FAKULTA
PŘÍRODOVĚDNĚ-HUMANITNÍ
A PEDAGOGICKÁ TUL

Bakalářská práce

Historická okénka v hodinách matematiky na druhém stupni ZŠ

Studijní program:	B0114A300064 Matematika se zaměřením na vzdělávání
Studijní obory:	Matematika se zaměřením na vzdělávání Fyzika se zaměřením na vzdělávání

Autor práce:	**Aneta Horáčková**
Vedoucí práce:	Mgr. Jiří Břehovský, Ph.D. Katedra matematiky

Liberec 2024

FAKULTA
PŘÍRODOVĚDNĚ-HUMANITNÍ
A PEDAGOGICKÁ TUL

Zadání bakalářské práce

Historická okénka v hodinách matematiky na druhém stupni ZŠ

Jméno a příjmení:	**Aneta Horáčková**
Osobní číslo:	P21000431
Studijní program:	B0114A300064 Matematika se zaměřením na vzdělávání
Specializace:	Matematika se zaměřením na vzdělávání Fyzika se zaměřením na vzdělávání
Zadávající katedra:	Katedra matematiky
Akademický rok:	2023/2024

Zásady pro vypracování:

Abstrakt
Důležitým aspektem matematického vzdělávání je kladení důrazu na praktičnost vyučovaného matematického aparátu. Jednou z možností, jak ukázat na propojení vyučované matematické teorie s praxí, je využití historie matematiky. Lze tak poukázat i na skutečnost, že rozvoj a znalosti matematiky vždy úzce souvisely s rozvojem konkrétní civilizace.

Cíle práce
V teoretické části shrnout základní poznatky související s možnostmi a přístupy k výuce matematiky, motivací ve výuce matematiky a tématech výuky matematiky v souvislosti s RVP. S tím souvisí rešeršní činnost odborných publikací a periodik (českých a zahraničních) i v oblasti historie matematiky. Na základě výsledků rešeršní činnosti vybrat vhodná témata a související historické milníky, které budou využity k přípravě "historických okének". Vytvořit soubor historických poznámek a úloh použitelných při hodinách matematiky, které půjde také využít k propojování vyučovaných témat a historických milníků s praktickým užíváním matematického aparátu.

Rozsah grafických prací:
Rozsah pracovní zprávy:
Forma zpracování práce: tištěná/elektronická
Jazyk práce: čeština

Seznam odborné literatury:

Literatura:
ČIŽMÁR, J. (2017). Dejiny matematiky od najstarších čias po súčasnosť. Perfekt Bratislava. ISBN 978-80-8046-829-3.
GÁBOR, O., KOPANEV, O., KRIŽALKOVIČ, K.: Teória vyučovania matematiky 1. Vyd. 1. Bratislava. SPN, 1980.
POLÁK, J.: Didaktika matematiky. Jak učit matematiku zajímavě a užitečně. Vyd. 1. Plzeň. Fraus 2016. ISBN 978-80-7238-449-5
POLÁK, J.: Didaktika matematiky II. Část. Obecná didaktika matematiky. Vyd. 1. Plzeň. Fraus 2016. ISBN 978-80-7489-326-1
POLÁK, J.: Didaktika matematiky III. Část. Historie matematiky pro učitele. Vyd. 1. Plzeň. Fraus 2016. ISBN 978-80-7489-327-8

Vedoucí práce: Mgr. Jiří Břehovský, Ph.D.
Katedra matematiky

Datum zadání práce: 6. ledna 2024
Předpokládaný termín odevzdání: 24. dubna 2024

L.S.

doc. PaedDr. Aleš Suchomel, Ph.D.
děkan

doc. Ing. Martin Plešinger, Ph.D.
garant studijního programu

Prohlášení

Prohlašuji, že svou bakalářskou práci jsem vypracovala samostatně jako původní dílo s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím mé bakalářské práce a konzultantem.

Jsem si vědoma toho, že na mou bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb., o právu autorském, zejména § 60 – školní dílo.

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci nezasahuje do mých autorských práv užitím mé bakalářské práce pro vnitřní potřebu Technické univerzity v Liberci.

Užiji-li bakalářskou práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědoma povinnosti informovat o této skutečnosti Technickou univerzitu v Liberci; v tomto případě má Technická univerzita v Liberci právo ode mne požadovat úhradu nákladů, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše.

Současně čestně prohlašuji, že text elektronické podoby práce vložený do IS/STAG se shoduje s textem tištěné podoby práce.

Beru na vědomí, že má bakalářská práce bude zveřejněna Technickou univerzitou v Liberci v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů.

Jsem si vědoma následků, které podle zákona o vysokých školách mohou vyplývat z porušení tohoto prohlášení.

4. července 2024 Aneta Horáčková

Poděkování

Ráda bych poděkovala panu Mgr. Jiřímu Břehovskému, Ph.D. za odborné vedení mé bakalářské práce, vstřícnost a cenné připomínky a podněty.

Anotace

Bakalářská práce se zaměřuje na zpracování historických okének, která lze využít při výuce matematiky výuky matematiky na 2. stupni ZŠ. Bakalářská práce obsahuje soubor poznámek a úloh, které mají výuku matematiky obohatit o historické souvislosti a ukázat žákům praktickou úlohu matematiky, kterou v průběhu historie zastávala. Zařazení historických okének do výuky může sloužit také k motivování žáků a k propojování různých předmětů. Výběr historických souvislostí vychází z učiva matematiky 2. stupně ZŠ podle RVP ZV 2023.

Klíčová slova: historie matematiky, historické úlohy, výuka matematiky, motivace

Annotation

This bachelor thesis focuses on the development of snippets from history that can be used in teaching mathematics to students from 6th to 9th grade. The bachelor's thesis contains a set of notes and exercises designed to enrich the teaching of mathematics with historical context and to show students the practical role mathematics has played throughout history. The inclusion of snippets from history in the curriculum can also serve to motivate pupils and to link different subjects. The selection of historical contexts is based on the mathematics curriculum of Primary 2 according to the Primary School Framework of Knowledge 2023.

Keywords: history of mathematics, historical problems, teaching mathematics, motivation

Obsah

Seznam obrázků

Seznam použitých zkratek:

n. l.	našeho letopočtu
př. n. l.	před naším letopočtem
RVP ZV	Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání
ZŠ	základní škola

Úvod

Hodiny matematiky provází žáky na základní škole po celých devět let jejich povinné školní docházky. Na druhém stupni se matematické učivo stává složitějším a abstraktnějším než na prvním stupni. Proto je dobré během výuky připomínat praktické využití matematického aparátu a také to, že jako věda prošla dlouhým vývojem. Právě k tomu je možné využít historii matematiky, která může mít ve výuce i motivační funkci.

Cílem práce je na základě rešeršní činnosti vytvořit z odborných publikací historická okénka – soubor historických poznámek a úloh, které by bylo možné využít ve výuce matematiky. Poznámky a úlohy jsou voleny v souladu s RVP ZV 2023 tak, aby kopírovaly případně mírně převyšovaly učivo 2. stupně ZŠ.

Práce je rozdělena na dvě části. V teoretické části jsou shrnuty poznatky o výuce matematiky na 2. stupni ZŠ v souvislosti se začleněním historických okének. V praktické části jsou zpracována samotná historická okénka týkající se témat číselné obory, poměry, rovnice a geometrie. Následují odstavce o osobnostech, s jejichž jmény se žák ZŠ setká ve spojitosti s matematickou terminologií, a krátké shrnutí vývoje matematiky mimo Evropu.

I když je matematika velmi mocný nástroj a vznikala z praktických potřeb lidí, jedná se o přesnou a krásnou vědu. Již z dob starověkého Řecka má jasně danou strukturu axiomů, definic, vět a důkazů, díky kterým si zachovává svou platnost. Pomohla k rozvoji civilizací, umožnila vznik a rozvoj dalších věd a byla uplatňována v hudbě i výtvarném umění. Tuto skutečnost je možné žákům základních škol přiblížit právě pomocí historických příběhů.

1 Teoretická část

1.1 Výuka matematiky na 2. stupni ZŠ

1.1.1 RVP ZV

Vzdělávací obsah, tedy učivo a očekávané výstupy, matematiky na 2. stupni základní školy je vymezen Rámcovým vzdělávacím programem pro základní vzdělávání (RVP ZV). Jedná se o kurikulární dokument státní úrovně. O základním vzdělání nám říká:

„Základní vzdělávání na 2. stupni pomáhá žákům získat vědomosti, dovednosti a návyky, které jim umožní samostatné učení a utváření takových hodnot a postojů, které vedou k uvážlivému a kultivovanému chování, k zodpovědnému rozhodování a respektování práv a povinností občana našeho státu i Evropské unie.“ (RVP ZV, str. 8)

V současnosti je cílem vzdělávání utváření a rozvoj klíčových kompetencí žáků.

Klíčové kompetence představují souhrn vědomostí, dovedností, schopností, postojů a hodnot důležitých pro osobní rozvoj a uplatnění každého člena společnosti.

K jejich utváření a rozvíjení musí směřovat a přispívat veškerý vzdělávací obsah i aktivity a činnosti, které ve škole probíhají. (RVP ZV, str. 10)

RVP ZV uvádí jako klíčové kompetence tyto: kompetence k učení; k řešení problémů; komunikativní; sociální a personální; občanské; pracovní; digitální.

Vzdělávací obor Matematika a její aplikace spadá dle RVP ZV do stejnojmenné vzdělávací oblasti.

Vzdělávací oblast Matematika a její aplikace je v základním vzdělávání založena především na aktivních činnostech, které jsou typické pro práci s matematickými objekty a pro užití matematiky v reálných situacích. Poskytuje vědomosti a dovednosti potřebné v praktickém životě, a umožňuje tak získávat matematickou gramotnost. Pro tuto svoji nezastupitelnou roli prolíná celým základním vzděláváním a vytváří předpoklady pro další úspěšné studium.

Vzdělávání klade důraz na důkladné porozumění základním myšlenkovým postupům a pojmům matematiky a jejich vzájemným vztahům. Žáci si postupně osvojují některé pojmy, algoritmy, terminologii, symboliku a způsoby jejich užití. (RVP ZV, str. 31)

Mezi cíle této vzdělávací oblasti spadá zejména osvojování zásoby matematických nástrojů, rozvíjení logického myšlení a schopnosti řešit matematické úlohy a problémy nebo zpřesňování matematického vyjadřování. (Polák, 2016 str. 147)

1.1.2 Učivo a jeho provázanost s historií

Vzdělávací obor Matematika a její aplikace, a tedy i učivo, které v něm RVP ZV vymezuje, je rozdělen do čtyř tematických okruhů.

Do okruhu Číslo a proměnná spadá učivo dělitelnost přirozených čísel, celá čísla, desetinná čísla a zlomky, poměr, procenta, mocniny a odmocniny, výrazy, rovnice (RVP ZV, str. 36). Provázání těchto témat s jejich historickým kontextem pomůže žákům pochopit jejich využitelnost v praktickém životě a potřebu jejich zavedení. Zároveň si budou moct uvědomit, jak se jednotlivá témata učiva objevovala a vyvíjela v průběhu historie. Například že i když je nám dnes přirozenější počítání s celými než s „necelými" čísly, zlomky se historicky objevily dříve než záporná čísla (a v kontextu doby to dává smysl). Nebo že se už více než tři tisíce let lidé setkávají s úlohami, při jejichž řešení bylo potřeba pracovat s neznámou. Postup jejich řešení se poté postupně vyvíjel zdokonaloval.

Okruh závislosti, vztahy a práce s daty zahrnuje učivo závislosti a data, funkce (RVP ZV, str. 37). Tato témata není na druhém stupni ZŠ snadné přiblížit v celém jejich historickém kontextu. Lze ale například upozornit na dnes používaný kartézský souřadnicový systém a jeho souvislost s René Descartem.

Okruh geometrie v rovině a prostoru obsahuje učivo rovinné útvary, metrické vlastnosti v rovině, prostorové útvary, konstrukční úlohy (RVP ZV, str. 38). Při provázání geometrie s jejím historickým kontextem si žáci budou moct uvědomit, že tak, jak se ji učí oni ve škole dnes, ji znali Řekové již před začátkem našeho letopočtu. Souvisí s tím i pojmenování některých pojmů jako Thaletova kružnice, Pythagorova věta nebo eukleidovská geometrie. Zároveň je možné jim nastínit existenci neeukleidovské geometrie, která se odehrává na jiných plochách, než je rovina.

Do oblasti nestandardní aplikační úlohy a problémy spadá učivo číselné a logické řady, číselné a obrázkové analogie, logické a netradiční geometrické úlohy (RVP ZV, str. 38). V rámci této oblasti je možné použít historické úlohy. Některé mohou svou náročností přesahovat úroveň základní školy, zároveň ale mohou umožnit propojení matematiky s dalšími vzdělávacími obory, jako je například dějepis, fyzika, ale i výtvarná nebo hudební výchova.

1.1.3 Motivace

Klíčovou roli ve vzdělávacím procesu hraje motivace, která je předpokladem zahájení procesu učení. Dělena je na vnitřní a vnější. Vnější vychází z vnějších podnětů, ve škole to bývá hodnocení, odměny a tresty nebo soutěž mezi žáky. Oproti tomu vnitřní motivace vychází od daného jedince. Pro žáka je dána především sociálními motivy, kognitivními motivy a výkonovými motivy. Má zpravidla větší účinek než vnější motivace.

Pokud ale žákovi vnitřní motivace ve výuce chybí, je to učitel, kdo musí pomocí vhodných metod a prostředků žáka motivovat. Způsobem, jakým toho lze během výuky matematiky dosáhnout, je například učitelovo nadšení pro matematiku i její výuku, výběr vhodných úloh, využití matematických her a v neposlední řadě zařazení historie matematiky do výuky. (Hejný, Kuřina, 2009 str. 129) (Polák, 2016 stránky 24–26)

Motivujících aspektů historických okének ve výuce může být celá řada. Jedním z nich je propojení matematiky s dalšími obory. Buď s takovými, se kterými se v rámci historie vyvíjela bok po boku, jako jsou astronomie, filosofie, výtvarné umění nebo fyzika, anebo se samotným dějepisem. Vynikají díky tomu cenné souvislosti mezi důležitými historickými událostmi a rozvojem věd. Dalším aspektem je propojování znalostí s praxí. Zvláště zpočátku odpovídala matematika na běžné potřeby lidí například ve stavitelství nebo zeměměřičství, neméně důležitá byla pro obchodníky a úředníky. S postupem času lidé objevovali složitější matematické struktury, díky kterým matematika umožnila rozvoj například fyzice, inženýrským oborům nebo ekonomice. V neposlední řadě mohou být žákům inspirací příběhy lidí, kteří matematice věnovali kus svého života. Často v ní viděli nejen mocný nástroj na řešení problémů, i krásu spočívající v její přesnosti, platnosti a široké využitelnosti.

1.1.4 Metody vyučování

Pro zařazení historických okének do výuky je důležité použít vhodnou výukovou metodu. Metody můžeme rozdělit na klasické, kam patří metody slovní, názorně demonstrační a dovednostně praktické; aktivizující, kam spadá metoda problémového výkladu, heuristická a výzkumná; a komplexní (Polák, 2016 str. 44).

Zařadit historii do výuky lze nejsnáze pomocí metody slovní. Učitel může žákům vyprávět příběhy o vývoji matematiky nebo o životě matematiků. Další variantou je zařazení četby historických textů o tématech přínosných pro žáky 2. stupně ZŠ (například části Eukleidových Základů). Využít lze také metodu názorně demonstrační, například pro témata z geometrie.

Některá historická okénka umožňují využít heuristickou metodu, například určování hodnoty čísla π nebo ověření platnosti Pythagorovy věty.

Výběr metod úzce souvisí s pojetím výuky. Transmisivní pojetí spočívá v předávání hotových utříděných vědomostí žákům, kteří je jen pasivně přijímají. Nejčastěji užívaná metoda v transmisivní výuce je výklad. Nevýhodou tohoto pojetí je nebezpečí vzniku formálních znalostí.

Konstruktivistické pojetí oproti transmisivnímu v procesu učení zdůrazňuje aktivní přístup žáka. Poznatky tedy nejsou žákovi předávány hotové, ale na základě předchozích znalostí, zkušeností a prekonceptů je musí vytvořit sám. Užívány jsou aktivizující metody, jako problémová, heuristická a výzkumná. Nevýhodami tohoto pojetí ve školní praxi jsou velká časová náročnost přípravy i samotné výuky, vysoké nároky na pomůcky a zázemí výuky nebo využitelnost pouze u některých témat. (Polák, 2016 stránky 49–51)

Přestože je transmisivní pojetí časově příznivější a v kontextu historických okének proveditelné, je dobré obě pojetí ve výuce propojovat. Důležitost objevování spojitostí je patrná i z historie, pokud to tedy čas a zázemí školy dovolí, je dobré přistupovat k vhodným úlohám konstruktivisticky. Žáci tak budou mít možnost využít své předešlé znalosti, získají nové zkušenosti a poznatky lépe uchovají.

1.1.5 Didaktické zásady

Při plánování výuky je také dobré držet se následujících zásad. *Zásady vědeckosti*, která spočívá v tom, že učivo musí být v souladu se současnými poznatky vědy. V případě matematiky to například znamená trvat na správné terminologii a formulacích. *Zásada uvědomělosti a aktivity žáků* tví v tom, že si žáci osvojí znalosti a dovednosti s porozuměním na základě motivace. *Zásada názornosti* poukazuje na důležitost vytvoření představy na základě skutečnosti, popřípadě vhodného modelu. *Zásada soustavnosti* říká, že učivo na sebe má systematicky navazovat. *Zásada o posloupnosti* nemluví jen o postupu od jednoduššího ke složitějšímu, ale také od známého k neznámému, blízkého k vzdálenému a konkrétního k abstraktnímu. *Zásada přiměřenosti* vyžaduje, aby učivo i metody byly zvoleny v souladu se schopnostmi žáků. *Zásada trvalosti* žádá, aby žáci uchovávali osvojené vědomosti a dovednosti v paměti a uměli je prakticky využívat. Dalšími jsou *zásada spojení teorie s praxí*, *zásada individuálního přístupu k žákům* a *zásada zpětné vazby*. (Polák, 2016 str. 21)

Také při využívání historických okének během výuky by měl mít učitel tyto zásady na paměti. Zásadu uvědomělosti a aktivity žáků je možné dodržet výběrem vhodných metod, kdy žáci nebudou jen pasivními příjemci informací. Pokud vybírá historické souvislosti k tématům chronologicky, zpravidla zásadu posloupnosti splňují – poznání postupovalo od jednodušších, známých, konkrétních věcí k těm složitějším, neznámým a abstraktním. Důležité je při výběru dbát na zásadu soustavnosti a přiměřenosti, aby na sebe učivo systematicky navazovalo a historické souvislosti byly připojeny v adekvátním množství a náročnosti. Zásadu názornosti je potřeba zohlednit zvláště v historických souvislostech, které se výrazně odlišují od představ žáků.

