

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra matematiky

Diplomová práce

Bc. Malečková Michaela

Mnohoúhelníky v učivu matematiky na základní škole

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně pod vedením Mgr. Jitky Hodaňové, Ph.D. a použila jsem pouze prameny uvedené v seznamu literatury.

V Olomouci dne 20.6.2022

Bc. Michaela Malečková

Poděkování

Ráda bych vyjádřila poděkování vedoucí práce Mgr. Jitce Hodaňové, Ph.D. za odborné vedení, rady a trpělivost při tvorbě mé diplomové práce.

Obsah

1	Úvod	1
2	Teoretická část	3
2.1	Mnohoúhelník	3
2.1.1	Konvexní mnohoúhelník	6
2.1.2	Pravidelný mnohoúhelník	8
2.1.3	Pravidelný pětiúhelník	12
2.1.4	Pravidelný šestiúhelník	16
2.1.5	Pravidelný sedmiúhelník	18
2.1.6	Pravidelný osmiúhelník	19
2.1.7	Pravidelný desetiúhelník	21
2.1.8	Pravidelný dvanáctiúhelník	23
2.2	Trojúhelník	25
2.3	Čtyřúhelník	37
2.3.1	Rovnoběžníky	40
2.3.2	Lichoběžníky	46
2.3.3	Různoběžníky	48
3	Souhrnná cvičení z rovinné geometrie	49
3.1	Souhrnná cvičení – trojúhelník	49
3.2	Souhrnná cvičení – čtyřúhelník	74
3.3	Souhrnná cvičení – pravidelné mnohoúhelníky	101
4	Závěr	124
5	Seznam použité literatury	125
6	Seznam obrázků	129
7	Seznam tabulek	136
8	Seznam zkratk	137

1 Úvod

Diplomová práce se zabývá tématem mnohoúhelníků, a to jak trojúhelníků, čtyřúhelníků, tak i pravidelných pětiúhelníků, šestiúhelníků, sedmiúhelníků, osmiúhelníků, desetiúhelníků a dvanáctiúhelníků. Mnohoúhelníky jsou součástí planimetrie, která je obsažena v učivu geometrie v matematice v RVP na základních školách. V diplomové práci budou popsány a rozpracovány pravidelné a konvexní mnohoúhelníky, které jsou vhodným učivem i doplňkem do učiva planimetrie základních škol. Mnohoúhelníky také slouží k nácviku rýsovacích dovedností žáků a k rozvoji jejich znalostí v planimetrii.

V první kapitole jsou definovány základní pojmy, jako jsou lomená čára, uzavřená lomená čára či jednoduchá uzavřená lomená čára. Tyto pojmy jsou potřebné pro definování mnohoúhelníků, jinak řečeno n -úhelníků. Dále jsou v této kapitole popsány části n -úhelníků, jejich úhlopříčky, vnitřní body, vnitřní úhly a jiné tak, aby čtenář, případně žák věděl, kde se jednotlivé části n -úhelníků nachází a dokázal n -úhelníky zkonstruovat. Také je v této kapitole vysvětlen rozdíl mezi tečnovým, tětiovým a dvojtředovým n -úhelníkem.

V podkapitolách první kapitoly je charakterizován konvexní a pravidelný mnohoúhelník. S konvexním mnohoúhelníkem souvisí pojmy konvexní množina a konvexní útvar, které jsou v této kapitole také vysvětleny. Součástí kapitoly jsou i dva důležité vzorce, které prolínají hlavně podkapitoly pravidelných mnohoúhelníků. Jedná se o vzorec pro výpočet součtu velikostí všech vnitřních úhlů mnohoúhelníku a vzorec pro zjištění počtu úhlopříček mnohoúhelníku. U pravidelných n -úhelníků jsou vysvětleny rozdíly ve vlastnostech, jeli n sudé či liché, rozdělení na n rovnoramenných trojúhelníků a jsou zde uvedeny obecné vzorce pro výpočet obsahu a obvodu pravidelného n -úhelníku.

Další podkapitoly první kapitoly se zaměřují na pravidelné mnohoúhelníky, a to konkrétně na pravidelné pětiúhelníky, šestiúhelníky, sedmiúhelníky, osmiúhelníky, desetiúhelníky a pravidelné dvanáctiúhelníky. Vymezují jejich základní vlastnosti a konstrukci jejich stran.

Druhá kapitola diplomové práce je zaměřena na trojúhelníky, jejich vlastnosti, výpočet obvodu a obsahu, rozdělení trojúhelníků dle velikosti úhlů a velikosti stran. Dále je zde vysvětlena trojúhelníková nerovnost.

Třetí a poslední teoretická kapitola slouží ke zpřehlednění a zorientování se v učivu čtyřúhelníků. Kromě základních vlastností čtyřúhelníků jsou zde čtyřúhelníky děleny dle stran na rovnostranné a různostranné, dle vnitřních úhlů na pravoúhlé a kosoúhlé. Jednotlivé čtyřúhelníky jsou v práci podrobněji popsány.

Praktickou část mé diplomové práce tvoří příklady z rovinné geometrie, které jsou seskládány pro přehlednost do témat trojúhelníků, čtyřúhelníků a dalších pravidelných mnohoúhelníků. Obsahují jak zadání, tak i řešení početních a konstrukčních úloh. Konstrukce a rozbory konstrukčních úloh jsou vytvářeny v programu GeoGebra, neboť při konstrukci mnohoúhelníků lze tento program efektivně využít.

Cílem mé diplomové práce je charakterizovat a vysvětlit vlastnosti pravidelných a konvexních mnohoúhelníků a možnosti konstrukce vybraných mnohoúhelníků. Mým dalším cílem je vypracovat konstrukční a početní příklady z rovinné geometrie týkající se tématu mnohoúhelníků, které by bylo možné využít v hodinách matematiky. Byly by tak inspirací pro učitele při hledání vhodných úloh do hodin matematiky nebo by byly přínosem pro žáky, kteří si potřebují toto téma procvičit nebo mu lépe porozumět. Žáci by se z těchto příkladů mohli učit, neboť budou zpracovány i s řešením.

2 Teoretická část

Teoretická část diplomové práce obsahuje teoretické poznatky týkající se tématu trojúhelníků, čtyřúhelníků a dalších mnohoúhelníků, včetně údajů důležitých pro jejich konstrukci. Planimetrie je součástí učiva geometrie v matematice v RVP ZV. V učivu o mnohoúhelnících by měl každý žák základní školy znát pojem pravidelný a nepravidelný mnohoúhelník či n -úhelník (Štěpánová, 2018).

2.1 Mnohoúhelník

V této kapitole budou definovány základní pojmy, které se věnují mnohoúhelníkům, tak, aby je bylo možné v práci konzistentně využívat.

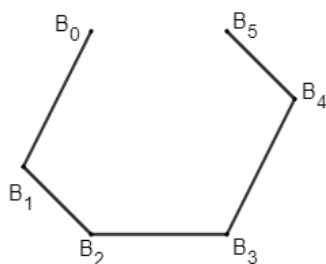
Abychom mohli definovat pojem mnohoúhelník, musíme si nejprve nadefinovat tzv. pomocné definice. Mezi první pomocnou definicí bude patřit definice lomené čáry: „*Mějme body $B_0, B_1, B_2, \dots, B_n$ ($n \geq 2$) v rovině takové, že žádné tři po sobě jdoucí body neleží na jedné přímce. Tyto body určují n úseček $B_0B_1, B_1B_2, \dots, B_{n-1}B_n$. Sjednocení těchto úseček nazýváme lomená čára $B_0, B_1, B_2 \dots B_n$* “ (Vondra et al., 2019).

Existují i další definice lomené čáry dle jiných autorů. Pomykalová (1993) definuje lomenou čáru takto: „*Lomená čára $B_0B_1B_2B_3 \dots B_{n-1}B_n$ ($n > 2$) se skládá z úseček $B_0B_1, B_1B_2, \dots, B_{n-1}B_n$, z nichž každé dvě sousední mají společný právě jeden krajní bod a neleží v téže přímce. Body $B_0, B_1, B_2, \dots, B_n$ se nazývají vrcholy lomené čáry, úsečky $B_0B_1, B_1B_2, \dots, B_{n-1}B_n$ strany lomené čáry.*“

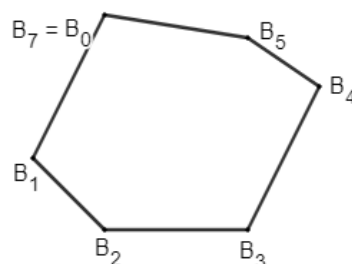
Podle Perného (2015) je definice lomené čáry formulována takto: „*Nechť v rovině jsou body $B_0, B_1, B_2, \dots, B_n$ a nechť sousední úsečky B_iB_{i+1}, B_iB_{i+2} mají společný pouze jeden krajní bod B_{i+1} , pak sjednocení úseček $B_0B_1, B_1B_2, \dots, B_{n-1}B_n$ nazveme lomená čára $B_0B_1B_2 \dots B_n$* “ (Obr. 2.1.1).

Mezi druhou pomocnou definicí bude patřit definice uzavřené lomené čáry (Obr. 2.1.2): „*Jestliže $B_0 = B_n$, pak sjednocení těchto úseček nazveme uzavřená lomená čára $B_0B_1 \dots B_n$* “ (Perný, 2015). Uzavřené lomené čáry jsou takové lomené čáry, jejichž nesousední strany nemají žádný společný bod (Pomykalová, 1993).

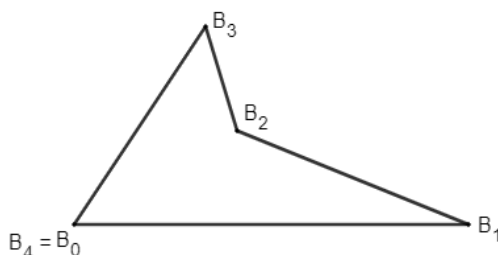
Třetí pomocnou definicí bude definice jednoduché uzavřené lomené čáry (Obr. 2.1.3). Lomená čára, která sama sebe neprotíná, se nazývá jednoduchá lomená čára. „*Jestliže žádné dvě nesousední úsečky nemají společný bod, pak sjednocení těchto úseček nazveme jednoduchá uzavřená lomená čára $B_0B_1 \dots B_n$* “ (Perný, 2015). „*Jednoduchá uzavřená lomená čára rozdělí body roviny na dvě podmnožiny – vnitřní a vnější oblast*“ (Perný, 2015).



Obr. 2.1.1: Lomená čára
(zdroj: vlastní zpracování)



Obr. 2.1.2: Uzavřená lomená čára
(zdroj: vlastní zpracování)

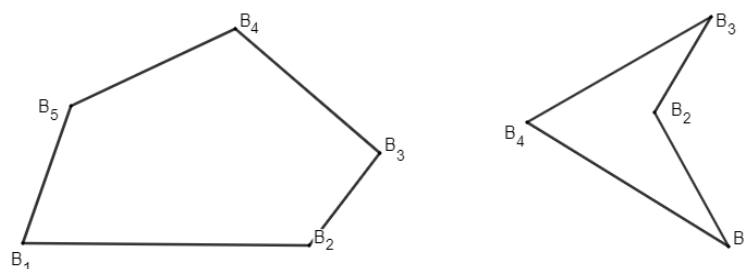


Obr. 2.1.3: Jednoduchá uzavřená lomená čára
(zdroj: vlastní zpracování)

Pomocí těchto pomocných definic můžeme nadefinovat mnohoúhelník. „*Sjednocení jednoduché uzavřené lomené čáry $B_0B_1B_2 \dots B_n$ ($B_0 = B_n$, $n \geq 3$) s její vnitřní oblastí se nazývá mnohoúhelník $B_1B_2 \dots B_n$ “ (Perný, 2015), případně n -úhelník, kde n značí počet vrcholů (Perný, 2015) (Obr. 2.1.4). V n -úhelníku platí, že počet stran n -úhelníku je roven počtu vrcholů (Pomykalová, 1993).*

Mnohoúhelník je geometrický rovinný útvar tvořený uzavřenou lomenou čarou a částí roviny, kterou tato lomená čára ohraničuje (Kubešová & Cibulková, 2007). Hranicí mnohoúhelníku je uzavřená lomená čára s n vrcholy, kde n je přirozené číslo větší než 2, pro $n = 3$ trojúhelník, pro $n = 4$ čtyřúhelník, pro $n = 5$ pětiúhelník (Fiala, 2016). Podle autorek Kubešové a Cibulkové (2007) obvodem případně hranicí mnohoúhelníku nazýváme „*délku lomené čáry $B_1B_2 \dots B_{n-1}B_nB_1$, která ohraničuje mnohoúhelník.*“

V mnohoúhelníku vrcholy lomené čáry $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ nazýváme vrcholy mnohoúhelníku. Každý vrchol mnohoúhelníku má dva sousední vrcholy. Sousední vrcholy jsou krajními body některé strany mnohoúhelníku. Strany lomené čáry, úsečky $B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4, \dots, B_{n-1}B_n, B_nB_1$, kde B_iB_{i+1} , nazýváme strany mnohoúhelníku (Kubešová & Cibulková, 2007).



Obr. 2.1.4: Mnohoúhelníky
(zdroj: vlastní zpracování)

Úhlopříčkou mnohoúhelníku nazýváme úsečku, která je určena dvěma nesousedními vrcholy. Je-li počet vrcholů větší jak tři, z každého vrcholu vychází $n - 3$ úhlopříček, celkem tedy $n \cdot (n - 3)$ úhlopříček. Každá úhlopříčka je přitom počítána dvakrát, proto se celkový počet úhlopříček v n -úhelníku vypočítá pomocí vzorce:

$$\frac{n \cdot (n - 3)}{2}, \quad (2.1.1)$$

kde n je počet vnitřních úhlů neboli vrcholů (Liška, Valenta & Král, 2018).

Podle autorek Kubešové a Cibulkové (2007) „*vnitřní úhel mnohoúhelníku je úhel, jehož vrchol je totožný s některým vrcholem mnohoúhelníku, jeho ramena obsahují dvě strany mnohoúhelníku a obsahuje uvažovaný mnohoúhelník.*“

Jako vnitřní body mnohoúhelníku, označujeme body mnohoúhelníku, které nepatří do jeho obvodu, neleží na lomené čáře. „*Množina všech vnitřních bodů tvoří vnitřek mnohoúhelníků*“ (Kubešová & Cibulková, 2007).

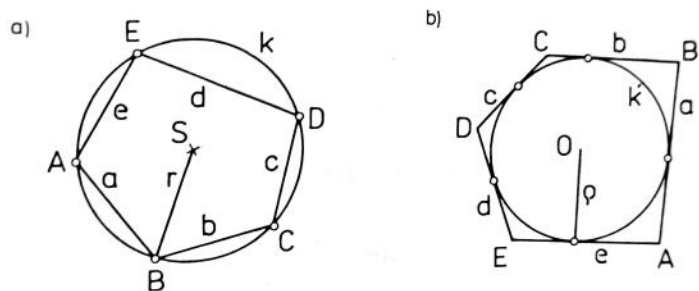
Mnohoúhelníky rozčleňujeme podle toho, zda jim lze kružnici opsat, vepsat, případně obě tyto varianty. Kružnice opsaná prochází všemi vrcholy mnohoúhelníku. Lze-li mnohoúhelníku opsat kružnici, mnohoúhelník se nazývá *tětivový* (Obr. 2.1.5). Kružnice vepsaná se dotýká všech stran mnohoúhelníku. Lze-li mnohoúhelníku vepsat kružnici, nazývá se *mnohoúhelník tečnový* (Molnár, 2001) (Obr. 2.1.5). Všechny strany tečnového mnohoúhelníku tvoří tedy tečny (Liška, Valenta & Král, 2018). Pokud je mnohoúhelník současně tečnový i tětivový, označujeme ho jako *dvojtředový mnohoúhelník* (Molnár, 2001).

Mezi tětivový čtyřúhelník řadíme obdélník, mezi tečnový čtyřúhelník řadíme čtverec a deltoid, a mezi dvojtředový čtyřúhelník řadíme čtverec. Pro tětivový čtyřúhelník platí, že součet velikostí protějších vnitřních úhlů je 180° :

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ. \quad (2.1.2)$$

Pro tečnový čtyřúhelník platí, že součty délek protějších stran jsou stejné (Pomykalová, 2019):

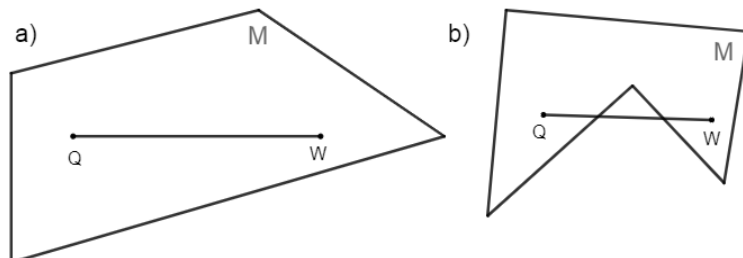
$$a + c = b + d. \quad (2.1.3)$$



Obr. 2.1.5: (a) Těťivový mnohoúhelník (b) Tečnový mnohoúhelník
(zdroj: Molnár, 2001, str. 61)

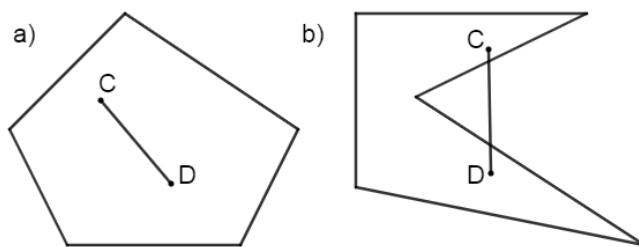
2.1.1 Konvexní mnohoúhelník

Pro nadefinování konvexního mnohoúhelníku, musíme nejprve nadefinovat konvexní množinu (Obr. 2.1.1.1). Perný (2015) definuje konvexní množinu takto: „Bodová množina M , která má aspoň dva prvky se nazývá konvexní, právě když pro každé dva její různé body Q, W platí, že úsečka QW je podmnožinou množiny M “. Z tohoto vyplývá, že množina prázdná a jednoprvková jsou množinami konvexními. Zároveň platí, že průnikem dvou konvexních množin je množina konvexní (Zelinka, 1977).



Obr. 2.1.1.1: (a) Konvexní množina (b) Nekonvexní množina
(zdroj: vlastní zpracování)

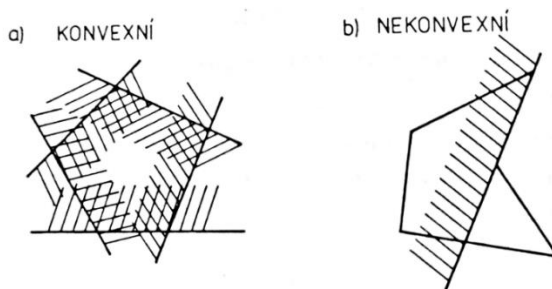
Mnohoúhelník se nazývá konvexní, jestliže jsou velikosti všech jeho vnitřních úhlů menší než 180° . Geometrický útvar nazýváme konvexní, právě když s každými jeho dvěma body C, D leží v tomto útvaru i úsečka CD spojující tyto body (Boček & Zhouf, 2009) (Obr. 2.1.1.2). Pokud je alespoň jeden z vnitřních úhlů mnohoúhelníku větší než úhel přímý, tj. větší než 180° , jedná se o mnohoúhelník nekonvexní (Brejcha, 1947) (Obr. 2.1.1.2).



Obr. 2.1.1.2: (a) Konvexní mnohoúhelník (b) Nekonvexní mnohoúhelník
(zdroj: vlastní zpracování)

Mnohoúhelník je konvexní, leží-li vždy v jedné z polorovin, jejíž hraniční přímka prochází kteroukoliv stranou mnohoúhelníku. Například každý trojúhelník je konvexní (Kubešová & Cibulková, 2007). Každý konvexní n -úhelník lze rozdělit na n trojúhelníků nebo na $n - 1$ trojúhelníků nebo na $n - 2$ trojúhelníků (Pomykalová, 2019).

Opěrnou polorovinou konvexního mnohoúhelníku podle Pomykalové (1993) nazveme „každou polorovinu, v níž konvexní mnohoúhelník leží a jejíž hraniční přímka má s mnohoúhelníkem společnou právě jednu jeho stranu.“ Průnikem všech svých opěrných polorovin je konvexní mnohoúhelník (Pomykalová, 1993) (Obr. 2.1.1.3).



Obr. 2.1.1.3: (a) Konvexní mnohoúhelník (b) Nekonvexní mnohoúhelník
(zdroj: Molnár, 2001, str. 48)

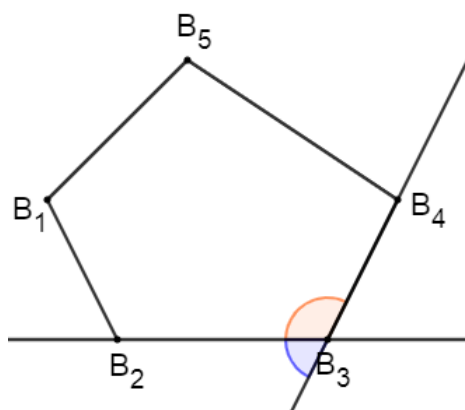
Úhlopříčkou konvexního mnohoúhelníku nazýváme úsečku, která spojuje dva vrcholy mnohoúhelníku, které spolu nesousedí (Pomykalová, 1993). Uvažujeme-li konvexní n -úhelník pro $n \geq 3$, pak z každého jeho vrcholu vychází $n - 3$ úhlopříček. Vrcholů je n , ale každá úhlopříčka je spojnicí dvou vrcholů, tedy počet všech úhlopříček konvexního n -úhelníku se vypočítá ze vztahu (Vondra et al., 2019):

$$\frac{n \cdot (n-3)}{2} \quad (2.1.1.1)$$

„Vnitřní úhel konvexního mnohoúhelníku je průnik opěrných polorovin sousedních stran.“ Konvexní je každý vnitřní úhel konvexního mnohoúhelníku (Pomykalová, 1993). Součet velikostí všech vnitřních úhlů konvexního mnohoúhelníku je dán vztahem:

$$(n - 2) \cdot 180^\circ, \quad (2.1.1.2)$$

kde n je počet vrcholů n -úhelníku. Vnější úhel je úhel sevřený stranami vedlejšími k úhlu vnitřnímu (Molnár, 2001) (Obr. 2.1.1.4). Polovina součtu velikostí všech jeho vnějších úhlů je 360° (Polák, 2015).



Obr. 2.1.1.4: Vnitřní úhel (oranžový) a vnější úhel (modrý) konvexního mnohoúhelníku
(zdroj: vlastní zpracování)

2.1.2 Pravidelný mnohoúhelník

Významné postavení mezi dvojstředovými mnohoúhelníky zaujímají právě pravidelné konvexní mnohoúhelníky (Molnár, 2001). Každý pravidelný n -úhelník je konvexním mnohoúhelníkem (Pomykalová, 1993). Podle Perného (2015) „*mnohoúhelník, jehož všechny strany a všechny vnitřní úhly jsou shodné, se nazývá pravidelný mnohoúhelník.*“ Mnohoúhelníky, které se shodují jen ve svých vnitřních úhlech nebo jen ve svých stranách, nejsou pravidelné (Pomykalová, 2019). Je-li alespoň jeden vnitřní úhel nekonvexní, jde o nekonvexní mnohoúhelník (Fiala, 2016).

O pravidelném n -úhelníku víme, že všechny jeho strany jsou stejně dlouhé, $|B_{i-1}B_i| = 2r \cdot \sin \frac{\pi}{n}$ pro i nabývající hodnot od 1 do n . Dále víme, že všechny vnitřní úhly pravidelného n -úhelníku jsou stejně velké, $|\sphericalangle B_{i-1}B_iB_{i+1}| = \pi - \frac{2\pi}{n}$ pro i nabývajících hodnot $1, 2, 3, \dots, n$, a že $B_{n+1} = B_1$ (Boček & Zhouf, 2009).

Pro n -úhelníky, kde $n = 3$ jde o rovnostranný trojúhelník s vnitřními úhly o velikosti 60° , pro $n = 4$ jde o čtverec s vnitřními úhly o velikosti 90° , pro $n = 5$ jde o pravidelný pětiúhelník s vnitřními úhly o velikosti 108° (Fiala, 2016). Velikost vnitřního úhlu pravidelného konvexního n -úhelníku lze vypočítat pomocí vzorce (Molnár, 2001):

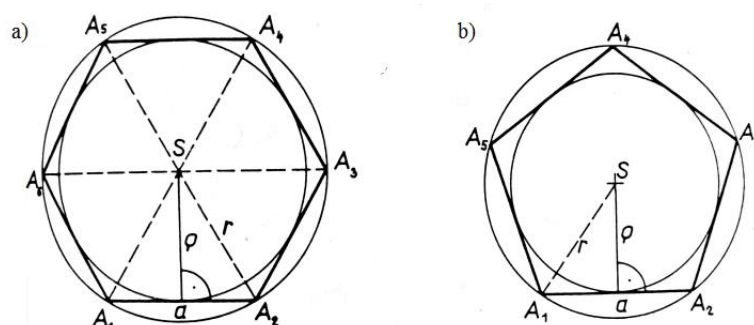
$$((n - 2)/n) \cdot 180^\circ. \quad (2.1.2.1)$$

Součet velikostí všech vnitřních úhlů pravidelného mnohoúhelníku je dán vztahem:

$$(n - 2) \cdot 180^\circ. \quad (2.1.2.2)$$

Pro pravidelný n -úhelník platí, „je-li $n > 3$ sudé, existuje ke každému vrcholu protější vrchol, ke každé straně protější strana s ní rovnoběžná“ (Pomykalová, 1993) (Obr. 2.1.2.1). „Přímky spojují středy protějších stran a přímky spojující protější vrcholy jsou osami souměrnosti n -úhelníku“ (Pomykalová, 2019). Jejich průsečík je středem kružnice vepsané a opsané, a je také středem souměrnosti n -úhelníku (Pomykalová, 2019). Pravidelné n -úhelníky pro n sudé jsou tedy středově i osově souměrné (Fiala, 2016).

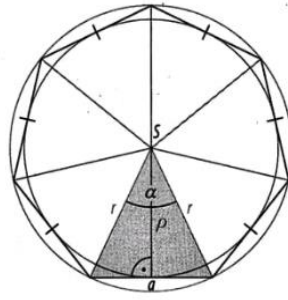
Je-li $n \geq 3$ liché, proti každému vrcholu leží právě jedna strana (Pomykalová, 1993) (Obr. 2.1.2.1). „Přímky spojující vrchol se středem protější strany jsou osy souměrnosti, jejich průsečík je středem opsané a vepsané kružnice. Pravidelné n -úhelníky pro liché n nejsou středově souměrné,“ jsou pouze osově souměrné (Pomykalová, 2019).



Obr. 2.1.2.1: N -úhelník (a) n je sudé (b) n je liché

(zdroj: Pomykalová, 1993, str. 43)

Pravidelný n -úhelník lze rozdělit na n rovnoramenných trojúhelníků se základnou a , kde a je délka strany n -úhelníku, výškou ρ , kde ρ je poloměr kružnice vepsané, a rameny o délkách r , kde r je poloměr kružnice opsané (Pomykalová, 1993) (Obr. 2.1.2.2). Každý z těchto rovnoramenných trojúhelníků má velikost úhlu při základně rovnu $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}$ (Boček & Zhouf, 2009). Pro tyto rovnoramenné trojúhelníky platí, že mají společný vrchol S , což je střed pravidelného mnohoúhelníku i střed kružnice opsané a vepsané. Dále platí, že ramena trojúhelníku jsou poloměry kružnice opsané, výšky na základny trojúhelníku jsou poloměry kružnice vepsané. Paty výšek na základny jsou body dotyku kružnice vepsané mnohoúhelníku. Platí také, že v n -úhelníku, kde n je sudé, je vzdálenost protějších stran rovna průměru kružnice vepsané, 2ρ . Úhel u společného vrcholu v každém trojúhelníku, tzv. středový úhel, má velikost $\alpha = \frac{360^\circ}{n}$, resp. $\frac{2\pi}{n}$ (Vondra et al., 2019).

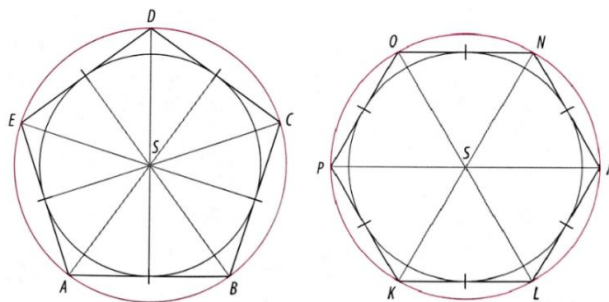


Obr. 2.1.2.2: N rovnoramenných trojúhelníků v n -úhelníku
(zdroj: Vondra et al., 2019, str. 55)

Vrcholy pravidelných mnohoúhelníků leží na kružnici jemu opsané. Každému pravidelnému mnohoúhelníku lze tedy opsat kružnici, jejíž střed leží v bodě totožném s těžištěm mnohoúhelníku (Fiala, 2016). Pravidelným mnohoúhelníkům lze ale i vepsat kružnice (Molnár, 2001). Jedná se tedy o tětivové i tečnové mnohoúhelníky (Polák, 2015) (Obr. 2.1.2.3). Je-li mnohoúhelník současně tětivový i tečnový, nazývá se dvojtředový. Pravidelné mnohoúhelníky jsou tedy dvojtředovými n -úhelníky (Molnár, 2001). Obě kružnice, vepsaná i opsaná, mají společný střed, takzvaný střed mnohoúhelníku. Poloměr kružnice vepsané n -úhelníku je roven (Boček & Zhouf, 2009):

$$\rho = r \cdot \cos \frac{\pi}{n}, \quad (2.1.2.3)$$

kde r je poloměr kružnice opsané a n je počet vrcholů n -úhelníku. Pro liché n je střed n -úhelníku průsečíkem kolmic spuštěných z vrcholů na protější strany. Pro sudé n je střed n -úhelníku průsečíkem spojnic protějších vrcholů (Vondra et al., 2019).



Obr. 2.1.2.3: Kružnice opsaná a vepsaná mnohoúhelníku
(zdroj: Vondra et al., 2019, str. 55)

Pro obvod pravidelného n -úhelníku platí, je-li a délka strany, pak obvod je roven součinu velikosti jedné strany a celkovému počtu stran n (Molnár, 2001):

$$o = n \cdot a. \quad (2.1.2.4)$$

Pro obsah pravidelného konvexního n -úhelníku platí:

$$S = n \cdot \frac{a\rho}{2}, \quad (2.1.2.5)$$

kde a je délka strany pravidelného konvexního n -úhelníku, ρ je velikost poloměru vepsané kružnice a n je počet stran, případně počet vrcholů, pravidelného n -úhelníku (Květoňová & Macálková, 2020). Obecně můžeme říct, že „obsah pravidelného n -úhelníku je roven součtu obsahů n shodných rovnoramenných trojúhelníků, na které lze tento n -úhelník rozdělit“ (Vondra et al., 2019):

$$S = n \cdot S_{\Delta} = n \cdot \frac{r^2 \cdot \sin \alpha}{2}, \quad (2.1.2.6)$$

kde S_{Δ} je obsah trojúhelníku, r je poloměr kružnice opsané, α je středový úhel a n je počet vrcholů mnohoúhelníku.

Při rýsování mnohoúhelníku můžeme postupovat takto: Zvolme si přirozené číslo n větší nebo rovno 3. Dále zvolme na kružnici l o poloměru r a středu S body B_0, B_1 tak, aby velikost úhlu B_0SB_1 byla v obloukové míře $\frac{2\pi}{n}$, ve stupních $\frac{360^\circ}{n}$. Sestrojme body B_2, B_3, B_4, \dots tak, aby úhly $B_{i-1}SB_i$ měly tutéž velikost. Bod B_n splyne s bodem B_0 a průnikem všech polorovin $B_{i-1}B_iS$, kde $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Vznikne pravidelný n -úhelník $B_1B_2B_3 \dots B_n$, který je konvexní. Všechny vrcholy tohoto mnohoúhelníku $B_1B_2B_3 \dots B_n$ leží na kružnici l . Mnohoúhelník je kružnici l vepsán (Boček & Zhouf, 2009).

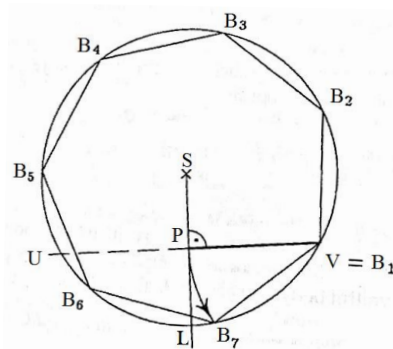
Takovýto n -úhelník můžeme sestavit například pomocí euklidovských konstrukcí. Ve škole se často řeší konstruktivní geometrické úlohy pomocí pravítka a kružítka, jinými slovy použitím dvou základních geometrických úkonů — spojení dvou daných bodů přímkou a opsání kružnice z daného středu daným poloměrem (Sedláčková, 2014). Tyto konstrukce se nazývají euklidovské, podle Eukleida, řeckého matematika a geometra (Zelinka, 1979).

Při konstrukci n -úhelníku jsou povoleny postupy, kdy dva body lze spojit přímkou, sestavit její průsečík s další přímkou, sestavit kružnici o daném poloměru a středu, sestavit průsečíky přímky a kružnice, anebo využít průsečíky dvou kružnic. Německý matematik Karl Friedrich Gauss v devatenácti letech vyřešil otázku, které pravidelné n -úhelníky lze sestavit pomocí euklidovských konstrukcí (Boček & Zhouf, 2009). „Gauss dokázal, že pravidelný n -úhelník je možno sestavit euklidovsky právě tehdy, jestliže je číslo n součinem mocniny čísla 2 s celým nezáporným exponentem a navzájem různých prvočísel, která jsou vesměs ve tvaru $2^{2^k} + 1$, kde k je přirozené číslo nebo 0. Víme tedy, že je možné euklidovskými konstrukcemi sestavit pravidelný trojúhelník ($k = 0$), pravidelný pětiúhelník ($k = 1$), pravidelný sedmnáctiúhelník ($k = 2$), pravidelný čtyřúhelník (2^2), pravidelný šestiúhelník ($2 \cdot (2^{2^0} + 1)$),

pravidelný osmiúhelník (2^3), pravidelný desetiúhelník ($2 \cdot (2^{2^1} + 1)$), dále pravidelný 15-úhelník nebo 34-úhelník“ (Boček & Zhouf, 2009).

Na druhou stranu euklidovskými nástroji nelze konstruovat pravidelný sedmiúhelník nebo pravidelný devítiúhelník. Pravidelný sedmiúhelník nelze sestavit, neboť $7 - 1$ není mocninou dvou. U pravidelného devítiúhelníku číslo 9 není součinem různých prvočísel tvaru $2^{2^k} + 1$ (Boček & Zhouf, 2009).

Pravidelné mnohoúhelníky, které nelze konstruovat euklidovskými nástroji, se konstruují různými přibližnými metodami, které jsou více či méně přesné (Boček & Zhouf, 2009). Příkladem jednoduché přibližné konstrukce je konstrukce pravidelného sedmiúhelníku: Je dána kružnice k vepsaná sedmiúhelníku o středu S a poloměru r . Necht' SL je poloměr kružnice vepsané a necht' P je střed úsečky SL . Bodem P vedeme tětivu UV kolmo na úsečku SL . Velikost úsečky PV je velikost strany pravidelného sedmiúhelníku (Boček & Zhouf, 2009) (Obr. 2.1.2.4). Délka strany pravidelného sedmiúhelníku má hodnotu $b = 2r \sin \frac{\pi}{7} \doteq 2r \cdot 0,43392 = 0,86784 \cdot r$, zatímco délka úsečky PV je rovna $|PV| = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot r \doteq 0,86602 \cdot r$. Pokud porovnáme tyto hodnoty, zjistíme, že jsme se během přibližné konstrukce dopustili chyby, a to o necelé $0,002 \cdot r$. Při poloměru r deset milimetrů by chyba činila dvě desetiny milimetru (Boček & Zhouf, 2009).



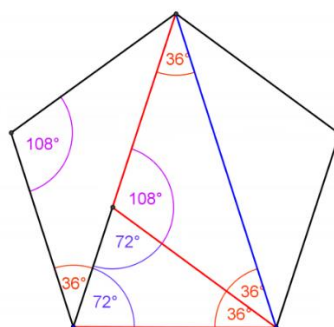
Obr. 2.1.2.4: Konstrukce pravidelného sedmiúhelníku
(zdroj: Boček & Zhouf, 2009, str. 119)

2.1.3 Pravidelný pětiúhelník

Mezi další pravidelné mnohoúhelníky řadíme pravidelný pětiúhelník, rovinný geometrický útvar s pěti stranami a pěti vrcholy (Pirklová, 2013). Délky všech jeho stran i velikosti jeho vnitřních úhlů jsou shodné. Každý vnitřní úhel pravidelného pětiúhelníku je dle vztahu 2.1.2.1

roven 108° (Moravcová, 2009). Součet vnitřních úhlů pravidelného pětiúhelníku dle vztahu 2.1.2.2 je roven $(5 - 2) \cdot 180^\circ = 540^\circ = 3\pi$ (Vondra et al., 2019).

Pravidelný pětiúhelník je dvojstředovým mnohoúhelníkem, neboť tomuto pětiúhelníku můžeme vepsat i opsat kružnici se stejným středem (Moravcová, 2009). Spojnice vrcholů se středem rozděluje pravidelný pětiúhelník na 5 rovnoramenných trojúhelníků (Vondra et al., 2019). Narýsováním dvou sousedních úhlopříček vznikne rovnoramenný trojúhelník, jehož úhly při základně jsou 72° a úhel při vrcholu rovnoramenného trojúhelníku je roven 36° (Obr. 2.1.3.1). Jde o tzv. zlatý trojúhelník (Moravcová, 2009).



Obr. 2.1.3.1: Pravidelný pětiúhelník

(zdroj: vlastní zpracování)

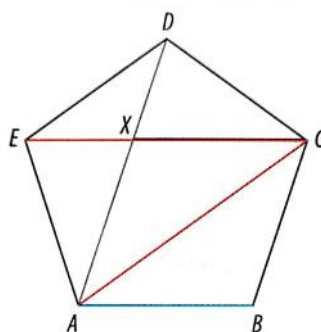
Pravidelný pětiúhelník má celkem pět úhlopříček, přičemž každá je rovnoběžná s jednou jeho stranou, a platí, že průsečík jakýchkoli dvou úhlopříček dělí každou z těchto úhlopříček ve zlatém poměru (Obr. 2.1.3.2). Délka nejdelší úhlopříčky pravidelného pětiúhelníku je rovna:

$$l_u = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cdot c, \quad (2.1.3.1)$$

kde c je délka strany pravidelného pětiúhelníku. V pravidelném pětiúhelníku také platí, že poměr délek úhlopříčky a strany pravidelného pětiúhelníku se rovná zlatému číslu (Ghyka, 2008):

$$\frac{|AC|}{|AB|} = \varphi, \quad (2.1.3.2)$$

kde $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618\ 033\ 988\ 749\ 894 \dots$. Tento zlatý poměr se objevuje v přírodě, umění i architektuře. V botanice souvisí s ideálním postavením listů na stonku, aby měly všechny listy dostatek světla, nebo s umístěním semen slunečnice, aby se jich tam vešlo co nejvíce (Vondra et al., 2019).



Obr. 2.1.3.2: Zlatý poměr v pravidelném pětiúhelníku

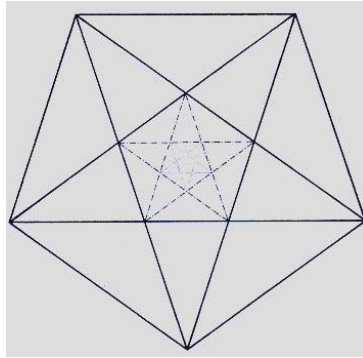
(zdroj: Vondra et al., 2019, str. 59)

Obvod pravidelného pětiúhelníku je dle vztahu 2.1.2.4 roven $o = 5 \cdot c$, kde c je délka strany pravidelného pětiúhelníku (Vondra et al., 2019). Pro obsah tohoto geometrického útvaru se využívá vzorec (Eprehledy.cz, 2014):

$$S = \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4} c^2. \quad (2.1.3.3)$$

Sestrojíme-li všechny úhlopříčky pravidelného pětiúhelníku, dostaneme pěticípou hvězdu neboli pentagram (Voráčová & Csachová, 2012) (Obr. 2.1.3.3). Slovo pentagram pochází z řeckého slova pentagrammon a značí pět přímek. Pentagram je odpradávná magickým symbolem, který poskytoval ochranu anebo naopak symbolizoval zlo. Pro Pythagorejce znamenal zdraví i nahlédnutí do nekonečna (Fiala, 2016). Pentagram například v době renesance využil Leonardo da Vinci k vizuálnímu zdůraznění metafyzické centrality člověka. Pentagram najdeme také v sakrálních katolických budovách, na malbách vnitřních zdí, exteriéru budov či v okenních vitrážích (Fiala, 2016).

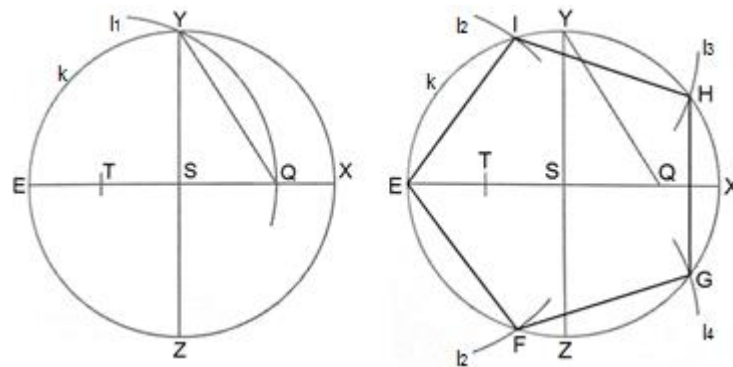
Pentagram lze nakreslit pěti nepřerušovanými tahy, patří mezi tzv. jednotažky (Pomykalová, 2019). Ve středu pentagramu nalezneme opět pravidelný pětiúhelník, do kterého můžeme opakovaně přidávat úhlopříčky stejným způsobem a získávat tak další pentagramy a pravidelné pětiúhelníky. Pentagram vykazuje některé vlastnosti zlatého řezu. Poměr délek stran původního a nového, uvnitř vzniklého pětiúhelníku, je druhou mocninou zlatého čísla. Všechny cípy pentagramu jsou zlatými trojúhelníky (Voráčová & Csachová, 2012). Stejně tak jako u samotného pravidelného pětiúhelníku pro pentagram platí, že průsečík dvou úhlopříček pravidelného pětiúhelníku dělí každou z nich v poměru zlatého řezu a poměr délek úhlopříčky a strany pravidelného pětiúhelníku je zlaté číslo (Fiala, 2016).



