znázornění:



Obrázek 19 – Znázornění kuliček pomocí barevných kroužků

Pro pochopení problému popsaného jako „*n* krát méně“ nebo „ *n* krát více“ se osvědčilo při grafickém znázorňování sdružovat zobrazené předměty do skupinek, jako je tomu na obrázku 19.

3.4 Úlohy využívající operace dělení

V úlohách využívajících operace dělení se nejčastěji setkáváme se slovy: rozdělit, vytvořit, v každém stejně, *n* krát méně než, *n* krát více než, kolik zbude,…

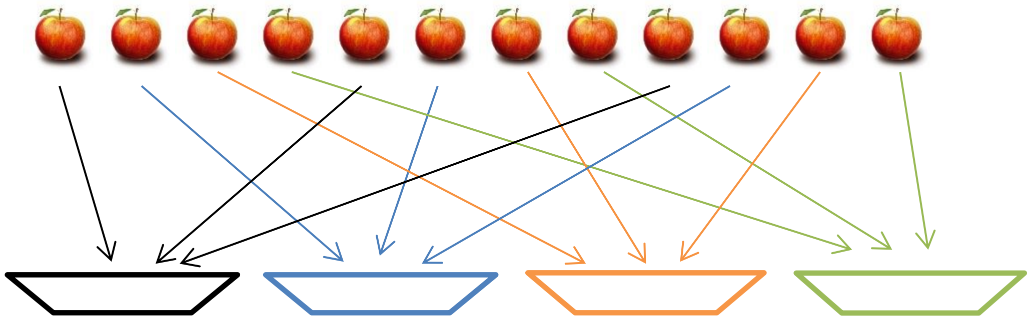
3.4.1 Úlohy na rozdělování na stejné části

Při operaci dělení je důležité vysvětlit dětem, že určité množství prvků budeme rozdělovat do několika skupin o stejném počtu prvků. V následujícím příkladu budeme rozdělovat 12 jablek do 4 talířů a to tak, že dáme do každého talíře jedno jablko, potom dáme do každého talíře další jablko a tak pokračujeme, až všechna jablka rozdělíme.

Příklad 36

Čtyřem dětem rozdala babička 12 jablek tak, že každé dítě dostalo na talíř stejně počet jablek. Kolik jablek dostalo každé dítě?

Grafické znázornění:



Obrázek 20 – Dělení množství prvků na předem daný počet skupin

Děti si nejprve nakreslí všech 12 jablek a pod ně talíře, jejichž počet odpovídá počtu dětí. Pak šipkami naznačují, jak babička postupně poděluje děti jablky, až jí žádné jablko nezůstane. Grafické znázornění navede děti na výpočet operací dělení.

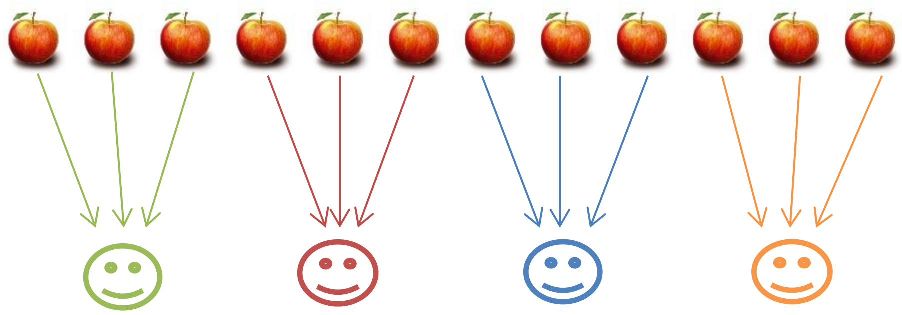
3.4.2 Úlohy na dělení podle obsahu

V tomto typu úloh budeme dělit počet prvků na skupiny po stejném, předem daném počtu prvků. Počet vytvořených skupin bude hledané číslo.

Příklad 37

Babička měla 12 jablek a rozdělovala je dětem po třech. Kolik dětí podělila?

Grafické znázornění:



Obrázek 21 – Dělení množství prvků na skupiny o předem daném množství prvků

Příklad 37 je podobný příkladu 36, ale rozdíl je v tom, že v prvním příkladu jsme znali počet dětí, které budou poděleny, kdežto v tomto příkladu počet dětí musíme vypočítat. Známe však počet jablek, které každé dítě dostane. Proto již v grafickém znázornění rozdělíme jablka do skupin po třech. Šipkami naznačíme, že každá skupina náleží jednomu dítěti.

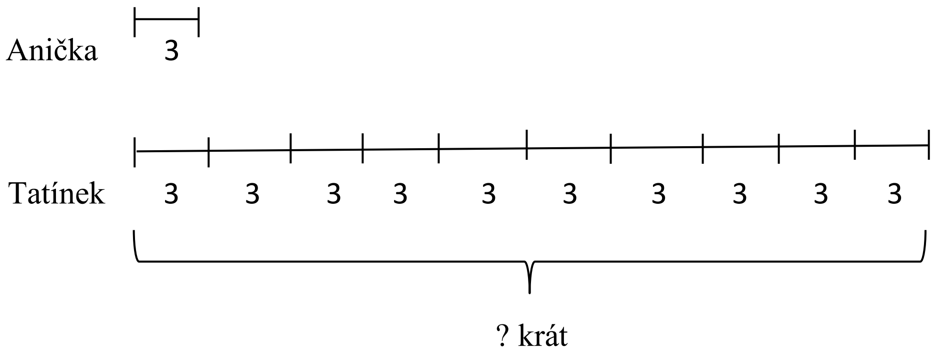
3.4.3 Úlohy na porovnávání podílem

V následujícím příkladu je ke grafickému znázornění použita úsečka. Toto grafické znázornění je velmi snadné, a přitom dostatečně vyjadřuje vztah mezi zadanými veličinami.

Příklad 37

Aničce jsou 3 roky, jejímu tatínkovi je 30 roků. Kolikrát je tatínek starší než Anička?

Grafické znázornění:



Obrázek 22 – Grafické znázornění úsečkami

Úsečka patří u dětí pro svou jednoduchost k oblíbeným znázorněním. Načrtnou si úsečku, která odpovídá svou velikostí věku Aničky a pak na další úsečku nanášejí původní úsečku tak dlouho, dokud stálým přičítáním její velikosti nedojdou k číslu 30. Z grafického znázornění děti poznají, že pro výpočet je vhodné použít operaci násobení.

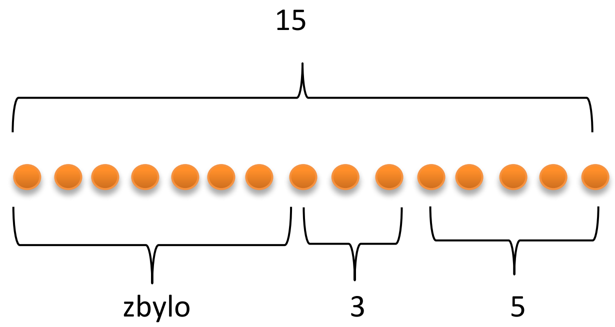
3.5 Řešení složených slovních úloh

Tematika složených slovních úloh je velmi rozmanitá, protože je určována především praxí. Podle Blažkové a kol. (2011) se však dají zjistit některé shodné znaky a podle těchto znaků řadit slovní úlohy do různých skupin. Takovým znakem může být buď způsob řešení úlohy (např. úlohy na porovnávání, úlohy využívající přímé úměrnosti, určení zlomku z daného čísla a další), nebo jejich tematika (např. úlohy o pohybu, o směsích nebo úlohy využívající aritmetického průměru). V následujících úlohách jsou zvolena v zadání úloh malá čísla, aby vynikl typ úlohy a princip jejího řešení.

Příklad 38

Maminka usmažila 15 koblihů. Jeník si vzal 5 a Magda 3 koblihy. Kolik koblihů zbylo?

Grafické znázornění:



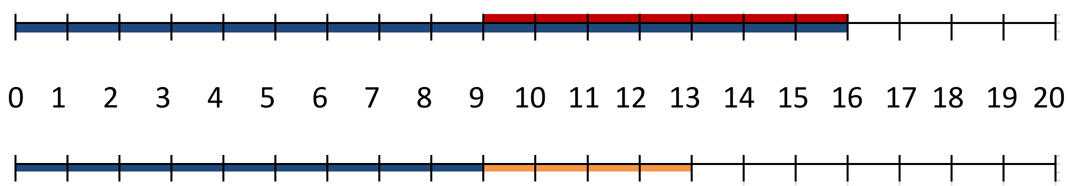
Obrázek 23 – Grafické znázornění pomocí malých barevných kruhů

Z grafického znázornění plyne, že úlohu můžeme řešit několika způsoby. Buďto jako dvě jednouché úlohy nebo jednu složenou. Pokud přistoupíme k řešení jako ke dvěma jednoduchým úlohám, musíme nejprve odečíst, kolik si vzala Magda a pak od počtu zbylých koblihů odečíst, kolik si vzal Jeník (na pořadí dětí nezáleží). Pokud budeme úlohu řešit jako úlohu složenou, odečteme od celkového množství koblihů celkové množství, které si děti vzaly.

Příklad 39

V autobusu cestovalo 16 osob. Na stanici 7 osob vystoupilo a 4 osoby nastoupily. Kolik lidí jelo potom v autobusu?

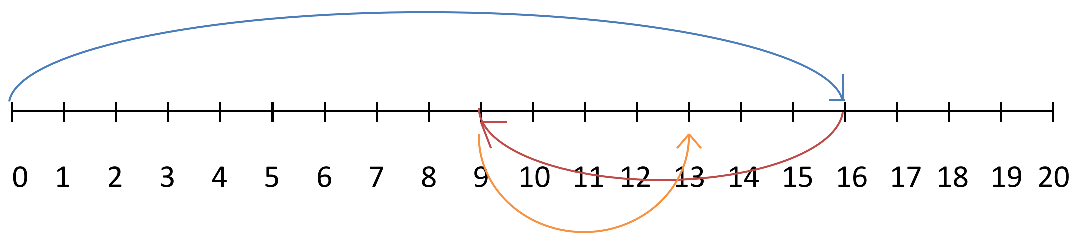
Grafické znázornění:



Obrázek 24 – Grafické znázornění pomocí dvou číselných os

Toto grafické znázornění vede žáky na řešení složené úlohy jako dvě úlohy jednoduché. To znamená, že žáci nejprve vypočítají odčítáním, kolik osob zůstalo v autobusu poté, co 7 osob vystoupilo (znázorněno na první číselné ose). Pak pomocí početní operace sčítání zjistí, kolik lidí cestuje v autobusu poté, co 4 lidé přistoupili (znázorněno na druhé číselné ose).

Grafické znázornění:



Obrázek 25 – Grafické znázornění pomocí jedné číselné osy a šipek

Pro řešení úlohy jako úlohy složené bych preferovala grafické znázornění uvedené na obrázku 25. Žáci pátého ročníku jsou již většinou schopni vytvořit podle zadání a grafického znázornění rovnici $x = 16 - 7 + 4$.

Příklad 40

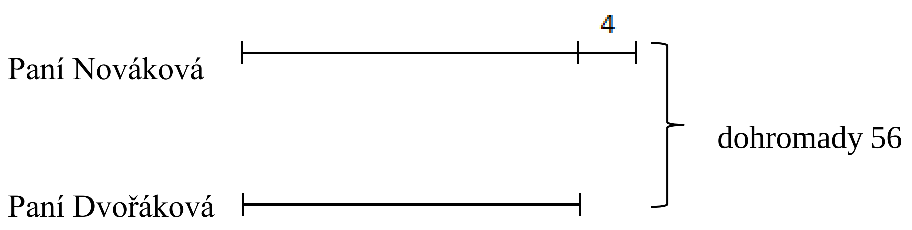
Paní Nováková a paní Dvořáková vyráběly plyšové medvídky. Dohromady jich vyrobily 56. Paní Nováková vyrobila o 4 hračky více než paní Dvořáková. Kolik korun dostala každá za svou práci, jestliže za výrobu jednoho medvídka obdrží 40 Kč ?

Tuto úlohu můžeme řešit dvěma způsoby. Každému způsobu odpovídá jiné grafické znázornění.

1. způsob:

Nejprve musí žáci zjistit, kolik medvídků vyrobila jednotlivá paní. Pak žáci snadno vypočítají odměnu pro každou z nich.

Grafické znázornění:

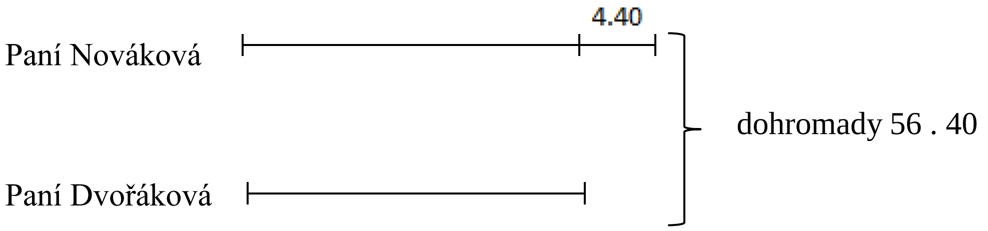


Obrázek 26 – Grafické znázornění pomocí úseček

2. způsob:

Nejprve žáci vypočítají odměnu za všechny medvídky a odměnu za 4 medvídky, o tuto částku bude mít paní Nováková více než paní Dvořáková. Z těchto údajů pak žáci určí odměnu pro každou z nich.

<u>Grafické znázornění:</u>



Obrázek 27 – Grafické znázornění pomocí úseček

Obě řešení jsou na stejném stupni obtížnosti a záleží na každém žákovi, pro kterou z možností se rozhodne.

Příklad 41

Cena za 4 židle byla 3 800 Kč. Kolik by stálo 7 takových židlí?