2 Praktická část

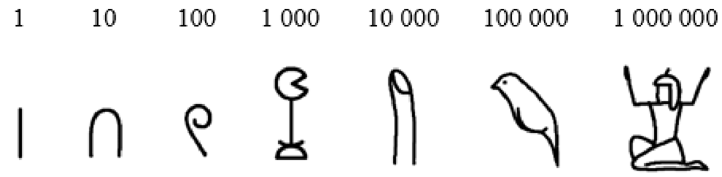
2.1 Číselné obory

2.1.1 Přirozená čísla a číselné soustavy

Nejstarší používanou číselnou množinou jsou přirozená čísla. Jak jejich označení nasvědčuje, člověk v podstatě intuitivně počítá s kladnými celými čísly, protože s jejich pomocí snadno interpretuje svět kolem sebe. Dokládá to i skutečnost, že civilizace, které se zasloužily o rozvoj matematiky, zaváděly symboly pro přirozená čísla (výjimku tvoří egyptské číslice, kde existovaly symboly i pro zlomky a mayské a indické číslice, ve kterých byla používána i nula).

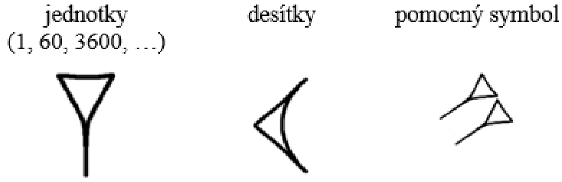
Již z doby pravěku se nám dochovaly drobné záznamy o lidském počítání, například na tzv. vrubovkách, kostech nebo holích se zářezy. Na ně byl zaznamenán určitý počet příslušným počtem zářezů. Přirozená čísla jako taková se ale objevují až se vznikem písma.

V Egyptě se od 3. tisíciletí př. n. l. používaly k zápisu čísel hieroglyfy. Existovaly symboly pro mocniny čísla 10 a číslo bylo zapsáno opakováním příslušných symbolů (například zápis čísla 243 byl dvakrát symbol pro 100, čtyřikrát symbol pro 10 a třikrát symbol pro 1).



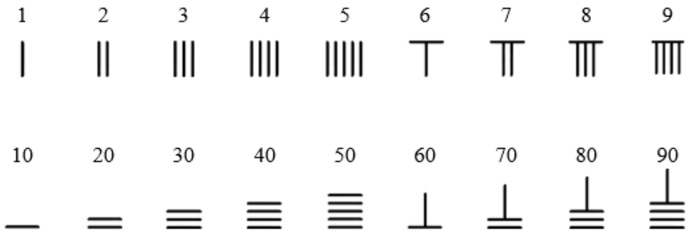
Obrázek 1: Egyptské číslice

V Mezopotámii se od poloviny 3. tisíciletí př. n. l. můžeme setkat s klínovým zápisem čísel. Používána byla šedesátková soustava, která využívala pouze dva typy znaků; svislý klín označoval jednotky (mocniny 60), vodorovný klín desítky (v zápisu velkých čísel se tedy opakovaly sady svislých a vodorovných klínů). Problémem této soustavy bylo, že dvě různá čísla mohla mít stejný zápis (například 61 a 3601). Tento nedostatek řeší nový symbol v podobě dvou šikmých klínů, který jasně říká, na které pozici se klíny nachází. Výpočty byly často prováděny pomocí tabulek.



Obrázek 2: Mezopotámské číslice

V Číně se od 2. tisíciletí př. n. l. vyjadřovala čísla pomocí hůlek a tento způsob zápisu se udržel až do 13. století n. l. Využívaly se dvě sady po devíti znacích, jedna pro sudé mocniny 10 (jednotky, stovky, desetitisíce, …), druhá pro liché mocniny 10 (desítky, tisíce, …). Jedná se o nejstarší desítkovou poziční soustavu v historii.



Obrázek 3: Čínské číslice

V Řecku zápis čísel nejprve vycházel z egyptského zápisu. Postupně se ale vyvíjel nový zápis čísel, a to pomocí písmen řecké abecedy. Čísla 1–9, 10–90 a 100–900 byla označena řeckými písmeny a jejich kombinací bylo možné zapsat další čísla (například zápis čísla 243 byl $\sigma\mu\gamma$ písmeno pro 200, 40 a 3).

1	2	3	4	5	6	7	8	9
α	β	γ	δ	ε	ς	ζ	η	θ
10	20	30	40	50	60	70	80	90
ι	κ	λ	μ	ν	ξ	o	π	ϙ
100	200	300	400	500	600	700	800	900
ρ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	ϡ

Obrázek 4: Řecké číslice

Mayové už ve 4. století př. n. l. používali dva způsoby zápisu čísel. Jeden pomocí teček a čárek, druhý pomocí obrázkových symbolů.

Od 3. století př. n. l. se vyvíjel indický zápis čísel. Číslům 1–9 byly přiřazeny speciální znaky, které se do 6. století n. l. staly základem desítkové poziční soustavy.

Na přelomu letopočtu se v Evropě začaly používat římské číslice. Číslům 1, 5, 10, 50, 100, 500 a 1000 byla přiřazena velká písmena latinské abecedy. Pro vyjádření dalších čísel se písmena skládala za sebe. K provádění výpočtů sloužil abakus, destička, po které se přesouvaly kamínky k jednotlivým římským číslicím.

1	5	10	50	100	500	1000
I	V	X	L	C	D	M

Obrázek 5: Římské číslice

Číslice, které používáme dnes, jsou označovány jako arabské, přestože svůj původ mají v Indii. Ve 12. století je Evropané společně s poziční desítkovou soustavou převzali od Arabů. Protože počítání s novými číslicemi bylo jednodušší a rychlejší než s římskými, rozšířil se tento způsob zápisu po celé Evropě a římské číslice zcela nahradil. (Polák, 2014 stránky 31–34)

Tento proces ale nebyl okamžitý a jednoduchý. Velkou úlohu v něm sehrál italský matematik Leonardo Pisánský známý jako Fibonacci. Část svého života strávil v severní Africe, kde se seznámil s arabskou matematikou. O číselné soustavě a číslicích, se kterými se seznámil, pojednal ve své knize Liber Abaci. Protože počítání s arabskými číslicemi bylo snazší a rychlejší než práce s abaky, byl nový číselný systém vítán italskými obchodníky a bankéři. Vlády italských měst ale s novými číslicemi spokojeny nebyly. Obávaly se, že by se z důvodu snadné zaměnitelnosti jednotlivých číslic mohlo zvýšit množství podvodů. Florencie dokonce používání arabských číslic zakázala. (Seife, 2019 stránky 93–95)

2.1.2 Celá čísla

Ačkoli se může zdát, že celá (respektive záporná) čísla jsou podobně intuitivní, jako přirozená čísla, jejich používání nezačalo současně. Některé civilizace je buď nepotřebovaly, nebo chápaly matematiku způsobem, který zavedení záporných čísel neumožňoval.

Zajímavým a poněkud rozporuplným celým číslem je nula. Historie jejího používání je obsáhlá, proto jí věnujeme samostatnou kapitolu.

Se zápornými čísly se nejdříve setkáváme v Číně a v Indii. Na přelomu letopočtu je Čínští matematici používali při řešení rovnic. V Indii byla záporná čísla označována jako „dluh“ a značena číslicí s tečkou; kladná čísla byla nazvána „majetek“. V 7. století n. l. sestavil indický matematik Brahmagupta pravidla pro operaci dělení, do kterého zahrnul i počítání se zápornými čísly. Právě z této doby se nám dochovala pravidla, že dělíme-li kladné číslo kladným nebo záporné záporným, výsledkem je kladné číslo. Pokud dělíme záporné kladným nebo kladné záporným, výsledkem je záporné číslo.

Do Evropy se záporná čísla dostala ve 13. století, značení záporná a zápis pomocí znaménka minus je ale zavedeno až v 15. století. Jejich prosazení však trvalo, a ještě v první polovině 19. století nebyla všeobecně přijata. (Polák, 2014 str. 36) (Seife, 2019 str. 83)

2.1.3 Racionální čísla

Jak již bylo zmíněno výše, už starověké civilizace potřebovali počítat s menší částí, než je celek. Proto se začaly používat kladné zlomky.

V Egyptě byly požívány tzv. kmenové zlomky a zlomek $\frac{2}{3}$. Kmenové zlomky jsou takové, co mají jedničku v čitateli a přirozené číslo ve jmenovateli. Značili se pomocí hieroglyfů a jejich sčítáním byly vyjadřovány ostatní zlomky.

Kmenové zlomky poté začali používat i Řekové. Zapisovali je slovně, později je začali psát malými řeckými písmeny s čárkami a pruhy, ale zápis nebyl jednotný. Jejich způsob počítání se zlomky pak převzali Římané a Arabové.

V Mezopotámii se používaly šedesátinné zlomky, což jsou takové, co mají ve jmenovateli mocninu 60. Zapisovali se klínovým písmem. V Číně byli zlomky zapisovány nejprve slovně, později pomocí speciálních symbolů.

Ve 4. století př. n. l. začali Indové počítat už s obecnými zlomky (v čitateli nemusela být jednička). V 7. století n. l. Brahmagupta pojednává o pravidlech o počítání se zlomky.

Do Evropy se zlomky dostali ve 13. století n. l. díky Arabům. Matematik Fibonacci o nich pojednává ve svém díle, kde se poprvé objevuje zlomková čára.

Samotný pojem zlomek (lomené číslo) vznikl překladem z latiny v počátcích používání zlomků v Evropě. Označení čitatel a jmenovatel vzniklo ve 13. století při překladech matematických děl. Způsoby úprav zlomků byly používány již ve 12. století, ale jejich slovní označení (krácení a rozšiřování zlomků, nejmenší společný jmenovatel a úprava na nejmenšího společného jmenovatele) postupně přicházela později.

Další používaný způsob zápisu „necelých čísel“ jsou desetinná čísla. Jsou mladší než zlomky a vychází z mezopotámských šedesátinných zlomků (ve jmenovateli je mocnina 60). Zápis se postupně upravil na desetinné zlomky a v 16. století je François Viète zapsal již jako desetinná čísla. Desetinná část byla psána menšími číslicemi bez použití desetinné čárky. Ta se postupně objevuje později. (Polák, 2014 stránky 34–35)

2.1.4 Reálná čísla

Reálná čísla jako množinu zahrnující racionální a iracionální čísla zavedl René Descartes. Iracionální čísla mají nekonečný neperiodický desetinný rozvoj a nelze je zapsat jako poměr dvou celých čísel. (Polák, 2014 str. 39)

S některými z nich se setkali již pythagorejci, kteří se zabývali souměřitelností úseček. Když zkoumali poměr délky strany čtverce a jeho úhlopříčky zjistili, že $\sqrt{2}$ je iracionální. Pokoušeli se tento poměr vyjádřit pomocí přirozených čísel, ale bez úspěchu. Iracionální číslo nelze zapsat jako poměr dvou přirozených čísel. O čísle, kterému dnes říkáme „odmocnina ze dvou“ měli představu, ale neuměli je zapsat (odmocnina začala být značena symbolem až v 15. století). Nedlouho poté bylo jasné, že i $\sqrt{3}$ nebo $\sqrt{17}$ jsou iracionální čísla. Toto zjištění bylo naprosto zásadní a pro pythagorejskou filosofii nepřípustné (viz kapitolu Pythagoras ze Samu, pythagorejci). (Livio, 2010 str. 33) (Hejný, 1990 str. 27)

Iracionální čísla ale nejsou jen odmocniny z některých přirozených čísel.

Pravděpodobně nejznámějším iracionálním číslem je π, které vyjadřuje poměr délky obvodu kruhu a jeho průměru. Jeho hodnota je přibližně 3,141 592 a už starověkým civilizacím se dařilo jeho hodnotu odhadnout. Například Archimedes opsal a vepsal kružnici pravidelný 96úhelník, čímž hodnotu π určil mezi $\frac{223}{71}$ a $\frac{22}{7}$.

Označení π pochází z 18. století a vychází pravděpodobně z řeckého výrazu pro obvod, perimetros. Někdy označováno také jako Ludolfovo číslo podle matematika Ludolpha van Ceulena (16. století), který velkou část svého života věnoval zpřesňování jeho odhadů. Použil stejnou metodu jako Archimedes a kružnici opsal a vepsal mnohoúhelník s 60×2^{29} stranami. Číslo π určil na 20 desetinných míst. Po jeho smrti vyšlo najevo, že se mu podařilo π určit dokonce s přesností na 35 desetinných míst. Tento odhad má vytesaný na svém náhrobku. (Polák, 2016 str. 30) (Pickover, 2012 str. 60) (Beckmann, 1998 str. 85)

V 18. století bylo dokázáno, že π je iracionální. Skutečnost, že π není řešením žádné algebraické rovnice s celočíselnými koeficienty, byla dokázána v 19. století. Proto o π mluvíme jako o tzv. transcendentním číslu. (Polák, 2014 str. 39)

Dalším známým iracionálním číslem je Eulerovo číslo e. V matematice vystupuje v mnoha odvětvích, jakými je například teorie pravděpodobnosti nebo statistika. Podobně jako π je i e transcendentní.

Tato dvě iracionální čísla spolu vystupují v rovnici zvané Eulerova identita nebo Eulerova rovnost, která byla několikrát zvolena za nejkrásnější matematickou formuli: $e^{i\pi} + 1 = 0$. Kromě nich tam vystupuje i, což je imaginární jednotka, která však už patří do oboru komplexních čísel. (Pickover, 2012 str. 166)

2.1.5 Symbolika

Jak již bylo částečně zmíněno výše i matematická symbolika se vyvíjela postupně. Zlomek má svou dnešní podobu od 13. století, záporná čísla se značí minusem od 15. století a desetinná tečka je definitivně zavedena až v 19. století. (Polák, 2014 str. 35)

Podobně tomu bylo se znaky operací a relací. Od starověku byly úlohy zadávány převážně slovně a speciální znaky se nepoužívaly. První, kdo zavádí symboliku je Diofantos (3.

století n. l.), a to pro odčítání a umocňování. Znaky pro sčítání $+$ a odčítání $-$ byly zavedeny v 17. století, stejně tak znaménka pro násobení $\times$ i $\cdot$ a pro dělení $:$.

Znak rovnosti $=$ použil na konci 16. století R. Recorde, protože „nic není shodnější, než rovnoběžky“. V 17. století R. Descartes zdokonalil algebraickou symboliku. Veličiny značil písmeny a mocniny exponentem, ale jako symbol rovnosti nepoužíval $=$ ale $\propto$. Během 17. a 18. století také postupně vznikají znaky pro ostrou a neostrou nerovnost, $<$, $>$ a $\leq$, $\geq$. (Polák, 2014 str. 36) (Polák, 2016 str. 83)

2.1.6 Nula

Přestože si dnes život bez nuly neumíme představit, byla doba, kdy s ní lidé nepracovali. Neexistoval pro ni symbol, špatně se znázorňovala, a navíc se nechová podle některých pravidel, která jiná čísla dodržují.

Už starověké civilizace se matematikou zabývaly. Ze začátku vycházela z potřeb lidí a byla zaměřena prakticky. Začaly vznikat i číslice a číselné soustavy, ale ve většině z nich se s nulou nesetkáme. A vzhledem k praktickému kontextu to není příliš překvapivé. Lidé neměli potřebu vyjadřovat, že nic (něco) nemají. (Seife, 2019 str. 15)

První náznak nuly se objevil v Babylonii. Používán byl klínový zápis čísel a šedesátková soustava, která ale měla jeden nedostatek. Umožňovala zapsat dvě čísla stejným způsobem, protože v zápisu se sady klínů označující pozice opakovaly a nebylo jednoznačné o jakou mocninu 60 se jedná. Tento nedostatek byl postupně odstraňován mezerou v zápisu, později dvojicí šikmých klínů. Tento znak měl ukázat, že je v zápisu vynechaná pozice. Jednalo se o první náznak nuly, ne však nulu v pravém slova smyslu. Tento znak se neobjevoval samostatně a nepředstavoval žádnou hodnotu. Měl jen v poziční soustavě zaplnit prázdnou pozici. (Seife, 2019 str. 23)

Přestože Řekové vycházeli ve svých astronomických poznatcích ze znalostí Babyloňanů, sami nulu nepřijali. Naučili se ji používat při počítání, výsledky ale přepisovali do své soustavy, která nulu neměla. Jejich vnímání čísel bylo navíc propojeno s geometrií, což ji ani nevyžadovalo. Nula navíc reprezentuje „prázdnotu“, která byla v rozporu s řeckou filosofií.

Na Řeky navazují Římané a jejich prostřednictvím je celá Evropa zasažena řeckou kulturou. I z tohoto důvodu se nula v Evropě až do 12. století neobjevila. (Seife, 2019 str. 49)

Tak, jak ji známe, se nula objevuje až v 6. století n. l. v Indii. Začala tam být používána desítková poziční soustava, ve která bylo potřeba vyjádřit prázdnou pozici, obdobně jako to dělali Babyloňané. Záhy se ale nula stala plnohodnotným číslem a v 7. století zformuloval indický matematik Brahmagupta pravidla pro počítání s nulou. (Polák, 2014 str. 34)

Protože desítková poziční soustava umožňuje poměrně snadné a rychlé výpočty (narozdíl třeba od římských číslic, kde bylo nutné využívat abakus), přijali tento způsob počítání i Arabové a díky nim se dostal do Evropy. I přes nevoli katolické církve se snazší způsob počítání ujal u italských bankéřů a obchodníků. Brzy i církev pochopila výhodnost indické soustavy a její používání (včetně nuly) se rozšířilo po celé Evropě. (Seife, 2019 stránky 81, 95)

Označení nuly symbolem 0 se odvíjí pravděpodobně od způsobu znázorňování čísel v Indii pomocí kamínků v písku. Odebereme-li všechny kamínky, zbyde v písku prázdný důlek.

Původní indický název pro tuto číslici byl *śúnja* (prázdnota). Arabové tento výraz přeložili jako *as-syfr*, z čehož později vzniklo slovo cifra (ve smyslu číslice, už ne pouze nula). Z latinské podoby tohoto slova, *zefirus*, vzniklo anglické označení *zero*, český název nula vznikl z latinského *nullus* (žádný). (Polák, 2014 str. 34)

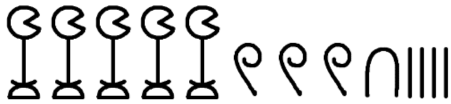
Arabské číslice sloužili italským obchodníkům i k posílání tajných zpráv. Slovo *as-syfr* v přeneseném významu označovalo i tajný kód a vzniklo z něj kromě cifry i slovo šifra. (Seife, 2019 stránky 86, 95)

Počítání s nulou přináší jiné výsledky, než na jaké jsme zvyklí při počítání s jinými čísly. Omezíme-li se na přirozená čísla, sečtením dvou z nich získáme větší číslo, odečtením menší číslo. Pokud přičteme nebo odečteme nulu, nenastane žádná změna. Budeme-li chtít nulou násobit, dojdeme zajímavého výsledku – jakékoli číslo vynásobené nulou je nula. Problém nastává, když budeme chtít nulou dělit. I přes velkou snahu a mnoho pokusů nebylo možné dojít rozumných výsledků. Dělení nulou boří základy matematiky a umožňuje dokázat jakýkoli výrok. (Seife, 2019 stránky 29–32)

Zajímavý důsledek dlouhé absence nuly v Evropě souvisí s přelomem letopočtu. V 6. století n. l. mnich Dionysius sestavoval kalendář počínající narozením Ježíše Krista. Rok, ve kterém se Ježíš narodil, označil číslem I, další rok II a pokračoval až do své současnosti. Pro tyto roky používal označení anno Dominni (AD), léta Páně. V 8. století na jeho práci navázal mnich Beda. S použitím Dionysiova kalendáře ve svém díle popisoval události, jež se staly 60 let před rokem, který Dionysius označil číslem I AD. Beda tyto roky označil jako „před Kristem“ (BC). To znamenalo, že přelom letopočtu byl: … II BC, I BC, I AD, II AD … V námi používaném kalendáři se nevyskytuje rok 0. Nula je jen předělem mezi naším letopočtem a obdobím před naším letopočtem.

