UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Úvod do teorie her pro žáky středních škol

Katedra algebry a geometrie
Vedoucí diplomové práce: **RNDr. Pavel Calábek, Ph.D.**
Vypracoval: **Bc. Matěj Struhař**
Studijní obor: Matematika-biologie
Studijní program: N0114A170004 Učitelství matematiky pro střední školy
Forma studia: prezenční
Rok odevzdání: 2021

BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKACE

Autor: Bc. Matěj Struhař

Název práce: Úvod do teorie her pro žáky středních škol

Typ práce: Diplomová práce

Pracoviště: Katedra algebry a geometrie

Vedoucí práce: RNDr. Pavel Calábek, Ph.D.

Rok obhajoby práce: 2021

Abstrakt: Cílem této práce je seznámit čtenáře se základy teorie her dvou hráčů a její filozofií. Čtenář se naučí řešit některé typy her jako například hry v extenzivním tvaru s úplnou informací, základní hry s nulovým i nenulovým součtem nebo hledat evolučně stabilní strategie. Text je doplněn řadou rozšiřujících poznámek, cvičných příkladů a zajímavostí z oblasti teorie her či jejích aplikací.

Klíčová slova: hra, stromy hry, hra v normálním tvaru, hra s nulovým součtem, hra s nenulovým součtem, Nashova rovnováha, paretovská optimalita, evolučně stabilní strategie

Počet stran: 111

Jazyk: český

BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

Author: Bc. Matěj Struhař

Title: Introduction to game theory for high school students

Type of thesis: Master's

Department: Department of Algebra and Geometry

Supervisor: RNDr. Pavel Calábek, Ph.D.

The year of presentation: 2021

Abstract: Object of this thesis is introduce elementary two person game theory and its philosophy to potential reader. Reader will learn how to solve some types of games like games in extensive form with perfect information, basic zero-sum and non-zero-sum games or search for evolutionarily stable strategies. Text contains many notes with game theory curiosities or its applications and exercises.

Key words: game, game trees, game in normal form, zero-sum game, non-zero-sum game, Nash equilibrium, Pareto optimality, evolutionarily stable strategy

Number of pages: 111

Language: Czech

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci zpracoval samostatně pod vedením pana RNDr. Pavla Calábka, Ph.D. a všechny použité zdroje jsem uvedl v seznamu literatury.

V Olomouci dne ....

podpis

Obsah

Poděkování

Na tomto místě bych rád poděkoval panu RNDr. Pavlu Calábkovi, Ph.D. zejména za jeho rady a doporučení, vstřícnost, trpělivý přístup a cenný čas.

Úvod

V populární knize Terryho Pratchetta Barva kouzel se pojišťovací agent Dvoukvítek během svého cestování po Zeměploše setkává s mágem Mrakoplašem a vysvětluje mu princip pojištění. Mrakoplaš pojištění chápe jako hazardní hru, ve které sázíte na to, že vyhoříte, zatímco pojišťovna doufá, že k požáru nedojde. Jako na hru se můžeme dívat na mnoho rozličných situací v životě okolo nás.

Za otce moderní teorie her lze považovat maďarského matematika Johna von Neumanna. Tento neobyčejně nadaný matematik, jenž prý již v osmi letech uměl derivovat a integrovat, ve svých pracích uvažuje nejprve sám, později spolu s ekonomem Oskarem Morgensternem, hru více hráčů. V této práci se budeme zabývat výhradně hrami dvou hřáčů, které pojmenujeme Alois a Barbora. Von Neumann se ptá jakým způsobem musí Alois hrát, aby byl jeho výsledek ve hře co nejlepší. Na první pohled jednoduchá otázka. Problém ovšem nastává ve chvíli, kdy je Aloisův výsledek ovlivněn i strategií použitou Barborou. Alois musí vzít v úvahu, že Barbora chce též dopadnout co nejlépe a dle toho uzpůsobovat své strategie. Cílem teorie her je tedy analyzovat konfliktní situace od salónních her až po války, objasňovat principy rozhodování jednotlivých hráčů, ať už za ně bereme lidi, firmy, státy či nemyslící geny, a hledat optimální řešení těchto situací.

V této práci se čtenář seznámí se základní filozofií teorie her, naučí se řešit jednoduché hry a interpretovat jejich řešení. V textu je předpokládána základní znalost matematické symboliky a středoškolských matematických pojmů, jako jsou funkce, rovnice s parametrem či základy teorie pravděpodobnosti.

Kapitola 1

Základní myšlenky teorie her

Nejprve je třeba si ujasnit, co vlastně za hru budeme považovat. Hra se v pojetí teorie her skládá ze tří základních komponent, konkrétně

- hráči,
- jejich strategie,
- jejich výplaty.

Hráči

V této práci se budeme zabývat výhradně hrami *inteligentních (racionálních) rozhodovatelů*. Jako inteligentního rozhodovatele označujeme takového hráče, jehož rozhodování je vědomé a má cíl urvat pro sebe co nejvyšší výhru. Aby jí dosáhl, plně využívá všech dostupných informací. Takovými hráči mohou být například lidé, ale i různé objekty, které na první pohled příliš inteligentní nejsou, avšak dokážou, ač nevědomě, o výběru strategie rozhodovat. Zebra si nikdy nesedne s tužkou a papírem, aby hledala nejlepší strategii při útoku lvů. Její chování je ale řízeno geny, které prošly dlouhou etapou evolučního vývoje. Za inteligentního rozhodovatele můžeme v tomto případě považovat přirozený výběr, který vybírá ty geny, které racionální chování zebře „naprogramují", přestože přirozený výběr ani geny nemají žádnou svobodnou vůli.

V praxi se dále můžeme setkat ještě s *neinteligentními (neracionálními)* a *p-inteligentními* hráči. Rozhodovateli neinteligentnímu je lhostejno, jak ve hře dopadne. Své strategie hraje nepředvídatelně, proto jim říkáme *stavy*. Typickým neinteligentním hráčem je příroda. Pokud chceme uspořádat venkovní akci, je přírodě jedno, zda bude „hrát“ strategii Slunečno nebo Lít jak z konve. Hry inteligentního hráče proti neinteligentnímu proto souhrně nazýváme *hry proti přírodě*. Těmito hrami se zde zabývat nebudeme. Čtenář se o nich může dozvědět více například v [10]. U p-inteligentního rozhodovatele předpokládáme, že se bude s pravděpodobností p chovat inteligentně a s pravděpodobností $1 - p$ neinteligentně. Často se s takovým jednáním setkáváme v různých společenských hrách. Hrajeme-li šachy, nepředpokládáme, že je náš protivník bezchybný šachový velmistr. Současně též víme, že své tahy neprovádí čistě náhodně. Problematiku těchto her lze nalézt například v [6].

Strategie

V teorii her budeme uvažovat výhradně takové hry, ve kterých je konečný výsledek jednoznačně určen strategiemi, které hráči zahrají. Hrajeme-li šipky a máme uzavřít 120, klasická „strategie“ je házet triple 20, 20, double 20. Jenomže záleží i na tom, zda se do daných hodnot vůbec trefíme. Výsledek je tedy částečně závislý i na náhodě. Proto šipky za hru v našem pojetí nepovažujeme. Jednoduše řečeno: Hra dle teorie her probíhá tak, že každý hráč zvolí jednu strategii a následně je jednoznačně určen výsledek hry. Prostým příkladem je hra Kámen-nůžky-papír. Alois zahraje kámen, Barbora papír, výsledkem je vítězství Barbory...

Pokud bude hra hrána na tahy, budeme též používat pojem *akce*. Akce popisuje průběh jednoho tahu, strategie průběh celé hry. Můžeme tedy tvrdit, že strategie je u těchto her složena z akcí (čili strategie je schéma akcí).

Výplaty

Celá filozofie teorie her stojí na hráčových postojích a preferencích. Z definice inteligentního rozhodovatele je jasné, že aby se hráč mohl mezi strategiemi rozhodnout, musí být schopen porovnat jednotlivé výhry ve hře a určit, která je pro něj nejlepší. K tomu má matematika vynikající nástroj jménem čísla. Budeme se proto snažit převést všechna možná vyústění her na nějakou číselnou hodnotu (např. peníze, body,...).

Jak matematicky přiřadit výsledkům hry nějakou hodnotu? Již samotné slovo přiřazení by nám mohlo jemně napovědět, že s tím bude mít co do činění pojem funkce. Ukažme si její konkrétní podobu. Řekli jsme, že výsledek hráče nezávisí pouze na jeho strategii, nýbrž i na strategiích hraných ostatními hráči. Proto počet proměnných naší funkce musí být roven počtu hráčů. Je navíc zřejmé, že jeden výsledek hry může mít pro různé hráče různý význam. Když ve hře Kámen-nůžky-papír hraje Alois kámen a Barbora papír, Alois tuto situaci interpretuje jako prohru, zatímco Barbora jako výhru. Nemůžeme tedy použít jednu funkci pro všechny hráče, ale každý hráč musí mít unikátní. Ve hrách dvou hráčů tedy zkoumáme dvě funkce dvou proměnných. Obdržíme následující definici.

Definice 1. Mějme množinu hráčů $Q = \{A, B\}$. Nazvěme S množinu strategií hráče A a T množinu strategií hráče B. Mějme reálné funkce definované na kartézském součinu $S \times T$.

$$u_1\ (s,t),$$
$$u_2\ (s,t).$$

kde $s \in S$, $t \in T$. Funkci u_1 nazýváme *výplatní funkce hráče* A, funkci u_2 *výplatní funkce hráče* B.

Demonstrujme ji na výše zmíněném příkladu a předpokládejme, že se Alois s Barborou vsadili o 5 korun. Obdržíme

$$u_1(\text{kámen,papír}) = -5,$$
$$u_2(\text{kámen,papír}) = 5.$$

Výplaty hráčů budeme vždy zapisovat do uspořádané dvojice (=dvojice, kde záleží na pořadí členů)

$$(\text{výhra hráče } A,\ \text{výhra hráče } B),$$

v tomto případě tedy $(-5, 5)$. Pokud by oba hráli kámen, dostaneme uspořádanou dvojici $(0, 0)$,... (vyzkoušejte si ostatní případy hry!)

Matematika pro dogmatiky

Přemýšlivý čtenář teď může argumentovat: Funkce je přece číselné zobrazení a „kámen“ rozhodně číslo není! Tato úvaha zasluhuje pochvalu za všímavost, protože je pravdivá. Přesto později, až zavedeme smíšené strategie, uvidíme, že užití pojmu funkce je v tomto případě korektní.

Ne vždy je možné vyústěním hry exaktně přiřadit čísla. Představme si, že se manželé Alois a Barbora rozhodují, kam pojedou na dovolenou. Alois by raději do hor, Barbora k moři. Situaci jsme schopni převést na hru, kdy Alois i Barbora mají dvě strategie, a to „stát si za svým“ a „přizpůsobit se druhému“ (hra tohoto typu se nazývá *Souboj pohlaví* a blíže se jí budeme zabývat v sekci 3.3). Nejsme sice schopni jejich touhy ocenit, ale můžeme srovnat jejich preference. Oba by raději strávili dovolenou společně, než aby se nedohodli. Proto pro Aloise platí

$$\text{nedohodnout se} < \text{jet k moři} < \text{jet do hor}$$

a pro Barboru

$$\text{nedohodnout se} < \text{jet do hor} < \text{jet k moři}.$$

Jsou-li tito manželé matematici, stanoví na tomto základě nějakou výplatní funkci podle toho, jak moc preferují svou variantu dovolené oproti partnerově, čímž vytvoří číselné ohodnocení situací. Co nejpřesnějším číselným ohodnocením podobných těžko ohodnotitelných faktorů se zabývá *teorie užitku*. Úvod k ní může čtenář nalézt například v [10].

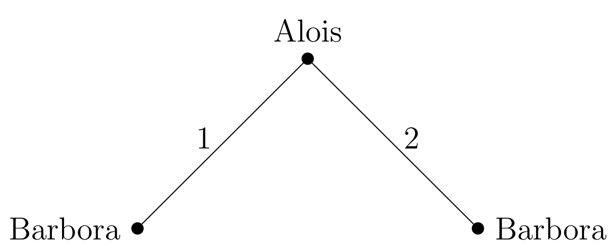
Kapitola 2

Stromy hry

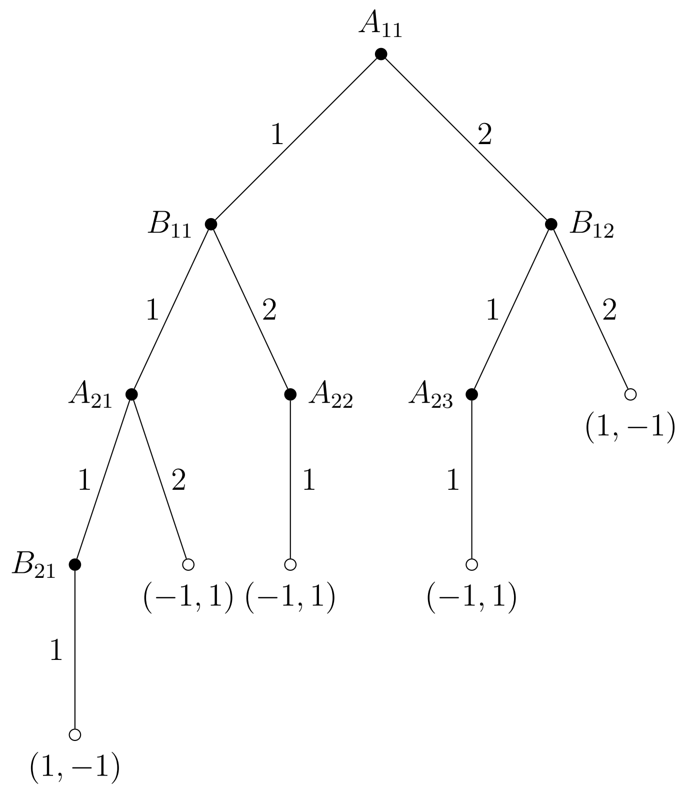
V běžném životě se velmi často setkáváme s hrami hranými na tahy. Každý zná dámu, šachy či piškvorky. Nechť Alois s Barborou hrají následující hru, ve které se vsadili o 1 korunu.

Hra 1 (Nim se čtyřmi sirkami)**.** Mějme hromádku čtyř sirek. Hráči se střídají v jejich odebírání. Každý hráč může odebrat jednu nebo dvě sirky. Hráč, který odebere poslední sirku, prohrává.

Začíná-li Alois, můžeme jeho možnosti zaznačit do grafu.



Na tah se dostává Barbora, která může mít dvě různé výchozí pozice podle toho, co zahrál Alois. Na obě Aloisovy akce má dvě možné odpovědi, a to odebrat jednu nebo dvě sirky. Pokračujme tedy v našem grafu. Můžeme vidět, že pokud Alois i Barbora odeberou 2 sirky, hra končí a vyhrává Alois, který obdrží 1 korunu a Barbora ji ztrácí. Pokud budeme pokračovat dále, obdržíme nakonec tzv. *strom hry*.



Všimněme si, že kdykoliv byli hráči v této hře na tahu, věděli o všem, co se ve hře před tímto tahem událo. Proto takové hry nazýváme jako *hry v extenzivním (rozšířeném) tvaru s úplnou informací.* Co tedy pro tento zápis hry potřebujeme?

- Konečnou množinu n hráčů.
- Strom hry. Ten se skládá z
  - (1) vrcholů, které nejsou koncové. V grafech je budeme značit plným kolečkem. Každý takový vrchol říká, kdo je právě na tahu. Jednotlivým vrcholům proto říkáme *tahy.* V některé literatuře se lze též setkat z názvem *historie*, což odkazuje na skutečnost, že ke každému vrcholu se dá dostat právě jednou cestou od začátku hry, přičemž je tato cesta jednoznačně určena posloupností akcí provedených v minulosti.
  - (2) hran. Ty nazýváme jako *akce hry.* Ke každému rozhodovacímu vrcholu jsou přiřazeny příslušné akce, které nás navedou k dalšímu vrcholu. V

této práci budeme uvažovat pouze hry, kdy mají hráči konečně mnoho akcí.

(3) koncových vrcholů. Ty nám, určují výplaty hry. V grafech je budeme značit prázdným kolečkem. Jednotlivé koncové vrcholy nazýváme *konce hry*.

Matematika pro dogmatiky

Grafové značení her je poměrně intuitivní. Pro větší množství akcí je již grafické zpracování obtížné, ba téměř nemožné. Zkuste vytvořit např. strom hry pro šachy. V prvním tahu může bílý hráč hrát celkem 20 akcí (16 s pěšcem, 4 s jezdcem). Černý hráč může odpovědět stejnými dvaceti akcemi. V druhém tahu bílého už může nastat 400 různých situací. Matematická definice nám pomáhá „představit si“, jak asi strom hry vypadá i u těch nejsložitěších her. Ovšem zapsání předchozích úvah do korektní definice již vyžaduje značnou dávku matematického nadhledu.

Definice 2. Mějme

- konečnou množinu n hráčů Q,
- množinu akcí A,
- množinu rozhodovacích vrcholů H,
- množinu konců hry Z, kde $Z \cap H = \emptyset$,
- akční funkci $\chi : H \to 2^A$,
- hráčskou funkci $\rho : H \to Q$,
- funkci nástupce $\sigma : H \times A \to H \cup Z$,
- výplatní funkce $u_1, ..., u_n$, kde $u_i : Z \to \mathbb{R}$ je výplatní funkcí hráče i.

Uspořádanou množinu

$$\{Q, A, H, Z, \chi, \rho, \sigma, u_1, ..., u_n\}$$

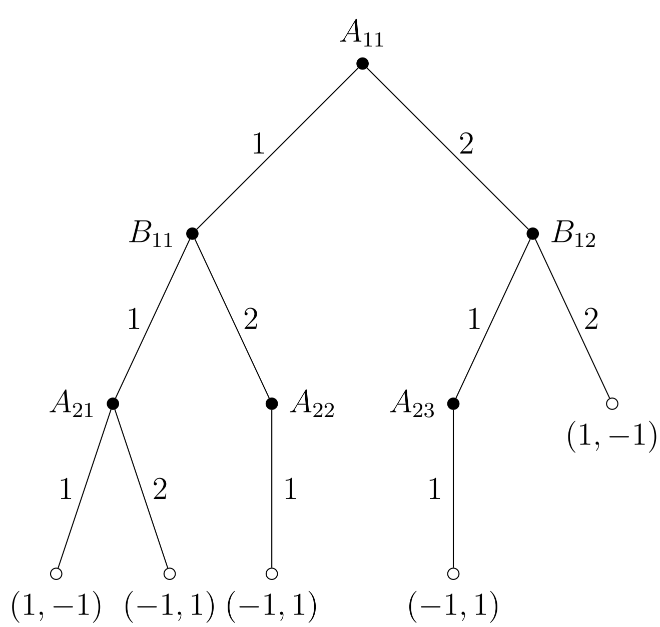
nazýváme *hra v extenzivním* nebo též *v rozšířeném tvaru s úplnou informací.*

Význam jednotlivých množin je zřejmý. Popišme si význam funkcí.

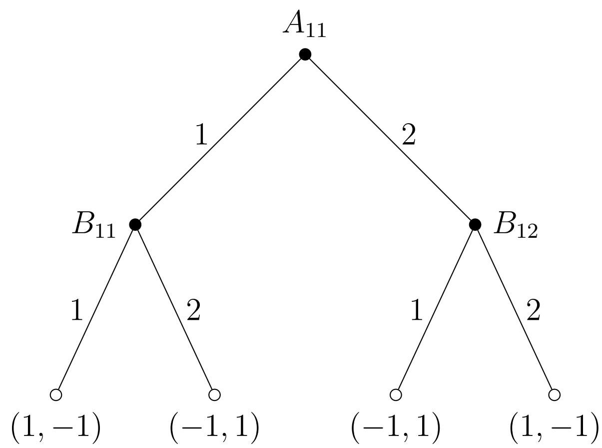
- Akční funkce χ přiřazuje rozhodovacím vrcholům množinu možných akcí, které může daný hráč zahrát v příslušném bodě hry.
- Hráčská funkce ρ přiřazuje rozhodovací vrcholy jednotlivým hráčům, neboli říká, kdo je na v dané situaci na tahu.

- Funkce nástupce σ říká, odkud kam se dostaneme z daného rozhodovacího vrcholu zahráním některé akce (proto $H \times A$). Můžeme se dostat buď do dalšího rozhodovacího vrcholu nebo na konec hry, tzn. do množiny $H \cup Z$.
- výplatní funkce přiřazují koncům hry číselnou hodnotu (výplaty jednotlivých hráčů). Hráčů je n, proto i výplatních funkcí musí být n.

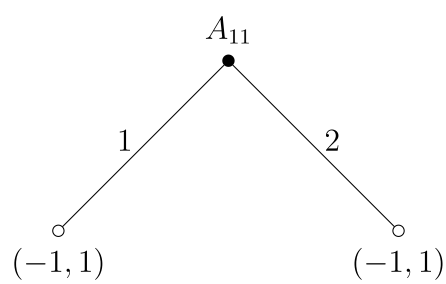
Vžijme se nyní do role Aloise. Ten stojí před volbou, kolik sirek má na začátku hry odebrat. Současně ví, že Barbořina následná volba může výsledek hry ovlivnit, a tak musí uvažovat i to, jak bude uvažovat ona ve svém tahu. I po Barbořině tahu se může dostat k volbě Alois a opět by jeho následné rozhodnutí mohlo hru zvrátit... Obecně bychom při každé hře s konečným počtem akcí touto úvahou dokráčeli až k poslednímu tahu, kde se hráč může srovnáním svých výplat za jednotlivé konce hry konečně rozhodnout, co je pro něj nejlepší. Z toho důvodu se na tyto hry díváme od konce. V našem Nimu je poslední možný tah druhý tah Barbory. Pokud se hra k tomuto tahu dostane, nezbývá Barboře nic jiného než odebrat jednu sirku a prohrát (i v dalším textu si uvědomme, že ve dvojicích výplat se vždy Alois dívá na první z nich a Barbora na druhou!). To znamená, že jejímu tahu B_{21} lze přiřadit hodnota $(1, -1)$ a hru lze zjednodušit.



Dostali jsme novou hru, kde posledním možným tahem je druhý tah Aloise, přičemž se Alois může dostat do tří různých situací. Můžeme vidět, že v tahu A_{21} má Alois na výběr mezi dvěma akcemi, přičemž jedna vede k jeho výhře, druhá k prohře. Alois je inteligentní, tudíž logicky zvolí možnost výhry, proto můžeme tah A_{21} označit jako výhru Aloise a tím pádem mu přiřadit výplatu $(1, -1)$. V tazích A_{22} a A_{23} nemá Alois na výběr, musí odebrat poslední sirku a prohrát. Touto úvahou opět zredukujeme původní strom.

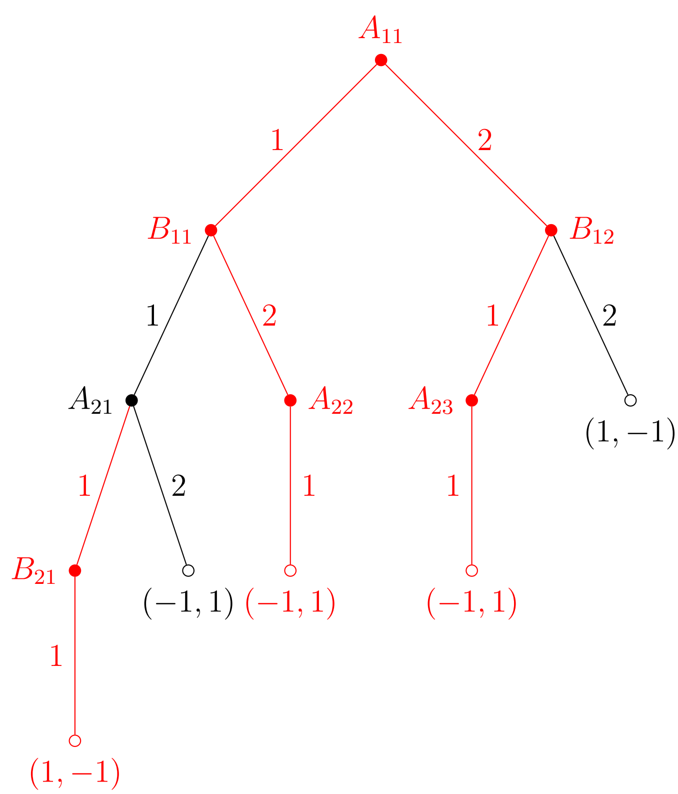


Protože Barbora chce též vyhrát, vybere si v tomto novém stromu akce, které jsou pro ni výhodnější.

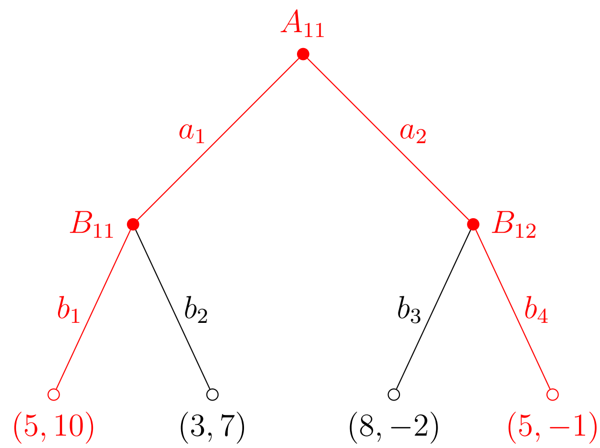


Alois se dostal do situace, kdy ať udělá cokoliv, prohraje. Obdrží-li hráč po zahrání různých akcí e, f stejnou výplatu, učeně říkáme, že je *indiferentní mezi akcemi e a f*. Prostě a jednoduše je mu jedno co zahraje, protože v obou případech dopadne stejně.