<u>Grafické znázornění:</u>

počet židlí	1	2	3	4	5	6	7
cena v Kč	950			3 800			

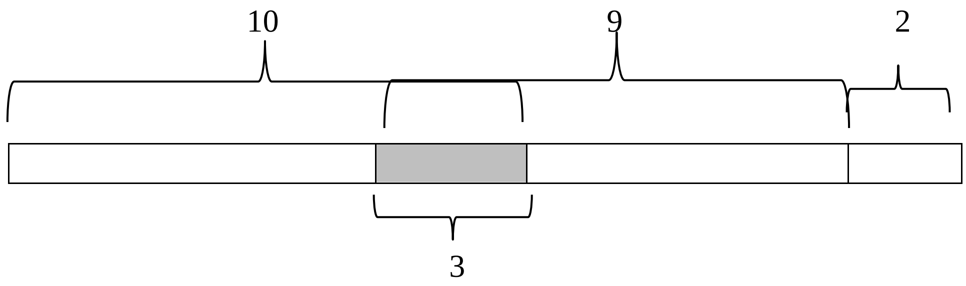
Obrázek 28 – Tabulka pro vyjádření přímé úměrnosti

Žáci vypočítají cenu jedné židle a postupně doplňují do tabulky ceny odpovídající zvyšujícímu se počtu židlí. Je důležité upozornit žáky, že kolikrát se zvětšil počet židlí, tolikrát se zvýšila celková cena. Tento jev nazýváme přímá úměrnost.

Příklad 42

Žáci 5.B chodí do kroužku kopané a do florbalu. Kopanou navštěvuje 10 žáků a florbal 9 žáků. Přitom 3 z nich navštěvují oba kroužky. Dva žáci nenavštěvují žádný kroužek. Kolik žáků je v 5.B?

Grafické znázornění:

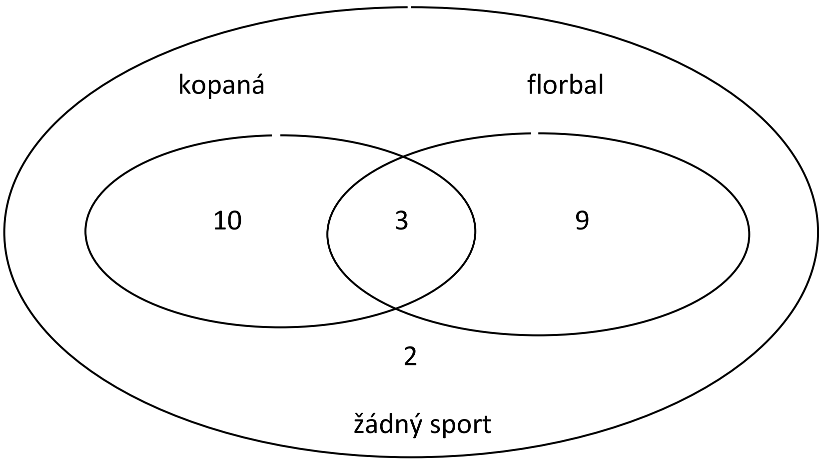


Obrázek 29 – Grafické znázornění pomocí obdélníků

Na obrázku 29 vidíme grafické znázornění pomocí obdélníků. Na obrázku 30 je stejná úloha znázorněná pomocí diagramu. Oba nákresy velmi usnadní pochopení daného problému.

Pozn. 7: Když jsem poprvé dala žákům 5. ročníku podobný příklad, nikdo z nich nevěděl, jak úlohu vyřešit. Poté, co jsme si udělali grafické znázornění, podstatná část žáků dovedla vytvořit rovnici a příklad vypočítat.

Grafické znázornění:



Obrázek 30 – Diagram

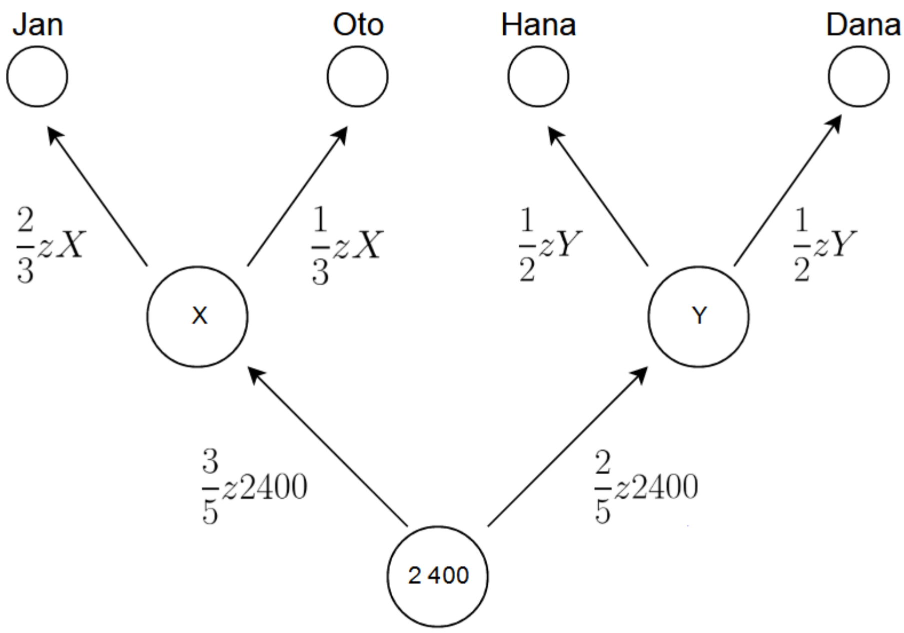
Příklad 43

Dědeček měl 4 vnoučata. Vnuky Jana a Otu a vnučky Hanu a Danu. Rozdělil jim 2 400 Kč tak, že chlapci dostali tři pětiny této částky a děvčata dvě pětiny této částky. Nejstarší Jan dostal dvě třetiny částky pro chlapce, Ota jednu třetinu této částky. Děvčata si svůj podíl rozdělila stejným dílem. Kolik korun dostal každý?

Při řešení této úlohy je podle mého názoru vhodné přejít přímo ke grafickému znázornění, protože zápis by byl pro žáka 1. stupně základní školy příliš komplikovaný. Nejvhodnějším způsobem znázornění se jeví znázornění pomocí stromu.

Pozn. 8: Tento příklad jsem zkusila dát žákům 5. ročníku během prvního pololetí. Abych zvýšila jejich motivaci, slíbila jsem dětem, že kdo z nich bez mojí pomoci příklad vypočítá, dostane jedničku. Ostatní nebudou hodnoceni žádnou známkou. Děti se s chutí pustily do řešení úlohy, ale z počtu 28 žáků se podařilo dojít ke správnému výsledku pouze dvěma žákům. Jednomu chlapci a jedné dívce. Když jsme si pak společně nakreslili grafické znázornění pomocí stromu, děti konstatovaly, že je to vlastně lehké.

Grafické znázornění:



Obrázek 31 - Grafické znázornění pomocí stromu.

EMPIRICKÁ ČÁST

4 Charakteristika empirické části

Empirická část mojí diplomové práce ověřuje, zda žáci používají při řešení matematických úloh grafické znázorňování. Za tímto účelem jsem vybrala do nestandardizovaného didaktického testu standardní typy úloh, které se v učebnicích matematiky příliš neobjevují. Tyto úlohy by měly žáky podněcovat a motivovat k projevu vlastní aktivity, originality a řešitelské flexibility.

Ráda bych takto podpořila dětskou zvídavost, aktivitu a kreativitu a poskytla tak žákům dostatek podnětů a prostor pro uplatnění vlastního tvořivého potenciálu.

4.1 Cíl

Cílem mojí diplomové práce bylo na základě analýzy žákovských řešení matematických úloh zjistit, zda žáci používají při řešení těchto úloh grafické znázorňování a zda jim to jejich řešení usnadňuje. Pro tuto analýzu jsem vytvořila test, který měl ukázat, jakým způsobem žáci umí tyto úlohy řešit. Postupy řešení jsem zpracovala pomocí metody analýza textu a provedla souhrnné vyhodnocení.

4.1.1 Didaktický test

Pro své výzkumné šetření jsem si vybrala žáky, které dobře znám, neboť jsem třetím rokem jejich třídní učitelkou. Podle mého názoru je grafické znázorňování při řešení matematických úloh dobrou pomůckou, proto se snažím žáky vést k tomu, aby byli s tímto způsobem práce seznámeni a dokázali jej používat. Samotné šetření proběhlo ve třech hodinách matematiky, z nichž každá trvala 45 minut. Testování proběhlo na začátku druhého pololetí školního roku 2018/2019.

Testovaní žáci navštěvují 5. ročník Základní školy ve Kvasicích. Ve třídě je 28 dětí, z toho 12 dívek a 16 chlapců. Dva žáci se vzdělávají podle individuálního vzdělávacího programu a jednomu z nich pomáhá při vzdělávání asistentka pedagoga. Devět žáků mělo odklad školní docházky. Při testování byli ve škole přítomni všichni žáci, což nebylo problém zajistit, protože nemocnost je v této třídě minimální. Samotnému testu nepředcházela žádná speciální příprava.

Výzkumným nástrojem pro mé šetření byl nestandardizovaný didaktický test, který jsem vytvořila z úloh z Matematického klokana a z Vybrané úlohy z klokanovy kapsy ze zahraničních soutěží (Novák, c2000). Před zahájením testu jsem žákům řekla, že se nejedná o test na známky, aby neměli obavy ze špatného hodnocení.

4.1.2 Soubor řešených úloh

1) *Sadař vysadil 10 stromů tak, že mezi každými dvěma stromy byla vzdálenost 4 metry. Jaká je vzdálenost mezi prvním a desátým stromem?*

Tato slovní úloha je jedna z nejjednodušších v tomto testu. Je založena jak na logickém úsudku, řešitel si musí uvědomit, že počet stromů a počet mezer není stejný, tak na zvládnutí početní operace násobení v oboru malé násobilky.

2) *Paní Nováková se vdávala v 18 letech a její manžel byl tehdy třicetiletý. Dnes je manžel dvakrát starší. Kolik je paní Novákové?*

V pořadí druhá slovní úloha se řadí mezi úlohy složené. Způsob řešení se odvíjí od logické úvahy řešitele. Buďto si řešitel uvědomí, že paní Novákové přibude stejný počet let jako panu Novákovi, nebo staví svou úvahu na skutečnosti, že věkový rozdíl manželů je stále stejný. Řešitel musí chápat, co znamená dvakrát starší a zvládat operaci sčítání a odčítání do sta.

3) *Petr je vyšší než Pavel, který je vyšší než Marie. Eva je vyšší než Pavel. Žofie je nižší než Petr a vyšší než Eva. Které z dětí je třetí v pořadí podle velikosti (třetí nejvyšší)?*

Při řešení této slovní úlohy řešitel nepoužívá žádnou početní operaci, ale je nutné ji řešit na základě logického úsudku. K bezchybnému řešení je potřeba důkladného pochopení textu, vztahů mezi jednotlivými subjekty vyskytujícími se v textu úlohy a správný úsudek. Úloha neklade vysoké nároky na osvojené matematické učivo. Schopnost logického úsudku a porozumění textu je nejdůležitější. Orientace v textu, dovednost smysluplně číst a následné přetvoření obsahu úlohy do vlastní myšlenkové konstrukce je nutnou podmínkou úspěšného řešení tohoto typu úlohy.

4) *100 turistů pojede kolem světa. 10 z nich neumí anglicky ani francouzsky, 75 turistů umí anglicky, 83 turistů umí francouzsky. Kolik turistů umí oba jazyky?*

Složená slovní úloha, která popisuje reálnou situaci, předpokládá u řešitele připravenost správně posoudit a analyzovat věcný i matematický obsah úlohy. K tomu mu může pomoci vhodné grafické znázornění např. pomocí diagramu. Následující operace sčítání a odčítání s přechodem přes 100 dovede řešitele ke správnému výsledku. V literatuře (Novák, 2013) jsou tyto úlohy označovány jako úlohy na sjednocení dvou množin s neprázdným průnikem.

5) *Jana upekla koláče. Když je chtěla rozdělit mezi své 2, 3 nebo 4 kamarády, vždy jí jeden koláč zbýval. Kolik koláčů Jana upekla?*

Tato úloha má více řešení, avšak pro interpretaci do reality vyhovují jen některá řešení. Žáci na 1. stupni ZŠ ještě neznají pojem nejmenší společný násobek, který by byl pro řešení této úlohy ideální. Mohou však hledat číslo, které je dělitelné 2, 3 a 4 tak, že tato čísla vynásobí mezi sebou. Mohou použít také metodu řízeného pokusu a omylu a hodnoty zapisovat do tabulky.

6) *Jana a Anna sbíraly pohlednice. Každá jich měla 100. K svátku dostala Jana od Anny několik pohlednic, takže jich má nyní o 10 více než Anna. Kolik pohlednic dostala Jana od Anny?*

Úloha je náročná na pochopení situace, při které dochází k růstu jedné hodnoty (počet pohlednic Jany) a současně ke zmenšování počtu pohlednic Anny. Při jednom předání pohlednice se změní dvě hodnoty. Tedy o kolik se zvětší počet pohlednic jednoho děvčete, o tolik se zmenší počet pohlednic druhého děvčete. Rozdíl v počtu pohlednic postupně roste, až se zastaví na hodnotě 10 a Jana dostane celkem 5 pohlednic.

7) *Ve třídě je 30 žáků. Kolik je ve třídě dívek, víme-li, že chlapců je 4krát více než dívek?*

Tato testová položka je reprezentována úlohou na rozdělování na stejné části. Základem správného řešení však musí být logická úvaha, díky níž řešitel zjistí, na kolik částí má celek rozdělit. V tomto konkrétním případě na 5 dílů. Jeden díl tvoří chlapci a děvčata tvoří další 4 díly.