2.1.7 Příklady ke kapitole

Př. 1 Zapište daná čísla arabskými číslicemi.

a)  

b)   

c)   

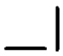
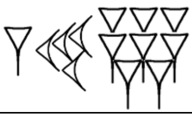
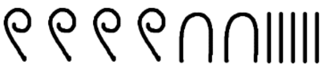
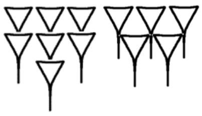
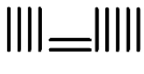
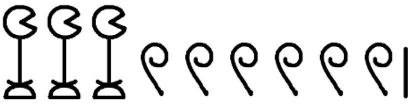
d) $\xi\eta$ $\tau\kappa\alpha$ $\omega\pi\eta$

e) XXI DCCXXIX MCCXCVII

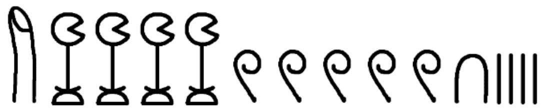
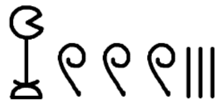
Řešení:

a)	49	5 314	2 170 283
b)	14	65	3651
c)	12	4 285	127 449
d)	68	321	888
e)	21	729	1297

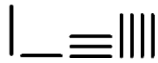
Př. 2 Zapište čísla 7, 11, 108, 425 a 3601 číslicemi jednotlivých civilizací.

Řešení:	Egyptské číslice	Mezopotámské číslice	Čínské číslice	Řecké číslice	Římské čís-lice
7				ζ	VII
11				$\iota\alpha$	XI
108				$\rho\eta$	CVIII
425				$\upsilon\kappa\varepsilon$	CDXXV
3601				–	MMMDCI

Př. 3 Vypočítejte součet a rozdíl zadaných čísel. Výsledek zapište příslušnými číslicemi.

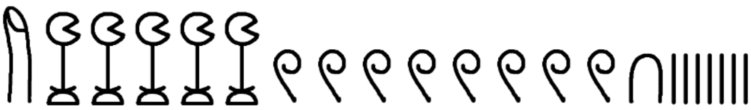
a)  

b)  

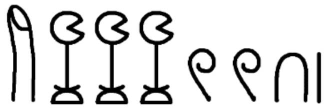
c)  

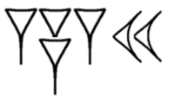
d) $\upsilon\mu\alpha$ $\tau\pi\zeta$

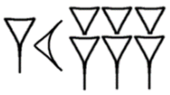
e) MXIV CCCLXVIII

Řešení: a) součet … 

(14 514 + 1 303 = 15 817)

rozdíl …  (14 514 – 1 303 = 13 211)

b) součet …  (168 + 92 = 260)

rozdíl …  (168 – 92 = 76)

c) součet …  (17 298 + 11 034 = 28 332)

rozdíl …  (17 298 – 11 034 = 6 264)

d) součet … $\omega\kappa\eta$ (441 + 387 = 828)

rozdíl … $\nu\delta$ (441 – 387 = 54)

e) součet … MCCCLXXXII (1 014 + 368 = 1 382)

rozdíl … DCXLVI (1 014 – 368 = 646)

Př. 4 Napočítejte do 10.

Řešení: Jedná se o naprosto jednoduchý úkol? To je dobře. Začali jste ale počítat od 1 nebo od 0? Pro Evropany je opravdu přirozené začít jedničkou a s nulou „tak nějak nepočítat".

Př. 5 Jsou dány dvě různé veličiny a, b. Potom platí:

$$\begin{array}{rl} I. & a-b=a-b \\ II. & a+b=a+b \\ \hline I.-II. & a-a=b-b \end{array}$$

$$a(1-1)=b(1-1)$$

$$a=b$$

Zadány byly ale dvě **různé** veličiny. Jak je možné, že vyšel nepravdivý výsledek? (Konforovič, 1989 str. 169)

Řešení: Během řešení došlo k dělení nulou, proto je výsledek chybný.

2.2 Poměry

Zájem o poměry měli v průběhu historie zejména pythagorejci. Jejich filosofie tkvěla v tom, že vše je číslo (rozumějme přirozené) a všechno tedy lze vyjádřit poměry těchto čísel. Pythagoras objevil spojitost mezi hudbou a čísly. Souzvuk tónů je příjemný, právě když lze poměr délek strun, který ho vydávají, zapsat pomocí přirozených čísel. I slovo racionální ve smyslu rozumný má původ ve slově ratio – poměr. (Seife, 2019 stránky 39, 44)

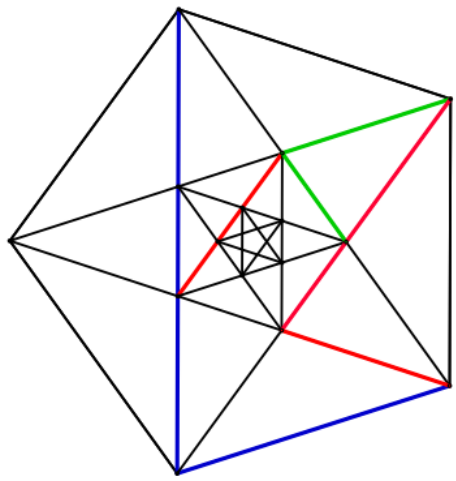
Velký otřes pro pythagorejské přesvědčení nastal, když Hippasos z Metapontu objevil, že ne všechny poměry je možné vyjádřit pomocí přirozených čísel. Zabýval se poměrem délky strany čtverce a jeho úhlopříčky a zjistil, že číslo $\sqrt{2}$ není racionální – má nekonečný neperiodický desetinný rozvoj. Z této skutečnosti se stalo mezi pythagorejci tajemství. Hippasos jej však údajně prozradil, za což ho bratrstvo odstranilo ze svých řad. (Livio, 2010 stránky 32–33)

Dalším poměrem, kterému pythagorejci věnovali svou pozornost byl zlatý řez.

2.2.1 Zlatý řez

Zlatý řez je považován za ideální poměr. Úsečka je rozdělena ve zlatém řezu, je-li poměr větší části k menší stejný jako poměr celku k větší části, tedy $a : b = (a + b) : a$.

Už pythagorejci tento poměr znali. Měli ho spojený s pentagramem, protože v něm se zlatý řez vyskytuje několikrát (viz barevné značení). Ve své lásce k poměrům považovali tento za ideální a pentagram se stal jejich symbolem.



Obrázek 6: Pentagram

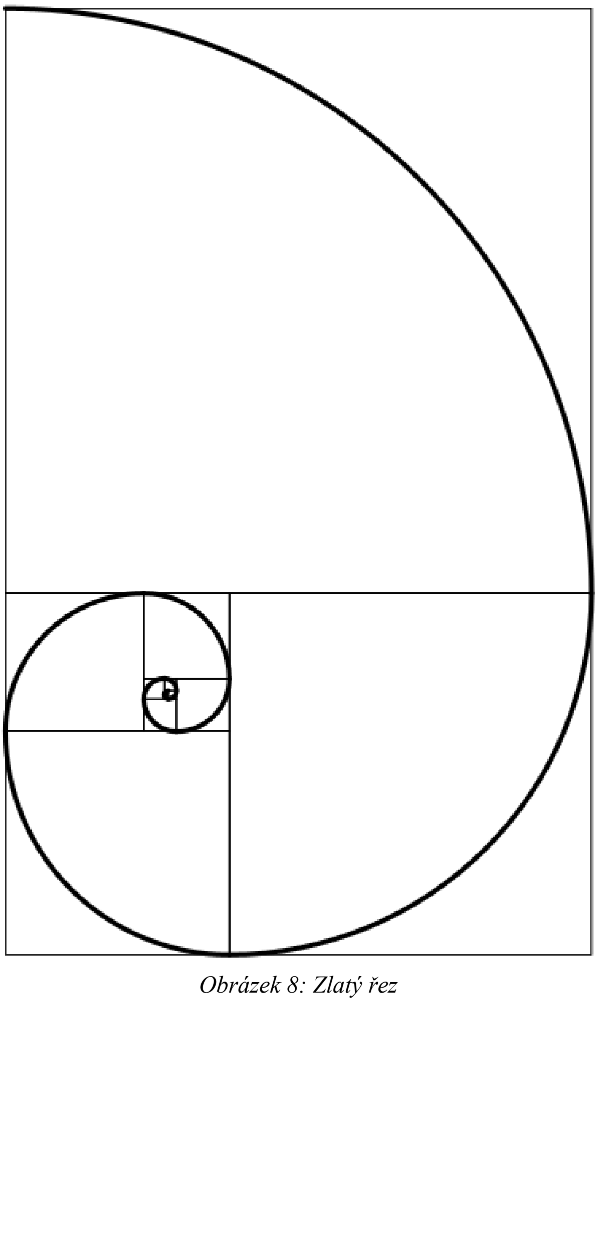
Zlatý řez můžeme vyjádřit číselně, a to vyřešením rovnice $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$. Výsledkem, který je někdy značen řeckým písmenem φ, je $\frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \doteq 1{,}618$

Svou oblibu má díky estetickému dojmu, který dává pozorovateli. Obrazce a objekty, které obsahují zlatý řez, připadají lidem krásné. Proto je hojně využíván v umění, ať už se jedná o malířství, fotografie, sochařství nebo architekturu.

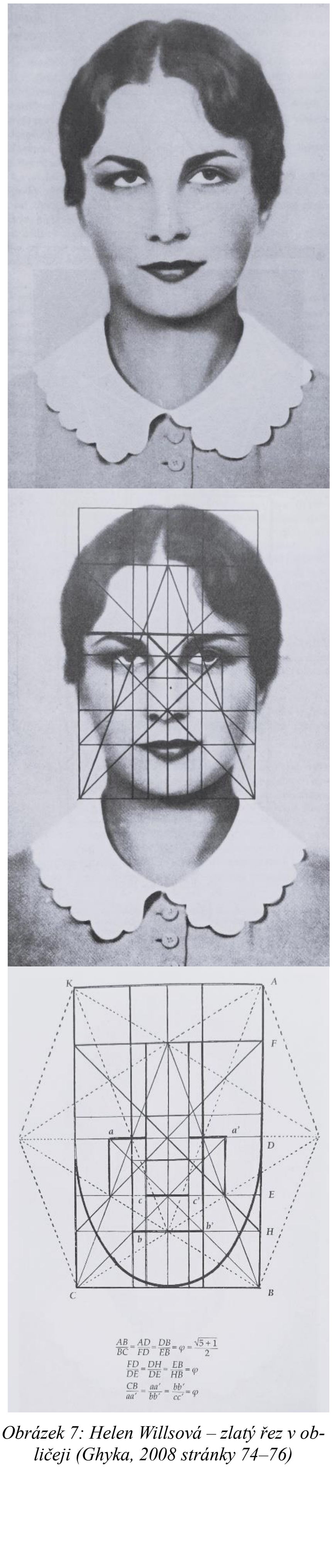
Se zlatým řezem se setkáme i v souvislosti s Fibonacciho posloupností. Jedná se o posloupnost, jejíž členy (třetím členem počínaje) jsou rovny součtu dvou předchozích členů. Vydělením členu posloupnosti jeho bezprostředně předcházejícím členem získáváme přibližnou hodnotu čísla φ (čím vyšší člen posloupnosti, tím přesnější přiblížení).

Členy Fibonacciho posloupnosti odpovídají například uspořádání listů a květů některých rostlin nebo přírůstku schránek některých korýšů. Se zlatým řezem se tedy setkáváme i v přírodě.

Také proporce lidského těla mají poměr zlatého řezu. Například v obličeji je to jeho výška k šířce, šířka úst k šířce nosu, vzdálenost vnějších koutků očí k šířce úst nebo délka nosu k jeho šířce (viz portrét Helen Willsové, v jejímž obličeji je zlatý řez dodržen naprosto přesně). (Ghyka, 2008 stránky 47–66) (Livio, 2010 str. 206)



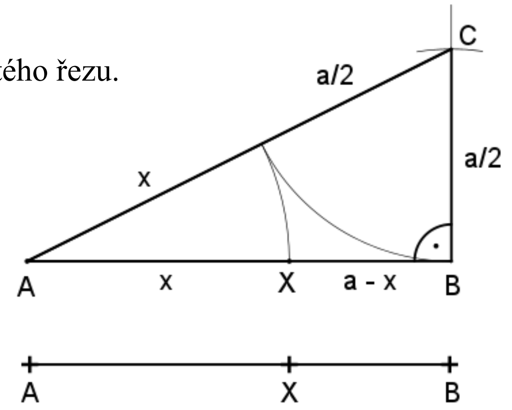
Obrázek 8: Zlatý řez



Obrázek 7: Helen Willsová – zlatý řez v obličeji (Ghyka, 2008 stránky 74–76)

2.2.2 Příklady ke kapitole

Př. 6 Podle návodu rozdělte úsečku v poměru zlatého řezu.



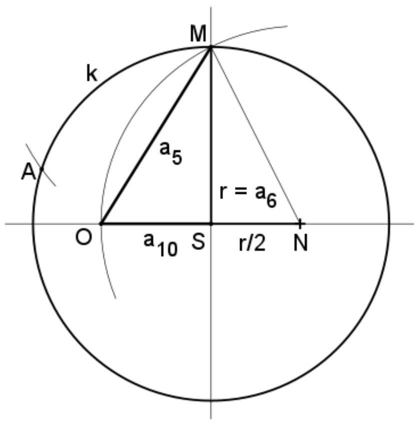
Obrázek 9: Zlatý řez – rozdělení úsečky

1) $AB;\ |AB| = a$
2) $p;\ B \in p \wedge p \perp AB$
3) $q;\ q\left(B;\ \frac{a}{2}\right)$
4) $C; C \in p \cap q$
5) $r; r\left(C; \frac{a}{2}\right)$
6) $T;\ T \in AC \cap r$
7) $u; u(A;\ |AT|)$
8) $X; X \in u \cap AB$ … úsečka AB je bodem X rozdělena v poměru zlatého řezu

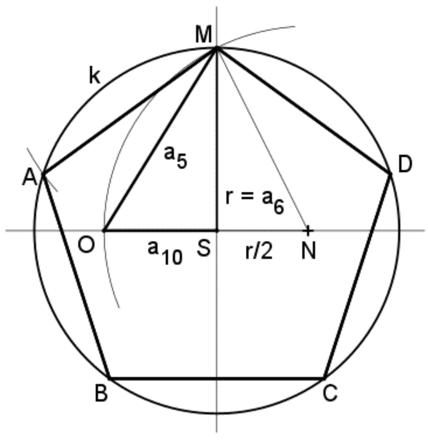
Pozn.: Konstrukce bodu X na úsečce AB velmi dobře koresponduje s algebraickým vyjádřením poměru $\varphi = \frac{a}{x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Vyjádříme-li z tohoto tvaru x, dostaneme $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a$, po úpravě $x = \frac{\sqrt{5}}{2}a - \frac{a}{2}$. Pomocí Pythagorovy věty snadno ověříme, že je-li $|AB| = a$ a $|BC| = \frac{a}{2}$, potom $|AC| = \frac{\sqrt{5}}{2}a$. Pokud od velikosti úsečky AC odečteme $\frac{a}{2}$, získáme úsečku o velikosti x.

Př. 7 Podle návodu sestrojte pravidelný pětiúhelník.

1) $k;\ k(S;\ r)$
2) $s;\ S \in s$
3) $t;\ t \perp l \wedge S \in t$
4) $M;\ M \in t \cap k$
5) $N;\ N \in s \wedge |SN| = \frac{r}{2}$
6) $n;\ n(N;\ |MN|)$
7) $O;\ O \in n \cap s$
8) $a_5;\ a_5 = OM$
9) body A, B, C, D
10) pětiúhelník $MABCD$



Obrázek 11: Konstrukce pravidelného pětiúhelníku



Obrázek 10: Pravidelný pětiúhelník

Př. 8 *Staro římská úloha (2. století n. l.).* Jeden umírající člověk řekl: „Jestliže se mé ženě narodí syn, ať mu patří dvě třetiny jmění a zbytek ženě. Jestliže se narodí dcera, ať jí patří třetina a dvě mojí ženě. Narodila se dvojčata – syn a dcera. Jak se má rozdělit jmění, aby se splnila závěť nebožtíka? (Konforovič, 1989 str. 70)

Řešení: dědictví..................................... $syn : žena = 2 : 1$

dědictví..................................... $dcera : žena = 1 : 2$

dědictví..................................... $syn : dcera : žena = ?$

Vidíme, že dědictví je rozděleno dvěma jednoduchými poměry a v obou dvou figuruje část dědictví, která připadne ženě. K vyřešení úlohy je třeba pomocí ženiny části dědictví sestavit postupný poměr. To bude možné v případě, že v obou jednoduchých poměrech bude ženina část dědictví vyjádřena stejným počtem dílů. Rozšíříme-li první poměr dvěma, získáme $syn : žena = 2 : 1 = 4 : 2$ a nyní už můžeme složit postupný poměr:

$\boldsymbol{syn : dcera : žena = 4 : 1 : 2}$.

Synovi tedy připadnou $\frac{4}{7}$ majetku, dceři $\frac{1}{7}$ a ženě $\frac{2}{7}$.

2.3 Rovnice

První úlohy, jejichž řešení spočívalo v hledání neznámé veličiny, se nám dochovaly z Egypta na Rhindově a Moskevském papyru (2. tisíciletí př. n. l.). Obsahují úlohy na výpočet veličiny „h“ (čte se „hau“ nebo „aha“), což představuje určité neznámé množství. Úloha vedla většinou na lineární rovnici a byla řešena metodou chybného předpokladu (use of a false assumption). Počtář zvolí „h“ rovno číslu, se kterým se mu bude dobře počítat. Dosadí ho a zjistí, nakolik zvolil špatně, a dopočítá, kolik má být správné řešení. Například pokud hromada a její čtvrtina dávají dohromady 15 (dnešním zápisem: $h + \frac{1}{4}h = 15$), počítající zvolí $h = 4$ (aby se mu to dobře počítalo), dosadí do zadání a dojde výsledku 5. To je třikrát méně, než má podle zadání vyjít. Správné řešení tedy musí být třikrát větší, než byl původní odhad ($h = 4 \cdot 3 = 12$). (Polák, 2014 str. 125) Na rozdíl od jiných druhů experimentování tato strategie není univerzální, ale je specifická pro určité typy úloh. Z matematického pohledu je v pozadí těchto úloh linearita vztahů.