Obr. 2.1.3.3: Pentagram

(zdroj: <http://www.geneze.info/pojmy/subdir/pentagram.htm>, 4.11.2020)

Při konstrukci pravidelného pětiúhelníku EFGHI, kde známe poloměr kružnice k opsané pětiúhelníku, postupujeme následovně: Mějme danou kružnici k se středem S a poloměrem r . Úsečky EX a YZ jsou navzájem kolmé průměry kružnice k . Platí tedy, že úsečka EX je kolmá na YZ a bod S je průnikem EX a YZ . Bod T nazveme střed úsečky ES . Necht' kružnice l_1 se středem v bodě T a poloměrem TY protne úsečku SX v bodě Q . Vzdálenost $|QY|$ je délka strany hledaného pravidelného pětiúhelníku. Z bodu E opišme kružnici l_2 s poloměrem rovným délce úsečky QY , která protne kružnici k v bodech F a I . Z bodu I opišme kružnici l_3 s poloměrem rovným délce úsečky QY , která protne kružnici k v bodě H . Z bodu F opišme kružnici l_4 s poloměrem rovným délce úsečky QY , která protne kružnici k v bodě G . Body E, F, G, H, I tvoří vrcholy pravidelného pětiúhelníku (Vondra et al., 2019) (Obr. 2.1.3.4).

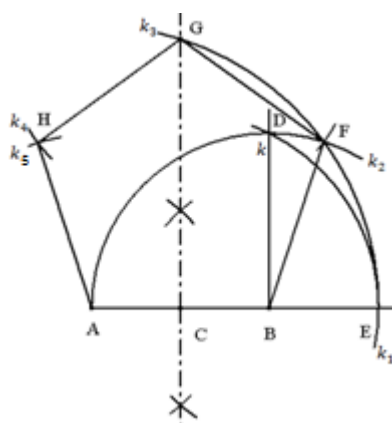


Obr. 2.1.3.4: Konstrukce pravidelného pětiúhelníku – známe poloměr kružnice opsané

(zdroj: vlastní zpracování)

Při konstrukci pravidelného pětiúhelníku ABFGH, je-li dána délka jedné jeho strany AB , postupujeme takto: Mějme danou polopřímku AB . V bodě B veďme kolmici na polopřímku AB . Necht' kružnice k se středem v bodě B a poloměrem AB protne kolmici

v bodě D tak, že platí: $AB = BD$. Bod C nazveme středem úsečky AB. Necht' kružnice k_1 se středem v bodě C a poloměrem CD protne polopřímku AB v bodě E. Necht' k_2 je kružnice se středem v bodě B a poloměrem AB a necht' k_3 je kružnice se středem v bodě A a poloměrem AE, která protne osu úsečky AB v bodě G. Průsečík kružnic k_2 a k_3 nazveme F ($F \in k_2 \cap k_3$). Necht' k_4 je kružnice se středem v bodě G a poloměrem GF, a necht' k_5 je kružnice se středem v bodě A a poloměrem GF. Průsečík těchto dvou kružnic nazveme H ($H \in k_4 \cap k_5$). Postupným spojením bodů A, B, F, G, H získáme hledaný pětiúhelník A B F G H (Chang, 2012) (Obr. 2.1.3.5).



Obr. 2.1.3.5: Konstrukce pravidelného pětiúhelníku – známe délku strany
(zdroj: Chang, 2012, str. 459)

2.1.4 Pravidelný šestiúhelník

Dalším pravidelným mnohoúhelníkem je pravidelný šestiúhelník, geometrický rovinný útvar se šesti vrcholy a šesti stranami. V pravidelném šestiúhelníku je všech jeho šest stran stejně dlouhých a všechny vnitřní úhly jsou stejně velké, $\sigma = \varepsilon = \omega = \varphi = \rho = \sigma = 120^\circ$. Součet vnitřních úhlů šestiúhelníku je dle vztahu 2.1.2.2 roven $(6 - 2) \cdot 180^\circ = 720^\circ = 4\pi$ (Molnár, 2001).

Pravidelné šestiúhelníky jsou důležité při tvorbě včelích pláství. Šestiúhelníky lze poskládat vedle sebe bez mezer a vyplnit tak zcela rovinu. Tímto způsobem včely vytváří plástve, vede je k tomu pud. Včely dokonce zachovávají přesně délku strany šestiúhelníku, a to 2,71 mm (Zelinka, 1979).

Stejně jako u pravidelného pětiúhelníku, spojnice protějších vrcholů rozdělují pravidelný šestiúhelník na 6 rovnostranných trojúhelníků (Vondra et al., 2019) (Obr. 2.1.4.1).

Pravidelnému šestiúhelníku lze opsat i vepsat kružnice. Poloměr kružnice opsané pravidelného šestiúhelníku je roven délce strany b pravidelného šestiúhelníku:

$$r = b, \quad (2.1.4.1)$$

poloměr kružnice vepsané je roven výšce rovnostranného trojúhelníku:

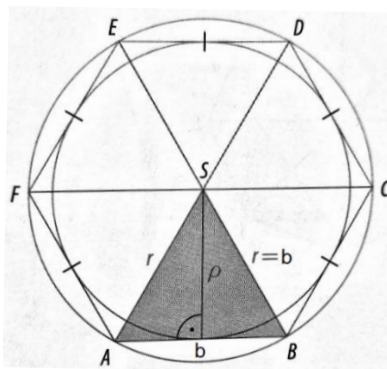
$$\rho = \frac{\sqrt{3}}{2} b, \quad (2.1.4.2)$$

kde b je strana pravidelného šestiúhelníku.

Obsah pravidelného šestiúhelníku je roven (Molnár, 2001):

$$S = (3b^2\sqrt{3})/2). \quad (2.1.4.3)$$

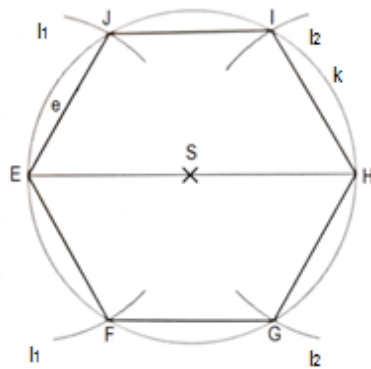
Obvod vypočítáme dle vztahu 2.1.2.4 jako $o = 6 \cdot b$, kde b je délka strany pravidelného šestiúhelníku (Vondra et al., 2019).



Obr. 2.1.4.1: Pravidelný šestiúhelník

(zdroj: Vondra et al., 2019, str. 57)

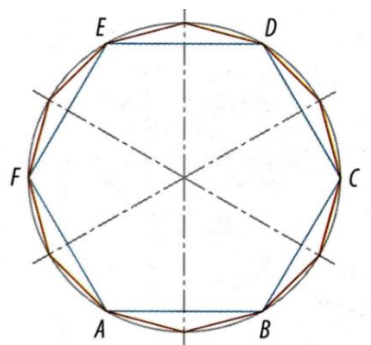
Při konstrukci pravidelného šestiúhelníku EFGHIJ vycházíme z toho, že délka strany e šestiúhelníku je rovna poloměru kružnice opsané. Je dána kružnice opsaná k se středem S a poloměrem e . Vedme středem S dané kružnice průměr s koncovými body E a H . Z bodu E opišme kružnici l_1 s poloměrem rovným délce strany pravidelného šestiúhelníku e , která protíná kružnici k v bodech F a J . Z bodu H opišme kružnici l_2 s poloměrem rovným délce strany pravidelného šestiúhelníku e , která protíná kružnici k v bodech G a I . Body E, H, J, F a G, I tvoří vrcholy pravidelného šestiúhelníku (Vondra et al., 2019) (Obr. 2.1.4.2).



Obr. 2.1.4.2: Konstrukce pravidelného šestiúhelníku

(zdroj: Vondra et al., 2019, str. 57)

Pokud zvládneme zkonstruovat pravidelný šestiúhelník, zvládneme sestrojít také pravidelný dvanáctiúhelník, čtyřicetivšestiúhelník atd. Stačí narýsovat osy stran. Průsečíky os stran s kružnicí jsou další vrcholy. Tímto způsobem zdvojnásobíme počet vrcholů (Vondra et al., 2019) (Obr. 2.1.4.3).



Obr. 2.1.4.3: Osy stran pravidelného šestiúhelníku

(zdroj: Vondra et al., 2019, str. 57)

2.1.5 Pravidelný sedmiúhelník

Pravidelný sedmiúhelník je rovinný geometrický útvar se sedmi stranami a sedmi vrcholy (Pirklová, 2013). Vrcholy sedmiúhelníku „leží na obvodu opsané kružnice a strany jsou tečnami kružnice vepsané“ (Pirklová, 2013). Tomuto geometrickému útvaru lze tedy kružnici opsat i vepsat (Pirklová, 2013).

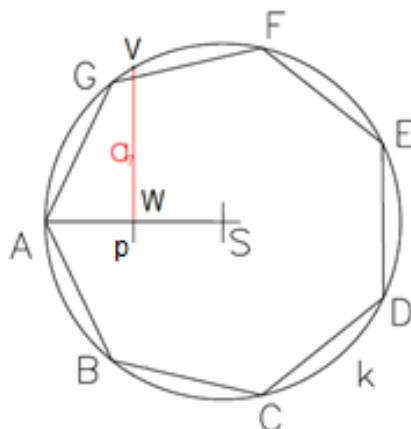
Součet velikostí vnitřních úhlů konvexního sedmiúhelníku dle vztahu 2.1.2.2 je 900° , tj. 5π . Pravidelný sedmiúhelník je složen ze sedmi shodných rovnoramenných trojúhelníků, jejichž úhly při vrcholu mají velikost $\frac{2\pi}{7}$ a při základně $\frac{5\pi}{14}$ (Pirklová, 2013).

Pro obvod pravidelného sedmiúhelníku platí dle vztahu 2.1.2.4 vzorec $o = 7 \cdot a$, pro obsah platí vzorec:

$$S = \frac{7}{2} r^2 \cdot \sin \frac{2\pi}{7}, \quad (2.1.5.1)$$

kde a je strana sedmiúhelníku a r je poloměr kružnice opsané sedmiúhelníku (Pirklová, 2013).

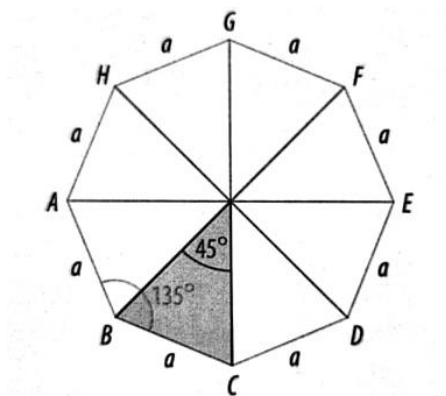
Konstrukce pravidelného sedmiúhelníku „za použití pravítka a kružítka je pouze přibližná. Neexistuje způsob, jak konstrukci udělat pomocí těchto nástrojů úplně přesně“ (Pirklová, 2013). Pro nalezení délky strany pravidelného sedmiúhelníku ABCDEFG, kde známe poloměr kružnice k opsané, postupujeme takto: Necht' k je kružnice o poloměru r a středu S a necht' AS je poloměr této kružnice. Bod W nazveme středem úsečky AS . Bodem W vedeme kolmici p k poloměru AS , která protne kružnici k . Průsečík kružnice k a kolmice p nazveme V ($V \in p \cap k$). Vzdálenost $|WV|$ je délka strany pravidelného sedmiúhelníku (Leinveber & Švercl, 1999) (Obr. 2.1.5.1).



Obr. 2.1.5.1: Konstrukce pravidelného sedmiúhelníku
(zdroj: vlastní zpracování)

2.1.6 Pravidelný osmiúhelník

Pravidelný osmiúhelník je rovinný geometrický útvar s osmi vrcholy a osmi stranami. V pravidelném osmiúhelníku je všech jeho osm stran stejně dlouhých. Všechny vnitřní úhly mají stejnou velikost, a to 135° . Součet vnitřních úhlů osmiúhelníku dle vztahu 2.1.2.2 je roven $(8 - 2) \cdot 180^\circ = 1080^\circ$. Stejně jako u pravidelného pětiúhelníku i šestiúhelníku, spojnice protějších vrcholů rozděluje pravidelný osmiúhelník na 8 rovnostranných trojúhelníků s vnitřním úhlem 45° u hlavního vrcholu (Vondra et al., 2019) (Obr. 2.1.6.1).



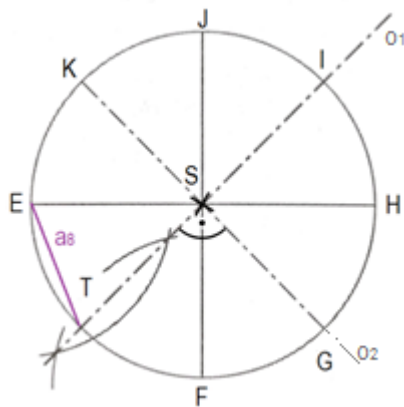
Obr. 2.1.6.1: Pravidelný osmiúhelník

(zdroj: Vondra et al., 2019, str. 58)

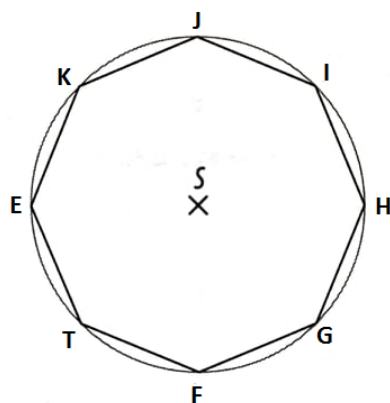
Dle vztahu 2.1.2.4 vypočítáme obvod pravidelného osmiúhelníku takto: $o = 8 \cdot a$, kde a je strana osmiúhelníku (Vondra et al., 2019). Obsah osmiúhelníku vypočítáme dle vztahu 2.1.2.5 takto: $S = \frac{8 \cdot a \cdot \rho}{2} = 4 \cdot a \cdot \rho$, kde ρ je poloměr kružnice vepsané osmiúhelníku (Haasová, 2021).

Pravidelné osmiúhelníky nenalezneme pouze v matematice, ale i například ve stavitelství. V Jeruzalému v budově Skalního dómu se zlatou kopulí nalezneme v jejím půdorysu pravidelný osmiúhelník. V České republice nalezneme mnoho budov, v jejichž půdorysu objevíme pravidelný osmiúhelník. Většinou se jedná o kaple nebo zvonice, jako například zvonici v Brně na ulici Křídlovické (Vondra et al., 2019).

Při konstrukci pravidelného osmiúhelníku, kde známe poloměr r kružnice opsané, nejprve sestrojíme kružnici opsanou osmiúhelníku se středem S a poloměrem r . V kružnici vedeme dva na sebe kolmé průměry a označíme je EH a FJ . Sestrojíme osy všech čtyř pravých úhlů o_1, o_2 . Průsečík osy pravého úhlu ESF s kružnicí opsanou označíme T . Úsečka ET je stranou pravidelného osmiúhelníku (Obr. 2.1.6.2). Průsečíky os pravých úhlů o_1, o_2 a kružnice opsané označíme I, K, G . Body I, K, G, E, H, F, J, T tvoří vrcholy pravidelného osmiúhelníku. Po spojení vrcholů získáváme hledaný osmiúhelník $ETFGHIJK$ (Leinveber & Švercl, 1999) (Obr. 2.1.6.3).



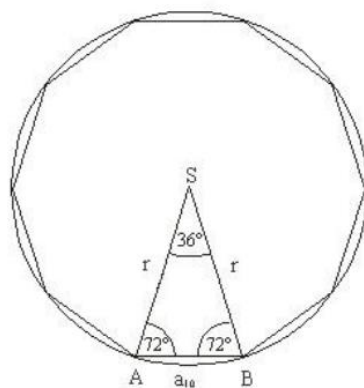
Obr. 2.1.6.2: Konstrukce strany pravidelného osmiúhelníku
(zdroj: vlastní zpracování)



Obr. 2.1.6.3: Konstrukce pravidelného osmiúhelníku
(zdroj: Vondra et al., 2019, str. 58)

2.1.7 Pravidelný desetiúhelník

Pravidelný desetiúhelník je rovinný geometrický útvar s deseti vrcholy a deseti stranami. Dle vztahu 2.1.1 má desetiúhelník třicet pět úhlopříček, tj. $\frac{10 \cdot (10-3)}{2} = 35$. Součet velikostí vnitřních úhlů konvexního desetiúhelníku je dle vztahu 2.1.2.2 roven 1440° , tj. 8π (Vávrová, 2006). Pravidelný desetiúhelník je složen z deseti shodných rovnoramenných trojúhelníků, jejichž úhly při vrcholu mají 36° ($\frac{\pi}{5}$) a při základně mají velikost 72° ($\frac{2\pi}{5}$). Tyto trojúhelníky jsou zlatými trojúhelníky (Jozefík, 2014) (Obr. 2.1.7.1).



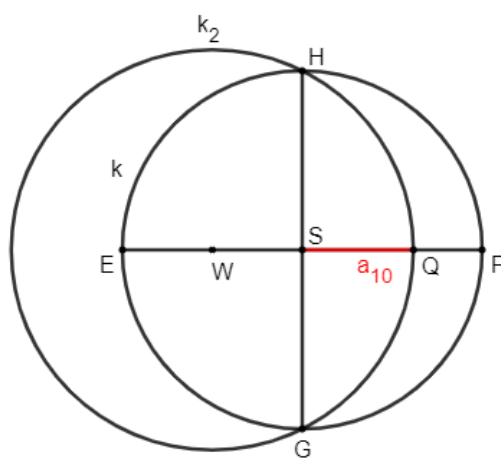
Obr. 2.1.7.1: Rovnoramenný trojúhelník pravidelného desetiúhelníku
(zdroj: Jozefík, 2014, str. 13)

Obvod pravidelného desetiúhelníku vypočítáme dle vztahu 2.1.2.4 jako $o = 10 \cdot a$, kde a je délka strany pravidelného desetiúhelníku. Obsah S pravidelného desetiúhelníku je roven:

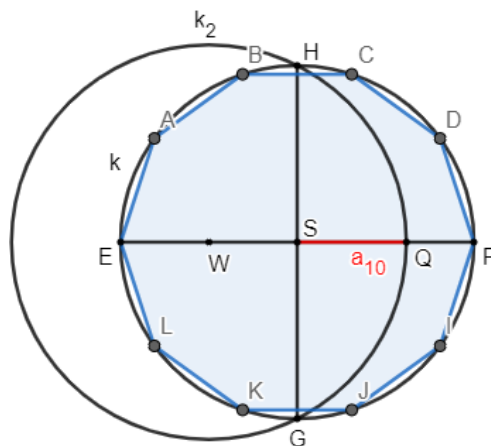
$$S = 5r^2 \cdot 2\sin\frac{\pi}{5}, \quad (2.1.7.1)$$

kde r je poloměr kružnice opsané pravidelnému desetiúhelníku (Vávrová, 2006).

Známe-li poloměr kružnice opsané desetiúhelníku, pro nalezení délky strany pravidelného desetiúhelníku i pro konstrukci desetiúhelníku nejprve sestrojíme kružnici opsanou k o poloměru r a středu S . V kružnici vedeme dva na sebe kolmé průměry, označíme je EF a GH . Sestrojíme střed W úsečky ES . Sestrojíme oblouk kružnice k_2 se středem v bodě W a poloměrem $|WH|$, který protne vodorovný průměr EF v bodě Q . Délka úsečky SQ je délkou strany pravidelného desetiúhelníku (Obr. 2.1.7.2). Délku strany desetiúhelníku nanese desetkrát jako tětivu kružnice k (Leinveber & Švercl, 1999) (Obr. 2.1.7.3).



Obr. 2.1.7.2: Konstrukce strany pravidelného desetiúhelníku
(zdroj: vlastní zpracování)



Obr. 2.1.7.3: Konstrukce pravidelného desetiúhelníku
(zdroj: vlastní zpracování)

2.1.8 Pravidelný dvanáctiúhelník

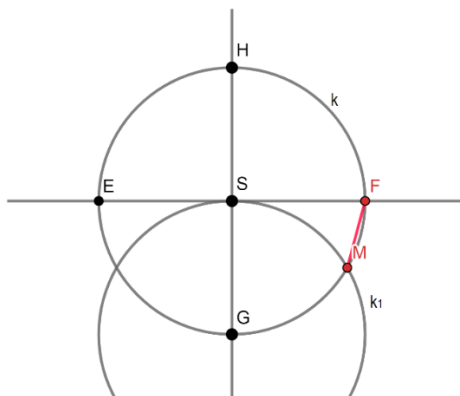
Pravidelný dvanáctiúhelník je rovinný geometrický útvar s dvanácti stranami a dvanácti vrcholy. Součet velikostí vnitřních úhlů konvexního dvanáctiúhelníku je dle vztahu 2.1.2.2 1800° , tj. 10π (Pirklová, 2013).

Dle vztahu 2.1.2.4 vypočítáme obvod pravidelného dvanáctiúhelníku $o = 12 \cdot a$, kde a je délka strany dvanáctiúhelníku. Pro obsah pravidelného dvanáctiúhelníku platí vzorec:

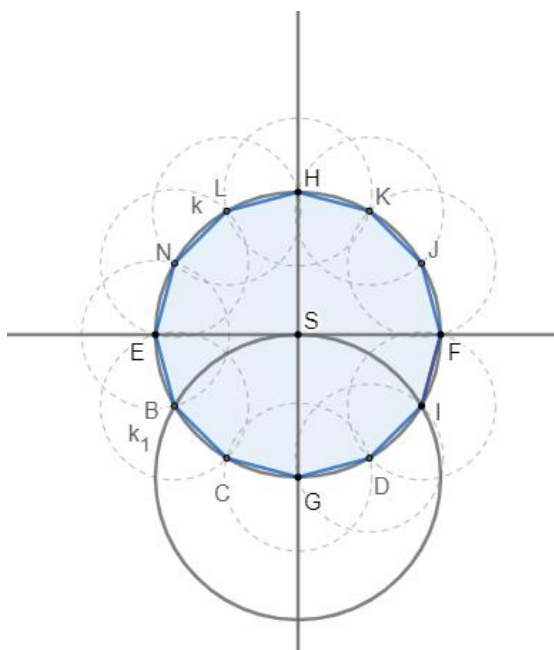
$$S = 3a^2 \cot g \frac{\pi}{12} = 3 \cdot (2 + \sqrt{3}) \cdot a^2, \quad (2.1.8.1)$$

kde a je délka strany pravidelného dvanáctiúhelníku (Kuřina, 2010).

Pro nalezení délky strany pravidelného dvanáctiúhelníku nejprve zvolíme kružnici k opsanou dvanáctiúhelníku o poloměru r a středu S . V kružnici k vedeme dva na sebe kolmé průměry, které označíme EF a GH . Sestrojíme kružnici k_1 se středem v bodě G a poloměrem r kružnice opsané k . Průsečík kružnice k_1 a kružnici k označíme M . Velikost úsečky FM je rovna délce strany pravidelného dvanáctiúhelníku (Obr. 2.1.8.1). Délku strany dvanáctiúhelníku nanese dvanáctkrát na kružnici k . Vzniknou vrcholy dvanáctiúhelníku B, C, D, I, J, K, L, N , po jejichž spojení dostaneme pravidelný dvanáctiúhelník $EBCGDIFJKHLN$ (Leinveber & Švercl, 1999) (Obr. 2.1.8.2).



Obr. 2.1.8.1: Konstrukce strany dvanáctiúhelníku
(zdroj: vlastní zpracování)

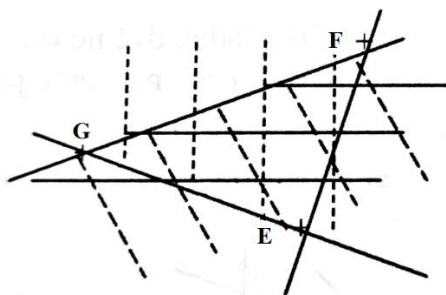


Obr. 2.1.8.2: Konstrukce dvanáctiúhelníku
(zdroj: vlastní zpracování)

2.2 Trojúhelník

V této kapitole se zaměříme na n -úhelník pro $n = 3$, trojúhelník. Definicí trojúhelníků je mnoho, uvedeme si tři. Podle Květoňové a Macákové (2020) určují trojúhelník EFG tři různé body E, F, G, které neleží v přímce. Perný (2015) definuje trojúhelník takto: „*Necht' jsou body E, F, G nekolineární, pak průnik polorovin EFG, FGE a GEF se nazývá trojúhelník*“.

Definice trojúhelníku podle Poláka zní takto: „*Mějme dány body E, F, G, které neleží na přímce. Trojúhelník EFG je průnikem polorovin FGE, GEF, EFG, je to množina všech bodů, jež leží zároveň v těchto polorovinách. Trojúhelník označujeme symbolem ΔEFG .*“ Každý trojúhelník je konvexní geometrický útvar (Polák, 2015) (Obr. 2.2.1).



Obr. 2.2.1: Průnik polorovin EFG, FGE a GEF

(zdroj: Perný, 2015, str. 17)

U trojúhelníku EFG nazýváme body E, F, G vrcholy, úsečky EF, FG, GE stranami a úhly $\sphericalangle EFG$, $\sphericalangle FGE$ a $\sphericalangle GEF$ vnitřními konvexními úhly (Perný, 2015). Vnitřní úhly se také obvykle označují písmeny řecké abecedy, např. α, β, γ (Liška, Valenta & Král, 2019). V každém trojúhelníku platí, že součet vnitřních úhlů je úhel přímý (Peterková-Doskočilová, 1940):

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ = \pi. \quad (2.2.1)$$

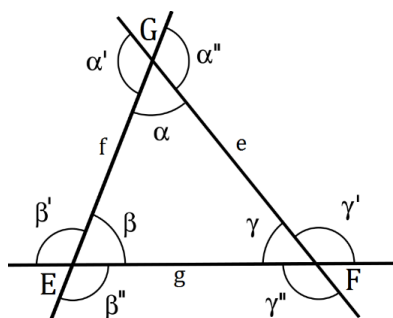
Body neležící na hranici nazýváme vnitřními body trojúhelníku. Množina všech vnitřních bodů tvoří vnitřek trojúhelníku (Calda, 2017). Vrcholy trojúhelníku se označují velkými tiskacími písmeny, zatímco strany trojúhelníku malými písmeny. Platí pravidlo, že název vrcholu odpovídá názvu protější strany, např. naproti vrcholu B leží strana b (Liška, Valenta & Král, 2018).

Vnější úhly k vnitřním úhlům Δ EFG nazýváme vnější úhly trojúhelníku EFG (Pomykalová, 2019). Vnější úhly jsou značeny stejným řeckým písmenem jako odpovídající vnitřní úhel, pouze s čárkou, tj. $\alpha', \alpha'', \beta', \beta'', \gamma', \gamma''$ (Obr. 2.2.2). O obou vnějších úhlech při témže vrcholu trojúhelníku můžeme říct, že mají stejnou velikost, např. $\beta' = \beta''$. Součet

vnějšího a vnitřního úhlu při téže vrcholu trojúhelníku má velikost přímého úhlu, tj. 180° , a platí: $\alpha + \alpha' = 180^\circ$, $\beta + \beta' = 180^\circ$, $\gamma + \gamma' = 180^\circ$. Další vlastností vnějších úhlů trojúhelníků je, že jejich součet je 360° (Ženatá, 2010):

$$\alpha' + \beta' + \gamma' = 360^\circ. \quad (2.2.2)$$

Také platí, že vnější úhel u jednoho vrcholu trojúhelníku je roven součtu velikostí vnitřních úhlů u zbývajících vrcholů, $\alpha' = \beta + \gamma$, $\beta' = \alpha + \gamma$, $\gamma' = \beta + \alpha$ (Polák, 2015).



Obr. 2.2.2: Strany a úhly trojúhelníku
(zdroj: vlastní zpracování)

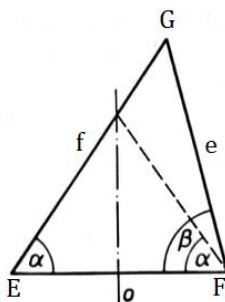
Víme, že přímá cesta z místa E do místa F je kratší než cesta z E do F do G, kdy G je na „přímé cestě.“ Geometricky to znamená, že pro každé tři body E, F, G platí tzv. trojúhelníková nerovnost, která říká, že „*součet kterýchkoli dvou stran trojúhelníku je větší než strana třetí,*“ tj. $|EF| \leq |EG| + |FG|$ (Caldá & Šimša, 2010). Pro trojúhelníkovou nerovnost také platí, že rozdíl kterýchkoli dvou stran trojúhelníku je menší než strana třetí (Ženatá, 2010).

Rovnost při trojúhelníkové nerovnosti nastane tehdy, když bod G leží na úsečce EF. Stejně tak platí pro délky stran trojúhelníku EFG: $e < f + g$, $f < e + g$, $g < e + f$. Tedy součet délek každých dvou stran trojúhelníku je větší než délka strany třetí. Ze druhé a třetí rovnosti plyne $f - g < e$, $g - f < e$. To lze napsat jedinou nerovností $|f - g| < e$. Analogicky lze vztahy psát i pro f a g . Tři nerovnosti jsou tedy splněny, platí-li $|f - g| < e < f + g$. Z toho plyne, že úsečky o délkách e , f , g jsou stranami trojúhelníku, právě když platí (Tversky & Gati, 1982):

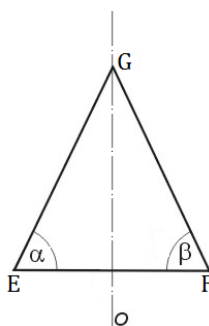
$$|f - g| < e < f + g. \quad (2.2.3)$$

Platí-li pro strany e , f trojúhelníku EFG nerovnost $f < e$, leží bod G v polorovině o_F , kde o_F je osa úsečky EF a je $\beta < \alpha$ (Obr. 2.2.3). Obráceně platí také, je-li $\beta > \alpha$, je $f > e$. V trojúhelníku leží tedy proti větší straně větší vnitřní úhel, a proti většímu vnitřnímu úhlu větší

strana. V rovnoramenném trojúhelníku EFG platí, je-li $e = f$, je také $\alpha = \beta$ (Pomykalová, 2000) (Obr. 2.2.4).

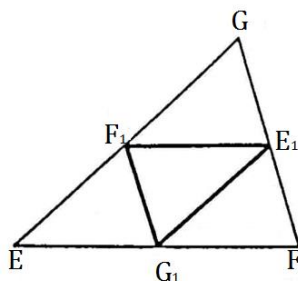


Obr. 2.2.3: Úhly trojúhelníku
(zdroj: Pomykalová, 1993, str. 25)



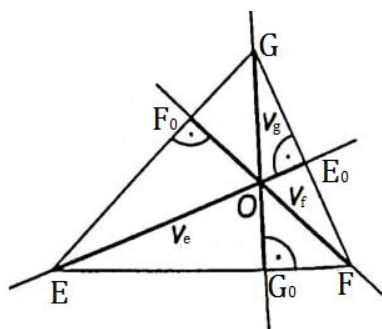
Obr. 2.2.4: Úhly v rovnoramenném trojúhelníku
(zdroj: vlastní zpracování)

V trojúhelníku se nachází úsečka, střední příčka, spojující středy dvou stran trojúhelníků. Každá střední příčka „je rovnoběžná se stranou trojúhelníku, jejímž středem neprochází“ (Ženatá, 2010). Její délka je stejná jako polovina délky této strany. Platí například $|E_1F_1| = \frac{1}{2} |EF|$, $E_1F_1 \parallel EF$. (Ženatá, 2010) (Obr. 2.2.5). Trojúhelník má tři střední příčky, které ho rozdělují na čtyři menší shodné trojúhelníky (Liška, Valenta & Král, 2018).



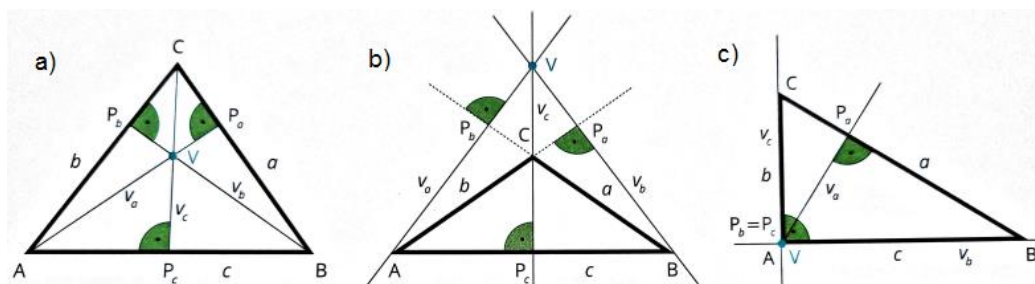
Obr. 2.2.5: Střední příčka trojúhelníku
(zdroj: Pomykalová. 1993, str. 26)

Dále v trojúhelníku nalezneme výšku, kolmici spuštěnou z vrcholu na protější stranu. Výška je „úsečka, jejímiž krajními body jsou vrchol trojúhelníku a pata kolmice vedené tímto vrcholem k přímce určené zbývajícími vrcholy“ (Pomykalová, 1993). Na obrázku 2.2.6 jsou výškami úsečky EE_0 , FF_0 , GG_0 , jejich délky označujeme v_e , v_f , v_g . Všechny tři výšky trojúhelníku se protínají v jediném bodě tzv. průsečíku výšek O , kterému se říká ortocentrum (Tomáš, 1914). V případě tupouhlého trojúhelníku leží ortocentrum vně trojúhelníku, v ostroúhlém trojúhelníku je ortocentrum vnitřním bodem trojúhelníku, a v případě pravoúhlého trojúhelníku leží ortocentrum ve vrcholu pravého úhlu (Liška, Valenta & Král, 2018) (Obr. 2.2.7).



Obr. 2.2.6: Výšky trojúhelníku a ortocentrum

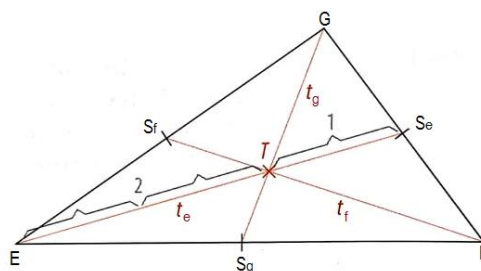
(zdroj: Pomykalová, 1993, str. 26)



Obr. 2.2.7: Výšky a) v ostroúhlém, b) v tupouhlém, c) v pravoúhlém trojúhelníku

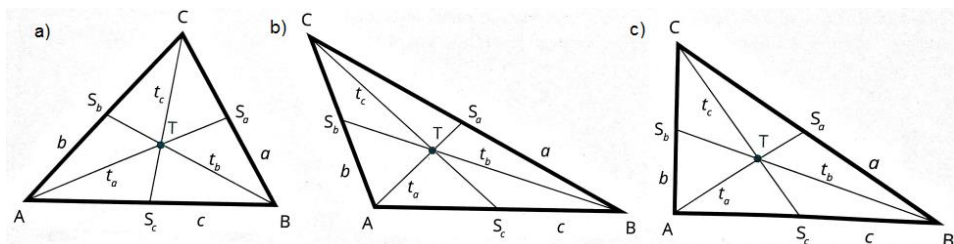
(zdroj: Liška, Valenta & Král, 2018, str. 40)

Další úsečkou v trojúhelníku je těžnice. Je to úsečka spojující vrchol trojúhelníku se středem protější strany (Květoňová & Macálková, 2020). Na obrázku 2.2.8 jsou těžnicemi úsečky ES_e , FS_f , GS_g , jejich délky označujeme t_e , t_f , t_g . Všechny tři těžnice trojúhelníku se protínají v jediném bodě tzv. těžišti trojúhelníku T . Těžiště je vždy vnitřním bodem trojúhelníku (Vasiljev & Gutenmacher, 1982) (Obr. 2.2.9). Pro vzdálenost těžiště od vrcholu trojúhelníku platí, že je rovna dvěma třetinám délky těžnice. Těžiště dělí těžnici v poměru 2:1, tj. $|TG|:|TG_1| = 2:1$ (Ženatá, 2010) (Obr. 2.2.8).



Obr. 2.2.8: Těžnice a těžiště trojúhelníku

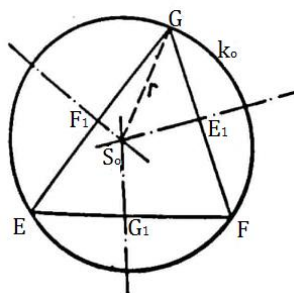
(zdroj: Liška, Valenta & Král, 2018, str. 41)



Obr. 2.2.9: Těžiště a těžnice a) ostroúhlého, b) tupoúhlého, c) pravouhlého trojúhelníku

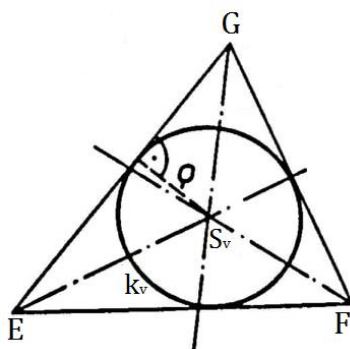
(zdroj: Liška, Valenta & Král, 2018, str. 40)

Pro každý trojúhelník platí, že jim lze opsat i vepsat kružnici. „Kružnice procházející všemi vrcholy trojúhelníku“ se nazývá kružnice opsaná (Obr. 2.2.10). „Kružnice, která se dotýká všech stran trojúhelníku,“ se nazývá kružnice vepsaná (Obr. 2.2.11). K narysování kružnice opsané je potřeba sestavit osy stran (Pomykalová, 1993). Osy stran trojúhelníku se protínají v jednom bodě, ve středu kružnice opsané, zatímco osy vnitřních úhlů se protínají ve středu kružnice vepsané (Hansen, 1979). Střed kružnice vepsané je vždy vnitřním bodem trojúhelníku (Liška, Valenta & Král, 2018) (Obr. 2.2.13). Poloměrem kružnice opsané je úsečka, jejímiž krajními body jsou průsečík os stran a kterýkoli vrchol trojúhelníku (Ženatá, 2010). Poloměrem kružnice vepsané je kolmice na libovolnou stranu trojúhelníku (Hrubý, 2016).



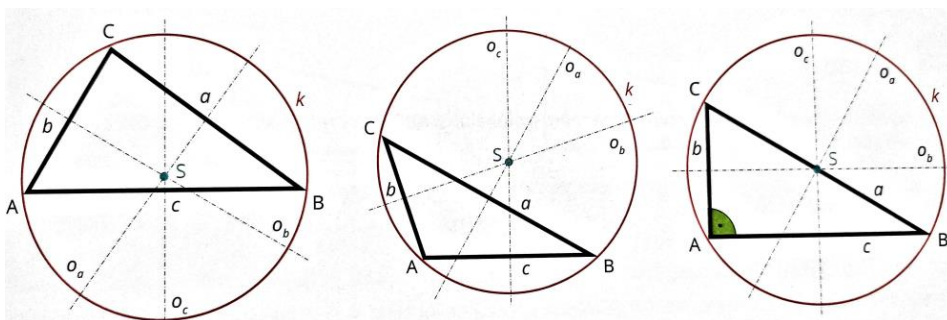
Obr. 2.2.10: Kružnice opsaná trojúhelníku

(zdroj: Pomykalová, 1993, str. 27)

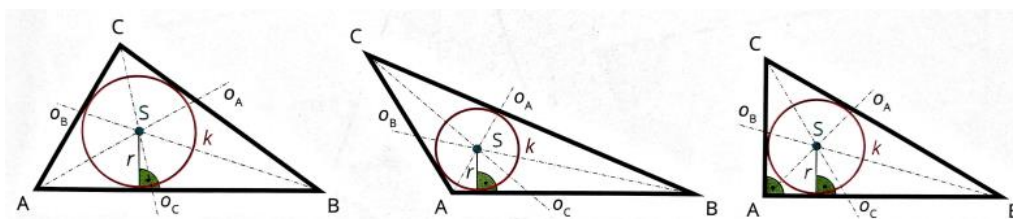


Obr. 2.2.11: Kružnice vepsaná trojúhelníku
(zdroj: Pomykalová, 1993, str. 27)

Je-li trojúhelník ostroúhlý, střed kružnice opsané a průsečík výšek jsou vnitřními body. Je-li trojúhelník tupoúhlý jsou střed kružnice opsané a průsečík výšek vnějšími body. Je-li trojúhelník pravoúhlý, splývá průsečík výšek s vrcholem pravého úhlu, střed přepony se středem kružnice opsané (Pomykalová, 1993) (Obr. 2.2.12).

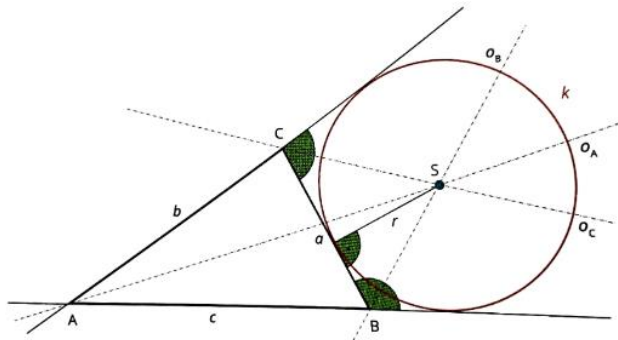


Obr. 2.2.12: Kružnice opsaná v různých typech trojúhelníků
(zdroj: Liška, Valenta & Král, 2018, str. 41)

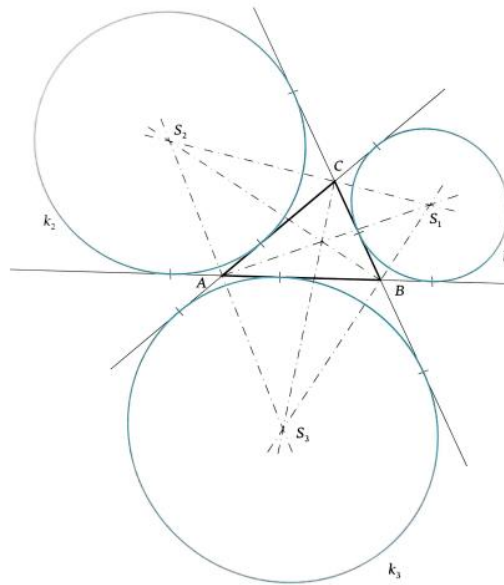


Obr. 2.2.13: Kružnice vepsaná v různých typech trojúhelníků
(zdroj: Liška, Valenta & Král, 2018, str. 41)

Kromě kružnice opsané a vepsané, existují v trojúhelníku ještě tři kružnice připsané (Obr. 2.2.15). Tyto kružnice se vždy dotýkají jedné strany trojúhelníku a přímek, na jejichž částech leží zbývající strany (Hrubý, 2016). Střed kružnic připsaných jsou průsečíky osy příslušného vnitřního úhlu a os zbývajících dvou sousedních vnějších úhlů. Střed kružnice připsané vždy náleží vnějšku trojúhelníku (Hrubý, 2016) (Obr. 2.2.14).



Obr. 2.2.14: Kružnice připsaná trojúhelníku
(zdroj: Liška, Valenta & Král, 2018, str. 42)



Obr. 2.2.15: Kružnice připsané
(zdroj: Pomykalová, 2019, str. 14)

Sjednocení všech stran trojúhelníku tvoří hranici neboli obvod trojúhelníku. Obvod vypočítáme sečtením všech tří stran trojúhelníku (Odvárko & Kadleček, 1996):

$$o = a + b + c. \quad (2.2.4)$$

Obsah trojúhelníku vypočítáme pomocí jedné ze stran trojúhelníku a výšky, která dopadá na tuto stranu, podle vzorce:

$$S = \frac{1}{2} a \cdot v_a = \frac{1}{2} b \cdot v_b = \frac{1}{2} c \cdot v_c \quad (2.2.5)$$

kde a, b, c jsou strany trojúhelníku a v_a, v_b, v_c jsou výšky trojúhelníku, nebo obsah vypočítáme také podle vzorce:

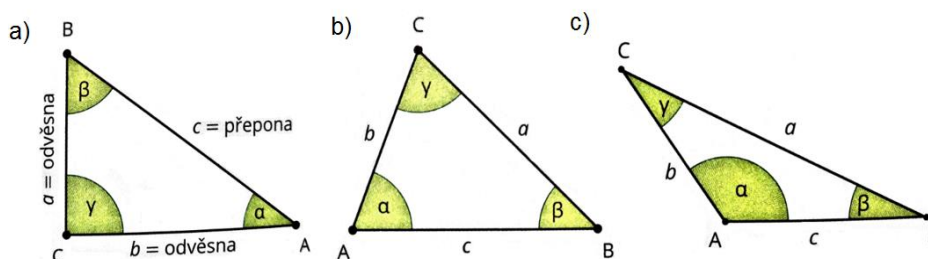
$$S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin\gamma = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin\beta = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin\alpha \quad (2.2.6)$$

kde a, b, c jsou strany trojúhelníku, α, β, γ jsou vnitřní úhly trojúhelníku, v_a, v_b, v_c jsou výšky trojúhelníku (Horák & Jirásek, 2007). Známe-li velikosti všech tří stran trojúhelníku, můžeme k výpočtu obsahu užít tzv. Heronův vzorec:

$$S = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}, \quad (2.2.7)$$

kde písmeno s je rovno $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ (Peppiatt & Aslock, 2007).