8) *Pinocchio má nos dlouhý 3 cm. Pokaždé, když zalže, délka nosu se zdvojnásobí. Jak dlouhý bude jeho nos, když zalže šestkrát?*

Úloha o Pinocchiově nosu je složená úloha, kterou lze rozdělit na 6 jednoduchých úloh, při jejichž řešení použijeme operaci násobení. V každé následující jednoduché úloze násobíme výsledek předchozí úlohy dvěma, až postupně zjistíme konečnou délku Pinocchiova nosu.

9) *Polovina bochníku chleba stojí o 6 korun více než jeho čtvrtina. Kolik stojí celý bochník chleba?*

Poslední testovou položkou je úloha o zlomcích, při jejímž řešení musí řešitel určit celek z dané části. Tuto část je však nutné nejprve určit na základě svých znalostí, kdy ví, že jedna polovina je tvořena dvěma čtvrtinami. Pro úspěšné řešení úlohy musí také chápat výraz „ o *n* více“. Tím se úloha stává pro žáky 1. stupně ZŠ poměrně obtížná.

Testování proběhlo celkem ve třech vyučovacích hodinách. V každé této hodině jsem se snažila řadit úlohy od nejjednodušší po složitější, aby žáci nebyli zbytečně demotivováni hned na samém začátku testu. Na závěr každé hodiny jsme si řekli správná řešení úloh a diskutovali jsme o možnostech řešení. K některým úlohám jsme se vrátili i v dalších hodinách, protože děti řešení zajímalo a v daných vyučovacích hodinách na to nebyl prostor.

Při vyhodnocování jednotlivých úloh jsem rozlišila tři kategorie:

- řešení pomocí grafického znázornění,
- řešení bez grafického znázornění,
- bez pokusu o jakékoliv řešení.

První dvě kategorie jsem dále rozdělila na správná řešení a chybná. U obou kategorií jsem procentuálně vyjádřila úspěšnost řešení, abych mohla snadněji posoudit, zda žáci, kteří použili grafické znázornění, byli úspěšnější.

4.2 Analýza řešení úlohy č. 1

Sadař vysadil 10 stromů tak, že mezi každými dvěma stromy byla vzdálenost 4 metry. Jaká je vzdálenost mezi prvním a desátým stromem?

Žáci, kteří se účastnili mého výzkumného šetření, jsou všichni z venkovského prostředí. Proto jsem do didaktického testu vybrala úlohu, která je zasazena do prostředí, které všichni důvěrně znají. Mohli si tedy všichni představit danou situaci a úlohu správně vyřešit.

Vytvoření si odpovídající představy je totiž pro správné řešení nezbytné. Žáci si musí uvědomit, že za posledním stromem už žádná mezera není.

4.2.1 Předpokládaný postup úlohy č. 1

Řešení této úlohy je založeno na logickém úsudku. Tuto úlohu řadím mezi ty jednodušší, protože žáci se již s podobnými příklady setkali. Typickým příkladem, založeným na stejném principu, je úloha na určení počtu řezů, které musí dělník udělat při řezání prkna na určitý počet částí.

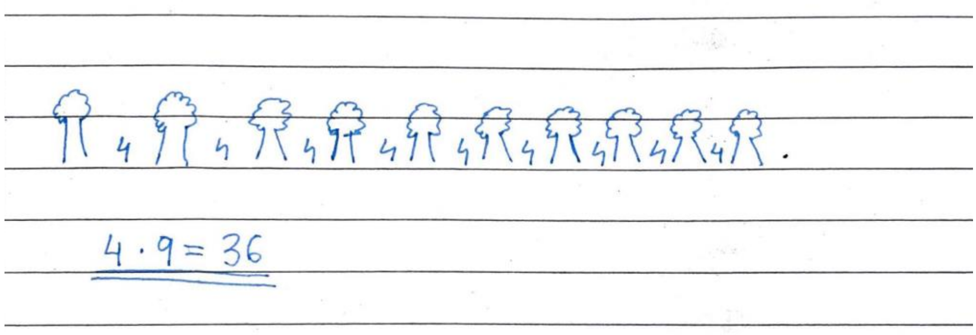
U této úlohy není nutné dělat zápis. Grafické znázornění je pro tento typ úlohy přímo ideální. Stačí zakreslit jen několik stromů, např. 3 a spočítat mezery mezi nimi. Na základě analogie pak vypočítat, kolik mezer bude mezi 10 stromy. Základní úvaha spočívá v tom, že si řešitel uvědomí, že mezi n stromy je vždy $n - 1$ mezer.

Situace v zadání úlohy číslo 1 je o to jednodušší, že se hovoří jen o 10 stromech a děti si tak mohou zakreslit všechny stromy a následně spočítat mezery. Nehrozí zde ani nebezpečí chyby, které by se mohli žáci dopustit při zakreslování většího počtu stromů a to takové chyby, že při rozdělení náčrtku do několika řádků, by mohli zapomenout na mezery mezi stromem na konci a na začátku řádku.

Poté, co žáci úspěšně spočítají mezery mezi stromy, následuje jednoduchá početní operace násobení (4 . 9 = 36), jejímž výsledkem je vzdálenost mezi prvním a posledním stromem. V tomto konkrétním případě je vzdálenost mezi prvním a posledním stromem 36 metrů.

4.2.2 Žákovská řešení úlohy č. 1

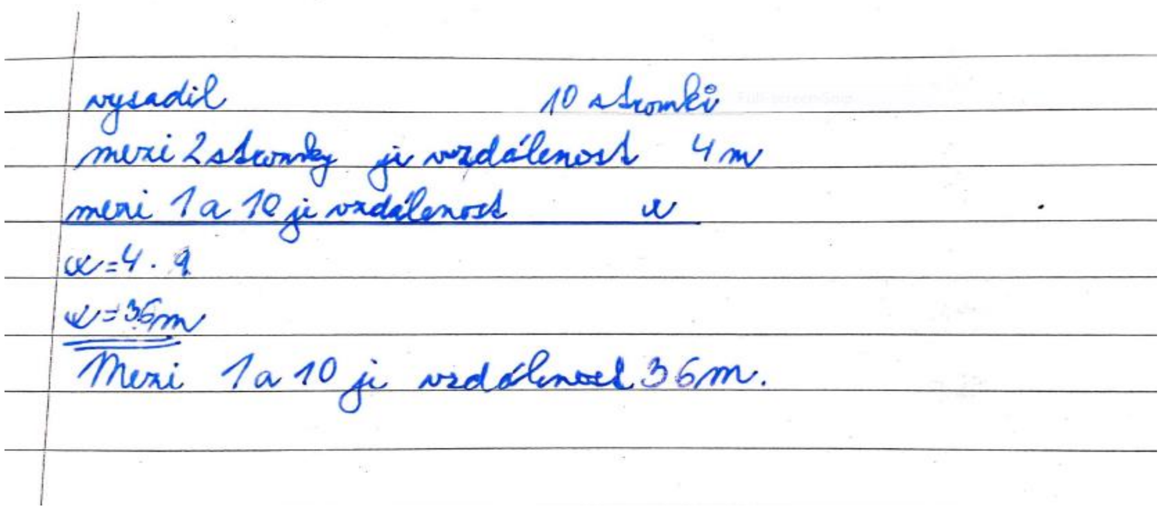
Úlohu se nepokusili řešit 2 žáci z 28. Osmnáct žáků použilo při řešení grafického znázornění a tato strategie se jim vyplatila, protože jejich úspěšnost byla 100 %. Počet žáků, kteří grafické znázornění nepoužili, byl 8 a jejich úspěšnost byla podstatně nižší, pouze 25 %. Na následujícím obrázku vidíme náčrtek, který žákyni pomohl při řešení úlohy č. 1.



Obrázek 32 – Grafické znázornění při řešení úlohy č. 1.

Žákyně si nakreslila stejný počet stromků, jaký byl dán v zadání úlohy, a pak spočítala mezery mezi jednotlivými stromky. Zjistila, že mezer je 9. Tím se vyhnula chybě, které se dopouštěli někteří žáci bez použití grafického znázornění, kteří se mylně domnívali, že mezer je 10. Pak už neměla problém s výpočtem vzdálenosti mezi prvním a posledním stromem.

V řešení znázorněném na obrázku 33 byl žák úspěšný i bez grafického znázornění. Po stručném zápisu vytvořil rovnici, kterou správně vyřešil.



Obrázek 33 – Řešení úlohy č. 1 bez grafického znázornění.

Žák si uvědomil, že přestože hovoříme o 10 stromech, mezer mezi nimi je jen 9. Toto si někteří žáci neuvědomili, což byla zásadní chyba, které se žáci dopouštěli. Bez velkého přemýšlení pak vynásobili vzdálenost 4 metry deseti a došli k chybnému výsledku 40 metrů. Naopak ti, kteří si úkol znázornili graficky, všichni došli ke správnému výsledku.

Přesné údaje o úspěšnosti či neúspěšnosti žáků při řešení této úlohy jsou uvedené v tabulce číslo 1.

Způsob řešení	pomocí grafického znázornění	bez grafického znázornění	nepokusilo se
Počet žáků	18	8	2
Počet správných řešení	18	2	0
Počet chybných řešení	0	6	0
Úspěšnost	100 %	25 %	0 %

Tabulka č. 1 - Vyhodnocení řešení úlohy č. 1.

4.3 Analýza řešení úlohy č. 2

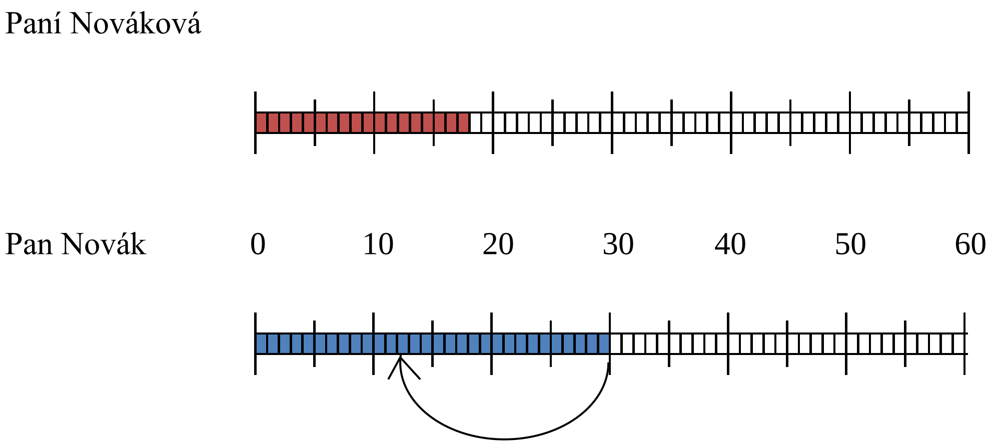
Paní Nováková se vdávala v 18 letech a její manžel byl tehdy třicetiletý. Dnes je manžel dvakrát starší. Kolik je paní Novákové?

Druhá testová úloha se týká věku. Porovnání věku dvou či více osob je běžná praxe, se kterou se děti již určitě setkaly. Podobné úlohy se vyskytují také v učebnicích matematiky.

4.3.1 Předpokládané řešení úlohy č. 2

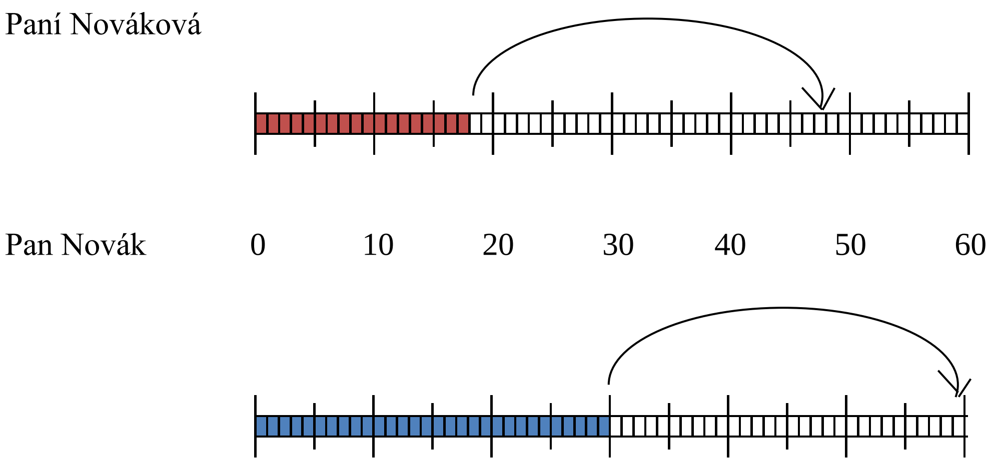
Pro řešení této složené slovní úlohy je nutné použít více početních operací. Na konkrétní operace vedou dvě odlišné logické úvahy. Je na řešiteli, pro jakou úvahu se rozhodne.

První úvaha je založena na skutečnosti, že věkový rozdíl mezi manželi je stále stejný. Abychom jej zjistili, použijeme operaci odčítání (30 – 18 = 12). Paní Nováková je tedy o 12 roků mladší než pan Novák. Dále pokračujeme v řešení tak, že vypočítáme stávající věk pana Nováka. Za tímto účelem použijeme operaci násobení (30 . 2 = 60). Následně odečteme věkový rozdíl 12 let (60 – 12 = 48) a tak vypočítáme věk paní Novákové.



Obrázek 34 – První možné grafické znázornění při řešení úlohy č. 1.

Druhá logická úvaha vychází ze skutečnosti, že paní Novákové přibylo od svatby tolik let jako panu Novákovi, to je 30 let. K věku, který měla paní Nováková, když se vdávala, přičteme 30 a vyjde nám, kolik roků má paní Nováková dnes (18 + 30 = 48).