V Mezopotámii (2. tisíciletí př. n. l.) se dle dochovaných tabulek řešily kvadratické i kubické rovnice (neznámá se v rovnici vyskytuje ve druhé, respektive třetí mocnině), zároveň se objevují i soustavy rovnic. Neznámé označovali jako délku, šířku a hloubku, součin dvou z nich jako pole a součin všech tří jako objem. Přes toto pojmenování ale pracovali s pojmy abstraktně a bylo tedy možné sečíst délku s plochou nebo objemem, což by geometricky samozřejmě nedávalo smysl. Zadání bylo formulováno slovně, protože neexistovala žádná symbolika. Babyloňané znali jen kladná racionální čísla a koeficienty rovnice volili tak, aby kořeny vyšly kladné. Čísla zapisovali pomocí šedesátkové soustavy, úlohy tedy řešili pomocí tabulek, kde měli například hodnoty druhých a třetích mocnin nebo součinů. (Polák, 2014 stránky 125–126) (Konforovič, 1989 stránky 25–26)

V Řecku (6. století př. n. l.) se věnovali geometrickým problémům, které vedou k sestavení kvadratických rovnic (úlohy, kde je možné využít Pythagorovu větu; zlatý řez).

Řecký matematik Diofantos z Alexandrie (3. století př. n. l.) ve svém díle Aritmetika zformuloval pravidla pro řešení rovnic. Řešil lineární, kvadratické i speciální kubické rovnice s kladnými koeficienty a jako řešení uvažoval jen kladná racionální čísla (přirozená čísla nebo kladné zlomky). Dnes jeho jméno nesou tzv. diofantické rovnice, což jsou takové, které obsahují více proměnných a řešení uvažujeme jen v celých číslech (zároveň není jednoznačně určeno a zpravidla není jen jedno). Ve svém díle zavádí i symboliku pro odčítání, umocňování a neznámou označuje písmenem. (Polák, 2016 str. 72)

Z Indie (2. tisíciletí př. n. l.) se dochovaly úlohy, které vedou k řešení lineárních rovnic nebo jejich soustav. Při jejich řešení byla používána i záporná čísla a vyvinula se algebraická symbolika. Po přelomu letopočtu se indičtí matematici věnovali řešení diofantických rovnic. Brahmagupta (7. století n. l.) formuloval postup řešení kvadratické rovnice úpravou na úplný čtverec.

Z Číny se z přelomu letopočtu dochovalo dílo Matematika v devíti kapitolách. Obsahuje mimo jiné úlohy vedoucí k řešení lineárních rovnic nebo jejich soustav. Jejich řešení bylo často podobné soudobému řešení pomocí matic. (Polák, 2014 str. 127)

Na indickou matematiku postupně navázala arabská. Matematik al-Chvárizmí (9. století n. l.) se věnoval řešení lineárních a kvadratických rovnic. Používal přitom úpravy přenesení odčítaného výrazu z jedné strany rovnice na druhou (aby získal kladné koeficienty), zrušení stejných sčítanců na obou stranách rovnice a vydělení všech členů rovnice týmž kladným číslem. První zmíněná úprava se arabsky nazývá al-džabr, z čehož potom vzniklo i evropské pojmenování pro matematické odvětví algebra. (Polák, 2016 str. 73) Všechny zmíněné oblasti jsou úspěchy jsou převážně spojovány právě s al-Chvárizmím. Je ale pravděpodobné, že se na nich podíleli i jiní arabští matematici té doby.

Díky Fibonaccimu se ve 13. století poznatky z arabského světa dostaly do Evropy, kde na ně pak navázali další.

Obecnou metodu řešení kubických rovnic objevil italský matematik přezdívaný Tartaglia (Koktavec). Podařilo se mu to týden před matematickým soubojem, ve kterém si se svým protivníkem měli navzájem zadat třicet matematických úloh a ty potom vyřešit. Tartagliův protivník a vyzyvatel A. M. Fior se od svého učitele S. del Ferra naučil řešit jeden typ kubických rovnic. Tartaglia to však věděl a zadal mu jen úlohy takového typu, které vyřešit nezvládne. On sám všechny Fiorovy úlohy vyřešil a souboj vyhrál.

Tartagliův současník Gerolamo Cardano se o obecnou metodu řešení kubických rovnic zajímal a pod podmínkou, že ji nezveřejní, mu ji nakonec Tartaglia prozradil. Cardano svůj slib dlouho držel, ale potom se mu dostal do rukou spis S. del Ferra, ze kterého vyšlo najevo, že znal obecnou metodu řešení kubických rovnic dříve než Tartaglia. Cardano se tedy rozhodl metodu publikovat ve svém díle Velké umění i se jmény obou objevitelů. Přesto u Tartaglii vyvolal tento čin hněv a nenávist. Dílo se stalo klíčovým ve vývoji algebry a vzorce pro výpočet kořenů kubické rovnice byly později nazvány Cardanovy vzorce. (Polák, 2016 stránky 75–77)

Ve svém díle se Cardano zmiňuje i o metodě řešení rovnic 4. stupně, jejímž autorem byl jeho žák. Zároveň ale zastává názor, že věnovat se rovnicím vyššího než 3. stupně, nemá kvůli jejich geometrické neinterpretovatelnosti příliš význam. (Polák, 2016 str. 77) (Livio, 2010 stránky 146–147)

V 16. století se algebře začal věnovat francouzský matematik François Viète, někdy označovaný jako otec algebry. Zavedl pojem koeficient a algebraickou symboliku, ve které označoval písmeny nejen známé, ale i neznámé veličiny. Úlohy se tak staly přehlednějšími. Velkým přínosem byl Viètův objev vztahu mezi kořeny a koeficienty algebraických rovnic, který je dodnes označován jako Viètovy vzorce. Věnoval se i řešení rovnic vyšších stupňů, což dokládá i historka, podle které řešil rovnici 45. stupně od jednoho nizozemského matematika. Viète velmi rychle nalezl jeden kladný kořen, druhý den dalších 22 kladných kořenů. (Polák, 2016 stránky 78–79)

2.3.1 Příklady ke kapitole

Př. 9 Celá hromada, její polovina, její dvanáctina a její dvě třetiny dávají dohromady 9. Kolik je celá hromada? Pokuste se vypočítat pomocí metody chybného předpokladu.

Řešení: metodou chybného předpokladu:

Zvolíme hromadu $h = 12$ (nejmenší společný jmenovatel všech zlomků). Dosazením získáme součet hromady a jejích částí $12 + 6 + 1 + 8 = 27$, což je trojnásobek požadovaného výsledku. Hromada tedy musí být třikrát menší, řešení úlohy je $\boldsymbol{h = 4}$.

Řešení: úpravou rovnice:

$$h + \frac{1}{2}h + \frac{1}{12}h + \frac{2}{3}h = 9 \qquad /\cdot 12$$

$$12h + 6h + h + 8h = 108$$

$$27h = 108$$

$$\boldsymbol{h = 4}$$

Př. 10 *Mezopotámská úloha.* Máme dva kruhy. Součet sedminy hmotnosti prvního kruhu a jedenáctiny hmotnosti druhého kruhu se rovná 1. Rozdíl hmotnosti prvního kruhu a její sedminy se rovná rozdílu hmotnosti druhého kruhu a její jedenáctiny. Určete hmotnosti obou kruhů. (Konforovič, 1989 str. 28)

Řešení: Hmotnost prvního kruhu označíme x, hmotnost druhého y a sestavíme soustavu rovnic:

$$\frac{1}{7}x + \frac{1}{11}y = 1$$
$$x - \frac{1}{7}x = y - \frac{1}{11}y$$

$$\frac{1}{7}x = 1 - \frac{1}{11}y$$
$$x = 7 - \frac{7}{11}y$$
$$7 - \frac{7}{11}y - 1 + \frac{1}{11}y = y - \frac{1}{11}y$$
$$77 - 7y - 11 + y = 11y - y$$
$$66 = 10y + 6y$$
$$66 = 16y$$
$$\boldsymbol{y} = \frac{66}{16} = \mathbf{\frac{33}{8}}$$
$$x = 7 - \frac{7}{11} \cdot \frac{33}{8}$$
$$x = 7 - \frac{21}{8}$$
$$\boldsymbol{x} = \mathbf{\frac{35}{8}}$$

První kruh má hmotnost $\frac{35}{8}$ druhý $\frac{33}{8}$.

Př. 11 Metrodorova veršovaná úloha (6. století n. l.).

Diofantův epitaf: Prach Diofantův hrobě je skryt, pohleď, i kámen moudrým uměním prozradí zemřelého věk: Z vůle bohů byl po šestinu života dítětem a za další polovinu šestiny dočkal se chmýří na lících. Jak minula sedmina, oženil se s milovanou svojí, pět let s ní prožil, než syna dočkal se mudrc. Jen polovinu svého věku se otec se synem těšil, brzy mohyla dítě otci skryla. Dvakrát dva roky otec oplakával syna, než po těch letech dočkal se svého smutného konce. (Konforovič, 1989 str. 74)

Řešení: Věk, kterého Diofantos dosáhl označíme x a sestavíme rovnici:

$$\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x$$
$$\frac{2+1+6}{12}x + \frac{1}{7}x - x = -9 \qquad /\cdot 12 \cdot 7$$
$$63x + 12x - 84x = -9 \cdot 84$$
$$-9x = -9 \cdot 84$$
$$\boldsymbol{x} = \mathbf{84}$$

Diofantos se měl podle epitafu na svém náhrobku dožít 84 let. Je-li tento text věrohodný, jedná se o jediný zdroj informací o jeho životě.

Př. 12 Metrodorova veršovaná úloha (6. století n. l.).

Když Kyprida spatřila, že Erós pláče, zeptala se ho:
„Co tě tak roztesknilo, mohu to vědět?“
„Šel jsem z Helikónu a nesl mnoho jablek,“ říká Erós,
„ale potom mne náhle přepadly Múzy a zmocnily se sladké nůše.
Dvanáctinu jich v mžiku popadla Euterpé, Kleió
si oddělila pětinu, Thaleia osminu.
Dvacetinu pro sebe zabrala Malpomené
a čtvrtinu Terpsychoré. Sedminu si uchvátila
a jak přelud zmizela Erató. Třicet
plodů si vzala Polymnia. Sto dvacet se jich
dostalo Uránii a tři sta Kalliopé.
A tak se vracím domů s prázdnýma rukama,
Zbylo mi jen půl stovky jablek. (Konforovič, 1989 str. 76)

Spočítejte, kolik jablek Erós původně nesl a kolik si jich vzala která z Múz.

Řešení: Počet jablek, které Erós původně nesl, označíme x a sestavíme rovnici:

$$x - \frac{1}{12}x - \frac{1}{5}x - \frac{1}{8}x - \frac{1}{20}x - \frac{1}{4}x - \frac{1}{7}x - 30 - 120 - 300 = 50$$

$$x - \frac{1}{12}x - \frac{1}{5x} - \frac{1}{8}x - \frac{1}{20}x - \frac{1}{4}x - \frac{1}{7}x = 500$$

$$\frac{60x - 5x - 12x - 3x - 15x}{60} - \frac{1}{8}x - \frac{1}{7}x = 500 \quad /\cdot 60 \cdot 56$$

$$56 \cdot 25x - 420x - 480x = 500 \cdot 60 \cdot 56$$

$$1400x - 900x = 1\,680\,000$$

$$500x = 1\,680\,000$$

$$\boldsymbol{x = 3360}$$

Erós původně nesl 3 360 jablek. Euterpé si jich vzala $\frac{3360}{12} = 280$, Kleió $\frac{3360}{5} = 672$, Thaleia $\frac{3360}{8} = 420$, Malpomené $\frac{3360}{20} = 168$, Terpsychoré $\frac{3360}{4} = 840$, Erató $\frac{3360}{7} = 480$ a jak je v zadání řečeno Polymnia 30, Uránia 120 a Kalliopé 300.

Př. 13 *Indická úloha (9. století n. l.).* Devět druhých odmocnin z dvou třetin celkového počtu slonů spolu s šesti odmocninami ze tří pětin zbytku je v lese. Zbývá ještě 24 slonů. Kolik je všech slonů? (Konforovič, 1989 str. 85)

Sestavte rovnici, ze které bude možné počet slonů dopočítat.

Řešení: Celkový počet slonů označíme s; sestavená rovnice bude mít podobu

$$9\sqrt{\frac{2}{3}s} + 6\sqrt{\frac{3}{5} \cdot \left(s - 9\sqrt{\frac{2}{3}s}\right)} + 24 = s$$

Vyřešením této rovnice (jejíž náročnost převyšuje úroveň základní školy) dostaneme celkový počet slonů $s = 150$.

Př. 14 *Čínská úloha (přelom letopočtu).* Máme jezírko, které napájí pět kanálů. kdybychom otevřeli první, za třetinu dne se naplní. Když otevřeme jen druhý, naplní se za den, když jen třetí, naplní se za dva a půl dne, když jen čtvrtý, naplní se za tři dny, a když jen pátý, naplní se za pět dní. Nyní všechny kanály otevřeme současně a ptáme se, za kolik dní se jezírko naplní? (Polák, 2014 str. 153)

Řešení: 1. k ...... j. plné za $\frac{1}{3}$ dne........ za 1 den .... 3 nádrže ....za x dní .. $3x$ nádrží

2. k..... j. plné za 1 den .... za 1 den .... 1 nádrž..........za x dní .. x nádrží

3. k..... j. plné za $\frac{5}{2}$ dne........ za 1 den .... $\frac{2}{5}$ nádrže ....za x dní .. $\frac{2}{5}x$ nádrží

4. k..... j. plné za 3 dny....... za 1 den .... $\frac{1}{3}$ nádrže ....za x dní .. $\frac{1}{3}x$ nádrží

5. k..... j. plné za 5 dní........ za 1 den .... $\frac{1}{5}$ nádrže ....za x dní .. $\frac{1}{5}x$ nádrží

$$\begin{aligned} 3x + x + \frac{2}{5}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{5}x &= 1 \qquad /\cdot 15 \\ 45x + 15x + 6x + 5x + 3x &= 15 \\ 74x &= 15 \\ \boldsymbol{x} &= \boldsymbol{\frac{15}{74}} \end{aligned}$$

Plní-li se jezírko všemi kanály najednou, bude plné za $\frac{15}{74}$ dne, tedy za necelých pět hodin.

Př. 15 Úloha z Blízkého východu (7. století n. l.). Jeden kupec projel třemi městy. V prvním městě utratil polovinu a třetinu majetku, ve druhém polovinu a třetinu toho, co mu zbylo, ve třetím polovinu a třetinu toho, co ještě měl. Když se vrátil domů, zbývalo mu 11 grošů. Kolik grošů měl na počátku? (Polák, 2014 str. 154)

Řešení: původní počet grošů.................. x

groše po výjezdu z 1. města ...... y

groše po výjezdu z 2. města ...... z

průjezd 1. městem .... $x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x$

průjezd 2. městem .... $y - \frac{1}{2}y - \frac{1}{3}y$

průjezd 3. městem .... $z - \frac{1}{2}z - \frac{1}{3}z$

počet zbylých grošů................... 11

$$x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x = y$$

$$y - \frac{1}{2}y - \frac{1}{3}y = z$$

$$z - \frac{1}{2}z - \frac{1}{3}z = 11$$

$$\frac{1}{6}x = y$$

$$\frac{1}{6}y = z$$

$$\frac{1}{6}z = 11$$

$$z = 66$$

$$y = 66 \cdot 6 = 396$$

$$\boldsymbol{x} = 396 \cdot 6 = \mathbf{2376}$$

Na počátku měl kupec 2376 grošů.

Př. 16 *Fibonacciho úloha (12. století).* Kdosi koupil 30 ptáků za 30 penízů. Za tři vrabce platil jeden peníz, za dvě hrdličky též jeden peníz a za jednoho holuba dva peníze. Kolik ptáků každého druhu koupil? Alespoň sestavte rovnice. (Konforovič, 1989 str. 112)

Řešení: Počet vrabců označíme x, počet hrdliček y a počet holubů z. Sestavíme rovnice:

$$x + y + z = 30$$
$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y + 2z = 30 \qquad /\cdot 6$$

$$x + y + z = 30$$
$$2x + 3y + 12z = 180$$

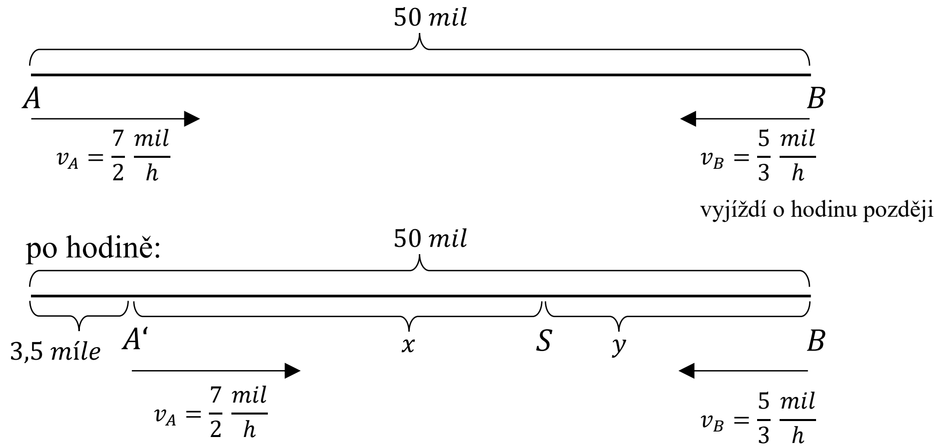
$$12I. - II. \qquad 10x + 9y = 180$$

Nyní musíme vyřešit diofantickou rovnici, řešení hledáme v přirozených číslech a nalézáme pouze jediné: $[x; y] = [9; 10]$. Dosazením do první rovnice dopočítáme $z = 30 - 9 - 10 = 11$, řešením tedy je $[\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}; \boldsymbol{z}] = [\mathbf{9}; \mathbf{10}; \mathbf{11}]$**.**

Dotyčný tedy nakoupil 9 vrabců, 10 hrdliček a 11 holubů.

Př. 17 *Newtonova úloha (17. století).* Dva listonoši A, B vyjíždějí na kolech sobě vstříc z míst vzdálených 50 mil. Listonoš A ujede 7 mil za 2 hodiny, listonoš B 5 mil za 3 hodiny, přitom listonoš B vyjíždí na cestu o hodinu později než A. Kolik mil ujede listonoš A do setkání s listonošem B? (Polák, 2014 str. 156)

Řešení:



$$x + y = 50 - 3{,}5$$
$$t = t$$

$$y = 46{,}5 - x$$
$$\frac{x}{\frac{7}{2}} = \frac{y}{\frac{5}{3}}$$

$$\frac{2x}{7} = \frac{3y}{5}$$

$$\frac{2x}{7} = \frac{3 \cdot (46{,}5 - x)}{5} \qquad /\cdot 35$$
$$10x = 21 \cdot (46{,}5 - x)$$
$$10x = 976{,}5 - 21x$$
$$31x = 976{,}5$$
$$x = 31{,}5$$

$$31{,}5 + 3{,}5 = \mathbf{35}\ \boldsymbol{mil}$$

Listonoš A ujede 35 mil, než potká listonoše B.

