Pedagogická fakulta
Faculty of Education
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

Diplomová práce

Eulerovo číslo

Vypracoval: Bc. Lucie Rálková
Vedoucí práce: RNDr. Libuše Samková, Ph.D.

České Budějovice 2017

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji diplomovou práci na téma Eulerovo číslo jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích 28.4.2017 ………………………….

Bc. Lucie Rálková

JIHOČESKÁ UNIVERZITA V ČESKÝCH BUDĚJOVICÍCH
Fakulta pedagogická
Akademický rok: **2015/2016**

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení:	**Bc. Lucie RÁLKOVÁ**
Osobní číslo:	**P13648**
Studijní program:	**N7503 Učitelství pro základní školy**
Studijní obory:	**Učitelství matematiky pro 2. stupeň základních škol**
	Učitelství informatiky pro 2. stupeň základních škol
Název tématu:	**Eulerovo číslo v matematické analýze**
Zadávající katedra:	**Katedra matematiky**

Z á s a d y   p r o   v y p r a c o v á n í :

Teoretická část: Rešeršní práce
Praktická část: Vypracovat přehlednou studii o roli Eulerova čísla v matematické analýze. Úvod práce věnovat nezbytným vymezením v historických a praktických souvislostech. V hlavní části práce se hlavně věnovat vztahu Eulerova čísla k různým tématům matematické analýzy (posloupnosti, limity, derivace, integrály, diferenciální rovnice, mocninné řady, nekonečné řady) a k jejich aplikacím (v geometrii, v biologii, v ekonomii, apod.). Dle uvážení studentky může být studie doplněna i jinými tématy, například využití Eulerova čísla v informatice.

Rozsah grafických prací: **dle dohody**

Rozsah pracovní zprávy: **30- 50 (dle dohody)**

Forma zpracování diplomové práce: **tištěná**

Seznam odborné literatury:

- **Samková: Matematické modelování v biologických disciplínách.**
- **elektronická knihovna http://dml.cz/**
- **časopis Matematika, fyzika, informatika**
- **hledání (další) vhodné literatury je součástí vypracování DP**

Vedoucí diplomové práce: **RNDr. Libuše Samková, Ph.D.**
Katedra matematiky

Datum zadání diplomové práce: **26. dubna 2016**

Termín odevzdání diplomové práce: **27. dubna 2018**

Michal Vančura

Mgr. Michal Vančura, Ph.D.
děkan

L.S.

prof. RNDr. Pavel Pech, CSc.
vedoucí katedry

V Českých Budějovicích dne 1. února 2016

Anotace

Hlavním cílem mé diplomové práce na téma „Eulerovo číslo v matematické analýze“ je vytvořit přehled eulerova čísla v matematické analýze. Diplomová práce v první části pojednává o vzniku čísla *e*, v další části současné použití v matematické analýze. Účelem vzniku této práce je nahlédnutí studentům středních či vysokých škol do problematiky eulerova čísla a pro lepší pochopení významu *e* nejen v matematice.

Klíčová slova: Euler, eulerovo číslo, *e*, matematická analýza, historie eulerova čísla, limita a posloupnost, matematické řady, derivace, integrály, logaritmus, finanční aplikace

Annotation

The main aim of my thesis on the topic of "Euler's number in mathematical analysis" is to create an overview of the Euler numbers in calculus. This essay in the first part deals with the rise of the number *e*, in other parts of the current use of calculus. Purpose of this work is the insight students of secondary schools and universities to problems Euler numbers and to better understand the importance of *e* not only in mathematics.