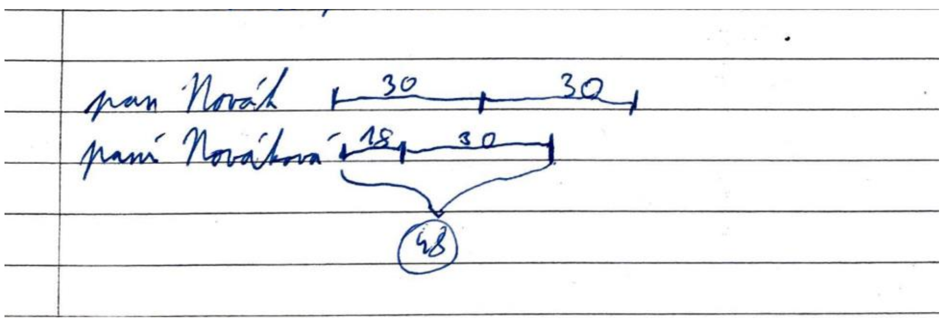


Obrázek 35– Druhé možné grafické znázornění při řešení úlohy č. 1.

4.3.2 Žákovská řešení úlohy č. 2

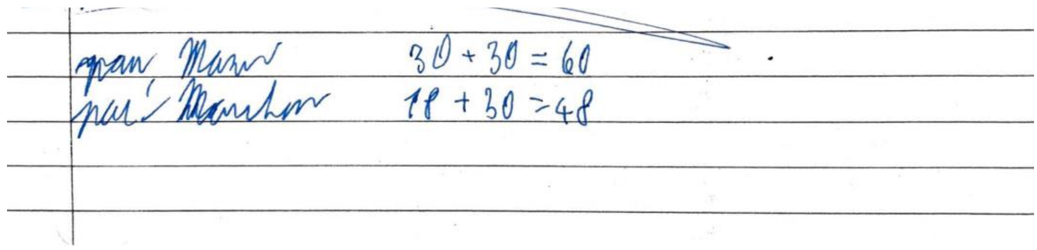
Úlohu číslo 2 vyřešilo celkem 17 žáků. Grafické znázornění použilo 14 žáků a jejich úspěšnost při řešení úlohy byla 85,71 %, 12 žáků se snažilo vyřešit úlohu pouze numericky. Jejich úspěšnost byla pouze 41,66 %. O jakékoliv řešení se nepokusili 2 žáci.

Žákyně, jejíž grafické znázornění vidíme na obrázku č. 36, určila řešení přímo z tohoto znázornění, aniž by použila některou z početních operací.



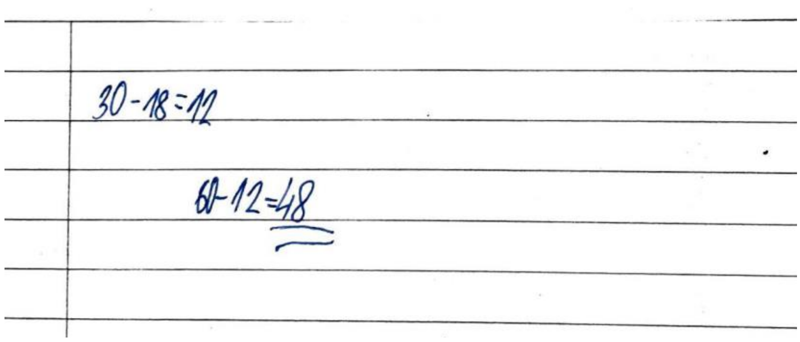
Obrázek 36 - Grafické znázornění při řešení úlohy č. 2.

Na obrázku 37 vidíme úspěšné řešení žáka, který grafické znázornění nepoužil a ke správnému výsledku dospěl pomocí operace sčítání. Žák správně usoudil, že jestliže panu Novákovi přibylo 30 let, stejný počet let musel přibýt i paní Novákové. Jen pro vysvětlení jeho neúhledného písma dodávám, že žák je dyslektik, ale v matematice žádné problémy nemá.



Obrázek 37 – Řešení úlohy č. 2 bez grafického znázornění pomocí operace sčítání.

Na následujícím obrázku vidíme řešení žákyně, která použila odlišný logický postup a z toho vyplývající opačnou početní operaci, než tomu bylo u žáka, jehož řešení je uvedeno výše. Správně usoudila, že věkový rozdíl manželů je stále stejný, proto si nejprve vypočítala, jaký byl věkový rozdíl mezi ní a jejím manželem v době sňatku. Zjistila, že věkový rozdíl byl roven 12. Pak toto číslo odečetla od dnešního věku manžela a tak dospěla ke správnému výsledku 48 let.



Obrázek 38 – Řešení úlohy č. 2 bez grafického znázornění pomocí operace odčítání.

V tomto příkladu bylo důležité, aby si žáci uvědomili, že i když je manžel dvakrát starší, u paní Novákové to neplatí. Text úlohy navádí žáky k použití operace násobení dvěma, ale ve skutečnosti musí přičíst paní Novákové stejný počet let jako panu Novákovi a to si mnozí žáci neuvědomili.

Někteří žáci automaticky vynásobili počet let paní Novákové dvěma a tím dospěli k chybnému výsledku 36 let. Úspěšnost žáků, kteří použili grafické znázornění, je podstatně vyšší, než těch, kteří grafické znázornění nepoužili. Přesné údaje jsou zapsány v tabulce č. 2

Způsob řešení	pomocí grafického znázornění	bez grafického znázornění	nepokusilo se
Počet žáků	14	12	2
Počet správných řešení	12	5	0
Počet chybných řešení	2	7	0
Úspěšnost	85,71 %	41,66 %	0 %

Tabulka č. 2 – Vyhodnocení řešení úlohy 2.

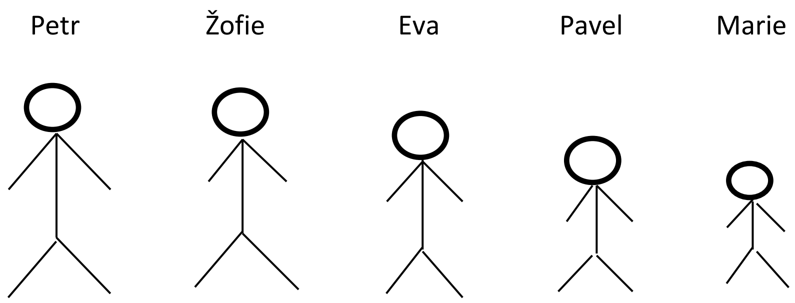
4.4 Analýza řešení úlohy č. 3

Petr je vyšší než Pavel, který je vyšší než Marie. Eva je vyšší než Pavel. Žofie je nižší než Petr a vyšší než Eva. Které z dětí je třetí v pořadí podle velikosti (třetí nejvyšší)?

V hodinách tělesné výchovy jsem si všimla, že se děti rády mezi sebou poměřují. Při nástupu si pečlivě hlídají, jestli náhodou nepředrostli svého souseda v řadě a nemají se posunout o jedno místo dopředu. Proto jsem vybrala tuto úlohu a myslím si, že je svým obsahem může zaujmout.

4.4.1 Předpokládané řešení úlohy č. 3

Tato úloha je náročná na pochopení textu. V úloze se nepoužívají žádné matematické operace, ale je zde velké množství údajů a vztahů, které je nutné pochopit a nějakým způsobem zpracovat. Proto není vhodné psát zápis. V podstatě by žáci jen opisovali zadání úlohy a v ničem by jim to nepomohlo. Úloha je ideální na použití grafického znázornění. Je však nutné, aby si při zakreslování postaviček, nechávali žáci mezi postavičkami dostatek prostoru na případné dokreslení další postavičky. Pokud děti nakreslí postavičky hned vedle sebe, zjistí, že nemají kam dokreslovat další postavičku a s největší pravděpodobností začnou gumovat. Mezi tím zapomenou souvislosti a musí začít znovu od úplného začátku. Nad, nebo pod každou postavičku je nutné poznamenat její jméno, aby mohl žák na závěr odpovědět správně na otázku v úloze. Z náčrtku pak snadno vyčte, že třetí nejvyšší je Eva.



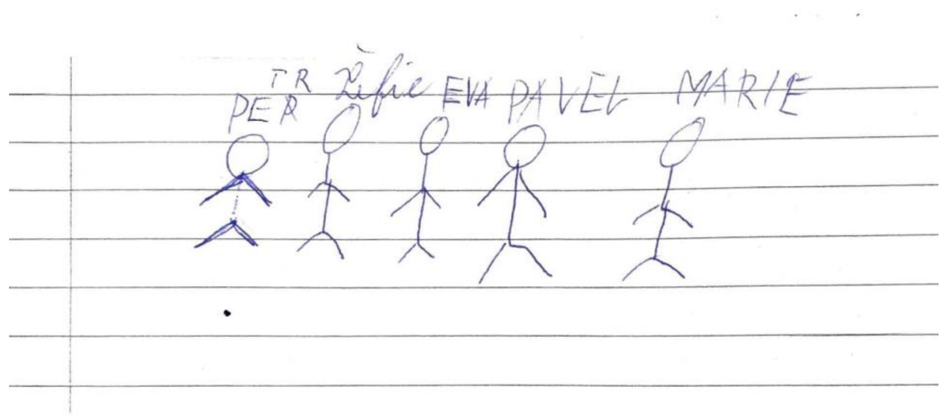
Obrázek 39 – Předpokládané grafické znázornění při řešené úlohy č. 3

4.4.2 Žákovská řešení úlohy č. 3

Vyřešit tuto úlohu se pokusilo celkem 25 žáků. Čtyři žáci se pokusili vyřešit úlohu bez náčrtku, ale jejich pokusy nebyly úspěšné. Ani jeden z nich pořadí správně neurčil. U žáků, kteří použili grafické zobrazení, byla úspěšnost 47,61 %.

Žáci se správně pokoušeli seřadit děti podle velikosti pouze na základě logického úsudku, ale někteří se zapletli do složitých vztahů, své pokusy o řešení několikrát přeškrtli nebo vyzmizíkovali a ke správnému řešení vůbec nedošli. Pro tuto úlohu je grafické znázornění ideální. Ale ne všichni žáci, kteří se o řešení tímto způsobem pokusili, byli úspěšní.

Na obrázku 40 vidíme, že žákyně při zobrazování nedodržela správný poměr výšky postav, ale správně postavám přiřadila jména s předpokladem, že vlevo je nejvyšší osoba a vpravo nejnižší.



Obrázek 40 - Grafické znázornění při řešení úlohy č. 3.

Přesné údaje o žákovských řešeních jsou zapsány v tabulce č. 3.

Způsob řešení	pomocí grafického znázornění	bez grafického znázornění	nepokusilo se
Počet žáků	21	4	3
Počet správných řešení	10	0	0
Počet chybných řešení	11	0	0
Úspěšnost	47,61 %	0 %	0 %

Tabulka č. 3 – Vyhodnocení řešení úlohy 3.

4.5 Analýza řešení úlohy č. 4

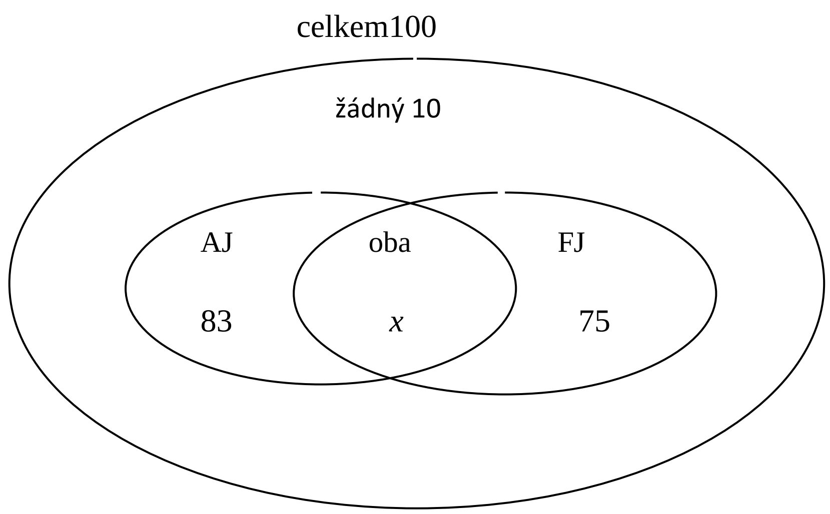
100 turistů pojede kolem světa. 10 z nich neumí anglicky ani francouzsky, 75 turistů umí anglicky, 83 turistů umí francouzsky. Kolik turistů umí oba jazyky?

Většina žáků se svými rodiči cestuje v létě nebo i v zimě na dovolenou do zahraničí. Jeden žák dokonce jezdí několikrát do roka do zahraničí hrát na hokejové turnaje. Proto jsem vybrala do didaktického testu také úlohu s tematikou cestování a s tím související znalostí cizích jazyků. Se situací, že někteří lidé znají více jazyků, se děti setkávají většinou u svých starších sourozenců nebo kamarádů a sami se s ní setkají na 2. stupni ZŠ, když jim k výuce angličtiny přibude ještě další cizí jazyk.

4.5.1 Předpokládané řešení úlohy č. 4

Žáci by pro řešení této úlohy měli zvolit analytickou metodu, a to tak, že vyberou podstatné informace ze zadání a zapíší do stručného zápisu. Pak přistoupí k samotnému řešení. Nejprve použijí operaci odčítání, aby zjistili, kolik turistů umí alespoň některý z jazyků, případně oba jazyky (100 – 10 = 90). Po provedení této operace zjistí, že jazykově vybaveno je 90 turistů. Další operací, kterou by měli žáci použít je operace sčítání, při níž sečtou dohromady turisty, kteří umí anglicky s těmi, kteří umí francouzsky (75 + 83 = 158). Výsledné číslo je samozřejmě větší než 90, protože někteří turisté umí oba jazyky, proto musí následovat operace odčítání, při níž žáci zjistí, kolik turistů umí oba jazyky (158 – 90 = 68).

Další způsob, jak vyřešit tuto úlohu, bylo řešení s použitím grafického znázornění a následné použití analyticko – syntetické metody. Vhodný diagram, např. ten, který je na obrázku 41, přivede žáky na vytvoření rovnice 100 = 10 + 83 + 75 – *x*. S řešením jednoduchých rovnic se žáci 5. ročníku ZŠ již setkali, takže je možné zvolit i tento způsob řešení.