Matematicky řečeno jsme ukázali, že každému tahu i akci lze přiřadit hodnotu výplaty některého konce hry. Nejlepší možné akce v daném tahu pro daného hráče označujeme jako *optimální akce*. Vidíme, že optimální akce generují cesty od začátku k některým koncům hry. Ty budeme nazývat *optimální cesty* a budeme je považovat za řešení hry v extenzivním tvaru s úplnou informací. Výplatu pro Aloise (či Barboru) za konec hry, ke kterému spěje optimální cesta označujeme *cena hry pro Aloise (či Barboru)*. Uvedený způsob řešení nazýváme *zpětná indukce* (neboť postupujeme od konce hry k jejímu začátku). Abychom nemuseli stále kreslit nové grafy, můžeme optimální akce značit do grafu barevně.



V Nimu tak obdržíme dvě optimální cesty, přičemž cena hry bude pro obě tyto cesty -1 koruna pro Aloise a 1 koruna pro Barboru, neboli při racionalitě obou hráčů dopadne Nim se čtyřmi sirkami vítězstvím Barbory. Dvě optimální cesty však mohou pro hráče generovat různé výplaty. Například optimální cesty nějaké hry se stromem

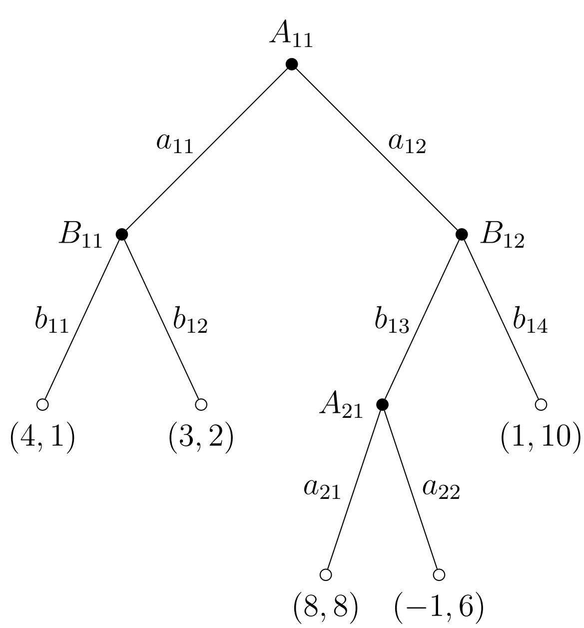


generují pro Barboru v jednom případě cenu hry 10, ve druhém -1.

Je zřejmé, že zpětnou indukci lze využít pro každou hru v extenzivním tvaru s úplnou informací. Proto platí následující věta.

Věta 1. V každé hře v extenzivním tvaru s úplnou informací existuje alespoň jedna optimální cesta (neboli každá hra v extenzivním tvaru s úplnou informací má alespoň jedno řešení).

Uvědomme si, že optimální nemusí nutně znamenat nejlepší! Mějme hru



Po nalezení optimální cesty (proveďte!) vidíme, že cena hry pro Aloise je 3 a pro Barboru 2. Ovšem pokud by Alois zvolil akci a_{12}, Barbora následně b_{13} a Alois a_{21}, dostali by oba hráči výplatu vyšší než cena hry! Tato situace však nemůže nastat, protože kdyby se Alois pokusil hrát a_{12}, Barbora odpoví b_{14} a Alois skončí hůř než při optimální cestě, tudíž Alois nikdy akci a_{12} nezvolí. Někoho napadá: Co když se Alois s Barborou před hrou domluví? Jenomže v rámci jedné hry Barbora nemá žádný rozumný důvod, proč Aloise nezradit a nehrát b_{14}, protože ji Alois nemůže nijak potrestat. Racionální v teorii her neznamená morálně správné! V teorii her vlastně předpokládáme, že racionální rozhodovatelé jsou dokonale sobečtí. Tato nehezká vlastnost hráčů je totiž užitečná pro řadu aplikací v psychologii či evoluční biologii, jak si ukážeme v kapitolách 4 a 5. Řešení pomocí zpětné indukce má tedy předpoklad, že je hra hrána pouze jednou. Pokud by hra byla hrána vícekrát za sebou, hráči si mohou pamatovat, jak se jejich soupeř choval v minulosti a podle toho se uzpůsobit. V rámci opakovaných her už ke kooperaci může i přes sobeckost obou hráčů docházet. S touto skutečností se blíže seznámíme v kapitole 4.

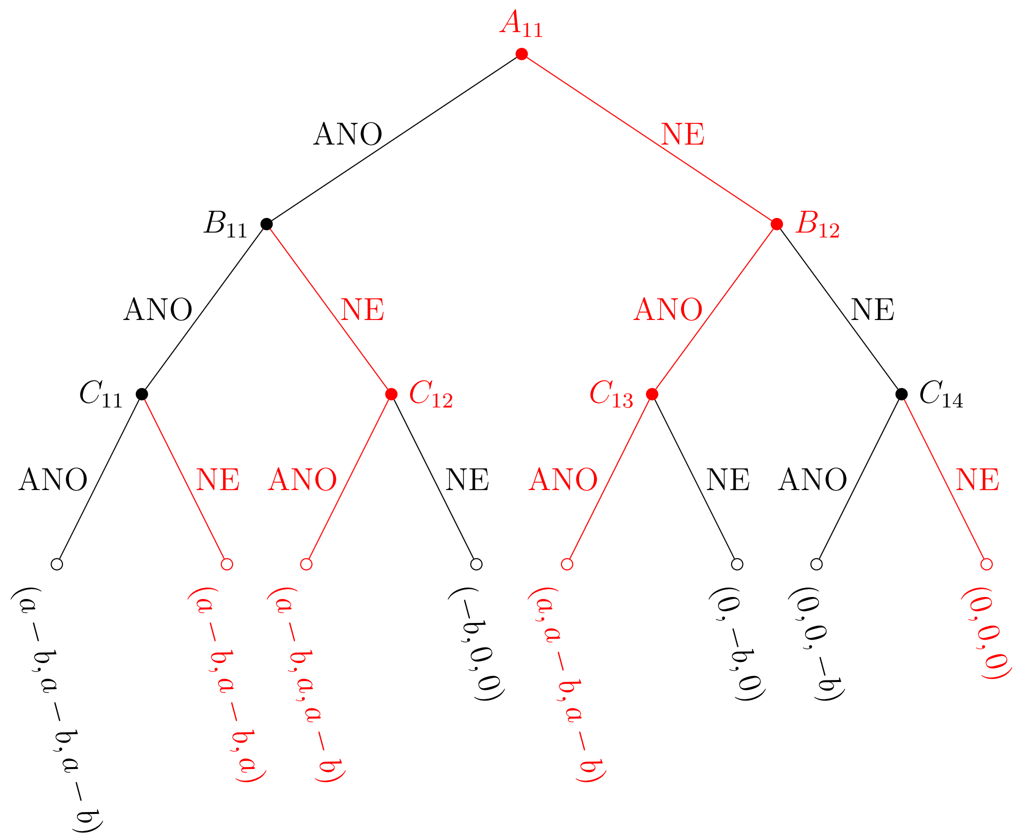
Zajímavost

Ač je zpětná indukce proveditelná pro každou hru v extenzivním tvaru s úplnou informací, není jedinou v praxi užívanou metodou řešení hry. Při složitějších hrách jako jsou například šachy ji totiž nelze využít. Problémem je vysoká paměťová náročnost hry. Pro šachy jistě optimální cesta existuje, ovšem ani dnešní počítače ji zatím nedokáží najít. I kdyby ji ovšem našli, bude pro člověka prakticky nezapamatovatelná, neboť vyžaduje znalost celého stromu hry. Je známo, že již roku 1997 šachový počítač Deep Blue porazil velmistra Garriho Kasparova. Tento počítač dokázal analyzovat 200 milionů postavení za sekundu, což znamená, že všechna možná postavení by prošel cca za $1,6 \cdot 10^{29}$ let, což je více než 10^{19} krát stáří vesmíru. Proto šachové aplikace většinou pracují na principu ohodnocení několika následujících možných tahů pomocí standartního bodování figur (při vyhození vaší figury si její body přičítá, pokud figuru vyhodíte jí, odečítá), přičemž šachmat má nějaké velmi vysoké hodnocení, aby byl pro počítač důležitější než vše ostatní ve hře. Ve své podstatě řeší podhru, kde za začátek hry považuje tah, který právě probíhá a konce této podhry jsou např. za čtyři tahy. Aplikace předpokládá, že jste inteligentní rozhodovatel a po vyhodnocení vybere akci, která směřuje po optimální cestě. Takto analyzuje každý tah. Čím vyšší obtížnost nastavíte, tím více tahů dopředu aplikace projde. Vaším úkolem je tedy vidět dál než ona. Ty nejlepší aplikace mají navíc implementovány některé známé šachové strategie využitelné při vhodné konstelaci figur. Kromě právě popsaného algoritmu existuje i spousta dalších. Základní princip je ale vždy stejný: přiřadit nějakou číselnou hodnotu všem tahům a akcím. Je třeba si uvědomit, že tyto metody většinou nepovažujeme za řešení hry, neboť hra při jejich užití nemusí postupovat po optimální cestě, což lze vidět právě na příkladu šachů, kdy jednu hru můžete vyhrát vy, druhou soupeř, třetí může skončit patem. Ač neznáme řešení šachů, matematik Zermelo dokázal, že při racionálním rozhodování obou hráčů nemůže hra skončit patem, neboli jeden hráč má vítěznou strategii. Hra je tedy pro jednoho z nich nefér (pravděpodobně je to černý).

Oproti normálnímu tvaru hry, se kterým se seznámíme v další kapitole, mají hry v extenzivním tvaru s úplnou informací tu výhodu, že můžeme jednoduše řešit i hry více hráčů.

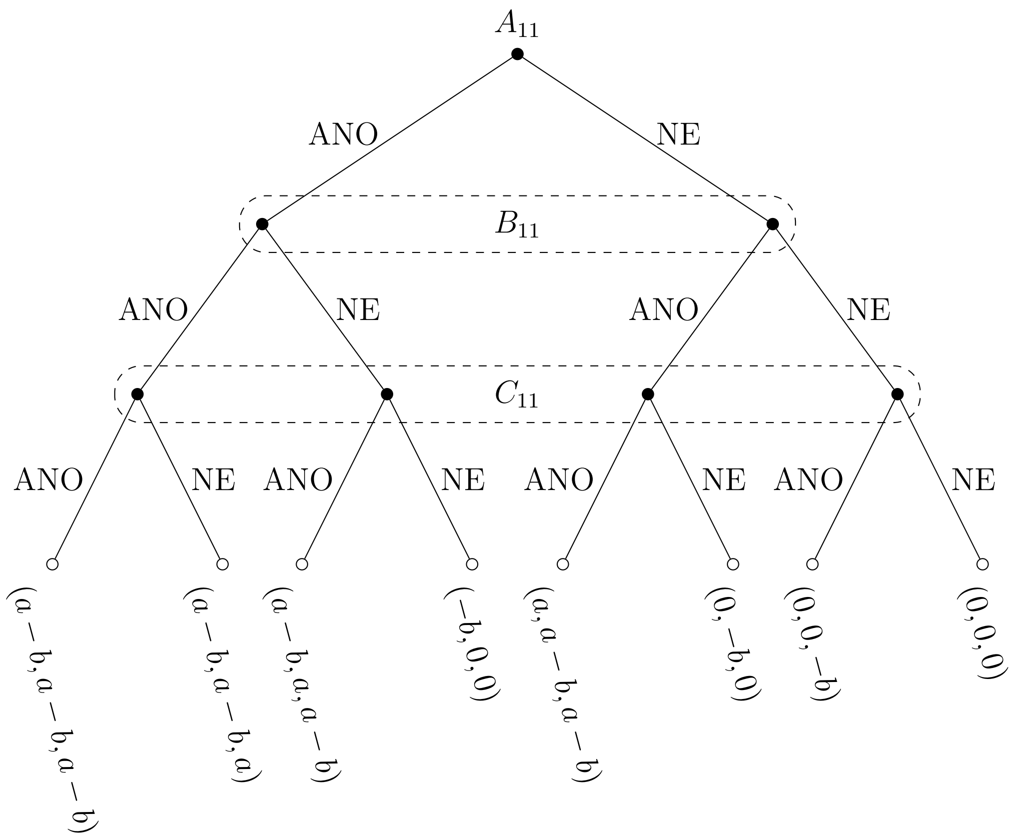
Hra 2 (Hlasování o platech)**.** Politici Alois, Barbora a Cecil hlasují o zvýšení svých platů o částku a. Pokud však budou hlasovat pro zvýšení, ztratí část voličů. Pomocí nějaké funkce tuto ztrátu ohodnotili částkou b, přičemž $a > b$. Politici hlasují postupně za sebou v pořadí Alois, Barbora, Cecil. Kdo z nich z hlasování vyjde nejlépe?

Hra má zřejmě úplnou informaci, kde hráč, který je na tahu má na výběr ze dvou akcí: ANO a NE. Můžeme ji zapsat do grafu a řešit pomocí zpětné indukce (uvědomme si, na kterou výplatu se který hráč v uspořádané trojici dívá!).



Hra má jednu optimální cestu a cena hry je a pro Aloise a $a-b$ pro Barboru a Cecila. Výsledek lze interpretovat tak, že vzhledem k tomu, že i když Alois chce zvýšení platu, ví, že Barbora i Cecil chtějí totéž. Pokud bude hlasovat NE, stále ho Barbora s Cecilem přehlasují, neboť $a - b > 0$ a Alois se tak vyhne nepřízni voličů, kterou schytají jeho oponenti. Je tedy výhodné hlasovat jako první.

Aby politici nemohli podobných vychytávek využívat, není zvykem hlasovat postupně. Politici hlasují současně a neví, jak hlasovali ostatní. Přidáním této nejistoty jsme obdržíme *hru v extenzivním tvaru s neúplnou informací.* Onu nejistotu značíme do grafu následovně



Hráč ví, že se ve svém tahu nachází někde v zakroužkované oblasti, ovšem neví přesně na kterém vrcholu a proto se ani nemůže rozhodnout, jakou akci má zvolit. Kdyby se například Cecil nacházel při svém tahu na prvním vrcholu zleva, je pro něj výhodnější hlasovat NE, ovšem na druhém vrcholu zleva zase ANO. Zpětnou indukci zde proto není možné použít. Pro řešení těchto her užíváme tzv. *normálního tvaru hry*, se kterým se seznámíme v příští kapitole.

Cvičení

1. [Stonožka] Rozhodčí oznamuje Aloisovi a Barboře pravidla hry.

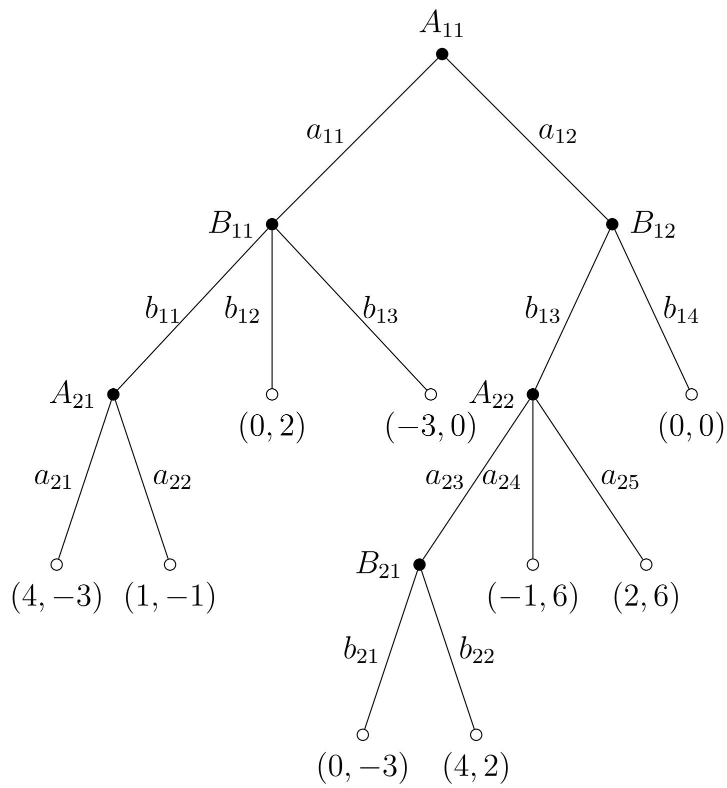
> Dám na stůl 2 hromádky mincí. Na jedné bude 64 mince, na druhé 32. Alois může říct „beru“, čímž získá větší hromádku a menší si bere Barbora. Nebo řekne „pokračuji“, já seberu polovinu mincí z menší hromádky, přidám ji na větší a na tahu je Barbora, která má stejné možnosti jako předtím Alois. Hra stejným způsobem pokračuje až do chvíle, kdy se jeden z hráčů rozhodne říct „beru“. Pokud na menší hromádce 1 mince a hráč, který je zrovna na tahu řekne „pokračuji“, oba hráči dostanou 60 mincí.

Hráči se přede hrou nemůžou nijak domluvit. Jak při racionálním rozhodování obou hráčů hra dopadne? Jak dopadne, pokud rozhodčí změní částku 60 mincí na 100?

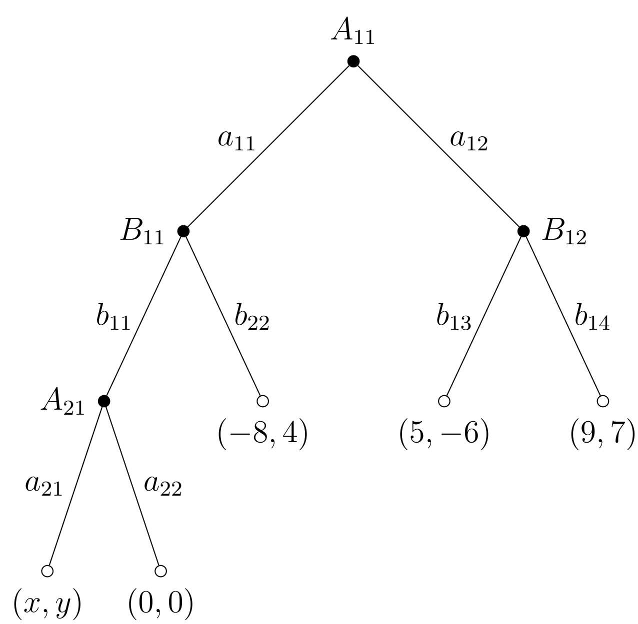
2. Jak při racionálním rozhodování hráčů dopadne Nim s pěti sirkami?

3. Alois s Barborou hrají Nim s n sirkami. Alois začíná. Pro jaká n hra dopadne vítězstvím Aloise?

4. V následující nalezněte optimální cestu a cenu hry pro oba hráče.



5. Pro jaká $x, y \in \mathbb{R}$ je a_{11}, b_{11}, a_{21} jedinou optimální cestou následující hry?



Kapitola 3

Hry v normálním tvaru

V předchozí kapitole jsme zkoumali hry, ve kterých hráči hráli po sobě. Nyní se podívejme blíže na situaci, kdy hrají ve stejný okamžik. Mějme následující hru.

Hra 3 (Dosazovací hra)**.** Alois a Barbora zapsali výraz

$$st(t-s).$$

Alois může za s dosadit čísla $1, 3, 5$, Barbora za t $2, 4, 6$. Oba volí své číslo současně. Pokud po dosazení dostanou kladnou hodnotu, musí Barbora Aloisovi tuto hodnotu vyplatit. Při záporném výsledku vyplácí Alois Barboře absolutní hodnotu výsledku.

Hru lze zapsat graficky v extenzivním tvaru s neúplnou informací (vyzkoušejte si!) nebo v tzv. *normálním tvaru*.

Definice 3. Mějme množinu hráčů $Q = \{A, B\}$, množinu S strategií hráče A, množinu T strategií hráče B a jejich výplatní funkce u_1, u_2. Uspořádanou množinu

$$\{Q, S, T, u_1, u_2\}$$

nazýváme *hra dvou hráčů v normálním tvaru*. Podle počtu strategií často též názýváme hry v normálním tvaru jako *hry typu* $|S| \times |T|$.

V naší hře figurují 2 hráči, Alois a Barbora. Množinou strategií Aloise je $S = \{1, 3, 5\}$, množinou strategií Barbory $T = \{2, 4, 6\}$ (Dosazovací hra je tedy hra typu 3×3). Výplatní funkce lze též lehce definovat.

$$u_1(s,t) = st(t-s)$$
$$u_2(s,t) = -u_1(s,t) = st(s-t),$$

takže platí například

$$u_1(1,2) = 2$$
$$u_2(1,2) = -2.$$

Obdobně lze určit výplaty za všech situací. Pro zpřehlednění zapisujeme hry dvou hráčů do tabulky.

		Barbora		
		2	4	6
	1	$(2,-2)$	$(12,-12)$	$(30,-30)$
Alois	3	$(-6,6)$	$(12,-12)$	$(54,-54)$
	5	$(-30,30)$	$(-20,20)$	$(30,-30)$

Nyní zbývá zodpovědět na otázku, co vlastně pokládáme za řešení hry. Alois chce ve hře vždy dosáhnout co nejvyššího zisku. V naší hře je pro Aloise nejlákavější částkou 54 korun, proto by rád hrál 3. To ale Barbora ví, této znalosti může využít a hrát 2, což je její *nejlepší odpověď na Aloisovu strategii 3* a vyhrát 6 korun. Alois ví, že Barbora ví, a proto může místo 3 hrát pro něj nejvýhodnější 1 a vyhraje tak 2 koruny. V takovém případě vidíme, že i kdyby se Barbora na hlavu postavila, nemůže si změnou strategie nijak polepšit, ba naopak.

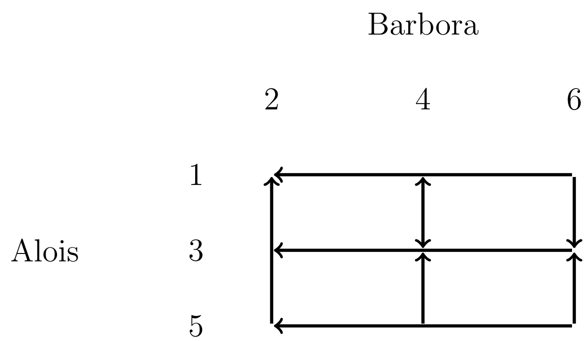
Definice 4. Mějme hru $H = \{Q, S, T, u_1, u_2\}$. Jako *nejlepší odpověď hráče A na strategii t* označujeme strategii s^* takovou, že pro každé $s \in S$ platí

$$u_1(s^*, t) \geq u_1(s, t).$$

Jako *nejlepší odpověď hráče B na strategii s* označujeme strategii t^* takovou, že pro každé $t \in T$ platí

$$u_2(s, t^*) \geq u_2(s, t).$$

Je zřejmé, že na jednu strategii může existovat více nejlepších odpovědí, ovšem všechny pro budou pro daného hráče z hlediska výplaty rovnocenné (proč?). Můžeme vytvořit myšlenkovou mapu celé hry, tzv. *diagram nejlepších odpovědí*, kde šipky ukazují, kam by který hráč hru pomocí nejlepších odpovědí „směřoval".



Zajímavá je situace, kdy Alois hraje 1 a Barbora 2. Vidíme, že k tomuto místu ve hře směřují obě šipky. Tuto situaci popisuje následující definice.

Definice 5. Mějme hru $\{Q, S, T, u_1, u_2\}$. Jako *Nashovu rovnováhu* označujeme uspořádanou dvojici strategií $\{s^*, t^*\}$, kde $s^* \in S$, $t^* \in T$ takovou, že platí

$$u_1(s^*, t^*) \geq u_1(s, t^*)$$
$$u_2(s^*, t^*) \geq u_2(s^*, t)$$

pro libovolné $s \in S, t \in T$ (neboli s^* je nejlepší odpovědí hráče A na strategii t^* a současně t^* je nejlepší odpovědí hráče B na strategii s^*). Strategii s^* označujeme jako *rovnovážnou strategii hráče A*, t^* jako *rovnovážnou strategii hráče B*.

To znamená, že pokud Alois změní strategii a Barbora bude hrát rovnovážnou strategii, Alois si jedině pohorší! To samé platí i pro Barboru. V diagramu nejlepších odpovědí je Nashova rovnováha místo, do kterého směřují šipky ze všech směrů. Nashovu rovnováhu můžeme označit za onen pomyslný Řím, do kterého vedou všechny myšlenkové cesty hráčů. Její nalezení proto bude základem řešení hry (v příští sekci přímo i řešením, později si však ukážeme, že nalézt Nashovu rovnováhu nemusí vždycky stačit. Nashova rovnováha nám totiž neříká nic o situaci, kdy se od své rovnovážné strategie odchýlí oba dva!).