Key words: Euler, Euler's number, *e*, calculus, history Euler numbers, limits and succession, mathematical derivations, integrals, logarithm, financial applications

Obsah

1 Úvod

Kdysi jsem slyšela výborný vtip. Jednou takhle vtrhne naštvaná zuřivá derivace do hospody, kam chodívají funkce. Polynomy rychle vypadnou, ostatní funkce taky dostanou strach a klidí se jí z cesty, jen e^x tam zůstane sedět. Derivace se rozčílí a zařve: "A co ty, ty se mě nebojíš?" No a e^x v klidu prohlásí: "Já jsem přece e^x, samozřejmě, že se tě nebojím." A ta derivace prohlásí: "No jo, jenomže já jsem dneska naštvaná a derivuju podle *y*!"[1] Kdykoliv jsem tento vtip vyprávěla, málo kdo ho pochopil. Ptali se mě žáci, studenti ale i dospělí: Co je eulerovo číslo? K čemu se používá? Hodnota je 2,71, ale to je vše co vím. To je jako π?

Všichni vědí co je π – seznámili jsme se už na základní škole při obsahu kruhu. Ale eulerovo číslo se okrajově vyskytuje na střední škole a následně pak na vysoké. I díky této práci jsem já lépe pochopila použití čísla *e*.

Hned za π je v síni slávy transcendentních čísel („přesahují algebru“) nejznámější konstanta e. Toto číslo, jehož hodnota (na šest desetinných míst) je 2,718281, je někdy nazýváno „Eulerovým číslem“ podle matematika, který ho zpopularizoval. Od svého vzniku se stalo nedocenitelným v takových oblastech, jako je výzkum vývoje populace či finanční matematika, a objevuje se všude ve statistice a teorii pravděpodobnosti. (Crilly, s.42)

Mnozí z nás si vzpomenou, že se jedná o základ přirozeného algoritmu. Ale proč zrovna toto číslo? Proč se v tak velké míře vyskytuje v matematice? K čemu bylo potřeba dříve, když my se s ním setkáváme především až na vysoké škole? Na všechny tyto otázky dostaneme odpověď v této práci a i na mnoho dalších. V této práci se seznámíme s příběhem čísla *e* tak, aby si na své přišel každý čtenář.

Eulerovo číslo v dnešní době je známo na jeden milion desetinných míst. Pro ochutnávku zde uvedu desetinný zápis eulerova čísla na 2 230 desetinných míst.

$e =$

---

[1] http://vs-vtipy.tonikovo.cz/vtipy/derivace/

2,718281828459045235360287471352662497757247093699959574966967627
7240766303535475945713821785251664274274663919320030599218174135966290
4357290033429526059563073813232862794349076323382988075319525101901157
3834187930702154089149934884167509244761460668082264800168477411853742
3454424371075390777449920695517027618386062613313845830007520449338265
6029760673711320070932870912744374704723069697720931014169283681902551
5108657463772111252389784425056953696770785449969967946864454905987931
6368892300987931277361782154249992295763514822082698951936680331825288
6939849646510582093923982948879332036250944311730123819706841614039701
9837679320683282376464804295311802328782509819455815301756717361332069
8112509961818815930416903515988885193458072738667385894228792284998920
8680582574927961048419844436346324496848756023362482704197862320900216
0990235304369941849146314093431738143640546253152096183690888707016768
3964243781405927145635490613031072085103837505101157477041718986106873
9696552126715468895703503540212340784981933432106817012100562788023519
3033224745015853904730419957777093503660416997329725088687696640355570
7162268447162560798826517871341951246652010305921236677194325278675398
5589448969709640975459185695638023637016211204774272283648961342251644
5078182442352948636372141740238893441247963574370263755294448337998016
1254922785092577825620926226483262779333865664816277251640191059004916
4499828931505660472580277863186415519565324425869829469593080191529872
1172556347546396447910145904090586298496791287406870504895858671747985
4667757573205681288459205413340539220001137863009455606881667400169842
0558040336379537645203040243225661352783695117788386387443966253224985
0654995886234281899707733276171783928034946501434558897071942586398772
7547109629537415211151368350627526023264847287039207643100595841166120
5452970302364725492966693811513732275364509888903136020572481765851180
6303644281231496550704751025446501172721155519486685080036853228183152
1960037356252794495158284188294787610852639813955990067376482922443752
8718462457803619298197139914756448826260390338144182326251509748279877
7996437308997038886778227138360577297882412561190717663946507063304527
9546618550966661856647097113444740160704626215680717481877844371436...