Trojúhelníky lze rozdělit podle velikosti úhlů a velikosti stran (Molnár, 2022). Podle velikosti vnitřních úhlů dělíme trojúhelníky na ostroúhlé, jejichž všechny vnitřní úhly jsou ostré (menší jak 90°), tupoúhlé s jedním vnitřním tupým úhlem (větší jak 90°) a dvěma úhly ostrými, a trojúhelníky pravoúhlé (Květoňová & Macálková, 2020) (Obr. 2.2.16).



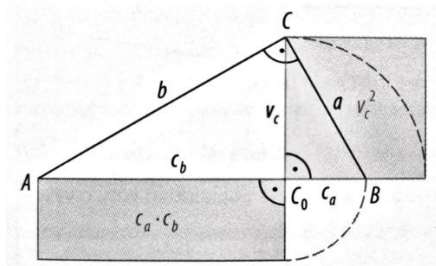
Obr. 2.2.16: Rozdělení trojúhelníků dle vnitřních úhlů: a) pravoúhlý, b) ostroúhlý, c) tupoúhlý (zdroj: Liška, Valenta & Král, 2018, str. 39)

Pravoúhlé trojúhelníky mají jeden vnitřní úhel pravý, roven 90° , zbývající dva vnitřní úhly jsou ostré. U pravoúhlého trojúhelníku leží nejdelší strana neboli přepona trojúhelníku vždy naproti pravému úhlu, který svírají dvě zbývající strany, odvěsny (Liška, Valenta & Král, 2018).

Dvě ze tří výšek pravoúhlého trojúhelníku splývají s jeho odvěsnami. Průsečíkem výšek je vrchol pravého úhlu. V každém pravoúhlém trojúhelníku platí Eukleidova věta o výšce, která říká, že „*druhá mocnina výšky je rovna součinu délek obou úseků přepony.*“ Geometricky Eukleidova věta o výšce říká, že „*obsah čtverce sestaveného nad výškou k přeponě pravoúhlého trojúhelníku se rovná obsahu obdélníku sestaveného z obou úseků přepony.*“ Eukleidovu větu o výšce zapisujeme takto (Molnár, 2022):

$$v_c^2 = c_a \cdot c_b, \quad (2.2.8)$$

kde v_c je výška trojúhelníku, c_a je úsek přepony přilehlý k odvěsň a a c_b je úsek přepony přilehlý k odvěsň b (Obr. 2.2.17).



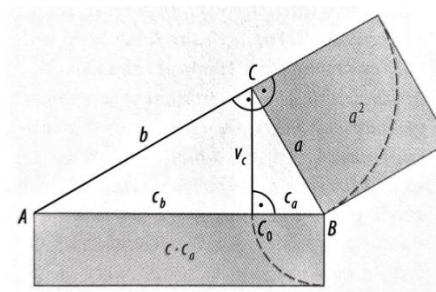
Obr. 2.2.17: Eukleidova věta o výšce
(zdroj: Vondra et al., 2019, str. 39)

V každém pravoúhlém trojúhelníku platí zároveň i Eukleidova věta o odvěsně. Tato věta říká, že „*druhá mocnina délky odvěsny je rovna součinu délek přepony a přilehlého úseku.*“ Geometricky Eukleidova věta o odvěsně říká, že „*obsah čtverce sestaveného nad odvěsnou pravoúhlého trojúhelníku se rovná obsahu obdélníku sestaveného z přepony a úseku přepony*“ k této odvěsně přilehlé. Eukleidovu větu o odvěsně zapisujeme takto (Pomykalová, 2019):

$$a^2 = c \cdot c_a, \quad (2.2.9)$$

$$b^2 = c \cdot c_b, \quad (2.2.10)$$

kde a, b jsou odvěsny, c je přepona trojúhelníku a c_a, c_b jsou úseky přepony přilehlé k odvěsně a, b (Obr. 2.2.18).



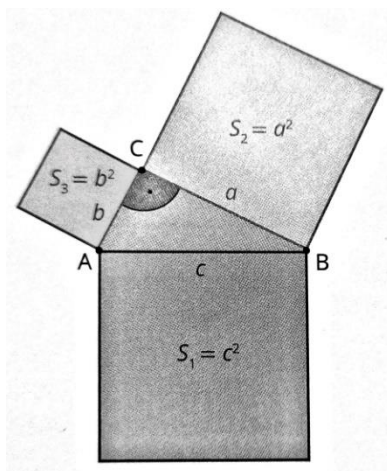
Obr. 2.2.18: Eukleidova věta o odvěsně
(zdroj: Vondra et al., 2019, str. 40)

Pro strany pravoúhlého trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu C platí Pythagorova věta:

$$a^2 + b^2 = c^2, \quad (2.2.11)$$

kde a, b, c jsou strany trojúhelníku. Tato věta říká, že „*druhá mocnina délky přepony je rovna součtu druhých mocnin délek obou odvěsen*“ (Pomykalová, 2019). Geometricky platí, že „*obsah čtverce sestaveného nad přeponou pravoúhlého trojúhelníku se rovná součtu obsahů čtverců sestavených nad oběma odvěsnami*“ (Odvárko & Kadleček, 2004). Nad stranami pravoúhlého trojúhelníku mohou být sestaveny nejen čtverce, ale i pravidelné

mnohoúhelníky, nepravidelné mnohoúhelníky či rovnostranné trojúhelníky. V každém případě však musí platit: $S_1 = S_2 + S_3$, kde S_2 a S_3 jsou obsahy ploch nad odvěsnami a S_1 je obsah plochy nad přeponou (Pomykalová, 2019) (Obr. 2.2.19).



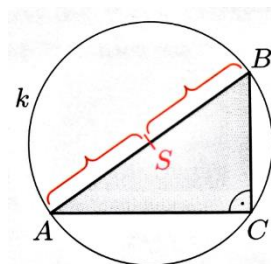
Obr. 2.2.19 Pythagorova věta
(zdroj: Liška, Valenta & Král, 2018, str. 73)

Pokud známe délky stran trojúhelníku a chceme rozhodnout, zda se jedná o trojúhelník pravoúhlý, využijeme větu obrácenou k Pythagorově větě: „*Jsou-li a , b , c délky stran trojúhelníku a platí-li pro ně $c^2 = a^2 + b^2$, pak je trojúhelník pravoúhlý a c je délka jeho přepony.*“ Pythagorova věta je využívána ke zjištění délky odvěsen, kdy jde o vyjádření neznámé a^2 nebo b^2 z předešlého vzorce (Odvárko & Kadleček, 2004).

Dále pro každý pravoúhlý trojúhelník platí, že součet délek jeho odvěsen je menší než součet velikosti výšky na přeponu a průměru opsané kružnice:

$$a + b < 2R + v, \tag{2.2.12}$$

kde a, b jsou délky odvěsen, R značí průměr kružnice opsané a v značí výšku trojúhelníku (Calda, 2012). Kružnice opsaná pravoúhlému trojúhelníku má střed ve středu přepony trojúhelníku a její poloměr je polovina délky přepony. Kružnice opsaná tohoto trojúhelníku se nazývá Thaletova kružnice (Odvárko & Kadleček, 2004) (Obr. 3.2.20).



Obr. 2.2.20: Thaletova kružnice
(zdroj: Odvárko & Kadleček, 2004, str. 190)

V každém pravoúhlém trojúhelníku je součet poloměrů jeho kružnice opsané a vepsané větší nebo roven druhé odmocnině ze součinu délek jeho odvěsen:

$$R + \rho \geq \sqrt{ab}, \quad (2.2.13)$$

kde ρ je poloměr kružnice vepsané. Pro poloměr kružnice vepsané ρ a velikost výšky v na přeponu v pravoúhlém trojúhelníku platí (Calda, 2012):

$$\frac{2v}{5} < \rho < \frac{v}{2}. \quad (2.2.14)$$

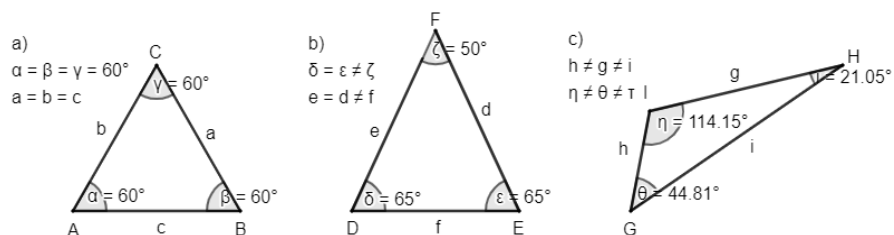
Dále jsou pro pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C definované goniometrické funkce ostrého úhlu (Jonášová, Rubeš & Vesecká, 2015) (Tab. 2.2.1).

Goniometrické funkce ostrého úhlu definované pro pravoúhlý trojúhelník		
sinus α	$\sin \alpha = \frac{a}{c}$	Protilehlá odvěsna úhlu α lomeno přepona
cosinus α	$\cos \alpha = \frac{b}{c}$	Přilehlá odvěsna úhlu α lomeno přepona
tangens α	$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$	Protilehlá odvěsna úhlu α lomeno přilehlá odvěsna úhlu α
kotangens α	$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{b}{a}$	Přilehlá odvěsna úhlu α lomeno protilehlá odvěsna úhlu α

Tab. 2.2.1: Goniometrické funkce ostrého úhlu
(zdroj: Jonášová, Rubeš & Vesecká, 2015, str. 28)

Z hlediska poměru délek stran se trojúhelníky dělí na různostranné, rovnoramenné a rovnostranné (Obr. 2.2.21). Různostranný trojúhelník nemá žádné dvě strany stejně dlouhé, také všechny úhly jsou různé (Jonášová, Rubeš & Vesecká, 2015). **Rovnoramenný trojúhelník** má právě dvě strany stejně dlouhé, tudíž i dva přilehlé úhly při základně těchto stran jsou stejně velké. Shodné strany se nazývají ramena. Strana, odlišná od ramen, se nazývá základna (Perný, 2015). Vrchol proti základně rovnoramenného trojúhelníku se nazývá hlavní vrchol. Rovnoramenný trojúhelník je osově souměrný s osou souměrnosti procházející hlavním vrcholem trojúhelníku. Osa souměrnosti je zároveň osou jeho základny a osou vnitřního úhlu u hlavního vrcholu. Na ose souměrnosti leží výška i těžnice k základně trojúhelníku, a středy

kružnice opsané i vepsané (Odvárko & Kadleček, 2004). Rovnostranný trojúhelník má všechny strany stejně dlouhé, všechny tři vnitřní úhly mají velikost 60° (Liška, Valenta & Král, 2018).



Obr. 2.2.21: Dělení trojúhelníků dle délek stran: a) rovnostranný, b) rovnoramenný, c) různoramenný

(zdroj: Perný, 2015, str. 18)

Rovnostranný trojúhelník

Mezi pravidelné mnohoúhelníky patří právě rovnostranný trojúhelník (Perný, 2015). U rovnostranného trojúhelníku EFG jsou všechny tři jeho strany e, f, g stejně dlouhé, $e = f = g$, a zároveň jsou všechny tři vnitřní úhly stejně velké, $\sigma = \varepsilon = \omega = 60^\circ = \frac{\pi}{3} rad$. Výšky rovnostranného trojúhelníku mají délku:

$$v = \frac{e}{2}\sqrt{3}, \tag{2.2.15}$$

kde e je délka strany trojúhelníku (Polák, 2015). Pro poloměr kružnice opsané platí:

$$r = (e\sqrt{3})/3, \tag{2.2.16}$$

pro poloměr kružnice vepsané platí:

$$\rho = (e\sqrt{3})/6. \tag{2.2.17}$$

Obsah rovnostranného trojúhelníku je dán vztahem (Molnár, 2001):

$$S = (e^2\sqrt{3})/4. \tag{2.2.18}$$

Každý rovnostranný trojúhelník má tři osy souměrnosti. Osy souměrnosti jsou zároveň osami jeho stran a k nim protějších úhlů. Na každé ose souměrnosti leží výška a těžnice k příslušné straně. Osy stran, úhlů, výšek a těžnic se protínají v těžišti trojúhelníku (Ženatá, 2010). Průsečík os souměrnosti je středem kružnice vepsané i opsané, dále je těžištěm a ortocentrem (Odvárko & Kadleček, 2004).

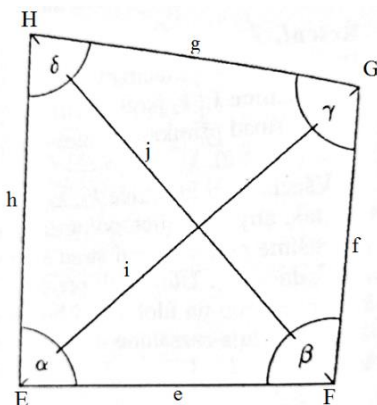
2.3 Čtyřúhelník

„*N-úhelník, kde počet vrcholů je roven 4, se nazývá čtyřúhelník*“ (Pomykalová, 1993). Čtyřúhelník má čtyři vrcholy, čtyři vnitřní úhly a dvě úhlopříčky (Vondra et al., 2019). Čtyřúhelníkem EFGH rozumíme sjednocení dvou trojúhelníků, trojúhelníku EFG a EGH, o jedné společné straně EG a žádném dalším společném bodu (Boček & Zhouf, 2009) (Obr. 2.3.1).

Rozlišujeme konvexní a nekonvexní čtyřúhelníky, kdy nekonvexní čtyřúhelník má jeden vnitřní úhel větší než 180° (Vondra et al., 2019) (Obr. 2.3.2). Jestliže bod G neleží v trojúhelníku EFH a bod E neleží v trojúhelníku GFH, pak mluvíme o konvexním čtyřúhelníku EFGH. Úsečky EF, FG, GH, HE jsou stranami čtyřúhelníku, jejich délky značíme $e = |EF|$, $f = |FG|$, $g = |GH|$, $h = |HE|$ (Boček & Zhouf, 2009).

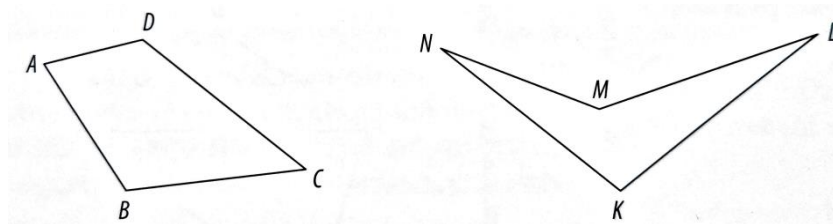
Pokud budeme čtyřúhelník popisovat, stranami sousedními označujeme dvě strany, které mají společný vrchol. Stranami protějšími označujeme dvě strany, které nemají společný vrchol (Ženatá, 2010). Vnitřními úhly čtyřúhelníku rozumíme úhly HEF, EFG, FGH, GHE, a budeme je označovat jako α , β , γ , δ . Jedna úhlopříčka rozdělí čtyřúhelník na dva trojúhelníky, které leží v opačných polorovinách (Ženatá, 2010). Jestliže čtyřúhelník je sjednocením dvou trojúhelníků a součet vnitřních úhlů trojúhelníku je π (180°), potom součet vnitřních úhlů čtyřúhelníku je 2π (360°) (Boček & Zhouf, 2009):

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2\pi = 360^\circ. \quad (2.3.1)$$



Obr. 2.3.1: Čtyřúhelník

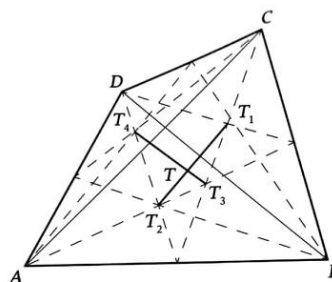
(zdroj: Boček & Zhouf, 2009, str. 108)



Obr. 2.3.2: a) Konvexní, b) Nekonvexní čtyřúhelník

(zdroj: Vondra et al., 2019, str. 60)

Důležitým bodem čtyřúhelníku je těžiště. Konstrukci těžiště lze provést pomocí úhlopříček. Jednou úhlopříčkou rozdělíme čtyřúhelník na dva trojúhelníky, v každém z nich sestrojíme těžiště. Těžiště spojíme úsečkou. Poté provedeme totéž s druhou úhlopříčkou. Těžiště čtyřúhelníku nalezneme v průsečíku úseček spojujících těžiště (Pomykalová, 2019) (Obr. 2.3.3).

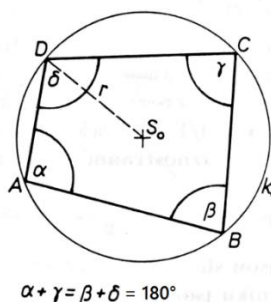


Obr. 2.3.3: Těžiště čtyřúhelníku

(zdroj: Pomykalová, 2019, str. 28)

Čtyřúhelníky můžeme rozdělit na tětivové a tečnové (Horák, 1966). Konvexní čtyřúhelník, kterému lze opsat kružnice, se nazývá tětivový (Horák, 1966). Každá strana tohoto čtyřúhelníku je tak tětivou kružnice. Pro tětivové čtyřúhelníky platí, že součet jejich protějších vnitřních úhlů je úhel přímý (Obr. 2.3.4):

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ. \tag{2.3.2}$$



Obr. 2.3.4: Součet vnitřních úhlů tětivového čtyřúhelníku

(zdroj: Pomykalová, 1993, str. 48)

Pro tětívové čtyřúhelníky platí Ptolemaiova věta (Kloud, 2020). Klaudios Ptolemaios (90-165 n. l.) patřil k nejznámějším starověkým astronomům. Ve třinácti knihách svého díla známého pod názvem *Almagest* upřesnil vzdálenosti Slunce a Měsíce od Země, na základě výpočtů předpověděl doby zatmění Slunce i Měsíce na mnoho let dopředu. Dokázal větu o tětívovém čtyřúhelníku, která byla později nazvána větou Ptolemaiovou (Calda, 2021): V tětívovém čtyřúhelníku je součet součinů velikostí protilehlých stran roven součinu velikostí jeho úhlopříček (Horák, 1966) (Obr. 2.3.1). Platí:

$$e \cdot g + h \cdot f = i \cdot j. \quad (2.3.3)$$

Platí i věta obrácená k větě Ptolemaiově: Jestliže v konvexním čtyřúhelníku je součet součinů velikostí protilehlých stran roven součinu velikostí jeho úhlopříček, je tento čtyřúhelník tětívový (Calda, 2021).

Pro obsah tětívového čtyřúhelníku se stranami a, b, c, d můžeme využít Brahmaguptův vzorec (Havířová, 2010):

$$S = \sqrt{(s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c) \cdot (s - d)}, \quad (2.3.4)$$

kde $s = (a + b + c + d)/2$.

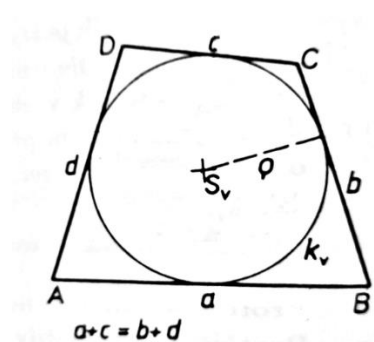
Čtyřúhelník, kterému lze vepsat kružnice, se nazývá tečnový. Strany tečnového čtyřúhelníku jsou tečnami vepsané kružnice. Pro tečnové čtyřúhelníky platí, že součty délek dvojic protějších stran jsou si rovny (Obr. 2.3.5):

$$a + c = b + d. \quad (2.3.5)$$

Pro výpočet obsahu tečnového čtyřúhelníku využíváme vzorec:

$$S = \rho \cdot s, \quad (2.3.6)$$

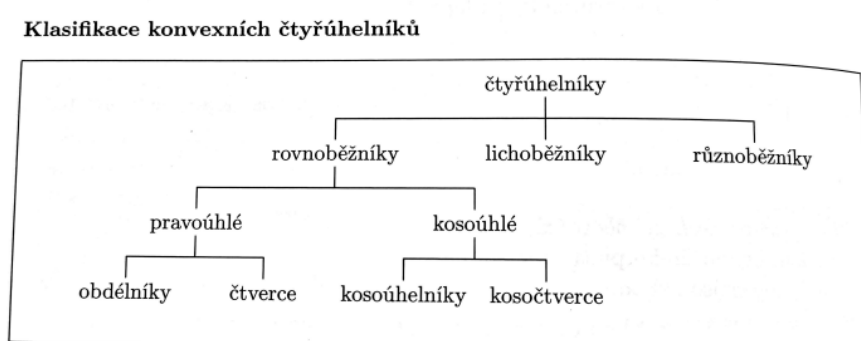
kde $s = (a + b + c + d)/2$ je polovina obvodu čtyřúhelníku, ρ je poloměr kružnice vepsané danému čtyřúhelníku (Molnár, 2001).



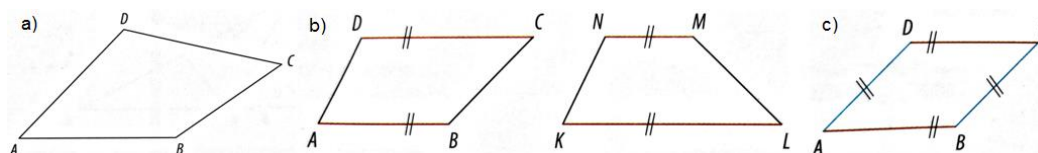
Obr. 2.3.5: Součet délek stran tětívového čtyřúhelníku
(zdroj: Pomykalová, 1993, str. 48)

Ne všem čtyřúhelníkům lze kružnice opsat či vepsat. Pokud však lze čtyřúhelníku zároveň vepsat i opsat kružnice, nazýváme jej dvojestředovým čtyřúhelníkem. Strany dvojestředového čtyřúhelníku jsou tětivami jedné kružnice a tečnami druhé. Příkladem dvojestředového čtyřúhelníku je čtverec, rovnoramenný lichoběžník nebo deltoid se dvěma pravými vnitřními úhly (Strnad, 1888).

Dále dělíme čtyřúhelníky dle rovnoběžnosti stran na rovnoběžníky, jejichž dvě dvojice protějších stran jsou rovnoběžné, lichoběžníky, jejichž jedna dvojice stran je rovnoběžná a zbývající dvě strany nejsou rovnoběžné, a na různoběžníky, konvexní čtyřúhelníky, jejichž žádné dvě strany nejsou rovnoběžné (Ženatá, 2010) (Obr. 2.3.6, Obr. 2.3.7).



Obr. 2.3.6: Klasifikace konvexních čtyřúhelníků
(zdroj: Jonášová, Rubeš & Vesecká, 2015, str. 30)



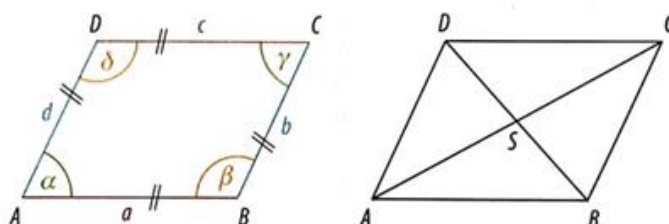
Obr. 2.3.7: a) Různoběžníky, b) Lichoběžníky, c) Rovnoběžníky
(zdroj: Vondra et al., 2019, str. 61)

2.3.1 Rovnoběžníky

Rovnoběžníky patří mezi čtyřúhelníky, jehož každé dvě protější strany jsou navzájem rovnoběžné (Odvárko & Robová, 2015). Mezi základní vlastnosti rovnoběžníků patří: protilehlé strany jsou shodné a rovnoběžné, tj. $a = b, c = d$, protilehlé vnitřní úhly jsou shodné, tj. $\alpha = \gamma, \beta = \delta$ (Odvárko & Robová, 2015). Součet velikostí vnitřních úhlů u sousedních vrcholů je roven 180° , tj. $\alpha + \beta = 180^\circ, \beta + \gamma = 180^\circ, \gamma + \delta = 180^\circ, \alpha + \delta = 180^\circ$ (Květoňová & Macálková, 2020) (Obr. 2.3.1.1). O rovnoběžnících víme, že vzdálenosti

rovnoběžek obsahujících protější strany se nazývají výšky rovnoběžníků. Úsečky s krajními body ve středech dvou protějších stran se nazývají střední příčky rovnoběžníků (Polák, 2015).

O úhlopříčkách v rovnoběžníku víme, že se navzájem půlí a průsečík úhlopříček je i středem souměrnosti rovnoběžníku. Dále o rovnoběžníku víme, že pokud jsou jeho „dva sousední úhly shodné, jsou shodné i všechny jeho úhly a jsou pravé“ (Pomykalová, 1993). Pokud má rovnoběžník shodné dvě sousední strany, jsou shodné všechny jeho strany (Pomykalová, 1993).



Obr. 2.3.1.1: Vlastnosti rovnoběžníků

(zdroj: Vondra et al., 2019, str. 62)

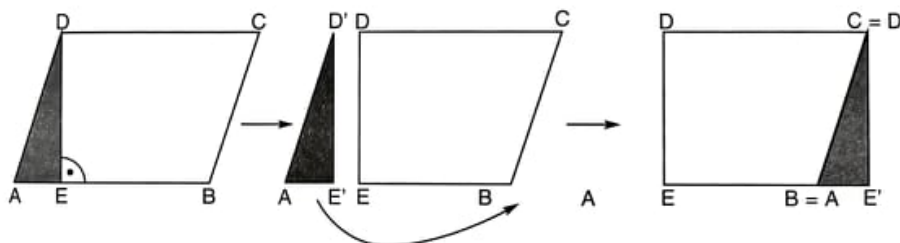
Pro výpočet obvodu rovnoběžníku sečteme délky všech jeho stran, využívá se vzorce (Horák & Jirásek, 2007):

$$o = 2 \cdot (a + b). \quad (2.3.1.1)$$

Obsah rovnoběžníku je roven obsahu obdélníku, vypočítáme ho jako součin velikosti strany a příslušné výšky (Ženatá, 2010) (Obr. 2.3.1.2):

$$S = a \cdot v_a = b \cdot v_b = a \cdot b \cdot \sin \alpha, \quad (2.3.1.2)$$

kde a, b jsou strany rovnoběžníku, v_a, v_b jsou výšky rovnoběžníku, úhel α je úhel mezi stranami a a b . U pravoúhlých rovnoběžníků jde o součin velikostí dvou sousedních stran (Ženatá, 2010).



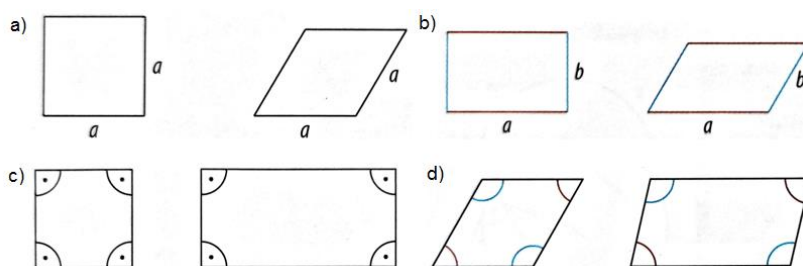
Obr. 2.3.1.2: Obsah rovnoběžníku

(zdroj: Ženatá, 2010, str. 409)

Rovnoběžníky, konvexní čtyřúhelníky, třídíme dle stran na rovnostranné (všechny strany shodné – čtverec, kosočtverec) a různostranné (sousední strany nejsou shodné –

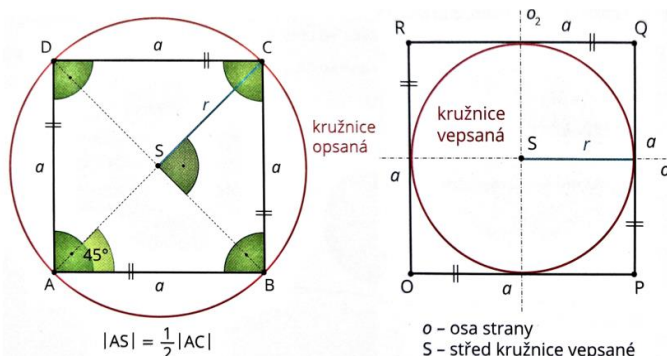
obdélník, kosodélník) (Obr. 2.3.1.3). Dle velikosti vnitřních úhlů dělíme rovnoběžníky na pravoúhlé (všechny vnitřní úhly pravé – obdélník, čtverec) a kosoúhlé („žádný vnitřní úhel není pravý“ – kosodélník, kosočtverec) (Odvárko & Robová, 2015).

U pravoúhlých rovnoběžníků jsou úhlopříčky shodné, zatímco úhlopříčky rovnostranných rovnoběžníků půlí jejich vnitřní úhly a jsou k sobě kolmé (Pomykalová, 1993). Pravoúhlému rovnoběžníku lze opsat kružnici, má dvě osy souměrnosti a každé dvě sousední strany jsou k sobě kolmé (Ženatá, 2010).



Obr. 2.3.1.3: a) Rovnostranné, b) Různostranné rovnoběžníky, c) Pravoúhlé, d) Kosoúhlé rovnoběžníky
(zdroj: Vondra et al., 2019, str. 62)

Nyní si postupně popíšeme jednotlivé rovnoběžníky. **Čtverec** řadíme mezi rovnostranné pravoúhlé rovnoběžníky, a tedy mezi pravidelné mnohoúhelníky (Perný, 2015). Ve čtverci jsou všechny jeho strany stejně dlouhé, protější strany jsou navzájem rovnoběžné, všechny vnitřní úhly jsou stejně velké, tj. $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 90^\circ$ (Molnár, 2001) (Obr. 2.3.1.4). Dvě úhlopříčky čtverce jsou také stejně dlouhé, navzájem se půlí, jsou na sebe kolmé, svírají úhel 45° a půlí vnitřní úhly ve čtverci. Úhlopříčka dělí čtverec na dvě shodné poloviny, obě úhlopříčky dělí čtverec na čtyři shodné trojúhelníky (Liška, Valenta & Král, 2018). Střední příčky čtverce jsou shodné, čtverec má čtyři osy souměrnosti (Ženatá, 2010) (Obr. 2.3.1.5).



Obr. 2.3.1.4: Vlastnosti čtverce
(zdroj: Liška, Valenta & Král, 2018, str. 45)

Čtverec je tečnový i tětíkový čtyřúhelník, lze mu opsat i vepsat kružnice (Vondra et al., 2019) (Obr. 2.3.1.5). Poloměr kružnice opsané ve čtverci je dán vztahem:

$$r = (a\sqrt{2})/2, \quad (2.3.1.3)$$

zatímco poloměr kružnice vepsané je roven (Molnár, 2001):

$$\rho = a/2. \quad (2.3.1.4)$$

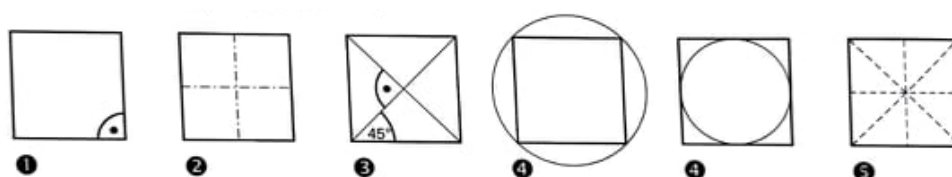
Obsah čtverce, tedy plocha čtverce, se vypočítá dle vzorce:

$$S = a^2, \quad (2.3.1.5)$$

zatímco obvod se vypočítá ze vztahu:

$$o = 4 \cdot a, \quad (2.3.1.6)$$

kde a je strana čtverce (Odvárko & Kadleček, 1996).



Obr. 2.3.1.5: Vlastnosti čtverce

(zdroj: Ženatý, 2010, str. 470)

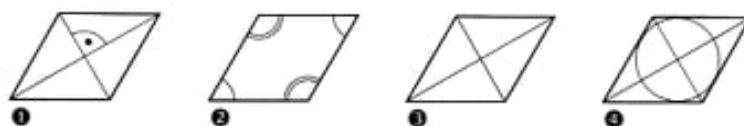
Rovnostranný kosoúhlý čtyřúhelník, v němž jsou všechny strany stejně dlouhé, ale žádný vnitřní úhel není pravý, se nazývá **kosočtverec** (Boček & Zhouf, 2009) (Obr. 2.3.1.7). V kosočtverci nalezneme dvě osy souměrnosti, jsou to přímky, které obsahují úhlopříčky (Ženatá, 2010). Kosočtverec má dvě stejně dlouhé výšky a lze mu vepsat kružnici. Jedná se tedy o tečnový čtyřúhelník (Polák, 2015). Střed kružnice vepsané leží v průsečíku úhlopříček. Úhlopříčky kosočtverce jsou na sebe kolmé, navzájem se půlí a půlí také vnitřní úhly (Obr. 2.3.1.6). V kosočtverci nalezneme jeden pár ostrých a jeden pár tupých úhlů, které leží naproti sobě. Protilehlé úhly mají stejnou velikost (Pomykalová, 1993). Obvod kosočtverce vypočítáme dle vztahu:

$$o = 4 \cdot a, \quad (2.3.1.7)$$

zatímco obsah dle vzorce:

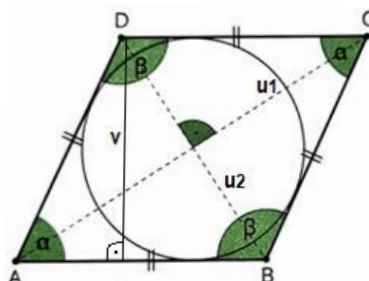
$$S = a \cdot v_a = \frac{1}{2} u_1 \cdot u_2, \quad (2.3.1.8)$$

kde a je délka strany a u_1, u_2 jsou úhlopříčky kosočtverce (Ženatá, 2010).



Obr. 2.3.1.6: Vlastnosti kosočverce

(zdroj: Ženatá, 2010, str. 471)



Obr. 2.3.1.7: Kosočtverec

(zdroj: Liška, Valenta & Král, 2018, str. 46)

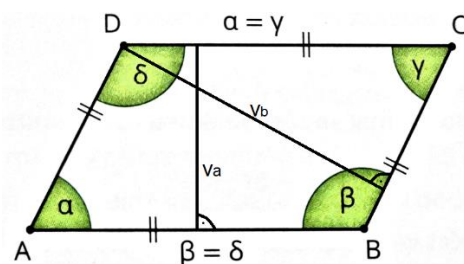
Mezi kosoúhlé různostranné rovnoběžníky řadíme **kosodélník**, jehož sousední strany nejsou shodné a nemá žádný vnitřní úhel pravý (Odvárko & Kadleček, 2004) (Obr. 2.3.1.8). Má nestejně dlouhé úhlopříčky, které se navzájem půlí, ale nejsou na sebe kolmé. Má dvě nestejně dlouhé výšky a jeho protilehlé strany jsou stejně dlouhé (Vondra et al., 2019) (Obr. 2.3.1.9). Kosodélník má jeden pár ostrých a jeden pár tupých úhlů, které leží naproti sobě. Protilehlé úhly v kosodélníku mají stejnou velikost (Liška, Valenta & Král, 2018). Součet velikostí úhlů při jedné straně je 180° (Květoňová & Macálková, 2020). Kosodélníku nelze opsat ani vepsat kružnice, není tedy ani tečnový ani tětíkový čtyřúhelník (Polák, 2015). Obvod kosodélníku se vypočítá ze vztahu 2.3.1.1 následovně:

$$o = 2 \cdot (a + b), \quad (2.3.1.9)$$

obsah se vypočítá dle vzorce:

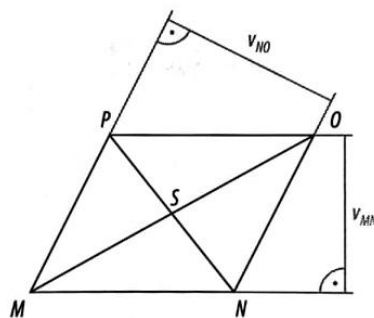
$$S = a \cdot v_a = b \cdot v_b, \quad (2.3.1.10)$$

kde v_a, v_b jsou výšky k dané straně, a, b jsou strany kosodélníku (Ženatá, 2010).



Obr. 2.3.1.8: Kosodélník

(zdroj: Liška, Valenta & Král, 2018, str. 45)



Obr. 2.3.1.9: Výšky a úhlopříčky kosodélníku
(zdroj: Vondra et al., 2019, str. 63)

Různostranným pravoúhlým rovnoběžníkem je **obdélník** se stejně dlouhými úhlopříčkami, které se navzájem půlí. Úhlopříčky na sebe ovšem kolmé nejsou a ani nepůlí vnitřní úhly obdélníku. Jedna úhlopříčka dělí obdélník na dvě shodné části (Vondra et al., 2019). Obdélník je pravoúhlým čtyřúhelníkem, součet jeho vnitřních úhlů je tedy 360° (Liška, Valenta & Král, 2018).

Obdélníku lze opsat kružnici, jedná se tedy o tětivotý čtyřúhelník (Obr. 2.3.1.10). Poloměr kružnice opsané se rovná polovině délky úhlopříčky obdélníku (Vondra et al., 2019). Součet vnitřních úhlů obdélníku je 360° (Liška, Valenta & Král, 2018).

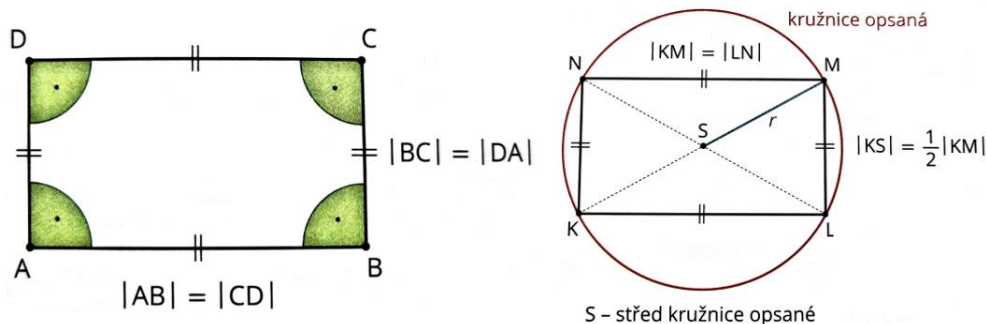
Obvod obdélníku je roven součtu všech stran nebo také součtu délek dvou sousedních stran vynásobených dvěma:

$$o = 2a + 2b = 2 \cdot (a + b). \quad (2.3.1.11)$$

Obsah vypočítáme vynásobením dvou sousedních stran obdélníku:

$$S = a \cdot b, \quad (2.3.1.12)$$

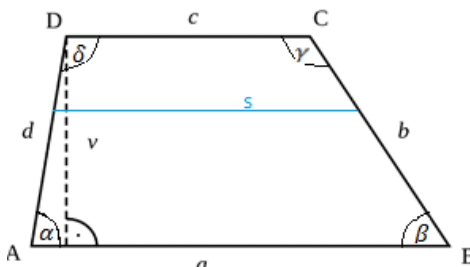
kde a, b jsou strany obdélníku (Ženatá, 2010).



Obr. 2.3.1.10: Obdélník
(zdroj: Liška, Valenta & Král, 2018, str. 45)

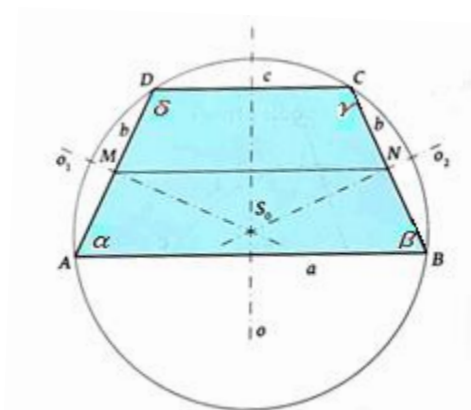
2.3.2 Lichoběžníky

Další významnou skupinou konvexních čtyřúhelníků jsou **lichoběžníky**, jejichž dvě rovnoběžné protější strany nazýváme základny a zbývající dvě různoběžné protější strany ramena. O lichoběžníku víme, že jeho základny nejsou shodné, naopak ramena shodná být mohou (Polák, 2015) (Obr. 2.3.2.1).



Obr. 2.3.2.1: Obecný lichoběžník
(zdroj: vlastní zpracování)

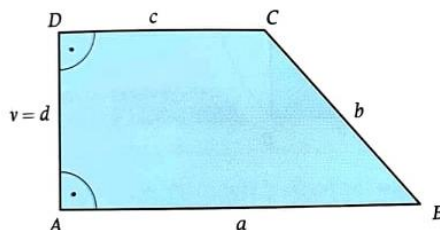
Právě lichoběžník, který má shodná ramena, se nazývá **rovnoramenný lichoběžník** (Kubešová & Cibulková, 2007) (Obr. 2.3.2.2). Rovnoramenný lichoběžník je tětivový čtyřúhelník se shodnými vnitřními úhly při základnách, tj. $\alpha = \beta \neq \gamma = \delta$ (Jonášová, Rubeš & Vesecká, 2015). Tomuto lichoběžníku lze opsat kružnici (Odvárko & Kadleček, 2004). Rovnoramenný lichoběžník má jednu osu souměrnosti, která je společná osa obou základen. Úhlopříčky rovnoramenného lichoběžníku jsou shodné, nemusí být však kolmé (Jonášová, Rubeš & Vesecká, 2015).



Obr. 2.3.2.2: Rovnoramenný lichoběžník
(zdroj: Pomykalová, 2019, str. 29)

Pokud se jedná o kolmost ramen, u lichoběžníku může být kolmé jen jedno rameno k základně. Toto rameno je tedy kolmé i k druhé základně a představuje zároveň výšku

lichoběžníku. Takovýto lichoběžník, který má rameno kolmé k základně, nazýváme **pravoúhlý lichoběžník** (Kubešová & Cibulková, 2007) (Obr. 2.3.2.3).



Obr. 2.3.2.3: Pravoúhlý lichoběžník
(zdroj: Pomykalová, 2019, str. 29)

Třetím, posledním typem lichoběžníků, jsou **obecné lichoběžníky**, jejichž délky ramen jsou různé (Ženatá, 2010). V lichoběžníku obecně platí, že „*součet vnitřních úhlů při každém rameni je úhel přímý*“, tzn. $\alpha + \delta = 180^\circ$, $\beta + \gamma = 180^\circ$ (Pomykalová, 2019). Úhly při téže základně jsou shodné, při delší základně jsou úhly ostré, při menší základně jsou úhly tupé (Ženatá, 2010).