Matematika pro dogmatiky

Označení „normální tvar“ má svůj význam. I strom hry lze totiž do tohoto tvaru převést. Jak to učiníme? Hráče i výplaty za všechna možná vyústění hry známe. Ovšem v extenzivním tvaru jsme užívali „akce“, zatímco v normálním „strategie“. Tyto pojmy nejsou rozdílné náhodou. Strategie určuje průběh celé hry, akce pouze jednoho tahu. Například u dámy je akcí přesun figury z jedné pozice na druhou, strategií je schéma, které hráči říká, kam má za dané situace figuru přesunout. Na začátku hry hráč zhodnotí všechny strategie, jednu vybere a potom už během hry neuvažuje co dál, ale pouze se řídí tím, co mu ono schéma říká. Jedna ze strategií Aloise v Nimu (hra 1) může znít:

> V 1. tahu odeberu jednu sirku. Ve 2. tahu pro mě mohou nastat 2 situace. Pokud Barbora odebere jednu, odeberu dvě. Pokud odebere dvě, musím odebrat jednu.

Uvažovanou Aloisovu strategii lze zapsat například tímto způsobem:

$$[(1)(2,1)].$$

První tah je zapsán v první závorce, druhý ve druhé. Druhá závorka obsahuje 2 čísla, neboť Alois se může dostat do dvou situací. Obdobně můžeme vypsat všechny Aloisovy i Barbořiny strategie (ověřte!):

$$\begin{aligned} S &= \{[(1)(1,1)], [(1)(2,1)], [(2)(1)]\} \\ T &= \{[(1,1)(1)], [(1,2)(1)], [(2,1)], [(2,2)]\} \end{aligned}$$

Z extenzivního tvaru s úplnou informací jsme obdrželi tvar normální, hru typu 3×4.

		Barbora			
		[(1,1)(1)]	[(1,2)(1)]	[(2,1)]	[(2,2)]
	[(1)(1,1)]	$(1,-1)$	$(1,-1)$	$(-1,1)$	$(-1,1)$
Alois	[(1)(2,1)]	$(-1,1)$	$(-1,1)$	$(-1,1)$	$(-1,1)$
	[(2)(1)]	$(-1,1)$	$(1,-1)$	$(-1,1)$	$(1,-1)$

3.1 Hry s nulovým součtem a jejich řešení

V běžném životě se často setkáváme s hrami dvou hráčů, kteří vloží do hry nějakou sázku stejné výše a výsledkem je zisk jednoho hráče, zatímco druhý tratí. Nejedná se pouze o hazardní hry. Obdobným způsobem můžeme popsat například válečné konflikty, kdy uchvatitel dobyje určité území, zatímco napadený o totéž území přijde.

Definice 6. Mějme hru dvou hráčů v normálním tvaru $H = \{Q, S, T, u_1, u_2\}$. Hru H nazýváme jako *hra s nulovým součtem*, jestliže pro každé $s \in S$, $t \in T$ platí

$$u_1(s,t) + u_2(s,t) = 0.$$

Zkoumáním definice jsme schopni nalézt vztah mezi u_1 a u_2, konkrétně

$$u_2(s,t) = -u_1(s,t),$$

čili známe-li jednu výplatní funkci, můžeme jednoznačně určit i druhou pouhou změnou znaménka. Protože jedna funkce se zkoumá jednodušeji než dvě, budeme při řešení her s nulovým součtem využívat pouze výplatní funkce hráče A, kterou budeme ve zbytku sekce pro jednoduchost označovat $u(s,t)$.

Dosazovací hra 3 je příkladem hry s nulovým součtem. Zapišme ji pomocí jedné funkce.

		Barbora		
		2	4	6
	1	2	12	30
Alois	3	-6	12	54
	5	-30	-20	30

Hry s nulovým součtem též nazýváme jako *maticové hry*, neboť pro účely aplikací jsou výplaty často zapisovány do tzv. *výplatní matice.*

$$\begin{pmatrix} 2 & 12 & 30 \\ -6 & 12 & 54 \\ -30 & -20 & 30 \end{pmatrix}$$

Pohnutky Aloise jsou zřejmé: získat co nejvyšší počet bodů. Barbora má stejný cíl, ovšem je třeba si uvědomit, že nyní dostává výplatu v hodnotách funkce u vynásobených -1. Tedy její nejvyšší výhra je rovna Aloisově nejnižší výhře (v tomto případě -30). Pro účely her s nulovým součtem si lze Barboru představit jako zlomyslnou záškodnici snažící se Aloisovi způsobit co největší újmu. Takové úvahy ale zahýbají i s definicí Nashovy rovnováhy. Formulujme ji pro hry s nulovým součtem (porovnejte s původní definicí!).

Definice 7. Nechť $H = \{Q, S, T, u\}$ je hra s nulovým součtem. Jako Nashovu rovnováhu hry H označujeme uspořádanou dvojici strategií $\{s^*, t^*\}$ takovou, že pro každé $s \in S$, $t \in T$ platí

$$u(s, t^*) \leq u(s^*, t^*) \leq u(s^*, t).$$

Uvědomme si, co nám Nashova rovnováha říká ve hře s nulovým součtem. Představme si, že při Nashově rovnováze vyhraje Alois (tedy hodnota funkce u bude při Nashově rovnováze kladná). Pokud bude Alois hrát svou rovnovážnou strategii, a Barbora ne, nejenže Barbora dopadne ještě hůř, ale navýší Aloisovu výhru! Alois má tedy jistotu výhry a proto nemá potřebu hrát něco jiného než rovnovážnou strategii. Barbora má v tom případě jistou prohru a bude se snažit, aby ji bolela co nejméně, proto se též nechce odchýlit od své rovnovážné strategie. To samé se stane, pokud při Nashově rovnováze vyhraje Barbora (hodnota funkce u je zde záporná), jenom si hráči prohodí role. Pokud bude hodnota funkce u při Nashově rovnováze 0, dostáváme se do patové situace, neboť kdo se odchýlí od své rovnovážné strategie, zatímco soupeř se jí bude držet, prohraje (proč?). Z těchto úvah můžeme stanovit:

Je-li H hra s nulovým součtem, potom její Nashovu rovnováhu označujeme jako *řešení hry H*.

Někdy se může stát, že hra bude mít více Nashových rovnováh. Otázka zní: Bude pro hráče některá z nich výhodnější než jiná?

Věta 2. Mějme hru H s nulovým součtem a její Nashovy rovnováhy $\{s^*, t^*\}$ a $\{s', t'\}$. Potom platí

$$u(s^*, t^*) = u(s', t').$$

Důkaz. Přímo z definice Nashovy rovnováhy ve hrách s nulovým součtem plyne

$$u(s^*, t^*) \leq u(s^*, t') \leq u(s', t') \leq u(s', t^*) \leq u(s^*, t^*),$$

což vzhledem k rovnosti prvního a posledního členu této posloupnosti znamená

$$u(s^*, t^*) = u(s^*, t') = u(s', t') = u(s', t^*) = u(s^*, t^*),$$

čili

$$u(s^*, t^*) = u(s', t').$$

Tato věta nám říká, že ve hrách s nulovým součtem jsou všechny Nashovy rovnováhy z hlediska výhry pro oba hráče rovnocenné, proto budeme za řešení hry s nulovým součtem pokládat každou její Nashovu rovnováhu.

3.1.1 Minimax a maximin

Nechť Alois s Barborou hrají Dosazovací hru 3. Abychom nalezli Nashovu rovnováhu, můžeme vytvořit diagram nejlepších odpovědí. Ovšem to pro větší hry může být zdlouhavá činnost. Zkusme se na hru podívat z jiného úhlu. Pokud bude Alois opatrný, podívá se nejprve jednotlivě na své strategie a zjistí, co nejhoršího mu může Barbora při konkrétní strategii provést, neboli hledá minimum v každém řádku.

		Barbora			
		2	4	6	min
Alois	1	2	12	30	2
	3	-6	12	54	-6
	5	-30	-20	30	-30

Pokud bude Alois hrát strategii, jejíž minimum je vyšší než minima u ostatních strategií (je maximem mezi minimy), má zaručenou alespoň nějakou minimální výplatu (pokud je tato hodnota záporná, je tato strategie „nejmenším zlem“ zaručujícím nízkou ztrátu oproti ostatním). Tuto strategii nazveme *maximinová strategie*. Nejnižší výplatu, jakou Alois může za maximinovou strategii získat nazýváme *maximin (dolní cena hry)*. V Dosazovací hře je Aloisovou maximinovou strategií strategie 1 a maximinem výplata 2.

Co když bude stejným způsobem uvažovat i Barbora? Již víme, že Barbora se snaží, aby hra dopadla pro Aloise co nejhůře, neboli čím vyšší hodnoty funkce u dosáhne, tím hůř pro ni. Proto pro Barboru nejsou nejhorší výsledky jednotlivých strategií minima sloupců, nýbrž jejich maxima.

		Barbora			
		2	4	6	min
	1	2	12	30	2
	3	-6	12	54	-6
Alois	5	-30	-20	30	-30
	max	2	12	54	

Ze stejného důvodu pro Barboru hledáme ono nejmenší zlo jako minimum mezi maximy. Pro Barboru stanovujeme tzv. *minimaxovou strategii*, což je Barbořina strategie, jejíž maximální výplata je menší nebo rovna maximálním výplatám ostatních strategií. Maximální výplatu za minimaxovou strategii nazýváme *minimax (horní cena hry)*.

Je zřejmé, že obecně platí

$$\text{maximin} \leq \text{minimax}.$$

V naší hře však nastal speciální případ, a to

$$\text{maximin} = \text{minimax}.$$

Definice 8. Mějme hru s nulovým součtem $H = \{Q, S, T, u\}$. Jestliže je strategie $s^* \in S$ maximinová strategie a $t^* \in T$ minimaxová strategie a platí

$$\text{minimax} = \text{maximin},$$

nazýváme $\{s^*, t^*\}$ jako *sedlový bod hry* H. Číslo $u(s^*, t^*)$ nazýváme *cena hry H.*

Maximin, minimax a případnou cenu hry budeme dále v tabulkách značit červeně. V naší hře je sedlovým bodem dvojice strategií $\{1, 2\}$ a cena hry 2.

		Barbora			
		2	4	6	min
Alois	1	**2**	12	30	**2**
	3	-6	12	54	-6
	5	-30	-20	30	-30
	max	**2**	12	54	

Co sedlový bod pro hráče znamená? Bude-li se Alois držet maximinové strategie, ví že ať Barbora zahraje cokoliv jiného než minimaxovou strategii, uškodí sama sobě. Navíc vzhledem k vlastnostem her s nulovým součtem pomůže jemu (proč?). To samé si říká i Barbora o minimaxové strategii. Proto má-li hra sedlový bod, musí Alois hrát maximinovou strategii a Barbora minimaxovou, čili sedlový bod bude řešením hry s nulovým součtem. Nepřipomíná vám celý tento odstavec jeden pojem, s nímž jsme se již dříve setkali?

Věta 3. Nechť $H = \{Q, S, T, u\}$ je hra s nulovým součtem obsahující sedlový bod $\{s^*, t^*\}$. Potom $\{s^*, t^*\}$ je Nashovou rovnováhou hry H.

Důkaz. Plyne přímo z definice maximinové strategie, minimaxové strategie a sedlového bodu.

Diskutujme o počtu sedlových bodů ve hrách s nulovým součtem. Čtenář se na příkladu hry Kámen-nůžky-papír může snadno přesvědčit, že ne každá hra má sedlový bod. Může mít nějaká hra více sedlových bodů? Uvažujme hru typu 3×5 s nulovým součtem s následujícími výplatami.

Hra 4.

		Barbora					
		t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	min
Alois	s_1	7	**6**	11	**6**	13	**6**
	s_2	-7	-3	12	5	-3	-3
	s_3	-1	2	0	0	-22	-22
	max	7	**6**	11	**6**	13	

Obdrželi jsme dva sedlové body $\{s_1, t_2\}$ a $\{s_1, t_4\}$. Vidíme, že je skutečně splněno $u(s_1, t_2) = u(s_1, t_4) = 6$, jak nám říká věta 2.

3.1.2 Dominance strategií

Alois jakožto inteligentní rozhodovatel by se u hry 3 pozastavil nad svou strategií 5. Proč pro všechno na světě hrát strategii, která nemůže přinést nic lepšího než ostatní strategie? Srovná-li ji Alois například se strategií 3, shledá, že kdyby Barbora hrála 2, je výhodnější hrát 3 než 5, neboť $-30 < -6$. Totéž zjistí i pro ostatní Barbořiny možnosti, protože $-20 < 12$, a $30 < 54$. Ať Barbora vymyslí cokoliv, vždy bude pro Aloise lepší hrát 3 než 5. Kvůli tomu může z dalších úvah o ideální strategii 5 úplně vypustit. Říkáme, že strategie 3 *dominuje* strategii 5. Analogicky uvažuje Barbora, ovšem s tím rozdílem, že Barbora chce docílit co nejmenší výplaty.

Definice 9. Nechť $H = \{Q, S, T, u\}$. Mějme 2 strategie hráče A $s_i, s_j \in S$. Jestliže pro každou strategii $t \in T$ platí

$$u(s_i, t) \leq u(s_j, t),$$

říkáme, že *strategie s_i je dominována strategií s_j*.

Mějme 2 strategie hráče B $t_i, t_j \in T$. Jestliže pro každou strategii $s \in S$ platí

$$u(s, t_i) \geq u(s, t_j),$$

říkáme, že *strategie t_i je dominována strategií t_j*.

Mějme 2 strategie hráče A $s_i, s_j \in S$. Jestliže pro každou strategii $t \in T$ platí

$$u(s_i, t) = u(s_j, t),$$

říkáme, že *hráč 1 je indiferentní mezi strategiemi s_i a s_j*. Analogicky pro hráče B.

Odstraněním dominovaných strategií můžeme hru značně zjednodušit, někdy i kompletně vyřešit. Někdy nejsou dominance na první pohled viditelné, ale je třeba se k nim postupně dopracovat. U hry 4 například není s_2 dominována strategií s_1. Avšak t_3 je dominována strategií t_4, načež obdržíme novou výplatní matici.

Barbora

		t_1	t_2	t_4	t_5
	s_1	7	6	6	13
Alois	s_2	-7	-3	5	-3
	s_3	-1	2	0	-22

Zde již je strategie s_2 dominována s_1. Čtenář se může přesvědčit, že postupnou eliminací dominovaných strategií lze dojít až k výsledku

Barbora

		t_2	t_4
Alois	s_1	6	6

Barbora je nyní indiferentní mezi t_2 a t_4. Žádnou ze strategií již neeliminujeme.

I když má hra sedlový bod, není nutností, že jsou některé strategie dominovány, což si můžeme ověřit na následujícím příkladu (nalezněte sedlový bod a proveďte!).

Barbora

		t_1	t_2	t_3
	s_1	1	2	2
Alois	s_2	0	5	-3
	s_3	0	-1	4

Matematika pro dogmatiky

Ve většině publikací je rozlišována tzv. *silná* a *slabá dominance*. Slabá dominance je definována stejně jako naše dominance. Silnou definujeme podobně, jenom znaménka $\leq, \geq$ nahradíme $<, >$. Slabá dominance má totiž tu nevýhodu, že může eliminovat některé sedlové body! Například u hry

		Barbora	
		t_1	t_2
Alois	s_1	7	15
	s_2	7	11

záleží, zda se na hru budeme dívat první z pohledu Aloise nebo Barbory. Pokud začneme od Aloise, vidíme, že strategie s_2 je dominována strategií s_1. Protože $15 \geq 7$, Barbora bude hrát t_1 a obdržíme sedlový bod $\{s_1, t_1\}$. Začneme-li ale uvažovat od Barbory, shledáme, že t_2 je dominována t_1. Ovšem Alois je po eliminaci t_2 indiferentní mezi svými strategiemi, čili obdržíme 2 sedlové body $\{s_1, t_1\}$,$\{s_2, t_1\}$. Užívána je proto spíše silná dominance, která nikdy sedlový bod nevyeliminuje (proč?). Pro náš základní kurz je však postačující užívat slabou dominanci.

3.1.3 Smíšené strategie

Hra 5. Vojska maršála Radeckého drží 2 pozice, přičemž druhá má dvojnásobnou hodnotu než první. Jeho protivník Karel Albert drží třetí pozici, která má stejnou hodnotu jako první pozice maršála Radeckého a čtvrtou s trojnásobkem hodnoty první. Oběma dorazily posily a nyní plánují další kroky. S novou jednotkou mohou zaútočit nebo podpořit některou ze stávajících pozic. Pokud někdo zaútočí na pozici bez podpory, území zabere. Pokud zaútočí na podpořenou pozici bude odražen a nikdo nic nezíská.

Situaci lze zapsat jako hru s nulovým součtem. Můžeme si povšimnout, že tato hra nemá sedlový bod, neboť minimax$\neq$maximin.

Karel Albert

		Obrana 3	Obrana 4	Útok na 1	Útok na 2	min
	Obrana 1	0	0	0	-2	-2
maršál Radecký	Obrana 2	0	0	-1	0	-1
	Útok na 3	0	1	0	-1	-1
	Útok na 4	3	0	2	1	**0**
	max	3	**1**	2	**1**	

Aby se nám se hrou lépe pracovalo, je užitečné zjednodušit ji eliminací dominovaných strategií.

Karel Albert

		Obrana 4	Útok na 2
maršál Radecký	Útok na 3	1	-1
	Útok na 4	0	1

Jak takovou hru řešit? Čtenář si možná říká, ať prostě maršál Radecký útočí na 4, protože nemůže nic ztratit. Ovšem to Karel Albert ví a bude tuto pozici hlídat. Proč by tedy Radecký nemohl zaútočit v duchu nejproslulejší hlášky válečných filmů „Tohle jistě nebudou čekat!“ na pozici 3? To ale může Karla Alberta napadnout... V těchto hrách se dostáváme do začarovaného kruhu, což lze vidět i na diagramu nejlepších odpovědí.

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Karel Albert} \\ & & \text{Obrana 4} \quad \text{Útok na 2} \\ \text{Radecký} & \begin{array}{c}\text{Útok na 3} \\[1.5em] \text{Útok na 4}\end{array} & \begin{tikzcd} {} \arrow[r] & {} \arrow[d] \\ {} \arrow[u] & {} \arrow[l] \end{tikzcd} \end{array}$$

V rámci jedné hry není možné se z něj vymotat. Nezbývá nám, než svěřit osud náhodě. V takovém případě není protivník schopen strategii předvídat a musí se též rozhodnout náhodně. Zůstává otázka, jakým způsobem náhodu alespoň trochu přiklonit na svou stranu. Přesně pro tento účel je vytvořena teorie pravděpodobnosti. Co se stane, nastane-li tato situace mnohokrát za sebou? Pokud by například maršál Radecký v polovině případů útočil na post 3 a v polovině na post 4, zatímco by Karel Albert vždy bránil pozici 4, dostal by Radecký v polovině případů výplatu 1 a ve druhé polovině 0 (zdůvodněte!). Výplatu za jednu hru proto lze stanovit jako

$$\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{2}.$$

Obdobně pokud by takovou strategii maršál Radecký využil v případě, že Karel Albert pokaždé zaútočí na post 2, můžeme stanovit výplatu za jednu hru jako

$$\frac{1}{2} \cdot (-1) + \frac{1}{2} \cdot 1 = 0.$$

Zavedli jsme novou tzv. *smíšenou strategii* pro maršála Radeckého „v $\frac{1}{2}$ případů útoč na pozici 3, v $\frac{1}{2}$ případů útoč na pozici 4“, kterou budeme značit $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Původní strategie nazýváme jako *čisté strategie*. Přidejme smíšenou strategii k ostatním.

		Karel Albert	
		Obrana 4	Útok na 2
maršál Radecký	Útok na 3	1	-1
	Útok na 4	0	1
	$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	0

Hraní takové smíšené strategie si můžeme představit tak, že při rozhodnutí maršál Radecký vloží do osudí černou a bílou kuličku. Pokud vytáhne černou, útočí na 3, pokud bílou, útočí na 4. Uvědomme si, že výhra není v případě smíšené strategie pevně daná! Když bude štěstěna při Radeckém, může se svou smíšenou strategií neustále vyhrávat, stejně tak ale může mít smůlu. Přesto tušíme, že i náhoda má určitá pravidla (když házeme kostkou, je jasné, že šance padnutí šestky je menší než šance nepadnutí šestky). Proto výhru za smíšenou strategii označujeme jako *očekávaná výhra*.

Analogicky i Karel Albert může mít definovánu kupříkladu smíšenou strategii $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$ jako „v $\frac{1}{4}$ případů braň 4, v $\frac{3}{4}$ případů útoč na 2“ (neboli vloží do osudí jednu černou a tři bílé kuličky a jednu vytáhne). Opět lze vypočíst

$$u\left(\text{Útok na 3}, \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)\right) = \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{3}{4} \cdot (-1) = -\frac{1}{2},$$
$$u\left(\text{Útok na 4}, \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)\right) = \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{3}{4} \cdot 1 = \frac{3}{4}.$$

Co se stane, hraje-li maršál Radecký $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ a Karel Albert $\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$? Stane se to, že v $\frac{1}{2}$ případů hraje maršál Radecký „útoč na 3“ a současně Karel Albert v $\frac{1}{4}$ případů „braň 4“. Situace, kdy maršál Radecký napadá 3 a Karel Albert brání 4 proto nastává v $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ případů. Obdobně shledáme, že útok na 3 za současného útoku na 2 proběhne v $\frac{3}{8}$ případů, útok na 4 za současné obrany 4 v $\frac{1}{8}$ případů a útok na 4 za současného útoku na 2 v $\frac{3}{8}$ případů. Nyní můžeme vypočíst očekávanou výhru.

$$u\left(\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)\right)=\frac{1}{8}\cdot 1+\frac{3}{8}\cdot(-1)+\frac{1}{8}\cdot 0+\frac{3}{8}\cdot 1=\frac{1}{8}.$$

Doplňme vše do tabulky.

		Karel Albert		
		Obrana 4	Útok na 2	$\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)$
maršál Radecký	Útok na 3	1	-1	$-\frac{1}{2}$
	Útok na 4	0	1	$\frac{3}{4}$
	$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{8}$

Je jasné, že smíšených strategií lze zavést pro oba hráče nekonečné množství podle toho, jak rozdělíme pravděpodobnosti čistým strategiím, čímž provedeme tzv. *smíšené rozšíření původní hry*. Poznamenejme, že čisté strategie jsou vlastně speciálním případem smíšených strategií, kdy některou strategii hrajeme s pravděpodobností 1 a ostatní s pravděpodobností 0.

Stejným způsobem smíšené rozšíření zavedeme později i pro ostatní hry v normálním tvaru. Platí následující věta, která pro svou důležitost často bývá označována jako *Základní věta teorie her*.

Věta 4. Každá hra s konečným počtem čistých strategií má Nashovu rovnováhu v čistých nebo smíšených strategiích.

Všimněme si, že ve větě není použito sousloví „s nulovým součtem“. Věta platí pro jakoukoliv hru! Dokázal ji roku 1951 matematik John Forbes Nash (odtud Nashova rovnováha). Za zmínku stojí, že Nash roku 1994 spolu s kolegy Reinhardem Seltenem a Johnem Harsanyim obdržel za svou práci v oblasti teorie her Nobelovu cenu za ekonomii. O životě tohoto podivuhodného matematika pojednává i známý film *A beautiful mind* (do češtiny přeložen jako Čistá duše). Důkaz věty zahrnuje i znalosti vysokoškolské matematické analýzy, proto zde nebude uváděn. Zájemci mohou jeho zjednodušenou verzi pro hry dvou hráčů nalézt například v [4]. Pokud si uvědomíme, že Nashovu rovnováhu považujeme za řešení hry s nulovým součtem, vidíme, že každá hra s nulovým součtem má řešení! Teď už stačí naučit se hledat ty správné smíšené strategie a máme vyhráno!