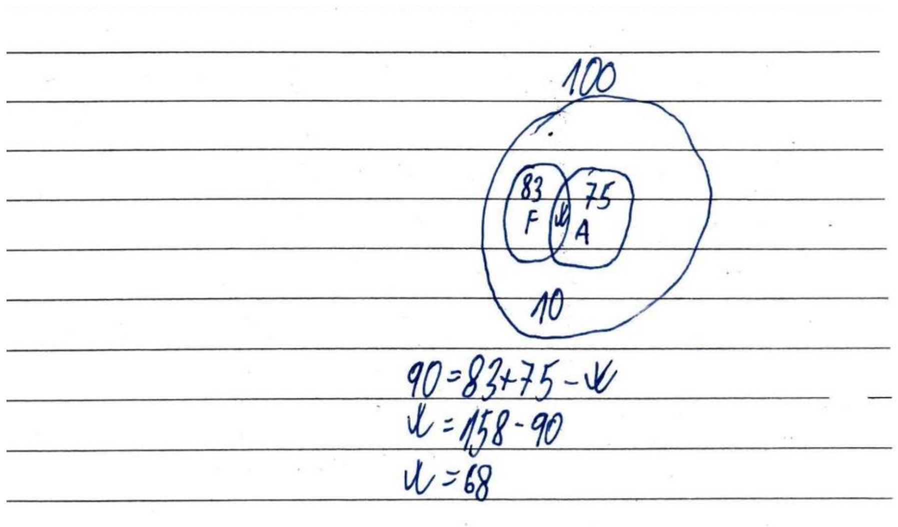


Obrázek 41 – Předpokládané grafické znázornění při řešení úlohy č.4.

4.5.2 Žákovská řešení úlohy č. 4

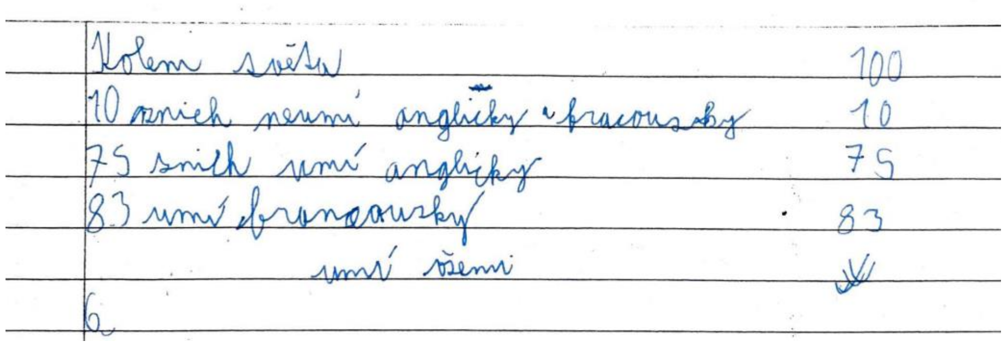
Zadanou úlohu se pokusilo řešit celkem 19 žáků, z toho 8 bez grafického znázornění a 11 s pomocí grafického znázornění. Z těch, kteří grafické znázornění nepoužili, nebyl úspěšný nikdo. Naopak ti, kteří grafické znázornění použili, byli úspěšní v 27,27 %.

Žákyně, jejíž způsob řešení můžeme vidět na obrázku 42, použila přímo grafickou strategii bez zápisu informací ze zadání. Na základě tohoto znázornění žákyně sestavila rovnici o jedné neznámé a tu úspěšně vyřešila.



Obrázek 42 - Grafické znázornění při řešení úlohy č. 4.

Naopak na obrázku 43 vidíme zápis informací, který jsou žáci zvyklí dělat při řešení běžných slovních úloh z učebnic matematiky. Je vidět, že žák porozuměl zadání, ale s dalším postupem si již nevěděl rady.



Obrázek 43 – Zápis k úloze č. 4 bez řešení.

Tato úloha dělala žákům největší problémy. Většina žáků úlohu pochopila, ale nevěděli, jakým způsobem ji řešit. Někteří z nich si udělali zápis, ale ten jim nestačil ke zdárnému vyřešení úlohy. Nejlépe si vedli ti, kteří si informace ze zadání zapsali do diagramu a z něj pak odvodili matematickou rovnici.

Způsob řešení	pomocí grafického znázornění	bez grafického znázornění	nepokusilo se
Počet žáků	11	8	9
Počet správných řešení	3	0	0
Počet chybných řešení	8	0	0
Úspěšnost	27,27 %	0 %	0 %

Tabulka č. 4 – Vyhodnocení řešení úlohy 4.

4.6 Analýza řešení úlohy č. 5

Jana upekla koláče. Když je chtěla rozdělit mezi své 2, 3 nebo 4 kamarády, vždy jí jeden koláč zbýval. Kolik koláčů Jana upekla?

V naší škole se na 2. stupni vyučuje předmět vedení domácnosti a proto je škola vybavena kuchyňkou. Tuto kuchyňku využívají i děti 1. stupně v rámci výuky pracovních činností a velmi rády tam připravují jednoduché pokrmy. Proto si myslím, že by tato úloha mohla děti zaujmout.

4.6.1 Předpokládané řešení úlohy č. 5

Tato úloha je v mém výzkumném šetření jediná, která má více řešení. Nejjednodušší způsob, jak úlohu vyřešit, je najít společný násobek čísel 2, 3 a 4 a pak k němu přičíst 1 (2 . 3 . 4 = 24, 24 + 1 = 25). Pokud však žáci použijí při řešení úlohy zápis do tabulky, uvidí, že číslo 25 není prvním řešením, na které v tabulce narazí.

Metodou řízeného pokusu a omylu, budou dosazovat do tabulky čísla, která odpovídají počtu koláčů a pak budou tato čísla postupně dělit 2, 3 a 4 a pozorovat, pro které číslo platí, že při dělení zůstává vždy zbytek 1. První takové číslo je číslo 13, pak následují postupně čísla vždy o 12 větší. Takto bychom mohli pokračovat až do nekonečna, což z praktického hlediska nemá význam.

počet koláčů *a*	5	6	7	8	9	10	11	12	13
***a* : 2**	2 zb. 1	3	3 zb. 1	4	4 zb. 1	5	5 zb. 1	6	6 zb. 1
***a* : 3**	1 zb. 2	2	2 zb. 1	2 zb. 2	3	3 zb. 1	3 zb. 2	4	4 zb. 1
***a* : 4**	1 zb.1	1 zb.2	1 zb. 3	2	2 zb.1	2 zb. 1	2 zb. 3	3	3 zb. 1

Obrázek 44 – Tabulka znázorňující možné řešení úlohy č. 5.

4.6.2 Žákovská řešení úlohy č. 5

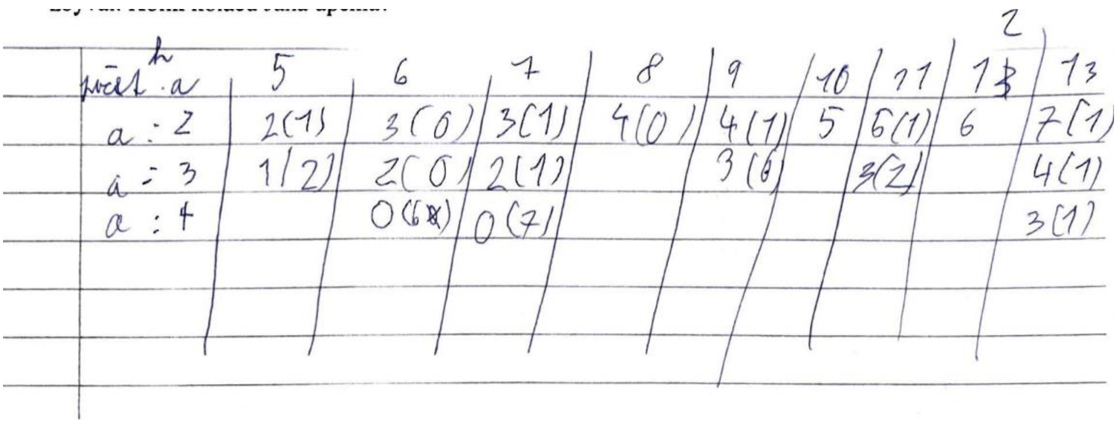
Do řešení této úlohy se nepustili celkem 4 žáci. Devět žáků se pokusilo řešit úlohu numericky bez použití jakéhokoliv grafického znázornění, 15 žáků zvolilo grafickou strategii. Z nich bylo úspěšných 60 % žáků.

Tento příklad se na první pohled dětem jevil jako jednoduchý, ale když se pustily do řešení, zjistily, že to tak snadné není. Jeden z žáků bez písemného zápisu vymyslel řešení, že Jana upekla jeden koláč. Ve své podstatě měl pravdu, ale pak by bylo v úloze zbytečné mluvit o 2, 3 a 4 kamarádech. Stačilo by napsat, že kamarádů bylo více než jeden.

Další žák začal řešit úkol tak, že vzájemně vynásobil číslo 2, 3 a 4, ale myšlenku nedokázal dotáhnout do konce, protože ho nenapadlo přičíst k výsledku 24 číslo 1.

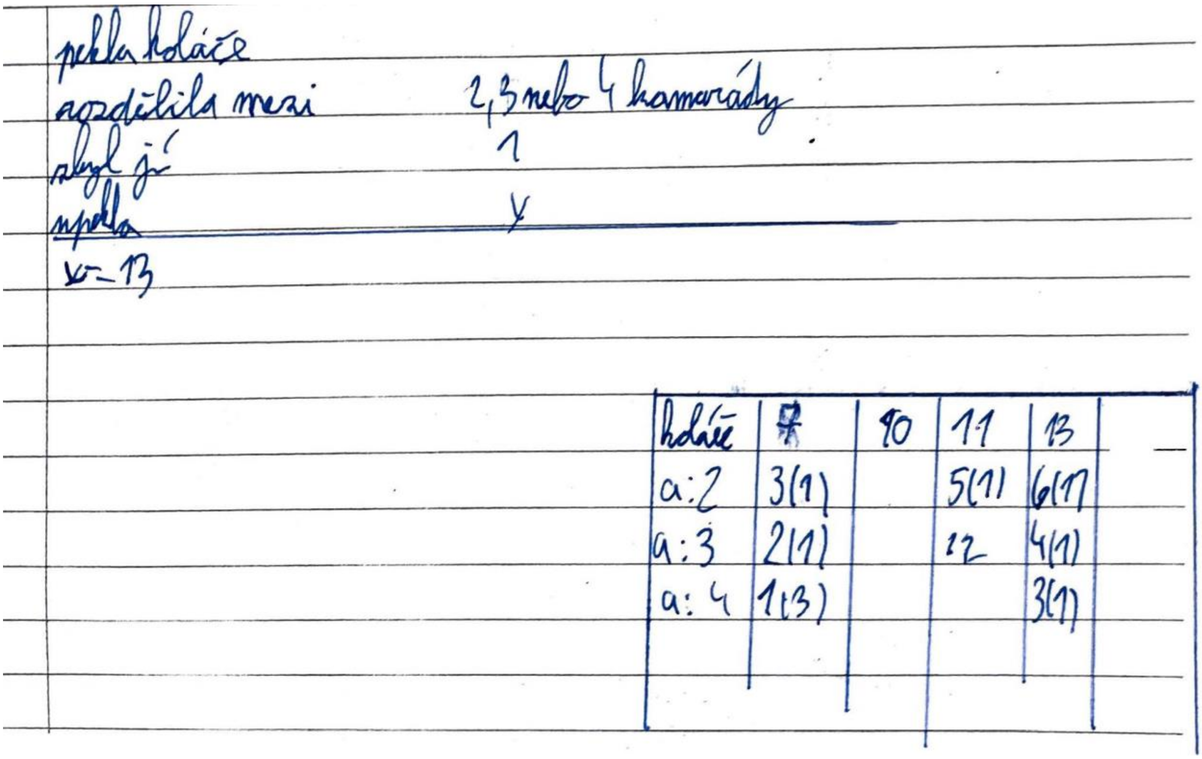
K úspěšnému řešení vedla u žáků pouze myšlenka vytvořit tabulku a metodou řízeného pokusu a omylu, dojít ke správnému výsledku 13. Nikdo z nich dál již nepokračoval a nikoho tedy nenapadla myšlenka, že úloha může mít více řešení.

Na obrázku 45 vidíme způsob řešení úlohy pomocí tabulky, kdy žák zapisoval do tabulky postupně všechna čísla od nejmenšího, které přicházelo v úvahu, až po číslo 13, které, jak zjistil, splňovalo požadované vlastnosti.



Obrázek 45 – Grafické znázornění při řešení úlohy č. 5.

Na obrázku 46 vidíme postup řešení žákyně, která vytvořila nejprve zápis, a protože si nevěděla rady se sestavením rovnice, zkusila vytvořit tabulku a ta ji skutečně přivedla ke správnému řešení. Zajímavé pro mne je to, že v zápise žákyně označila počet upečených koláčů jako *x*, ale v tabulce jako *a*. Domnívám se, že jde o zvyk, podle kterého jsou žáci zvyklí značit neznámou v rovnici jako *x* a v tabulce jako *a*, *b* nebo *c*. Žákyně do tabulky nevypisovala postupně všechna čísla, ale zřejmě dle vlastního úsudku hned některá čísla vyloučila a ta do tabulky vůbec nenapsala.



Obrázek 46 – Zápis a grafické znázornění při řešení úlohy č. 5.

Způsob řešení	pomocí grafického znázornění	bez grafického znázornění	nepokusilo se
Počet žáků	15	9	4
Počet správných řešení	9	0	0
Počet chybných řešení	6	0	0
Úspěšnost	60 %	0 %	0 %

Tabulka č. 5 – Vyhodnocení řešení úlohy 5.