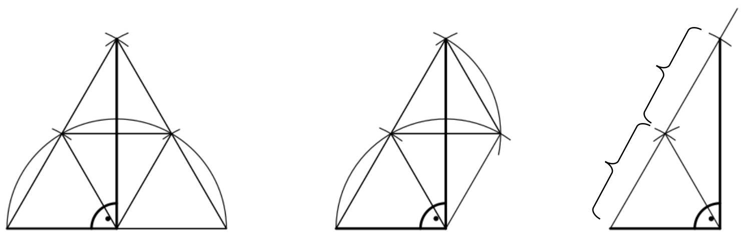
2.4 Geometrie

První náznaky znalosti geometrie pochází z doby pravěku. Můžeme tak usuzovat z dochovaných nádob, které jsou zdobené jednoduchými geometrickými tvary. Velký rozvoj geometrie nastal během starověku. Zasloužili se o něj civilizace z okolí velkých řek. Geometrie jim dávala možnost například vyměřovat pozemky, stavět chrámy a hradby nebo zabývat se astronomií. (Polák, 2014 str. 285)

Pravděpodobně prvním národem, který se začal zabývat geometrií, byli Egypťané. Kvůli záplavám v okolí Nilu bylo nutné kontrolovat, že se v zaplavených oblastech nemění velikosti pozemků. Tento dohled vykonávali tzv. natahovači provazů – zeměměřiči, jejichž název pochází od nástroje, kterým měřili půdu. Podle přesných pravidel uměli určit obsahy rovinných obrazců i objemy mnohých těles. Název matematického odvětví geometrie – měření země – má svůj evidentní původ již v této době. (Seife, 2019 str. 18) (Konforovič, 1989 str. 15)

Z egyptských nálezů je zřejmé, že starověcí Egypťané uměli velmi přesně sestrojit pravý úhel. Jedním ze způsobů, jakým to prováděli bylo použití tzv. egyptské šňůry. Jedná se o provaz uzly rozdělený na dvanáct stejně dlouhých úseků. Pokud byl složen do trojúhelníku o délkách stran 3, 4 a 5 úseků, bylo možné pomocí něj sestrojit pravý úhel (jedná se o praktické využití Pythagorovy věty, a to více než tisíc let před Pythagorem).

Pro velké vzdálenosti nebyla tato metoda dostatečně přesná, nahradila ji tedy konstrukce pravého úhlu pomocí pravidelného šestiúhelníku. Ten lze sestrojit pouze rýsováním kružnic se stejným poloměrem, což je s pomocí provazu a dvou kolíků snadná konstrukce i pro velké vzdálenosti. Na obrázku jsou tři různé možnosti, jak pomocí pravidelného šestiúhelníku pravý úhel narýsovat. (Kadeřávek, 1997 str. 31)



Obrázek 12: Konstrukce pravého úhlu pomocí pravidelného šestiúhelníku

Z dochovaných památek se usuzuje, že Egypťané používali při tesání soch nebo stavbě chrámů kolmé promítání. Prostorový objekt byl kolmo promítnut na rovinu – shora (půdorys), zpředu (nárys) a z boku (bokorys) – a poté tesán podle nákresu. (Kadeřávek, 1997 str. 12)

Egyptská geometrie byla velmi praktická, sloužila ve stavebnictví i zemědělství. Z jejích poznatků pravděpodobně čerpali i známí řečtí matematici Thales a Pythagoras. (Seife, 2019 str. 19)

I geometrie užívaná v Mezopotámii měla praktický charakter, aby sloužila architektům a stavitelům. Byly známy a pojmenovány jednoduché geometrické obrazce (například kruh označovaný jako „výběh“ nebo lichoběžník, „čelo býka“). U některých uměli alespoň přibližně určit plochu. Také znali a používali Pythagorovu větu, a to více než tisíc let před Pythagorem. (Konforovič, 1989 str. 27)

Velký rozvoj geometrie přinesli Řekové. Matematici jako Thales z Miletu, pythagorejci nebo Eukleides z Alexandrie oddělili geometrii od ryze praktických situací a položili základ matematiky jako vědy (viz kapitolu Osobnosti). Thales se zajímal o geometrické objekty, formuloval řadu pouček a svá tvrzení dokazoval. Pythagorejci se zabývali čísly, která byla s geometrickými obrazci úzce propojena. Zvláště je zajímaly pravidelné geometrické útvary. Po zjištění, že poměr strany a úhlopříčky čtverce nelze vyjádřit přirozenými čísly, začaly veličiny vyjadřovat výhradně geometricky. Mimo to se jim podařilo dokázat tvrzení o vztahu délek stran pravoúhlého trojúhelníku, dnes známé jako Pythagorova věta. Eukleides ve svém díle Základy shromáždil matematické poznatky své doby a utřídil je pomocí definic, axiomů, postulátů a důkazů. Pojednává o planimetrii, teorii čísel a stereometrii. (Polák, 2016 stránky 67–70)

Byly také zformulovány tři matematické úlohy, které se tehdy řečtí matematici pomocí kružítka a pravítka marně snažili vyřešit. Jednalo se o *trisekci úhlu*, rozdělení libovolného úhlu na tři stejně velké části, *zdvojení krychle*, sestrojení takové krychle, která má oproti původní dané krychli dvojnásobný objem, a *kvadratura kruhu*, sestrojení čtverce o takovém obsahu jako má původně zadaný kruh. V 19. století bylo dokázáno, že vyřešit tyto úlohy pouze pomocí pravítka a kružítka není možné. (Polák, 2016 str. 9)

Důraz, který sami Řekové na důležitost geometrie kladli, je patrný i z údajného nápisu nad průčelím Platonovy Akademie: *Nevstupuj, kdo neovládáš geometrii!* (Polák, 2014 str. 286)

S Platonovým jménem se setkáváme také v souvislosti s tzv. platonskými tělesy. Jedná se o mnohostěny, jejichž stěny jsou tvořeny shodnými pravidelnými mnohoúhelníky a z každého vrcholu jich vychází stejný počet. Existuje jich pět: čtyřstěn, osmistěn a dvacetistěn, jejichž stěny tvoří rovnostranné trojúhelníky, krychle, jejíž stěny tvoří čtverce, a dvanáctistěn, jehož stěny jsou tvořeny pravidelnými pětiúhelníky. Platon je popsal ve svém dialogu Timaios (4. století př. n. l.) a přiřadil je jako strukturu základním elementům; ohni čtyřstěn, vzduchu osmistěn, zemi krychli a vodě dvacetistěn. Dvanáctistěn byl dle Platona použit k uspořádání nebes. (Pickover, 2012 str. 50)

Dalším, kdo se podílel na rozvoji geometrie, byl Archimedes ze Syrakus (3. století př. n. l.). Studoval kuželosečky (křivky vzniklé rozříznutím pláště kuželu; elipsa, parabola, hyperbola), podařilo se mu zdokonalit určování obsahů rovinných obrazců pomocí opsaných a vepsaných mnohoúhelníků. Obdobně zjišťoval objemy těles pomocí opsaných a vepsaných mnohostěnů.

Archimedes se však nevěnoval jen matematice. Byl i fyzik a vynálezce. Velmi známý je jeho zákon o vztlakové síle, ke kterému se váže historka o nahém Archimedovi běžícím městem a volajícím „Heuréka“. A během druhé punské války svými vynálezy pomohl chránit Syrakusy před římskými vojsky.

Během této války končí Archimedův život. Zatímco do města vtrhli římští vojáci a chtěli ho zatknout, přemýšlel Archimedes o geometrii a svému okolí nevěnoval pozornost. Na vojáka prý jen křikl: „Nedotýkej se mých kruhů!“, načež ho pobouřený voják zabil. Na náhrobní kámen mu byl na jeho vlastní přání vytesán válec opsaný kouli. Podařilo se mu totiž dokázat, že poměr jejich objemů je 3:2 a tohoto důkazu si velmi cenil. (Polák, 2016 stránky 70–71)

Studiu kuželoseček se během svého života věnoval také Apollonios z Pergy (3. století př. n. l.). Známý je díky konkrétnímu typu konstrukčních úloh, které dnes nesou jeho jméno. Jedná se o konstrukční úlohy s cílem sestrojit kružnici, která se dotýká tří zadaných objektů, jimiž mohou být body, přímky nebo kružnice. Původní úlohou bylo sestrojit kružnici, která se dotýká tří zadaných kružnic, Později byla úloha rozšířena o kružnici s nulovým poloměrem (bod) a kružnici s nekonečně velkým poloměrem (přímku).

Na Apolloniovy úlohy navazují tzv. Pappovy úlohy. Jedním ze zadaných objektů je bod ležící na jednom ze dvou zbývajících objektů, přímce nebo kružnici. Jejich autor, Pappos z Alexandrie (4. století n. l.), ve svém díle shromáždil matematické poznatky antických matematiků i s historickými souvislostmi. (Polák, 2014 str. 288)

Na řeckou geometrii navazuje arabská a vznikají arabské překlady Eukleidových Základů. Studovány jsou rovnoběžky, konstrukce pravítkem a kružítkem a rovinná a sférická trigonometrie kvůli astronomii. Ta je potom dále rozvíjena v Evropě v souvislosti s mapováním a mořeplavbou. (Polák, 2014 str. 289)

Ve středověku se v Evropě rozvíjí praktická geometrie. Vznikaly stavitelské cechy a již učňové byli vyučováni geometrii a rýsování. Pokud chtěl tovaryš získat více zkušeností, mohl vstoupit do jiného stavitelského cechu. Aby tam byl přijat, musel složit zkoušku z geometrie, protože cechovní tajemství byla bedlivě střežena. (Kadeřávek, 1997 stránky 48–50)

V 17. století dali René Descartes a Pierre de Fermat vzniknout analytické geometrii. Geometrické obrazce byly vyjádřeny algebraickými rovnicemi a umístěny do souřadnicového systému, což později umožnilo velký rozvoj matematické analýzy. (Polák, 2014 str. 365)

V 18. století vzniká deskriptivní geometrie, která se zabývá zobrazením prostorového objektu do roviny. Jejím zakladatelem je francouzský matematik G. Monge, po kterém je dnes pojmenována zobrazovací metoda. Tehdejší vláda považovala jeho práci za velmi důležitou pro armádu, proto ji prohlásila za státní tajemství.

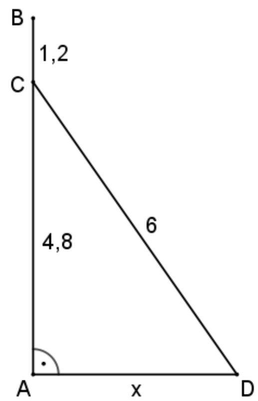
Od doby, kdy Eukleides sepsal Základy, vedly se kolem jednoho z jeho axiomů, axiomu rovnoběžnosti, dohady. Byl delší než ostatní axiomy a řadu let se různí matematici snažili tento axiom sestavit z jiných nebo zjednodušit. V 19. století bylo dokázáno, že to není možné, což vedlo k objevování tzv. neeukleidovských geometrií (geometrií, kde tento axiom neplatí). Jednou z nich je hyperbolická geometrie, která funguje na ploše podobné koňskému sedlu. Jejímu objevování se věnoval například C. F. Gauss. Dalším příkladem je sférická geometrie fungující na povrchu koule, kterou se zabýval B. Riemann. Jako zajímavost lze uvést, že zatímco v eukleidovské geometrii je součet vnitřních úhlů trojúhelníku právě 180°, v hyperbolické je to vždy méně a ve sférické vždy více než 180°. (Polák, 2014 str. 290) (Livio, 2010 str. 139) (Seife, 2019 str. 158)

Jelikož geometrie vznikla jako nástroj k měření země, je přirozené spojovat ji se světem, který vidíme kolem sebe. Matematika nám ale dovoluje dostat se dál. Můžeme řešit algebraickou rovnici 4. stupně a dostat se k rozumnému výsledku. Jen ho už nebudeme moci interpretovat geometricky, protože jsme limitováni trojrozměrným světem. Existují ale modely, které nám umožní „do 4. dimenze nahlédnout“. Tím je například Kleinova láhev nebo teserakt (někdy též hyperkrychle).

Hyperkrychle je čtyřrozměrná obdoba krychle. Tak, jako je krychle ohraničena čtverci (prostor plochou), je hyperkrychle ohraničená krychlemi (hyperprostor prostorem). A stejně jako když vytažením čtverce do 3. rozměru získáme krychli, vytažením krychle do 4. rozměru vznikne hyperkrychle. (Pickover, 2012 stránky 276, 278)

2.4.1 Příklady ke kapitole

Př. 18 *Mezopotámská úloha.* Trám dlouhý půl gar (gar = 12 loktů) stál svisle v poloze AB. Potom byl přemístěn do polohy CD. Vzdálenost BC je desetina gar. O kolik loktů se vzdálil spodní konec trámu z původní polohy? (Konforovič, 1989 str. 31)



Obrázek 13: Půlgarový trám

Řešení: Velikost posunutí označíme x a sestavíme rovnici:

$$x^2 = 6^2 - 4{,}8^2$$

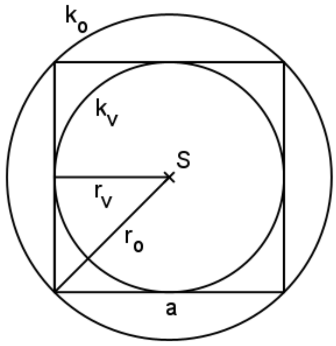
$$x^2 = 12{,}96$$

$$\boldsymbol{x = 3{,}6\ lokte}$$

Spodní konec tyče se z původní polohy vychýlil o 3,6 lokte.

Př. 19 Archimedova úloha (3. století př. n. l.). Obsah kruhu opsaného čtverci je dvakrát větší než obsah kruhu vepsaného čtverci. Ukažte, že tvrzení je pravdivé. (Konforovič, 1989 str. 59)

Řešení: Obsah kruhu počítáme podle vzorce $S = \pi r^2$. Kružnice vepsaná čtverci má poloměr délky poloviny strany čtverce, tedy $r_v = \frac{1}{2}a$. Poloměr kružnice opsané čtverci je polovina délky jeho úhlopříčky, a protože $u = a\sqrt{2}$, platí $r_o = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.



Obrázek 14: Kružnice opsaná a vepsaná čtverci

Nyní můžeme vyjádřit obsahy kružnic a jejich poměr:

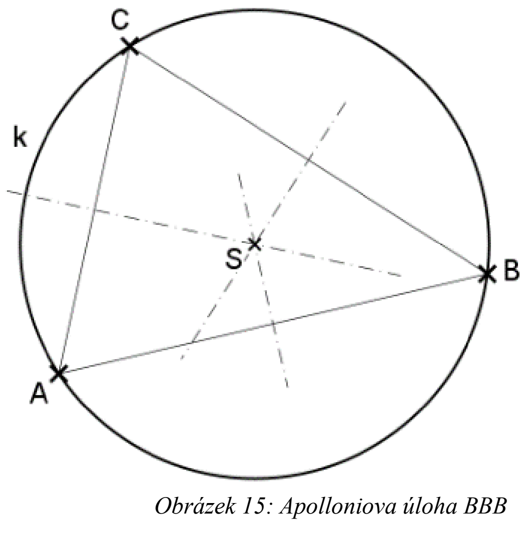
$$S_v = \pi\left(\frac{1}{2}a\right)^2 = \frac{1}{4}\pi a^2$$

$$S_o = \pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 = \frac{1}{2}\pi a^2$$

$$\boldsymbol{S_v} : \boldsymbol{S_o} = \frac{1}{4}\pi a^2 : \frac{1}{2}\pi a^2 = \frac{1}{2} : 1 = \mathbf{1 : 2}$$

Př. 20 Apolloniova úloha (3. století př. n. l.). Jsou dány tři body A, B, C, které neleží v jedné přímce. Sestrojte kružnici k, která prochází všemi těmito body.

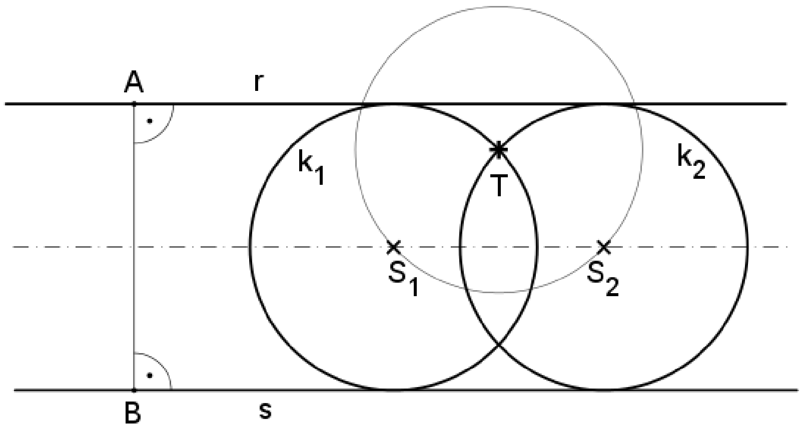
Řešení: Střed S kružnice k, kterou chceme narýsovat, musí mít od všech zadaných bodů stejnou vzdálenost. Množinou bodů, která má od dvou bodů stejnou vzdálenost je osa jejich spojnice, pro trojici bodů to bude průsečík os jejich spojnic. Jedná se o obdobnou úlohu jako je konstrukce kružnice opsané trojúhelníku. Úloha má 1 řešení.



Obrázek 15: Apolloniova úloha BBB

Př. 21 *Apolloniova úloha (3. století př. n. l.).* Je dána dvojice rovnoběžek r, s a mezi nimi bod T. Sestrojte kružnici k, která dotýká obou rovnoběžek a prochází bodem T.

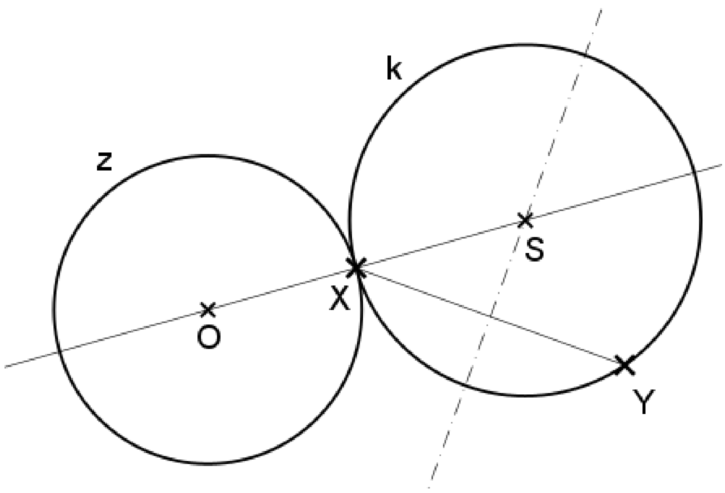
Řešení: Aby se konstruovaná kružnice k dotýkala obou rovnoběžek, musí její střed S ležet na ose rovinného pásu ohraničeného rovnoběžkami. Jeho vzdálenost od bodu T musí být stejná jako vzdálenost osy od rovnoběžek. Úloha má 2 řešení.