Matematika pro dogmatiky

Chceme-li zavést exaktně smíšenou strategii ve hře s nulovým součtem typu $m \times n$, kde hráč 1 má prostor strategií $S = \{s_1, ..., s_m\}$ a hráč 2 $T = \{t_1, ..., t_n\}$, musíme pro každou strategii s_i nalézt pravděpodobnost, s jakou bude hrána, tj. číslo z reálného intervalu $\langle 0, 1\rangle$, označme jej p_i. Zřejmě musí platit

$$p_1 + ... + p_m = 1.$$

Stejně přiřadíme i čísla q_j strategiím t_j.

$$q_1 + ... + q_n = 1.$$

Smíšené strategie označme jako $\mathbf{p} = (p_1, ..., p_m)$ a $\mathbf{q} = (q_1, ..., q_n)$. Smíšené rozšíření původní hry musí zahrnovat všechny smíšené strategie, proto vytvoříme nové prostory strategií

$$\begin{aligned} S_s &= \{\mathbf{p} = (p_1, ..., p_m); p_i \geq 0; p_1 + ... + p_m = 1\}, \\ T_s &= \{\mathbf{q} = (q_1, ..., q_n); q_j \geq 0; q_1 + ... + q_n = 1\}. \end{aligned}$$

[čti „S_s je množina všech $\mathbf{p} = (p_1, ..., p_m)$, kde $p_i \geq 0$, takových, že $p_1 + ... + p_m = 1$“. Obdobně pro T_s.] Jak již bylo řečeno, smíšené strategie zahrnují i čisté strategie, např. $s_1 = (1, 0, ..., 0)$. Zbývá nalézt výplatní funkci smíšeného rozšíření, kterou označíme u_s. Hrají-li hráči strategie $\mathbf{p}$ a $\mathbf{q}$ musíme sečíst výplaty všech možných situací. Jak bylo ukázáno na příkladu výše, například k situaci, kdy hráč 1 hraje strategii s_1 a hráč 2 strategii t_3 dojde s pravděpodobností $p_1 \cdot q_3$ a výplata za takové situace bude $p_1 \cdot q_3 \cdot u(s_1, t_3)$. Pokud stejnou úvahu provedeme pro všechna i a j, lze výsledek zapsat do sumy.

$$u_s(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i q_j u(s_i, t_j).$$

Smíšeným rozšířením hry s nulovým součtem $\{Q, S, T, u\}$ nazveme hru s nulovým součtem $\{Q, S_s, T_s, u_s\}$. Vzpomínáte na poznámku o korektnosti pojmu výplatní funkce v kapitole 1? Zde vidíte, že výplatní funkce je skutečně funkcí $m + n$ proměnných $p_1, ..., p_m, q_1, ..., q_n$.

Závěrem sekce poznamenejme, že sedlový bod si zachová svůj status Nashovy rovnováhy i ve smíšeném rozšíření hry, neboli pokud má hra sedlový bod, neexistuje smíšená strategie taková, že by byla výhodnější než minimaxová (či maximinová) strategie.

Věta 5. Nechť H je hra s nulovým součtem a $\{s^*, t^*\}$ je její sedlový bod. Potom $\{s^*, t^*\}$ je Nashovou rovnováhou i ve smíšeném rozšíření hry H.

Matematika pro dogmatiky

Důkaz. Nechť $H = \{Q, S, T, u\}$ je hra s nulovým součtem typu $m \times n$ a $\{s^*, t^*\}$ je její sedlový bod a $H_s = \{Q, S_s, T_s, u_s\}$ je její smíšené rozšíření. Pro čisté strategie platí

$$u_s(s_i, t_j) = u(s_i, t_j).$$

Proto pro libovolnou strategii $\mathbf{p} \in S_s$ je

$$u_s(\mathbf{p}, t^*) = \sum_{i=1}^{m} p_i u(s_i, t^*).$$

Vzhledem k tomu, že $u(s_i, t^*) \leq u(s^*, t^*)$, dostáváme

$$u_s(\mathbf{p}, t^*) \leq \sum_{i=1}^{m} p_i u(s^*, t^*) = u(s^*, t^*) \sum_{i=1}^{m} p_i$$

a jelikož

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = p_1 + ... + p_m = 1,$$

získáme

$$u_s(\mathbf{p}, t^*) \leq u(s^*, t^*) = u_s(s^*, t^*).$$

Stejným způsobem dokážeme i $u_s(s^*, t^*) \leq u_s(s^*, \mathbf{q})$.

Schéma řešení her s nulovým součtem

1) Nalezneme minimax a maximin obou hráčů.

   i) Jestliže je hodnota minimaxu a maximinu stejná, hra má Nashovu rovnováhu v podobě sedlového bodu. Rovnovážná strategie hráče A je maximinová strategie, rovnovážná strategie hráče B je minimaxová strategie. **Hra je vyřešena**

   ii) Jestliže není hodnota minimaxu a maximinu stejná, pokračujeme na bod 2).

2) Eliminujeme dominované strategie.

3) Nalezneme Nashovu rovnováhu ve smíšených strategiích. **Hra je vyřešena**.

3.1.4 Rovnovážné smíšené strategie pro hry s nulovým součtem typu 2×2

Díky větě 4 již máme potvrzeno, že pokud ve hře neexistuje sedlový bod, existují pro oba hráče rovnovážné smíšené strategie, jenom zatím nevíme, jak vypadají ani jaké hodnoty nabude cena hry. Obecné řešení her s nulovým součtem typu $m \times n$ je poměrně obtížné a vyžaduje znalost tzv. *lineárního programování*. Pro některé speciální případy ovšem existují jednoduché formule. Podívejme se nejprve na hry typu 2×2, nejprve na konkrétním příkladu hry 5. Mějme nějakou libovolnou smíšenou strategii maršála Radeckého. Tu můžeme zapsat jako $\mathbf{p} = (p, 1-p)$, kde $p \in \langle 0, 1 \rangle$ (čili uvažujeme i čisté strategie $(1, 0) =$ „útoč na 3“ a $(0, 1) =$ „útoč na 4“). Stejně tak můžeme libovolnou smíšenou strategii Karla Alberta zapsat jako $\mathbf{q} = (q, 1-q)$, kde $q \in \langle 0, 1 \rangle$. Dostáváme

$$u(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 1pq - 1p(1-q) + 0(1-p)q + 1(1-p)(1-q) = 3pq - 2p - q + 1.$$

Podívejme se na funkci pohledem maršála Radeckého. Ten může měnit svou strategii, ale neovlivní, co bude hrát Karel Albert. Ve funkci u bere tedy p jako proměnnou a q jako parametr. Proto je pro něj užitečné převést funkci na tvar

$$u(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = (3q - 2)p - q + 1.$$

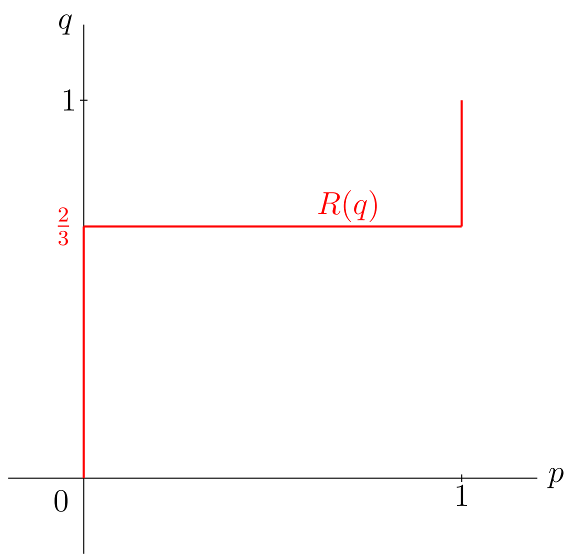
V závislosti na parametru mohou nastat 3 možnosti

(1) Pokud bude $q \in \langle 0, \frac{2}{3})$, bude funkce u ve směru p klesající (proč?). Maršál chce, aby jeho výplata klesala co nejméně, proto hraje nejmenší možné p, tedy $p = 0$ (čili čistou strategii $(0, 1) =$„útoč na 4“).

(2) Pokud bude $q = \frac{2}{3}$, bude funkce u ve směru p konstantní (proč?). Ať udělá maršál cokoliv, nemůže výhru ovlivnit, vždy obdrží výplatu $-q + 1 = \frac{1}{3}$ (proč?). Nejlepší odpovědí jsou tedy všechny strategie $(p, 1 - p)$.

(3) Jestliže $q \in (\frac{2}{3}, 1\rangle$, bude funkce u ve směru p rostoucí. Proto je pro něj nejlepší tento růst podpořit a hrát co nejvyšší p, tedy $p = 1$ (čili čistou strategii $(1, 0) =$„útoč na 3“).

Všechny Radeckého nejlepší odpovědi můžeme znázornit pomocí tzv. *reakční křivky na strategii* $(q, 1 - q)$. Tuto křivku označujeme $R(q)$



Stejně se na funkci u dívá Karel Albert. Ten ve funkci u bere jako proměnnou q a jako parametr p (proč?), neboli vytýká q a dostane

$$u(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = (3p - 1)q - 2p + 1.$$

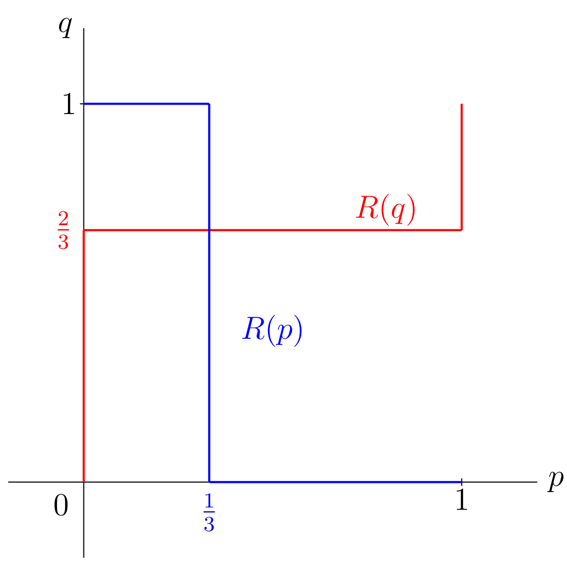
V závislosti na parametru p mohou nastat opět 3 možnosti. Pamatujme, že Karel Albert se narozdíl od svého protivníka snaží, aby byla hodnota funkce co nejnižší!

(1) Pokud bude $p \in \langle 0, \frac{1}{3})$, bude funkce u ve směru q klesající. Karel Albert chce, aby jeho klesala co nejvíc, proto hraje největší možné q, tedy $q = 1$ (čili čistou strategii $(1, 0) =$„braň 4“).

(2) Pokud bude $p = \frac{1}{3}$, bude funkce u ve směru q konstantní. Karel Albert nemůže výhru ovlivnit a obdrží výplatu $-2p + 1 = \frac{1}{3}$. Nejlepší odpovědí jsou tedy všechny strategie $(q, 1 - q)$.

(3) Jestliže $p \in (\frac{1}{3}, 1\rangle$, bude funkce u ve směru q rostoucí. To se Karlu Albertovi nelíbí a chce růst zastavit. Hraje co nejnižší q, tedy $q = 0$ (čili čistou strategii $(0, 1) =$„útoč na 2“).

Přidejme tuto úvahu k úvaze maršála Radeckého. Můžeme ji do grafu znázornit pomocí *reakční křivky na strategii* $(p, 1 - p)$. Tuto křivku označujeme $R(p)$.



Nashova rovnováha nastává, pokud oba hráči hrají svou nejlepší odpověď. Graficky to znamená v průsečíku reakčních křivek. Rovnovážnou strategií maršála Radeckého je proto smíšená strategie $(p, 1 - p) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ a rovnovážnou strategií Karla Alberta $(q, 1 - q) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Z našich úvah vidíme, že cena hry je $\frac{1}{3}$ (čili štěstí se více přiklání na stranu maršála Radeckého).

Z reakčních křivek lze vyčíst další pozoruhodná skutečnost: Pokud se hráč drží své rovnovážné smíšené strategie, jeho očekávaná výhra bude vždy rovna ceně hry!

Vzhledem k vlastnostem výplatní funkce her s nulovým součtem současně hraní rovnovážné strategie zajišťuje stejnou očekávanou výplatu i soupeři (samozřejmě vynásobenou -1). Konkrétně bude-li se maršál Radecký své rovnovážné strategie držet, tak ať udělá Karel Albert cokoliv, obdrží cenu hry krát -1. Následující věta ukazuje, že ke stejnému výsledku dokráčíme v jakékoliv hře s nulovým součtem typu 2×2.

Věta 6. Hra s nulovým součtem typu 2×2 bez sedlového bodu má jedinou Nashovu rovnováhu ve smíšených strategiích $\{s^*, t^*\}$. Pro libovolnou strategii (čistou i smíšenou) $t \in T$ platí

$$u(s^*, t) = u(s^*, t^*).$$

Pro libovolnou strategii $s \in S$ platí

$$u(s, t^*) = u(s^*, t^*).$$

Ve hře bez sedlového bodu

		Barbora	
		t_1	t_2
Alois	s_1	a	b
	s_2	c	d

je rovnovážná strategie Aloise ve tvaru $(p, 1-p)$, kde

$$p = \frac{d-c}{a-b-c+d}$$

a rovnovážná strategie Barbory ve tvaru $(q, 1-q)$, kde

$$q = \frac{d-b}{a-b-c+d}.$$

Cena hry je

$$(c-d)q + d = (b-d)p + d.$$

Nástin důkazu. Důkaz se provádí stejným postupem a úvahami jako hledání Nashovy rovnováhy ve hře 5, pouze tuto hru nahradíme obecnou hrou (vyzkoušejte si postup!).

Shrnutí

Pro hru typu 2×2 s nulovým součtem bez sedlového bodu existuje právě jedna Nashova rovnováha ve smíšených strategiích. Pokud se v této hře alespoň jeden z hráčů drží své rovnovážné strategie, obdrží hráč 1 výhru v hodnotě ceny hry a hráč 2 v záporné hodnotě ceny hry.

Věta 6 nám tedy udává vzorce pro nalezení rovnovážných smíšených strategií ve hrách s nulovým součtem. Vyzkoušejme obecný postup na konkrétním příkladu. Mějme hru

Barbora

Alois		t_1	t_2
	s_1	7	-2
	s_2	-1	1

Dle našeho schématu pro řešení her s nulovým součtem se nejprve podíváme, zda naše hra nemá sedlový bod (proveďte!). Zjistili jsme, že sedlový bod nemá, načež hledáme Nashovu rovnováhu ve smíšených strategiích. Dostáváme

$$p = \frac{1-(-1)}{7-(-2)-(-1)+1} = \frac{2}{11}$$

$$q = \frac{1-(-2)}{7-(-2)-(-1)+1} = \frac{3}{11},$$

čili rovnovážná strategie Aloise je $\left(\frac{2}{11}, \frac{9}{11}\right)$ a rovnovážná strategie Barbory $\left(\frac{3}{11}, \frac{8}{11}\right)$, neboli Nashova rovnováha je $\left\{\left(\frac{2}{11}, \frac{9}{11}\right), \left(\frac{3}{11}, \frac{8}{11}\right)\right\}$. Cenu hry dostáváme jako

$$(-1-1) \cdot \frac{3}{11} + 1 = \frac{5}{11}.$$

Mimochodem, pokud nedopatřením tyto vzorce aplikujete na hru se sedlovým bodem, vyjde vám $p, q \notin (0,1)$, což je zjevně nesmysl, čili hra nemá Nashovu rovnováhu ve smíšených strategiích (zkuste toto tvrzení dokázat!).

3.1.5 Schématické řešení her s nulovým součtem typu 2×2

Mějme hru bez sedlového bodu

Barbora

		t_1	t_2
Alois	s_1	a	b
	s_2	c	d

Ukázali jsme si, že ve hrách s nulovým součtem typu 2×2 bez sedlového bodu má každý hráč právě jednu rovnovážnou smíšenou strategii, která má navíc vlastnost, že pokud se jí hráč drží, obdrží proti všem strategiím soupeře stejnou výplatu. Pokud tedy Alois hraje svou rovnovážnou strategii $\mathbf{p} = (p, 1-p)$ proti čistým strategiím Barbory, platí

$$ap + c(1-p) = bp + d(1-p).$$

Zkusme nalézt poměr $p : (1-p)$. Dostáváme

$$(a-b)p + (c-d)(1-p) = 0$$

To ale pro $p \in (0,1)$ (proč otevřený interval a nikoliv uzavřený?) nastává pouze ve dvou případech. Prvním je $a = b$ a současně $c = d$, což je ale ve sporu s naším předpokladem, že hra nemá sedlový bod (proč?), proto tuto variantu zavrhneme. Tím druhým je, že právě jeden z výrazů $(a-b)p$ a $(c-d)(1-p)$ je menší než 0. Protože p i $1-p$ jsou kladné, lze výraz

$$(a-b)p = -(c-d)(1-p)$$

přepsat do tvaru

$$|a-b|p = |c-d|(1-p).$$

Z toho jsme již schopni určit poměr mezi p a $1-p$

$$p : (1-p) = |c-d| : |a-b|$$

a dopočítat pravděpodobnosti.

$$\begin{aligned} p &= \frac{|c-d|}{|c-d|+|a-b|} \\ 1-p &= \frac{|a-b|}{|c-d|+|a-b|}. \end{aligned}$$

Uvědomme si, že jsme v našem postupu uvažovali následovně: Jestliže je $\mathbf{p}$ Aloisova rovnovážná strategie, pak proti oběma čistým strategiím Babrory Alois obdrží stejnou výhru. Což je implikace, nikoliv ekvivalence. Abychom dokázali, že námi nalezená strategie

$$\left(\frac{|c-d|}{|c-d|+|a-b|}, \frac{|a-b|}{|c-d|+|a-b|}\right)$$

je rovnovážná, musíme ukázat, že platí i opačná implikace, což popisuje následující věta.

Věta 7. Mějme hru s nulovým součtem typu 2×2 bez sedlového bodu. Jestliže pro některou Aloisovu smíšenou strategii $\mathbf{p} = (p, 1-p)$ platí

$$u(\mathbf{p}, t_1) = u(\mathbf{p}, t_2),$$

kde t_1, t_2 jsou Barbořiny čisté strategie, pak je $\mathbf{p}$ rovnovážnou strategií Aloise.

Nástin důkazu. Vezmeme si obecnou hru bez sedlového bodu, libovolnou smíšenou strategii Barbory $\mathbf{q} = (q, 1-q)$ a dokážeme

$$u(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = u(\mathbf{p}, t_1).$$

Dle věty 6 platí, že $\mathbf{p}$ je rovnovážnou strategií Aloise.

Jestliže Barbora bude uvažovat podobně, přičemž hraje strategii $\mathbf{q} = (q, 1-q)$, dostane po stejném postupu poměr $q : (1-q) = |b-d| : |a-c|$, čili rovnovážná strategie Barbory je ve tvaru $\mathbf{q} = (q, 1-q)$, kde

$$
\begin{aligned}
q &= \frac{|b-d|}{|b-d| + |a-c|} \\
1 - q &= \frac{|a-c|}{|b-d| + |a-c|}.
\end{aligned}
$$

Ač vzorce vypadají na první pohled poněkud složitě, lze jejich pomocí snadno vypočítat Nashovu rovnováhu přímo z tabulky. Mějme hru

		Barbora			
		t_1	t_2	|rozdíl|	četnost strategie
Alois	s_1	2	5	$\lvert 2-5\rvert = 3$	$\frac{9}{9+3} = \frac{3}{4}$
	s_2	4	-5	$\lvert 4+5\rvert = 9$	$\frac{3}{9+3} = \frac{1}{4}$
	|rozdíl|	$\lvert 2-4\rvert = 2$	$\lvert 5+5\rvert = 10$		
	četnost	$\frac{10}{10+2} = \frac{5}{6}$	$\frac{2}{10+2} = \frac{1}{6}$		

Jak dopočteme cenu hry? Víme, že rovnovážná strategie zaručuje proti jakékoliv soupeřově strategii stejnou očekávanou výhru. Proto si stačí vzít rovnovážnou strategii Aloise/Barbory a některou čistou strategii Barbory/Aloise a vypočíst výplatu, například

$$u(\mathbf{p}, t_1) = \frac{3}{4} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 4 = \frac{5}{2}.$$

Cena této hry je $\frac{5}{2}$.

3.1.6 Geometrické řešení her s nulovým součtem typu 2×2

Podívejme se na libovolnou hru typu 2×2 s nulovým součtem bez sedlového bodu

		Barbora	
		t_1	t_2
Alois	s_1	a	b
	s_2	c	d

ještě z jiného úhlu. Hraje-li Alois libovolnou smíšenou strategii $\mathbf{p} = (p, 1-p)$ a Barbora strategii t_1, Obdrží Alois výplatu

$$u(\mathbf{p}, t_1) = pa + (1-p)c = (a-c)p + c,$$

což je ale lineární funkce o proměnné $p \in \langle 0, 1 \rangle$, neboť a, c jsou pevně dané hodnoty. Dále budeme tuto funkci značit $f_{t_1}(p)$. Víme, že v kartézské soustavě souřadné ji lze zaznačit jako úsečku. Obdobně pokud Barbora hraje strategii t_2 získáme pro Aloise funkci

$$f_{t_2}(p) = (b-d)p + d.$$

Označme cenu hry v. Dle věty 6 již víme, že strategie $(p, 1-p)$ je rovnovážnou strategií právě tehdy, když platí

$$(a-c)p + c = v$$
$$(b-d)p + d = v.$$

Ti, kteří mají rádi soustavy rovnic či analytickou geometrii, mohou proto Aloisovu rovnovážnou strategii a cenu hry nalézt ještě dvěma způsoby:

(1) jako řešení soustavy dvou lineárních rovnic o dvou neznámých p a v,

(2) jako průsečík úseček daných funkcemi $f_{t_1}(p)$ a $f_{t_2}(p)$.

Barbořinu rovnovážnou strategii $(q, 1-q)$ potom nalezneme dosazením do rovnice

$$(a-b)q + b = v.$$

Může se stát, že řešení soustavy pro $p \in \langle 0,1 \rangle$ neexistuje (neboli úsečky se neprotnou)? Pokud se nad touto situací zamyslíme, zjistíme, že to prostě a jednoduše znamená, že hra nemá řešení ve smíšených strategiích a musí tudíž vzhledem k větě 4 obsahovat sedlový bod, což je situace, kterou zde neuvažujeme. Pokud jsme ověřili, že hra sedlový bod nemá, soustava má vzhledem k větě 4 vždy řešení (úsečky se vždy protnou).

Řešme těmito způsoby následující hru

		Barbora	
		t_1	t_2
Alois	s_1	4	1
	s_2	-1	2

(1) Dostáváme soustavu rovnic

$$5p - 1 = v$$
$$-p + 2 = v.$$

Po dosazení první rovnice do druhé a jednoduché úpravě ihned dostáváme výsledek

$$p = \frac{1}{2}, v = \frac{3}{2}.$$

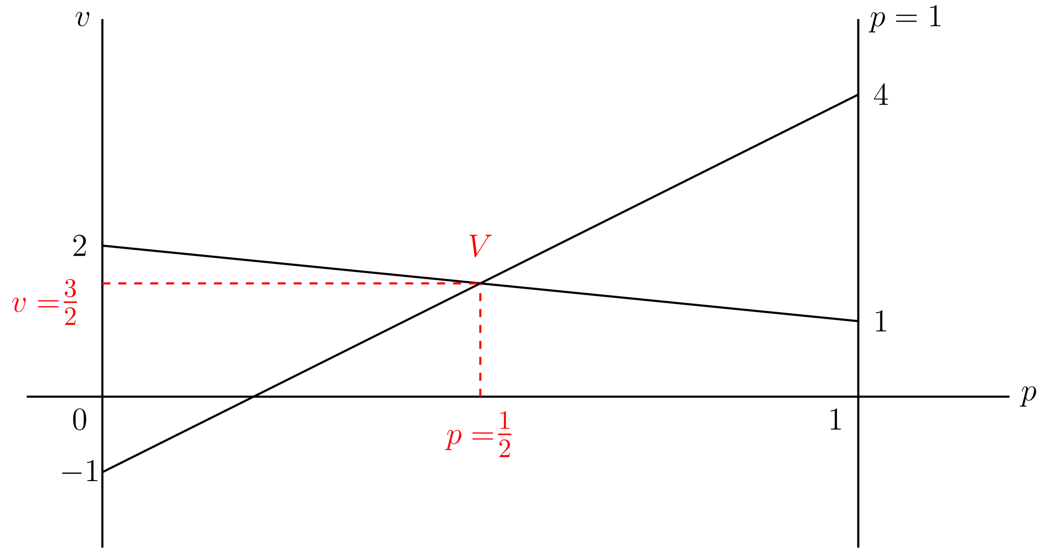
Rovnovážnou strategii Barbory pak dopočteme z rovnice

$$\frac{3}{2} = 3q + 1.$$

Nashova rovnováha hry je $\left\{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{6},\frac{5}{6}\right)\right\}$ a cena hry $\frac{3}{2}$.

(2) Zaznačme funkce $f_{t_1}(p)$ a $f_{t_2}(p)$ do grafu. Víme, že úsečka je určena svými krajními body. Protože $p \in \langle 0,1 \rangle$, nalezneme krajní body postupným dosazením 0 a 1 do funkcí. Ovšem strategie $(0,1)$ a $(1,0)$ jsou čisté, proto jsou

krajní body úsečky určeny hodnotami ze stejného sloupce. Lidově řečeno: doleva zapíšeme hodnoty spodního řádku, doprava horního a spojíme úsečkou ty, které se nacházejí ve stejném sloupci. Vytvořme graf (pro názornost je měřítko $p : v$ zvoleno jako $10 : 1$).



Opět bychom nalezli rovnovážnou strategii Barbory (proveďte a formulujte odpověď k řešení hry!). Pochopení tohoto způsobu řešení bude klíčové pro následující sekci.