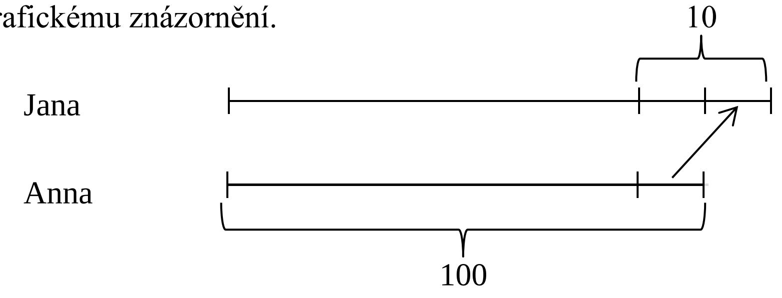
4.7 Analýza řešení úlohy č. 6

Jana a Anna sbíraly pohlednice. Každá jich měla 100. K svátku dostala Jana od Anny několik pohlednic, takže jich má nyní o 10 více než Anna. Kolik pohlednic dostala Jana od Anny?

Sbírání rozličných předmětů patří mezi dětské zájmy snad od nepaměti. Kdysi to byly kuličky, později céčka a dnes kartičky všeho druhu, například kartičky šmoulů. Výměny nasbíraných trofejí jsou běžnou praxí mezi dětmi, proto si myslím, že úloha o sbírání pohlednic může být pro děti zajímavá.

4.7.1 Předpokládané řešení úlohy č. 6

Úlohu lze řešit několika způsoby. Nejjednodušším způsobem je přistoupit přímo ke grafickému znázornění.



Obrázek 47 – Možné grafické znázornění při řešení úlohy č. 6.

Z grafického znázornění se dá snadno pochopit, že má-li být rozdíl v počtu pohlednic Jany a Anny 10, musí dát Anna Janě polovinu tohoto rozdílu (10 : 2 = 5).

Dalším možným způsobem, jak úlohu řešit, je použití metody řízeného pokusu a omylu. Vypočítané hodnoty pak zapisovat do tabulky a pozorovat, kdy se bude rozdíl v počtu známek obou děvčat rovnat 10.

Anna dala Janě	0	1	2	3	4	5
Anna má	100	99	98	97	96	95
Dana má	100	101	102	103	104	105
rozdíl	0	2	4	6	8	**10**

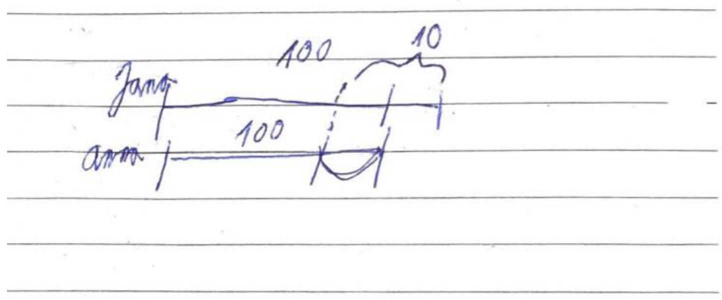
Obrázek 48 – Možné řešení úlohy č. 6 pomocí tabulky

4.7.2 Žákovská řešení úlohy č. 6

Do řešení této úlohy se zapojilo celkem 27 žáků z 28. Grafické znázornění použilo pouze 5 žáků, ale všichni byli úspěšní. Řešení s pomocí tabulky nepoužil nikdo. Bez grafického znázornění řešilo úlohu 22 žáků, ale úspěšných bylo pouze 31,81 %.

S podobnými úlohami se již děti setkávaly v učebnicích matematiky. Myslím, že proto necítily potřebu grafického znázornění, ale spíše se snažily vzpomenout si, jak podobné příklady řešily v minulosti. Většina žáků řešila úlohu logickým úsudkem a bez velkého přemýšlení přímo napsala výsledek. Tím si vysvětluji častou chybovost, které se dopustili žáci tím, že jen přičetli počet darovaných pohlednic k počtu pohlednic, které již Jana vlastnila. Neuvědomili si, že se tím snížil počet pohlednic, které vlastnila Anna o 10 a vzniklý rozdíl v počtu pohlednic není 10, jak bylo požadováno v zadání úlohy, ale je 20. Ti žáci, kteří si úlohu znázornili graficky, se této chyby nedopustili.

Grafické znázornění, které je na obrázku 42, žák nedotáhl do konce, ale do odpovědi napsal správný výsledek, který si z obrázku vyvodil.



Obrázek 49 – Grafické znázornění při řešení úlohy č. 6.

Způsob řešení	pomocí grafického znázornění	bez grafického znázornění	nepokusilo se
Počet žáků	5	22	1
Počet správných řešení	5	7	0
Počet chybných řešení	0	15	0
Úspěšnost	100 %	31,81 %	0 %

Tabulka č. 6 – Vyhodnocení řešení úlohy 6.

4.8 Analýza řešení úlohy č. 7

Ve třídě je 30 žáků. Kolik je ve třídě dívek, víme-li, že chlapců je 4krát více než dívek?

Do didaktického testu jsem se rozhodla dát také úlohu ze školního prostředí. Běžně se děti dělí při různých činnostech na skupiny a porovnávají, zda je ve všech skupinách stejný počet dětí. V úloze však výraz 4krát více, se kterým se běžně při rozdělování do skupin ve školní praxi nesetkávají.

4.8.1 Předpokládané řešení úlohy č. 7

Úlohu můžeme řešit dvěma způsoby. Jako první bych zmínila možnost, rozdělit si celkový počet žáků na pět stejných dílů, protože je-li chlapců 4krát více než dívek, je celek tvořen pěti stejnými částmi. Pomocí operace dělení zjistíme, kolik žáků je v jedné takové skupině (30 : 5 = 6). Počet žáků v této skupině odpovídá přímo počtu dívek ve třídě. Dívek je tedy 6. Pro kontrolu spočítáme kolik je ve třídě chlapců (6 . 4 = 24) a dále zkontrolujeme početní operací sčítání, zda součet dívek a chlapců odpovídá číslu třicet (24 + 6 = 30).

Druhý způsob řešení úlohy je pomocí tabulky, kdy dosazujeme potupně se zvětšující počet dívek a jim odpovídající počet chlapců a všech dětí ve třídě. Když u počtu všech dětí dostaneme číslo 30, z tabulky vyčteme počet dívek a můžeme napsat přímo odpověď na slovní úlohu.

počet dívek	1	2	3	4	5	**6**
počet chlapců	4	8	12	16	20	**24**
celkem	5	10	15	20	24	**30**

Obrázek 50 – Možné znázornění pomocí tabulky při řešení úlohy č. 7.

4.8.2 Žákovská řešení úlohy č. 7

Bez grafického znázornění se pokusilo úlohu vyřešit 14 žáků. Nikdo z nich však ke správnému řešení nedošel. 11 žáků se pokusilo vytvořit tabulku, ale jen 8 z nich ji dokázalo správně vyplnit. Úspěšnost žáků byla 72 %.

Při řešení této úlohy se děti dopouštěly relativně hodně chyb. Nejčastější chybou bylo to, že po přečtení úlohy, žáci použili operaci dělení a to tak, že celkový počet žáků podělili číslem 4. Došli k číslu 7 a zjistili, že počet chlapců by v tomto případě byl 23, což není číslo4krát větší než 7. Zde končila většina neúspěšných řešitelů. Ani jednoho řešitele nenapadla myšlenka rozdělit 30 žáků na 5 skupin, z nichž 1 skupina jsou děvčata a 4 skupiny chlapci.

Dva žáci dokonce na základě informace 4krát více vynásobili číslo 30 číslem 4. Výsledek se jim však jevil nelogický, tak nenapsali žádnou odpověď a o jiný způsob řešení se již nepokusili.

Z tabulky číslo7 můžeme vyčíst, že ani jeden žák nedokázal vyřešit úlohu bez toho, aniž by si vytvořil tabulku.

Způsob řešení	pomocí grafického znázornění	bez grafického znázornění	nepokusilo se
Počet žáků	11	14	3
Počet správných řešení	8	0	0
Počet chybných řešení	3	14	0
Úspěšnost	72 %	0 %	0 %

Tabulka č. 7 – Vyhodnocení řešení úlohy 7.

4.9 Analýza řešení úlohy č. 8

Pinocchio má nos dlouhý 3 cm. Pokaždé, když zalže, délka nosu se zdvojnásobí. Jak dlouhý bude jeho nos, když zalže šestkrát?

Toto je jediná úloha z didaktického testu, která není ze života. Děti ale mají rády svět pohádek, tak věřím, že pro ně byla úloha zajímavá a snad i trošku poučná.

4.9.1 Předpokládané řešení úlohy č. 8

Pro řešení této úlohy nemůžeme předpokládat, že děti v 5. ročníků použijí výraz $2^6 . 3 = 192$. Na řešení této úlohy musí přijít logickou úvahou. Pokud budou řešit úlohu pouze numericky, je vhodné rozepsat si postupně řešení pro každé zalhání:

1. zalhání: 3 . 2 = 6

2. zalhání: 6 . 2 = 12

3. zalhání: 12 . 2 = 24

4. zalhání: 24 . 2 = 48

5. zalhání: 48 . 2 = 96

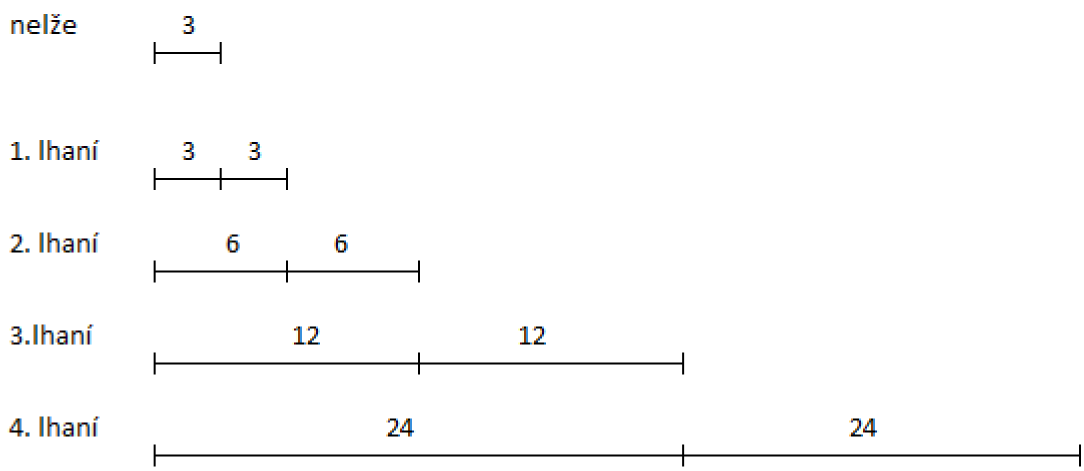
6. zalhání: 96 . 2 = 192

Pokud děti správně pochopily úlohu a nedělá jim problém pamětné násobení, mohou zapisovat vypočítané hodnoty přímo do tabulky:

počet lhaní	1	2	3	4	5	6
délka nosu	6	12	24	48	96	192

Obrázek 51 – Možné znázornění pomocí tabulky při řešení úlohy č. 8.

Jestliže mají děti problém představit si, jak se s počtem zalhání mění délka Pinocchiova nosu, je vhodné si udělat grafické znázornění pomocí úseček. Problém je v tom, že pokud zachovají poměr délek nosu, úsečka se jim nevejde na stranu sešitu. Z náčrtku však lze snadno na základě analogie vypočítat, jak dlouhý nos bude mít Pinocchio po šestém zalhání.

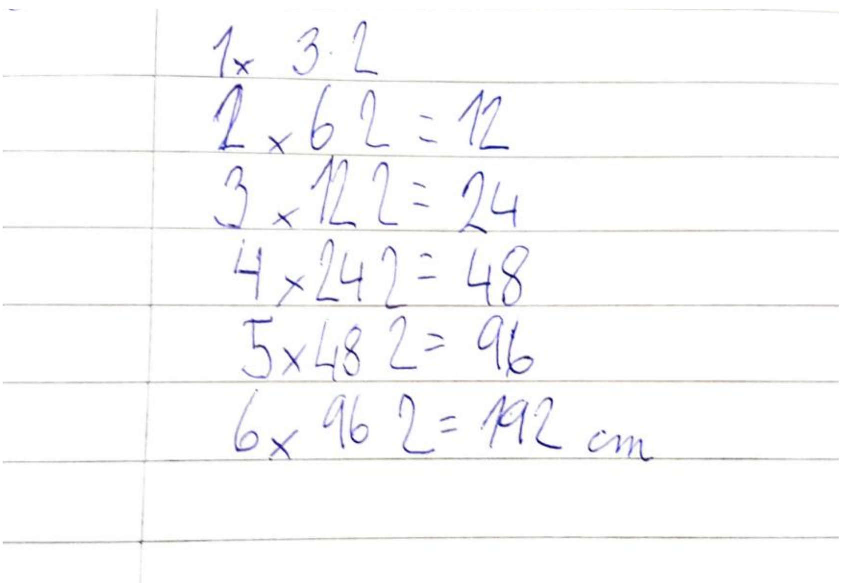


Obrázek 52 – Možné grafické znázornění při řešení úlohy č. 8.

4.9.2 Žákovská řešení úlohy č. 8

Chyby, kterých se žáci v této úloze dopouštěli, pramenily z nepochopení textu, neboť místo toho, aby při každém zalhání zdvojnásobili současnou délku nosu, vynásobili dvěma pouze původní délku a tím dostali číslo 6. Toto číslo pak při každém lhaní přičetli. Někteří z nich, kteří úlohu taktéž pochopili špatně, přičítali pouze původní délku, to je 3 cm.