Obrázek 16: Apolloniova úloha Bpp

Př. 22 *Pappova úloha (3. století př. n. l.).* Je dána kružnice z, na ní bod X, a vně kružnice bod Y. Sestrojte kružnici k, která se dotýká kružnice z a prochází oběma body.

Řešení: Kružnice k a z budou mít vnější dotyk v bodě X. V takovém případě musí střed S kružnice k ležet na přímce procházející středem kružnice z a bodem X. Zároveň musí ležet na ose spojnice bodů X a Y, aby měl od obou bodů stejnou vzdálenost. Úloha má 1 řešení.



Obrázek 17: Pappova úloha Bk_T

Př. 23 Hádanka o provazu kolem Země (W. Whiston 1702). Provaz pevně obaluje Zemi kolem rovníku. O kolik delší by provaz musel být, aby byl všude 1 metr nad jejím povrchem? (Pickover, 2012 str. 162)

Řešení: Poloměr Země označíme r_1, délku provazu, který pevně obepíná Zemi o_1, prodloužený poloměr r_2 a délku prodlouženého provazu o_2. Potom platí:

$$r_2 = r_1 + 1$$

$$o_1 = 2\pi r_1$$

$$o_2 = 2\pi r_2 = 2\pi(r_1 + 1) = 2\pi r_1 + 2\pi$$

Zjišťujeme, o kolik je nutné provaz prodloužit:

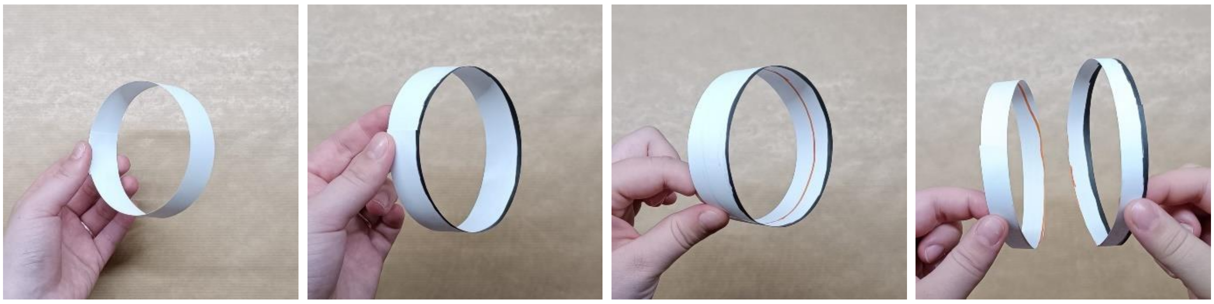
$$\boldsymbol{o_2} - \boldsymbol{o_1} = 2\pi r_1 + 2\pi - 2\pi r_1 = \boldsymbol{2\pi}$$

Provaz by musel být delší o 2π metru (cca 6,28 m).

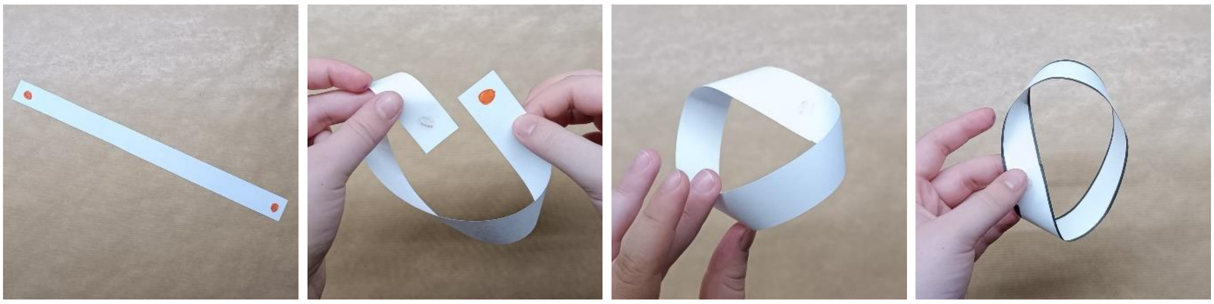
Tento výsledek může překvapivý. Ještě překvapivější ale je, že nezáleží na kouli, kterou omotáváme, respektive na jejím poloměru – výsledek není závislý na r_1. Pokud bychom tedy chtěli zvednout provaz o 1 m nad povrch koule, museli bychom ho prodloužit o cca 6,28 m, a to bez ohledu na to, zda se jedná o fotbalový míč nebo Jupiter.

Př. 24 Möbiova páska (19. století).

Úvodem: Proužek papíru slepte do prstence a obarvěte jednu jeho hranu. Z jedné strany nakreslete uprostřed proužku čáru a podle ní ho rozstřihněte. Proužek se rozpadne na dva stejné prstence o původní délce a poloviční šířce.

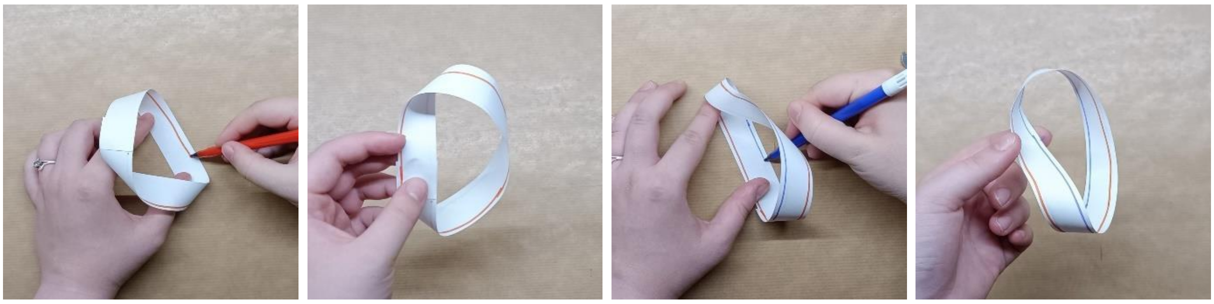


Ustřihněte dva dlouhé papírové proužky o šířce cca 2 cm. Na jejich koncích si z jedné strany udělejte značky. Slepte oba proužky tak, aby byly značky přilepené k sobě a vznikla vám hladká smyčka (jeden z konců musíte otočit o 180°).

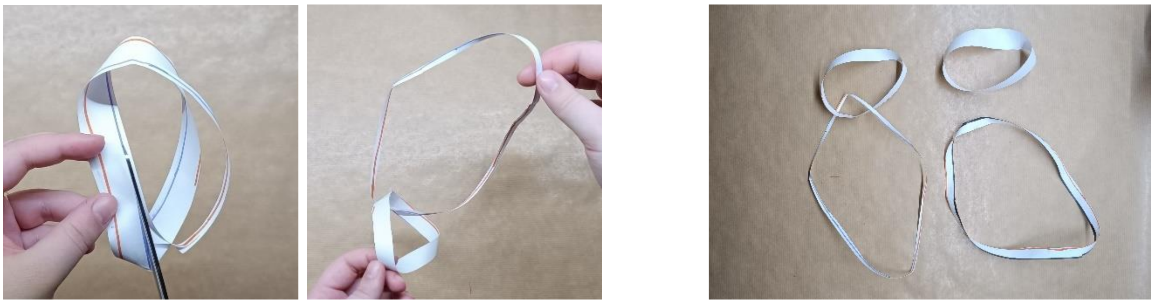


Hranou a středem jednoho z proužků veďte čáru, aniž byste přitom zvedli tužku od proužku. Co se stane? *Aniž bychom zvedli tužku, budou obarvené všechny hrany proužku a čára bude nakreslená po obou jeho stranách.* Podél čáry proužek rozstřihněte. Co bude výsledným objektem? *Výsledkem bude jedna smyčka. Bude mít dvojnásobnou délku a poloviční šířku proti té původní.*

Vezměte druhý proužek a jednou barvou udělejte čáru pár milimetrů od hrany proužku. Poté vezměte druhou barvu a postup opakujte od druhé hrany. *Pokud se vám podařilo pro obě čáry udržet stejnou vzdálenost od hrany, podívejte se na proužek proti světlu. Uvidíte, že se čáry překrývají, navrchu proužku jedna barva, vespodu druhá.*



Podle jedné z čar proužek rozstřihněte. Co bude výsledkem? *Dvě smyčky, větší a menší. Větší smyčka odpovídá té, kterou jsme získali rozstřihnutím prvního proužku. Má dvojnásobnou délku, než měla původně a její šířka je rovna vzdálenosti čáry od hrany. Menší je stále Möbiovou páskou, její délka se nezměnila a její šířka je zmenšena o dvojnásobek vzdálenosti čáry od hrany. Toto rozstřihnutí vlastně znamená, že jsme od pásky odstřihli její okraj.*



Obrázek 18: Möbiův proužek

Tuto pásku objevil v polovině 19. století A. F. Möbius ve svých sedmdesáti letech. Jedná se o plochu, která má jen jednu stranu a jednu hranu. Není proto možné, nakreslit na ni čáru „jen z jedné strany", jak by si člověk představoval. Páska má „z obou stran" stále tu samou stranu, stejně tak hrana pásky je stále tatáž. (Pickover, 2012 str. 248)

Př. 25 Terénní úloha

Po způsobů egyptských zeměměřičů sestrojte na volném prostranství pravý úhel. Potřebovat budete nepříliš pružný provaz (tloušťky alespoň prádelní šňůry), kolíky nebo křídu na vytyčení pravého úhlu, 2 kulaté kolíky a měřicí pásmo.

Rozdělte se na dvě skupiny. První skupina bude konstruovat pravý úhel pomocí egyptské šňůry, druhá pomocí konstrukce pravidelného šestiúhelníku. Až budou mít obě skupiny svůj pravý úhel sestrojený, zhodnoťte společně přesnost konstrukcí.

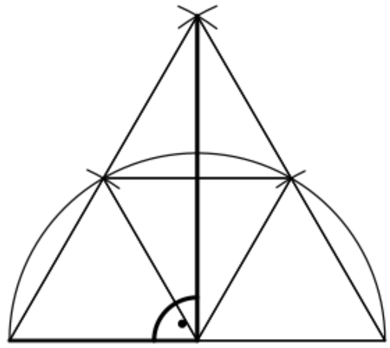
Konstrukce pomocí egyptské šňůry:

Vezměte si dostatečně dlouhý provaz a pomocí uzlů ho rozdělte na dvanáct stejně dlouhých dílů. Pozor, pokud budete chtít jeden díl udělat délky například 1 metr, musí být celková délka provazu větší než 12 metrů, protože uděláním uzlu se provaz trochu zkrátí (délka zkrácení je závislá na průměru lana).

Konce provazu svažte k sobě nebo určete člověka, který je bude držet spojené. Z provazu vytvořte trojúhelník, jehož strany budou mít délku 3, 4 a 5 dílů. Proti nejdelší straně vznikne pravý úhel. Ten zaznamenejte kolíky nebo křídou (záleží, kde budete úhly konstruovat). Odvěsny můžete protáhnout.

Konstrukce pomocí pravidelného šestiúhelníku:

Vezměte si provaz délky 1,5–2 metry a na jeho konce nepříliš pevně přivažte kulaté kolíky. Pomocí provazu s kolíky začněte rýsovat kružnice. Alespoň jeden člověk bude držet jeden kolík na místě kolmo k zemi, jiný se bude s druhým pohybovat kolem něj, a přitom rýsovat kružnici. Musí u toho dbát na to, aby byl provaz neustále natažený a nezačal se namotávat ani na jeden z kolíků. (Pokud není konstrukce prováděna v písku, je dobré alespoň důležité oblouky obtáhnout). Šestiúhelník není nutné rýsovat celý, zvolte jen takové části, které povedou ke konstrukci pravého úhlu (viz Obrázek 19, popřípadě Obrázek 12).Obrázek 19: Konstrukce pravého úhlu (terénní úloha)



Obrázek 19: Konstrukce pravého úhlu (terénní úloha)

2.5 Osobnosti

2.5.1 Thales z Miletu

Thales z Miletu byl řecký filosof, matematik a astronom, žijící v 6. století př. n. l. Starověcí Řekové ho přezdívali „otec vědy“ a zařadili ho mezi sedm mudrců, sedm nejmoudřejších Řeků té doby.

Narodil se v Miletu na území dnešního Turecka. Během svého života se dostal do Egypta, Fénicie, Asie i na Krétu. V Egyptě se seznámil s tehdejšími geometrickými poznatky a pravděpodobně si tam osvojil i babylonské znalosti astronomie. Na jejich základě byl údajně schopen předpovědět zatmění Slunce v roce 585 př. n. l.

Thaletův přínos matematice je nesporný. Jako první začal zkoumat geometrické obrazce, aniž by se jednalo o výměru pole nebo objem sýpky. Zároveň byl pravděpodobně první, kdo svá matematická tvrzení dokazoval. Tím položil základ matematiky, coby vědního oboru, nejen nástroje pro řešení konkrétních situací. Rozvinul své znalosti geometrie a je mu připisována řada planimetrických pouček:

Každý průměr dělí kružnici na dvě stejné části.

Úhly při základně rovnoramenného trojúhelníka jsou shodné.

Protilehlé úhly mezi dvěma protínajícími se přímkami jsou shodné.

Dva trojúhelníky jsou shodné, pokud mají shodné dva vnitřní úhly a jednu stranu.

Trojúhelník vepsaný do oblouku nad průměrem kružnice je pravoúhlý.

(Poslední z uvedených tvrzení dnes nese jeho jméno – Thaletova věta.)

Dalším jeho úspěchem bylo určení výšky egyptských pyramid. Dokázal to na základě podobnosti trojúhelníků a jako měřidlo použil člověka. Počkal, až bude délka jeho stínu stejná, jako jeho výška. Poté mohl změřit délku stínu pyramidy a snadno určit její výšku. Obdobný princip měl údajně použít při konstrukci dálkoměru nad milétským přístavem. (Polák, 2016 str. 67) (Seife, 2019 str. 49) (Konforovič, 1989 str. 35)

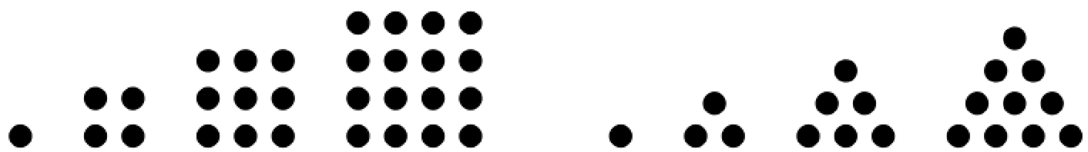
2.5.2 Pythagoras ze Samu, pythagorejci

Pythagoras ze Samu byl řecký filosof a matematik, žijící v 6. století př. n. l. Narodil se na ostrově Samos a během svého mládí hodně cestoval. Navštívil Fénicii, Egypt, Mezopotámii a možná i Indii. Na cestách poznával matematiku, kterou jednotlivé kultury ovládaly. Usadil se v Krotónu na jihu Itálie, kde založil filosofickou školu. Poté se přesunul do Metapontu, kde zemřel. (Polák, 2016 str. 68) (Livio, 2010 str. 23)

Pythagorejci, přívrženci jeho učení, se řídili jeho pravidly. Nesměli zapisovat a rozšiřovat své učení. Bylo tajné, jen pro členy společenství a předávalo se pouze ústně (s tím souvisí i skutečnost, že z Pythagorovy doby se nedochovaly žádné prameny a sám Pythagoras pravděpodobně nic nesepsal). Věřili, že duše živých tvorů se po smrti přestěhují do jiného těla a z toho důvodu byly vegetariány. Traduje se také, že nesměli jíst boby (druh luštěniny), a to buď z důvodu, že se podobaly genitáliím, nebo protože jejich konzumace v podstatě znamenala sníst živou duši (nadýmání a únik větrů byly pak její projevy). (Seife, 2019 str. 35) (Livio, 2010 stránky 23, 31)

Pythagorova osobnost byla natolik výrazná, že dnes není jasné, jaké objevy patří přímo jemu a které některým z jeho žáků. Oni sami považovali jeho slova zákon, je tedy možné, že některé objevy jsou mu připisovány mylně. Informace z následujících odstavců je tedy nutno číst s tímto vědomím, něco je pravděpodobně Pythagorova práce, něco možná ne přímo jeho. (Livio, 2010 str. 23)

Smyslem celé jejich filosofie bylo přesvědčení, že *všechno je číslo* (rozumějme přirozené). Čísla pro ně byla základem a podstatou celého světa a přikládali jim až mystický význam. Číslo 1 pro ně bylo původce všech čísel, lichá čísla byla mužská a dobrá, sudá považovali za ženská a špatná. Svou pozornost věnovali tzv. čtvercovým a trojúhelníkovým číslům. To jsou taková, která bylo možno vyjádřit pomocí příslušného počtu kamínků sestavených do čtverce nebo rovnostranného trojúhelníku. (Livio, 2010 str. 204)



Obrázek 20: Čtvercová a trojúhelníková čísla

Příkladem trojúhelníkového čísla je číslo 10, které mělo pro pythagorejce důležitý význam. Trojúhelník sestavený z deseti kamenů se nazýval tetraktys (lze přeložit jako „čtvernost“) a pythagorejcům symbolizoval dokonalost a chovali k němu posvátnou úctu. Dokonce byl součástí jejich přísahy. (Livio, 2010 stránky 25–26)

Symbolem pythagorejců se stal pentagram. Velmi dobře propojoval mužská a ženská čísla 3 a 2 a navíc se v něm objevuje zlatý řez, a to hned několikrát. Tento úžasný poměr lahodící lidskému oku pythagorejce fascinoval a dle jejich přesvědčení prostupoval strukturou celého vesmíru. (Seife, 2019 str. 41) (Livio, 2010 str. 204)

Pythagorejci byli první, kteří vnímali matematiku jako něco více než nástroj. Zabývali se čísly a jejich provázaností se světem. I přesto, že k matematice nikdy nezačali přistupovat jako k vědě, nedokázali od ní oddělit mystiku, položili jí velice pevný základ – důkaz. Díky němu se (na rozdíl od ostatních oborů) začala matematika stávat neotřesitelnou. (Livio, 2010 str. 32)

Důkaz zavedl již Thales z Miletu (viz předchozí kapitolu), ale byli to pythagorejci, kteří pochopili, o jak mocnou věc se jedná. Na základě logického uvažování tak byli schopni jednoznačně určit platnost matematických tvrzení. Byli první, kdo začal používat důkaz sporem. Jedná se o typ důkazu, ve kterém je snahou dokázat negaci původního výroku. Výsledkem je nepravdivý výrok – spor – pravdivý je tedy původní výrok. (Polák, 2016 str. 68) (Livio, 2010 str. 33)

Důležitým objevem, který pythagorejci učinili, je provázanost matematiky s hudbou. Podle legendy se Pythagoras zabýval chováním tónu, který vydává struna monochordu. Monochord je ozvučná skříň, na které je natažena jedna struna (jak napovídá název). Pod strunou se nachází jezdec, jehož polohu pod strunou lze měnit. Tím se změní výška tónu, který struna vydává. Zároveň je struna jezdcem rozdělena na dvě kratší části, na které je možné drknout najednou.