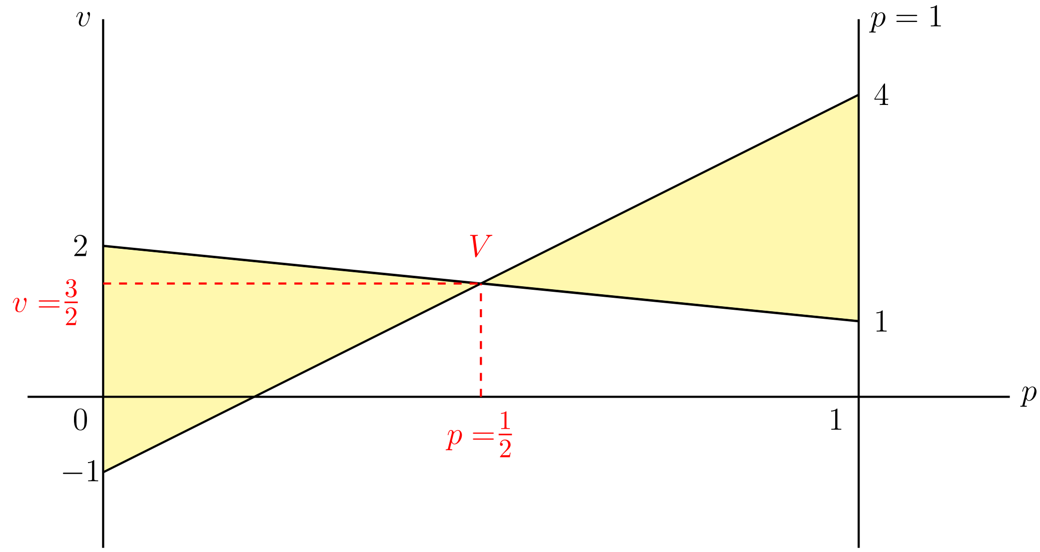
Pro pochopení výsledků další sekce je též důležité vědět, kde v grafu nalezneme Aloisovy výplaty proti Barbořiným smíšeným strategiím. Mějme nejprve Aloisovu čistou strategii s_1 a libovolnou smíšenou strategii Barbory $\mathbf{q}$. Platí

$$u(s_1, \mathbf{q}) = 4q + (1 - q) = 3q + 1.$$

Pro každé $q \in (0, 1)$ je zřejmé, že

$$1 < 3q + 1 < 4,$$

čili výplaty za Aloisovu strategii s_1 proti libovolné smíšené strategii Barbory nalezneme na úsečce s krajními body $[1, 1]$ a $[1, 4]$. Obdobné tvrzení lze dokázat i pro všechny ostatní Aloisovy strategie. Zaznačme do grafu žlutě všechny možné výplaty $u(\mathbf{p}, \mathbf{q})$.



3.1.7 Řešení her typu $2 \times n$ a $m \times 2$ s nulovým součtem

Řešíme-li hru s nulovým součtem, prvním úkonem každého pořádného matematika je pokusit se nalézt sedlový bod. Pokud neexistuje, eliminovat dominované strategie. Pokud jsme tak učinili a stále máme hru typu $2 \times n$, bude pro nás stěžejní následující věta.

Věta 8. Pro libovolnou hru typu $2 \times n$ s nulovým součtem bez sedlového bodu je rovnovážná strategie hráče B smíšená strategie využívající pouze dvou čistých strategií.

Důkaz zde uvádět nebudeme. Ukažme si na příkladu, co tato věta znamená v praxi.

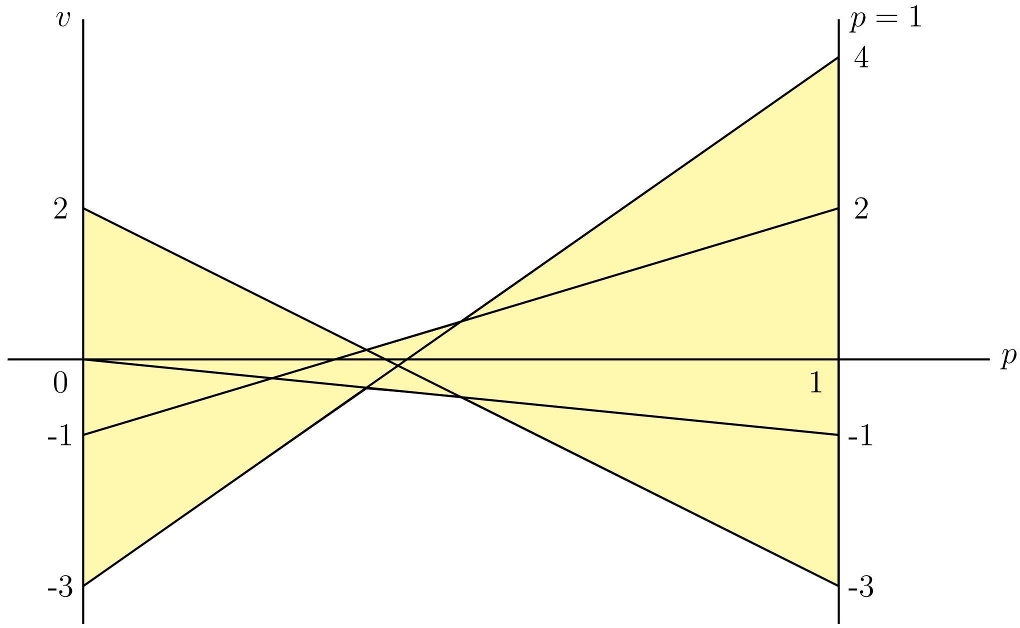
Hra 6. Alois s Barborou počítají do tří. Poté ukážou určitý počet prstů. Alois má povoleno ukázat 1 nebo 2. Barbora 2-5. Je-li součet prstů sudý, vyplatí Alois Barboře částku v absolutní hodnotě rozdílu prstů. Je-li lichý, vyplácí ji Barbora Aloisovi.

		Barbora			
		2	3	4	5
Alois	1	-1	2	-3	4
	2	0	-1	2	-3

Podle věty 8 nalézt řešení této hry znamená vybrat dvě Barbořiny strategie takové, že podhra typu 2×2 bude mít nejnižší cenu hry (proč?) ze všech možných podher typu 2×2 původní hry. První možnost, která nás napadne je vyřešit všechny tyto podhry. V našem případě 2×4 to bude 6 podher, se vzrůstajícím n však i o mnoho víc (pro milovníky kombinatoriky: konkrétně $\frac{n(n-1)}{2}$), takže pilný čtenář může hry typu $2 \times n$ uchopit jako skvělé cvičení řešení her typu 2×2. Ti, kteří se již cítí procvičeni dostatečně, mohou využít geometrie a vytvořit obdobně jako v předchozí sekci funkce určující Aloisovu výplatu za strategii $(p, 1-p)$ proti čistým strategiím Barbory

$$f_{t_1}(p) = -p$$
$$f_{t_2}(p) = 3p - 1$$
$$f_{t_3}(p) = -5p + 2$$
$$f_{t_4}(p) = 7p - 3$$

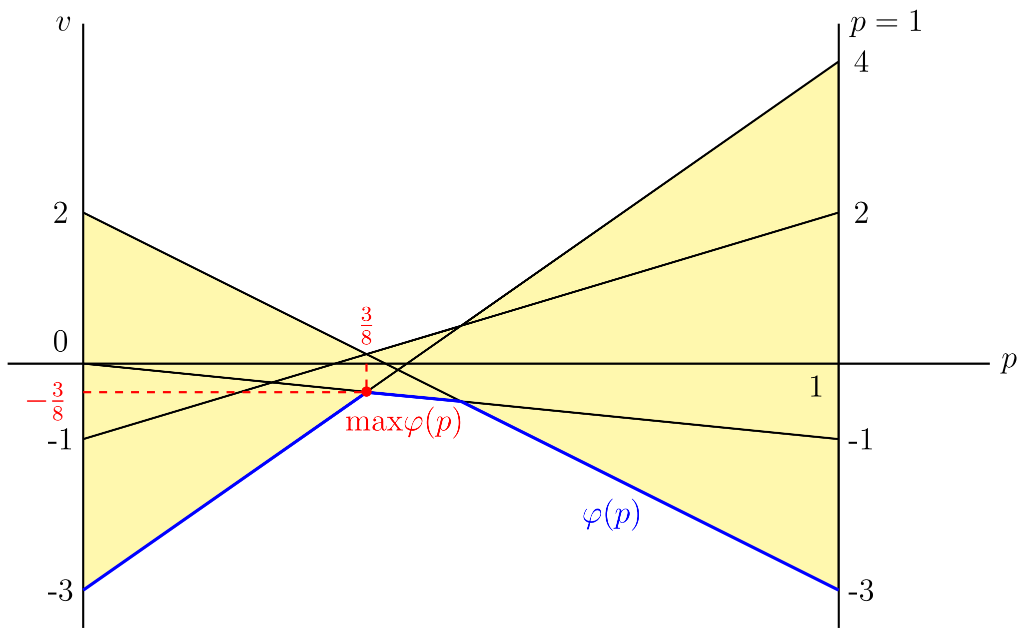
a zaznačit je do grafu



Žlutě vybarvená oblast symbolizuje Aloisovy výplaty proti Barbořiným smíšeným strategiím (proč právě tato oblast?). Víme, že cílem Barbory je, aby dostal Alois co nejnižší výplatu. Skrze graf se může podívat na konkrétní Aloisovu smíšenou strategii a zjistit, jakou největší újmu mu může způsobit. To matematicky znamená, že pro každé p hledá minimum z hodnot $f_{t_1}(p), ..., f_{t_4}(p)$. Dostáváme novou funkci proměnné p.

$$\varphi(p) = \min_{j=1,...,4} f_{t_j}(p).$$

Naproti tomu Alois chce svou výhru navýšit. Už ale ví, že Barbora dokáže jeho výplatu minimalizovat bude-li se řídit funkcí $\varphi(p)$. Čili pro maximalizaci své výplaty se Alois snaží nalézt maximální hodnotu funkce $\varphi(p)$. Zaznačme vše do grafu.



Zbývá odpovědět, jak tento bod interpretovat. Můžeme vidět, že Barbořiny strategie 3 a 4 tímto bodem neprochází a tudíž nemohou ovlivnit řešení hry. To nalezneme vyřešením podhry, kdy Barbora má strategie 2 a 5, které maximem prochází.

		Barbora			
		2	5	|rozdíl|	četnost strategie
Alois	1	-1	4	5	$\frac{3}{8}$
	2	0	-3	3	$\frac{5}{8}$
	|rozdíl|	1	7		
	četnost	$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{8}$		

Cenu hry lze snadno dopočítat

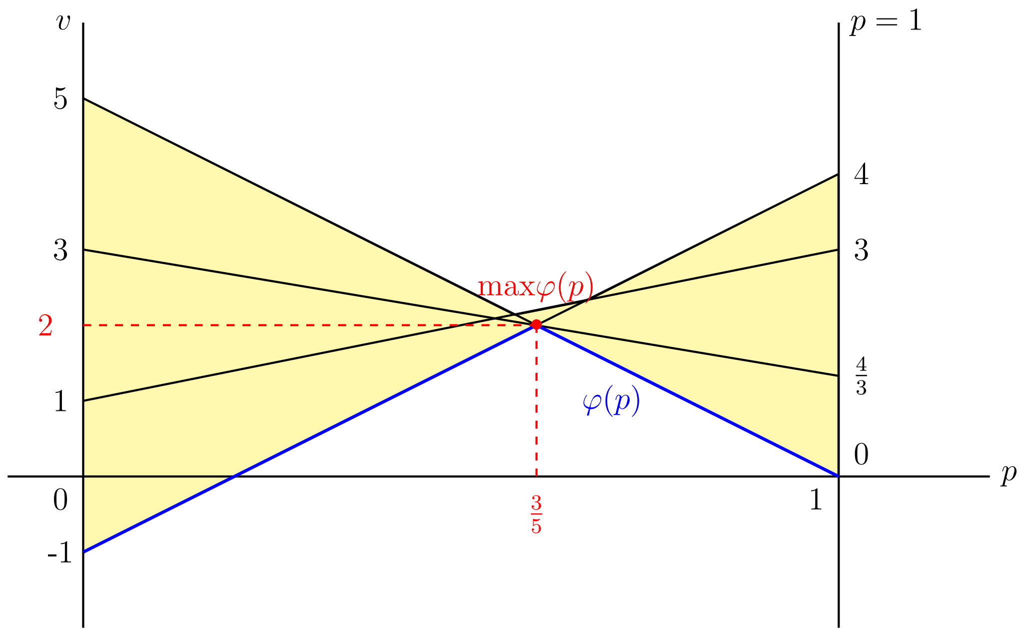
$$v = -\frac{3}{8}.$$

Hra 6 má Nashovu rovnováhu $\left\{\left(\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right), \left(\frac{7}{8}, 0, 0, \frac{1}{8}\right)\right\}$ a cenu hry $-\frac{3}{8}$.

To znamená, že z grafu jsme schopni vyčíst Aloisovu rovnovážnou smíšenou strategii a cenu hry. Barbořinu rovnovážnou strategii musíme dodatečně nalézt pomocí některé dříve uvedené metody.

Zkoumejme nyní tuto hru (nezapomeňme ověřit neexistenci sedlového bodu a zkusit eliminovat dominované strategie!)

		Barbora			
		t_1	t_2	t_3	t_4
Alois	s_1	0	3	$\frac{4}{3}$	4
	s_2	5	1	3	-1



V této hře prochází maximem funkce $\varphi(p)$ všechny Barbořiny strategie kromě t_2. Řešení mohou proto ovlivňovat strategie t_1, t_3 a t_4. Vzhledem k větě 8 musíme uvažovat všechny hry typu 2×2, kde Barbořiny strategie jsou dvě z těchto tří.

Barbora

		t_1	t_3	min
Alois	s_1	0	$\frac{4}{3}$	0
	s_2	5	**3**	**3**
	max	5	**3**	

Barbora

		t_1	t_4	|rozdíl|	četnost strategie
Alois	s_1	0	4	4	$\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$
	s_2	5	-1	6	$\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$
	|rozdíl|	5	5		
	četnost	$\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$	$\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$		**Cena hry=2**

		Barbora			
		t_3	t_4	|rozdíl|	četnost strategie
Alois	s_1	$\frac{4}{3}$	4	$\frac{8}{3}$	$\frac{4}{\frac{8}{3}+4} = \frac{3}{5}$
	s_2	3	-1	4	$\frac{\frac{8}{3}}{\frac{8}{3}+4} = \frac{2}{5}$
	|rozdíl|	$\frac{5}{3}$	5		
	četnost	$\frac{5}{\frac{5}{3}+5} = \frac{3}{4}$	$\frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{3}+5} = \frac{1}{4}$		**Cena hry=2**

Vidíme, že v prvním případě jsme obdrželi sedlový bod o hodnotě 3. Protože $3 > 2$, z první podhry žádné řešení neobdržíme (proč?). Alois má rovnovážnou strategii $\left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$. Barbora má 2 rovnovážné strategie $\left(\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}\right)$ a $\left(0, 0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$. Cena hry je 2. Na tomto příkladu jsme ukázali, že hry typu $2 \times n$ mohou mít i více Nashových rovnováh ve smíšených strategiích.

Hry typu $m \times 2$ řešíme stejným postupem pouze s tím rozdílem, že si Alois s Barborou prohodí role. Mějme nějakou hru

		Barbora	
		t_1	t_2
Alois	s_1	5	3
	s_2	0	8
	s_3	6	0

Hra nemá sedlový bod ani není žádná strategie dominovaná. Je zřejmé, že i pro hry typu $m \times 2$ platí věta 8, jenom v jejím znění zaměníme $2 \times n$ za $m \times 2$ a B za A, takže zkoumáme Barbořiny smíšené strategie $(q, 1-q)$ za situace, hraje-li

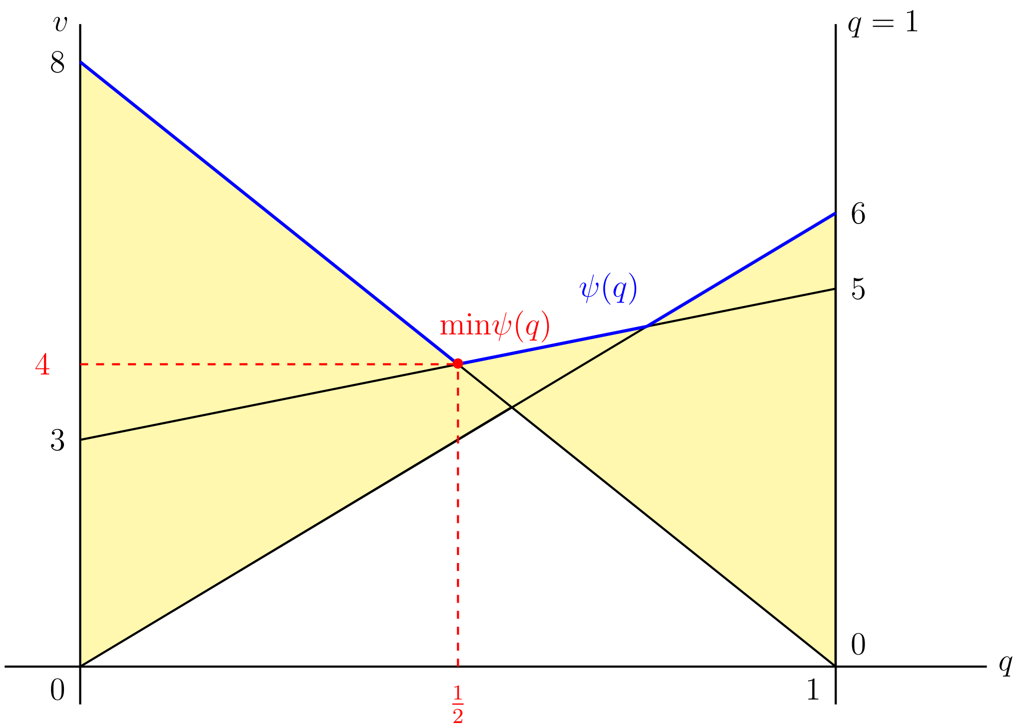
Alois čisté strategie. Obdržíme proto funkce s proměnnou $q \in \langle 0, 1\rangle$.

$$f_{s_1}(q) = 2q + 3$$
$$f_{s_2}(q) = -8q + 8$$
$$f_{s_3}(q) = 6q$$

Záměrem Aloise je získat co nejvyšší výplatu. Proto u her typu $m \times 2$ definujeme funkci

$$\psi(q) = \max_{j=1,\dots,3} f_{s_j}(q)$$

a cenu hry jako minimum z hodnot této funkce (proč?).



Alois bude ve hře využívat strategie s_1 a s_2. Vyřešíme příslušnou podhru typu 2×2 (proveďte!). Nashova rovnováha hry je $\left\{\left(\frac{4}{5}, \frac{1}{5}, 0\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}$ a cena hry 4.

Cvičení

6. Řešte hru

Barbora

		t_1	t_2
Alois	s_1	-2	4
	s_2	20	-10

7. Řešte hru

Barbora

		t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
	s_1	1	-1	0	-2	3
	s_2	3	3	-1	0	5
Alois	s_3	0	2	-3	-1	3
	s_4	1	0	5	2	-1
	s_5	3	1	-2	-1	5

8. Pro jaká x má hra

Barbora

Alois		t_1	t_2	t_3
	s_1	x	5	1
	s_2	-2	x	-5
	s_3	-3	3	x

sedlový bod? Řešte hru pro $x = 4$.

9. Pro jaká x má hra

Barbora

Alois		t_1	t_2
	s_1	x	7
	s_2	-4	x

právě 2 sedlové body?

3.2 Hry ekvivalentní hrám s nulovým součtem

Všechny hry v normálním tvaru, které nesplňují definici 6 nazýváme jako *hry s nenulovým součtem*. U těchto her již musíme zkoumat funkce obou hráčů. V některých speciálních případech si můžeme práci usnadnit a převést tyto hry na hry s nulovým součtem. Mějme následující hru

Barbora

Alois		t_1	t_2
	s_1	$(27, -3)$	$(17, 2)$
	s_2	$(19, 1)$	$(23, -1)$

Představme si, že Alois dostává výplatu v korunách. Nikdo mu nemůže zakázat výhru převést na eura, libry, złoté či jakoukoliv jinou měnu. Jeho preference se tím nijak nezmění, což znamená, že v nové hře by měl stejnou rovnovážnou strategii jako v původní. Stejné machinace můžeme provádět i samozřejmě i se hrami, kde se hraje o něco jiného než peníze. Máme jedinou podmínku: Výplaty musíme násobit pouze čísly $a > 0$ (proč?).

Víme, že Alois preferuje 27 korun více než 19. Tuto částku „preferuje o 8 korun“. Rozdíl výplat lze tedy považovat za jakousi „míru preference“. Čím větší bude rozdíl výplat, tím více bude preferovat vyšší hodnotu. To znamená, že 500 korun by oproti 492 preferoval „stejně moc“ jako 27 korun oproti 19. Neboli přičteme-li ke všem jeho výplatám stejné číslo, obdržíme novou hru, která bude mít stejnou Nashovu rovnováhu jako původní.

Díky těmto úvahám tedy platí, že naše původní hra má stejnou Nashovu rovnováhu jako hra

		Barbora	
		t_1	t_2
Alois	s_1	$(27a + b, -3)$	$(17a + b, 2)$
	s_2	$(19a + b, 1)$	$(23a + b, -1)$

přičemž $a > 0$. Hra s nulovým součtem, která bude mít stejnou Nashovu rovnováhu musí splňovat soustavu rovnic o neznámých a, b.

$$27a + b = 3$$
$$17a + b = -2$$
$$19a + b = -1$$
$$23a + b = 1$$

Obdržíme

$$a = \frac{1}{2}, b = -\frac{21}{2},$$

čili naše hra má stejnou Nashovu rovnováhu jako hra

		Barbora	
		t_1	t_2
Alois	s_1	3	-2
	s_2	-1	1

Nashova rovnováha této hry je $\left\{\left(\frac{2}{7}, \frac{5}{7}\right), \left(\frac{3}{7}, \frac{4}{7}\right)\right\}$. Cena této hry je $\frac{1}{7}$. Ovšem my jsme původně řešili jinou hru! Cenu původní hry v získáme pomocí inverzního postupu.

$$
\begin{aligned}
av + b &= \frac{1}{7} \\
\frac{1}{2}v - \frac{21}{2} &= 17 \\
v &= \frac{149}{7}
\end{aligned}
$$

Cena původní hry je pro Aloise $\frac{149}{7}$, pro Barboru $-\frac{1}{7}$.

Speciálním příkladem her s nenulovým součtem, které lze převést na hry s nulovým součtem, jsou *hry s konstantním součtem*.

Definice 10. Mějme hru dvou hráčů $\{Q, S, T, u_1, u_2\}$. Hru nazýváme jako *hra s konstantním součtem*, jestliže pro každé $s \in S$, $t \in T$ platí

$$u_1(s,t) + u_2(s,t) = k,$$

kde k je konstanta.

Hry s nulovým součtem jsou tedy hry s konstantním součtem, kde $k = 0$. Tyto hry lze do podoby hry s nulovým součtem převést velice snadno, neboť

$$u_1(s,t) - k = -u_2(s,t).$$

Například pro hru

		Barbora	
		t_1	t_2
Alois	s_1	$(8,-1)$	$(6,1)$
	s_2	$(5,2)$	$(11,-4)$

je $k = 7$. Obdržíme hru

		Barbora	
		t_1	t_2
Alois	s_1	1	-1
	s_2	-2	4

Obě hry, původní i nynější, mají Nashovu rovnováhu $\left\{\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{5}{8}, \frac{3}{8}\right)\right\}$. Cena původní hry pro Aloise je $\frac{1}{4} + 7 = \frac{29}{4}$ a pro Barboru $-\frac{1}{4}$.

Ne každá hra lze do podoby hry s nenulovým součtem převést, jak se čtenář může přesvědčit u následující hry.

		Barbora	
		t_1	t_2
Alois	s_1	$(4, 5)$	$(-1, 10)$
	s_2	$(5, -2)$	$(1, 1)$

Soustava

$$
\begin{aligned}
4a + b &= -5 \\
-a + b &= -10 \\
5a + b &= 2 \\
a + b &= -1
\end{aligned}
$$

totiž nemá řešení.

Cvičení

10. Sourozenci Alois s Barborou dostali od babičky 100 korun a nyní přemýšlí, jak si je rozdělí. Rozhodli se, že si o peníze zahrají následující hru: Oba současně ukážou jeden nebo dva prsty. Bude-li součet 2, dostane Alois 20 korun, při součtu 3 70 a při součtu 4 40 korun.

11. Alois s Barborou si chtějí rozdělit 50 korun. Rozhodli se, že si o peníze zahrají následující hru: Alois napíše na papír číslo 10,30, nebo 50, tak, aby to Barbora neviděla. Barbora může přijmout nebo nepřijmout. Pokud přijme, získá částku, kterou Alois napsal na papír a zbytek si Alois nechá. Pokud nepřijme, pak si napsanou částku ponechá Alois a Barbora si vezme zbytek.

12. Řešte hru

		Barbora	
		t_1	t_2
Alois	s_1	$(7, -3)$	$(-13, 2)$
	s_2	$(-1, -1)$	$(19, -6)$

3.3 Obecné řešení her v normálním tvaru

Již jsme se zabývali speciálními případy her v normálním tvaru, hrami s nulovým součtem a hrami, které lze na tento tvar převést. Co všechny ostatní hry?