V lichoběžníku nalezneme úsečku, která spojuje středy jeho ramen. Tato úsečka se nazývá střední příčka lichoběžníku. Platí, že střední příčka s „*je rovnoběžná s oběma základnami a její délka je rovna aritmetickému průměru délek obou základen*“ (Kubešová & Cibulková, 2007):

$$s = \frac{a+c}{2}. \quad (2.3.2.1)$$

Výškou lichoběžníku je vzdálenost přímek, na nichž leží základny. Obvod lichoběžníku vypočítáme jako součet velikostí všech stran (Ženatá, 2010):

$$o = a + b + c + d. \quad (2.3.2.2)$$

Obsah lichoběžníku vypočítáme sečteme-li obě základny, které vynásobíme výškou, a výsledek vydělíme dvěma:

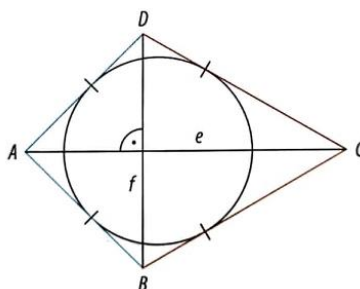
$$S = \frac{(a+c) \cdot v}{2}, \quad (2.3.2.3)$$

kde a, c jsou protější rovnoběžné strany (základny), v je vzdálenost stran a, c (výška) (Horák & Jirásek, 2007).

2.3.3 Různoběžníky

Různoběžníky jsou konvexní čtyřúhelníky, které nemají žádnou dvojici rovnoběžných stran (Kubešová & Cibulková, 2007).

Speciálním typem různoběžníků je **deltoid**, tečnový čtyřúhelník (lze mu vepsat kružnici), který připomíná svým tvarem létajícího draka. Dvě sousední strany deltoidu jsou shodné (Liška, Valenta & Král, 2018). Jeho úhlopříčky jsou na sebe kolmé, jsou různě dlouhé a půlí vnitřní úhel u vrcholu A (Obr. 2.3.3.1). Hlavní (delší) úhlopříčka je osou obou vnitřních úhlů u vrcholů, z nichž vychází, a půlí vedlejší (kratší) úhlopříčku. Vedlejší úhlopříčka dělí deltoid na dva rovnoramenné trojúhelníky (Ženatá, 2010).



Obr. 2.3.3.1: Deltoid

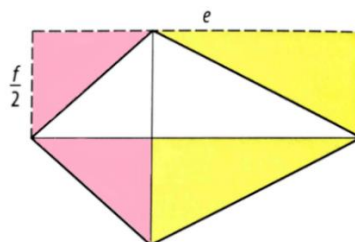
(zdroj: Vondra et al., 2019, str. 66)

Deltoid je osově souměrný podle hlavní (delší) úhlopříčky (Vondra et al., 2019). Lze mu vepsat kružnici, kdy středem kružnice vepsané je průsečík os vnitřních úhlů a střed kružnice leží na hlavní úhlopříčce (Ženatá, 2010). Deltoid je zároveň tětiový čtyřúhelník, právě když úhly u vrcholů vedlejší (kratší) úhlopříčky jsou pravé, potom je to čtyřúhelník dvojtředový (Odvárko & Robová, 2015).

Obsah tohoto různoběžníku je možné spočítat jako polovinu součinu délek úhlopříček (Vondra et al., 2019) (Obr. 2.3.3.2):

$$S = \frac{1}{2} e \cdot f, \quad (2.3.3.1)$$

kde e, f jsou úhlopříčky deltoidu.



Obr. 2.3.3.2: Obsah deltoidu

(zdroj: Vondra et al., 2019, str. 66)

3 Souhrnná cvičení z rovinné geometrie

Praktická část mé diplomové práce bude tvořena příklady z rovinné geometrie, které budou seskládány pro přehlednost do témat trojúhelníků, čtyřúhelníků a dalších pravidelných mnohoúhelníků. Početní úlohy budou obsahovat jak zadání, tak i řešení. Konstrukční úlohy budou obsahovat zadání, rozbor, postup konstrukce, konstrukci, diskuzi a důkaz. Konstrukce úloh i rozborů budou tvořeny v programu GeoGebra, neboť při konstrukci mnohoúhelníků lze tento program efektivně využít. Příklady bude možné využít v hodinách matematiky a budou inspirací pro učitele matematiky při hledání vhodných příkladů či budou přínosem pro žáky.

3.1 Souhrnná cvičení – trojúhelník

Příklad 3.1.1

Vypočítejte obsah S trojúhelníku ABC a jeho vnitřní úhly, známe-li délky jeho stran $a = 30$ cm, $b = 75$ cm, $c = 85$ cm.

Řešení:

Obsah trojúhelníku ABC vypočítáme pomocí Heronova vzorce ze vztahu 2.2.7:

$S = \sqrt{s \cdot (s - a) \cdot (s - b) \cdot (s - c)}$, kde $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ je poloviční obvod.

$$s = \frac{1}{2}(a + b + c) = \frac{(30 + 75 + 85)}{2} = 95$$

$$S = \sqrt{95 \cdot (95 - 30) \cdot (95 - 75) \cdot (95 - 85)} = 1111,3 \doteq 1111 \text{ cm}^2$$

Vnitřní úhly vypočítáme pomocí těchto vzorců: $\sin\alpha = \frac{2S}{bc}$, $\sin\beta = \frac{2S}{ac}$, $\sin\gamma = \frac{2S}{ab}$

$$\sin\alpha = \frac{2 \cdot 1111}{75 \cdot 85} = \frac{2222}{6375} = 0,34854 \Rightarrow \alpha = 20^\circ 24'$$

$$\sin\beta = \frac{2 \cdot 1111}{30 \cdot 85} = \frac{2222}{2550} = 0,87137 \Rightarrow \beta = 60^\circ 37'$$

$$\gamma = 180^\circ - 20^\circ 24' - 60^\circ 37' = 98^\circ 59'$$

Obsah trojúhelníku ABC je 1111 cm^2 . Velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC jsou

$$\alpha = 20^\circ 24', \beta = 60^\circ 37', \gamma = 98^\circ 59'.$$

Příklad 3.1.2

Vypočítejte obsah rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku, jehož obvod $o = 129$ m.

Řešení:

Vzhledem k tomu, že trojúhelník je rovnoramenný, platí: $a = b$

Použijeme Pythagorovu větu pro výpočet strany c :

$$c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}a$$

Pomocí vzorce obvodu trojúhelníku vyjádříme velikost strany a :

$$o = a + b + c = a + a + \sqrt{2}a = 2a + \sqrt{2}a$$

$$a = \frac{o}{2 + \sqrt{2}} = \frac{129}{2 + \sqrt{2}} = \frac{129}{3,4142} = 37,7833 \text{ m} \doteq 38 \text{ m}$$

Velikost strany a dosadíme do vzorce pro obsah:

$$S = \frac{a^2}{2} = \frac{38^2}{2} = 722 \text{ m}^2$$

Obsah rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku je 722 m^2 .

Příklad 3.1.3

Vypočítejte stranu rovnostranného trojúhelníku, je-li jeho obsah $S = 1829 \text{ cm}^2$.

Řešení:

Nejprve vypočítáme výšku trojúhelníku:

$$v = a \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Výšku dosadíme do vzorce obsahu trojúhelníku:

$$S = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$1829 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$7316 = a^2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{4223,89457} = a$$

$$a = 64,99 \doteq 65 \text{ cm}$$

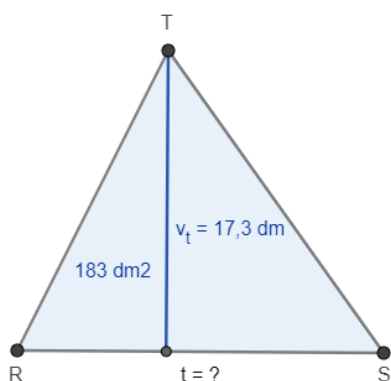
Délka strany rovnostranného trojúhelníku s obsahem 1829 cm^2 je 65 cm .

Příklad 3.1.4

Obsah trojúhelníku RST je 183 dm^2 a jeho výška je $17,3 \text{ dm}$. Vypočítejte stranu trojúhelníku příslušnou této výšce.

Řešení:

Stranu vypočítáme pomocí vzorce obsahu trojúhelníku:



$$S = \frac{t \cdot v_t}{2}$$

$$183 = \frac{t \cdot 17,3}{2}$$

$$183 \cdot 2 = t \cdot 17,3$$

$$366 : 17,3 = t$$

$$t = 21,156 \doteq 21,2 \text{ dm}$$

Strana příslušná výšce v_t trojúhelníku má délku $21,2 \text{ dm}$.

Obr. 3.1.1: Strana trojúhelníku – Příklad 3.1.4

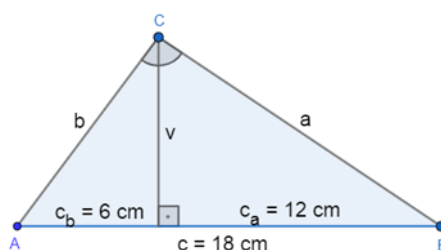
(zdroj: vlastní zpracování)

Příklad 3.1.5

Vypočítejte délky odvěsen a výšku pravouhlého trojúhelníku, jehož přepona má 18 cm a jeden její úsek má délku 6 cm .

Řešení:

Je-li jeden úsek přepony 6 cm a přepona má délku 18 cm , bude mít druhý úsek přepony délku 12 cm .



Obr. 3.1.2: Délka odvěsen a výška trojúhelníku – Příklad 3.1.5

(zdroj: vlastní zpracování)

Délku odvěsen můžeme vypočítat pomocí Eukleidovy věty o odvěsně:

$$a^2 = c \cdot c_a = 18 \cdot 12 = 216, \text{ odkud } a \doteq 14,7 \text{ cm}$$

$$b^2 = c \cdot c_b = 18 \cdot 6 = 108, \text{ odkud } b \doteq 10,4 \text{ cm}$$

Pomocí Eukleidovy věty o výšce vypočítáme z úseků přepony výšku trojúhelníku:

$v^2 = c_a \cdot c_b = 6 \cdot 12 = 72$, odkud $v \doteq 8,5 \text{ cm}$.

Pravoúhlý trojúhelník má odvěsny dlouhé 14,7 cm a 10,4 cm, s výškou délky 8,5 cm.

Příklad 3.1.6

V trojúhelníku jsou dány dva úhly o velikostech $65^\circ 44'$ a $92^\circ 24'$. Určete velikosti zbývajících vnitřních a vnějších úhlů trojúhelníku, jsou-li dané úhly a) první vnitřní a druhý vedlejší, b) oba vnitřní.

Řešení:

a) Dopočítáme vnější úhel z vnitřního:

$$180^\circ - 65^\circ 44' = 114^\circ 16', \text{ vnitřní úhel z vnějšího:}$$

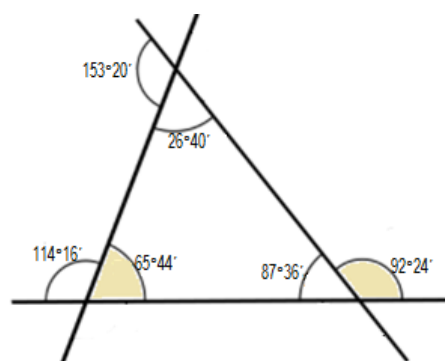
$$180^\circ - 92^\circ 24' = 87^\circ 36'$$

Máme dva vnitřní úhly, můžeme dopočítat třetí vnitřní úhel:

$$180^\circ - (65^\circ 44' + 87^\circ 36') = 180^\circ - 153^\circ 20' = 26^\circ 40'$$

Teď už můžeme dopočítat poslední vnější úhel:

$$180^\circ - 26^\circ 40' = 153^\circ 20'$$



Obr. 3.1.3: Úhly trojúhelníku – Příklad 3.1.6
(zdroj: vlastní zpracování)

b) Sečteme velikosti vnitřních úhlů a odečteme od 180° , abychom vypočítali třetí vnitřní úhel:

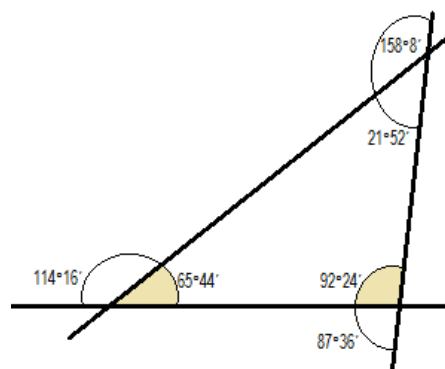
$$180^\circ - (65^\circ 44' + 92^\circ 24') = 179^\circ 60' - 158^\circ 8' = 21^\circ 52'$$

Vnější úhly vypočítáme tak, že vnitřní úhel odečteme od 180° :

$$180^\circ - 65^\circ 44' = 114^\circ 16'$$

$$180^\circ - 21^\circ 52' = 158^\circ 8'$$

$$180^\circ - 92^\circ 24' = 87^\circ 36'$$



Obr. 3.1.4: Úhly trojúhelníku – Příklad 3.1.6
(zdroj: vlastní zpracování)

Závěr: a) $114^\circ 16'$, $87^\circ 36'$, $26^\circ 40'$, $153^\circ 20'$, b) $114^\circ 16'$, $87^\circ 36'$, $21^\circ 52'$, $158^\circ 8'$

Příklad 3.1.7

Jsou dány velikosti dvou vnitřních úhlů trojúhelníku: $\beta = 73^\circ, \gamma = 38^\circ$. Vypočítejte velikost vnitřního úhlu α i vnějšího úhlu α' při třetím vrcholu trojúhelníku.

Řešení:

Velikost vnějšího úhlu α' se rovná součtu velikostí vnitřních úhlů β, γ :

$$\alpha' = 73^\circ + 38^\circ = 111^\circ$$

Úhel α je vedlejším úhlem k úhlu α' :

$$\alpha = 180^\circ - 111^\circ = 69^\circ$$

Velikost vnějšího úhlu α' je 111° a velikost vnitřního úhlu α je 69° .

Příklad 3.1.8

Z vypsanych trojúhelníků vyberte ty, které existují:

- Trojúhelník s vnitřním úhlem 177° .
- Trojúhelník s vnitřními úhly $90^\circ, 90^\circ, 70^\circ$.
- Trojúhelník se stranami 7 cm, 3 cm, 4 cm.
- Trojúhelník se stranou kratší než 10 mm.

Řešení: Z daných trojúhelníků existují trojúhelníky a), d).

Příklad 3.1.9

Zdůvodněte, proč nemůže existovat trojúhelník ABC, u kterého platí:

- $a = 14 \text{ cm}, b = 14 \text{ cm}, \alpha = 60^\circ, \gamma = 70^\circ$
- $a = 2 \text{ cm}, b = 4 \text{ cm}, c = 6 \text{ cm}$
- $a = 10 \text{ cm}, b = 14 \text{ cm}, \alpha = 60^\circ, \beta = 60^\circ$

Řešení:

- Je-li $a = b, \alpha \neq \gamma$, jde o rovnoramenný trojúhelník, kde by měl být úhel $\alpha = \beta$. Tento součet vnitřních úhlů by však překročil 180° , proto trojúhelník nemůže existovat.
- Součet dvou stran není větší než strana třetí, tj. $2+4$ není větší než 6. Není splněna trojúhelníková nerovnost.
- Je-li $\alpha = \beta = 60^\circ$, jedná se o rovnoramenný trojúhelník, kde by měla být strana $a = b$. V tomto případě $a \neq b$, proto trojúhelník nemůže existovat.

Příklad 3.1.10

Určete, zda je možné sestrojít dané trojúhelníky:

- a) OPQ: $o = 18$ cm, $p = 4$ cm, $q = 22$ cm
- b) RST: $r = 43$ cm, $s = 67$ cm, $t = 29$ cm
- c) UVW: $u = 9$ cm, $v = 4$ cm, $w = 7$ cm

Řešení:

- | | | | | |
|----|----------------|----------------|----------------|------------------------------|
| a) | $o + p > q$ | $o + q > p$ | $p + q > o$ | |
| | $18 + 4 = 22$ | $18 + 22 > 4$ | $4 + 22 > 18$ | Trojúhelník nelze sestrojít. |
| b) | $r + s > t$ | $r + t > s$ | $s + t > r$ | |
| | $43 + 67 > 29$ | $43 + 29 > 67$ | $67 + 29 > 43$ | Trojúhelník lze sestrojít. |
| c) | $u + v > w$ | $u + w > v$ | $w + v > u$ | |
| | $9 + 4 > 7$ | $9 + 7 > 4$ | $7 + 4 > 9$ | Trojúhelník lze sestrojít. |

Příklad 3.1.11

Ve městě Alfonzově mají městskou radu, která podala několik návrhů na stavby. Vyberte návrhy, které nelze realizovat. Svůj výběr odůvodněte.

- a) Výsadba zeleninového záhonu ve tvaru tupoúhlého rovnoramenného trojúhelníku.
- b) Kolotoč ve tvaru tupoúhlého trojúhelníku, kde těžiště leží mimo trojúhelník.
- c) Dětské hřiště ve tvaru trojúhelníku s délkami stran 60 m, 10 m, 35 m.
- d) Výsadba tří altánků, kde by každý z nich byl od ostatních dvou vzdálen minimálně 10 m.

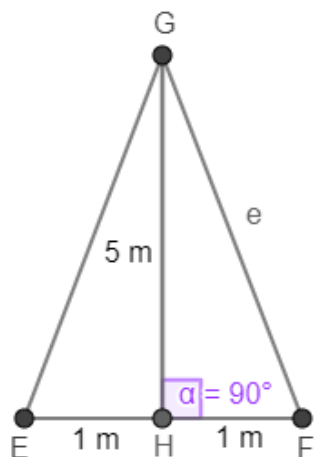
Řešení: Návrh b) nelze realizovat, protože těžiště leží uvnitř trojúhelníku. Návrh c) nelze realizovat, protože nespĺňuje trojúhelníkovou nerovnost.

Příklad 3.1.12

Rozložené štafle jsou vysoké 5 m. Vzdálenost dolních konců ramen štaflí na zemi je 2 m. Vypočítejte délku ramen štaflí.

Řešení:

Štafle tvoří rovnoramenný trojúhelník. Rovnoramenný trojúhelník rozdělíme výškou na dva



stejně pravoúhlé trojúhelníky. Z nákresu vidíme, že musíme vypočítat přeponu pravoúhlého trojúhelníku, abychom dostali délku ramen štaflí.

Pro výpočet využijeme Pythagorovu větu:

$$e^2 = 5^2 + 1^2$$

$$e = \sqrt{5^2 + 1^2}$$

$$e = \sqrt{25 + 1} = \sqrt{26} = 5,09 \doteq 5 \text{ m}$$

Štafle mají 5 m dlouhá ramena.

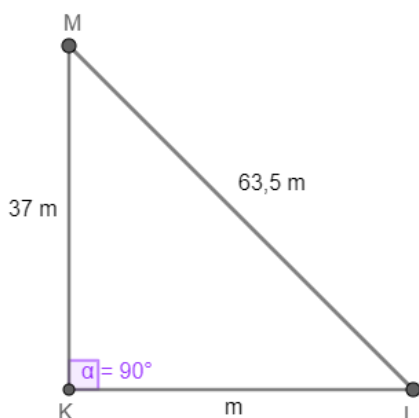
Obr. 3.1.5: Délka ramen štaflí – Příklad 3.1.12

(zdroj: vlastní zpracování)

Příklad 3.1.13

Třiceti sedmi metrový stožár je stabilizovaný třemi kotvícími lany o délce 63,5 m, která vedou z vrcholu stožáru. Jak daleko od paty stožáru jsou umístěna kotvící lana? Kolik metrů lana je potřeba k upevnění jednoho stožáru, jestliže ke každému je potřeba přidat 0,5 m rezervy na upnutí?

Řešení: Pro výpočet vzdálenosti lan od paty stožáru využijeme Pythagorovu větu:



$$k^2 = l^2 + m^2$$

$$63,5^2 = 37^2 + m^2$$

$$m^2 = 63,5^2 - 37^2$$

$$m = \sqrt{4032,25 - 1369} = \sqrt{2663,25} = 51,6 \text{ m}$$

Celková potřeba lan:

$$3 \cdot (51,6 + 0,5) = 3 \cdot 52,1 = 156,3 \text{ m}$$

Kotvící lana jsou umístěna 51,6 m od paty stožáru.

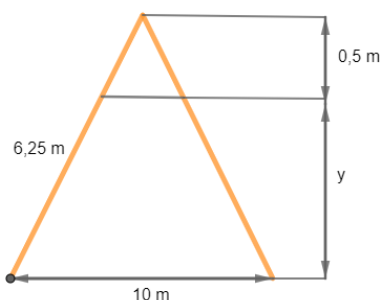
Na upevnění jednoho stožáru bude potřeba 156,3 m lana.

Obr. 3.1.6: Pythagorova věta – Příklad 3.1.13

(zdroj: vlastní zpracování)

Příklad 3.1.14

Brázdovi rekonstruují a upravují podkroví. Pomocí rozměrů na obrázku určete v metrech výšku stropu místnosti.



Obr. 3.1.7: Výška stropu místnosti – Příklad 3.1.14

(zdroj: vlastní zpracování)

Řešení:

Pro výpočet využijeme Pythagorovu větu:

$$(y + 0,5)^2 + 5^2 = 6,25^2$$

$$(y + 0,5)^2 = 39,0625 - 25$$

$$y + 0,5 = \sqrt{14,0625}$$

$$y + 0,5 = 3,75$$

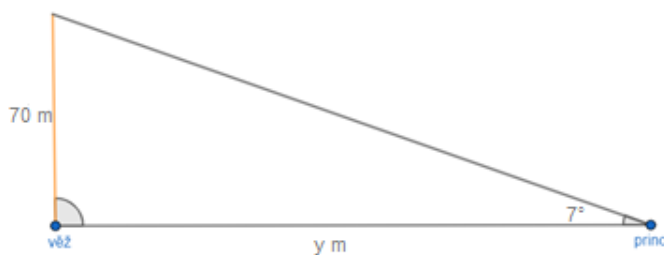
$$y = 3,25 \text{ m}$$

Strop v podkroví má výšku 3,25 m.

Příklad 3.1.15

Odvážný princ se vydal zachránit princeznu z věže. Věž, ve které je princezna uvězněna, je vysoká 70 m, a cesta k ní vede přes vodorovnou planinu. Na okraji planiny si princ lehl a odpočíval. Zvedl zrak o 7° a viděl vrchol věže. Určete, jak daleko od věže se princ nacházel.

Řešení: Pro výpočet využijeme goniometrické funkce tangens pravoúhlého trojúhelníku:



$$\operatorname{tg} 7^\circ = \frac{70}{y}$$

$$y = \frac{70}{\operatorname{tg} 7^\circ} \doteq 570 \text{ m}$$

Princ se nyní nachází přibližně 570 m od věže.

Obr. 3.1.8: Goniometrické funkce – Příklad 3.1.15

(zdroj: vlastní zpracování)

Příklad 3.1.16

Vypočtete ve stupních sklon sjezdovky, která má délku 900 m a výškový rozdíl 276 m.

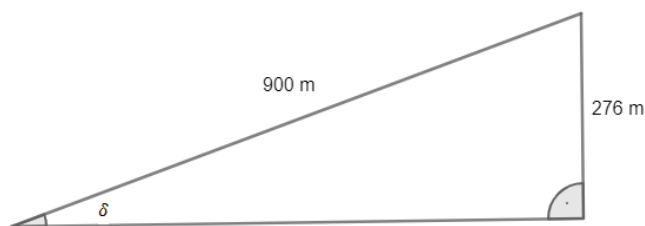
Řešení: Pro výpočet využijeme goniometrické funkce sinus pravoúhlého trojúhelníku:

$$\sin \delta = \frac{276}{900}$$

$$\sin \delta \doteq 0,306$$

$$\delta = 17,81^\circ = 17^\circ 48'$$

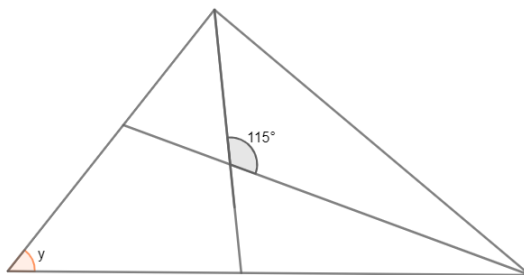
Sjezdovka má sklon přibližně $17^\circ 48'$.



Obr. 3.1.9: Goniometrické funkce – Příklad 3.1.16
(zdroj: vlastní zpracování)

Příklad 3.1.17

Určete velikost vyznačeného úhlu trojúhelníku, jestliže osy dvou úhlů svírají úhel 115° .



Obr. 3.1.10: Velikost úhlu trojúhelníku – Příklad 3.1.17
(zdroj: vlastní zpracování)

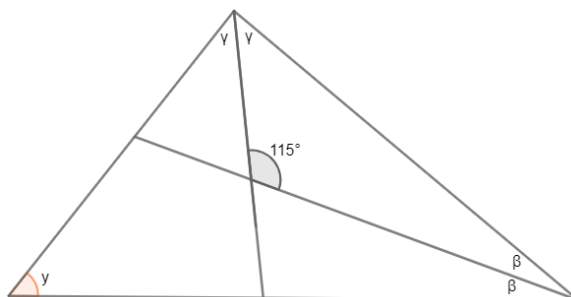
Řešení:

Pro vyznačený úhel platí:

$$\beta + \gamma + 115^\circ = 180^\circ \rightarrow \beta + \gamma = 65^\circ$$

$$y + 2\beta + 2\gamma = 180^\circ \rightarrow y = 180^\circ - 2(\beta + \gamma) = 180^\circ - 2 \cdot 65^\circ = 50^\circ$$

Vyznačený úhel má velikost 50° .



Obr. 3.1.11: Velikost úhlu trojúhelníku – Příklad 3.1.17
(zdroj: vlastní zpracování)

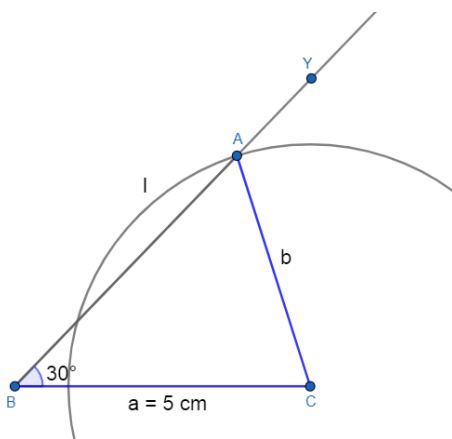
Příklad 3.1.18

Sestrojte trojúhelník ABC, kde strana $a = 5$ cm, úhel $\beta = 30^\circ$ a strana b :

- a) $b = 6$ cm
- b) $b = 2,5$ cm
- c) $b = 2$ cm

Řešení:

Rozbor:



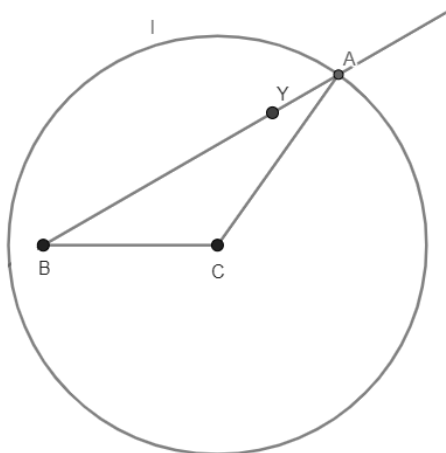
Obr. 3.1.12: Rozbor konstrukce trojúhelníku – Příklad 3.1.18
(zdroj: vlastní zpracování)

Postup konstrukce:

1. $BC; |BC| = 5\text{ cm}$
2. $\sphericalangle CBY; |\sphericalangle CBY| = 30^\circ$
3. $l; l(C; b)$
4. $A; A \in BY \cap l$
5. $\triangle ABC$

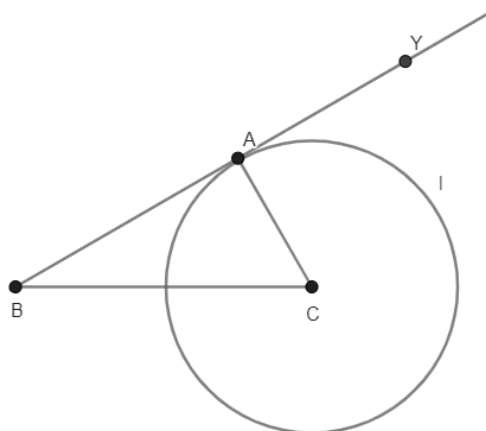
Konstrukce:

a)



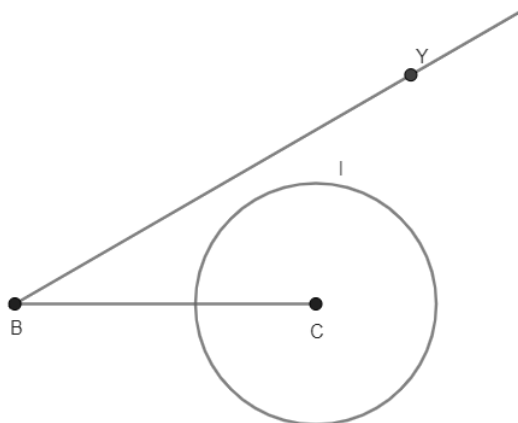
Obr. 3.1.13: Konstrukce trojúhelníku
– Příklad 3.1.18
(zdroj: vlastní zpracování)

b)



Obr. 3.1.14: Konstrukce trojúhelníku
– Příklad 3.1.18
(zdroj: vlastní zpracování)

c)



Obr. 3.1.15: Konstrukce trojúhelníku – Příklad 3.1.18
(zdroj: vlastní zpracování)

Závěr:

Uvažujeme řešení v jedné polorovině s hraniční přímkou BC.

a) Se stranou $b = 6$ cm protne kružnice l polopřímku BY v jednom bodě. Úloha má jedno řešení.

b) Se stranou $b = 2,5$ cm je $\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{1}{2}$, a také $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, proto je trojúhelník pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu A a přímka BY je tečnou kružnice l. Úloha má jedno řešení.

c) Se stranou $b = 2$ cm úloha nemá řešení, protože kružnice l nemá s polopřímkou BY žádný společný bod. Úloha nemá žádné řešení.

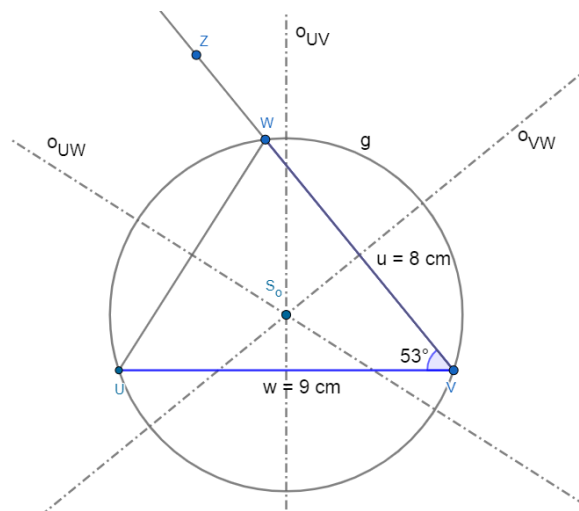
Důkaz plyne z vlastností trojúhelníku.

Příklad 3.1.19

Trojúhelník UVW má základnu UV dlouhou 9 cm. Úhel UVW má velikost 53° a úsečka WV má délku 8 cm. Sestrojte trojúhelník UVW a kružnici opsanou tomuto trojúhelníku.

Řešení:

Rozbor:



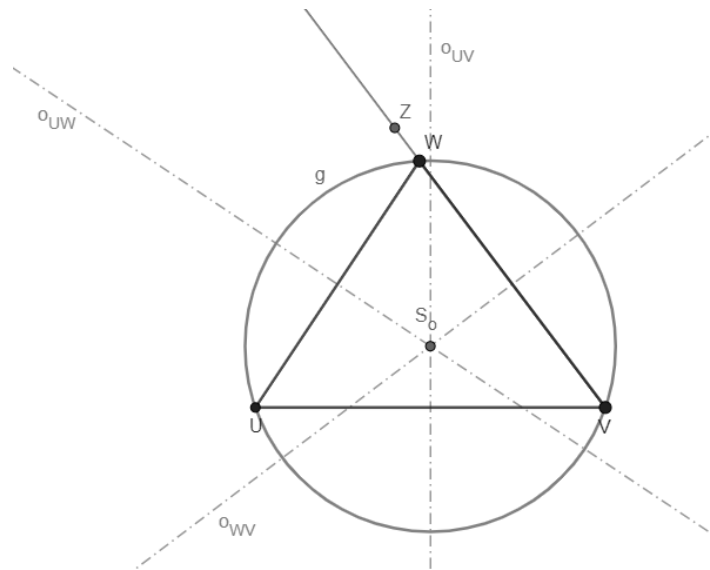
Obr. 3.1.16: Rozbor konstrukce trojúhelníku – Příklad 3.1.19

(zdroj: vlastní zpracování)

Postup konstrukce:

1. $UV; |UV| = 9\text{cm}$
2. $\sphericalangle UVZ; |\sphericalangle UVZ| = 53^\circ$
3. $W; W \in \rightarrow VZ \wedge |VW| = 8\text{cm}$
4. $\triangle UVW$
5. $o_{UV}, o_{WV}, o_{UW}; o_{UV}, o_{WV}, o_{UW} = \text{osy stran}$
6. $S_0; S_0 \in o_{UV} \cap o_{WV} \cap o_{UW}$
7. $g; g(S_0; |S_0V|)$

Konstrukce:



Obr. 3.1.17: Konstrukce trojúhelníku – Příklad 3.1.19
(zdroj: vlastní zpracování)

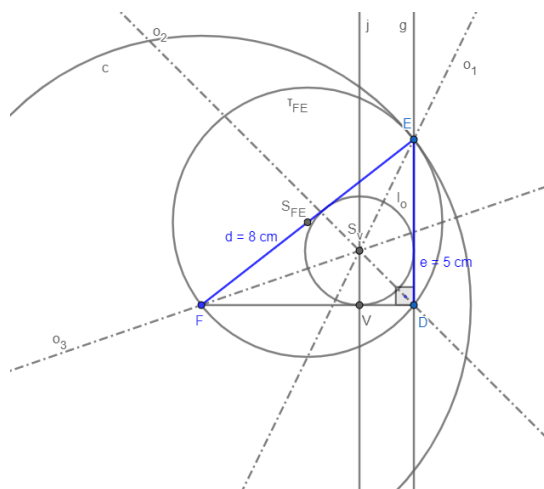
Úloha 3.1.19 má při tomto zadání jedno řešení v dané polorovině.
Důkaz plyne z vlastností trojúhelníku a vlastností kružnice opsané.

Příklad 3.1.20

Mějme pravoúhlý trojúhelník DEF s přeponou $|EF| = 8 \text{ cm}$ a odvěsnou $|FD| = 50 \text{ mm}$.
Sestrojte k tomuto trojúhelníku kružnici vepsanou i opsanou.

Řešení:

Rozbor:

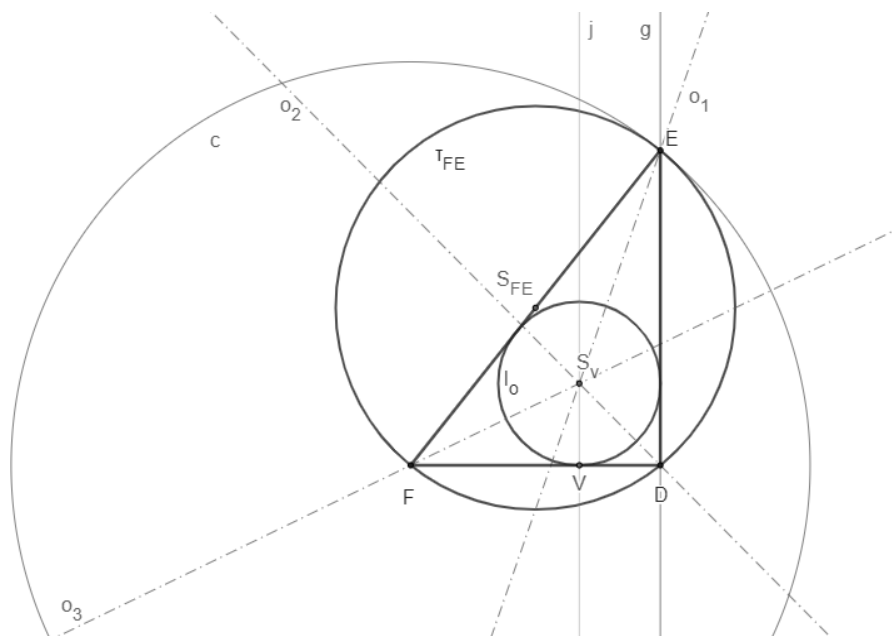


Obr. 3.1.18: Rozbor konstrukce trojúhelníku – Příklad 3.1.20
(zdroj: vlastní zpracování)

Postup konstrukce:

1. $FD; |FD| = 5\text{cm}$
2. $c; c(F; 8\text{cm})$
3. $g; g \perp FD \wedge D \in g$
4. $E; E \in g \cap c$
5. $\triangle DEF$
6. $S_{FE}; S_{FE} \in FE \wedge |FS_{FE}| = |S_{FE}E| = 4\text{cm}$
7. $\tau_{FE}; \tau_{FE}(S_{FE}; |S_{FE}E|)$
8. $o_1; o_1 = \text{osa úhlu } FED$
9. $o_2; o_2 = \text{osa úhlu } FDE$
10. $o_3; o_3 = \text{osa úhlu } DFE$
11. $S_v; S_v \in o_1 \cap o_2 \cap o_3$
12. $j; j \perp FD \wedge S_v \in j$
13. $V; V \in j \cap FD$
14. $l_o; l_o(S_v; |S_vV|)$

Konstrukce:



Obr. 3.1.19: Konstrukce trojúhelníku – Příklad 3.1.20

(zdroj: vlastní zpracování)

Při daném zadání má úloha 3.1.20 jedno řešení v dané polorovině.

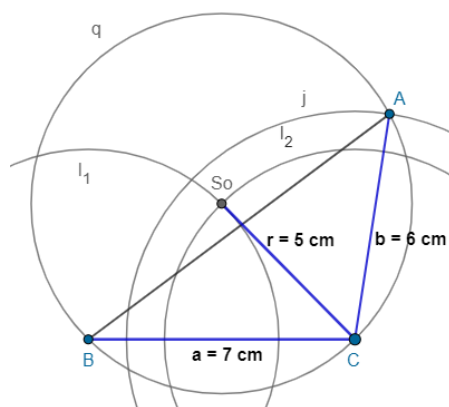
Důkaz plyne z vlastností trojúhelníku a vlastností kružnice opsané a vepsané trojúhelníku.

Příklad 3.1.21

Sestrojte trojúhelník ABC. Je dána strana $a = 7\text{ cm}$, $b = 6\text{ cm}$ a poloměr kružnice opsané $r = 5\text{ cm}$.

Řešení:

Rozbor:

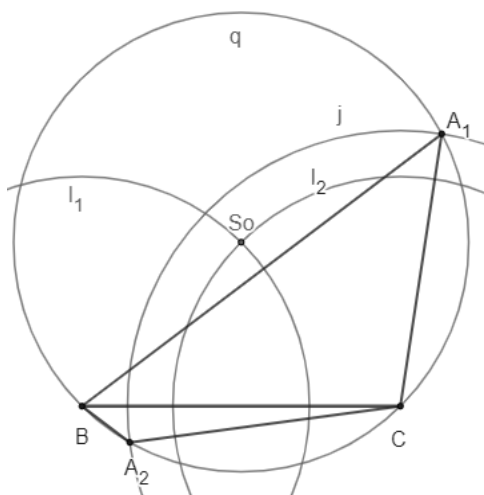


Obr. 3.1.20: Rozbor konstrukce trojúhelníku – Příklad 3.1.21
(zdroj: vlastní zpracování)

Postup konstrukce:

1. $BC; |BC| = 7\text{ cm}$
2. $l_1; l_1(B; r = 5\text{ cm})$
3. $l_2; l_2(C; r = 5\text{ cm})$
4. $S_0; S_0 \in l_1 \cap l_2$
5. $q; q(S_0; r = 5\text{ cm})$
6. $j; j(C; 6\text{ cm})$
7. $A_1, A_2; A_1 \in q \cap j \wedge A_2 \in q \cap j$
8. $\Delta A_1BC, \Delta A_2BC$

Konstrukce:



Obr. 3.1.21: Konstrukce trojúhelníku – Příklad 3.1.21
(zdroj: vlastní zpracování)

Kružnici q protne kružnice j ve dvou bodech A_1 a A_2 . Existují dva neshodné trojúhelníky ΔA_1BC a ΔA_2BC splňující zadání úlohy. Úloha má dvě řešení.

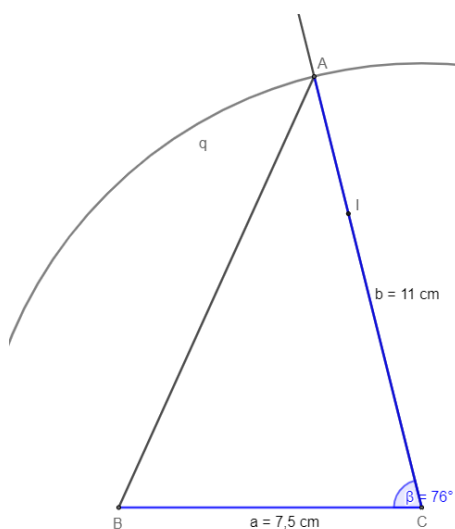
Důkaz plyne z vlastností trojúhelníku a z vlastností kružnice opsané.

Příklad 3.1.22

Sestrojte trojúhelník ABC , jestliže znáte velikost strany $a = 7,5$ cm, $b = 11$ cm a velikost úhlu $\gamma = 76^\circ$. Vypočítejte obvod a obsah tohoto trojúhelníku.

Řešení:

Rozbor:



Obr. 3.1.22: Rozbor konstrukce trojúhelníku – Příklad 3.1.22
(zdroj: vlastní zpracování)

Postup konstrukce:

1. $BC; |BC| = 7,5 \text{ cm}$
2. $\sphericalangle BCI; |\sphericalangle BCI| = 76^\circ$
3. $q; q(C; 11 \text{ cm})$
4. $A; A \in q \cap CI$
5. $\triangle ABC$

Obvod trojúhelníku:

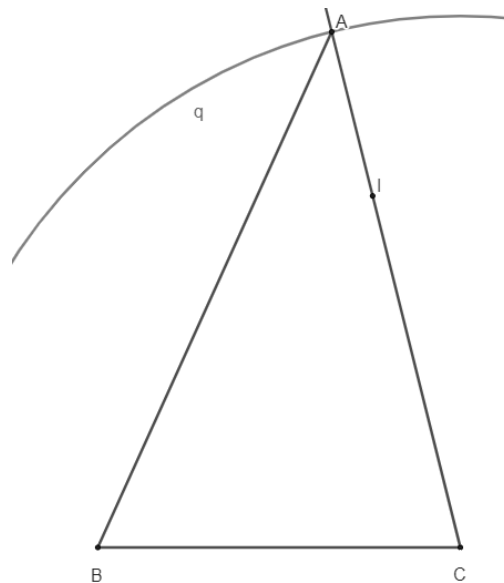
$$o = a + b + c = 7,5 + 11 + 11,7 = 30,2 \text{ cm}$$

Obsah trojúhelníku:

$$S = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{7,5 \cdot 10,7}{2} = 40,1 \text{ cm}^2$$

Velikost výšky zjistíme měřením v konstrukci trojúhelníku.