2 Historie

Je eulerovo číslo po Eulerovi, nebo ho objevil někdo jiný? V mnohé literatuře, hlavně britské, se setkáváme s označením Napierova konstanta. Jak je možné, že jedna konstanta má dva objevitele?

Málo kdy v dějinách vědy byla přijatá abstraktní myšlenka tak nadšeně celou vědeckou společností, jako objevení logaritmů. Ještě méně uvěřitelné je, že to byl právě John Napier.[2] Byl synem sira Archibalda Napiera a jeho první manželky Janet Bothwella. Narodil se v roce 1550 (přesné datum není známo), na hradě svých rodičů nedaleko Edinbutghu ve Skotsku. Informace o jeho raném dětství se nedochovali. Ve 13 letech byl poslán na univerzitu v St. Andrews, kde studoval náboženství. V roce 1571 se vrací zpět do Skotska a žení se s Elizabeth Stirling, s níž má 2 děti. Po smrti své ženy v roce 1579 se ožení s Agnes Chisjolm, se kterou měl 10 dětí. Druhý syn, Robert, z tohoto manželství byl později otcův literární exekutor. Po smrti svého otce, sira Archibalda v roce 1608 se vrací zpět na hrad Merchiston, kde působí jako osmý zeman hradu – zde strávil zbytek svého života.

Napier měl rád vědu, ale hlavní zájem bylo náboženství. Nebo spíše náboženský aktivismus. Horlivý protestant a zarytý odpůrce papeže, vydává A plaine discovery of the whole revelation of Saint John („Pekelný objev celého zjevení svatého Jana“) z roku 1593, kde hořce napadl katolickou církev. Tvrdil, že papež je antikrist a naléhá na skotského krále James VI (Později se stal králem Anglie – James I.), aby vyčistil svůj dům a dvůr od všech příznivců papeže, ateistů a neutrálně věřících. Předpovídal také, že soudný den se pohybuje mezi lety 1688 až 1700. Kniha byla přeložena do několika jazyků a vyšlo přes 21 edic (10 z nich se objevilo už v průběhu jeho života). Proto i Napier věřil, že jeho jméno v historii nebude zapomenuto.

Jeho zájmy Napiera však nebyly omezeny jen na náboženství. Jako majitel panství, se choval jako řádný hospodář, v rámci svých experimentů zlepšil kvalitu plodin a dobyka tím, že experimentoval s různými hnojivy a solemi. Věnoval se vynálezům a v roce 1579 vynalezl hydraulický šroub pro kontrolu hladiny vody v uhelných dolech. Projevil zájem o vojenské záležitosti. Vypracovával plány na stavbu

[2]Jméno se objevuje různě - Nepair, Neper a Naipper. Správnost jména je již zapomenuto.

obrovských zrcadel, které by mohly zapálit nepřátelské lodě. Plány připomínali ty, které před osmnácti set lety navrhl Archimédes na obranu Syrakusy. Jak se často stává s lidmi s rozmanitými zájmy, tak i Napier se stal předmětem mnoha příběhů, i když se zdá, že byl hádavým typem, snaží se řešit spory se sousedy prostřednictvím svého vědění a nadhledu. Podle jednoho příběhu, Napier byl podrážděný kvůli holubům souseda, kteří zobali jeho obilí. Napier varoval souseda, ať si chytí své holuby, jinak je chytí sám. Soused ignoroval radu a tak druhý den nalezl své holuby polomrtvé ležící na zemi u Napiera. Namočil zrno silným lihem, aby se ptáci opili a nemohli vzlétnout. I další příběh ukazuje Nampiera, jako člověka osvíceného, který řeší problémy s nadhledem a rozumem. V tomto příběhu se Napier domníval, že jeden z jeho služebníků krade. Svolal si je a oznámil, že jeho černý kohout najde zloděje. Služebníci byli přivedeni do tmavé místnosti, kde každý byl požádán, aby na kohoutka položil svou ruku. Služebníci nepoznali, že Napier natřel kohouta vrstvou sazí. Při opouštění místnosti byli požádáni, aby ukázali své ruce. Ten služebník, který pociťoval vinu, měl ruce čisté.