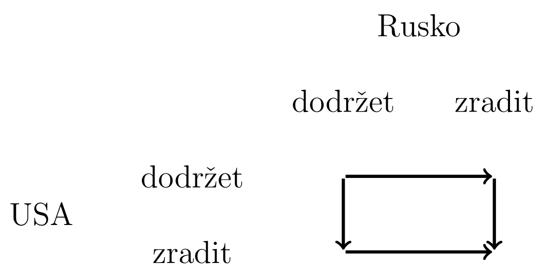
Hry s nenulovým součtem, které nelze převést na hru se součtem nulovým, potkáváme v praxi mnohem častěji ve formě různým modelů v psychologii, ekonomii či evoluční biologii. Nejzásadnějším rozdílem je, že výplata obou hráčů zde není závislá pouze na jedné funkci. To znamená, že od her, kdy výhra jednoho znamená ztrátu druhého, neboli kdy se hráči snažili soupeře porazit, se přesuneme ke hrám, kdy hráči nemusí být nutně nepřátelé. Hráči se pouze snaží maximalizovat svůj zisk a neřeší, jestli se na jejich úspěchu náhodou nesveze i soupeř. Hry s nenulovým součtem proto narozdíl od těch se součtem nulovým, rozdělujeme do dvou kategorií: kooperativní hry, kdy se hráči mohou před hrou domlouvat, utvářet koalice se společným cílem,... a nekooperativní hry, kdy nic z toho není možné. V této kapitole se budeme zabývat výhradně hrami nekooperativními. Mějme hru

Hra 7. USA a Rusko uzavřeli dohodu o jaderném odzbrojování. Oba státy se nyní musí rozhodnout: Dodržíme dohodu? Je totiž zřejmé, že nejhorší bude, pokud soupeř zradí a my budeme neozbrojení. To už je lepší, abychom zradili taky. Jenomže pokud zradíme oba, zbytečně vynaložíme náklady na zbrojení.

Předpokládejme, že si státy stanovily výplaty následujícím způsobem:

		Rusko	
		dodržet	zradit
USA	dodržet	(2,2)	$(-3, 5)$
	zradit	$(5, -3)$	$(-1, -1)$

Pomocí diagramu nejlepších odpovědí jsme schopni nalézt Nashovu rovnováhu hry.



Nashova rovnováha hry je tedy $\{\text{zradit}, \text{zradit}\}$. Ovšem racionální hráči by ze hry rádi vytěžili co nejvíce. Pokud se podívají na výplaty za dodržení smlouvy, uvidí, že

$$u_1(\text{dodržet}, \text{dodržet}) = 2 \geq -1 = u_1(\text{zradit}, \text{zradit})$$
$$u_2(\text{dodržet}, \text{dodržet}) = 2 \geq -1 = u_2(\text{zradit}, \text{zradit}).$$

Neboli pokud oba smlouvu dodrží, oba na tom budou lépe než v případě Nashovy rovnováhy! Proto nemůžeme Nashovu rovnováhu v této hře pokládat za řešení. Problémem je, že ani dvojice $\{\text{dodržet}, \text{dodržet}\}$ nemůže být řešením, neboť oba hráči jsou v pokušení zradit. Platí totiž

$$u_1(\text{dodržet}, \text{dodržet}) = 2 \leq 5 = u_1(\text{zradit}, \text{dodržet})$$
$$u_2(\text{dodržet}, \text{dodržet}) = 2 \leq 5 = u_2(\text{dodržet}, \text{zradit}).$$

Dostali jsme se do situace, kdy nezbývá než zkonstatovat, že hra nemá řešení. Kdy tedy hra s nenulovým součtem řešení mít bude? Základem řešení nutně musí být Nashova rovnováha, neboť představuje pro hráče určitý bod jistoty. Naštěstí z věty 4 víme, že nějaká Nashova rovnováha ve hře existuje vždy. Na druhou stranu jsme ukázali, že pokud nalezneme takovou situaci, kdy bude výplata pro oba hráče vyšší než za Nashovy rovnováhy, hra nebude řešitelná. K řešení hry pro nás bude důležitý pojem tzv. *Paretova optima*.

Definice 11. O uspořádané dvojici strategií $\{s^*, t^*\}$ řekneme, že *není paretovsky optimální*, jestliže existuje dvojice strategií $\{s, t\}$ taková, že platí

$$u_1(s^*, t^*) \leq u_1(s, t) \text{ a současně } u_2(s^*, t^*) \leq u_2(s, t).$$

Pokud takové strategie s, t neexistují, říkáme, že $\{s^*, t^*\}$ je *Paretovo optimum*.

Zajímavostí je, že koncept Paretova optima zavedl italský ekonom Vilfredo Pareto ještě před vznikem samotné teorie her. Vidíme, že Nashova rovnováha naší hry není paretovsky optimální, zatímco všechna ostatní možná vyústění jsou (ověřte!). Problémem Paretova optima je, jak jsme již ukázali, ono pokušení se od něj odklonit. Co se stane skloubí-li se v nějaké hře Nashova rovnováha s Paretovým optimem? Mějme hru

		Barbora	
		t_1	t_2
Alois	s_1	(0,1)	$(5, 9)$
	s_2	$(8, 0)$	$(-2, 10)$

Hra má Nashovu rovnováhu $\{s_1, t_2\}$ (ověřte!). Ta je současně Paretovým optimem (též ověřte!). Alois by sice raději vyhrál 8 než 5 a mohl by tak uvažovat nad strategií s_2. Jenomže pro Barboru je nesmysl hrát strategii t_1, tudíž Alois nikdy nemůže výplatu 8 získat. Dvojici $\{s_1, t_2\}$ lze proto považovat za řešení hry. Základem řešení her s nenulovým součtem tedy bude paretovsky optimální Nashova rovnováha.

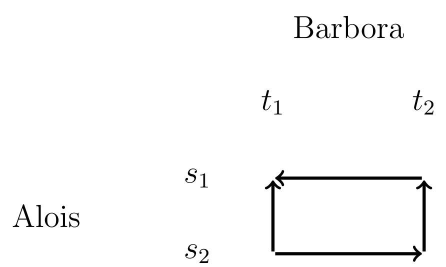
Proč jsme paretovskou optimalitu nepotřebovali zavést ve hrách s nulovým součtem? Vzpomeňme si, že pokud někdo změnou strategie získal, soupeř tratil. Neexistovala proto situace, která by pro oba hráče byla lepší nebo horší než jiná (neboli všechny výstupy hry s nulovým součtem byly paretovsky optimální).

3.3.1 Řešení hry v čistých strategiích

Pro hledání Nashových rovnováh v čistých strategiích budeme užívat diagramu nejlepších odpovědí. Zkoumejme následující hru.

		Barbora	
		t_1	t_2
Alois	s_1	(3,2)	$(1, 0)$
	s_2	$(-1, 1)$	$(0, 4)$

Obdržíme diagram



Pokud se někomu z nějakého důvodu nelíbí diagramy nejlepších odpovědí, druhou variantou je nejlepší odpovědi poznačit přímo do tabulky.

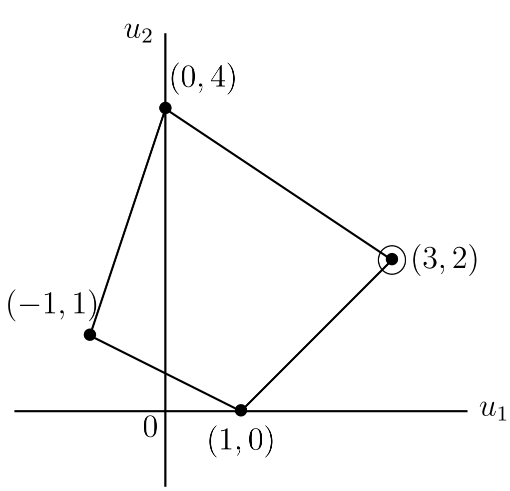
		Barbora	
		t_1	t_2
Alois	s_1	(**3**,**2**)	$(\mathbf{1}, 0)$
	s_2	$(-1, 1)$	$(0, \mathbf{4})$

V obou postupech obdržíme Nashovu rovnováhu $\{s_1, t_1\}$.

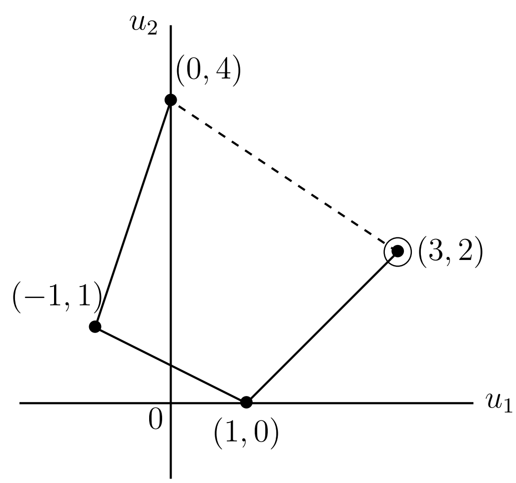
Matematika pro dogmatiky

Nikdy pro Nashovu rovnováhu v čistých strategiích ve hrách s nenulovým součtem neužívejte pojem sedlový bod! Sedlový bod je původně pojem z matematické analýzy, kde značí takový bod funkce dvou proměnných, který je v jednom směru lokální maximum a ve druhém lokální minimum. Protože výplatní funkci her s nulovým součtem můžeme definovat jako funkci závislou na pravděpodobnostech p a q a navíc se jeden hráč snaží hodnotu funkce maximalizovat, zatímco druhý minimalizovat, je využití tohoto pojmu na místě. Ve hrách s nenulovým součtem jsou výplaty hráčů určeny dvěma funkcemi, jejichž hodnoty by navíc oba rádi maximalizovali, proto pojmu sedlový bod nelze korektně užít.

Nyní musíme určit, zda je nalezená Nashova rovnováha i paretovsky optimální. Můžeme tak učinit nudným způsobem, kdy budeme procházet situace jednu po druhé a budeme se snažit zjistit, zda náhodou neexistuje situace, kdy jsou výplaty pro oba hráče vyšší. U obsáhlejších her je tento postup zdlouhavý a hrozí riziko přehlédnutí. Navíc nám nic neříká o smíšených strategiích. Budeme proto užívat jiné varianty, konstrukce tzv. *výplatního polygonu*. Vytvořme graf, kde osy budou výplaty jednotlivých hráčů. Do tohoto grafu můžeme zaznačit všechny možné situace v čistých strategiích. Nashovu rovnováhu označme zakroužkováním. Dá se dokázat, že všechny výplaty za smíšené strategie v tomto grafu nalezneme uvnitř nejmenšího konvexního mnohoúhelníku, který obsahuje výplaty za čisté strategie, tedy



Jak graficky nálézt paretovsky optimální výplaty? Aloisova výplata se zvyšuje směrem doprava, Barbořina nahoru. To znamená, že paretovsky optimální jsou všechny výstupy hry, pro které neexistuje bod výplatního polygonu, který je více napravo a současně výš (čili jsou „severovýchodní“ hranicí polygonu). Paretovsky optimální množinu budeme značit přerušovanou čarou.



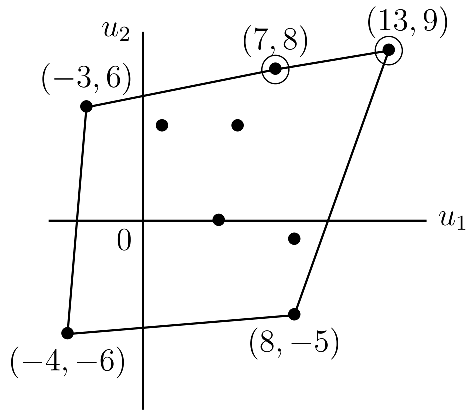
Vidíme, že Nashova rovnováha je paretovsky optimální, proto je Nashova rovnováha $\{s_1, t_1\}$ řešením této hry.

Vyzkoušejme si postup i pro rozsáhlejší hru.

Barbora

		t_1	t_2	t_3
	s_1	(1,5)	(5,5)	(4,0)
Alois	s_2	$(-3, 6)$	(7,8)	$(8, -5)$
	s_3	$(8, -1)$	$(-4, -6)$	(13,9)

Hra má dvě Nashovy rovnováhy $\{s_2, t_2\}$ a $\{s_3, t_3\}$ (ověřte!). Zkonstruujme výplatní polygon.



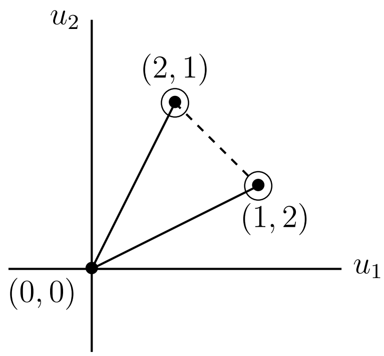
Obdržíme jediné Paretovské optimum, kterým je Nashova rovnováha $\{s_3, t_3\}$. Tato hra ukazuje, že některé hry mohou mít více Nashových rovnováh, přičemž některé jsou paretovsky optimální, zatímco jiné ne.

Někdy nám nepomůže ani nalezení paretovsky optimální Nashovy rovnováhy. Mějme hru *Souboj pohlaví*, kterou jsme uvažovali již v kapitole 1.

Hra 8. Manželé Alois a Barbora se rozhodují, kam pojedou na dovolenou. Alois by raději do hor, Barbora k moři. Oba mají dvě strategie: S=stát si za svým, P=přizpůsobit se. Své preference jsou schopni popsat následovně:

		Barbora	
		S	P
Alois	S	(0,0)	(2,1)
	P	(1,2)	(0,0)

Hra má dva rovnovážné body $\{S, P\}$ a $\{P, S\}$. Podívejme se na jejich paretovskou optimalitu.



Nastává problém. Hra sice má dvě paretovsky optimální Nashovy rovnováhy, ovšem pokud se manželé nebudou chtít domluvit, hra nemá řešení. Budou-li si například oba stát za svým, hrají sice oba rovnovážnou strategii, ale výsledek hry bude katastrofa (a s nejvyšší pravděpodobností manželská hádka). V čistých strategiích tedy hra nemá řešení. Pokud má hra více paretovsky optimálních Nashových rovnováh, potom je řešitelná pouze v případě, že se hráč nemusí obávat hrát jakoukoliv z rovnovážných strategií.

Definice 12. Mějme hru dvou hráčů H. O Nashových rovnováhách $\{s^*, t^*\}$ a $\{s', t'\}$ hry H řekneme, že jsou *záměnné*, jestliže platí

$$u_1(s^*, t^*) = u_1(s', t^*) = u_1(s^*, t') = u_1(s', t')$$

a současně

$$u_2(s^*, t^*) = u_2(s', t^*) = u_2(s^*, t') = u_2(s', t')$$

(neboli $\{s', t^*\}, \{s^*, t'\}$ jsou též Nashovy rovnováhy).

Například ve hře

		Barbora		
		t_1	t_2	t_3
Alois	s_1	(8,11)	$(5,-3)$	(8,11)
	s_2	$(2,4)$	(7,9)	$(-1,5)$
	s_3	(8,11)	$(3,0)$	(8,11)

máme celkem pět Nashových rovnováh, čtyři z nich jsou paretovsky optimální. Ty jsou navíc záměnné. Tato hra má tedy čtyři řešení (vyřešte a stanovte cenu hry pro oba hráče!).

Definice 13. O hře H řekneme, že je *řešitelná*, jestliže pro ni platí některé z následujících tvrzení:

(i) Ve hře existuje právě jedna paretovsky optimální Nashova rovnováha.

(ii) Ve hře existuje více paretovsky optimálních Nashových rovnováh. Tyto rovnováhy jsou záměnné.

Nechť $\{s^*, t^*\}$ je řešením hry H. Číslo $u_1(s^*, t^*)$ nazýváme *cena hry H pro hráče A*, číslo $u_2(s^*, t^*)$ *cena hry H pro hráče B*.

3.3.2 Nashova rovnováha ve smíšených strategiích

Ukázali jsme si, že Souboj pohlaví (hra 8) nemá řešení v čistých strategiích. Nezbývá nám, než hledat rovnovážné smíšené strategie. Smíšené strategie zavádíme stejným způsobem jako u her s nulovým součtem, tedy tak, že přiřadíme jednotlivým strategiím pravděpdobnost, s jakou bude hrána. Obecně je pro hry typu $m \times n$ hledání Nashovy rovnováhy ve smíšených strategiích obtížné. Naučíme se je hledat pouze ve hrách typu 2×2. Následující postup bude pouze rozšířením myšlenky reakčních křivek ze sekce 3.1.4. Mějme libovolnou smíšenou strategii Aloise $\mathbf{p} = (p, 1-p)$ (čili s pravděpodobností p si stoj za svým, s pravděpodobností $1-p$ se přizpůsob), kde $p \in \langle 0,1\rangle$ a libovolnou smíšenou strategii Barbory $\mathbf{q} = (q, 1-q)$, kde $q \in \langle 0,1\rangle$. Zkoumejme výplaty obou hráčů.

$$u_1(p,q) = 0pq + 2p(1-q) + 1(1-p)q + 0(1-p)(1-q) = (-3q+2)p + q$$
$$u_2(p,q) = 0pq + 1p(1-q) + 2(1-p)q + 0(1-p)(1-q) = (-3p+2)q + p.$$

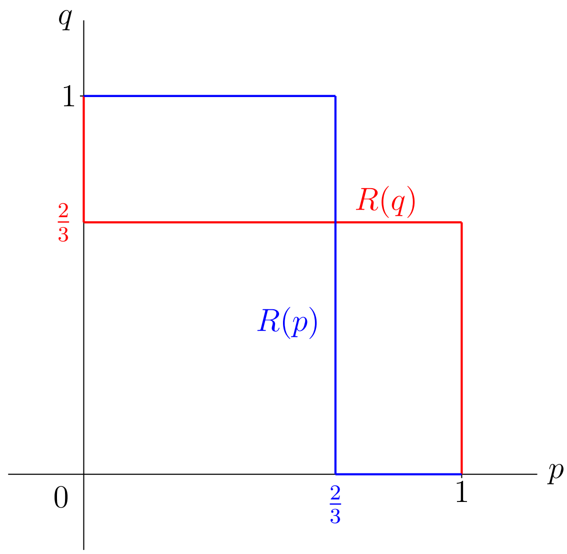
Pozornému čtenáři jistě neuniklo, že jsme v jednotlivých rovnicích záměrně vytkli tu neznámou, kterou může daný hráč ovlivnit svou výplatu. Když se totiž Alois zadívá na svou výplatní funkci, shledá, že obdržel lineární funkci s proměnnou p a parametrem q. Mohou pro něj nastat tři situace v závislosti na onom parametru:

(1) Pokud bude $q \in \langle 0, \frac{2}{3})$, bude funkce u_1 ve směru p rostoucí (proč?). Proto je pro něj nejlepší tento růst podpořit a hrát co nejvyšší p, tedy $p = 1$ (čili čistou strategii $(1,0) = S$).

(2) Pokud bude $q = \frac{2}{3}$, bude funkce u_1 ve směru p konstantní. I kdyby se Alois postavil na hlavu, nemůže výhru ovlivnit. Nejlepší odpovědí jsou tedy všechny strategie $(p, 1-p)$.

(3) Jestliže $q \in (\frac{2}{3}, 1\rangle$, bude funkce u_1 ve směru p klesající. Alois chce, aby jeho výplata klesala co nejméně, proto hraje nejmenší možné p, tedy $p = 0$ (čili čistou strategii $(0,1) = P$).

Skrze tyto úvahy můžeme stejně jako v sekci 3.1.4 zavést reakční křivku $R(q)$. Stejným způsobem může uvažovat i Barbora (proveďte úvahu!) a dostane reakční křivku $R(p)$.



Nashova rovnováha dle definice nastává v situaci, kdy oba hráči hrají své nejlepší odpovědi, což znamená v průsečících reakčních křivek. Souboj pohlaví má proto celkem tři Nashovy rovnováhy: $\{(0,1),(1,0)\} = \{P,S\}, \{(1,0),(0,1)\} = \{S,P\}$ a $\left\{\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right),\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)\right\}$. Výplaty za poslední z nich jsou $\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$, což je ještě horší než výplaty za $\{P,S\}$ a $\{S,P\}$, čili $\left\{\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right),\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)\right\}$ není Paretovo optimum. Souboj pohlaví proto není v rámci nekooperativních her řešitelný. Mimochodem, v kooperativních hrách bychom došli k výsledku, který očekáváme: jednou by se přizpůsoboval Alois, podruhé Barbora a oba by získali výplatu $\frac{3}{2}$. Nechť je tento model pro čtenáře ponaučením, že vztahové konflikty nikdy nemají probíhat jako nekooperativní hra, ve které se snažíme získat co nejvíce pro sebe!

Obecně v drtivé většině her nebude Nashova rovnováha ve smíšených strategiích paretovsky optimální (Představme si, že hrajeme hru mnohokrát za sebou. Potom se při náhodném rozhodování obou hráčů čas od času stane, že ve hře skončíte nejhůř jak to jen jde. To sráží průměrnou výhru pod hodnoty paretovského optima). Přesto je dobré se ji naučit nalézt, neboť je užitečná v různých odvětvích a aplikacích teorie her, jako například v kooperativních a opakovaných hrách či evoluční teorii her, se kterými se v této práci ještě potkáme. Podívejme se proto na obecnou hru.

Barbora

		t_1	t_2
Alois	s_1	(a,e)	(b,f)
	s_2	(c,g)	(d,h)

Čtenář si může ověřit, že výplatní funkce za smíšené strategie můžeme vždy upravit do následujícího tvaru (ověřte!):

$$u_1(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = ((a - b - c + d)q + b - d)p + (c - d)q + d$$
$$u_2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = ((e - f - g + h)p + g - h)q + (f - h)p + h.$$

Pro Aloise potom platí:

(1) Jestliže $q = \frac{d-b}{a-b-c+d}$, bude funkce u_1 ve směru p konstantní. Alois nemůže výhru ovlivnit. Nejlepší odpovědí jsou všechny strategie $(p, 1-p)$. Alois vždy obdrží výplatu v hodnotě $(c - d)q + d$. To samozřejmě platí za předpokladu, že $\frac{d-b}{a-b-c+d} \in \langle 0, 1\rangle$. V opačném případě hra má Nashovu rovnováhu pouze v čistých strategiích.

(2) Jestliže $q \neq \frac{d-b}{a-b-c+d}$, bude funkce u_1 ve směru p rostoucí nebo klesající v závislosti na tom, zda je $(a - b - c + d)q + b - d$ kladná či záporná hodnota. Nejlepší odpovědí Aloise při kladné hodnotě $(a-b-c+d)q+b-d$ je strategie $(1, 0)$ a při záporné $(0, 1)$ (proč?).

Obdobně pro Barboru platí

(1) Jestliže $p = \frac{d-b}{a-b-c+d}$, bude funkce u_2 ve směru q konstantní. Barbora nemůže výhru ovlivnit. Nejlepší odpovědí jsou všechny strategie $(q, 1 - q)$. Barbora vždy obdrží výplatu v hodnotě $(f-h)p+h$. Opět za předpokladu, že $\frac{d-b}{a-b-c+d} \in \langle 0, 1\rangle$.

(2) Jestliže $p \neq \frac{h-g}{e-f-g+h}$, bude funkce u_2 ve směru q rostoucí nebo klesající v závislosti na tom, zda je $(e-f-g+h)p+g-h$ kladná či záporná hodnota. Nejlepší odpovědí Barbory pro kladnou hodnotu $(e-f-g+h)p+g-h$ je strategie $(1,0)$ a pro zápornou $(0,1)$.

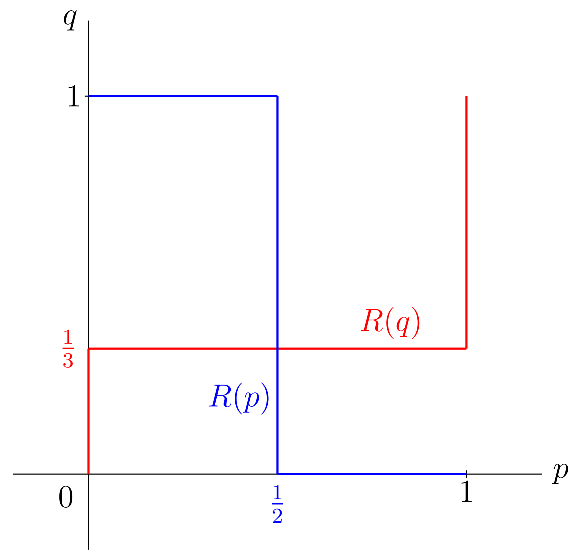
Hra 9 (Samaritánovo dilema)**.** Ministerstvo práce a sociálních věcí uvažuje, do jaké míry podporovat nezaměstnané. Pokud je nezaměstnaný snaživý, může mu podpora dopomoci k získání lepšího zaměstnání a stát od něj poté obdrží víc peněz na daních. Nezaměstnaný však může uvažovat tak, že pokud má jistotu podpory, může si ušetřit námahu při hledání práce. Po stanovení určitých výplatních funkcí vypadá hra takto:

		nezaměstnaný	
		snažit se	flákat se
stát	podpořit	(3,2)	(-1,3)
	nepodpořit	(1,1)	(0,0)

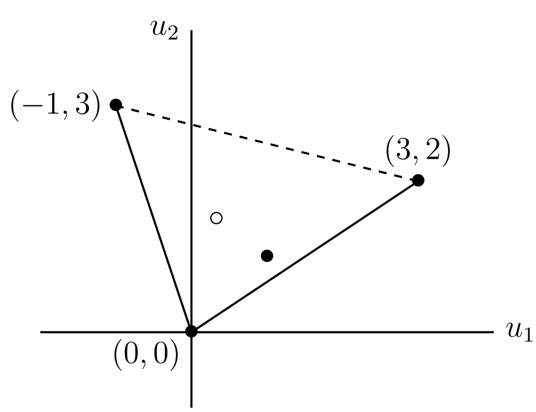
Dle našich vzorců obdržíme výplatní funkce

$$
\begin{aligned}
u_1(\mathbf{p},\mathbf{q}) &= (3q-1)p+q \\
u_2(\mathbf{p},\mathbf{q}) &= (-2p+1)q+3p.
\end{aligned}
$$

Zakreslíme reakční křivky.