Konstrukce:



Obr. 3.1.23: Konstrukce trojúhelníku – Příklad 3.1.22

(zdroj: vlastní zpracování)

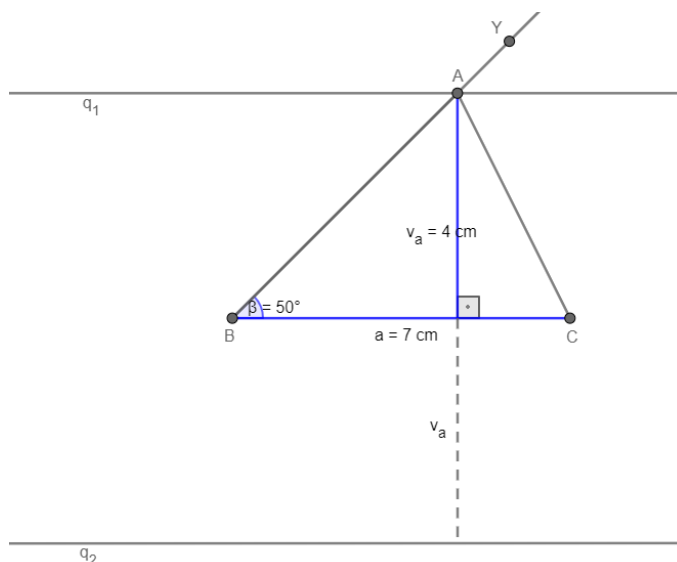
Trojúhelník je určen podle věty sus. Kružnice q protne polopřímku CI v jednom bodě. Úloha 3.1.22 má pouze jedno řešení pro $\gamma < 180^\circ$. Důkaz plyne z vlastností trojúhelníku a konstrukce podle věty sus. Obvod trojúhelníku je 30,2 cm a obsah je 40,1 cm².

Příklad 3.1.23

Je dána úsečka BC , $|BC| = a = 7\text{ cm}$. Sestrojte trojúhelníky ABC , je-li dána výška $v_a = 4\text{ cm}$ a úhel $\beta = 50^\circ$.

Řešení:

Rozbor:



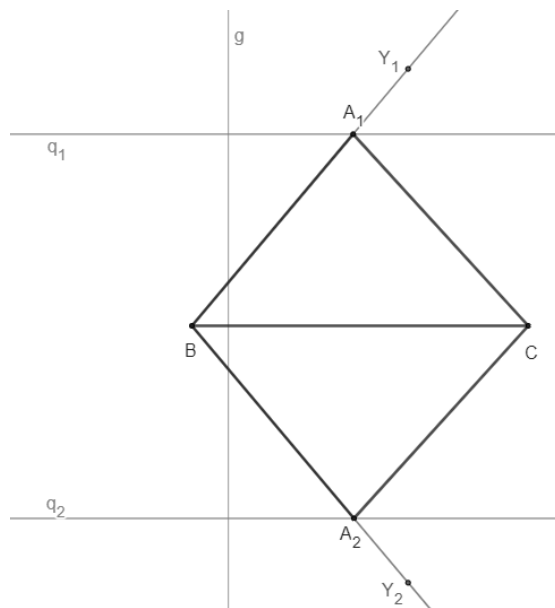
Obr. 3.1.24: Rozbor konstrukce trojúhelníku – Příklad 3.1.23

(zdroj: vlastní zpracování)

Postup konstrukce:

1. $BC; |BC| = 7\text{ cm}$
2. $g; g \perp BC$
3. $q_1; q_1 \parallel BC \wedge q_1 \perp g \wedge |q_1BC| = v_a = 4\text{ cm}$
4. $q_2; q_2 \parallel q_1 \parallel BC \wedge q_2 \perp g \wedge |q_2BC| = v_a = 4\text{ cm}$
5. $\sphericalangle CBY_1; |\sphericalangle CBY_1| = 50^\circ$
6. $\sphericalangle CBY_2; |\sphericalangle CBY_2| = 50^\circ$
7. $A_1; A_1 \in q_1 \cap \rightarrow BY_1$
8. $A_2; A_2 \in q_2 \cap \rightarrow BY_2$
9. $\Delta A_1BC, \Delta A_2BC$

Konstrukce:



Obr. 3.1.25: Konstrukce trojúhelníku – Příklad 3.1.23
(zdroj: vlastní zpracování)

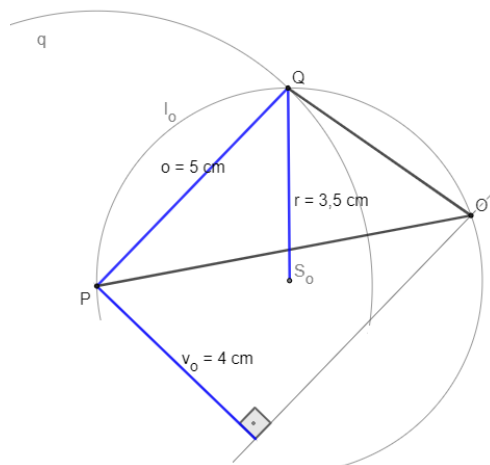
Bod A_1 je společným bodem kružnice q_1 a polopřímky BY_1 . Bod A_2 je společným bodem kružnice q_2 a polopřímky BY_2 . Body A_1, A_2 jsou hledanými vrcholy. Trojúhelníky A_1BC, A_2BC splňují zadání úlohy. Úloha 3.1.23 má pro libovolné hodnoty a a v_a a pro $\beta < 180^\circ$ vždy dvě řešení. Důkaz plyne z vlastností trojúhelníku.

Příklad 3.1.24

Sestrojte trojúhelník OPQ , je-li dána velikost strany $o = 5$ cm, výšky $v_o = 4$ cm a poloměr kružnice opsané trojúhelníku $r = 3,5$ cm.

Řešení:

Rozbor:

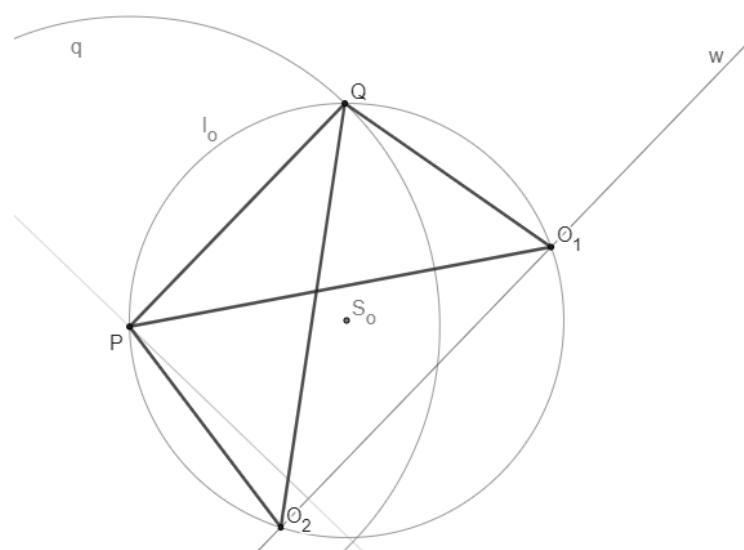


Obr. 3.1.26: Rozbor konstrukce trojúhelníku – Příklad 3.1.24
(zdroj: vlastní zpracování)

Postup konstrukce:

1. $l_o; l_o(S_o; 3,5\text{ cm})$
2. $P; P \in l_o$
3. $q; q(P; 5\text{ cm})$
4. $Q; Q \in q \cap l_o$
5. $PQ; |PQ| = 5\text{ cm} \wedge P \in l_o \wedge Q \in l_o$
6. $w; w \parallel PQ \wedge |wPQ| = 4\text{ cm}$
7. $O_1, O_2; O_1 \in l_o \cap w \wedge O_2 \in l_o \cap w$
8. $\Delta O_1PQ; \Delta O_2PQ$

Konstrukce:



Obr. 3.1.27: Konstrukce trojúhelníku – Příklad 3.1.24
(zdroj: vlastní zpracování)

Kružnice l_o protne přímku w ve dvou bodech O_1 a O_2 . Trojúhelníky ΔO_1PQ a ΔO_2PQ splňují podmínky úlohy. Úloha 3.1.24 má v dané polorovině dvě řešení.

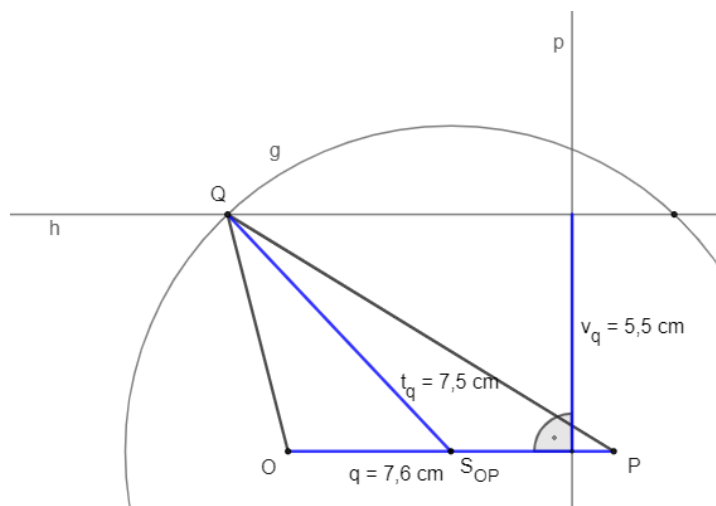
Důkaz plyne z vlastností trojúhelníku a z vlastností kružnice opsané.

Příklad 3.1.25

Sestrojte trojúhelník OPQ , znáte-li délku strany $q = 7,6$ cm, výšky $v_q = 5,5$ cm a délku těžnice $t_q = 7,5$ cm.

Řešení:

Rozbor:

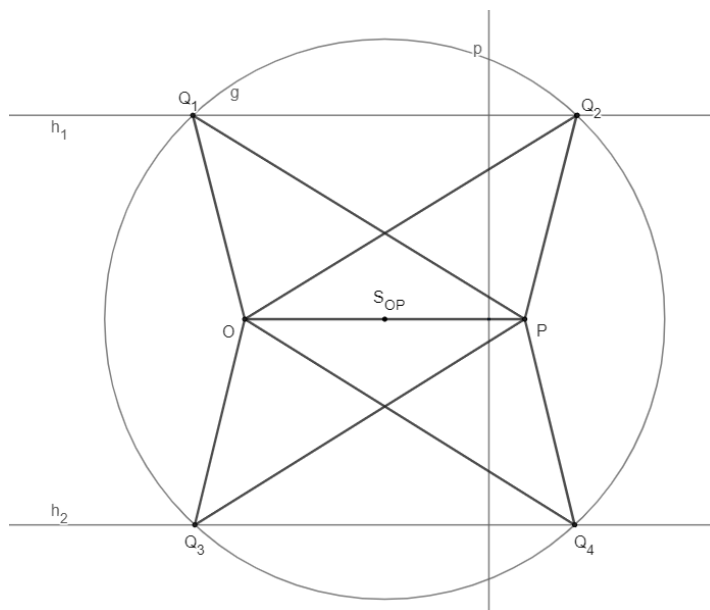


Obr. 3.1.28: Rozbor konstrukce trojúhelníku – Příklad 3.1.25
(zdroj: vlastní zpracování)

Postup konstrukce:

1. OP ; $|OP| = 7,6\text{cm}$
2. S_{OP} ; $S_{OP} \in OP \wedge |OS_{OP}| = |S_{OP}P| = 3,8\text{cm}$
3. g ; $g(S_{OP}; 7,5\text{cm})$
4. p ; $p \perp OP$
5. h_1 ; $h_1 \perp p \wedge h_1 \parallel OP \wedge |h_1OP| = 5,5\text{cm}$
6. h_2 ; $h_2 \perp p \wedge h_2 \parallel OP \wedge |h_2OP| = 5,5\text{cm}$
7. Q_1, Q_2 ; $Q_1, Q_2 \in g \cap h_1$
8. Q_3, Q_4 ; $Q_3, Q_4 \in g \cap h_2$
9. $\Delta OPQ_1, \Delta OPQ_2, \Delta OPQ_3, \Delta OPQ_4$

Konstrukce:



Obr. 3.1.29: Konstrukce trojúhelníku – Příklad 3.1.25
(zdroj: vlastní zpracování)

Počet řešení úlohy závisí na počtu průsečíků kružnice g s přímkami h_1, h_2 . Kružnice g má s přímkami h_1, h_2 čtyři společné body, tj. uvedenou konstrukcí získáme čtyři trojúhelníky OPQ , které vyhovují zadání. Úloha 3.1.25 má čtyři řešení.

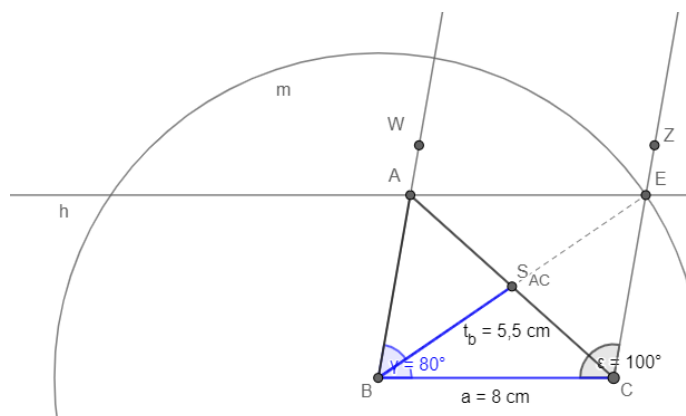
Důkaz plyne z vlastností trojúhelníku.

Příklad 3.1.26

Je dána úsečka BC , $|BC| = a = 8$ cm, úhel $\beta = 80^\circ$ a těžnice $t_b = 5,5$ cm. Sestrojte trojúhelníky ABC .

Řešení:

Rozbor:

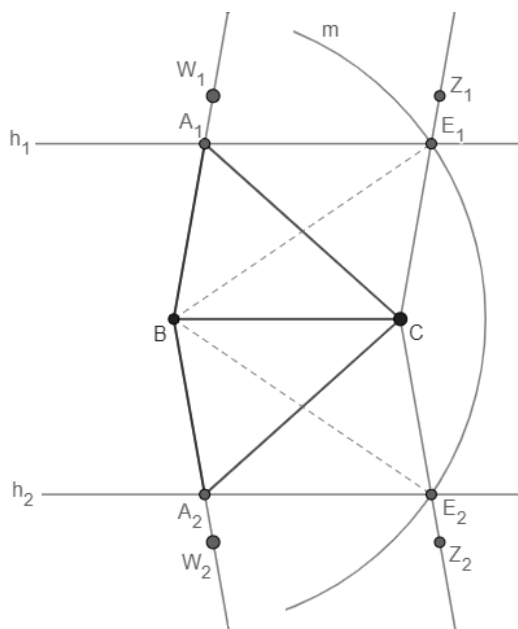


Obr. 3.1.30: Rozbor konstrukce trojúhelníku – Příklad 3.1.26
(zdroj: vlastní zpracování)

Postup konstrukce:

1. $BC; |BC| = 8\text{cm}$
2. $m; m(B; 2t_b = 11\text{cm})$
3. $\sphericalangle BCZ_1; |\sphericalangle BCZ_1| = 100^\circ$
4. $\sphericalangle BCZ_2; |\sphericalangle BCZ_2| = 100^\circ$
5. $E_1; E_1 \in m \cap \rightarrow CZ_1$
6. $E_2; E_2 \in m \cap \rightarrow CZ_2$
7. $A_1; \triangle BCE_1$ doplníme na rovnoběžník BCE_1A_1
8. $A_2; \triangle BCE_2$ doplníme na rovnoběžník BCE_2A_2
9. $\triangle A_1BC, \triangle A_2BC$

Konstrukce:



Obr. 3.1.31: Konstrukce trojúhelníku – Příklad 3.1.26

(zdroj: vlastní zpracování)

Kružnice m a přímka h_1 mají společný jeden bod, stejně tak kružnice m a přímka h_2 mají společný také jeden bod. Trojúhelníky A_1BC, A_2BC splňují zadání úlohy. Úloha 3.1.26 má při tomto zadání dvě řešení.

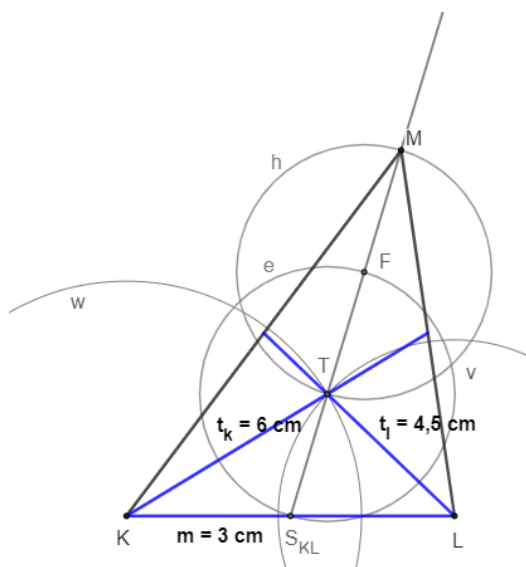
Důkaz plyne z vlastností trojúhelníku a vlastností rovnoběžníků.

Příklad 3.1.27

Sestrojte trojúhelník KLM, je-li $|KL| = 3$ cm. Délky těžnic jsou $t_k = 6$ cm a $t_l = 4,5$ cm.

Řešení:

Rozbor:



Obr. 3.1.32: Rozbor konstrukce trojúhelníku – Příklad 3.1.27

(zdroj: vlastní zpracování)

Těžnice se navzájem dělí v poměru 2:1. To znamená, že vzdálenost bodu K k průsečíku těžnic bude dvě třetiny velikosti těžnice t_k a vzdálenost bodu L k průsečíku těžnic bude dvě třetiny velikosti těžnice t_l .

$$\frac{2}{3}t_k = (6:3) * 2 = 4 \text{ cm}$$

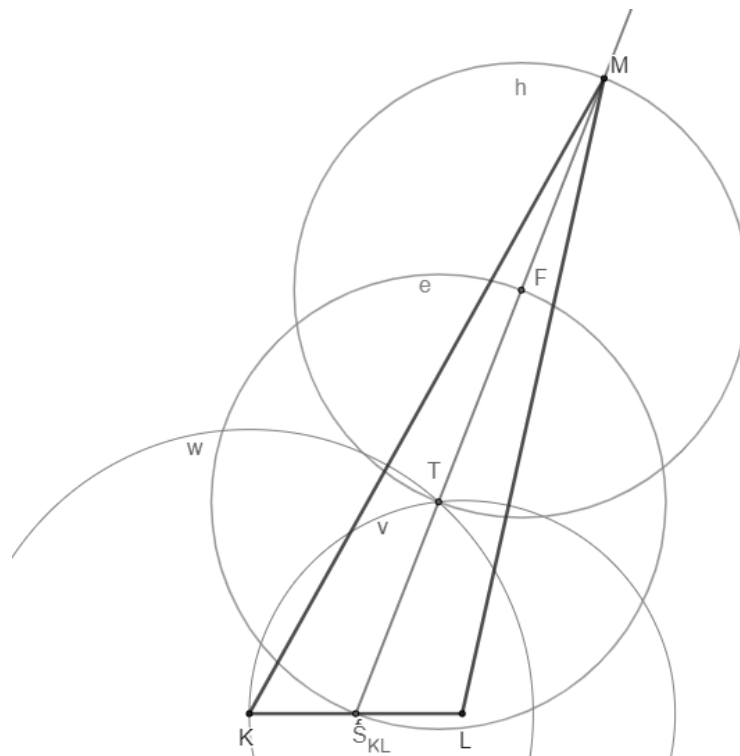
$$\frac{2}{3}t_l = (4,5:3) * 2 = 3 \text{ cm}$$

Postup konstrukce:

1. $KL; |KL| = 3\text{cm}$
2. $w; w(K; 4\text{cm})$
3. $v; v(L; 3\text{cm})$
4. $T; T \in w \cap v$
5. $S_{KL}; S_{KL} \in KL \wedge |KS_{KL}| = |S_{KL}L| = 1,5 \text{ cm}$
6. $e; e(T; |S_{KL}T|)$
7. $F; F \in e \cap w \rightarrow S_{KL}T$

8. $h; h(F; |S_{KL}T|)$
9. $M; M \in h \cap \rightarrow S_{KL}T$
10. ΔKLM

Konstrukce:



Obr. 3.1.33: Konstrukce trojúhelníku – Příklad 3.1.27

(zdroj: vlastní zpracování)

Trojúhelník KLT je určen podle věty sss, jsou splněny podmínky trojúhelníkové nerovnosti.

Úloha 3.1.27 má v dané polorovině jedno řešení.

Důkaz plyne z vlastností trojúhelníku a vlastností těžnic trojúhelníku.

3.2 Souhrnná cvičení – čtyřúhelník

Příklad 3.2.1

Rozhodněte, zda je rovnoběžník EFGH čtverec nebo kosočtverec, jestliže platí:

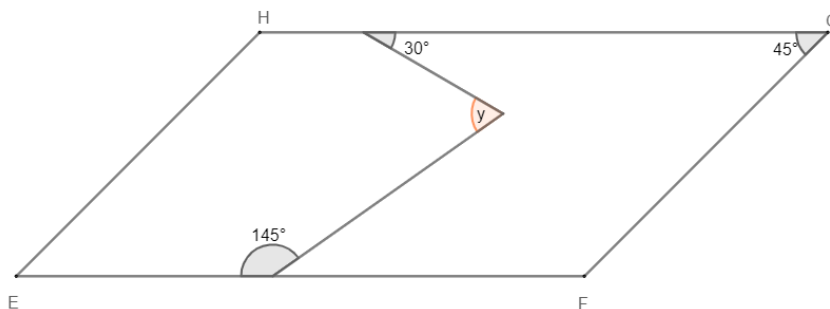
- a) $S = 42\text{cm}^2, |EF| = 7\text{cm}, v_e = 6\text{cm}$
- b) $S = 36\text{cm}^2, |EF| = 6\text{cm}, o = 24\text{cm}$
- c) $S = 18\text{cm}^2, o = 24\text{cm}, v_f = 3\text{cm}$

Řešení:

- a) Délka výšky se nerovná délce strany. Jedná se o kosočtverec.
- b) Ze vzorce obsahu zjistíme velikost výšky: $S = e \cdot v \rightarrow 36 = 6 \cdot v \rightarrow v = 6$. Délka výšky se rovná délce strany. (Případně ze vzorce obvodu zjistíme druhou stranu: $o = 4 \cdot f \rightarrow 24 = 4 \cdot f \rightarrow f = 6$.) Jedná se o čtverec.
- c) Ze vzorce obsahu zjistíme délku strany: $S = f \cdot v \rightarrow 18 = f \cdot 3 \rightarrow f = 6$. Délka výšky se nerovná délce strany. (Případně ze vzorce obvodu zjistíme druhou stranu: $o = 4 \cdot e \rightarrow 24 = 4 \cdot e \rightarrow e = 6$.) Jedná se o kosočtverec.

Příklad 3.2.2

Z obrázku rovnoběžníku EFGH určete velikost úhlu y .



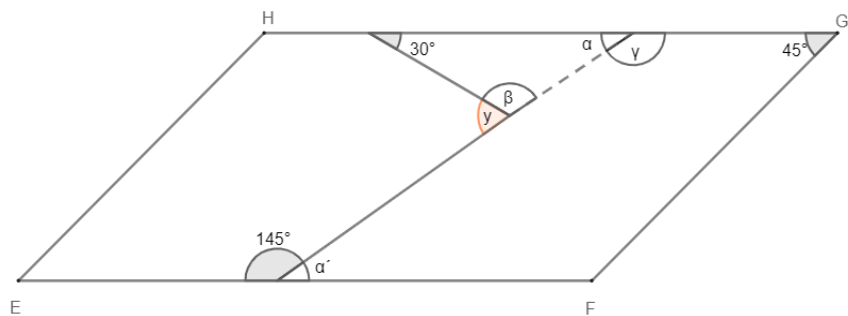
Obr. 3.2.1: Velikost úhlu rovnoběžníku – Příklad 3.2.2

(zdroj: vlastní zpracování)

Řešení:

Úhly α a α' jsou střídavé. Úhel $\alpha' = 180^\circ - 145^\circ = 35^\circ$, proto úhel $\alpha = 35^\circ$.

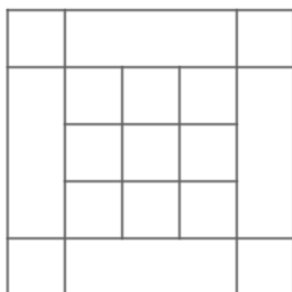
Úhel $\beta = 180^\circ - 30^\circ - 35^\circ = 115^\circ \rightarrow$ pro úhel y platí: $y = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ$.



Obr. 3.2.2: Velikost úhlu rovnoběžníku – Příklad 3.2.2
(zdroj: vlastní zpracování)

Příklad 3.2.3

Určete kolik čtverců je zobrazeno na obrázku:



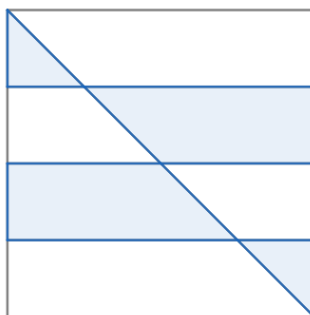
Obr. 3.2.3: Počet čtverců – Příklad 3.2.3
(zdroj: vlastní zpracování)

Řešení:

Na obrázku je zobrazeno 23 čtverců.

Příklad 3.2.4

Na obrázku je čtverec se stranou délky 1. Jaký je obsah vyšrafované části čtverce?

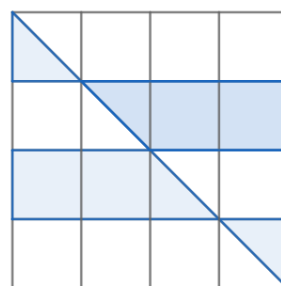


Obr. 3.2.4: Obsah čtverce – Příklad 3.2.4
(zdroj: vlastní zpracování)

Řešení:

Pokud obrázek rozdělíme na čtverce vidíme, že ze čtyř vyznačených pravoúhlých trojúhelníků lze složit dva čtverce.

Každý čtverec má obsah $\frac{1}{16}$, neboť v obrázku je dohromady 16 čtverců. Vyznačených čtverců na obrázku je 6. Obsah vyznačené plochy je tedy $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$.



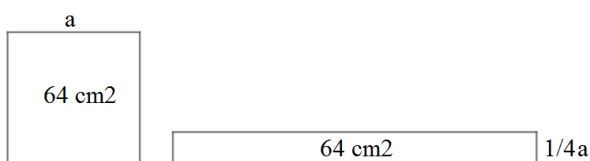
Obr. 3.2.5: Obsah čtverce – Příklad 3.2.4
(zdroj: vlastní zpracování)

Příklad 3.2.5

Čtverec i obdélník mají stejný obsah, a to 64 cm^2 . Šířka obdélníku je rovna jedné čtvrtině délky strany čtverce. Určete, jaká je šířka obdélníku.

Řešení:

Vypočítáme stranu čtverce ze vzorce jeho obsahu: $S = a \cdot a \rightarrow 64 = a \cdot a \rightarrow \sqrt{64} = a \rightarrow a = 8$



$$\text{Šířka obdélníku: } \frac{1}{4}a = \frac{1}{4} \cdot 8 = \frac{8}{4} = 2 \text{ cm}$$

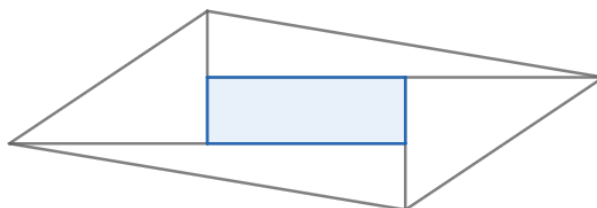
Obdélník je široký 2 cm.

Obr. 3.2.6: Šířka obdélníku – Příklad 3.2.5

(zdroj: vlastní zpracování)

Příklad 3.2.6

Dle obrázku jsou dvakrát zvětšeny strany obdélníku, jehož obsah je roven 1. Jaký je obsah zvětšeného rovnoběžníku?



Obr. 3.2.7: Obsah rovnoběžníku – Příklad 3.2.6

(zdroj: vlastní zpracování)

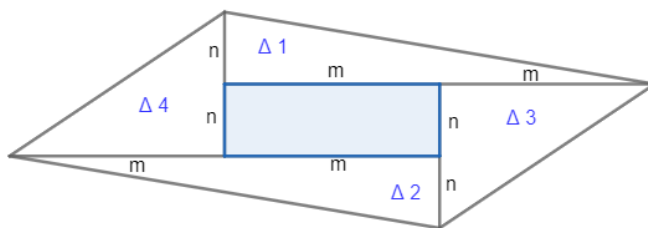
Řešení:

Zjistíme obsahy trojúhelníků v obrazci: $S_{\Delta 1} = \frac{2m \cdot n}{2} = mn$; $S_{\Delta 2} = \frac{2m \cdot n}{2} = mn$;

$$S_{\Delta 3} = \frac{m \cdot 2n}{2} = mn; S_{\Delta 4} = \frac{m \cdot 2n}{2} = mn$$

Obsah obdélníku v obrazci: $S_{\text{obdélníku}} = mn$

Obsah rovnoběžníku je roven pětinasobku obsahu původního obdélníku.



Obr. 3.2.8: Obsah rovnoběžníku – Příklad 3.2.6

(zdroj: vlastní zpracování)

Příklad 3.2.7

Střecha má tvar obdélníku s rozměry 9,5 m a 5 m. Kolik kilogramů barvy se spotřebuje na její nátěr? Jeden kilogram barvy vystačí na natření šesti čtverečných metrů plechu.

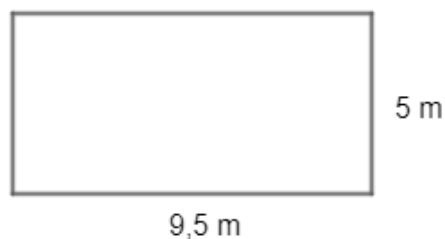
Řešení:

$$1 \text{ kg} \dots 6 \text{ m}^2$$

$$S = a \cdot b = 9,5 \cdot 5 = 47,5 \text{ m}^2$$

$$47,5 : 6 = 7,9 \text{ kg}$$

Na nátěr plechové střechy se spotřebuje 7,9 kg barvy.



Obr. 3.2.9: Obsah obdélníku – Příklad 3.2.7

(zdroj: vlastní zpracování)

Příklad 3.2.8

Pan Maleček stavěl dřevěnou chatu. V přední stěně tvaru obdélníku se stranami c, d ponechal pro okna dva shodné čtvercové otvory se stranami délek 1,4 m. Strana c byla šestkrát delší a strana d čtyřikrát delší než strana okenního otvoru. Kolik čtverečných metrů dřevěných prken se spotřebovalo na pobití stěny?

Řešení:

Nejprve vypočítáme délky stran obdélníku c, d:

$$c = 6 \cdot 1,4 = 8,4 \text{ m}$$

$$d = 4 \cdot 1,4 = 5,6 \text{ m}$$

Obsah oken tvaru čtverce:

$$S = 1,4 \cdot 1,4 = 1,96 \text{ m}^2$$

$$1,96 \cdot 2 = 3,92 \text{ m}^2$$

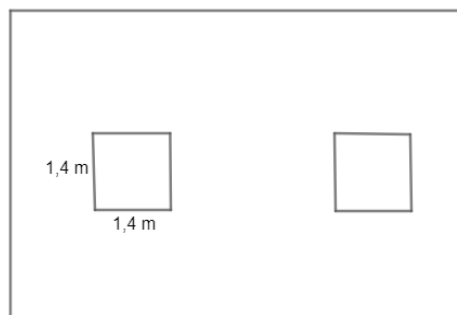
Obsah obdélníkové stěny:

$$S = c \cdot d = 8,4 \cdot 5,6 = 47,04 \text{ m}^2$$

Potřeba dřevěných prken:

$$47,04 - 3,92 = 43,12 \text{ m}^2$$

Na pobití stěny se spotřebovalo 43,12 m² dřevěných prken.



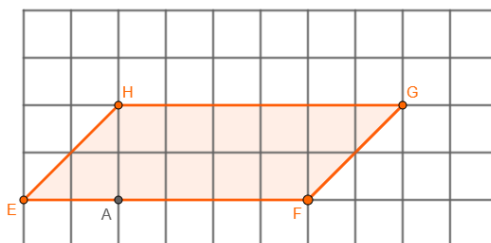
Obr. 3.2.10: Obsah obdélníku

– Příklad 3.2.8

(zdroj: vlastní zpracování)

Příklad 3.2.9

Vypočítejte obsah kosodélníku EFGH zakresleného ve čtvercové centimetrové síti.



Obr. 3.2.11: Obsah kosodélníku – Příklad 3.2.9

(zdroj: vlastní zpracování)

Řešení:

Použijeme vzorec pro výpočet obsahu rovnoběžníku: $S = a \cdot v$, kde a je délka strany a v je výška rovnoběžníku.

$$S = |EF| \cdot |HA| = 6 \cdot 2 = 12 \text{ cm}^2$$

Obsah kosodélníku je 12 cm².

Příklad 3.2.10

Obsah rovnoběžníku je 12,36 m², jeho strana má délku 27,4 m. Vypočítejte výšku k této straně.

Řešení: Pro výpočet využijeme vzorec obsahu rovnoběžníku, ze kterého výšku vyjádříme:

$$S = a \cdot v$$
$$v = \frac{S}{a} = \frac{12,36}{27,4} = 0,45 \text{ m}$$

Výška rovnoběžníku je 0,45 m.

Příklad 3.2.11

Sad tvaru obdélníku je široký 72 m a dlouhý 95 m. Kolik balíků pletiva po 25 m je třeba na oplocení sadu, jestliže 9 m obvodu zabírají dvířka a vrata z jiného materiálu?

Řešení:

$$\text{Obvod sadu: } o = 2 \cdot (a + b) = 2 \cdot (95 + 72) = 2 \cdot 167 = 334 \text{ m}$$

$$\text{Od obvodu odečteme metry, které zabírají dvířka a vrata: } 334 - 9 = 325 \text{ m}$$

$$\text{Výsledek vydělíme počtem metrů pletiva v jednom balíku: } 325 : 25 = 13 \text{ balíků}$$

Na oplocení sadu bude celkem potřeba 13 balíků pletiva.

Příklad 3.2.12

Obdélník na obrázku je rozdělen na devět menších obdélníků. Do pěti z těchto menších obdélníků jsou zapsány velikosti jejich obvodů. Vypočítejte velikost obvodu velkého obdélníku.

	8	
14	6	8
	10	

Obr. 3.2.12: Obvod obdélníku – Příklad 3.2.12

(zdroj: vlastní zpracování)

Řešení:

Obdélník s obvodem 6 cm je čtverec o straně 1,5 cm. Na základě této délky a vzorce pro výpočet obsahu obdélníku: $S = 2 \cdot (a + b)$, určíme délky stran jednotlivých obdélníků:

$$8 = 2 \cdot (1,5 + b) = 3 + 2b$$

$$10 = 2 \cdot (1,5 + c) = 3 + 2c$$

$$5 = 2b$$

$$7 = 2c$$

$$b = \frac{5}{2}$$

$$c = \frac{7}{2}$$

$$14 = 2 \cdot (1,5 + d) = 3 + 2d$$

$$11 = 2d$$

$$d = \frac{11}{2}$$

Délky stran obdélníku:

$$\frac{11}{2} + \frac{15}{10} + \frac{5}{2} = \frac{19}{2}$$

$$\frac{5}{2} + \frac{15}{10} + \frac{7}{2} = \frac{15}{2}$$

	$\frac{5}{2}$	8	
14	1,5	6	8
$\frac{11}{2}$	$\frac{7}{2}$	1,5	$\frac{5}{2}$
		10	

Obr. 3.2.13: Obvod obdélníku – Příklad 3.2.12

(zdroj: vlastní zpracování)

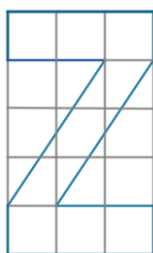
Obvod velkého obdélníku:

$$o = 2 \cdot \left(\frac{19}{2} + \frac{15}{2} \right) = 2 \cdot \frac{34}{2} = 34 \text{ cm}$$

Velký obdélník má obvod 34 cm.

Příklad 3.2.13

Z papíru tvaru obdélníku bylo vyříznuto písmeno Z narýsované do čtvercové sítě. Udejte desetinným číslem, procentem a zlomkem, jak velká část papíru tvořila odpad.



Obr. 3.2.14: Díly obdélníku – Příklad 3.2.13

(zdroj: vlastní zpracování)

Řešení:

Celkový počet dílů ... 15

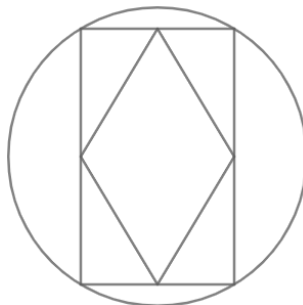
Počet volných dílů ... 6

$$\frac{6}{15} = \frac{2}{5} = 0,4 = 40 \%$$

Odpad tvořilo 40 % papíru.

Příklad 3.2.14

Do kruhu s poloměrem sedm centimetrů někdo nakreslil obdélník se stranami v poměru $1:\sqrt{6}$. Pokud spojíme středy sousedních stran obdélníku, získáme kosočtverec. Jak dlouhé jsou strany kosočtverce?

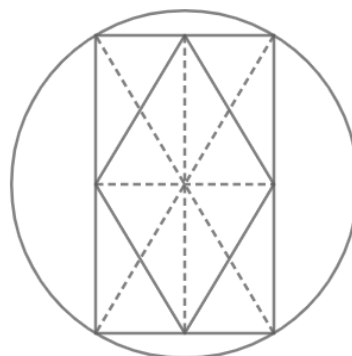


Obr. 3.2.15: Strany kosočtverce – Příklad 3.2.14

(zdroj: vlastní zpracování)

Řešení:

Údaj poměru délek stran obdélníku je nadbytečný. Obdélník rozdělíme na čtyři menší obdélníky. Každá strana kosočtverce tvoří úhlopříčku v jednom z malých obdélníků. Druhá úhlopříčka téhož malého obdélníku vychází ze středu kruhu a končí na jeho okraji. Obě úhlopříčky jsou stejně dlouhé, proto má strana kosočtverce stejnou délku jako poloměr kruhu, tedy sedm centimetrů.



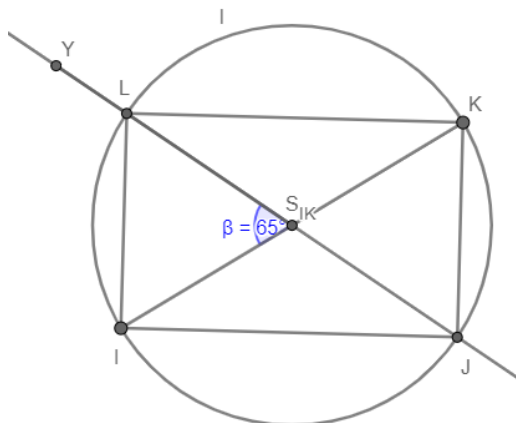
Obr. 3.2.16: Strany kosočtverce – Příklad 3.2.14
(zdroj: vlastní zpracování)

Příklad 3.2.15

Je dána úsečka $IK = 5,6$ cm. Sestrojte obdélník $IJKL$, jestliže jeho úhlopříčky svírají úhel 65° a $|IJ| = |KL|$.

Řešení:

Rozbor:



Obr. 3.2.17: Rozbor konstrukce obdélníku – Příklad 3.2.15
(zdroj: vlastní zpracování)

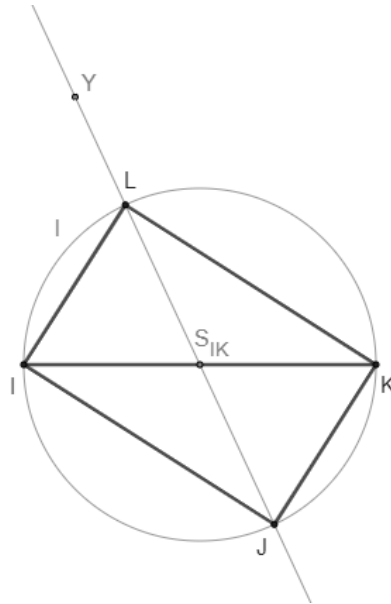
Postup konstrukce:

1. $IK; |IK| = 5,6$ cm
2. $S_{IK}; S_{IK} \in IK \wedge |IS_{IK}| = |S_{IK}K|$
3. $\sphericalangle IS_{IK}Y; |\sphericalangle IS_{IK}Y| = 65^\circ$
4. $l; l(S_{IK}; |S_{IK}I|)$
5. $L; L \in \rightarrow S_{IK}Y \cap l$

6. $J; J \in \leftrightarrow YS_{IK} \cap l$

7. obdélník $IJKL$

Konstrukce:



Obr. 3.2.18: Konstrukce obdélníku – Příklad 3.2.15

(zdroj: vlastní zpracování)

Bod J sestrojíme využitím středové souměrnosti podle středu S_{IK} . Úloha číslo 3.2.15 má v dané polorovině jedno řešení.

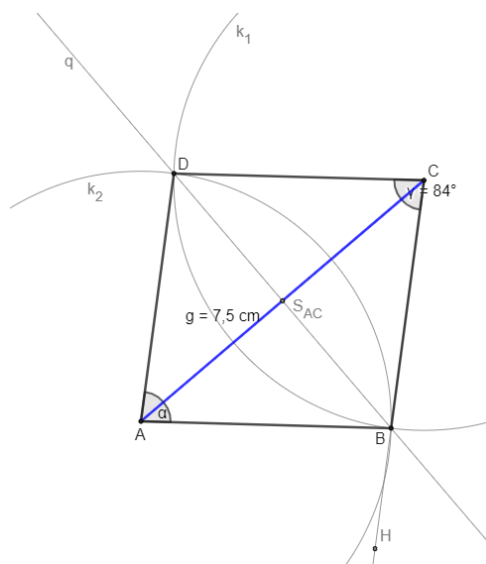
Důkaz plyne z vlastností obdélníku a středové souměrnosti.

Příklad 3.2.16

Sestrojte kosočtverec ABCD, je-li dána velikost úhlopříčky $|AC| = g = 7,5 \text{ cm}$ a velikost úhlu $|\sphericalangle BCD| = 84^\circ = \gamma$.