Většinu jeho aktivit, včetně náboženských kampaní, už dávno zapomínáme. Pokud je jméno Napier v historii známé, určitě to není díky jeho nejprodávanější knize A plaine discovery of the whole revelation of Saint John, ani díky jeho vynalézavosti, ale kvůli abstraktnímu matematickému nápadu (20 let vývoje) – logaritmy (v roce 1614 publikoval knihu Mirifici logaritmorum canonis descriptio (Popsání podivuhodného zákona logaritmů).

V šestnáctém a počátkem sedmnáctého století došlo k obrovskému rozšiřování vědeckých poznatků v každé oblasti. Některé z nich uvedu v následujících bodech.

- Geografie, fyzika a astronomie, konečně osvobozené od starověkých dogmat, rychle změnily vnímání vesmíru.
- Koperníkův heliocentrický systém, který po téměř desetiletém boji s církví, konečně společnost přijala.
- Magellanovo obeplutí zeměkoule v roce 1521 předznamenala novou éru mořského průzkumu, která zanechala jen stěží koutek světa, který nebyl navštíven.
- V roce 1569 vydal Gerhard Mercator svou slavnou novou světovou mapu, tato událost měla rozhodující vliv na umění plavby.

- V Itálii Galileo Galilei položil základy vědy mechaniky.
- V Německu Johannes Kepler formuloval své tři zákony planetárního pohybu, uvolňující astronomii jednou provždy z geocentrického vesmíru Řeků.

Tento vývoj zahrnoval neustále rostoucí množství číselných dat, které nutili vědce dělat nutné numerické výpočty. Doba vyžadovala vynález, který by jednou a provždy osvobodil vědce z této zátěže. Napier přijal výzvu.

Nevíme, jak Napier narazil na myšlenku, která nakonec vyústila v jeho objev. Byl velmi zkušený v trigonometrii a bezpochyby se seznámil s formulací

$$sin\, A \cdot sin\, B = \frac{1}{2}[cos(A - B) - cos(A + B)]$$

Tento vzorec, a podobné pro *cos A . cos B a sin A . sin B,* byly známé jako prosthafaretické pravidlo (odvozeno z řeckého slova προσθαφαίρεσις – sčítání a odčítání). Jejich důležitost spočívá ve skutečnosti, že produkt dvou trigonometrických výrazů, jako je *sin A . sin B* lze vypočítat zjištěním součtu nebo rozdílu jiných trigonometrických výrazů, v tomto případě *cos (A - B)* a *cos (A + B).* Jelikož je jednodušší sčítat a odčítat, než násobit a dělit, poskytují tyto vzorce primitivní systém redukce od jedné aritmetické operace do druhé. Pravděpodobně toto byl ten nápad, který Napiera poslal správným směrem.