Dostáváme pouze jeden průsečík pro $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{3}$, což znamená, že hra nemá Nashovu rovnováhu v čistých strategiích, ale pouze ve smíšených $\left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right\}$. Pomocí vzorců dopočteme cenu hry pro stát $\frac{1}{3}$ a pro nezaměstnaného $\frac{3}{2}$.



Vidíme, že Nashova rovnováha (nevybarvené kolečko) není paretovsky optimální, tudíž hra není řešitelná.

Matematika pro dogmatiky

Pokud hra není řešitelná v rámci nekooperativních her, měli by se hráči (pokud je to možné) uchýlit k vyjednávání. Tím se dostáváme do her kooperativních. Základem vyjednávání je nalezení tzv. *obezřetné strategie* jednotlivých hráčů. Při jejím hledání se hráči ptají: Co nejhoršího se mi může stát? Toto uvažování nám ne náhodou připomíná hry s nulovým součtem. Podívá-li se ministerstvo na své výplaty v Samaritánově dilematu, vidí toto:

		nezaměstnaný	
		snažit se	flákat se
stát	podpořit	3	-1
	nepodpořit	1	0

Ministerstvo nalezne svou obezřetnou strategii tak, že zjistí, jak se chovat v případě, že mu bude nezaměstnaný škodit. To znamená jako řešení této hry s nulovým součtem. Ta má sedlový bod {nepodpořit, flákat se}, čili obezřetná strategie státu je Nepodpořit a cena hry 0. Tu nazýváme *jistota*, neboť pokud hráč bude hrát obezřetně, nemůže obdržet horší výplatu než ji (proč?). Obdobně řeší svou hru s nulovým součtem i nezaměstnaný (všimněme si, že se v této úvaze stává hráčem 1).

		stát	
		podpořit	nepodpořit
nezaměstnaný	snažit se	2	1
	flákat se	3	0

Hra má sedlový bod {snažit se, nepodpořit}, čili obezřetná strategie nezaměstnaného je Snažit se a jistota 1. Při vyjednávání se hráči odpíchnou od svých jistot. Ve výplatním polygonu proto jako *vyjednávací množinu* stanovíme tu část paretovsky optimální množiny, jejíž hodnota je větší než 0 ve směru u_1 a větší než 1 ve směru u_2

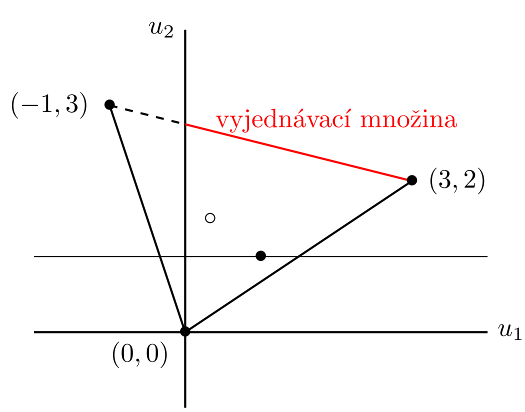


Schéma řešení her s nenulovým součtem

1) Nalezneme Nashovy rovnováhy hry.

2) Nalezneme Paretova optima hry.

3) Stanovíme, které Nashovy rovnováhy jsou paretovsky optimální

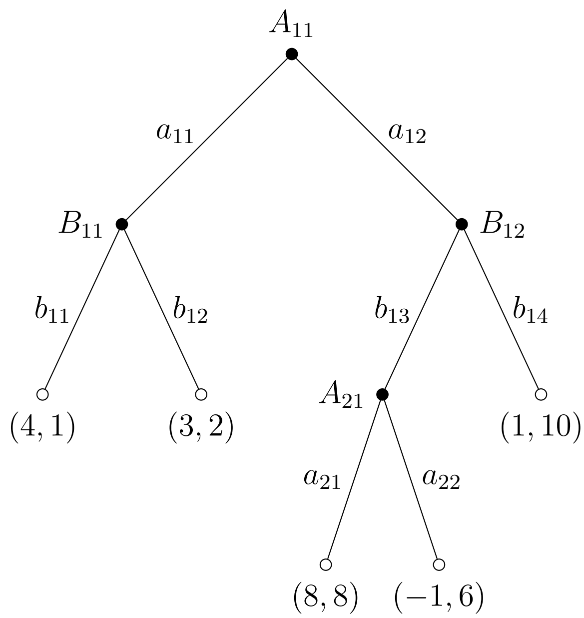
   i) Jestliže neexistuje žádná paretovsky optimální Nashova rovnováha, **hra nemá řešení**.

   ii) Jestliže existuje právě jedna paretovsky optimální Nashova rovnováha, **je řešením**.

   iii) Jestliže existuje právě více paretovsky optimálních Nashových rovnováh, které jsou záměnné, **jsou řešením**.

   iv) Jestliže existuje právě více paretovsky optimálních Nashových rovnováh, které nejsou záměnné, **hra nemá řešení**.

Koncept řešitelnosti her s nenulovým součtem je poměrně relativní. Všimněme si například, že jsme zde v této sekci vůbec neužívali dominanci. Ta by z neřešitelné hry 7 udělala hru „řešitelnou“, neboť pro oba státy platí, že strategie Dodržet je dominována strategií Zradit (s tímto konceptem řešení se čtenář může setkat například v [4]). Dalším příkladem, kde je naše definice nefunkční jsou hry v extenzivním tvaru s úplnou informací. Zkoumejme následující hru.



Obdržíme optimální cestu a_{11}, b_{12} a cenu hry 3 pro Aloise a 2 pro Barboru. Ovšem tuto hru můžeme též zapsat v normálním tvaru, kde Alois bude mít 3 strategie

- a_{11}= Hraj a_{11}.
- $a_{12} + a_{21}$=V prvním tahu hraj a_{12}. Pokud bude hrát Barbora b_{13}, hraj a_{21}.
- $a_{12} + a_{22}$=V prvním tahu hraj a_{12}. Pokud bude hrát Barbora b_{13}, hraj a_{22}.

Barbora má čtyři strategie

- $b_{11} + b_{13}$=Pokud Alois hrál a_{11}, hraj b_{11}. Pokud hrál a_{12}, hraj b_{13}.
- $b_{11} + b_{14}$=Pokud Alois hrál a_{11}, hraj b_{11}. Pokud hrál a_{12}, hraj b_{14}.
- $b_{12} + b_{13}$=Pokud Alois hrál a_{11}, hraj b_{12}. Pokud hrál a_{12}, hraj b_{13}.
- $b_{12} + b_{14}$=Pokud Alois hrál a_{11}, hraj b_{12}. Pokud hrál a_{12}, hraj b_{14}.

		Barbora			
		$b_{11}+b_{13}$	$b_{11}+b_{14}$	$b_{12}+b_{13}$	$b_{12}+b_{14}$
	a_{11}	$(4,1)$	$(4,1)$	$(3,2)$	$(3,2)$
Alois	$a_{12}+a_{21}$	$(8,8)$	$(1,10)$	$(8,8)$	$(1,10)$
	$a_{12}+a_{22}$	$(-1,6)$	$(1,10)$	$(-1,6)$	$(1,10)$

Tato hra má jednu Nashovu rovnováhu $\{a_{11}, b_{12}+b_{14}\}$, která není Paretovým optimem (ověřte!), tedy v normálním tvaru není řešitelná, přestože v extenzivním byla! Dokonalá definice řešení hry s nenulovým součtem zřejmě neexistuje, ale vždy vychází z okolností (pravidel) konkrétní hry. Dokonce i v rámci této práce se seznámíme ještě s jiným konceptem řešení hry s nenulovým součtem, konkrétně v kapitole 5. Řešení pomocí paretovsky optimálních Nashových rovnováh je důležité zejména proto, že se jedná o nejsilnější možné řešení. Ukázali jsme si, že pokud existuje, potom hráči nemají důvod uvažovat o odklonu od rovnovážné strategie.

Cvičení

13. Jak vypadá výplatní „polygon“ her s nulovým součtem? Co z něj plyne pro paretovskou optimalitu?

14. Předpokládejme, že se do vyjednávání ve hře 7 vložila NATO, která říká: Stát který dohodu poruší musí zaplatit pokutu v hodnotě -5. Jak hra dopadne nyní?

15. Najděte Nashovy rovnováhy následujích her. Jsou paretovsky optimální?

Barbora

Alois		t_1	t_2
	s_1	(2,3)	(4,2)
	s_2	(4,2)	(1,6)

Barbora

Alois		t_1	t_2
	s_1	(4,4)	(5,1)
	s_2	(1,3)	(2,6)

Barbora

Alois		t_1	t_2
	s_1	(4,5)	(2,5)
	s_2	(3,1)	(2,3)

Kapitola 4

Opakované hry

Nejznámějším modelem teorie her je tzv. *Vězňovo dilema*. Jeho název vznikl na základě situace podobné následující hře.

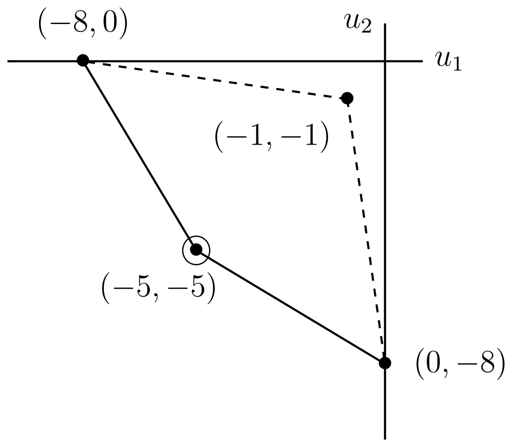
Hra 10. Účastníci skautského odboje Jiří Navrátil a Záviš Bozděch byli chyceni gestapem. Pomocí Morseovy abecedy se před výslechem dohodli na společné výpovědi. Ovšem hlavou oběma probíhají tyto myšlenky:

> Pokud se budeme držet společné výpovědi, zavřou nás oba jen na 1 rok na výstrahu. Pokud mě ale bratr skaut zradí, dostanu nejen trest za odbojovou činnost, ale i za křivou výpověď, dohromady 8 let. Pokud ale zradím já, mohl bych být omilostněn. Pokud však zradíme oba, milost nedostaneme a odsedíme si 5 let.

Tento příklad je zjednodušenou verzí skutečných událostí z roku 1944. Hru můžeme zapsat v normálním tvaru.

		Záviš	
		spolupráce	zrada
Jiří	spolupráce	$(-1,-1)$	$(-8,0)$
	zrada	$(0,-8)$	$(-5,-5)$

Podívejme se na její výplatní polygon



Hra není řešitelná. Oba hráči tedy stojí před zdánlivě neřešitelným dilematem: Zachovat si čest, ale riskovat dlouhé roky ve vězení nebo zradit?

Definice 14. Jako *Vězňovo dilema* nazýváme hru typu 2×2, kdy každý hráč má strategie S =spolupráce, Z =zrada a kde platí

		Hráč 2: S	Hráč 2: Z
Hráč 1	S	(odměna,odměna)	(oškubání,pokušení)
	Z	(pokušení,oškubání)	(trest,trest)

kde oškubání<trest<odměna<pokušení.

Jak správně předpokládáte, skauti zvolili cestu cti a skutečně vyšli pouze s nižšími tresty. My jsme se s Vězňovým dilematem již setkali ve hře 7. Hru tohoto typu „hrajeme“ v běžném životě velice často. Když s někým spolupracujeme na nějakém projektu, uzavíráme smlouvu, slíbíme pomoc přátelům a podobně. I v těchto situacích můžeme být oškubáni, potrestáni, odměněni i v pokušení své slovo nedodržet. Každý z nás však intuitivně tuší, že spolupráce je dobrá a zrada špatná a že se vyplatí spolupracovat. Otázkou je, zda má tato intuice reálný podklad. Právě na to může odpovědět teorie her.

Připomeňme si smlouvu ze hry 7. Je třeba si uvědomit, že dodržení smlouvy není jednorázová akce. Státy se mohou rozhodnout, že smlouvu poruší až třeba po pěti letech po uzavření. Hra tedy probíhá znovu a znovu každý den od uzavření smlouvy. Dostáváme se proto do problematiky tzv. *opakovaných her*. Důležitým faktorem opakovaných her je paměť hráčů. Ti ví, co jejich soupeř hrál v předchozích kolech a dle toho mohou uzpůsobit své následné akce, přičemž ale musí myslet i na možnost, že proti témuž soupeři mohou hrát znovu i v budoucnu, navíc neví kolikrát. Z toho důvodu nemůžou předpokládat, že někdy nastane poslední kolo a proto situaci musí zkoumat jako nekonečně mnoho her za sebou. Je zřejmé, že v takovém případě existuje i nekonečně mnoho strategií, mezi kterými hráči mohou volit.

Matematika pro dogmatiky

Samozřejmě můžeme řešit i hru, kdy hráči ví, kolik kol v rámci Vězňova dilematu nastane (například uzavření smlouvy na dobu určitou). V tom případě by v rámci Vězňova dilematu hráče nic nemotivovalo ke spolupráci v posledním kole a hráči se v něm pokusí o zradu. Tím pádem nemusí myslet na budoucnost ani v předposledním kole, protože ví, co se stane v kole posledním a v předposledním kole je tudíž logické zradit. Touto úvahou zjistíme, že znají-li hráči počet kol, tak při racionální hře je jedinou Nashovou rovnováhou {Vždy zraď,Vždy zraď}, která není paretovsky optimální. Proto jsou smlouvy vždy ošetřeny různými tresty za porušení, jejich plnění je hlídáno třetí stranou a podobně.

Vězňovo dilema je příkladem tzv. *symetrické hry*.

Definice 15. O hře $H = \{Q, S, T, u_1, u_2\}$ řekneme, že je *symetrická*, jestliže $S = T$ a pro každé dvě strategie $s, t \in S$ platí

$$u_1(s,t) = u_2(t,s).$$

V symterické hře nám proto stačí zkoumat výplatní funkci jednoho hráče a poté doplnit symetricky tabulku výplat. Zkoumejme následující Vězňovo dilema

Hra 11.

Barbora

		S	Z
Alois	S	$(3,3)$	$(0,5)$
	Z	$(5,0)$	$(1,1)$

Je zřejmé, že strategie Vždy zraď bude v nekonečné hře rovnovážná (oddůvodněte!), ale {Vždy zraď, Vždy zraď} není Paretovo optimum, neboť za spolupráci jistě oba hráči obdrží více. Podívejme se, jak budou výplaty v nekonečné hře vypadat. Předpokládejme, že 1. kolo nastane vždy. Další kolo potom nastane s pravděpodopností $p \in (0,1)$ (nikdy stoprocentně nevíme, že protivníka znovu potkáme, ale ani to, že jej už nikdy neuvidíme). Vidíme, že třetí kolo nastane s pravděpodobností p^2 (neboť nastane s pravděpodobností p po druhém kole, které nastalo s pravděpodobností p), čtvrté s p^3,... Pokud hráči budou vždy spolupracovat (VS), oba v každém kole získají 3 body. Protože $p \in (0,1)$, lze výplaty za opakovanou hru pomocí známého vzorce pro součet geometrické řady s kvocientem p stanovit jako

$$u_1(VS,VS) = 3 + 3p + ... + 3p^n + ... = \frac{3}{1-p}.$$

Předokládejme, že Barbora začne spoluprácí a spolupracuje do doby, než ji Alois zradí. Poté už s ním nikdy nebude spolupracovat. Nazvěme tuto Barbořinu strategii *Nevraživec (Grudger)*. Pokud Alois nikdy nezradí, situace je stejná jako kdyby oba hráli VS. Pokud Alois jednou Nevraživce zradí, je pro něj racionální zradit i v každém dalším kole (proč?). Co když Alois zradí v $m-$tém kole? S využitím vzorce pro součet m členů geometrické posloupnosti a součtu geometrické řady lze vypočíst jeho očekávanou výhru

$$3 + 3p + ... + 3p^{m-1} + 5p^m + p^{m+1} + ... = 3 \cdot \frac{1-p^m}{1-p} + 5p^m + \frac{p^{m+1}}{1-p} =$$
$$= \frac{3 + 2p^m - 4p^{m+1}}{1-p}.$$

Otázka zní, za jaké pravděpodobnosti opětovného opakování hry bude pro Aloise lepší vždy spolupracovat? Neboli kdy pro každé $m \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{3}{1-p} > \frac{3 + 2p^m - 4p^{m+1}}{1-p}?$$

Vypočteme, že

$$p > \frac{1}{2}.$$

To znamená, že pokud bude šance opětovného shledání protivníků větší než $\frac{1}{2}$, je racionální s Nevraživcem v každém kole spolupracovat! Pokud bude šance menší, od určitého kola vždy bude racionální zrada. Obecně se dá stejným postupem ukázat, že pokud pro pravděpodobnost dalšího setkání platí

$$p > \frac{\text{pokušení} - \text{odměna}}{\text{pokušení} - \text{trest}},$$

pak je výhodné s Nevraživcem vždy spolupracovat. Vidíme, že výhodnost spolupráce zde roste s vyšší pravděpodobností shledání a tím i vyšším počtem odehraných her.

4.1 Axelrodovy turnaje

Samozřejmě kromě Nevraživce existuje v opakovaném Vězňově dilematu ještě nekonečně mnoho dalších strategií. Jak určit nejlepší možnou? Tím se zabýval i Robert Axelrod. Ten začátkem osmdesátých let uspořádal turnaj, kdy požádal odborníky z různých oborů, aby mu zaslali návrhy strategií, které hráči mohou při opakované verzi Vězňova dilematu využít, přičemž požadoval, aby si strategie „pamatovaly“ vždy nejvýše předchozí tah. Kromě Vždy spolupracuj a Vždy zraď mu bylo zasláno celkem 15 strategií.

Axelrod naprogramoval hru na 200 kol (počet kol samozřejmě účastníci nevěděli), kdy strategie hrály každá proti každé (včetně sebe) a jejich výhry z jednotlivých kol se sečetly. Celý turnaj poměrně s přehledem ovládla strategie

Půjčka za oplátku (Tit for tat)=V prvním kole spolupracuj. Poté vždy hraj to, co hrál soupeř v předchozím kole.

přestože byla jednou z nejjednodušších strategií. Do turnaje ji zaslal psycholog Anatol Rapoport.

Axelrod se rozhodl uspořádat druhý turnaj, přičemž jeho účastníci znali výsledky prvního a mohli vymyslet strategii, která by TFT porazila. Navíc Axelrod odstranil omezení paměti strategií. Objevila se spousta nových, zajímavých strategií, které často analyzovaly půjčku za oplátku a upravovaly ji, jako například

- *Nelítostná Joss (Hard Joss)*=Hraj jako Půjčka za oplátku, ale spolupracuj pouze s pravděpodobností 0,9.
- *Půjčka za dvě oplátky (TF2T)*=Začni spoluprací. Pokud protivník dvakrát za sebou zradí, zraď též. Jakmile začne znovu kooperovat, začni též kooperovat.

Některé další strategie tohoto turnaje může čtenář nalézt například v [4]. Jaké bylo Axelrodovo překvapení, když se ukázalo, že ač všichni účastníci (tentokrát jich bylo asi 80) znali výsledky prvního turnaje a připravovali strategie, které by měli být lepší než předchozí, stejně znovu vyhrála TFT!

Matematika pro dogmatiky

Strategie v Axelrodově turnaji byly psány v programovacím jazyce Fortran. Ze strategií zaslaných do druhého turnaje byly pouze tři kratší než TFT: Vždy spolupracuj, Vždy zraď a Hraj náhodně.

Axelroda napadlo, zda je tato strategie opravdu natolik dobrá. V dalších letech pořádal nové turnaje s ohromným množstvím soutěžících strategií. Zde už dokázali vyhrávat i jiné strategie než TFT, avšak založené na podobném principu, většinou takové, které občas odpustily ojedinělou zradu, neboť i „nechtěnná“ zrada spustila u Půjčky za oplátku odplatu a pokud byla provinilá strategie též založena na principu Půjčky za oplátky (např. Nelítostná Joss), ze situace se stala série vzájemných zrad, která oběma strategiím škodila. Obecně se (prozatím) nepodařilo nalézt žádnou dokonalou strategii. Axelrod však stanovil určité rysy, které měli všechny nejúspěšnější strategie společné.

1) **Laskavost**=nikdy neodmítnout spolupráci jako první
2) **Umění trestat protihráčovu zradu**
3) **Umění odpouštět protihráčovu zradu**=i po potrestání protihráčovi zrady musí existovat nějaká možnost obnovení spolupráce
4) **Přejícnost**=nesnažit se uhrát víc než protihráč

Důležitým aspektem je, že pokud oba hráči hrají strategii s těmito vlastnostmi, budou díky prvnímu bodu v každém kole spolupracovat (jak lze vidět na příkladu TFT). Axelrodovi se tak podařilo ukázat, že zrada se opravdu nevyplácí (v jazyku teorie her doslova).

Je jasné, že skutečnost je téměř vždy daleko složitější než matematické modely. Například pokud hodnota pokušení výrazně přesahuje hodnotu odměny, bude pokušení zradit daleko vyšší. Axelrodovy turnaje se navíc soustředily na hry, kdy se hráči musí setkat vícekrát (neboť Axelrodovým cílem bylo dokázat, že je možné, aby v prostředí obývaném samými sobci vznikla spolupráce). Již dříve jsme si ale ukázali, že nízká šance opětovné hry Vězňova dilematu zahýbá i s hráčskými preferencemi (zkuste v opakované hře 11 položit $p = \frac{1}{10}$, zaveďte Půjčku za oplátku, vypočtěte pomocí geometrických řad očekávané výhry a poté diskutujte o Nashově rovnováze!). Skrze tento model například můžeme matematicky ukázat, proč se lidé na vesnicích k sobě chovají ohleduplněji než ve městech. Prostě a jednoduše, pokud něco provedete sousedovi, je vysoká pravděpodobnost, že vám to někdy vrátí, zatímco když tu samou věc uděláte cizinci, který vás v životě neviděl a nejspíš ani v budoucnu neuvidí, nemá vám to jak vrátit. Kvůli jisté anonymitě lidí ve městech pak v mezilidských interakcích převládá nedůvěra a lidé si méně pomáhají.

V mezilidských „hrách“ do pole ještě nastupují další faktory jako lži, předsudky, reputace, pocity,... a lidé mohou jednat jako neinteligentní (či p-inteligentní) rozhodovatelé. Přesto nám tyto modely mohou dopomoci k pochopení lidských pohnutek a činů. Proto jsou oblíbeným nástrojem psychologů. Tím, že teorie her zkoumá právě hráče, kteří chtějí pro sebe urvat co nejvíce, nám pomáhá pochopit základy našeho podvědomého chování. Je zajímavé zamyslet se nad tím, s jakým záměrem konáme své dobré skutky. Chceme skutečně dobro druhého nebo pouze „vyšší výplatu“ například v podobě popularity, slíbené odměny či, jsme-li nábožensky založení, v podobě nebe? A jde vůbec konat dobro pro dobro samé? V konečném důsledku po každém našem rozhodnutí obdržíme výplatu v podobě dobrého pocitu či výčitek. Je jen na nás jak si naše svědomí „vytrénujeme“, jakou cenu stanovíme různým životním hodnotám a jaké strategie pro náš život zvolíme.

Cvičení

16. V opakované hře 11 zaveďte strategie Vždy spolupracuj, Vždy zraď, Nevraživec, TFT, TF2T a strategii

> *Podezřívavá půjčka za oplátku (Mistrust)*=Začni zradou a poté opakuj předchozí protivníkův tah.

Předpokládejte, že je hra hrána na 100 kol. Jaká strategie získá nejvíce bodů? Jaká strategie získá nejvíce bodů, bude-li hra hrána na 2 kola?

17. Představme si, že hrajeme opakovaně Samaritánovo dilema 9. Jakou úlohu bude hrát Nashova rovnováha?

Kapitola 5

Evoluční teorie her

Jednu z nejzásadnějších aplikací teorie her lze nalézt v evoluční biologii. Pro pochopení si představme následující model. Máme populaci nějakého druhu, který žije v určitém prostředí. Je jasné, že zdroje v tomto prostředí jsou omezené a tudíž se organismy dostávají do konfliktů o potravu, stavební materiál na hnízda či partnery k rozmnožování. Měřítkem jejich evolučního úspěchu je *biologická zdatnost (fitness)*. Čili v evoluční hře hráči dostávají výplaty v bodech fitness. Čím více bodů fitness jedinec získá, tím větší je pravděpodobnost, že předá své geny další generaci. Evoluční teorie her proto zkoumá pouze geneticky podmíněné znaky, neboť ty, které jedinec nepředá do další generace, zanikají s jeho úmrtím a nepodléhají proto evoluci (nahlédne-li čtenář do nějaké učebnice evoluční biologie, zjistí, že v evoluci z velké části nehrají hlavní roli jedinci, nýbrž jejich geny. Jejich nositelé jsou v konečném důsledku pouze nástroje, vehikly, genů sloužící k jejich šíření). Evoluční hry proto často nazýváme jako *hry genů*.