Řešení:

Rozbor:



Obr. 3.2.19: Rozbor konstrukce kosočtverce – Příklad 3.2.16

(zdroj: vlastní zpracování)

Úhlopříčka kosočtverce vnitřní úhel γ pólí:

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$$

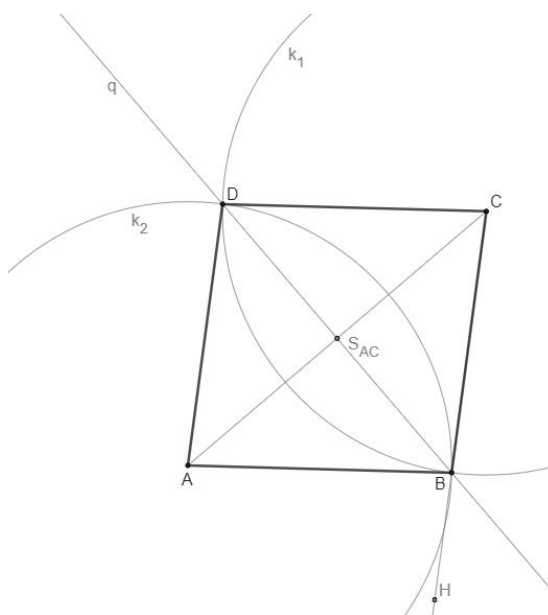
Protější vnitřní úhel α má stejnou velikost jako úhel γ , tudíž:

$$\gamma_1 = \alpha_1 = \frac{1}{2}\gamma = 84^\circ : 2 = 42^\circ$$

Postup konstrukce:

1. $AC; |AC| = 7,5 \text{ cm}$
2. $S_{AC}; S_{AC} \in AC \wedge |AS_{AC}| = |S_{AC}C|$
3. $q; q \perp AC \wedge S_{AC} \in q$
4. $\sphericalangle ACH; |\sphericalangle ACH| = 42^\circ$
5. $B; B \in CH \cap q$
6. $k_1; k_1(C; |BC|)$
7. $k_2; k_2(A; |AB|)$
8. $D; D \in k_1 \cap k_2$
9. *kosočtverec ABCD*

Konstrukce:



Obr. 3.2.20: Konstrukce kosočtverce – Příklad 3.2.16
(zdroj: vlastní zpracování)

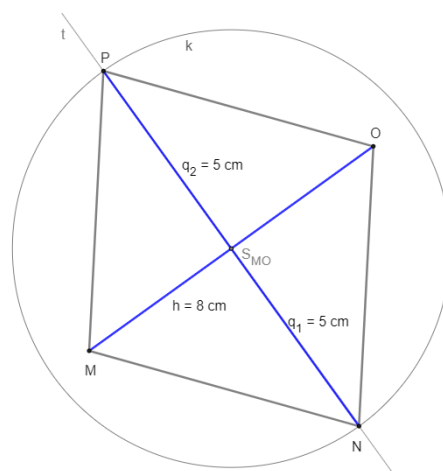
Kosočtverec ABCD splňuje podmínky úlohy. Úloha číslo 3.2.16 má v dané polorovině jedno řešení. Důkaz plyne z vlastností kosočtverce.

Příklad 3.2.17

Sestrojte kosočtverec MNOP, jsou-li dány velikost úhlopříček $|MO| = h = 8 \text{ cm}$, $|PN| = q = 10 \text{ cm}$.

Řešení:

Rozbor:

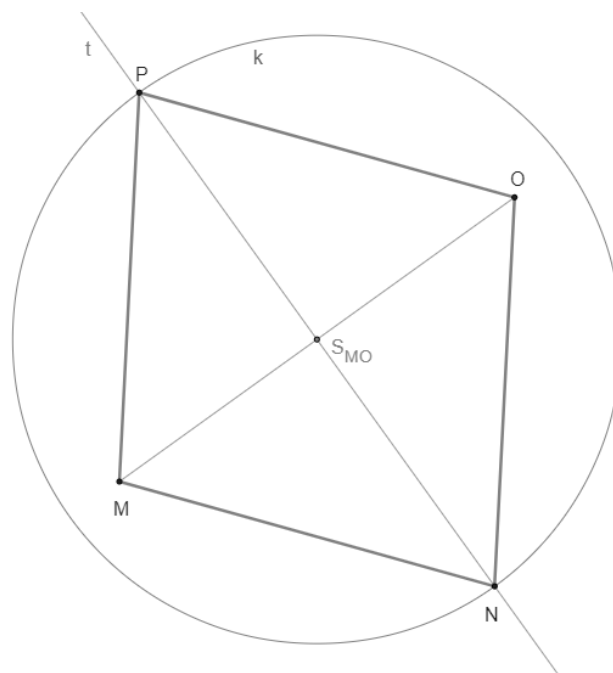


Obr. 3.2.21: Rozbor konstrukce kosočtverce – Příklad 3.2.17
(zdroj: vlastní zpracování)

Postup konstrukce:

1. $MO; |MO| = 8 \text{ cm}$
2. $S_{MO}; S_{MO} \in MO \wedge |MS_{MO}| = |S_{MO}O|$
3. $t; t \perp MO \wedge S_{MO} \in t$
4. $k; k(S_{MO}; \frac{1}{2}q = 5 \text{ cm})$
5. $N; N \in t \cap k$
6. $P; P \in t \cap k$
7. *kosočtverec MNOP*

Konstrukce:



Obr. 3.2.22: Konstrukce kosočtverce – Příklad 3.2.17
(zdroj: vlastní zpracování)

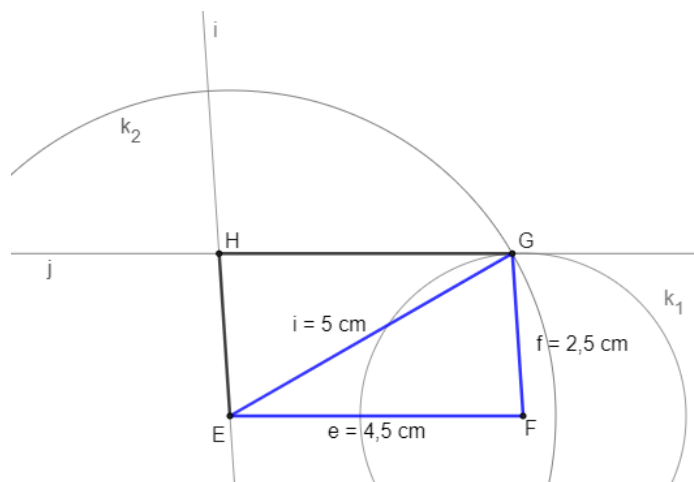
Kosočtverec MNOP splňuje podmínky úlohy. Úloha číslo 3.2.17 má v dané polorovině jedno řešení. Důkaz plyne z vlastností kosočtverce a středové souměrnosti.

Příklad 3.2.18

Sestrojte kosodélník EFGH, pokud $e = |EF| = 4,5 \text{ cm}$, $f = |FG| = 2,5 \text{ cm}$ a $i = |EG| = 5 \text{ cm}$.

Řešení:

Rozbor:



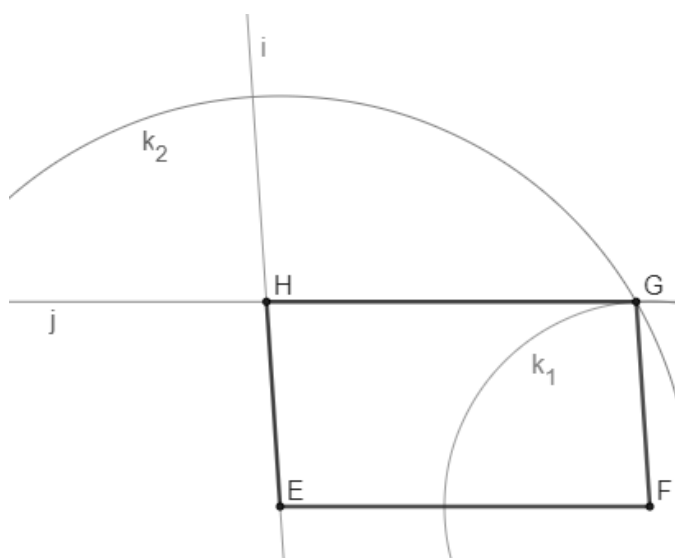
Obr. 3.2.23: Rozbor konstrukce kosodélníku – Příklad 3.2.18

(zdroj: vlastní zpracování)

Postup konstrukce:

1. $EF; |EF| = 4,5 \text{ cm}$
2. $k_1; k_1(F; 2,5 \text{ cm})$
3. $k_2; k_2(E; 5 \text{ cm})$
4. $G; G \in k_1 \cap k_2$
5. $j; j \parallel EF, G \in j$
6. $i; i \parallel FG, E \in i$
7. $H; H \in j \cap i$
8. kosodélník EFGH

Konstrukce:



Obr. 3.2.24: Konstrukce kosodélníku – Příklad 3.2.18

(zdroj: vlastní zpracování)

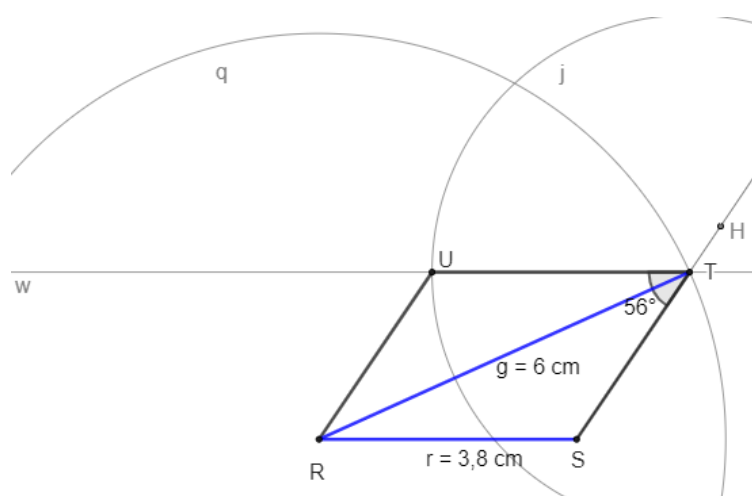
Trojúhelník EFG sestrojíme podle věty sss. Kosodélník EFGH splňuje podmínky úlohy. Úloha číslo 3.2.18 má v dané polorovině jedno řešení. Důkaz plyne z vlastností kosodélníku a z konstrukce trojúhelníku podle věty sss.

Příklad 3.2.19

Sestrojte rovnoběžník RSTU, je-li dána velikost úhlopříčky $|RT| = 6 \text{ cm}$, strany $r = |RS| = 3,8 \text{ cm}$ a velikost úhlu $|\sphericalangle STU| = 56^\circ$.

Řešení:

Rozbor:



Obr. 3.2.25: Rozbor konstrukce rovnoběžníku – Příklad 3.2.19

(zdroj: vlastní zpracování)

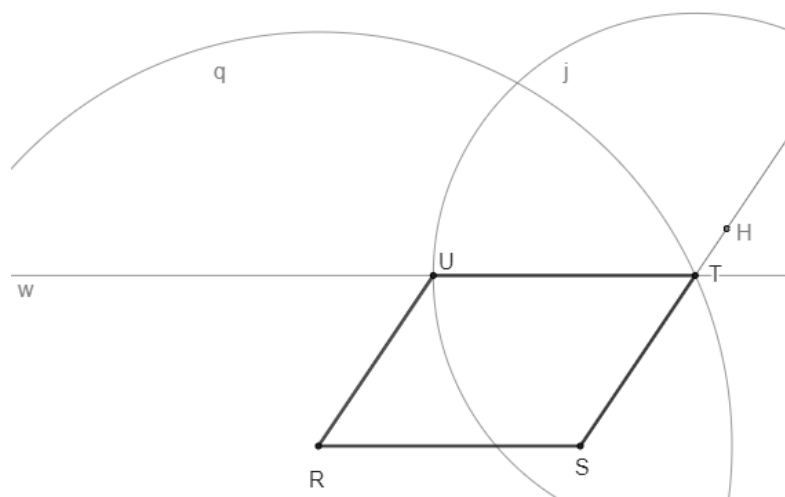
Dopočítáme velikost úhlu $|\sphericalangle RST|$. Víme, že součet dvou sousedních úhlů v rovnoběžníku je 180° a protější úhly jsou stejné, proto platí:

$$|\sphericalangle RST| = 180^\circ - 56^\circ = 124^\circ$$

Postup konstrukce:

1. $\triangle RST(ssu)$
2. $w; w \parallel RS \wedge T \in w$
3. $j; j(T; 3,8 \text{ cm})$
4. $U; U \in j \cap w$
5. rovnoběžník RSTU

Konstrukce:



Obr. 3.2.26: Konstrukce rovnoběžníku – Příklad 3.2.19
(zdroj: vlastní zpracování)

Trojúhelník RST sestrojíme podle věty ssu. Úloha číslo 3.2.19 má pouze jedno řešení. Důkaz plyne z vlastností rovnoběžníku a z konstrukce trojúhelníku podle věty ssu.

Příklad 3.2.20

Rozhodněte, co platí pro každý lichoběžník:

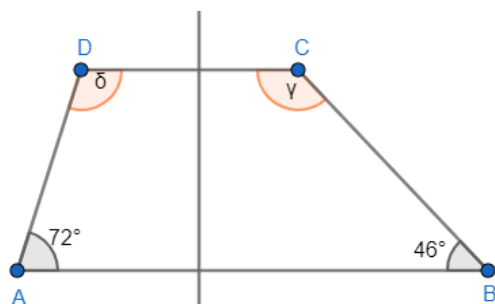
- Dvě protější strany jsou rovnoběžné a zbývající dvě rovnoběžné nejsou.
- Všechny vnitřní úhly jsou pravé.
- Každý lichoběžník má dvě ramena a dvě základny.
- Ramena lichoběžníku jsou vždy stejně dlouhé úsečky.
- Základny lichoběžníku jsou vždy stejně dlouhé úsečky.
- Úhlopříčky se vždy půlí.

Řešení: a) platí, b) neplatí, c) platí, d) neplatí, e) neplatí, f) neplatí

Příklad 3.2.21

Ze čtyř úhlů $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ lichoběžníku ABCD, kde $AB \parallel CD$, jsou dány velikosti dvou úhlů $\alpha = 72^\circ, \beta = 46^\circ$. Vypočítejte velikosti zbývajících dvou úhlů lichoběžníku γ, δ .

Řešení:



Lichoběžník ABCD rozdělíme na dva pravoúhlé lichoběžníky, abychom mohli spočítat zbývajících vnitřní úhly:

$$\delta = 360^\circ - (72^\circ + 90^\circ + 90^\circ) = 108^\circ$$

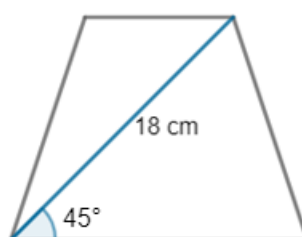
$$\gamma = 360^\circ - (46^\circ + 90^\circ + 90^\circ) = 134^\circ$$

Obr. 3.2.27: Velikost úhlů lichoběžníku – Příklad 3.2.21

(zdroj: vlastní zpracování)

Příklad 3.2.22

Úhlopříčka rovnoramenného lichoběžníku je dlouhá 18 cm a svírá se základnou lichoběžníku úhel 45° . Jaký je obsah tohoto lichoběžníku?



Obr. 3.2.28: Obsah lichoběžníku – Příklad 3.2.22

(zdroj: vlastní zpracování)

Řešení: Pomocí goniometrických funkcí pravoúhlého trojúhelníku vypočítáme strany x, y :

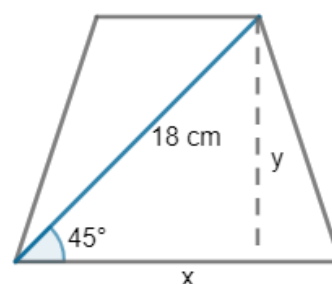
$$\sin 45^\circ = \frac{y}{18} \dots y = 12,72$$

$$\cos 45^\circ = \frac{x}{18} \dots x = 12,72$$

Obsah rovnoramenného lichoběžníku vypočítáme jako obsah obdélníku:

$$S = x \cdot y = 12,72 \cdot 12,72 = 161,79 \doteq 161,8 \text{ cm}^2$$

Obsah lichoběžníku je $161,8 \text{ cm}^2$.



Obr. 3.2.29: Obsah lichoběžníku – Příklad 3.2.22

(zdroj: vlastní zpracování)

Příklad 3.2.23

Zahrada tvaru lichoběžníku má základny dlouhé 67 m a 54 m. Jejich vzdálenost je 29 m. Kolik metrů čtverečných její výměry zůstane na výsadbu stromů, jestliže $\frac{1}{6}$ celé plochy bude využita k výstavbě chaty a cesty?

Řešení: Nejprve vypočítáme obsah celé zahrady tvaru lichoběžníku:

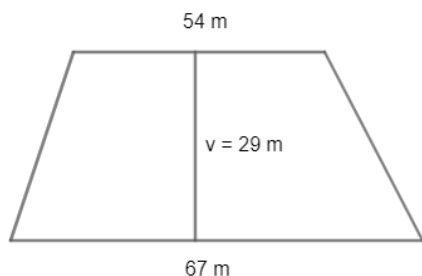
$$S = \frac{(67+54) \cdot 29}{2} = \frac{121 \cdot 29}{2} = \frac{3509}{2} = 1754,5 \text{ m}^2$$

Poté vypočítáme jednu šestinu obsahu:

$$\frac{1}{6} \dots 1754,5 : 6 = 292,4 \text{ m}^2$$

Nakonec vypočítáme plochu, která zůstane na výsadbu stromů: $1754,5 - 292,4 = 1462,1 \doteq 1462 \text{ m}^2$

Na výsadbu stromů zůstane 1462 m^2 zahrady.



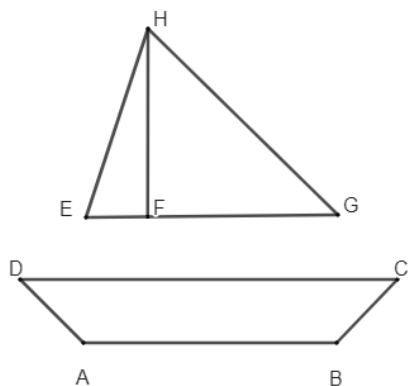
Obr. 3.2.30: Obsah lichoběžníku

– Příklad 3.2.23

(zdroj: vlastní zpracování)

Příklad 3.2.24

Na obrázku je plachetnice zakreslena pomocí rovnoramenného lichoběžníku ABCD a dvou pravoúhlých trojúhelníků EFH a HFG. Výška lichoběžníku je jeden metr. Platí: $|AB| = 4v$, $|CD| = 6v$, $|EF| = v$, $|FG| = 3v$, $|FH| = 3v$. Vypočítejte obsahy všech tří obrazců, z nichž se plachetnice skládá.



Obr. 3.2.31: Obsahy tří obrazců

– Příklad 3.2.24

(zdroj: vlastní zpracování)

Řešení:

Obsah pravoúhlého trojúhelníku:

$$S_{EFH} = \frac{h \cdot e}{2} = \frac{v \cdot 3v}{2} = \frac{3v^2}{2} = \frac{3 \cdot 1^2}{2} = \frac{3}{2} = 1,5 \text{ m}^2$$

$$S_{HFG} = \frac{h \cdot g}{2} = \frac{3v \cdot 3v}{2} = \frac{9v^2}{2} = \frac{9 \cdot 1^2}{2} = \frac{9}{2} = 4,5 \text{ m}^2$$

Obsah lichoběžníku:

$$S_{ABCD} = \frac{(a+c) \cdot v}{2} = \frac{(4v+6v) \cdot v}{2} = \frac{10v \cdot v}{2} = \frac{10v^2}{2} \\ = \frac{10 \cdot 1^2}{2} = 5 \text{ m}^2$$

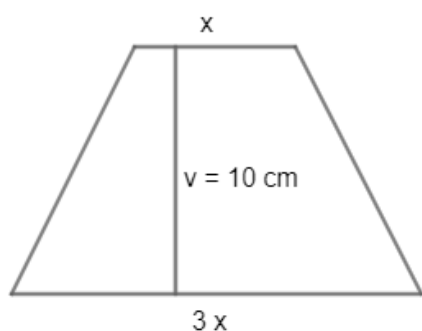
Obsah menšího trojúhelníku je $1,5 \text{ m}^2$, obsah většího trojúhelníku je $4,5 \text{ m}^2$ a obsah lichoběžníku je 5 m^2 .

Příklad 3.2.25

Štítek ke klíči od zahrady má tvar rovnoramenného lichoběžníku s obsahem 64 cm^2 . Jedna základna je třikrát větší než druhá. Výška lichoběžníku je 100 mm . Jakou délku mají obě základny?

Řešení:

Pro výpočet délky základen použijeme vzorec pro výpočet obsahu:



Obr. 3.2.32: Délka základen lichoběžníku

– Příklad 3.2.25

(zdroj: vlastní zpracování)

$$S = \frac{(a + c) \cdot v}{2}$$
$$64 = \frac{(3x + x) \cdot 10}{2}$$
$$64 = \frac{40x}{2}$$
$$64 = 20x$$
$$x = 3,2 \text{ cm}$$

Délka základen:

$$3 \cdot 3,2 = 9,6 \text{ cm}$$

$$3,2 \text{ cm}$$

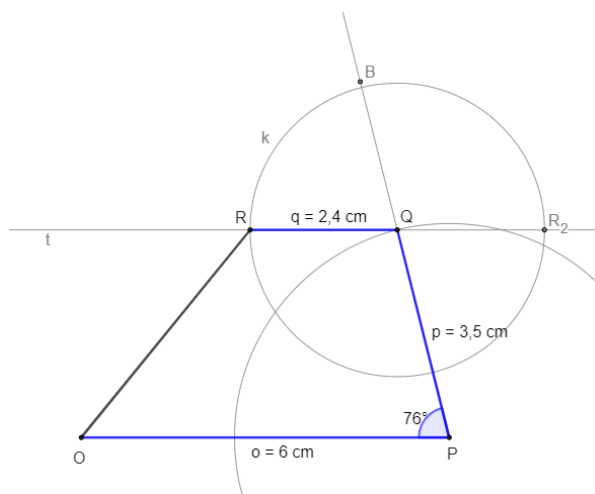
Délka základen je dlouhá $3,2 \text{ cm}$ a $9,6 \text{ cm}$.

Příklad 3.2.26

Sestrojte lichoběžník $OPQR$, známe-li velikost strany $o = 6 \text{ cm}$, $p = 35 \text{ mm}$, $q = 2,4 \text{ cm}$ a velikost úhlu $|\sphericalangle OPQ| = 76^\circ$.

Řešení:

Rozbor:



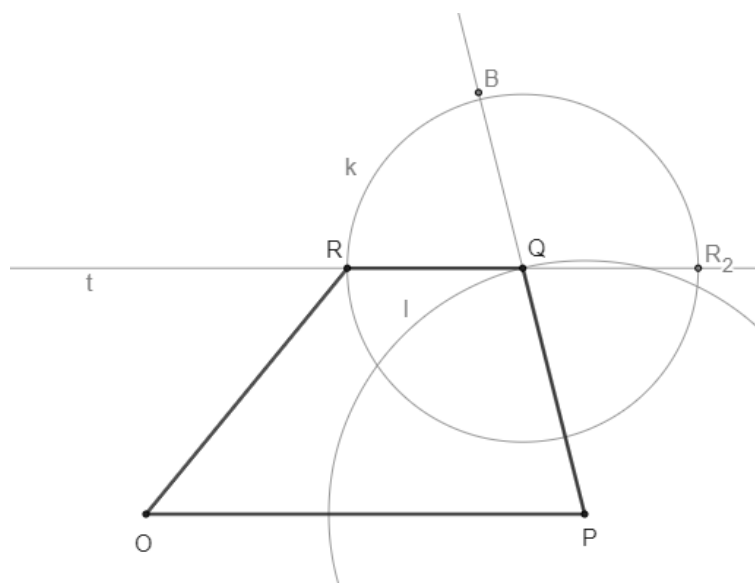
Obr. 3.2.33: Rozbor konstrukce lichoběžníku – Příklad 3.2.26

(zdroj: vlastní zpracování)

Postup konstrukce:

1. $\triangle OPQ$ (*sus*)
2. $t; t \parallel OP \wedge Q \in t$
3. $k; k(Q; 2,4 \text{ cm})$
4. $R; R \in k \cap t$
5. *lichoběžník* $OPQR$

Konstrukce:



Obr. 3.2.34: Konstrukce lichoběžníku – Příklad 3.2.26

(zdroj: vlastní zpracování)

Trojúhelník OPQ lze sestavit podle věty *sus*, úhel 76° je menší než 180° . Kružnice m protne přímku t ve dvou bodech R a R_2 . Čtyřúhelník $OPQR$ splňuje podmínky zadání a tvoří lichoběžník, zatímco část roviny $OPQR_2$ lichoběžník netvoří. Úloha číslo 3.2.26 má v dané polorovině jedno řešení.

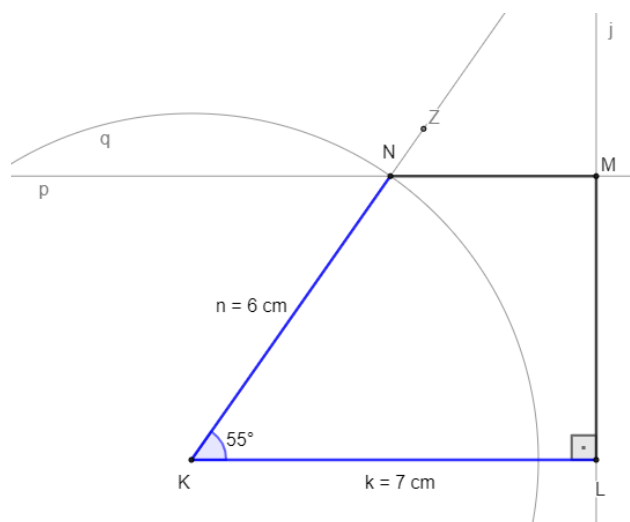
Důkaz plyne z vlastností lichoběžníku a z konstrukce trojúhelníku OPQ podle věty *sus*.

Příklad 3.2.27

Sestrojte pravouhlý lichoběžník KLMN se základnami k , m a pravým úhlem u vrcholu L , jestliže $k = 7$ cm, $n = 6$ cm a úhel $|\sphericalangle NKL| = 55^\circ$.

Řešení:

Rozbor:

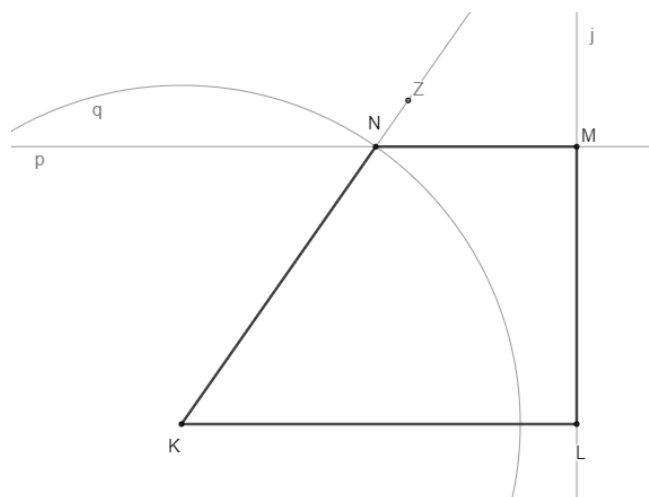


Obr. 3.2.35: Rozbor konstrukce lichoběžníku – Příklad 3.2.27
(zdroj: vlastní zpracování)

Postup konstrukce:

1. $KL; |KL| = 7$ cm
2. $\sphericalangle LKZ; |\sphericalangle LKZ| = 55^\circ$
3. $q; q(K; 6$ cm)
4. $N; N \in q \cap \rightarrow KZ$
5. $p; p \parallel KL, N \in p$
6. $j; j \perp KL, L \in j$
7. $M; M \in p \cap j$
8. lichoběžník KLMN

Konstrukce:



Obr. 3.2.36: Konstrukce lichoběžníku – Příklad 3.2.27
(zdroj: vlastní zpracování)

Lichoběžník KLMN splňuje podmínky úlohy. Úloha číslo 3.2.27 má v dané polorovině jedno řešení.

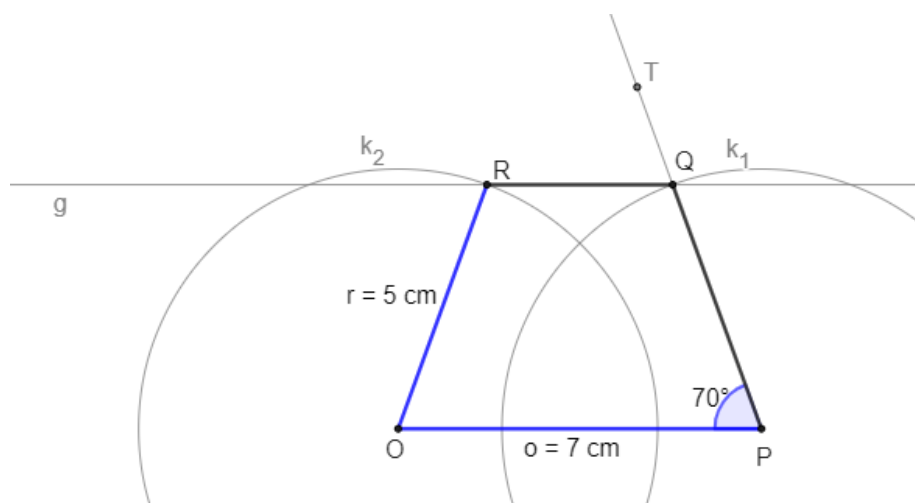
Důkaz plyne z vlastností pravoúhlého lichoběžníku a z konstrukce trojúhelníku KLN podle věty sus.

Příklad 3.2.28

Sestrojte rovnoramenný lichoběžník OPQR s ramenem $r = |OR| = 50 \text{ mm}$, základnou o délce 70 mm a úhlem $|\sphericalangle OPQ|$, jehož velikost je 70° .

Řešení:

Rozbor:

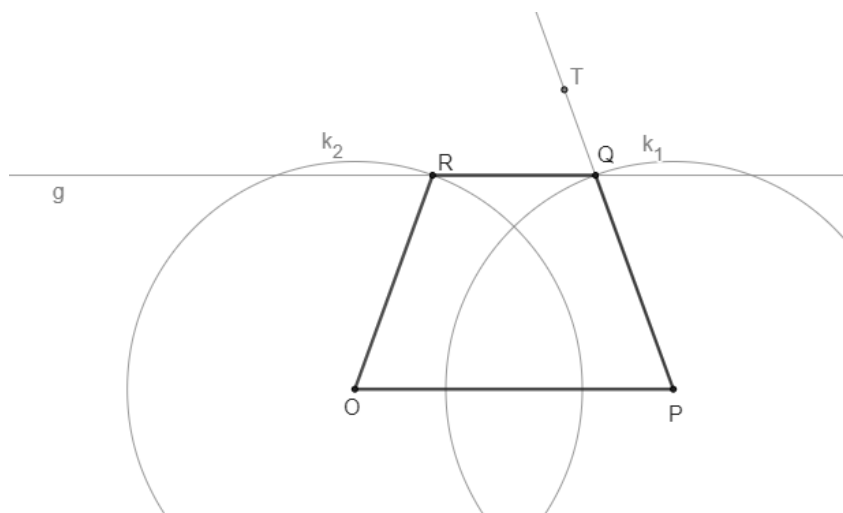


Obr. 3.2.37: Rozbor konstrukce lichoběžníku – Příklad 3.2.28
(zdroj: vlastní zpracování)

Postup a konstrukce:

1. OP ; $|OP| = 7\text{ cm}$
2. $\sphericalangle OPT$; $|\sphericalangle OPT| = 70^\circ$
3. k_1 ; $k_1(P; 5\text{ cm})$
4. Q ; $Q \in k_1 \cap \rightarrow PT$
5. g ; $g \parallel OP$, $Q \in g$
6. k_2 ; $k_2(O; 5\text{ cm})$
7. R ; $R \in k_2 \cap g$
8. lichoběžník $OPQR$

Konstrukce:



Obr. 3.2.38: Konstrukce lichoběžníku – Příklad 3.2.28

(zdroj: vlastní zpracování)

Lichoběžník $OPQR$ splňuje podmínky úlohy. Úloha číslo 3.2.28 má při tomto zadání v dané polorovině jedno řešení. Důkaz plyne z vlastností rovnoramenného lichoběžníku.

Příklad 3.2.29

Honza se rozhodl vyrobit si draka ve tvaru deltoиду s úhlopříčkami dlouhými 150 mm a 250 mm. Delší úhlopříčka je rozdělena druhou na dvě části délek 150 mm a 100 mm. Kolik špejlí délky 300 mm bude potřeba na vyztužení draka, jestliže je drak vyztužen v úhlopříčkách a po obvodě? Špejle se spojují pouze ve vrcholech deltoidu. Spočítejte v centimetrech, jak velký je odpad špejlí.

Řešení:

Úhlopříčky dělí deltoid na pravoúhlé trojúhelníky. Pomocí Pythagorovy věty vypočítáme přepony trojúhelníku:

$$c^2 = 10^2 + 7,5^2$$

$$c = \sqrt{100 + 56,25} = \sqrt{156,25}$$

$$c = 12,5 \text{ cm}$$

$$d^2 = 15^2 + 7,5^2$$

$$d = \sqrt{225 + 56,25} = \sqrt{281,25}$$

$$d = 16,77 \text{ cm}$$

Nyní můžeme zjistit, kolik špejlí bude potřeba a jejich případný odpad:

$$\text{Levá strana deltoidu: } 30 - 16,77 - 12,5 = 0,73 \text{ cm}$$

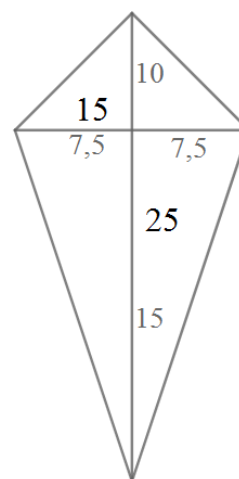
$$\text{Pravá strana deltoidu: } 30 - 16,77 - 12,5 = 0,73 \text{ cm}$$

$$\text{Delší úhlopříčka: } 30 - 25 = 5 \text{ cm}$$

$$\text{Kratší úhlopříčka: } 30 - 15 = 15 \text{ cm}$$

$$\text{Odpad špejlí: } 15 + 5 + 0,73 + 0,73 = 21,46 \doteq 21,5 \text{ cm}$$

Na vyztužení draka budou potřeba čtyři špejle. Odpad špejlí bude zhruba 21,5 cm velký.

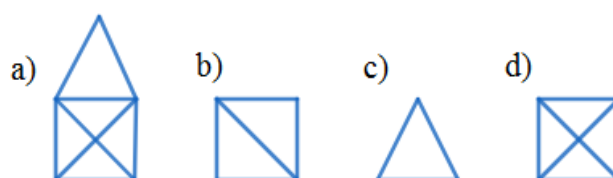


Obr. 3.2.39: Deltoid – Příklad 3.2.29

(zdroj: vlastní zpracování)

Příklad 3.2.30

Který z obrázků nemůžeme nakreslit jedním tahem?



Obr. 3.2.40: Jednotažky – Příklad 3.2.30

(zdroj: vlastní zpracování)

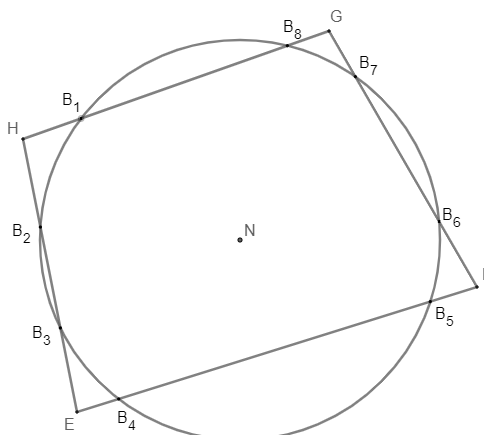
Řešení: Jedním tahem nemůžeme nakreslit obrázec d).

Příklad 3.2.31

Je dán čtyřúhelník EFGH a libovolný bod v rovině N. Jaký je maximální počet bodů na stranách EFGH, které jsou od bodu N vzdáleny 4 cm?

Řešení:

Množina bodů, jejichž vzdálenost od bodu N je 4 cm, je kružnice, která má střed v bodě N a poloměr 4 cm. Každá strana čtyřúhelníku může mít nejvýše dva společné body s kružnicí. Maximální počet bodů, které jsou společné čtyřúhelníku i kružnici, je 8.



Obr. 3.2.41: Čtyřúhelník – Příklad 3.2.31

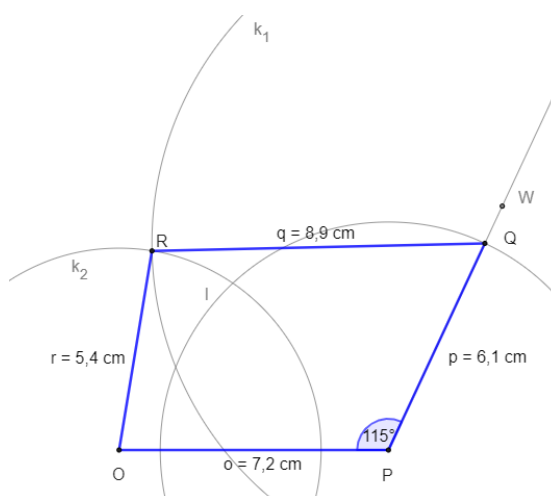
(zdroj: vlastní zpracování)

Příklad 3.2.32

Sestrojte čtyřúhelník OPQR, je-li dána velikost strany $o = 72$ mm, $p = 61$ mm, $q = 8,9$ cm, $r = 5,4$ cm a velikost úhlu $|\sphericalangle OPQ| = 115^\circ$.

Řešení:

Rozbor:

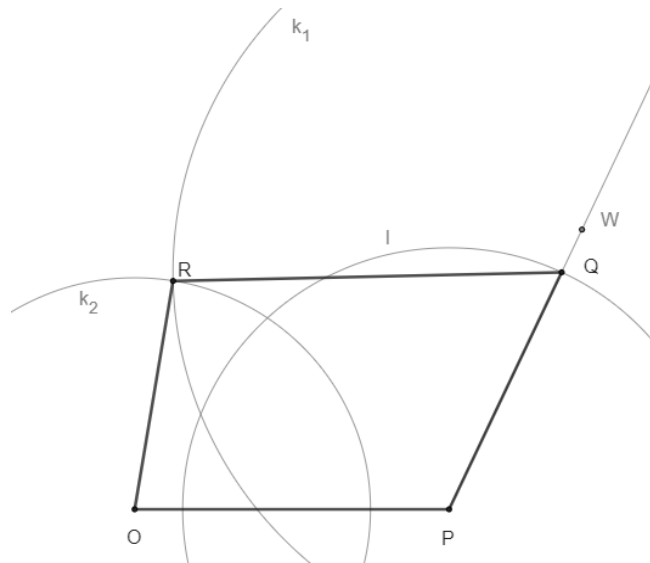


Obr. 3.2.42: Rozbor konstrukce čtyřúhelníku – Příklad 3.2.32

(zdroj: vlastní zpracování)

Postup konstrukce a konstrukce:

1. $\triangle OPQ$ (*sus*)
2. $k_1; k_1(Q; 8,9 \text{ cm})$
3. $k_2; k_2(O; 5,4 \text{ cm})$
4. $R; R \in k_1 \cap k_2$
5. čtyřúhelník $OPQR$



Obr. 3.2.43: Konstrukce čtyřúhelníku – Příklad 3.2.32
(zdroj: vlastní zpracování)

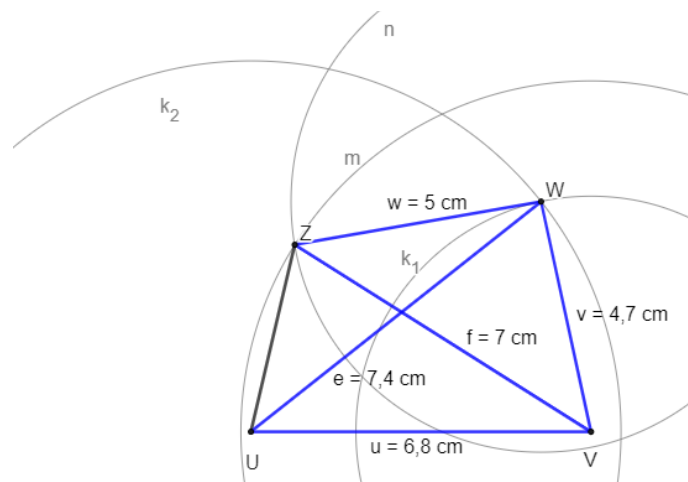
Trojúhelník OPQ sestrojíme podle věty *sus*. Úloha číslo 3.2.32 má v dané polorovině jedno řešení. Důkaz plyne z vlastností čtyřúhelníku a z konstrukce trojúhelníku OPQ podle věty *sus*.

Příklad 3.2.33

Sestrojte čtyřúhelník $UVWZ$, je-li dána velikost strany $u = 6,8 \text{ cm}$, $v = 4,7 \text{ cm}$, $w = 5 \text{ cm}$ a velikost úhlopříčky $e = |UW| = 7,4 \text{ cm}$ a $f = |ZV| = 7 \text{ cm}$.

Řešení:

Rozbor:

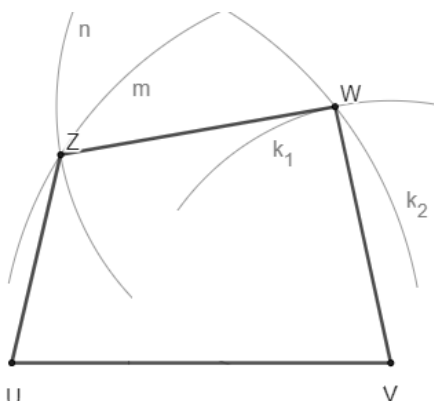


Obr. 3.2.44: Rozbor konstrukce čtyřúhelníku – Příklad 3.2.33
(zdroj: vlastní zpracování)

Postup konstrukce:

1. ΔUVW (sss)
2. $n; n(W; 5 \text{ cm})$
3. $m; m(V; 7 \text{ cm})$
4. $Z; Z \in n \cap m$
5. čtyřúhelník $UVWZ$

Konstrukce:



Obr. 3.2.45: Konstrukce čtyřúhelníku – Příklad 3.2.33
(zdroj: vlastní zpracování)

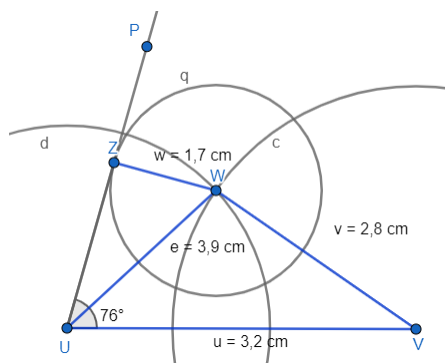
Trojúhelník UVW sestrojíme podle věty sss. Čtyřúhelník $UVWZ$ splňuje podmínky zadání. Úloha číslo 3.2.33 má v dané polorovině jedno řešení. Důkaz plyne z vlastností čtyřúhelníku.

Příklad 3.2.34

Sestrojte čtyřúhelník $UVWZ$, je-li dána velikost strany $u = 3,2 \text{ cm}$, $v = 28 \text{ mm}$, $w = 1,7 \text{ cm}$ a velikost úhlopříčky $e = |UW| = 3,9 \text{ cm}$ a $|\sphericalangle ZUV| = 76^\circ$.

Řešení:

Rozbor:

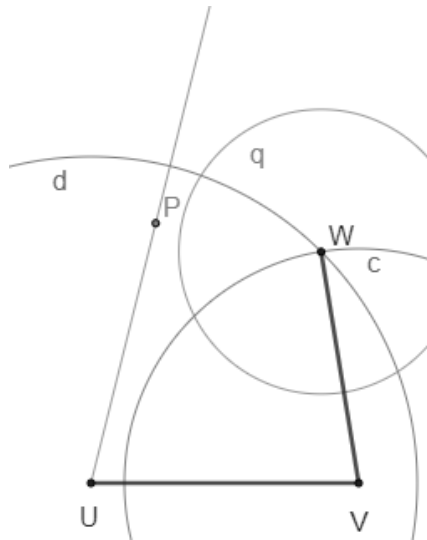


Obr. 3.2.46: Rozbor konstrukce čtyřúhelníku – Příklad 3.2.34
(zdroj: vlastní zpracování)

Postup konstrukce:

1. $\triangle UVW$ (*sss*)
2. $\sphericalangle VUP$; $|\sphericalangle VUP| = 76^\circ$
3. $\mapsto UP$
4. q ; $q(W; 1,7 \text{ cm})$

Konstrukce:



Obr. 3.2.47: Konstrukce čtyřúhelníku – Příklad 3.2.34
(zdroj: vlastní zpracování)

Kružnice q neprotne polopřímku UP . Bod Z nelze sestrojiti. Počet řešení závisí na velikosti poloměru kružnice q , a vzájemné poloze přímky UP a kružnice q . Úloha číslo 3.2.34 nemá řešení.