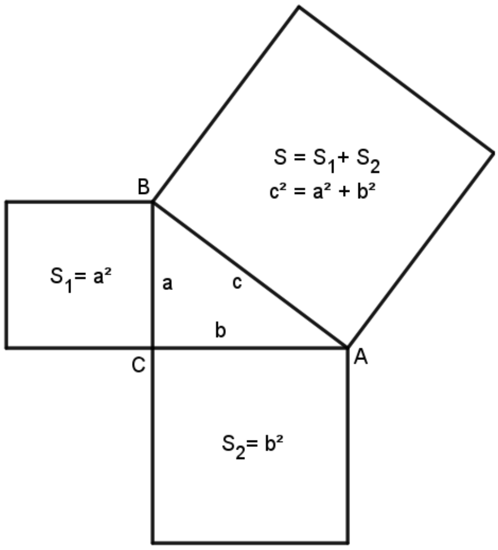
A právě jejich souzvuk Pythagora zaujal. Zjistil, že pokud je jezdec pod strunu umístěn náhodně, souzvuk částí rozdělené struny byl nelibý, někdy až nepříjemný. Ale pokud jezdec dělil strunu v poměru dvou malých přirozených čísel, byl výsledný souzvuk na poslech velmi příjemný. Například pokud byla délka struny jezdcem rozdělena v poměru 3:2, výsledným souzvukem byla kvinta, jeden z nejpůsobivějších hudebních intervalů. To podpořilo jeho myšlenky, že podstata všeho je číslo. (Seife, 2019 stránky 37, 39)

Ve svých myšlenkách došel Pythagoras ještě o něco dále. Byl toho názoru, že čísla jsou nejen podstatou hudby, ale i celého světa. To dalo vzniknout pythagorejskému modelu plantárního systému. Země se nachází uprostřed vesmíru a kolem ní se otáčí Slunce, Měsíc, planety i hvězdy po různě vzdálených kulových plochách. Při svém pohybu nebeská tělesa vydávají tóny, které se skládají v harmonii sfér. Zemi i plochám po kterých tělesa obíhají přisoudil tvar koule, pravděpodobně kvůli tomu, že kouli považoval za nadřazenější ostatním tvarům. (Seife, 2019 str. 39) (Livio, 2010 stránky 26, 31)

S Pythagorovým jménem je však nejčastěji spojována Pythagorova věta:

V každém pravoúhlém trojúhelníku je druhá mocnina délky přepony rovna součtu druhých mocnin délek obou odvěsen. Označíme-li délky odvěsen a, b, délku přepony c, tedy platí $c^2 = a^2 + b^2$.

I přesto, že věta nese Pythagorovo jméno, je zřejmé, že není jeho objevem. Její myšlenka byla známa už tisíc let před Pythagorem. Dochovaly se například babylonské klínopisné tabulky s pythagorejskými trojicemi, (trojicemi čísel, pro jejichž druhé mocniny platí vztah uvedený výše; pokud budou délkami stran trojúhelníku, bude trojúhelník pravoúhlý). Další dochované zmínky o používání principu Pythagorovy věty se dochovaly v Indii z geometrických konstrukcí oltářů. (Polák, 2014 str. 300) (Livio, 2010 str. 30)



Obrázek 21: Pythagorova věta

Důvodem, proč je dnes věta spojována s Pythagorovým jménem je pravděpodobně to, že se ji Pythagorovi (popřípadě jeho žákům) podařilo dokázat. Jakým způsobem však dnes není známo. S jistotou víme, že se důkaz této věty objevuje v Eukleidově spisu Základy ze 3. století př. n. l. (viz následující kapitolu).

Velkou trhlinu v pythagorejské filosofii přinesl objev iracionálních čísel. Hojně se zabývali studiem pravidelných obrazců a těles, až jeden z nich, Hippasos z Metapontu, objevil, že poměr délky strany čtverce a jeho úhlopříčky nelze vyjádřit přirozenými čísly. To bylo pro filosofii, která zakládá popis celého vesmíru na přirozených číslech a jejich poměrech naprosto nepřípustné. Hippasovi bylo zakázáno tuto skutečnost prozradit, on ale tento zákaz porušil.

O tom, jaké to mělo následky, nemáme dnes jasno. Dochovalo se několik verzí, které si mnohdy odporují. Podle některých byl vyloučen ze společenství a byla mu postavena hrobka, aby na něj bylo zapomenuto. Jiné verze tvrdí, že byl do této hrobky zavřený. Neméně pravděpodobná je verze, že byl svržen přes palubu lodi a utopil se. (Seife, 2019 stránky 45–47) (Livio, 2010 stránky 32–33)

Ať byl Hippasův osud jakýkoli, jeho objev byl velmi zásadní. Pythagorejci začali přicházet na to, že iracionálních čísel je daleko více. Přirozené číslo tedy nemohlo být podstatou všeho. Toto zjištění mělo za následek tzv. 1. krizi matematiky. Východiskem se stala razantní geometrizace, která umožnila nahradit geometrickými veličinami (délka, obsah, objem) ty aritmetické, jež vedly k iracionálním číslům. (Polák, 2016 str. 69) (Livio, 2010 str. 33)

Kolem Pythagorovy smrti se objevuje řada legend. Některé tvrdí, že byl zabit rozlíceným davem, který vtrhl do jeho domu, jiné, že se umořil hladem, nejčastěji však, že jeho smrt má svědomí jeho nenávist k bobům. Podle této verze se Pythagorovi podařilo z domu před rozezleným davem uniknout. Při svém útěku ale dorazil k poli bobů a kvůli své nenávisti k nim zastavil. Raději se prý nechá zabít, než aby běžel přes toto pole. Rozlícení obyvatelé Metapontu ho dostihli a zabili. (Seife, 2019 str. 48)

I přesto, že pythagorejci byli rozprášeni, jejich myšlenky se v určité podobě udržely ještě dlouhou řadu let. Navázal na ně například Aristoteles, z jehož myšlenek byla postavena i křesťanská filosofie. Svým pojetím harmonie sfér (planetárního modelu, kde vesmírná tělesa vydávají tóny) inspirovali umělce i vědce. (Livio, 2010 str. 31) (Seife, 2019 stránky 48, 57)

2.5.3 Eukleides z Alexandrie

Eukleides byl řecký matematik žijící ve 3. století př. n. l. O jeho životě se nám mnoho zpráv nedochovalo, pravděpodobně studoval v Athénách na Platonově Akademii a později působil v egyptské Alexandrii.

Jeho velkým přínosem matematice bylo sepsání díla Základy. Ve třinácti svazcích jsou shrnuty, roztřízeny a dokázány matematické (převážně geometrické) poznatky té doby. Inspiroval se Aristotelovým pojetím vědy, z definic, postulátů a axiomů vyvozuje matematické věty, které následně dokazuje.

Základy se na dva tisíce let staly učebnicí geometrie a svou strukturou inspirovaly následující výstavbu matematiky i dalších vědních oborů. Do druhé poloviny 19. století se jednalo druhé nejrozšířenější dílo světového písemnictví (prvním byla Bible).

Jeho jméno se nám dodnes zachovalo v souvislosti eukleidovskou geometrií. Tím rozumíme geometrii v rovině a má tu vlastnost, že v ní platí postuláty a axiomy ze Základů. Také se po něm jmenují dvě věty týkající se výšek a odvěsen v pravoúhlém trojúhelníku. Další připomínkou je eukleidovská konstrukce, čímž rozumíme sestrojení geometrických objektů pouze pomocí kružítka a pravítka bez měřítka. Kružítko by v ideálním případě mělo mít nekonečně velké rozevření a pravítko nekonečnou délku. (Polák, 2014 stránky 287–288) (Polák, 2016 stránky 69–70)

2.5.4 René Descartes

René Descartes byl francouzský filosof, matematik, fyzik a fyziolog žijící v 17. století. Je jedním ze zakladatelů moderní filosofie a vědy.

Narodil se na konci 16. století ve francouzském městě La Haye, které na Descartovu počest od 19. století nese jeho jméno. Jako mladý navštěvoval jezuitskou školu. Kvůli svému zdravotnímu stavu byl osvobozen od brzkého ranního vstávání. Tohoto přístupu, vstávat, až se na to bude cítit připraven, se držel většinu svého života. Na univerzitě v Poitiers vystudoval práva, praxi se však nikdy nevěnoval. Místo toho vstoupil do armády a je možné, že se v roce 1620 zúčastnil bitvy na Bílé hoře na straně katolických vojsk. Poté začal cestovat po západní Evropě a studovat matematiku. V roce 1649 odjel do Stockholmu, kam ho pozvala švédská královna Kristýna, aby ji učil filosofii. Jejich hodiny probíhaly v pět hodin ráno, což byl pro Descarta velmi nepříjemný čas, navíc ve Švédsku, zemi o tolik chladnější, než byla Francie. Zanedlouho dostal zápal plic a zemřel. Jeho ostatky byly později převezeny do Paříže a jeho lebku můžeme vidět v Přírodovědném muzeu naproti lebce člověka neandrtálského.

V roce 1916 se Descartovy zdály tři sny, které výrazným způsobem ovlivnily jeho budoucí život, daly mu podnět na základě rozumu sjednotit celé lidské poznání.

Jeho velký přínos v matematice spočívá v rozšiřování číselných oborů a zdokonalení algebraické symboliky. Descartes pracoval se zápornými a komplexními čísly a zavedl pojem imaginární jednotka. Při práci s rovnicemi často používal kanonický zápis rovnice, kde jsou všechny veličiny na jedné straně rovny nule na straně druhé. Zápis, který používal, se v podstatě v nezměněné podobě zachoval dodnes. Písmeny ze začátku abecedy označoval známé veličiny, písmeny z konce abecedy ty neznámé, mocniny zapisoval exponentem jako horní index písmene a pro operace používal symboly plus a minus. Jako symbol rovnosti nepoužíval rovnítko, ale znak podobný neuzavřené ležaté osmičce. Jinak se jeho zápis od současného nelišil.

Společně s Pierrem de Fermatem položil základ analytické geometrii, což bylo pro matematiku zásadním přínosem. Podařilo se mu prokázat souvislost mezi křivkami a algebraickými rovnicemi, čímž byla poprvé v historii propojena geometrie s algebrou. V jeho díle ještě nenalezneme dvě na sebe kolmé osy ani pojem souřadnice, tomuto konceptu se však svými myšlenkami a postupy velmi přiblížil. Jako první také začal pracovat s principem funkční závislosti na proměnných veličinách. Na jeho počest se začal souřadnicový systém s na sebe navzájem kolmými osami nazývat kartézský podle latinské varianty jeho jména Cartesius. (Polák, 2016 stránky 82–84) (Livio, 2010 stránky 80–86)

Jako zajímavost lze uvést, že i přes skutečnost, že Descartes byl věřící člověk a Boží existenci se několikrát snažil (i matematicky) dokázat, byl obviněn z podporování ateismu a katolická církev jeho díla zakázala. Descartes vnímal Boha, jako někoho tak svrchovaného a dokonalého, že stvořil matematiku, matematicky popsatelný svět a člověka, který principu matematiky může porozumět. Toto pojetí se zřejmě neshodovalo s tehdejším postojem katolické církve. (Livio, 2010 stránky 106–107)

2.5.5 Příklady ke kapitole

Př. 26 Obdobným způsobem, jakým Thales měřil výšku pyramid, se pokuste určit výšku blízkého vysokého objektu (budova školy, věž, popřípadě učitel, spolužák, …):

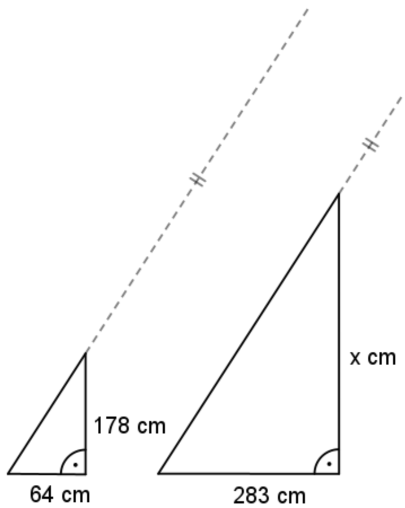
Zjistěte svou výšku. Poté za slunečného počasí změřte délku svého stínu a vzápětí i délku stínu měřeného objektu. Na základě podobnosti trojúhelníků dopočítejte výšku objektu. Svůj výsledek porovnejte se skutečnou výškou.

Řešení: Řekněme, že člověk je vysoký 178 cm má stín dlouhý 64 cm. Délku stínu stromu, jehož výšku zjišťuje, naměřil 283 cm.

Trojúhelníky, ze kterých můžeme výšku stromu určit, jsou kvůli rovnoběžnosti slunečních paprsků podobné podle věty uu. Poměr vodorovných odvěsen je tedy roven poměru svislých odvěsen.

$$\frac{283}{64} = \frac{x}{178}$$

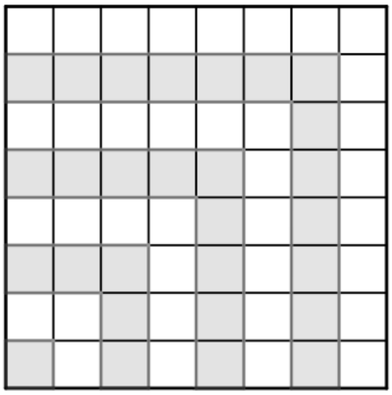
$$x = 178 \cdot \frac{283}{64} \doteq 787\ cm$$



Obrázek 22: Podobné trojúhelníky

Obdobným postupem určíte výšku vámi měřeného objektu způsobem, který byl použit již před více než dvěma a půl tisíci lety.

Př. 27 Pythagorejci v rámci svého studia čísel dospěli ke zjištění, že součet libovolného počtu za sebou následujících lichých čísel, počínaje od jedné, je úplný čtverec. Na základě obrázku se pokuste ukázat pravdivost tohoto tvrzení. (Konforovič, 1989 str. 38)



Obrázek 23: Čtvercová čísla

Řešení: Z obrázku je pravdivost tvrzení dobře patrná. Budeme-li chtít čtverec, který máme, zvětšit o jednu řadu čtverečků, musíme jich vždy přidat o dva více, než jich je v momentální „nejvyšší vrstvě“. Počet přidaných čtverečků je roven následujícímu lichému číslu, věta tedy platí.

Platnost tvrzení si také můžete ukázat s konkrétními čísly, například.:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 = 121 = 11^2$$

Důkaz lze provést matematickou indukcí.

2.6 Mimoevropská matematika

Pozn.: Přestože se některé informace vyskytují už v předešlých kapitolách, budou stručně zařazeny i zde, aby si čtenář mohl udělat ucelenou představu o matematice těchto civilizací.

2.6.1 Egyptská matematika

Velký egyptský přínos matematice spadá to období starověku. První dochované záznamy o egyptské matematice pochází z 2. tisíciletí př. n. l. Byly objeveny na Moskevském a Rhindově papyru. Oba obsahují úlohy pro přípravu stavitelů, zeměměřičů a úředníků pro jejich budoucí povolání.

Egypťané znali přirozená čísla a kladné zlomky a zapisovali je pomocí hieroglyfů.

Zabývali se geometrií a uměli určit plochy a objemy některých geometrických útvarů. Například přišli na vzorec, pomocí kterého je možné spočítat objem komolého čtyřbokého jehlanu $V = \frac{v}{3}(a^2 + ab + b^2)$.

Egyptská matematika byla zaměřena prakticky a poskytla velmi přínosné poznatky budoucím generacím. (Konforovič, 1989 stránky 13–15)

Př. 28 Jeden člověk vzal z pokladny jednu třináctinu. Druhý vzal jednu sedmnáctinu toho, co zbývalo. V pokladně ponechal 150. Kolik bylo v pokladně na počátku? (Konforovič, 1989 str. 16)

Řešení: Původní částku v pokladně označíme x, sestavíme rovnici:

$$x - \frac{1}{13}x - \frac{1}{17}\left(x - \frac{1}{13}x\right) = 150 \qquad /\cdot 13 \cdot 17$$

$$221x - 17x - 13 \cdot \frac{12}{13}x = 150 \cdot 221$$

$$192x = 33150$$

$$\boldsymbol{x = \frac{5525}{32} = 172\frac{21}{32}}$$

Na počátku v pokladně bylo $172\frac{21}{32}$. (Ale protože Egypťané používali jen zlomky s jedničkou v čitateli, zapsali by výsledek $172 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{48} + \frac{1}{96}$.)

Př. 29 Sedm lidí má každý po sedmi kočkách, každá kočka sežere sedm myší, každá myš sežere sedm klasů, z každého klasu může vyrůst sedm měřic ječmene. Jak velké jsou jednotlivé počty a jejich celkový součet? (Konforovič, 1989 str. 17)

Řešení: Počet lidí .... $\boldsymbol{l} = \mathbf{7}$

Počet koček .... $\boldsymbol{k_o} = 7 \cdot 7 = \mathbf{49}$

Počet myší .... $\boldsymbol{m} = 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^3 = \mathbf{343}$

Počet klasů........................... $\boldsymbol{k_l} = 7^4 = \mathbf{2401}$

Počet měřic ječmene............ $\boldsymbol{j} = 7^5 = \mathbf{16807}$

Celkový součet .... $\boldsymbol{s} = 7 + 49 + 343 + 2401 + 16807 = \mathbf{19607}$

2.6.2 Mezopotámská matematika

O rozvoj matematiky v Mezopotámii se zasloužili hlavně Sumerové a Babyloňané. Z 2. tisíciletí př. n. l. se dochovaly hliněné tabulky s matematickými úlohami a tabulky pro počítání (součinů, mocnin, …). Úlohy byly určeny jako cvičení pro písaře a úředníky.

Stejně jako text byly i číslice zapisovány klínovým písmem a používána byla šedesátková soustava.

Úlohy i operace byly zapisovány slovně a často vedly na řešení kvadratické nebo kubické rovnice nebo soustavy rovnic. Většinou se jednalo o výpočet plochy nebo objemu daného objektu. Délka kružnice byla v Mezopotámii odhadnuta na trojnásobek jejího průměru, tedy $\pi \doteq 3$. Také už byla známa Pythagorova věta, a to ještě před Pythagorem. Velkou pozornost Babyloňané věnovali také astronomii.

Mezopotámská matematika byla zaměřena prakticky a její poznatky později využily další civilizace, které se zabývaly matematikou. (Konforovič, 1989 stránky 24–27)

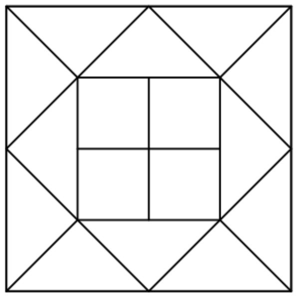
Př. 30 Součet obsahů dvou čtverců se rovná $25\frac{5}{12}\, j^2$. Strana jednoho čtverce je o pět délkových jednotek větší než dvě třetiny strany druhého čtverce. (Konforovič, 1989 str. 30) Sestavte rovnice, z nichž bude možné určit délky stran obou čtverců.