Druhá, jednodušší myšlenka spojena s podmínkou geometrický řady - posloupnost čísel s pevným poměrem mezi po sobě následujícími podmínkami. Například, posloupnost 1, 2, 4, 8, 16, ... je geometrická s kvocientem 2. Označíme-li společný poměr *q,* poté, počínaje 1, podmínky posloupnosti jsou $1, q^1, q^2, q^3, ..., q^{n-1}$. (Všimněte si, že n-tý termín je q^{n-1}. Napier si všiml, že existuje jednoduchý vztah mezi podmínkami geometrické řady a odpovídajících exponentů, nebo indexů a společného poměru. Německý matematik Michael Stifel (1487-1567), ve své knize Arithmetica integra (1544), formuloval tento vztah takto: pokud budeme násobit nějaké dvě podmínky postupně $1, q, q^{2,}$ ..., výsledek by byl stejný jako kdybychom přidávali odpovídající exponenty. Například, $q^2 . q^3 = (q. q) . (q . q . q) = q . q . q . q . q = q^5$ což je výsledek, který bylo možno dosáhnout přidáním exponenty 2 a 3. Stejně tak dělení jeden termín geometrickou řadou jiným podmínky je ekvivalentní odečtením své exponenty: $q^5/q^3=(q\,.\,q\,.\,q\,.\,q\,.\,q)/(q\,.\,q\,.\,q)=q\,.\,q=q^2=q^{5-3}$ Máme tak jednoduché pravidla $q^m\,.\,q^n=q^{m+n}$ a $q^{m}/q^n=q^{m-n}$.

Problém nastává, pokud je exponent jmenovatele větší než čitatele, jako q^3/q^5; naše pravidlo by nám dalo $q^{3-5}=q^{-2}$, což je výraz, který jsme dosud definovali. Pro vyřešení tohoto problému definujeme q^{-n} na $1/q^n$ tak, že $q^{3-5}=q^{-2}=1/q^2$ ve shodě s výsledky získané dělením q^3/q^5 přímo. [3] (Všimněte si, že, aby bylo v souladu s pravidlem $q^{m}/q^n=q^{m-n}$, kde $m=n$, musíme také definovat $q^0=1$). S těmito definicemi na mysli, můžeme nyní rozšířit geometrickou řadu do nekonečna: ..., ... , q^{-3}, q^{-2}, q^{-1}, $q^0=q^0$, q^1, q^2, q^3, ... Vidíme, že každý qvocient q má svoji mocnost, a že exponenty ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... tvoří aritmetické posloupnosti (v aritmetické posloupnosti je rozdíl mezi po sobě následujícími podmínkami konstantní, v tomto případě 1) . Tento vztah je hlavní myšlenkou logaritmu; Ale vzhledem k tomu, že Stifel měl na mysli pouze integrální hodnoty exponentu, Napierův nápad byl jeho rozšíření na souvislý rozsah hodnot.

Jeho myšlenka byla tato: Kdybychom mohli napsat kladné číslo jako mocninu daného pevné čísla (později se nazývá základ), pak se násobení a dělení čísel odpovídalo sčítání a odčítání jejich exponentů. Dále, zvyšování čísla n-tou mocninu (to znamená, že je násobíme n-krát) by bylo ekvivalentní přidání exponenty n-krát, to je vynásobení n-krát exponenty a nalezneme n-tého kořenu čísla tak, že je ekvivalentní k opakování odčítání, to znamená k dělení n. Stručně řečeno, každá aritmetická operace by se zmenšila, čímž by se podstatně snížili početné operace.

Pojďme si to vysvětlit na příkladu, jak tato myšlenka funguje. Naším základem bude číslo 2. Tabulka 2.1 ukazuje postupné mocnin 2, počínaje $n=-3$ a konče $n=12$. Předpokládejme, že chceme-li vynásobit 32 a 128, podíváme se do tabulky. Pro exponenty odpovídající číslům 32 a 128 zjistíme, že jsou to 5 a 7. Sečtení těchto exponentů nám dává 12. Proces nyní vrátíme zpět a výsledek je číslo 4096. Jako druhý příklad, předpokládáme, že chceme najít výsledek 4^5.

[3] záporné a zlomkové exponenty byly navrhnuté matematiky již ve čtrnáctém století, ale jejich široké využití v matematice je rozšířeno až anglickým matematikem John Wallis (1616-1703) a ještě více tak Newton, který navrhl moderní zápisy a^{-n} a $a^{m/n}$ v 1676. Viz CAJORI, Florian. *A history of mathematical notations*. New York: Dover Publications, 1993. Dover books on mathematics. ISBN 0-486-67766-4.