3.3 Souhrnná cvičení – pravidelné mnohoúhelníky

Příklad 3.3.1

Rozhodněte o pravdivosti či nepravdivosti následujících tvrzení:

- a) U pravidelného osmiúhelníku je úhel mezi sousedními stranami 135° .
- b) Mnohoúhelník, který je nekonvexní, musí mít alespoň jeden vnitřní úhel větší než 180° .
- c) Pravidelný šestiúhelník lze rozdělit na šest rovnostranných trojúhelníků.
- d) Mezi pravidelný mnohoúhelník s nejmenším počtem stran řadíme čtverec.

Řešení: a) pravda, b) pravda, c) pravda, d) nepravda

Příklad 3.3.2

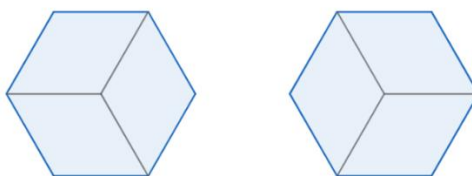
Který pravidelný mnohoúhelník je složen z rovnostranných trojúhelníků?

Řešení: Z rovnostranných trojúhelníků je složen pravidelný šestiúhelník.

Příklad 3.3.3

Narýsujte libovolný pravidelný šestiúhelník. Rozdělte ho na tři shodné nepřekrývající se kosočtverce. Kolika způsoby můžete šestiúhelník rozdělit?

Řešení: Šestiúhelník můžeme rozdělit na tři shodné kosočtverce dvěma způsoby.



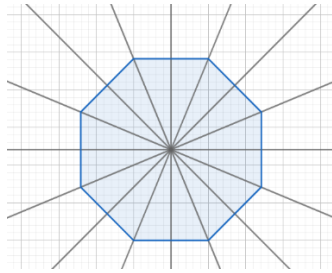
Obr. 3.3.1: Rozdělení šestiúhelníku – Příklad 3.3.3
(zdroj: vlastní zpracování)

Příklad 3.3.4

Kolik os souměrnosti má a) pravidelný osmiúhelník, b) pravidelný pětiúhelník?

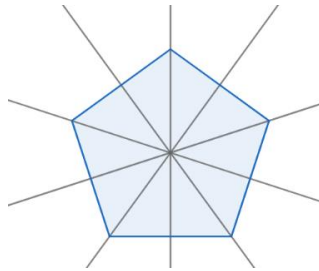
Řešení:

- a) Pravidelný osmiúhelník má osm os souměrnosti.



Obr. 3.3.2: Osy souměrnosti osmiúhelníku – Příklad 3.3.4
(zdroj: vlastní zpracování)

b) Pravidelný pětiúhelník má pět os souměrnosti.



Obr. 3.3.3: Osy souměrnosti pětiúhelníku – Příklad 3.3.4
(zdroj: vlastní zpracování)

Příklad 3.3.5

Narýsujte pětiúhelník, který bude mít právě jednu osu souměrnosti.

Řešení:

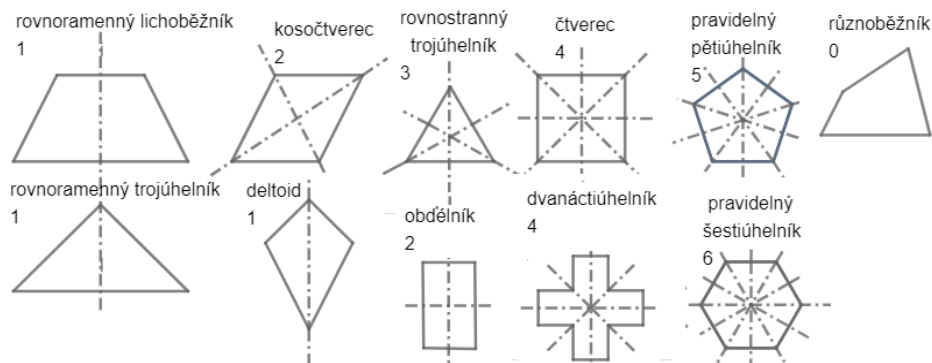


Obr. 3.3.4: Pětiúhelník – Příklad 3.3.5
(zdroj: vlastní zpracování)

Příklad 3.3.6

Nakreslete mnohoúhelník, který a) má právě 1, 2, 3, 4, 5, 6 os souměrnosti, b) nemá žádnou osu souměrnosti.

Řešení:



Obr. 3.3.5: Osy souměrnosti – Příklad 3.3.6

(zdroj: vlastní zpracování)

Příklad 3.3.7

Určete součet velikostí všech vnitřních úhlů a) n -úhelníku, b) sedmiúhelníku, c) šestiúhelníku, d) pětiúhelníku.

Řešení:

- a) $(n - 2) \cdot 180^\circ$, kde n je počet vrcholů n -úhelníku
- b) $(7 - 2) \cdot 180^\circ = 900^\circ$
- c) $(6 - 2) \cdot 180^\circ = 720^\circ$
- d) $(5 - 2) \cdot 180^\circ = 540^\circ$

Příklad 3.3.8

Vypočítejte velikost vnitřního úhlu pravidelného a) n -úhelníku, b) dvanáctiúhelníku, c) osmiúhelníku, d) šestiúhelníku, e) pětiúhelníku, f) trojúhelníku.

Řešení:

- a) $\frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ$, kde n je počet vrcholů n -úhelníku
- b) $\frac{12-2}{12} \cdot 180^\circ = 150^\circ$
- c) $\frac{8-2}{8} \cdot 180^\circ = 135^\circ$
- d) $\frac{6-2}{6} \cdot 180^\circ = 120^\circ$
- e) $\frac{5-2}{5} \cdot 180^\circ = 108^\circ$
- f) $\frac{3-2}{3} \cdot 180^\circ = 60^\circ$

Příklad 3.3.9

Existuje pravidelný n -úhelník jehož vnitřní úhly mají velikost 156° ?

Řešení:

$$\frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ = 156^\circ$$

$$(n-2) \cdot 180 = 156n$$

$$180n - 360 = 156n$$

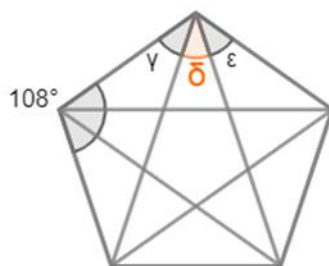
$$24n = 360$$

$$n = 15$$

Ano, existuje pravidelný n -úhelník s vnitřními úhly velikosti 156° . Je to pravidelný patnáctiúhelník.

Příklad 3.3.10

Do kružnice je vkreslena pěticípá hvězda. Určete velikost úhlu δ .



Obr. 3.3.6: Velikost úhlu pětiúhelníku – Příklad 3.3.10

(zdroj: vlastní zpracování)

Řešení:

Součet vnitřních úhlů pětiúhelníku ... $(n-2) \cdot 180^\circ = (5-2) \cdot 180^\circ = 540^\circ$

Velikost jednoho vnitřního úhlu pětiúhelníku: $540^\circ : 5 = 108^\circ$

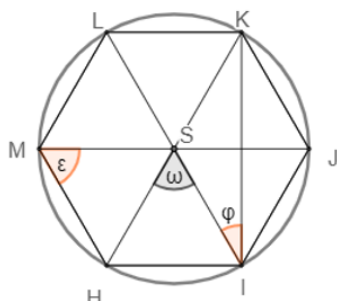
Úhel $\gamma = \varepsilon = \delta \dots 108^\circ : 3 = 36^\circ$

Úhel δ má velikost 36° .

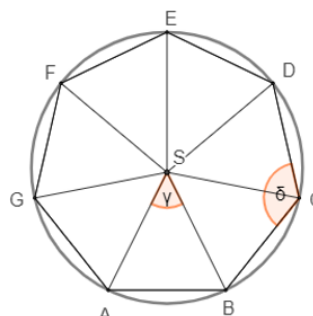
Příklad 3.3.11

Vypočítejte velikosti vyznačených úhlů pravidelného:

a) šestiúhelníku



b) sedmiúhelníku



Obr. 3.3.7: Velikost úhlů šestiúhelníku, sedmiúhelníku – Příklad 3.3.11

(zdroj: vlastní zpracování)

Řešení:

a) Nejprve vypočítáme velikost středového úhlu: $\omega = 360^\circ : 6 = 60^\circ$

Poté můžeme vypočítat velikost úhlu ε : $180^\circ = \omega + 2\varepsilon \rightarrow \varepsilon = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$

Velikost úhlu φ : $180^\circ = 90^\circ + \omega + \varphi \rightarrow \varphi = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

b) Velikost úhlu γ : $\gamma = 360^\circ : 7 \doteq 51,43^\circ$

Velikost úhlu δ : $180^\circ = \gamma + \delta \rightarrow \delta = 180^\circ - 51,43^\circ = 128,57^\circ$

Příklad 3.3.12

Paní Brázdová chce doprostřed zahrady udělat květinový záhon ve tvaru pravidelného devítiúhelníku. Má v plánu tento devítiúhelník rozdělit na rovnoramenné trojúhelníky, které mají společný vrchol ve středu devítiúhelníku. Paní Brázdová doprostřed devítiúhelníku přivázala devět provázků a natáhla je do devíti směrů k vrcholům. Určete velikost úhlu, který svírají sousední provázky, a velikost úhlu, který svírají strany záhonu.

Řešení:

Velikost úhlu, který svírají sousední provázky:

$$\gamma = 360^\circ : 9 = 40^\circ$$

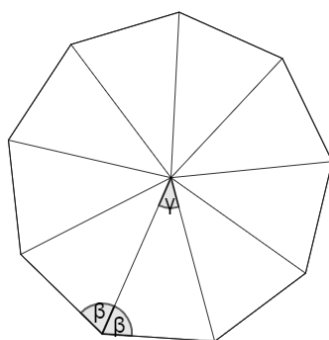
Velikost úhlu, který svírají strany záhonu:

$$180^\circ = \gamma + 2\beta$$

$$180^\circ = 40^\circ + 2\beta$$

$$2\beta = 140^\circ$$

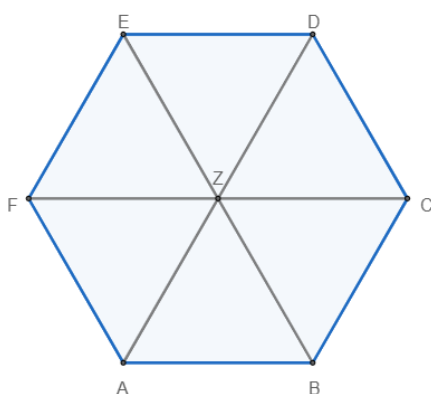
Sousední provázky svírají úhel 40° a strany záhonu svírají 140° .



Obr. 3.3.8: Velikost úhlu devítiúhelníku – Příklad 3.3.12
(zdroj: vlastní zpracování)

Příklad 3.3.13

Doplňte velikosti úhlů pravidelného šestiúhelníku s vrcholem v bodě Z. Bod Z je střed kružnice opsané n-úhelníku. Úhly spočítejte nebo změřte.



$$\begin{array}{ll}
 |\sphericalangle CZD| = 60^\circ & |\sphericalangle CZB| = \dots \\
 |\sphericalangle CZF| = \dots & |\sphericalangle CZA| = \dots \\
 |\sphericalangle CZE| = \dots & |\sphericalangle CZC| = \dots
 \end{array}$$

Obr. 3.3.9: Velikost úhlů šestiúhelníku
– Příklad 3.3.13
(zdroj: vlastní zpracování)

Řešení:

$$\begin{array}{lll}
 |\sphericalangle CZF| = 180^\circ & |\sphericalangle CZB| = 300^\circ & \\
 |\sphericalangle CZE| = 120^\circ & |\sphericalangle CZA| = 240^\circ & |\sphericalangle CZC| = 360^\circ
 \end{array}$$

Příklad 3.3.14

Vypočítejte velikost středového úhlu pro pravidelný a) sedmiúhelník, b) patnáctiúhelník.

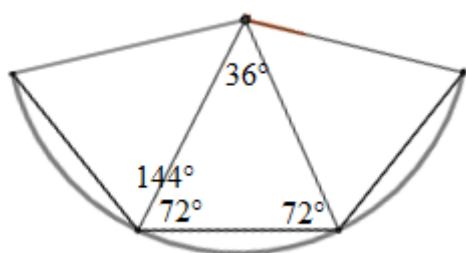
Řešení: a) $360^\circ : 7 \doteq 51^\circ 25' 43''$, b) $360^\circ : 15 = 24^\circ$

Příklad 3.3.15

Úhel u každého z vrcholů pravidelného n -úhelníku má velikost 144° . Určete, kolik vrcholů má tento n -úhelník.

Řešení:

Nejprve vypočítáme úhel u středu n -úhelníku, abychom mohli následně tímto úhlem vydělit 360° .



$$180^\circ = \gamma + 2\delta$$

$$180^\circ = 144^\circ + \gamma$$

$$\gamma = 36^\circ$$

$$360^\circ : 36^\circ = 10$$

n -úhelník s úhlem 144° u vrcholu je prav. desetiúhelník.

Obr. 3.3.10: Počet vrcholů – Příklad 3.3.15

(zdroj: vlastní zpracování)

Příklad 3.3.16

Plášť míče je tvořen 34 stěnami z 21 pravidelných šestiúhelníků a 13 pravidelných pětiúhelníků. Určete, kolik vrcholů má toto těleso.

Řešení:

Těleso má tolik vrcholů, kolik vrcholů mají všechny pětiúhelníky na plášti, tj. $13 \cdot 5 = 65$.

Příklad 3.3.17

Součet velikostí všech vnitřních úhlů konvexního mnohoúhelníku je 900° . Kolik vrcholů má tento mnohoúhelník?

Řešení:

Dosadíme do vzorce pro součet velikostí vnitřních úhlů mnohoúhelníku:

$$(n - 2) \cdot 180^\circ = 900^\circ$$

$$n - 2 = \frac{900^\circ}{180^\circ}$$

$$n - 2 = 5$$

$$n = 7$$

Mnohoúhelník, jehož součet vnitřních vrcholů je 900° , má 7 vrcholů.

Příklad 3.3.18

Kolik úhlopříček má pravidelný a) n -úhelník, b) dvanáctiúhelník, c) desetiúhelník, d) devítiúhelník, e) sedmiúhelník, f) šestiúhelník, g) pětiúhelník?

Řešení:

a) $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$, kde n je počet vrcholů n -úhelníku

b) $\frac{12 \cdot (12-3)}{2} = 54$ úhlopříček

c) $\frac{10 \cdot (10-3)}{2} = 35$ úhlopříček

d) $\frac{9 \cdot (9-3)}{2} = 27$ úhlopříček

e) $\frac{7 \cdot (7-3)}{2} = 14$ úhlopříček

f) $\frac{6 \cdot (6-3)}{2} = 9$ úhlopříček

g) $\frac{5 \cdot (5-3)}{2} = 5$ úhlopříček

Příklad 3.3.19

Jaká je velikost vnitřního úhlu n -úhelníku, který je tvořen třicetipěti úhlopříčkami?

Řešení:

Dosadíme do vzorce pro výpočet počtu úhlopříček n -úhelníku:

$$35 = \frac{n(n-3)}{2}$$

$$70 = n^2 - 3n$$

$$n^2 - 3n - 70 = 0$$

Vypočítáme kořeny kvadratické rovnice:

$$D = 9 - 4 \cdot 1 \cdot (-70) = 9 + 280 = 289$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{289}}{2} = \frac{9 \pm 17}{2}$$

$$x_1 = \frac{3 + 17}{2} = 10$$

$$x_2 = \frac{3 - 17}{2} = -7$$

Záporný kořen nevyhovuje \rightarrow Jedná se tedy o desetiúhelník.

Součet vnitřních úhlů n -úhelníku = $(n - 2) \cdot 180^\circ \rightarrow (10 - 2) \cdot 180^\circ = 1440^\circ$.

Velikost vnitřního úhlu desetiúhelníku: $1440^\circ : 10 = 144^\circ$.

Velikost vnitřního úhlu n -úhelníku, který je tvořen 35 úhlopříčkami, je 144° .

Příklad 3.3.20

Který konvexní mnohoúhelník má dvakrát více úhlopříček než stran?

Řešení: Vyřešíme rovnici:

$$2n = \frac{n \cdot (n - 3)}{2}$$

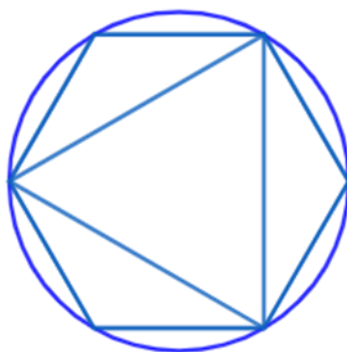
$$4n = n \cdot (n - 3) \quad /n(n > 3, n \neq 0)$$

$$n = 7$$

Jedná se o konvexní sedmiúhelník.

Příklad 3.3.21

Pravidelný šestiúhelník a pravidelný trojúhelník jsou vepsány do kružnice. Určete, čemu se rovná podíl obsahu šestiúhelníku a obsahu trojúhelníku.

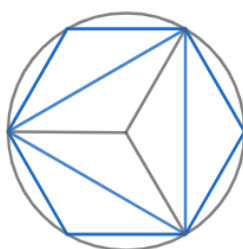


Obr. 3.3.11: Podíl obsahu šestiúhelníku a trojúhelníku – Příklad 3.3.21

(zdroj: vlastní zpracování)

Řešení:

Z obrázku jde vidět, že obsah šestiúhelníku bude dvojnásobkem obsahu trojúhelníku. Podíl je tedy roven 2.



Obr. 3.3.12: Podíl obsahu šestiúhelníku a trojúhelníku – Příklad 3.3.21

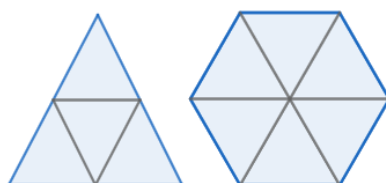
(zdroj: vlastní zpracování)

Příklad 3.3.22

Rovnostranný trojúhelník a pravidelný šestiúhelník mají stejné obvody. Vypočítejte, v jakém poměru, jsou jejich obsahy.

Řešení:

Trojúhelník a šestiúhelník lze sestavit z několika stejně velkých rovnostranných trojúhelníků. Trojúhelník lze sestavit ze čtyř a šestiúhelník ze šesti rovnostranných trojúhelníků. Takto mají stejný obvod, ale obsahy jsou v poměru $\frac{S_3}{S_6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.



Obr. 3.3.13: Poměr obsahu šestiúhelníku a trojúhelníku – Příklad 3.3.22

(zdroj: vlastní zpracování)

Příklad 3.3.23

Obsah rovnostranného trojúhelníku je 27 cm^2 . Od každého vrcholu tohoto trojúhelníku jde odstříhnout malý rovnostranný trojúhelník tak, že z původního trojúhelníku vznikne pravidelný šestiúhelník. Jaký je obsah šestiúhelníku?

Řešení:

Původní rovnostranný trojúhelník se skládá z 9 shodných rovnostranných trojúhelníků. Obsah každého takového trojúhelníku je $27 : 9 = 3 \text{ cm}^2$.

Po odstřížení tří trojúhelníků zůstane pravidelný šestiúhelník tvořený šesti trojúhelníky.

Obsah pravidelného šestiúhelníku je $6 \cdot 3 = 18 \text{ cm}^2$.

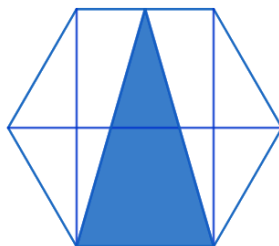


Obr. 3.3.14: Obsah šestiúhelníku – Příklad 3.3.23

(zdroj: vlastní zpracování)

Příklad 3.3.24

Jak velkou část plochy pravidelného šestiúhelníku představuje vyznačený trojúhelník?



Obr. 3.3.15: Plocha šestiúhelníku – Příklad 3.3.24

(zdroj: vlastní zpracování)

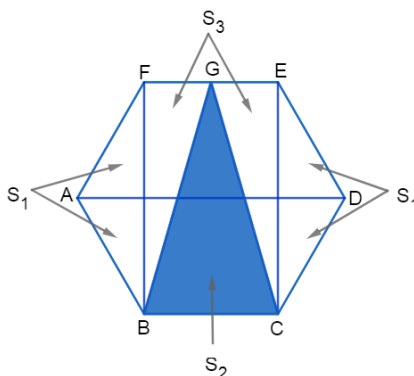
Řešení:

Plochu šestiúhelníku rozdělíme na tři části: S_1 , S_2 a S_3 . Trojúhelník ABF a trojúhelník ECD vyjadřují S_1 , trojúhelník BCG vyjadřuje S_2 , a trojúhelníky BGF a CEG vyjadřují S_3 .

Dle obrázku platí: $S_2 = S_3 = 2S_1$

Plocha vyznačeného trojúhelníku: $S = S_2 + S_3 + 2S_1 = 3S_2 \rightarrow S_2 = \frac{1}{3}S$.

Vyznačený trojúhelník představuje jednu třetinu plochy pravidelného šestiúhelníku.

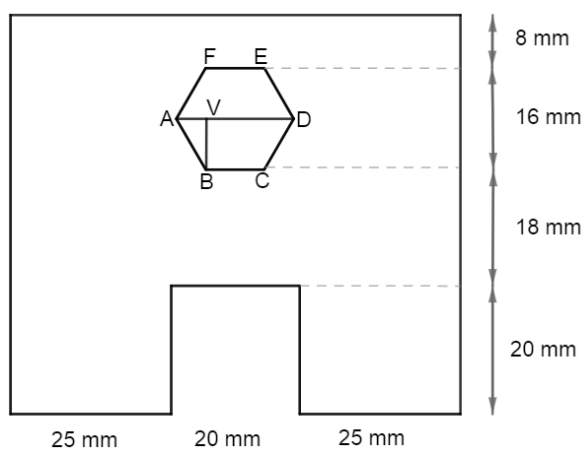


Obr. 3.3.16: Plocha šestiúhelníku – Příklad 3.3.24

(zdroj: vlastní zpracování)

Příklad 3.3.25

Vypočítejte obsah vyznačeného obrazce, jehož rozměry a tvar jsou na obrázku v milimetrech.



Obr. 3.3.17: Obsah obrazce – Příklad 3.3.25

(zdroj: vlastní zpracování)

Řešení:

Obsah vyznačeného obrazce určíme jako rozdíl obsahu obdélníku a obsahu „vyseknutého“ čtverce a pravidelného šestiúhelníku ABCDEF.

Obsah obdélníku: $S_o = a \cdot b = 70 \cdot 62 = 4340 \text{ mm}^2$

Obsah čtverce: $S_{\square} = a \cdot a = 20 \cdot 20 = 400 \text{ mm}^2$

Obsah šestiúhelníku = šestinásobek obsahu rovnostranného trojúhelníku:

- výška šestiúhelníku (úsečka BV): $v = 8 \text{ mm}$
- délku strany určíme pomocí Pythagorovy věty:

$$a^2 = 8^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$a^2 = 64 + \frac{a^2}{4}$$

$$4a^2 = 256 + a^2$$

$$3a^2 = 256$$

$$a^2 = 85,3$$

$$a \doteq 9,2$$

- Obsah šestiúhelníku: $S_{\hexagon} = 6 \cdot \frac{9,2 \cdot 8}{2} = 220,8 \doteq 221 \text{ mm}^2$
- Obsah celého obrazce: $S = S_o - S_{\square} - S_{\hexagon} = 4340 - 400 - 221 = 3719 \text{ mm}^2$

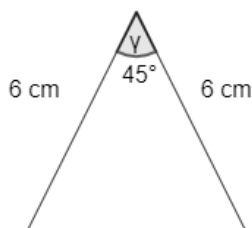
Příklad 3.3.26

Vypočítejte obsah pravidelného osmiúhelníku, jemuž je opsaná kružnice s poloměrem 6 cm.

Řešení:

Vypočítáme velikost středového úhlu: $\gamma = 360^\circ : 8 = 45^\circ$

Poté vypočítáme obsah trojúhelníku, pomocí kterého můžeme dopočítat obsah pravidelného osmiúhelníku:



$$S_{\Delta} = \frac{r^2 \cdot \sin \gamma}{2} = \frac{6^2 \cdot \sin 45^\circ}{2} \doteq 12,73 \text{ cm}^2$$

$$S = n \cdot S_{\Delta} = 8 \cdot 12,73 = 101,82 \text{ cm}^2$$

Obsah pravidelného osmiúhelníku je 101,82 cm².

Obr. 3.3.18: Obsah osmiúhelníku – Příklad 3.3.26

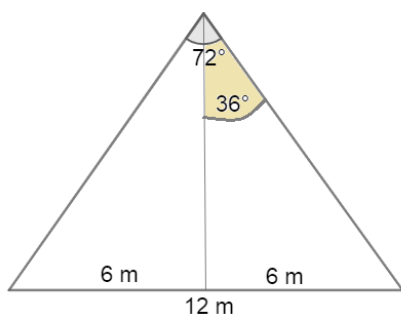
(zdroj: vlastní zpracování)

Příklad 3.3.27

Park na náměstí v Brně má rozlohu 2,50 ha. V jeho středu je kašna ve tvaru pravidelného pětiúhelníku o straně délky 12 m. Jakou část rozlohy parku zaujímá kašna? Určete v procentech.

Řešení:

Nejprve vypočítáme velikost středového úhlu pětiúhelníku:



Obr. 3.3.19: Rozloha kašny

– Příklad 3.3.27

(zdroj: vlastní zpracování)

$$\delta = 360^\circ : 5 = 72^\circ$$

Pomocí velikosti středového úhlu a goniometrických funkcí pravoúhlého trojúhelníku vypočítáme poloměr kružnice vepsané/odvěsnu pravoúhlého trojúhelníku:

$$\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} = \frac{6}{\rho}$$

$$\rho = \frac{6}{\operatorname{tg} 36^\circ} \doteq 8,26 \text{ m}$$

Dále vypočítáme obsah jednoho trojúhelníku a poté obsah celého pětiúhelníku:

$$S_{\Delta} = \frac{12 \cdot 8,26}{2} = 49,56 \text{ m}^2$$

$$S = 5 \cdot 49,56 = 247,8 \text{ m}^2$$

Hektary převedeme na metry čtverečné a dopočítáme rozlohu kašny v parku:

$$2,50 \text{ ha} = 25\,000 \text{ m}^2$$

$$\frac{247,8}{25000} = 0,009912 \doteq 0,0099, \text{ tj. } 0,99\%$$

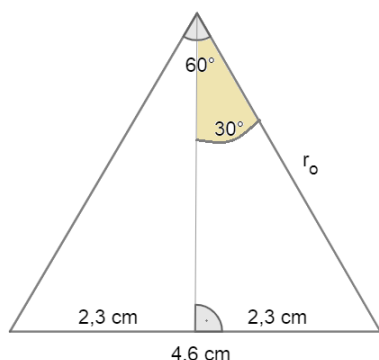
Kašna zaujímá 0,99% rozlohy parku.

Příklad 3.3.28

Délka strany pravidelného šestiúhelníku je 4,6 cm. Vypočítejte obsah šestiúhelníku.

Řešení:

Nejprve vypočítáme velikost středového úhlu $360^\circ : 6 = 60^\circ$



Poté vypočítáme velikost poloměru kružnice opsané:

$$\sin 30^\circ = \frac{2,3}{r}$$

$$r \cdot \sin 30^\circ = 2,3$$

$$r = \frac{2,3}{\sin 30^\circ} = \frac{2,3}{0,5} = 4,6$$

Obsah šestiúhelníku:

$$\begin{aligned} S &= n \cdot \frac{r^2 \cdot \sin \delta}{2} = 6 \cdot \frac{4,6^2 \cdot \sin 60^\circ}{2} = 6 \cdot \frac{21,16 \cdot \sin 60^\circ}{2} \\ &= 6 \cdot 9,16 = 54,97 \doteq 55 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Obr. 3.3.20: Obsah šestiúhelníku

– Příklad 3.3.28

(zdroj: vlastní zpracování)

Obsah pravidelného šestiúhelníku je 55 cm^2 .

Příklad 3.3.29

Dopravní značka STOP má tvar pravidelného osmiúhelníku. Značka má průměr 80 cm a je vyrobena z pozinkovaného ocelového plechu s hmotností 45 kg/m^2 . Určete plochu značky v m^2 .

Řešení:

Poloměr kružnice opsané osmiúhelníku: $r = d : 2 = 80 : 2 = 40 \text{ cm}$

Velikost středového úhlu: $360^\circ : 8 = 45^\circ$

Plocha/obsah značky:

$$S = 8 \cdot S_{\Delta} = 8 \cdot \frac{r^2 \cdot \sin 45^\circ}{2} = 8 \cdot \frac{40^2 \cdot \sin 45^\circ}{2} = 8 \cdot \frac{1600 \cdot \sin 45^\circ}{2} = 4525,4834 \doteq 4525,5 \text{ m}^2$$

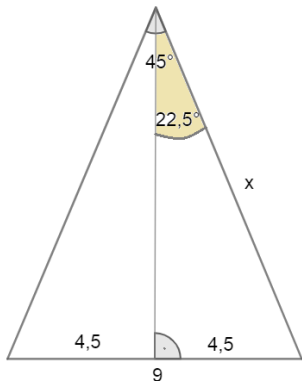
Značka STOP má plochu $4525,5 \text{ m}^2$.

Příklad 3.3.30

Vypočítejte obsah pravidelného osmiúhelníku se stranou délky 9 cm.

Řešení:

Nejprve vypočítáme velikost středového úhlu $360^\circ : 8 = 45^\circ$



Obr. 3.3.21: Obsah osmiúhelníku

– Příklad 3.3.30

(zdroj: vlastní zpracování)

Poté vypočítáme velikost poloměru kružnice opsané:

$$\sin 22,5^\circ = \frac{4,5}{x}$$

$$x \cdot \sin 22,5^\circ = 4,5$$

$$x = \frac{4,5}{\sin 22,5^\circ} = \frac{4,5}{0,38268} \doteq 11,76 \text{ cm}$$

Údaje dosadíme do vzorce obsahu osmiúhelníku:

$$S = n \cdot \frac{r^2 \cdot \sin \delta}{2} = 8 \cdot \frac{11,76^2 \cdot \sin 45^\circ}{2} =$$

$$= 8 \cdot \frac{138,2976 \cdot \sin 45^\circ}{2} \doteq 391,16 \text{ cm}^2$$

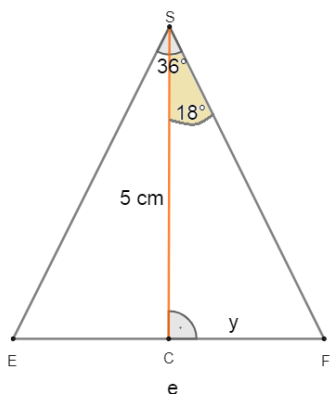
Obsah pravidelného osmiúhelníku je $391,16 \text{ cm}^2$.

Příklad 3.3.31

Vypočítejte obvod a obsah pravidelného desetiúhelníku, jemuž je vepsaná kružnice o poloměru 5 cm.

Řešení:

K výpočtu délky strany využijeme goniometrické funkce pro pravoúhlý trojúhelník:



Obr. 3.3.22: Obvod a obsah desetiúhelníku – Příklad 3.3.31

(zdroj: vlastní zpracování)

$$\delta = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$$

$$\gamma = \frac{\delta}{2} = \frac{36^\circ}{2} = 18^\circ$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{y}{\rho}$$

$$\operatorname{tg} 18^\circ = \frac{y}{5}$$

$$y = \operatorname{tg} 18^\circ \cdot 5 = 0,32495 = 1,624 \doteq 1,6 \text{ cm}$$

Délka strany desetiúhelníku je rovna dvojnásobku y:

$$e = 2 \cdot y = 2 \cdot 1,6 \doteq 3,2 \text{ cm}$$

Známe délku strany. Můžeme vypočítat obvod:

$$o = 10 \cdot e = 10 \cdot 3,2 = 32 \text{ cm}$$

K výpočtu obsahu desetiúhelníku nejprve vypočítáme obsah jednoho rovnoramenného trojúhelníku:

$$S_{\Delta} = \frac{e \cdot \rho}{2} = \frac{3,2 \cdot 5}{2} = \frac{16}{2} = 8 \text{ cm}^2$$

$$S = 10 \cdot S_{\Delta} = 10 \cdot 8 = 80 \text{ cm}^2$$

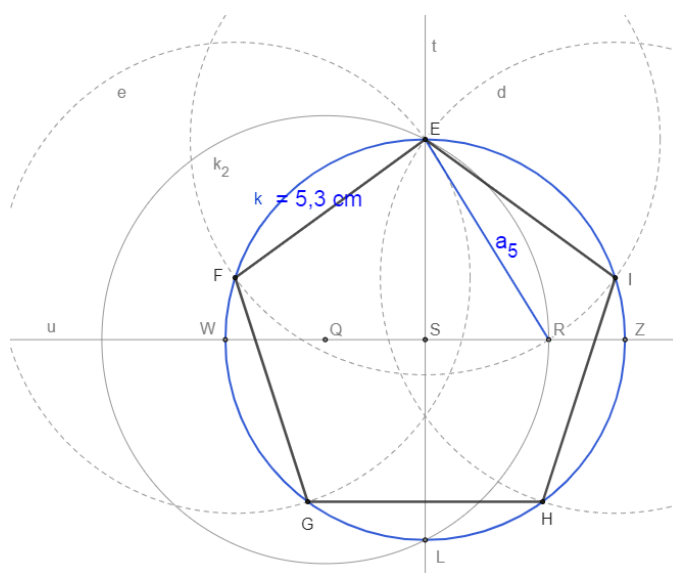
Obvod pravidelného desetiúhelníku je 32 cm a obsah 80 cm².

Příklad 3.3.32

Sestrojte pravidelný pětiúhelník EFGHI, který je vepsán do kružnice o poloměru 5,3 cm.

Řešení:

Rozbor:



Obr. 3.3.23: Rozbor konstrukce pětiúhelníku – Příklad 3.3.32
(zdroj: vlastní zpracování)

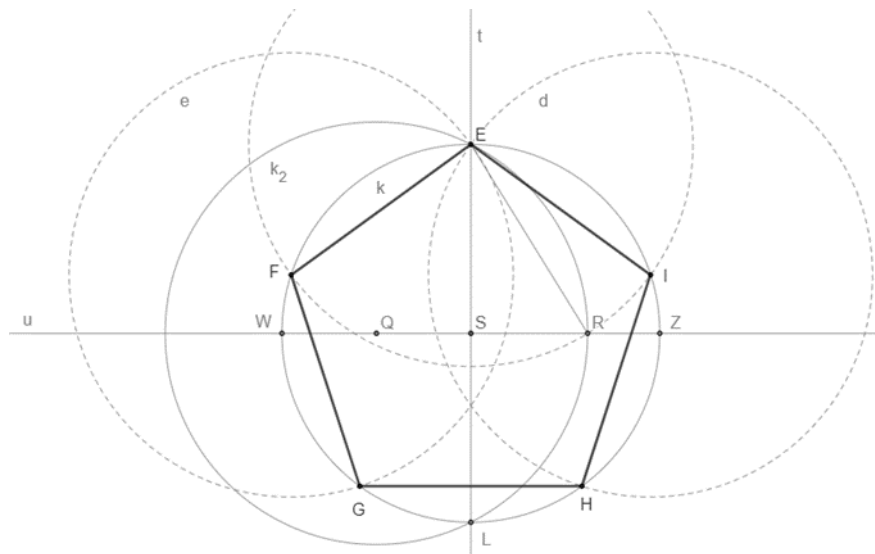
Postup konstrukce:

1. $k; k(S; 5,3 \text{ cm})$
2. $t; S \in t$
3. $E, L; E \in k \cap t \wedge L \in k \cap t$
4. $u; u \perp t, S \in u$
5. $W, Z; W \in u \cap k \wedge Z \in u \cap k$
6. $Q; Q \in u \wedge |WQ| = |QS|$
7. $k_2; k_2(Q; |QE|)$
8. $R; R \in u \cap k_2$

9. $ER; |ER| = a_5$

10. *pravidelný pětiúhelník EFGHI*

Konstrukce:



Obr. 3.3.24: Konstrukce pětiúhelníku – Příklad 3.3.32

(zdroj: vlastní zpracování)

Konstrukce plyne z vlastností pětiúhelníku a z vlastností úhlů v trojúhelníku.

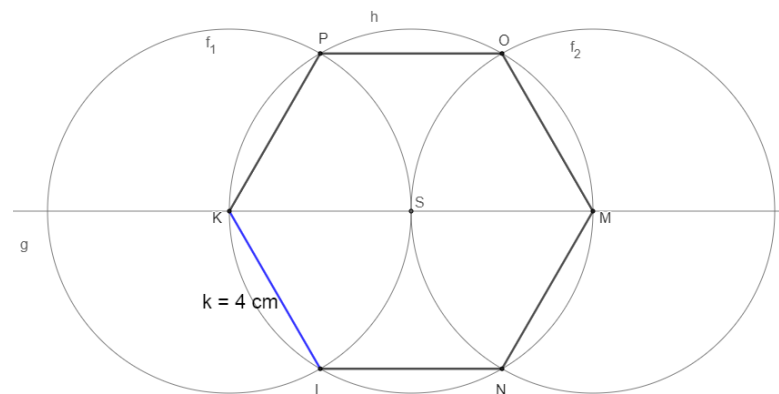
Pro daný poloměr kružnice opsané pětiúhelníku má úloha 3.3.32 jedno řešení.

Příklad 3.3.33

Sestrojte pravidelný šestiúhelník KLMNOP se stranou délky 4 cm.

Řešení:

Rozbor:



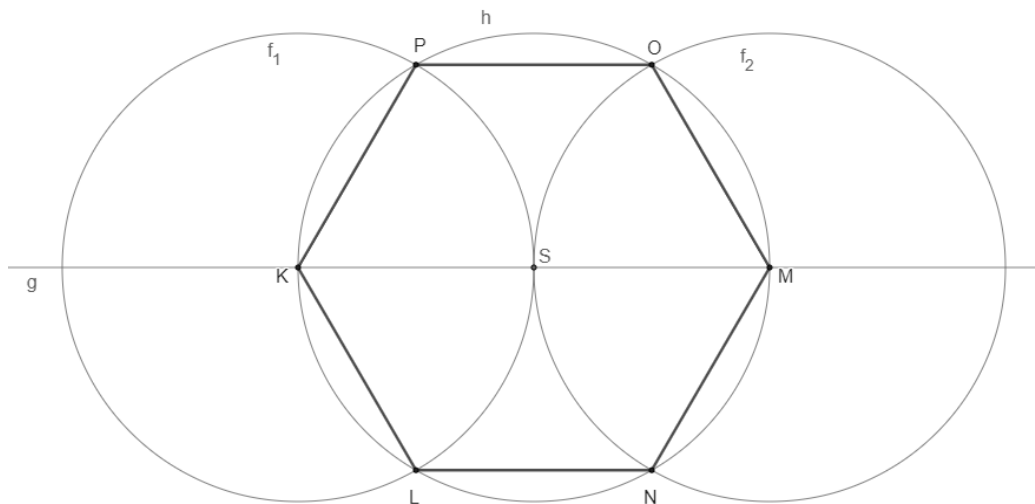
Obr. 3.3.25: Rozbor konstrukce šestiúhelníku – Příklad 3.3.33

(zdroj: vlastní zpracování)

Postup konstrukce:

1. $h; h(S; 4 \text{ cm})$
2. $g; S \in g$
3. $K, M; K \in g \cap h \wedge M \in g \cap h$
4. $f_1; f_1(K; 4 \text{ cm})$
5. $P, L; P \in f_1 \cap h \wedge L \in f_1 \cap g$
6. $f_2; f_2(M; 4 \text{ cm})$
7. $N, O; N \in f_2 \cap h \wedge O \in f_2 \cap g$
8. *pravidelný šestiúhelník KLNMO P*

Konstrukce:



Obr. 3.3.26: Konstrukce šestiúhelníku – Příklad 3.3.33

(zdroj: vlastní zpracování)

Konstrukce plyne z vlastností šestiúhelníku a z vlastností úhlů v trojúhelníku.

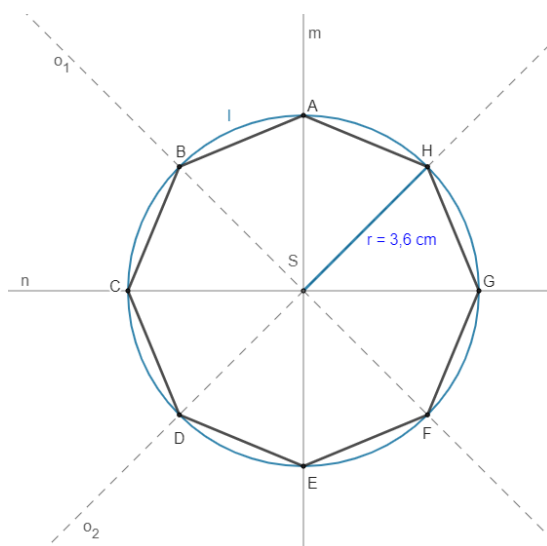
Pro danou délku strany šestiúhelníku má úloha 3.3.33 jedno řešení.

Příklad 3.3.34

Sestrojte pravidelný osmiúhelník $ABCDEFGH$, jemuž je opsána kružnice o poloměru 36 mm .

Řešení:

Rozbor:

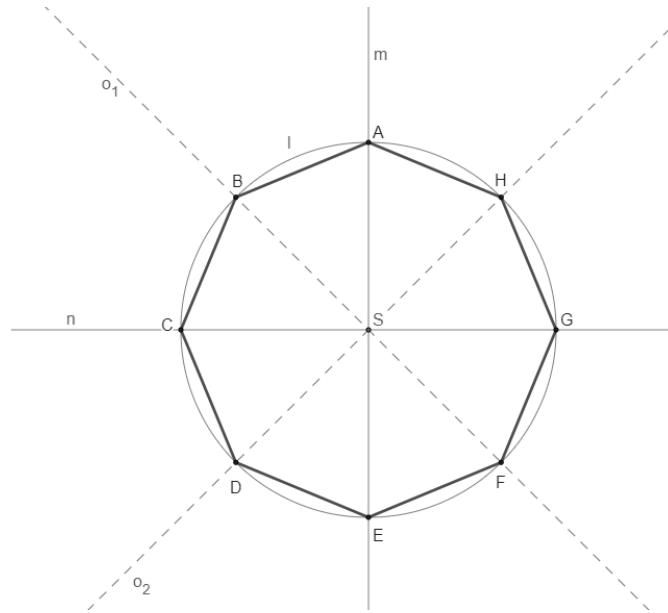


Obr. 3.3.27: Rozbor konstrukce osmiúhelníku – Příklad 3.3.34
(zdroj: vlastní zpracování)

Postup konstrukce:

1. $l; l(S; 3,6\text{cm})$
2. $m; S \in m$
3. $A, E; A \in m \cap l \wedge E \in m \cap l$
4. $n; n \perp m, S \in n$
5. $C, G; C \in n \cap l \wedge G \in n \cap l$
6. $O; O(o_1): A \rightarrow C \wedge E \rightarrow G$
7. $B, F; B \in o_1 \cap l \wedge F \in o_1 \cap l$
8. $O'; O'(o_2): A \rightarrow G \wedge C \rightarrow E$
9. $D, H; D \in o_2 \cap l \wedge H \in o_2 \cap l$
10. *pravidelný osmiúhelník $ABCDEFGH$*

Konstrukce:



Obr. 3.3.28: Konstrukce osmiúhelníku – Příklad 3.3.34
(zdroj: vlastní zpracování)

Konstrukce plyne z vlastností osmiúhelníku a z osové souměrnosti.