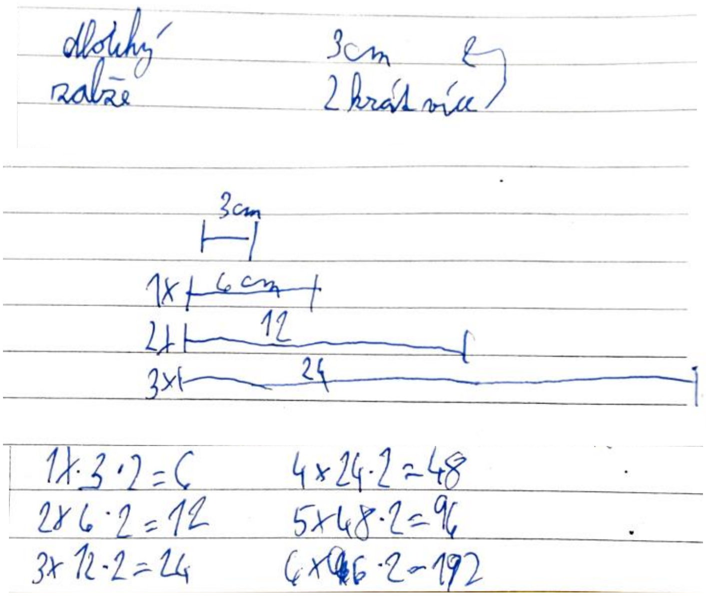
Bez grafického znázornění se snažilo úlohu vypočítat 10 žáků, ale většina z nich se dopustila některé z výše uvedených chyb. Pouze 3 žáci úlohu vyřešili správně. Jedno ze správných řešení bez grafického znázornění vidíme na obrázku 53.



Obrázek 53 – Řešení úlohy č. 8 bez grafického znázornění.

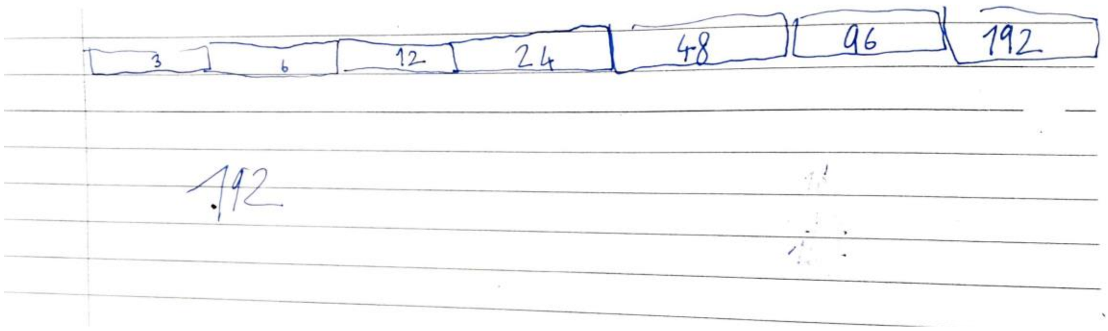
Pomocí grafického znázornění se pokusilo vyřešit úlohu celkem 13 žáků. Čtyři žáci se pokoušeli o grafické znázornění pomocí úseček, ale většina z nich skončila v okamžiku, kdy se jim úsečka nevešla do sešitu.

Na obrázku 54 vidíme řešení žákyně, která se nejprve pokusila o zápis úlohy. Zjistila, že není schopná vytvořit smysluplný zápis a upustila od jeho dokončení. Rozhodla se znázornit si úlohu graficky pomocí úseček, ale protože se snažila zachovat skutečný poměr velikostí úseček, brzy zjistila, že se jí náčrtek do sešitu nevejde. Je však zřejmé, že ji náčrtek přivedl na správnou myšlenku, jak úlohu vyřešit. Postupně začala počítat, jaká bude velikost nosu při každém lhaní, až dospěla ke správnému výsledku.



Obrázek 54 – Grafické znázornění i numerický výpočet při řešení úlohy č. 8.

Při řešení dva žáci zvolili grafické znázorňování pomocí obdélníků. Na obrázku 55 vidíme jedno z těchto znázornění. Žák nezachovával poměr délek obdélníků, ale přímo do nich vpisoval délku nosu, kterou vypočítal zpaměti. To mu pomohlo dojít ke správnému výsledku, aniž by se dopustil chyby.



Obrázek 55 – Grafické znázornění při řešení úlohy č. 8 pomocí obdélníků.

V tabulce č. 8 jsou zaznamenány počty žáků a jejich úspěšnost při řešení úlohy č. 8.

Způsob řešení	pomocí grafického znázornění	bez grafického znázornění	nepokusilo se
Počet žáků	13	10	5
Počet správných řešení	5	3	0
Počet chybných řešení	8	7	0
Úspěšnost	38,46 %	30 %	0 %

Tabulka č. 8 – Vyhodnocení řešení úlohy 8.

4.10 Analýza řešení úlohy č. 9

Polovina bochníku chleba stojí o 6 korun více než jeho čtvrtina. Kolik stojí celý bochník chleba?

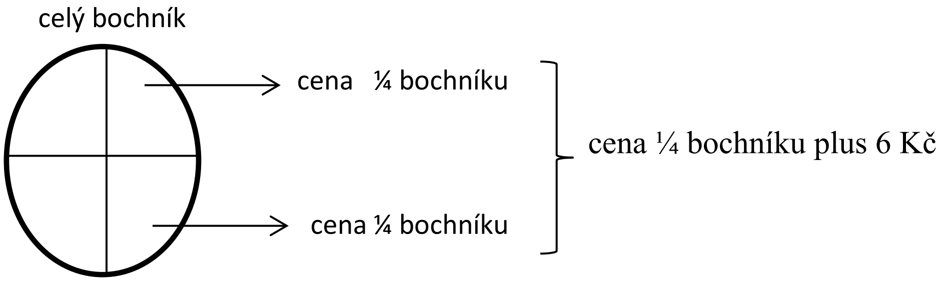
Také úlohu číslo 9 jsem vybrala proto, že je z reálného života. Bochník chleba vidělo každé malé dítě a jeho polovinu a čtvrtinu si dovede představit určitě každý žák 5. ročníku ZŠ.

4.10.1 Předpokládané řešení úlohy č. 9

Na této úloze je neobvyklé to, že víme, kolik stojí jeho polovina, aniž bychom věděli, kolik stojí celý bochník. Typická slovní úloha, kterou děti dobře znají, by začala asi takto: Bochník chleba stojí tolik a tolik. Kolik stojí jeho čtvrtina?

Základem úspěšného řešení je, aby si žák uvědomil, že jedna polovina je tvořena dvěma čtvrtinami. Pak je už jen krůček k pochopení toho, že jestliže je polovina o 6 korun dražší než čtvrtina, je právě těch 6 korun cena té druhé čtvrtiny, o kterou se první čtvrtina zvětší, aby vznikla polovina.

Tato myšlenka se může zdát některým dětem příliš komplikovaná, proto je na místě, udělat si náčrtek.



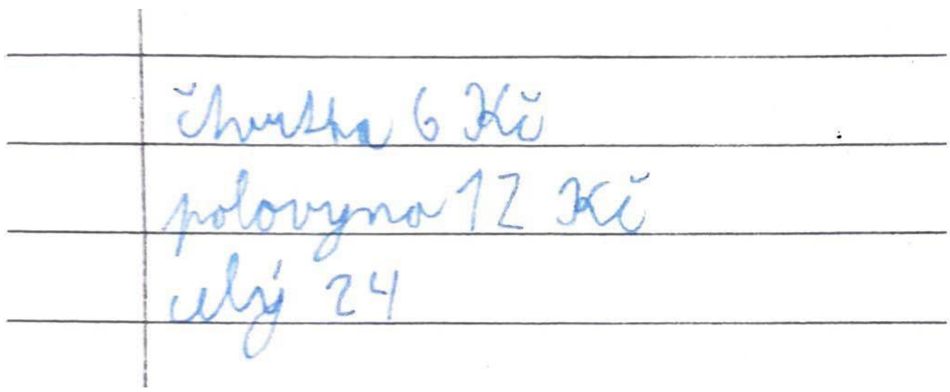
Obrázek 56 – Možné grafické znázornění při řešení úlohy č. 8.

4.10.2 Žákovská řešení úlohy č. 9

Úloha číslo 9 je jediná, při jejímž řešení dosáhli úspěšnosti 100 % i žáci, kteří nepoužili grafické znázornění. Byli to 3 žáci, kteří naprosto bezproblémově zvládli učivo o zlomcích. Pro řešení s grafickým znázorněním se rozhodlo 24 žáků, jejich úspěšnost byla 62,50 %. Do řešení se nezapojil pouze 1 žák.

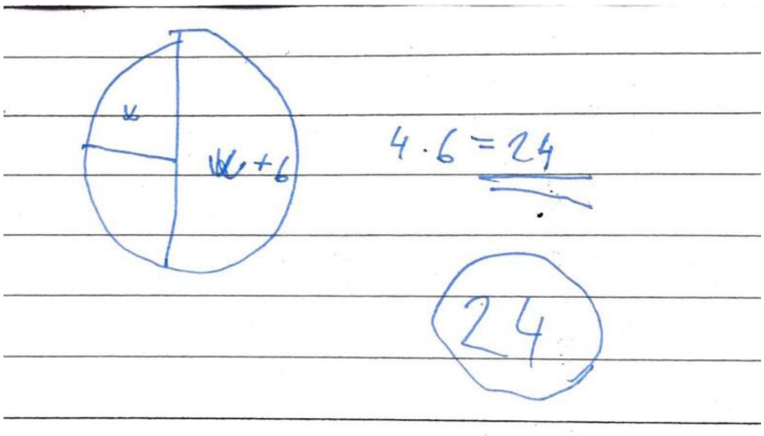
Při řešení této úlohy se převážná většina žáků ihned rozhodla pro grafické znázornění. Vysvětluji si to tím, že všichni mají zkušenost s bochníkem chleba a jeho nákres je velmi jednoduchý. Jen zdatní počtáři řešili úkol pouze numericky a došli ke správnému výsledku. Uvědomili si, že jedna polovina se skládá ze dvou čtvrtin a logicky si odvodili cenu jedné čtvrtiny bochníku chleba. Pak už snadno vypočítali cenu celého bochníku.

Na obrázku 57 vidíme jedno z řešení žáka, který na základě logického úsudku zapisoval cenu jednotlivých částí bochníku chleba, až vypočítal cenu celého bochníku.



Obrázek 57 – Řešení úlohy č. 9 bez grafického znázornění.

Grafické znázornění na obrázku 58 umožnilo žákyni, aby si uvědomila, že čtvrtina bochníku stojí 6 Kč a pak už neměla problém s výpočtem ceny celého bochníku chleba.



Obrázek 58 – Grafické znázornění při řešení úlohy č. 9.

Způsob řešení	pomocí grafického znázornění	bez grafického znázornění	nepokusilo se
Počet žáků	24	3	1
Počet správných řešení	15	3	0
Počet chybných řešení	9	0	0
Úspěšnost	62,50 %	100 %	0 %

Tabulka č. 9 – Vyhodnocení řešení úlohy 9.

4.11 Závěr průzkumného šetření

Didaktický test, který se skládal z devíti úloh, psalo dohromady 28 žáků. Cílem testu bylo ověřit, zda žáci, kteří při řešení použili grafické znázornění byli při řešení úspěšnější než žáci, kteří si zvolili jinou metodu řešení.

Za tímto účelem jsem vybrala nestandardní úlohy. Domníván se, že zavádění nestandardních úloh by mělo začínat v co nejnižším možném věku. Samozřejmě záleží na typu úlohy. Žáci by se tak měli postupně seznamovat s těžšími formami úloh a postupně tak rozvíjet své matematické myšlení. Právě v tom spočívá největší přínos těchto úloh, protože vedou děti používat při jejich řešení logiku a kreativitu. Dalším přínosem je to, že umí vhodně aplikovat reálné situace do matematického vyučování a tím pomáhají připravit žáky na jejich dospělý život.

Chtěla bych zmínit skutečnost, že žáky, kteří se zúčastnili didaktického testu, učím matematiku třetím rokem a během celé této doby jsem se snažila s nimi nestandardní úlohy řešit. Za tímto účelem jsem používala úlohy jak z Matematického klokana z dřívějších let tak také z učebnice matematiky vydavatelství Alter z části Tři oříšky pro chytré hlavy. Žáci jsou tedy na grafické znázorňování zvyklí, ale ne všichni je upřednostňují.

Pokud žáci nejsou zvyklí pracovat s nestandardními úlohami již od prvního stupně základní školy, tak podle slov mých kolegů z druhého stupně, si na řešení těchto úloh jen velmi těžko později zvykají. Úlohy se jim zdají příliš obtížné a skutečnost, že v jejich řešení neexistuje jednotný postup, vnímají mnozí z nich jako nepřekonatelný problém. Používání grafického znázorňování se může stát velkým pomocníkem při překonávání těchto problémů.

V tabulce č. 10 je procentuálně vyjádřena úspěšnost při řešení jednotlivých úloh ve vztahu k použití grafického znázorňování.

Způsob řešení	pomocí grafického znázornění	bez grafického znázornění
Úspěšnost při řešení úlohy č. 1	100 %	25 %
Úspěšnost při řešení úlohy č. 2	85,71 %	41,66 %
Úspěšnost při řešení úlohy č. 3	47,61 %	0 %
Úspěšnost při řešení úlohy č. 4	27,27 %	0 %
Úspěšnost při řešení úlohy č. 5	60 %	0 %
Úspěšnost při řešení úlohy č. 6	100 %	31,81 %
Úspěšnost při řešení úlohy č. 7	72 %	0 %
Úspěšnost při řešení úlohy č. 8	38,46 %	30 %
Úspěšnost při řešení úlohy č. 9	62,50 %	100 %

Tabulka č. 10 – Vyhodnocení řešení všech úloh.

V úloze č. 1, která byla nejjednodušší, mne překvapilo, že se vyskytli žáci, kteří se vůbec nepokusili úlohu řešit. Domnívám se, že to nebylo z důvodu, že by úloze nerozuměli, ale že vzhledem k tomu, že test nebyl známkován, převládla u nich neochota přemýšlet.