Biologie pro dogmatiky

Fitness se skládá ze tří částí:

- *plodnosti (fertility)*: Geny se snaží co nejvícekrát zreplikovat. Nemůže tomu být jinak. Pokud geny nenutí svého nositele k rozmnožování, je jasné, že budou z populace vytlačeny těmi geny, které tak činí. Čím více se gen replikuje, tím je úspěšnější.
- *životaschopnosti (viability)*: Je sice hezké, pokud se gen zreplikuje, pokud však nezajistí, že jeho nový nositel přežije do doby, než se znovu rozmnoží, nemůže být gen úspěšný.

- *sexuální zdatnosti*: Tento faktor fitness nalézáme pouze u sexuálně se rozmnožujících organismů. Pokud gen přežije, ale nezajistí, že si jeho nositel nalezne partnera k rozmnožování, nemůže být evolučně úspěšný. Gen tedy musí zajistit, že jeho nositel bude atraktivní pro opačné pohlaví (odtud pocházejí pro viabilitu nesmyslné znaky jako například ocasní pera pavích samců, paroží jelenů,...).

To vše samozřejmě nemůže zajišťovat jediný gen, ale spolupracuje s dalšími geny a tak vzniká organismus. Problémem konceptu fitness je jeho definice. Fitness je totiž definována jako schopnost předat geny další generaci. Ovšem to, co určuje úspěšnost předání genu do další generace, je jeho fitness. Dostáváme definici kruhem „fitness je fitness“. Fitness je proto spíše pomocným než exaktním pojmem. Z toho důvodu ani není přesně měřitelná. Praktické určování bodů v evolučních hrách je proto velmi obtížné a zahrnuje zejména matematické simulace populace.

Představme si, že v naší populaci je chování jedince v konfliktní situaci určeno jedním ze dvou genů:

- gen *jestřáb*=Vždy zaútoč na protivníka.
- gen *hrdlička*=Když protivník zaútočí, uteč. Pokud neútočí rozděl se s ním.

Pro jednoduchost předpokládejme, že všichni jestřáby v populaci jsou stejně silní. To znamená, že pokud se setkají dva jestřáby, mají oba poloviční šanci, že boj o zdroj vyhrají. Pokud prohrají, jsou zraněni. Pokud se setká jestřáb s hrdličkou, obdrží jestřáb celou výhru a hrdlička nic nevyhraje, ale ani neprohraje, protože uteče bez zranění. Setkají-li se dvě hrdličky, obě obdrží polovinu výhry.

Definice 16. Jako hru *Jestřáb-hrdlička* nazýváme hru typu 2×2, kdy každý hráč má strategie J =jestřáb, H =hrdlička a kde platí

		Hráč 2	
		J	H
Hráč 1	J	$\left(\frac{V-C}{2}, \frac{V-C}{2}\right)$	$(V, 0)$
	H	$(0, V)$	$\left(\frac{V}{2}, \frac{V}{2}\right)$

kde V=hodnota výhry, C=cena za léčení zranění (obojí ve fitness bodech), přičemž $V > 0$, $C > 0$.

Uvědomme si, že v případě jestřáb vs. jestřáb je výhra relativní a je určena jako „v polovině soubojů vyhraji, v polovině prohraji",čili očekávaná výhra za jednu hru lze určit jako

$$\frac{1}{2}V - \frac{1}{2}C = \frac{V-C}{2}.$$

Nechť pro naši populaci platí $V = 30$, $C = 40$. Dostáváme

		Hráč 2	
		J	H
Hráč 1	J	$(-5, -5)$	$(30, 0)$
	H	$(0, 30)$	$(15, 15)$

Co se stane, bude-li celá populace složena z hrdliček? Každá hra v populaci je situací hrdlička vs. hrdlička, čili hráči v každé hře obdrží 15 bodů a všichni profitují stejně. Do této populace se ovšem může dostat jestřáb (mutací genu nebo migrací z jiné populace). Zatímco hrdličky budou povětšinou získávat 15 bodů a občas 0, pokud se setkají s oním jestřábem, jestřáb, který nemá konkurenci v podobě jiného jestřába, získá v každé hře 30 bodů. To znamená, že má větší šanci předat svůj gen do další generace než hrdličky. Tím pádem s nejvyšší pravděpodobností naroste v další generaci počet jestřábů. Populace hrdliček tedy není stabilní, protože umožňuje šíření jestřábů.

Bude-li naopak celá populace složena z jestřábů a objeví se v ní gen hrdličky, jestřáby z většiny her obdrží výplatu -5, zatímco hrdlička sice živoří, ale nemusí si léčit zranění a má výplatu 0 z každé hry. Protože $0 > -5$, má hrdlička větší šanci na předání svého genu. Ani populace jestřábů není stabilní.

Mějme člena populace jménem Alois. Předpokládejme, že populace je složena z $\frac{1}{3}$ jestřáby a ze $\frac{2}{3}$ hrdličkami. To znamená, že se Alois setká v $\frac{1}{3}$ s jestřábem a ve $\frac{2}{3}$ her s hrdličkou. Jednu hru si lze tedy představit tak, že Aloisův soupeř hraje smíšenou strategii $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Pokud je Alois jestřábem, je jeho očekávaná výplata

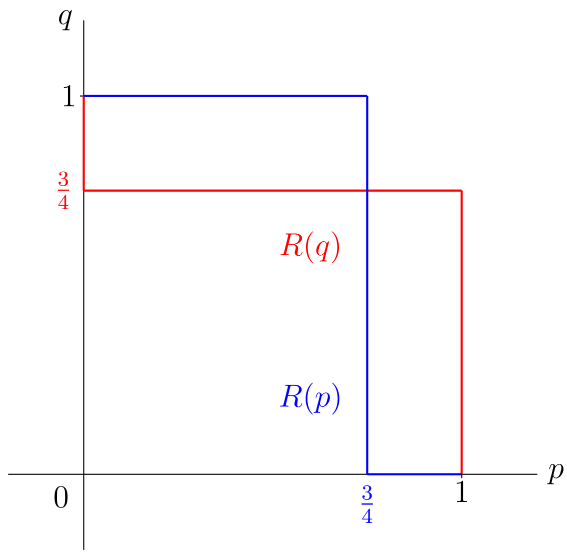
$$u_1\left(J, \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right) = \frac{1}{3} \cdot (-5) + \frac{2}{3} \cdot 30 = \frac{55}{3}.$$

Pokud je hrdličkou, pak

$$u_1\left(H, \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right) = \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{2}{3} \cdot 15 = 10.$$

Protože jsme řekli, že existují pouze dva geny, jestřáb a hrdlička, nemůže k žádné další situaci dojít. Jelikož $\frac{55}{3} > 10$, vidíme, že by pro Aloise bylo výhodnější, kdyby byl jestřábem. To ale platí i o každém dalším jedinci v populaci, neboli jestřábové mají výhodu a v další generaci naroste jejich počet.

Jak nalézt onen stabilní bod, kdy nebudu mít výhodu ani jestřábi ani hrdličky? Musí platit, že jestřábi i hrdličky mají proti zbytku populace stejnou očekávanou výhru, čili hledáme takovou smíšenou strategii, která dá proti oběma čistým strategiím stejnou očekávanou výhru. Už víme, že tato situace je Nashova rovnováha ve smíšených strategiích! Vytvořme reakční křivky.



Dostáváme rovnovážnou smíšenou strategii $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$, kterou nazýváme *evolučně stabilní strategie*. Tato strategie nám říká, že populace je v poměru $\frac{3}{4}$ jestřábů a $\frac{1}{4}$ hrdliček.

Co evolučně stabilní strategie znamená v praxi? Pokud jsou strategie v populaci v jiném poměru, spěje populace v dalších generacích k evolučně stabilní strategii, protože má některá ze strategií výhodu. Pokud jsou v poměru evolučně stabilní strategie, znamená to, že pokud se poměr v některé generaci lehce odchýlí, což se běžně děje, protože pořád nám do hry stále vstupuje náhoda například skrze nedeterministický počet potomků (fitness body neříkají, že jedinec se 100 body odchová víc potomků než ten s 50 body, jenom ukazují, že je to více pravděpodobné), potom se v dalších generacích populace do poměru evolučně stabilní strategie opět vrátí.

Obecně vidíme, že má-li být nějaká strategie evolučně stabilní, musí platit, že pokud se malá část populace od ní odchýlí, nemůže být úspěšnější než ta část, která se jí drží. Uvědomme si, že evolučně stabilní strategie nic neříkají o situaci, kdy se od stabilního poměru odchýlí většina populace (například po nějaké přírodní katastrofě). To lze zapsat do následující definice.

Definice 17. Mějme symetrickou hru dvou hráčů H. Strategii s nazýváme jako *evolučně stabilní strategie* (dále jen ESS), jestliže pro každou strategii t hráče A platí alespoň jedna z následujících podmínek:

(E1) $u_1(s, s) > u_1(t, s)$.

(E2) $u_1(s, s) = u_1(t, s)$ a současně $u_1(s, t) > u_1(t, t)$.

Analogicky pro hráče B (formulujte!).

Všimněme si, že jsme ESS definovali pouze v tzv. *symetrické hře*. Stačí nám proto zkoumat pouze výplatu hráče A. Obecně se samozřejmě dají ESS definovat i v asymetrických hrách. Tím se ale v této práci zabývat nebudeme.

Definice říká, že každá ESS je rovnovážná (proč?). Obráceně však ne každá rovnovážná strategie je ESS (jak lze pozorovat na příkladu hry Jestřáb-hrdlička, která měla dvě Nashovy rovnováhy v čistých strategiích, avšak jejich rovnovážné strategie nebyly ESS). Proto při hledání ESS postupujeme následovně:

1) Nalezneme Nashovy rovnováhy hry.
2) Ověříme, zda jednotlivé rovnovážné strategie splňují alespoň jedno z tvrzení (E1) nebo (E2).
   i) Pokud rovnovážná strategie některé z nich splňuje, **je evolučně stabilní.**
   ii) Pokud rovnovážná strategie nesplňuje žádné z těchto tvrzení, **není evolučně stabilní.**

Pokud se pořádně zadíváme na definici, shledáme, že ESS může být v některých hrách vícero! Mějme například hru

Hra 12.

		Hráč 2	
		s	t
Hráč 1	s	$(3,3)$	$(0,1)$
	t	$(1,0)$	$(4,4)$

Nalezneme Nashovy rovnováhy $\{s,s\}$, $\{t,t\}$ a $\left\{\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right),\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)\right\}$, přičemž cena hry za poslední z nich je pro oba hráče 2. Zkoumejme nejprve strategii s a podívejme se, zda existuje taková strategie $(x, 1-x)$, kde $x \in \langle 0,1\rangle$, že není splněno tvrzení (E1), tedy

$$\begin{aligned} 3 &< 3x + 1(1-x) \\ x &> 1 \end{aligned}$$

Kvůli podmínce $x \in \langle 0,1\rangle$ vidíme, že taková strategie neexistuje, čili s je ESS. Analogicky ověříme, že i t je ESS. Co ale $\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$?

$$\begin{aligned} 2 &< \frac{2}{3}\cdot x\cdot 3 + \frac{2}{3}\cdot(1-x)\cdot 0 + \frac{1}{3}\cdot x\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot(1-x)\cdot 3 \\ 2 &< \frac{4}{3}x + 1 \\ x &> \frac{3}{4} \end{aligned}$$

To ale znamená, že existuje strategie $(x, 1-x)$, že pro $\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$ není splněno tvrzení (E1). Stále ale může být splněno (E2). Můžeme dopočítat, že platí

$$u_1\left(\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right),\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)\right) = u_1\left(\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right),\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)\right).$$

Víme, že

$$u_1\left(\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right),\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)\right) = 2.$$

Dopočteme

$$u_1\left(\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right),\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)\right)=\frac{17}{8}>2,$$

čili není splněno ani tvrzení (E2). Strategie $\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$ proto není ESS. Co to znamená prakticky? Pokud jsou strategie s a t v poměru $2:1$, poměr zůstane v další generaci zachován (proč?). Ovšem v moment, kdy se od ní trochu odchýlí (což, jak již víme, se jistě stane), má výhodu ta strategie, na jejíž stranu se poměr nachýlil a populace se narozdíl od ESS již do poměru $2:1$ nevrátí. Proto tento poměr není stabilní. Hra má tedy dvě ESS s a t. V populaci, kde je víc než $\frac{2}{3}$ jedinců nositelem genu pro strategii s je tedy výhodné mít též gen pro s, v populaci, kde jich je méně zase gen pro t.

Vraťme se ke hře Jestřáb-hrdlička. Uvažovali jsme variantu $C>V$. Co když bude platit $V>C$? Nechť například $V=20$ a $C=5$. Dostaneme hru

Hráč 2

		J	H
Hráč 1	J	$(15,15)$	$(20,0)$
	H	$(0,20)$	$(10,10)$

Hra má Nashovu rovnováhu $\{J,J\}$, která je ESS (ověřte!). Obecně se dá ukázat, že pokud $C>V$, je ESS strategie $\left(\frac{V}{C},1-\frac{V}{C}\right)$. Je-li $V>C$, pak je ESS strategie jestřáb.

V přírodě lze pozorovat oba typy hry této hry. Typ $C>V$ například pozorujeme u racků. Racci buď loví ryby (hrdličky) nebo kradou ryby ostatním (jestřáby). V množství lovících racků mají výhodu zloději, kteří nemusí investovat čas a námahu do lovení. Pokud je ale mnoho zlodějů, není co krást a většina zlodějů hladoví, zatímco lovci si občas něco před zloději uchrání a mají tudíž výhodu. ESS je tedy někde mezi těmito čistými strategiemi. Typ $V>C$ pozorujeme například u samců rypoušů sloních. Tento mohutný tuleňovitý savec je extrémně polygamní. Nejsilnější alfa samec si drží ohromný harém a je prakticky jediným samcem v populaci, který se může rozmnožovat. Hodnota harému z evolučního hlediska vysoce převyšuje riziko zranění i smrti (neboť nemožnost rozmnožování je v podstatě smrtí pro geny, což je z hlediska genů ještě horší než smrt jednoho z jejich vehiklů). Pokud nebude jiný samec s alfa samcem o harém bojovat (bude hrdličkou), nemůže se rozmnožit a tudíž tato strategie není ESS. Všichni samci rypoušů jsou proto zuřivý bojovníci (jestřáby).

Biologie pro dogmatiky

Hra Jestřáb-hrdlička je jednou z původních her, kterou definoval John Maynard-Smith, zakladatel evoluční teorie her. V průběhu let se dočkala řady úprav a vylepšení. Zavedeny byly například strategie

- *Šikanátor*=Zaútoč jako první. Pokud se bude protivník bránit, uteč.
- *Odvetník*=Pokud protivník neútočí, též neútoč. Pokud útočí, zaútoč též.
- *Pokušitel*=Chovej se jako odvetník, ale čas od času zaútoč jako první.
- *Měšťák*=Na svém území buď jestřáb, mimo své území hrdlička.

Kromě klasických ESS vycházejících z Nashových rovnováh se začali zkoumat i ESS vycházející z tzv.*korelovaných rovnováh.* Ty jsou ovlivněny ještě dalšími vnějšími signály. Představme si, že gen Měšťák navíc kóduje svému nositeli rudou barvu srsti. Pokud potkáte jedince s rudou srstí na jeho území, hned víte, že se k vám bude chovat jako jestřáb a podle toho se uzpůsobíte. Takový signál ale implikuje i vznik podvodníků, kteří budou využívat rudé srsti, aniž by byli Měšťáci (tzv. *batesiánské mimikry*), což opět hru zamotává,...

Mějme obecnou symetrickou hru typu 2×2.

		Gen 2	
		s	t
Gen 1	s	(a, a)	(b, c)
	t	(c, b)	(d, d)

V rámci základní evoluční teorie her nejčastěji řešíme čtyři typy her (ověřte stanovené ESS!).

- $b > a > d > c$. Tímto typem je hra *Jestřáb-hrdlička*, jejíž ESS jsme si již ukázali.
- $c > a > d > b$. S tímto typem jsme se též již seznámili, je to totiž *Vězňovo dilema*. ESS Vězňova dilematu je t.
- $a > c > d > b$. Tento typ nazýváme jako *Lov jelena* (název vychází ze situace, kdy se dva lovci rozhodují, zda budou lovit jelena či králíky. Za jelena je vyšší zisk, ale nedokáží ho ulovit sami. Za králíka je zisk nižší, ale lovec jej uloví i bez pomoci druhého). Lovem jelena je například hra 12. Obě strategie jsou ESS, přičemž momentálně výhodnější strategie se určí pomocí Nashovy rovnováhy ve smíšených strategiích.
- $a > c > b > d$, tzv.*Plná spolupráce* (za s si představte Spolupracuj, za t Zraď). s je ESS.

Cvičení

18. Mějme populaci býložravců, ve které existují dvě strategie při útoku predátora: Utéct a bojovat. Jedinec sám predátora nezdolá, ale pokud se do něj pustí spolu s někým dalším, porazí jej. Pokud utíká, zatímco někdo jiný bojuje má jistou šanci na přežití, zatímco bojující umírá, pokud oba utíkají, je šance, že některého z nich predátor chytí. Stanovte hypotézu, jak by vypadala tabulka výplat v závislosti na vážnosti zranění v případě, že by oba jedinci bojovali proti predátorovi (není třeba konkrétních čísel stačí srovnání výhodnosti), a určete kterým ze základních typů je tato hra a jaké jsou ESS.

19. (Kulturní evoluce) Myšlení evoluční biologie si často vypůjčuje sociologie. Ta ho užívá ke zkoumání tzv. kulturní evoluce, která zjišťuje, jaké myšlenky (tzv. *memy*) se mezi lidmi nejlépe šíří nejlépe. Mějme senzační a nudnou informaci. Představme si, že vám někdo poví dvě informace, pokud si některou zapamatujete informace se „zreplikuje“ a má tudíž dalšího nositele. „Fitness body“ memu lze zapsat například jako

		Mem 2	
		senzační	nudný
Mem 1	senzační	$(5, 5)$	$(7, 0)$
	nudný	$(0, 7)$	$(1, 1)$

Jaká je ESS hry?

Závěr

Tato práce má sloužit jako úvod do teorie her, ovšem, jak už to tak v matematice bývá, na ty skutečně zajímavé příklady a aplikace je třeba složitějšího aparátu, který přesahuje rozsah práce (diferenciální počet, vektorová a maticová algebra,...). Jejím cílem tedy je zejména motivovat čtenáře k dalšímu studiu nejen této problematiky, ale i matematiky samotné. V rámci teorie her může čtenář dále studovat například:

- hry s více strategiemi či hráči,
- hry proti přírodě,
- hry p-inteligentních rozhodovatelů,
- teorii užitku,
- opakované hry,
- evoluční teorii her,
- kooperativní hry,
- Bayesovské hry=hry, kdy hráč nemá kompletní informaci o hře

a mnoho dalšího.

Řešení cvičných příkladů

1. V prvním případě by hra skončila hned na začátku. Alois by získal 64 mincí, Barbora 32. Ve druhém by hra pokračovala až do konce, kdy oba získají 100 mincí.
2. Vyhraje Alois.
3. Alois vyhraje, pokud počet sirek nedává při dělení třemi zbytek jedna.
4. Optimální cesta je $a_{12}, b_{13}, a_{23}, b_{22}$. Cena hry číní pro Aloise je 4, pro Barboru 2.
5. Pro $x > 9$ a $y > 4$.
6. Nashovou rovnováhou hry je $\left\{\left(\frac{5}{6}, \frac{1}{6}\right), \left(\frac{7}{18}, \frac{11}{18}\right)\right\}$. Cena hry je $\frac{5}{3}$.
7. Hra má Nashovu rovnováhu $\left\{\left(0, \frac{2}{5}, 0, \frac{3}{5}, 0\right), \left(0, \frac{2}{5}, 0, \frac{3}{5}, 0\right)\right\}$. Cena hry je $\frac{6}{5}$.
8. Hra má sedlový bod pro $x \in \langle -2, 1\rangle$. Pro $x = 4$ je Nashova rovnováha $\left\{\left(\frac{7}{10}, 0, \frac{3}{10}\right), \left(\frac{3}{10}, 0, \frac{7}{10}\right)\right\}$ a cena hry $\frac{19}{10}$.
9. Hra má právě dva sedlové body pro $x \in \{-4, 7\}$.
10. Hra má Nashovu rovnováhu $\left\{\left(\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right), \left(\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right)\right\}$. Cena hry je $\frac{205}{4}$ pro Aloise a $\frac{195}{4}$ pro Barboru.
11. Hra má dvě Nashovy rovnováhy $\left\{\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 0\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}$ a $\left\{\left(\frac{5}{8}, 0, \frac{3}{8}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}$. Cena hry je pro oba 25.
12. Hra má Nashovu rovnováhu $\left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{4}{5}, \frac{1}{5}\right)\right\}$. Cena hry je 3 pro Aloise a -2 pro Barboru.
13. Výplatním „polygonem“ hry s nulovým součtem je úsečka. „Severovýchodní hranicí“ je protocelá tato úsečka, čili Paretovsky optimální jsou všechny body této úsečky=všechny dvojice strategií.
14. Hra bude mít jedinou paretovsky optimální Nashovu rovnováhu

$$\{\text{dodržet}, \text{dodržet}\}$$

. **15.** První hra má Nashovu rovnováhu $\left\{\left(\frac{4}{5}, \frac{1}{5}\right), \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)\right\}$, která není paretovsky optimální. Druhá $\{s_1, t_1\}$, která je paretovsky optimální. Třetí má tři Nashovy rovnováhy $\{s_1, t_1\}$, která je paretovsky optimální, $\{s_1, t_2\}$ a $\{s_2, t_2\}$, které paretovsky optimální nejsou.

16. Ve stokolové variantě vyhraje TF2T s 1595 body. Ve dvoukolové Vždy zraď s 36 body. Zde je vidět, že s rostoucím počtem kol roste výhodnost spolupráce.
17. Pokud bude stát hrát v n hrách svou rovnovážnou strategii, zajistí nezaměstnanému očekávanou výhru $\frac{3}{2}n$ nehledě na to, co bude hrát. Stejně tak hraje-li nezaměstnaný svou rovnovážnou strategii, potom stát obdrží $\frac{1}{3}n$ nehledě na to, co bude hrát.
18. Hra je typu Jestřáb-hrdlička. Pokud je vážnost zranění nízká, je ESS strategie Bojovat, pokud vysoká, potom smíšená strategie.
19. Hra je opět typu Jestřáb-hrdlička. ESS je strategie Senzační. Zde jde možná ještě lépe než u genů, které nám nejsou tolik blízké jako memy, pozorovat podstatu evoluce. Memy sami nepřemýšlejí, zda jsou zajímavé či nikoliv, přesto kulturní evoluce selektuje ty, které nám zajímavé připadnou jsou a ty se šíří v lidské populaci. Za pár generací ale klidně zajímavé být nemusí a z populace vymizí nebo „zmutují“ v nový mem.

Literatura

[1] Axelrod, R.:*More Effective Choice in the Prisoner's Dilemma* (1980), The Journal of Conflict Resolution, vol. **24**, str. 379-403

[2] Epperlein, J., Siegmund S., Stehlík P.:*Evolutionary games on graphs and discretedynamical systems* (2015), Journal of Difference Equations and Applications, vol. **21**, str. 72-95

[3] Flégr, J.:*Evoluční biologie*, Třetí upravené a rozšířené vydání, Academia, Praha (2018), 570 str., ISBN: 978-80-200-2796-2

[4] Hykšová, M.:*Teorie her*, FD ČVUT, Praha (2003), dostupné online z: http://euler.fd.cvut.cz/predmety/teorie_her/

[5] Chvoj, M.: *Pokročilá teorie her ve světě kolem nás*, Grada, Praha (2013), 227 str., ISBN 978-80-247-4620-3.

[6] Maňas, M.:*Teorie her a optimální rozhodování*, Státní nakladatelství technické literatury, Praha (1974), 255 str., ISBN: brož.

[7] Maynard-Smith, J.:*Evolution and the Theory of Games*, Cambridge University Press, Cambridge (1982), 234 str., ISBN: 978-0-521-28884-2

[8] Osborne, M.J.: *An Introduction to Game Theory*, Oxford University Press, Oxford (2009), 560 str., ISBN: 0-19532-248-7

[9] Říha, O.: *Základy teorie her: Text pro profesory gymnasií*, JČSMF, Praha (1973), 127 str., ISBN: brož.

[10] Straffin, P.: *Game Theory and Strategy*, Mathematical association of America, Washington DC (1993), 560 str., ISBN: 0-88385-637-9

[11] Ventcel, E.S.:*Elementy teorii igr*, Posudarstvěnoje izdatělstvo fizikomatematičeskoj literatury, Moskva (1959), 67 str., ISBN: brož.

[12] Watson, J.:*Strategy: An Introduction to Game Theory*, 3. vydání, W.W. Norton & company, New York (2013), 491 str., ISBN: 978-0-393-91838-0