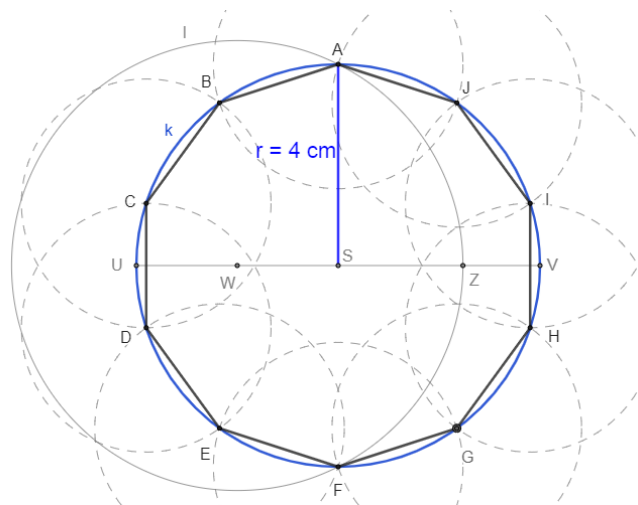
Pro daný poloměr kružnice opsané osmiúhelníku má úloha 3.3.34 jedno řešení.

Příklad 3.3.35

Sestrojte pravidelný desetiúhelník ABCDEFGHIJ, jemuž je opsána kružnice o poloměru 4 cm.

Řešení:

Rozbor:

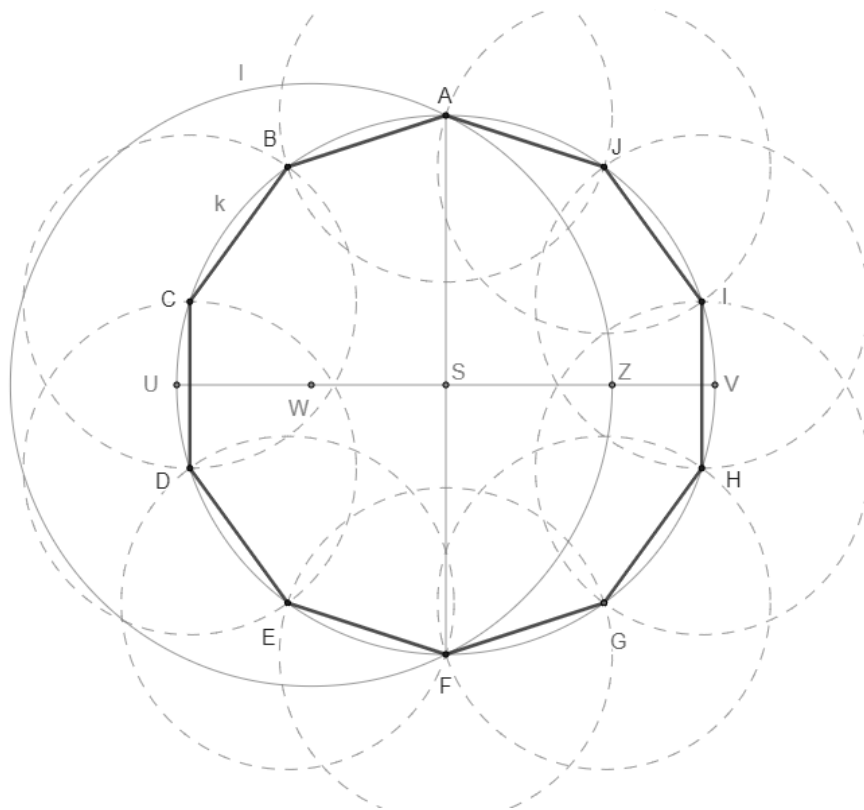


Obr. 3.3.29: Rozbor konstrukce desetiúhelníku – Příklad 3.3.35
(zdroj: vlastní zpracování)

Postup konstrukce:

1. $k; k(S; 4cm)$
2. $AF; |AF| = 8cm, S \in AF$
3. $UV; |UV| = 8cm, UV \perp AF, S \in UV$
4. $W; W \in UV \wedge |UW| = |WS|$
5. $l; l(W; |WA|)$
6. $Z; Z \in UV \cap l$
7. $ZS; |ZS| = a_{10}$
8. *pravidelný desetiúhelník ABCDEFGHIJ*

Konstrukce:



Obr. 3.3.30: Konstrukce desetiúhelníku – Příklad 3.3.35

(zdroj: vlastní zpracování)

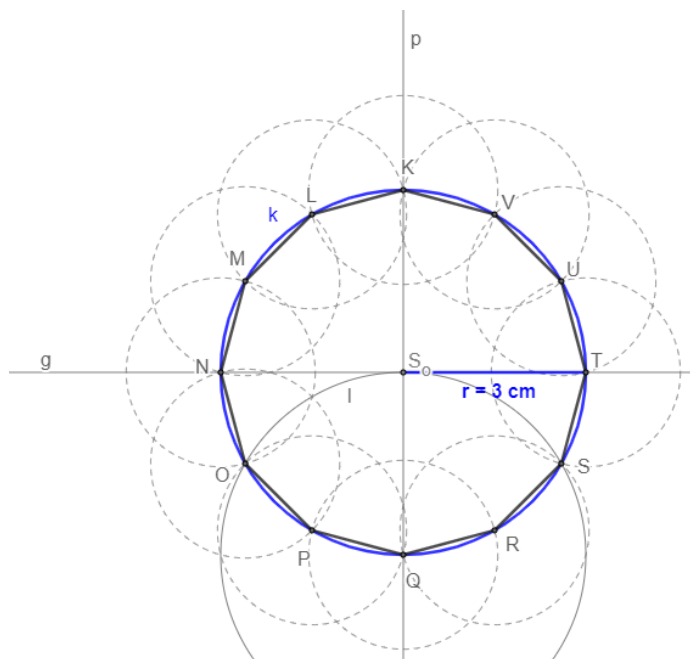
Důkaz plyne z vlastností desetiúhelníku. Pro daný poloměr kružnice opsané desetiúhelníku má úloha 3.3.35 jedno řešení.

Příklad 3.3.36

Sestrojte pravidelný dvanáctiúhelník $KLMNOPQRSTU$, jemuž je opsána kružnice o poloměru 3 cm.

Řešení:

Rozbor:

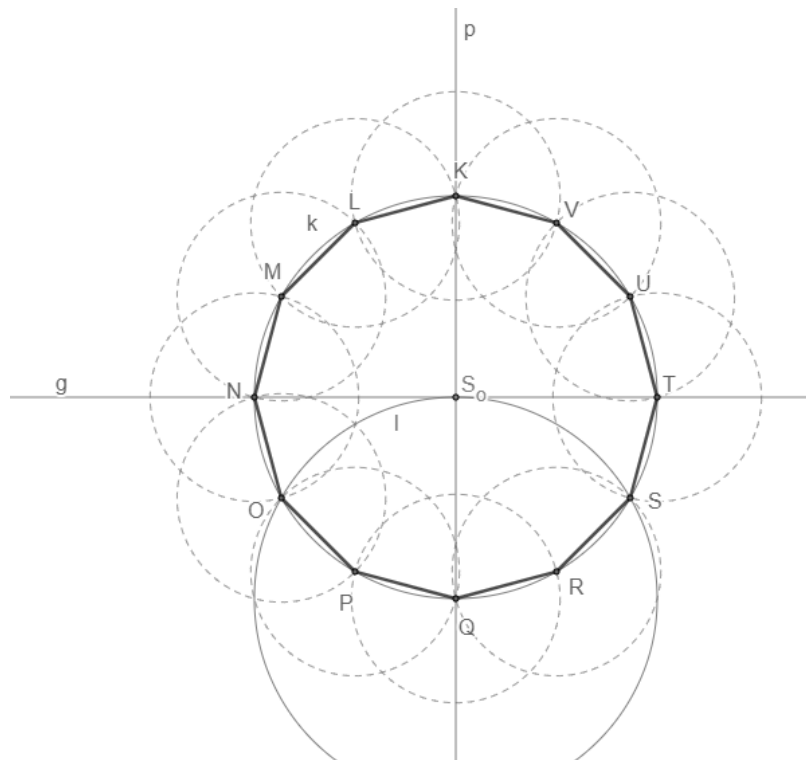


Obr. 3.3.31: Rozbor konstrukce dvanáctiúhelníku – Příklad 3.3.36
(zdroj: vlastní zpracování)

Postup konstrukce:

1. $k; k(S_0; 3 \text{ cm})$
2. $p; S_0 \in p$
3. $K, Q; K \in k \cap p \wedge Q \in k \cap p$
4. $g; g \perp p, S_0 \in g$
5. $N, T; N \in g \cap k \wedge T \in g \cap k$
6. $l; l(Q; 3 \text{ cm})$
7. $O, S; O \in k \cap l \wedge S \in k \cap l$
8. $NO; |NO| = a_{12}$
9. *pravidelný dvanáctiúhelník KLMNOPQRSTU*

Konstrukce:



Obr. 3.3.32: Konstrukce dvanáctiúhelníku – Příklad 3.3.36
(zdroj: vlastní zpracování)

Důkaz plyne z vlastností dvanáctiúhelníku a z vlastností úhlů v trojúhelníku.
Pro daný poloměr kružnice opsané dvanáctiúhelníku má úloha 3.3.36 jedno řešení.

4 Závěr

Diplomová práce se zabývala pravidelnými a konvexními mnohoúhelníky. Mnohoúhelníky slouží k nácviku rýsovacích dovedností žáků a také k rozvoji jejich znalostí v oblasti planimetrie. V teoretické části byly definovány pojmy, jako například lomená čára, uzavřená lomená čára, konvexní množina a další. Byly zde vysvětleny základní vlastnosti mnohoúhelníků. Dále byly popsány části mnohoúhelníků, a to úhlopříčky, vnitřní body, vnitřní úhly a jiné. Byl zde vysvětlen rozdíl mezi tečnovými, tětíčovými a dvojtředovými mnohoúhelníky. Součástí teoretické kapitoly byly i vzorce pro výpočet obsahu a obvodu pravidelných a konvexních mnohoúhelníků, vzorec pro výpočet součtů velikostí vnitřních úhlů mnohoúhelníku a mnohé další.

Další části diplomové práce se zaměřovaly na jednotlivé mnohoúhelníky, a to na trojúhelníky, čtyřúhelníky a další n -úhelníky. Jednotlivé mnohoúhelníky jsou v práci podrobně popsány. Jsou zde uvedeny jejich základní vlastnosti, jejich rozdělení, případně vzorce pro výpočet obsahu a obvodu. U vybraných mnohoúhelníků je popsána i jejich konstrukce.

Další část diplomové práce tvořily příklady z rovinné geometrie. Příklady byly rozčleněny do tří témat, a to do tématu trojúhelníků, čtyřúhelníků a dalších mnohoúhelníků. V úlohách byly uvedeny příklady a konstrukce právě v práci zmíněných mnohoúhelníků. Početní příklady obsahovaly zadání a řešení. Konstrukční úlohy obsahovaly rozbor, postup konstrukce a konstrukci n -úhelníku, diskuzi a důkaz. Konstrukce i rozbor byly vytvářeny v programu GeoGebra.

V práci bylo stanovených cílů dosaženo. Téma mnohoúhelníků jsem zkompletovala. Práce poskytla přehled informací o tématu pravidelných a konvexních mnohoúhelníků, které jsou vhodným učivem a doplňkem do učiva planimetrie základních škol. Práce obsahuje zajímavé příklady, které je možné využít ve školní praxi. Věřím, že příklady budou nápomocné do hodin matematiky jak učitelům, tak i žákům, kteří potřebují tomuto tématu lépe porozumět či je toto téma zajímá. Doufám, že tato práce bude inspirovat žáky k většímu zájmu o toto téma.

5 Seznam použité literatury

1. BOČEK, Leo a Jaroslav ZHOUF. Planimetrie. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2009. ISBN 978-80-7290-404-4.
2. BREJCHA, Josef. O existenci nekonvexních mnohoúhelníků předepsaného druhu. Časopis pro pěstování matematiky a fyziky. 1947, 72(4), D61-D66. ISSN 1802-114X.
3. CALDA, Emil a Jaromír ŠIMŠA. O jedné vlastnosti stran a úhlů v trojúhelníku. Rozhledy matematicko-fyzikální. 2010, 85(2), 1-5. ISSN 0035-9343.
4. CALDA, Emil. Ptolemaiova věta ve dvou úlohách. Rozhledy matematicko-fyzikální. 2021, 96(1), 4–7. ISSN 0035-9343.
5. CALDA, Emil. Umíte určit obvod trojúhelníku s nepřístupným vrcholem? Rozhledy matematicko-fyzikální. 2017, 92(2), 25-27. ISSN 0035-9343.
6. CALDA, Emil. Tři nerovnosti v pravoúhlém trojúhelníku. Rozhledy matematicko-fyzikální. 2012, 87(2), 29-32. ISSN 0035-9343.
7. Eprehledy.cz. Pravidelný pětiúhelník, pentagon [online]. 2014 [cit. 2022-05-24]. Dostupné z: <http://www.eprehledy.cz/pravidelny-petiuhelnik-pentagon-planimetrie.php>
8. FIALA, Jan. Hvězdicové mnohoúhelníky. Učitel matematiky. 2016, 24(1), 29–45. ISSN 1210-9037.
9. GHYKA, Matila C. Zlaté číslo, aneb, jak pythagorovské rytmy a obřady ovlivnily vývoj západní civilizace. Praha: Argo, 2008. ISBN 978-80-7203-926-5.
10. HAASOVÁ, Iveta. Mnohoúhelníky ve výuce matematiky na ZŠ. Plzeň, 2021. Diplomová práce. Západočeská Univerzita. Vedoucí práce Mgr. Martina Kašparová, Ph.D.
11. HANSEN, David W. On the radii of inscribed and escribed circles of right triangles. The mathematics teacher. 1979, 72(6), 462-464. ISSN 2330-0582.
12. HAVÍŘOVÁ, Barbora. Co možná nevíte o čtyřúhelníku. Rozhledy matematicko-fyzikální. 2010, 85(1), 1–12. ISSN 0035-9343.
13. HORÁK, Stanislav a František JIRÁSEK. Opakování středoškolské matematiky. 2. vyd. Praha: Bankovní institut vysoká škola, 2007. ISBN 978-80-7265-114-6.
14. HORÁK, Stanislav. Kružnice. Praha: Mladá fronta, 1966. ISBN 23-139-66 03.2.

15. HRUBÝ, Dag. Kružnice dotýkající se stran trojúhelníku. Učitel matematiky. 2016, 24(4), 231-237. ISSN 1210-9037.
16. CHANG, Chin-Hsiang. Apply discovery teaching model to instruct engineering drawing course: Sketch a regular pentagon. Procedia-Social and Behavioral Sciences. 2012, 64, 457-466. ISSN 1877-0428.
17. JONÁŠOVÁ, Eva, Zdeněk RUBEŠ a Jaroslava VESECKÁ. Matematika I. 3. vyd. Praha: Univerzita Karlova v Praze, nakladatelství Karolinum, 2015. ISBN 978-80-246-3114-1.
18. JOZEFÍK, Tomáš. Zlatý řez v matematice, přírodních vědách a umění. Praha, 2014. Odborná maturitní práce. Waldorfské lyceum. Vedoucí práce Pavel Kraemer.
19. KLOUD, Vojtěch. Geometrické řešení problému brachistochrony. Rozhledy matematicko-fyzikální. 2020, 95(1), 20-28. ISSN 0035-9343.
20. KUBEŠOVÁ, Naděžda a Eva CIBULKOVÁ. Matematika: přehled středoškolského učiva. 2. vyd. Třebíč: Petra Velanová, 2007. ISBN 978-80-86873-05-3.
21. KUŘINA, František. Matematická kultura a vyučování matematice. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie. 2010, 55(3), 243-255. ISSN 0032-2423.
22. KVĚTOŇOVÁ, Martina a Lenka MACÁLKOVÁ. Matematika pro střední odborná učiliště. Planimetrie a trigonometrie. Brno: Didaktis, 2020. ISBN 978-80-7358-342-2.
23. LEINVEBER, Jan a Josef ŠVERCL. Technické kreslení a základy deskriptivní geometrie. 3., přeprac. vyd. Praha: Scientia, 1999. ISBN 80-7183-162-X.
24. LIŠKA, Marek, Tomáš VALENTA a Lukáš KRÁL. Matika pro spolužáky. 3. vyd. Praha: ProSpolužáky.cz, 2018. ISBN 978-80-88255-22-2.
25. LIŠKA, Marek, Tomáš VALENTA a Lukáš KRÁL. Matika pro spolužáky. 4. vyd. Hradec Králové: ProSpolužáky.cz, 2019. ISBN 978-80-88255-52-9.
26. LIŠKA, Marek, Tomáš VALENTA a Lukáš KRÁL. Matika pro spolužáky. 3. vyd. Praha: ProSpolužáky.cz, 2018. ISBN 978-80-88255-23-9.
27. MOLNÁR, Josef. Planimetrie. Olomouc: Univerzita Palackého, 2001. ISBN 80-244-0370-6.
28. MOLNÁR, Josef. Matematika pro střední školy. 2. vyd. Praha: Prometheus, 2022. Učebnice pro střední školy. ISBN 978-80-7196474-2.

29. MORAVCOVÁ, Vlasta. Zlatý řez nejen v matematice. Praha: Matfyzpress, 2009. Dějiny matematiky. ISBN 978-80-7378-078-4.
30. ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. Přehled matematiky pro základní školy a víceletá gymnázia. Praha: Prometheus, 2004. ISBN 80-7196-276-7.
31. ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. Základní geometrické útvary: pracovní sešit z matematiky pro základní školy a nižší ročníky víceletých gymnázií. Praha: Prometheus, 1996. Učebnice pro základní školy. ISBN 80-7196-018-7.
32. ODVÁRKO, Oldřich a Jarmila ROBOVÁ. Čtyřúhelníky pod mikroskopem. Matematika-fyzika-informatika. 2015, 24(5), 321-330. ISSN 1805-7705.
33. PEPPIATT, Jon a Wendy ASHLOCK. About Area and Perimeter. Guelph, 2007. Numeracy Project. University of Guelph.
34. PERNÝ, Jaroslav. Kapitoly z elementární geometrie I. 3. vyd. Liberec: Technická univerzita v Liberci, 2015. ISBN 978-80-7494-205-1.
35. PETERKOVÁ-DOSKOČILOVÁ, Milada. Trojúhelník. Časopis pro pěstování matematiky a fyziky. 1940, 69(4), D177-D179. ISSN 1802-114X.
36. PIRKLOVÁ, Petra. Mnohoúhelníky: Pomocný učební text [online]. Liberec: Technická univerzita v Liberci, 2013 [cit. 2022-05-08]. Dostupné z: <https://kmd.fp.tul.cz/images/stories/vyuka/pirklova-prednasky/Mnohouhelniky.pdf>
37. POLÁK, Josef. Přehled středoškolské matematiky. 10. vyd. Praha: Prometheus, 2015. ISBN 978-80-7196-458-2.
38. POMYKALOVÁ, Eva. Matematika pro gymnázia: planimetrie. Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 1993. ISBN 80-7015-468-3.
39. POMYKALOVÁ, Eva. Matematika pro gymnázia: planimetrie. 4., upr. vyd. Praha: Prometheus, 2000. Učebnice pro střední školy. ISBN 80-7196-174-4.
40. POMYKALOVÁ, Eva. Matematika s nadhledem: od prváku k maturitě. Planimetrie II. Plzeň: Fraus, 2019. Škola s nadhledem. ISBN 978-80-7489-495-7.
41. POMYKALOVÁ, Eva. Matematika s nadhledem: od prváku k maturitě. Planimetrie I. Plzeň: Fraus, 2019. Škola s nadhledem. ISBN 978-80-7489-494-7.

42. SEDLÁČKOVÁ, Veronika. Gauss a konstruovatelnost pravidelných mnohoúhelníků pomocí kružítka a pravítka. Praha, 2014. Bakalářská práce. Univerzita Karlova v Praze. Vedoucí práce Prof. RNDr. Ladislav Kvasz, Dr.
43. STRNAD, Alois. O čtyřúhelníku dvojtředovém. [I.]. Časopis pro pěstování matematiky a fyziky. 1888, 17(1), 10-19. ISSN 1802-114X.
44. ŠTĚPÁNOVÁ, Martina. Hvězdicové mnohoúhelníky. Matematika-fyzika-informatika. 2018, 27(1), 13-22. ISSN 1805-7705.
45. TOMÁŠ, Jos. Poznámky ku geometrii trojúhelníku. [I.]. Časopis pro pěstování matematiky a fyziky. 1914, 43(1), 94-110. ISSN 1802-114X.
46. TVERSKY, Amos a Itamaer GATI. Similarity, separability, and the triangle inequality. Psychological Review. 1982, 89(2), 123-154. ISSN 0033-295X.
47. VASILJEV, N.B. a V.L. GUTENMACHER. Přímký a křivky. Praha: Mladá fronta, 1982. ISBN 23-091-82 03/2.
48. VÁVROVÁ, Renáta. Geometrie v rovině 2. Ostrava, 2006. Distanční text pro učitelství 1. stupně základní školy. Ostravská Univerzita.
49. VONDRA, Jan, Dana GAZÁRKOVÁ, Stanislava MELICHAROVÁ a René VOKŘÍNEK. Matematika pro střední školy. 2. vyd. Brno: Didaktis, 2019. ISBN 978-80-7358-320-0.
50. VORÁČOVÁ, Šárka a Lucia CSACHOVÁ. Atlas geometrie: geometrie krásná a užitečná. Praha: Academia, 2012. ISBN 978-80-200-1575-4.
51. ZELINKA, Bohdan. Rovinné grafy. Praha: Mladá fronta, 1977. ISBN 23-086-77 03/2
52. ZELINKA, Bohdan. Matematika hrou i vážně. Praha: Mladá fronta, 1979. ISBN 23-125-79.
53. ŽENATÁ, Emílie. Přehled učiva matematiky: pro 6.-9. ročník ZŠ a víceletá gymnázia s příklady a řešením. 2. vyd. Benešov: Blug, 2010. ISBN 978-80-7274-014-7.

6 Seznam obrázků

Obr. 2.1.1: Lomená čára (zdroj: vlastní zpracování)

Obr. 2.1.2: Uzavřená lomená čára (zdroj: vlastní zpracování)

Obr. 2.1.3: Jednoduchá uzavřená lomená čára (zdroj: vlastní zpracování)

Obr. 2.1.4: Mnohoúhelníky (zdroj: vlastní zpracování)

Obr. 2.1.5: (a) Tětivový mnohoúhelník (b) Tečnový mnohoúhelník (zdroj: Molnár, 2001, str. 61)

Obr. 2.1.1.1: (a) Konvexní množina (b) Nekonvexní množina (zdroj: vlastní zpracování)

Obr. 2.1.1.2: (a) Konvexní mnohoúhelník (b) Nekonvexní mnohoúhelník (zdroj: vlastní zpracování)

Obr. 2.1.1.3: (a) Konvexní mnohoúhelník (b) Nekonvexní mnohoúhelník (zdroj: Molnár, 2001, str. 48)

Obr. 2.1.1.4: Vnitřní úhel (oranžový) a vnější úhel (modrý) konvexního mnohoúhelníku (zdroj: vlastní zpracování)

Obr. 2.1.2.1: N-úhelník (a) n je sudé (b) n je liché (zdroj: Pomykalová, 1993, str. 43)

Obr. 2.1.2.2: N rovnoramenných trojúhelníků v n-úhelníku (zdroj: Vondra et al., 2019, str. 55)

Obr. 2.1.2.3: Kružnice opsaná a vepsaná mnohoúhelníku (zdroj: Vondra et al., 2019, str. 55)

Obr. 2.1.2.4: Konstrukce pravidelného sedmiúhelníku (zdroj: Boček & Zhouf, 2009, str. 119)

Obr. 2.1.3.1: Pravidelný pětiúhelník (zdroj: vlastní zpracování)

Obr. 2.1.3.2: Zlatý poměr v pravidelném pětiúhelníku (zdroj: Vondra et al., 2019, str. 59)

Obr. 2.1.3.3: Pentagram (zdroj: <http://www.geneze.info/pojmy/subdir/pentagram.htm>, 4.11.2020)

Obr. 2.1.3.4: Konstrukce pravidelného pětiúhelníku – známe poloměr kružnice opsané (zdroj: vlastní zpracování)

Obr. 2.1.3.5: Konstrukce pravidelného pětiúhelníku – známe délku strany (zdroj: Chang, 2012, str. 459)

Obr. 2.1.4.1: Pravidelný šestiúhelník (zdroj: Vondra et al., 2019, str. 57)

Obr. 2.1.4.2: Konstrukce pravidelného šestiúhelníku (zdroj: Vondra et al., 2019, str. 57)

Obr. 2.1.4.3: Osy stran pravidelného šestiúhelníku (zdroj: Vondra et al., 2019, str. 57)

Obr. 2.1.5.1: Konstrukce pravidelného sedmiúhelníku (zdroj: vlastní zpracování)

Obr. 2.1.6.1: Pravidelný osmiúhelník (zdroj: Vondra et al., 2019, str. 58)

Obr. 2.1.6.2: Konstrukce strany pravidelného osmiúhelníku (zdroj: vlastní zpracování)

Obr. 2.1.6.3: Konstrukce pravidelného osmiúhelníku (zdroj: Vondra et al., 2019, str. 58)

Obr. 2.1.7.1: Rovnoramenný trojúhelník pravidelného desetiúhelníku (zdroj: Jozefík, 2014, str. 13)

Obr. 2.1.7.2: Konstrukce strany pravidelného desetiúhelníku (zdroj: vlastní zpracování)

Obr. 2.1.7.3: Konstrukce pravidelného desetiúhelníku (zdroj: vlastní zpracování)

Obr. 2.1.8.1: Konstrukce strany dvanáctiúhelníku (zdroj: vlastní zpracování)

Obr. 2.1.8.2: Konstrukce dvanáctiúhelníku (zdroj: vlastní zpracování)

Obr. 2.2.1: Průnik polorovin EFG, FGE a GEF (zdroj: Perný, 2015, str. 17)

Obr. 2.2.2: Strany a úhly trojúhelníku (zdroj: vlastní zpracování)

Obr. 2.2.3: Úhly trojúhelníku (zdroj: Pomykalová, 1993, str. 25)

Obr. 2.2.4: Úhly v rovnoramenném trojúhelníku (zdroj: vlastní zpracování)

Obr. 2.2.5: Střední příčka trojúhelníku (zdroj: Pomykalová, 1993, str. 26)

Obr. 2.2.6: Výšky trojúhelníku a ortocentrum (zdroj: Pomykalová, 1993, str. 26)

Obr. 2.2.7: Výšky a) v ostroúhlém, b) v tupoúhlém, c) v pravoúhlém trojúhelníku (zdroj: Liška, Valenta & Král, 2018, str. 40)

Obr. 2.2.8: Těžnice a těžiště trojúhelníku (zdroj: Liška, Valenta & Král, 2018, str. 41)

Obr. 2.2.9: Těžiště a těžnice a) ostroúhlého, b) tupoúhlého, c) pravoúhlého trojúhelníku (zdroj: Liška, Valenta & Král, 2018, str. 40)

Obr. 2.2.10: Kružnice opsaná trojúhelníku (zdroj: Pomykalová, 1993, str. 27)

Obr. 2.2.11: Kružnice vepsaná trojúhelníku (zdroj: Pomykalová, 1993, str. 27)

Obr. 2.2.12: Kružnice opsaná v různých typech trojúhelníků (zdroj: Liška, Valenta & Král, 2018, str. 41)

Obr. 2.2.13: Kružnice vepsaná v různých typech trojúhelníků (zdroj: Liška, Valenta & Král, 2018, str. 41)

Obr. 2.2.14: Kružnice připsaná trojúhelníku (zdroj: Liška, Valenta & Král, 2018, str. 42)

Obr. 2.2.15: Kružnice připsané (zdroj: Pomykalová, 2019, str. 14)

Obr. 2.2.16: Rozdělení trojúhelníků dle vnitřních úhlů: a) pravoúhlý, b) ostroúhlý, c) tupoúhlý (zdroj: Liška, Valenta & Král, 2018, str. 39)

Obr. 2.2.17: Eukleidova věta o výšce (zdroj: Vondra et al., 2019, str. 39)

Obr. 2.2.18: Eukleidova věta o odvěsně (zdroj: Vondra et al., 2019, str. 40)

Obr. 2.2.19: Pythagorova věta (zdroj: Liška, Valenta & Král, 2018, str. 73)

Obr. 2.2.20: Thaletova kružnice (zdroj: Odvárko & Kadleček, 2004, str. 190)

Obr. 2.2.21: Dělení trojúhelníků dle délek stran: a) rovnostranný, b) rovnoramenný, c) různoramenný (zdroj: Perný, 2015, str. 18)

Obr. 2.3.1: Čtyřúhelník (zdroj: Boček & Zhouf, 2009, str. 108)

Obr. 2.3.2: a) Konvexní, b) Nekonvexní čtyřúhelník (zdroj: Vondra et al., 2019, str. 60)

Obr. 2.3.3: Těžiště čtyřúhelníku (zdroj: Pomykalová, 2019, str. 28)

Obr. 2.3.4: Součet vnitřních úhlů tětívového čtyřúhelníku (zdroj: Pomykalová, 1993, str. 48)

Obr. 2.3.5: Součet délek stran tětívového čtyřúhelníku (zdroj: Pomykalová, 1993, str. 48)

Obr. 2.3.6: Klasifikace konvexních čtyřúhelníků (zdroj: Jonášová, Rubeš & Vesecká, 2015, str. 30)

Obr. 2.3.7: a) Různoběžníky, b) Lichoběžníky, c) Rovnoběžníky (zdroj: Vondra et al., 2019, str. 61)

Obr. 2.3.1.1: Vlastnosti rovnoběžníků (zdroj: Vondra et al., 2019, str. 62)

Obr. 2.3.1.2: Obsah rovnoběžníku (zdroj: Ženatá, 2010, str. 409)

Obr. 2.3.1.3: a) Rovnostranné, b) Různostranné rovnoběžníky, c) Pravoúhlé, d) Kosoúhlé rovnoběžníky (zdroj: Vondra et al., 2019, str. 62)

Obr. 2.3.1.4: Vlastnosti čtverce (zdroj: Liška, Valenta & Král, 2018, str. 45)

Obr. 2.3.1.5: Vlastnosti čtverce (zdroj: Ženatý, 2010, str. 470)

Obr. 2.3.1.6: Vlastnosti kosočtverce (zdroj: Ženatá, 2010, str. 471)

Obr. 2.3.1.7: Kosočtverec (zdroj: Liška, Valenta & Král, 2018, str. 46)

Obr. 2.3.1.8: Kosodélník (zdroj: Liška, Valenta & Král, 2018, str. 45)

Obr. 2.3.1.9: Výšky a úhlopříčky kosodélníku (zdroj: Vondra et al., 2019, str. 63)

Obr. 2.3.1.10: Obdélník (zdroj: Liška, Valenta & Král, 2018, str. 45)

Obr. 2.3.2.1: Obecný lichoběžník (zdroj: vlastní zpracování)

Obr. 2.3.2.2: Rovnoramenný lichoběžník (zdroj: Pomykalová, 2019, str. 29)

Obr. 2.3.2.3: Pravoúhlý lichoběžník (zdroj: Pomykalová, 2019, str. 29)

Obr. 2.3.3.1: Deltoid (zdroj: Vondra et al., 2019, str. 66)

Obr. 2.3.3.2: Obsah deltoidu (zdroj: Vondra et al., 2019, str. 66)

Obr. 3.1.1: Strana trojúhelníku – Příklad 3.1.4 (zdroj: vlastní zpracování)

Obr. 3.1.2: Délka odvěsen a výška trojúhelníku – Příklad 3.1.5 (zdroj: vlastní zpracování)

Obr. 3.1.3: Úhly trojúhelníku – Příklad 3.1.6 (zdroj: vlastní zpracování)

Obr. 3.1.4: Úhly trojúhelníku – Příklad 3.1.6 (zdroj: vlastní zpracování)

Obr. 3.1.5: Délka ramen štaflí – Příklad 3.1.12 (zdroj: vlastní zpracování)

Obr. 3.1.6: Pythagorova věta – Příklad 3.1.13 (zdroj: vlastní zpracování)

Obr. 3.1.7: Výška stropu místnosti – Příklad 3.1.14 (zdroj: vlastní zpracování)

Obr. 3.1.8: Goniometrické funkce – Příklad 3.1.15 (zdroj: vlastní zpracování)

Obr. 3.1.9: Goniometrické funkce – Příklad 3.1.16 (zdroj: vlastní zpracování)

Obr. 3.1.10: Velikost úhlu trojúhelníku – Příklad 3.1.17 (zdroj: vlastní zpracování)

Obr. 3.1.11: Velikost úhlu trojúhelníku – Příklad 3.1.17 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.1.12: Rozbor konstrukce trojúhelníku – Příklad 3.1.18 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.1.13: Konstrukce trojúhelníku – Příklad 3.1.18 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.1.14: Konstrukce trojúhelníku – Příklad 3.1.18 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.1.15: Konstrukce trojúhelníku – Příklad 3.1.18 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.1.16: Rozbor konstrukce trojúhelníku – Příklad 3.1.19 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.1.17: Konstrukce trojúhelníku – Příklad 3.1.19 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.1.18: Rozbor konstrukce trojúhelníku – Příklad 3.1.20 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.1.19: Konstrukce trojúhelníku – Příklad 3.1.20 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.1.20: Rozbor konstrukce trojúhelníku – Příklad 3.1.21 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.1.21: Konstrukce trojúhelníku – Příklad 3.1.21 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.1.22: Rozbor konstrukce trojúhelníku – Příklad 3.1.22 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.1.23: Konstrukce trojúhelníku – Příklad 3.1.22 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.1.24: Rozbor konstrukce trojúhelníku – Příklad 3.1.23 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.1.25: Konstrukce trojúhelníku – Příklad 3.1.23 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.1.26: Rozbor konstrukce trojúhelníku – Příklad 3.1.24 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.1.27: Konstrukce trojúhelníku – Příklad 3.1.24 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.1.28: Rozbor konstrukce trojúhelníku – Příklad 3.1.25 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.1.29: Konstrukce trojúhelníku – Příklad 3.1.25 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.1.30: Rozbor konstrukce trojúhelníku – Příklad 3.1.26 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.1.31: Konstrukce trojúhelníku – Příklad 3.1.26 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.1.32: Rozbor konstrukce trojúhelníku – Příklad 3.1.27 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.1.33: Konstrukce trojúhelníku – Příklad 3.1.27 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.2.1: Velikost úhlu rovnoběžníku – Příklad 3.2.2 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.2.2: Velikost úhlu rovnoběžníku – Příklad 3.2.2 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.2.3: Počet čtverců – Příklad 3.2.3 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.2.4: Obsah čtverce – Příklad 3.2.4 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.2.5: Obsah čtverce – Příklad 3.2.4 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.2.6: Šířka obdélníku – Příklad 3.2.5 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.2.7: Obsah rovnoběžníku – Příklad 3.2.6 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.2.8: Obsah rovnoběžníku – Příklad 3.2.6 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.2.9: Obsah obdélníku – Příklad 3.2.7 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.2.10: Obsah obdélníku – Příklad 3.2.8 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.2.11: Obsah kosodélníku – Příklad 3.2.9 (zdroj: vlastní zpracování)

Obr. 3.2.12: Obvod obdélníku – Příklad 3.2.12 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.2.13: Obvod obdélníku – Příklad 3.2.12 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.2.14: Díly obdélníku – Příklad 3.2.13 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.2.15: Strany kosočtverce – Příklad 3.2.14 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.2.16: Strany kosočtverce – Příklad 3.2.14 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.2.17: Rozbor konstrukce obdélníku – Příklad 3.2.15 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.2.18: Konstrukce obdélníku – Příklad 3.2.15 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.2.19: Rozbor konstrukce kosočtverce – Příklad 3.2.16 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.2.20: Konstrukce kosočtverce – Příklad 3.2.16 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.2.21: Rozbor konstrukce kosočtverce – Příklad 3.2.17 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.2.22: Konstrukce kosočtverce – Příklad 3.2.17 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.2.23: Rozbor konstrukce kosodélníku – Příklad 3.2.18 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.2.24: Konstrukce kosodélníku – Příklad 3.2.18 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.2.25: Rozbor konstrukce rovnoběžníku – Příklad 3.2.19 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.2.26: Konstrukce rovnoběžníku – Příklad 3.2.19 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.2.27: Velikost úhlů lichoběžníku – Příklad 3.2.21 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.2.28: Obsah lichoběžníku – Příklad 3.2.22 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.2.29: Obsah lichoběžníku – Příklad 3.2.22 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.2.30: Obsah lichoběžníku – Příklad 3.2.23 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.2.31: Obsahy tří obrazců – Příklad 3.2.24 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.2.32: Délka základen lichoběžníku – Příklad 3.2.25 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.2.33: Rozbor konstrukce lichoběžníku – Příklad 3.2.26 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.2.34: Konstrukce lichoběžníku – Příklad 3.2.26 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.2.35: Rozbor konstrukce lichoběžníku – Příklad 3.2.27 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.2.36: Konstrukce lichoběžníku – Příklad 3.2.27 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.2.37: Rozbor konstrukce lichoběžníku – Příklad 3.2.28 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.2.38: Konstrukce lichoběžníku – Příklad 3.2.28 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.2.39: Deltoid – Příklad 3.2.29 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.2.40: Jednotažky – Příklad 3.2.30 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.2.41: Čtyřúhelník – Příklad 3.2.31 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.2.42: Rozbor konstrukce čtyřúhelníku – Příklad 3.2.32 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.2.43: Konstrukce čtyřúhelníku – Příklad 3.2.32 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.2.44: Rozbor konstrukce čtyřúhelníku – Příklad 3.2.33 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.2.45: Konstrukce čtyřúhelníku – Příklad 3.2.33 (zdroj: vlastní zpracování)

Obr. 3.2.46: Rozbor konstrukce čtyřúhelníku – Příklad 3.2.34 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.2.47: Konstrukce čtyřúhelníku – Příklad 3.2.34 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.3.1: Rozdělení šestiúhelníku – Příklad 3.3.3 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.3.2: Osy souměrnosti osmiúhelníku – Příklad 3.3.4 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.3.3: Osy souměrnosti pětiúhelníku – Příklad 3.3.4 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.3.4: Pětiúhelník – Příklad 3.3.5 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.3.5: Osy souměrnosti – Příklad 3.3.6 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.3.6: Velikost úhlu pětiúhelníku – Příklad 3.3.10 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.3.7: Velikost úhlů šestiúhelníku, sedmiúhelníku – Příklad 3.3.11 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.3.8: Velikost úhlu devítiúhelníku – Příklad 3.3.12 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.3.9: Velikost úhlů šestiúhelníku – Příklad 3.3.13 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.3.10: Počet vrcholů – Příklad 3.3.15 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.3.11: Podíl obsahu šestiúhelníku a trojúhelníku – Příklad 3.3.21 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.3.12: Podíl obsahu šestiúhelníku a trojúhelníku – Příklad 3.3.21 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.3.13: Poměr obsahu šestiúhelníku a trojúhelníku – Příklad 3.3.22 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.3.14: Obsah šestiúhelníku – Příklad 3.3.23 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.3.15: Plocha šestiúhelníku – Příklad 3.3.24 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.3.16: Plocha šestiúhelníku – Příklad 3.3.24 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.3.17: Obsah obrazce – Příklad 3.3.25 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.3.18: Obsah osmiúhelníku – Příklad 3.3.26 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.3.19: Rozloha kašny – Příklad 3.3.27 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.3.20: Obsah šestiúhelníku – Příklad 3.3.28 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.3.21: Obsah osmiúhelníku – Příklad 3.3.30 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.3.22: Obvod a obsah desetiúhelníku – Příklad 3.3.31 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.3.23: Rozbor konstrukce pětiúhelníku – Příklad 3.3.32 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.3.24: Konstrukce pětiúhelníku – Příklad 3.3.32 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.3.25: Rozbor konstrukce šestiúhelníku – Příklad 3.3.33 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.3.26: Konstrukce šestiúhelníku – Příklad 3.3.33 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.3.27: Rozbor konstrukce osmiúhelníku – Příklad 3.3.34 (zdroj: vlastní zpracování)
Obr. 3.3.28: Konstrukce osmiúhelníku – Příklad 3.3.34 (zdroj: vlastní zpracování)

Obr. 3.3.29: Rozbor konstrukce desetiúhelníku – Příklad 3.3.35 (zdroj: vlastní zpracování)

Obr. 3.3.30: Konstrukce desetiúhelníku – Příklad 3.3.35 (zdroj: vlastní zpracování)

Obr. 3.3.31: Rozbor konstrukce dvanáctiúhelníku – Příklad 3.3.36 (zdroj: vlastní zpracování)

Obr. 3.3.32: Konstrukce dvanáctiúhelníku – Příklad 3.3.36 (zdroj: vlastní zpracování)

7 Seznam tabulek

Tab. 2.2.1: Goniometrické funkce ostrého úhlu (zdroj: Jonášová, Rubeš & Vesecká, 2015, str. 28)

8 Seznam zkratk

RVP ZV – Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání

ANOTACE

Jméno a příjmení:	Michaela Malečková
Katedra:	Katedra matematiky
Vedoucí práce:	Mgr. Hodaňová Jitka, Ph.D.
Rok obhajoby:	2022

Název práce:	Mnohoúhelníky v učivu matematiky na základní škole
Název v angličtině:	Polygons in the mathematics curriculum of elementary school
Anotace práce:	Diplomová práce se zabývá konvexními a pravidelnými mnohoúhelníky. Zahrnuje vlastnosti mnohoúhelníků, jejich popis i rozdělení. Tato práce uvádí také konstrukci vybraných mnohoúhelníků. Diplomová práce obsahuje úlohy z rovinné geometrie. Úlohy jsou početní i konstrukční. Úlohy poskytují inspiraci pro učitele jako materiály do hodin matematiky i pro žáky, kteří potřebují tomuto tématu lépe porozumět či je toto téma zajímá.
Klíčová slova:	Mnohoúhelník, n-úhelník, trojúhelník, čtyřúhelník, lichoběžník, rovnoběžník, pravidelný pětiúhelník, pravidelný šestiúhelník, pravidelný sedmiúhelník, pravidelný osmiúhelník, pravidelný desetiúhelník, pravidelný dvanáctiúhelník
Anotace v angličtině:	The diploma thesis deals with convex and regular polygons. It includes the properties of polygons, their description and distribution. This work also presents the construction of selected polygons. The diploma thesis contains tasks in planar geometry. The tasks are numerical and constructional. The tasks provide inspiration for teachers of math lesson materials as well as for pupils who need to better understand or are interested in this topic.
Klíčová slova v angličtině:	Polygon, n-gon, triangle, quadrangle, trapezoid, parallelogram, regular pentagon, regular hexagon, regular

	heptagon, regular octagon, regular decagon, regularly dodecagon
Přílohy vázané v práci:	--
Rozsah práce:	139
Jazyk práce:	Český jazyk