V zadání úlohy bylo pouze 10 stromů, to znamená, že si je žáci mohli všechny zakreslit obrázkem a z něj určit správné řešení. Nikomu z nich nestačilo nakreslit jen několik prvních stromů a na základě analogie vypočítat, kolik mezer bude mezi 10 stromy. S potěšením mohu ale konstatovat, že z těch, kteří obrázek nakreslili, byli všichni v řešení úspěšní a nikdo se nedopustil chyby při mechanickém počítání mezer.

Ti, kteří přistoupili přímo k výpočtu, tak úspěšní nebyli. Pouze dva žáci si uvědomili, že ačkoliv je stromů 10, mezer je o jednu méně. Při diskuzi o průběhu řešení, se žáci sami divili, jak mohli udělat tak „hloupou“ chybu.

V úloze č. 2 byl rozdíl mezi počtem žáků, kteří grafické znázornění použili a mezi těmi, kteří jej nepoužili nejnižší. O to zřetelnější je rozdíl v počtu úspěšných řešení u těchto skupin. Žáci, kteří si úlohu graficky neznázornili, se dopouštěli daleko častěji chyb než ti, kteří si ji znázornili. V této úloze mne zaujala skutečnost, že někteří žáci použili na základě svého úsudku při výpočtu početní operaci sčítání a jiní operaci odčítání. Obě operace je přivedly ke správnému výsledku.

Myslím, že na tomto příkladu můžeme vidět, jak je důležité nechat děti hledat své vlastní řešení bez předloženého návodu. V tomto případě děti plně využily prostor pro uplatnění svých tvůrčích schopnosti a v závěrečné diskuzi, kdy si děti vzájemně sdělovaly své způsoby řešení, se vzájemně obohatily o nové poznatky, které je v průběhu testu nenapadly.

Úloha č. 3 byla pro žáky náročná na pochopení a uspořádání údajů a vztahů mezi nimi. Bylo nutné, aby se žáci dobře orientovali v textu a správně logicky uvažovali. Ti, kteří se snažili nalézt řešení jen na základě logického úsudku, nedokázali udržet v paměti potřebné informace a nikdo z nich úlohu správně nevyřešil. Žáci, kteří si udělali náčrtek, byli úspěšní téměř z 50 %. Velká náročnost úlohy byla patrna také z toho, že žáci během řešení úlohy velice často škrtali a svá řešení gumovali a zkoušeli nová.

Úloha č. 4 byla pro žáky nejnáročnější. Někteří si udělali správně zápis, ale nedokázali vyřešit skutečnost, že někteří turisté mluví oběma jazyky, to znamená, že patří současně do obou skupin turistů. Ne všichni žáci, kteří se pokoušeli o grafické znázornění, byli úspěšní. Některé náčrtky byli naprosto nesmyslné a k žádnému řešení nevedly. Úspěšně si vedli pouze ti, kteří pro znázornění použili diagram.

Při závěrečné diskuzi žáci konstatovali, že nevěděli, jak řešit situaci, že někteří turisté mluví oběma jazyky. Protože vím, že někteří žáci ve třídě hrají fotbal, někteří chodí do taekwonda a dva z nich navštěvují oba sporty, požádala jsem je, aby vytvořili skupinky podle toho, jaký sport dělají. Myslím, že na této názorné ukázce většina dětí pochopila, jak daný problém uchopit. Jinými slovy, použila jsem metodu manipulace s konkrétními předměty a na základě praktické činnosti žáků, vysvětlila řešení problému.

Úloha č. 5 byla jediná, která měla více řešení. K úspěšnému řešení však stačilo pouze jedno. Také nikdo z dětí žádné další řešení nehledal. Jeden z žáků vyhledal společný násobek čísel, která odpovídala počtu kamarádů, ale neuvědomil si, že musí přičíst číslo 1, které odpovídá zbylému koláči. Všichni se spokojili s tím, že pomocí dosazování čísel do tabulky došli k výsledku 13 a tím byl pro ně úkol splněn.

Úloha, která se dětem na první pohled zdála lehká, se nakonec ukázala jako nejtěžší. Ze všech devíti úloh se ke správnému výsledku dopracovalo nejméně řešitelů.

S typem úloh, který odpovídá úloze č. 6, se již žáci několikrát setkali v učebnici matematiky. To byl zřejmě důvod, proč se převážná většina z nich pustila do řešení bez grafického znázornění. Příklad se jim zdál povědomý, a proto měli pocit, že to zvládnou jen pomocí logického úsudku nebo pomocí výpočtu. Většina z nich se však dopustila stejné chyby a ke správnému řešení se dopracovala jen necelá třetina z nich.

Když jsem analyzovala žákovská řešení úlohy č. 7, došla jsem k přesvědčení, že někteří z nich vůbec nepochopili zadání této slovní úlohy. Na základě výrazu 4krát více, naprosto nelogicky násobili celkový počet žáků číslem 4.

V úloze č. 8, která pojednává o Pinocchiově nosu, bylo nejčastější chybou to, že si žáci nedovedli poradit s výrazem „při každém zalhání se nos zdvojnásobí“. 70 % těch, kteří se rozhodli řešit úlohu bez grafického znázornění, ke správnému výsledku nedošli.

Žáci, kteří grafické znázornění použili, byli o něco úspěšnější. Chybovalo necelých 68 % žáků. Většina z nich se snažila prodloužení nosu znázornit pomocí úsečky, ale při zachování poměru zvětšení se jim náčrtek nevešel na stránku v sešitě, a protože nedokázali z náčrtku vyčíst návod, jak postupovat při výpočtu, řešení zanechali.

Úloha č. 9 patřila k těm jednodušším. Byla to jediná úloha, při níž žáci, kteří se o grafické znázornění nepokusili, byli úspěšní na 100 %. Zde však musím poznamenat, že to byli jen 3 žáci z 28. Tito žáci zvládli učivo o zlomcích na výbornou a tak mohli bez problému danou úlohu vyřešit.

Neúspěšnost žáků, kteří grafické znázornění použili, byla necelých 63 %. Myslím, že největším problémem není vypočítat část celku. S tím se děti v běžném životě setkávají poměrně často, ale vypočítat celek je pro ně podstatně těžší.

Na závěr tohoto didaktického testu proběhla ve třídě diskuze. Žákům se příklady jevily příliš náročné. Jako důvod uváděli, že se s většinou takovými příkladů ještě nesetkali. V učebnici přece takové příklady nejsou. Souhlasili ale s mým argumentem, že jsou to příklady z reálného života. Žáci potvrdili, že jim náčrtky při řešení pomohly, ale překvapil mne jeden z žáků svým tvrzením, že ho ty obrázky jen pletou. Skutečně během testování používal pouze logický úsudek nebo výpočet a přesto byl při řešení relativně úspěšný.

Na základě mého výzkumného šetření bych doporučila učitelům matematiky, aby už od prvního ročníku věnovali větší pozornost při výuce matematiky grafickému znázorňování pomocí obrázků, číselných os, diagramů, grafů nebo tabulek. Samozřejmě by neměli žáky k tomuto způsobu práce nutit, ale ukázat jim tím další možnosti řešení a otevřít jim tak prostor pro jejich tvůrčí schopnosti a kreativitu.

ZÁVĚR

Cílem mojí diplomové práce bylo zjistit, zda grafické znázorňování při řešení matematických úloh usnadňuje žákům dosažení správného řešení.

V teoretické části jsem se zabývala učebními úlohami a to především úlohami matematickými, jejich klasifikací a jejich řešením. Pomocí odborné literatury a rámcově vzdělávacího programu pro základní vzdělávání jsem se pokusila vymezit vzdělávací oblast matematika a její aplikace se zaměřením na řešení matematických úloh. Na konkrétních příkladech jsem uváděla způsoby grafického zobrazení při řešení matematických úloh.

Praktická část mojí diplomové práce se skládá z vyhodnocení nestandardizovaného didaktického testu, který je tvořen devíti matematickými úlohami. Jednalo se o úlohy převzaté z matematického Klokana a z Vybrané úlohy z klokanovy kapsy ze zahraničních soutěží. Do testu však nebyla zařazena volba odpovědi, která je pro tuto soutěž typická.

Žáci měli za úkol příklady samostatně vyřešit za použití různých strategií dle vlastní volby. Většina žáků se nejprve pokoušela řešit úlohu klasickým matematickým výpočtem. Když však žáci zjistili, že nemohou dojít k žádnému výsledku nebo, že výsledek je naprosto nesmyslný, zvolili jinou cestu. Touto další možností pro ně bylo grafické znázornění.

Po vyhodnocení těchto testů jsem dospěla k názoru, že testovaní žáci upřednostňují standardní způsob řešení před řešením pomocí grafického znázornění. Přitom se ale jasně ukázalo, že grafické znázornění napomáhá při hledání správného řešení úlohy. Dokonce ve čtyřech úlohách z devíti se žáci bez grafického znázornění ke správnému výsledku vůbec nedopracovali. Naopak pouze v jedné úloze byla úspěšnost při řešení bez grafického znázornění stoprocentní.

LITERATURA

BLAŽKOVÁ, Růžena, Květoslava MATOUŠKOVÁ a Milena VAŇUROVÁ. *Kapitoly z didaktiky matematiky: (slovní úlohy, projekty)*. 2. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2011. ISBN 978-80-210-5419-6.

BLAŽKOVÁ, Růžena. *Matematika pro 3. ročník základních škol: učebnice pro vzdělávací obor Matematika a její aplikace*. Vyd. 4. Všeň: Alter, 2010. ISBN 978-80-7245-232-3.

ČÍŽKOVÁ, Věra. *Příspěvek k teorii a praxi problémového vyučování.* Pedagogika, 2002, roč. XII, č. 3.

DIVÍŠEK, Jiří. *Didaktika matematiky pro učitelství 1. stupně ZŠ: celostátní vysokoškolská učebnice pro studenty pedagogických fakult studijního oboru 76-11-8 : učitelství pro 1. stupeň základní školy*. Praha: SPN, 1989. Učebnice pro vysoké školy (Státní pedagogické nakladatelství). ISBN 80-04-20433-3.

HEJNÝ, Milan. *Matematické a přírodovědné úlohy pro první stupeň základního vzdělávání: náměty pro rozvoj kompetencí žáků na základě zjištění výzkumu TIMSS 2007*. Praha: Ústav pro informace ve vzdělávání, 2011. ISBN 978-80-211-0611-6.

KUŘINA, František. *Matematika a řešení úloh.* České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Pedagogická fakulta, 2011. ISBN 978-80-7394-307-3

KUŘINA, František. *Umění vidět v matematice*. Praha: SPN, 1990. Odborná literatura pro učitele. ISBN 80-04-23753-3.

KVĚTOŇ, Pavel. *Kapitoly z didaktiky matematiky*. Ostrava: Pedagogická fakulta, 1990.

MOLNÁR, Josef a Hana MIKULENKOVÁ. *Matematika a její aplikace pro1. ročník*. Praha: Prodos, 2006. ISBN 978-80-7230-160-7.

NOVÁK, Bohumil. *Matematika III: několik kapitol z didaktiky matematiky*. Olomouc: Vydavatelství Univerzity Palackého, 1999. ISBN 80-7067-979-4.

NOVÁK, Bohumil. *Vybrané kapitoly z didaktiky matematiky 2: (pro studium učitelství pro 1. stupeň ZŠ)*. 2. vyd. Olomouc: Univerzita Palackého, 2005. Texty k distančnímu vzdělávání v rámci kombinovaného studia. ISBN 80-244-1068-0.

NOVÁK, Bohumil. *Počítejte s Klokanem: kategorie "Klokánek" : sbírka úloh pro 4. a 5. ročník z mezinárodní soutěže Matematický klokan : 1995-1999*. Olomouc: Prodos, c2000. ISBN 80-7230-058-x.

NOVÁK, Bohumil a Anna STOPENOVÁ. *Slovní úlohy ve vyučování matematice na 1. stupni ZŠ*. Olomouc: Vydavatelství Univerzity Palackého, 1993. ISBN 80-7067-294-3.

NOVOTNÁ, Jarmila. *Analýza řešení slovních úloh: [kapitoly z didaktiky matematiky]*. Praha: Univerzita Karlova v Praze - Pedagogická fakulta, 2000. ISBN 80-7290-011-0.

VONDROVÁ, Naďa a Miroslav RENDL. *Kritická místa matematiky základní školy v řešeních žáků*. V Praze: Univerzita Karlova, nakladatelství Karolinum, 2015. ISBN 978-80-246-3234-6.

VYŠÍN, Jan. *Metodika řešení matematických úloh.* Praha: SNP, 1972

TARÁBEK, Pavol a Soňa KOPEČKOVÁ. *Matematika 1: pro 1. ročník základní školy*. Ilustroval Aleš ČUMA. Brno: Didaktis, 2005. ISBN 80-7358-034-9.

Internetové zdroje:

Kolektiv autorů. *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání.* Praha, 2007. VÚP Dostupné na internetových stránkách: http://www.msmt.cz/file/41216_1_1/

BLAŽKOVÁ, Růžena a Milena VAŇUROVÁ. Komunikační bariéry žáků při řešení slovních úloh. Dostupné na internetových stránkách: https://katedry.ped.muni.cz/matematika/wp-content/uploads/sites/14/2013/06/komunikacni-bariery.pdf

NOVÁK, Bohumil. *Řešení matematických úloh.* Olomouc: 2013. Dostupné na internetových stránkách: http://unifor.upol.cz/pedagogicka/

ŠEDIVÝ, Ondrej, VALLO, Dušan. *Matematika - škola - IKT : zborník vedeckých prác zo seminára, konaného 27. marca 2009 na KM FPV UKF v Nitre*. Dostupné na internetových stránkách: **http://www.km.fpv.ukf.sk/upload_publikacie/20110913_121946__1.pdf**