Řešení: Délku strany prvního čtverce označíme a, délku strany druhého b a sestavíme soustavu rovnic:

$$a^2 + b^2 = \frac{305}{12}$$

$$a = 5 + \frac{2}{3}b$$

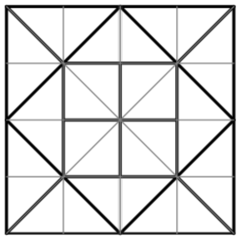
Př. 31 Jednotkový čtverec se má rozdělit na 12 shodných trojúhelníků a 4 shodné čtverce dle obrázku. Je potřeba vypočítat obsah trojúhelníku a čtverce. (Konforovič, 1989 str. 30)



Obrázek 24: Rozdělení čtverce

Řešení: Jak je zřejmé z obrázku, trojúhelník i čtverec je složený ze dvou shodných trojúhelníků, mají tedy stejný obsah.

A protože čtverec o obsahu 1 j^2 je rozdělen na 16 stejně velkých částí, je obsah čtverce i trojúhelníku $\mathbf{\frac{1}{16}\,j^2}$.



Obrázek 25: Rozdělení čtverce – řešení

2.6.3 Čínská matematika

Čínská matematika se rozvíjela hlavně v období starověku. První písemné zmínky se dochovaly až z konce 1. tisíciletí př. n. l., Číňané se však matematice věnovali již dlouho před začátkem našeho letopočtu.

Čísla byla znázorňována pomocí hůlek a používala se desítková poziční soustava. Známa byla přirozená čísla a zlomky. Když později přibyla i záporná čísla, začala se značit černými hůlkami a kladná červenými.

Nejvýznamnější památkou čínské starověké matematiky je dílo Matematika v devíti kapitolách. Na jejím sepsání se podílel čínský hodnostář Čang Cchang. Obsahuje úlohy se zlomky, soustavami rovnic, výpočty obsahů a objemů geometrických objektů nebo úlohy řešitelné pomocí Pythagorovy věty (z dochovaných zdrojů víme, že v Číně byla formulována v 6. století př. n. l. a ve 3. století n. l. byla i dokázána).

Dílo bylo určeno úředníkům, obchodníkům a zeměměřičům. Úředníkům mělo pomoci složit zkoušku z matematiky, kterou museli podstoupit, pokud chtěli získat pozici ve státní správě. Významný čínský matematik Liou Chuej (3. století n. l.) vydal knihu, ve které úlohy z tohoto díla řeší. Zároveň vydává dodatek Matematická klasika mořského ostrova. Dalšími příručkami pro úředníky byly Čang Čchiou-ťienova klasika nebo Matematická klasika Mistra Suna.

Na začátku našeho letopočtu se čínští astronomové snažili co nejpřesněji určit poměr délky kružnice a jejího průměru. Došli k přibližným hodnotám $\sqrt{10} \doteq 3{,}162\,278$, $\frac{142}{45} \doteq 3{,}155\,556$ nebo $\frac{355}{113} \doteq 3{,}141\,592\,9$. Pro srovnání, s přesností na 7 desetinných míst je $\pi = 3{,}141\,592\,7$.

Kolem 7. století přišli Číňané na algoritmus pro přibližné určení kořenů kubické rovnice, později byl princip rozšířen i pro rovnice vyšších stupňů.

Čínská matematika byla praktického rázu a přinesla mnoho algoritmů a metod řešení. (Konforovič, 1989 stránky 90–92) (Polák, 2016 str. 24)

Př. 32 Dva lidé A, B obdrželi určitý počet mincí, který se měl mezi ně rozdělit tak, že když k mincím A se přidá polovina mincí člověka B nebo když k mincím B se přidají dvě třetiny mincí A, v obou případech se dostane 48. Kolik mincí obdržel každý z lidí A, B? (Polák, 2014 str. 153)

Řešení: Počet mincí patřící člověku A označíme a, počet mincí člověka B označíme b a sestavíme soustavu rovnic:

$$a + \frac{b}{2} = 48$$

$$b + \frac{2}{3}a = 48$$

$$a = 48 - \frac{b}{2}$$

$$b + \frac{2}{3}\left(48 - \frac{b}{2}\right) = 48$$

$$b + 32 - \frac{b}{3} = 48$$

$$\frac{2}{3}b = 16$$

$$2b = 48$$

$$\boldsymbol{b = 24}$$

$$a = 48 - \frac{24}{2}$$

$$\boldsymbol{a = 36}$$

Člověk A obdržel 36 mincí, člověk B 24 mincí.

Př. 33 Host ujede za den 300 li (1 li = 0,576 km). Host vyjel od hostitele, ale zapomněl jeden oděv. Když po třetině dne hostitel objevil zapomenutý oděv, vydal se na cestu, aby hosta dohonil. Když předal oděv hostovi, ihned obrátil koně na zpáteční cestu, za tři čtvrtiny dne (od odjezdu hosta) byl opět doma. Kolik li by ujel na koni za den? (Konforovič, 1989 str. 93)

Řešení: Během $\frac{1}{3}$ dne host ujede 100 li. Potom za ním vyjíždí hostitel a aby hosta dohnal, musí ujet tuto vzdálenost ještě zvětšenou o tu, kterou host urazí během jeho pohybu. Tutéž cestu absolvuje i zpět domů, kam dorazí za $\frac{3}{4}$ dne od hostova odjezdu.

Celá cesta hostiteli trvá $\frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$ dne, tedy cesta tam mu trvala $\frac{5}{24}$ dne. Za tento čas host ujel $300 \cdot \frac{5}{24} = 62{,}5$ li. Hostitel urazil celkem vzdálenost $(100 + 62{,}5) \cdot 2 = 325$ li. Protože mu cesta trvala $\frac{5}{12}$ dne, jeho rychlost byla $\frac{325}{\frac{5}{12}} = 65 \cdot 12 = 780$ li/den. Za jeden den by tedy ujel $\boldsymbol{780\ li}$.

2.6.4 Indická matematika

Velký zájem o matematiku v Indii nastal v období starověku a středověku. První doložené matematické záznamy Indie pochází z 2. tisíciletí př. n. l. a jsou součástí tzv. védské literatury. Ve verších v nich jsou popsána pravidla pro výměru a stavbu oltářů, chrámů a podobných staveb.

Indové používali desítkovou soustavu. Ve 3. století př. n. l. byly vytvořeny znaky pro číslice 1–9, nula vznikla nejpozději v 7. století n. l. To umožnilo vytvořit desítkovou poziční soustavu, kterou dnes používáme i my. Tento systém umožňoval počítání poměrně rychlým a snadným způsobem, takže již v této době vznikají pravidla pro umocňování a odmocňování. Kvůli zájmu indických matematiků o velká čísla, vznikly názvy pro mocniny 10 s exponentem větším než 50. Příkladem je Rajju, což je vzdálenost, kterou překoná bůh za šest měsíců, když urazí 1 000 000 km za jedno mrknutí oka. Dalším je Polya, což je doba, za kterou vyrobíme kostku z ovčí vlny o velikosti hrany 10 metrů, když budeme přidávat jedno vlákno každých sto let. (Břehovský, Knobloch, 2014)

Výpočty byly prováděny na desce pokryté pískem, a říkalo se jim „práce s prachem".

V období 5.–12. století dochází v Indii k rozvoji matematiky a astronomie. Mezi významné matematiky té doby patřil Árjabhatta I., jehož dílo ovlivnilo následný rozvoj exaktních věd, Bháskara I., který psal o diofantických rovnicích, Mahávíra, jehož dílo bylo první ryze matematické a daleko rozsáhlejší (a veršované) nebo Bháskara II., který graficky dokázal Pythagorovu větu.

Dalším významným matematikem byl Brahmagupta, který formuloval pravidla pro počítání s racionálními čísly (tedy i zápornými a nulou).

Indická matematika velmi ovlivnila rozvoj matematiky jako vědy. Používání desítkové poziční soustavy i způsob, jakým se v ní počítá, převzala Arabská říše a později i Evropa. (Konforovič, 1989 stránky 78–80)

Př. 34 Granátová jablka, manga a (obyčejná) jablka se prodávají po řadě: 3 kusy za 2 peníze, 5 kusů za 3 peníze a 7 kusů za 5 penízů. Jak lze za 76 penízů koupit takový počet plodů, že je v něm třikrát více plodů manga než jablek a šestkrát více granátových jablek než (obyčejných) jablek. (Konforovič, 1989 str. 84)

Řešení: Počet granátových jablek označíme g, počet mang m, počet (obyčejných) jablek j a sestavíme soustavu rovnic:

G .... 3 ks/2 p .... za 1 ks .... $\frac{2}{3}$ p .... za g ks....... $\frac{2}{3}g$ p

M .... 5 ks/3 p .... za 1 ks .... $\frac{3}{5}$ p .... za m ks...... $\frac{3}{5}m$ p

J .... 7 ks/5 p .... za 1 ks .... $\frac{5}{7}$ p .... za j ks........ $\frac{5}{7}j$ p

---

$$\frac{2}{3}g + \frac{3}{5}m + \frac{5}{7}j = 76$$

$$m = 3j$$

$$g = 6j$$

$$\frac{2}{3} \cdot 6j + \frac{3}{5} \cdot 3j + \frac{5}{7j} = 76$$

$$4j + \frac{9}{5}j + \frac{5}{7}j = 76 \qquad /\cdot 35$$

$$140j + 63j + 25j = 76 \cdot 35$$

$$228j = 2660$$

$$\boldsymbol{j = \frac{35}{3} = 11\frac{2}{3}}$$

$$\boldsymbol{m} = 3 \cdot \frac{35}{3} = \mathbf{35}$$

$$\boldsymbol{g} = 6 \cdot \frac{35}{3} = \mathbf{70}$$

Granátových jablek bude 70, mang 35 a (obyčejných) jablek $11\frac{2}{3}$.

(Přestože bychom u takovéto úlohy očekávali celočíselné řešení, indické úlohy tohoto typu často vedly k racionálnímu řešení.)

Př. 35 Jestliže nějaké číslo vynásobíme pěti, od součinu odečteme jeho třetinu, výsledek vydělíme deseti a k podílu přičteme postupně třetinu, polovinu a čtvrtinu původního čísla, dostaneme 68. Které číslo to bylo? (Konforovič, 1989 str. 85)

Řešení: Hledané číslo označíme c a sestavíme rovnici:

$$\left(5c - \frac{1}{3} \cdot 5c\right) : 10 + \frac{1}{3}c + \frac{1}{2}c + \frac{1}{4}c = 68$$

$$\frac{\frac{10}{3}c}{10} + \frac{4+6+3}{12}c = 68 \qquad /\cdot 120$$

$$40c + 130c = 68 \cdot 120$$

$$170c = 8160$$

$$\boldsymbol{c = 48}$$

2.6.5 Islámská (arabská) matematika

Největší přínos matematice v době středověku přinesli arabští a arabsky píšící matematici. Do arabštiny byla v té době přeložena indická i starořecká díla, ze kterých islámští učenci vycházeli. V 8.–9. století v Bagdádu vzniklo vědecké středisko s knihovnou zvané Dům moudrosti.

Velký přínos přinesl tádžicko-perský učenec al-Chvárizmí (9. století n. l.). Jeho dílo Aritmetický traktát pojednává o počítání s indickými číslicemi, Algebraický traktát o řešení rovnic. Podle části arabského názvu tohoto díla al-džebr se dnes matematické odvětví zabývající se rovnicemi nazývá algebra. Když byla al-Chvárizmího díla překládána do latiny, jeho jméno bylo přeloženo jako Algorismi, odkud vznikl výraz algoritmus pro matematické výpočetní pravidlo.

Dalšími významnými matematiky té doby byli al-Hadždžadž a Thábit ibn Qurra, kteří do arabštiny přeložili Eukleidovy základy.

Islámská matematika měla velký přínos pro celý budoucí rozvoj matematiky. Díky ní se do Evropy dostala desítková poziční soustava a číslice, které dnes nazýváme arabské, systematizoval se způsob řešení rovnic a také se nám díky arabským překladům dochovala některá jinak ztracená starořecká díla. (Polák, 2016 stránky 12, 25)

Př. 36 V sadu utrhl první ze skupiny lidí jedno granátové jablko, druhý dvě a každý následující o jedno jablko více. Potom všichni, kdo trhali jablka, si je mezi sebou rozdělili rovným dílem a každý dostal šest granátových jablek. Kolik lidí trhalo jablka? (Konforovič, 1989 str. 104)

Řešení: Jestliže po rozdělení vychází 6 utržených jablek na člověka, znamená to, že 6 je aritmetickým průměrem jablek utržených jedním člověkem. Lze zapsat jako $\frac{počet\ všech\ utržených\ jablek}{počet\ trhajících} = 6.$

Počet trhajících chceme spočítat, označíme t.

Celkový počet utržených jablek lze zapsat ve tvaru $1 + 2 + 3 + \cdots + t$ (protože 1. člověk utrhl jedno jablko, 2. utrhl dvě, …, t. jich utrhl t). Tento součet můžeme určit jako součet prvního a posledního členu násobený polovinou počtu sčítanců (například $1 + 2 + 3 + 4 = (1 + 4) \cdot \frac{4}{2} = 10$). Pro náš případ zapíšeme $(1 + t) \cdot \frac{t}{2}$. Po dosazení získáme rovnici:

$$\frac{(1+t)\cdot\frac{t}{2}}{t} = 6 \qquad /\cdot t$$

$$(1+t)\cdot\frac{t}{2} = 6t \qquad /\cdot 2$$

$$(1+t)\cdot t = 12t \qquad /: t \ldots (t \neq 0)$$

$$1 + t = 12$$

$$\boldsymbol{t = 11}$$

Jablka trhalo 11 lidí.

Př. 37 Oštěp stojí svisle ve vodě a nad její hladinou vyčnívá o tři lokty. Vítr ho vychýlil tak, že jeho vrchol je na hladině, ale spodní hrot nezměnil svou polohu. Určete délku oštěpu, jestliže vzdálenost nové polohy vrcholu od původního místa vnoření oštěpu do vody se rovná 5 loktům. (Konforovič, 1989 str. 106)

Řešení: Délku oštěpu označíme x a sestavíme rovnici:

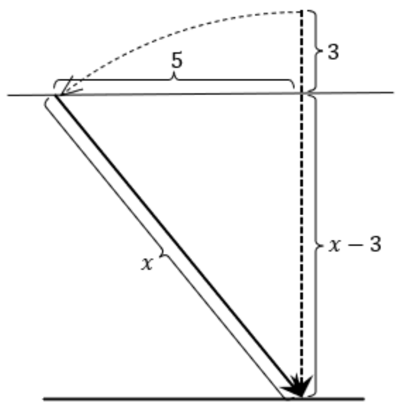
$$x^2 = 5^2 + (x-3)^2$$

$$x^2 = 25 + x^2 - 6x + 9$$

$$6x = 34$$

$$\boldsymbol{x = \frac{17}{3}\ lokte}$$

Délka oštěpu je $\frac{17}{3}$ lokte.



Obrázek 26: Oštěp ve vodě

3 Závěr

Historie matematiky sahá daleko do minulosti a je opravdu bohatá. Během ní se z matematiky coby nástroje stává věda, jaká před námi stojí dnes. Různé civilizace k ní měly rozdílné přístupy a různá využití.

Tento vývoj byl z pohledu konkrétních témat popsán v praktické části. Vybrána byla témata, která budou přínosná žákovi základní školy. Úlohy byly voleny podle stejných kritérií, ale některé ze zařazených úloh úroveň základní školy mírně překračují. Úlohy by žáci ale neměli nutně řešit samostatně, proto jim může učitel například část řešení prozradit nebo je správně navést.

Uvedená historická okénka lze použít jako motivaci ve výuce. Zároveň by měla žákům poskytnout základní přehled o tom, jak byla matematika chápána, nebo odkud a z jaké doby pochází objevy a pravidla, se kterými se při výuce matematiky setkávají. Dále jim mohou nastínit životy vybraných významných matematiků, s jejichž jmény se v rámci hodin matematiky mohou setkat.

Protože historie matematiky je opravdu rozsáhlá a témat, kterým je možné se věnovat je mnoho, zmiňuje tato práce jen jejich malý zlomek. Snažila jsem se vybírat témata, která budou pro žáky 2. stupně ZŠ zajímavá a která naváží na jim již známé učivo.

4 Citovaná literatura:

BECKMANN, Petr. *Historie čísla pí*. Praha: Academia, 1998. ISBN 80-200-0655-9.

BŘEHOVSKÝ, Jiří a KNOBLOCH, Roman: *Where did the numbers come from? In Proceedings of International Conference Presentation of Mathematics* ´14 Pages 109-115. Liberec 2014. ISBN 978-80-7494-108-5.

GHYKA, Matila C. *Zlaté číslo, aneb, Jak pythagorovské rytmy a obřady ovlivnily vývoj západní civilizace*. *Zip (Argo: Dokořán)*. Praha: Argo, 2008. ISBN 978-80-7203-926-5.

HEJNÝ, Milan a KUŘINA, František. *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování*. 2., aktualiz. vyd. *Pedagogická praxe (Portál)*. Praha: Portál, 2009. ISBN 978-80-7367-397-0.

HEJNÝ, Milan. *Teória vyučovania matematiky 2*. 2. vyd. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 1990. ISBN 80-08-01344-3

KADEŘÁVEK, František. *Geometrie a umění v dobách minulých*. Praha: Půdorys, 1997. ISBN 80-900791-5-6.

KONFOROVIČ, Andrej Grigorjevič. *Významné matematické úlohy*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1989. ISBN 80-04-21848-2.

LIVIO, Mario. *Je Bůh matematik? Zip (Argo: Dokořán)*. Praha: Argo, 2010. ISBN 978-80-7363-282-3.

PICKOVER, Clifford A. *Matematická kniha: od Pythagora po 57. dimenzi: 250 milníků v dějinách matematiky*. *Zip (Argo: Dokořán)*. Praha: Argo, 2012. ISBN 978-80-7363-368-4.

POLÁK, Josef. *Didaktika matematiky: jak učit matematiku zajímavě a užitečně*. Plzeň: Fraus, 2014. ISBN 978-80-7238-449-5.

POLÁK, Josef. *Didaktika matematiky II. část: Jak učit matematiku zajímavě a užitečně. Obecná didaktika matematiky*. Plzeň: Fraus, 2016. ISBN 978-80-7489-326-1.

POLÁK, Josef. *Didaktika matematiky III. část: Jak učit matematiku zajímavě a užitečně. Historie matematiky pro učitele*. Plzeň: Fraus, 2016. ISBN 978-80-7489-327-8.

Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání [online]. Praha: MŠMT, 2023. Dostupné z: https://www.edu.cz/wp-content/uploads/2023/07/RVP_ZV_2023_cista_verze.pdf

SEIFE, Charles. *Nula: životopis jedné nebezpečné myšlenky*. Druhé vydání v českém jazyce. *Aliter (Argo: Dokořán)*. Praha: Dokořán, 2019. ISBN 978-80-7363-969-3.