Najdeme exponent odpovídající 4, a to je 2. Tentokrát vynásobíme 5 a dostaneme dostat 10. Pak se podíváme do tabulky na počet, jehož exponent je 10 a najdeme, že výsledek je 1,024. A opravdu, $4^5 =(2^2)^5 =2^{10} = 1{,}024$.

Tabulka 2.1 Mocniny 2																
n	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2^n	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1 024	2 048	4 096

Samozřejmě, že takový komplikovaný postup není zbytečný pro složitější výpočty s celými čísly. Metoda by byla použitelná pouze tehdy, kdyby mohla být použita s libovolnými čísly, celými čísly nebo zlomky. K tomu však musí nejprve vyplnit velké mezery mezi zápisy našich tabulek (Tabulka 2.1). Můžeme to udělat jedním ze dvou způsobů: pomocí zlomkových exponentů nebo výběrem základny, která je dostatečně malá, aby její hodnoty rostly úměrně pomalu. Zlomkové exponenty, definované $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ (například $2^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{2^5} = \sqrt[3]{32} \sim 3{,}17480$), nebyly dosud plně známy v Napierově době, takže neměl jinou možnost, než následovat druhou možnost. Ale jak malá základna? Je zřejmé, pokud je základna příliš malá, jeho hodnoty porostou příliš pomalu, což opět bude mít malé využití. Zdá se, že by to chtělo číslo, které je blízko k 1, ale ne moc blízko. Po letech potýkání se s tímto problémem, se Napier rozhodl o číslu 0.999999, nebo $1 – 10^{-7}$.

Ale proč tato konkrétní volba? Zdá se, že odpověď spočívá v zájmu společnosti. Napier minimalizovat použití desítkových zlomků. Zlomky obecně byly samozřejmě používány tisíce let před Napierem, ale téměř vždy byly psány jako běžné zlomky, to je jako poměry celých čísel. Desetinné zlomky - číslování desetinných čísel menších než 1, byly objeveny teprve krátce, a společností zatím nepřijímány. Pro minimalizaci jejich použití Napier dělal v podstatě to, co děláme dnes, když dělíme dolar na sto centů nebo kilometr na tisíc metrů: rozdělil jednotku na velké množství dílčích jednotek, každá z nich byla jako nová jednotka. Protože jeho hlavním cílem bylo snížit obrovskou práci, která se týká trigonometrických výpočtů, následoval praxi, která se pak použila v trigonometrii pro rozdělení poloměru kružnice na 10 000 000 neboli 10^7 dílů. Z tohoto důvodu, když odečteme z plné jednotky jeho část 10^7, získáme číslo nejblíže k 1 v tomto systému, a to 1 - $10^{\sim 7}$ nebo 0.9999999. To byl pak společný poměr ("poměr" v jeho slovech), který Napier použil při stavbě svých tabulek.

A teď bylo hlavním úkolem vytvořit dané tabulky. Napier nad tvorbou daných tabulek strávil více jak 20 let svého života (1594-1614). Jeho počáteční tabulka obsahovala pouhých 101 čísel, začínala 10^7 = 10 000 000 a následně $10^7(1-10^{-7})$= 9 999 999, další bylo $10^7(1-10^{-7})^2$= 9 999 998 až do $10^7(1-10^{-7})^{100}$ = 9 999 900 (Napier zaokrouhlil na celá čísla), přičemž každé nové číslo získá odečtením 10^7 z předchozí části. Poté celý proces zopakoval a začal znovu s 10^7. Tentokrát ale vzal jako „poměr" posledního čísla k prvnímu v původní tabulce (tj. 9 999 900 / 10 000 000 = 0,999 99 nebo také $1-10^{-5}$) . Tato tabulka obsahovala 50 záznamů, z nichž poslední byla $10^7(1-10^{-5})^{50}$ = 9 995 001. Poté následuje třetí tabulka s dvaceti jednotlivými údaji za použití poměru 9 995 001/10 000 000. Poslední záznam byl $10^7 \cdot 0{,}9995^{20}$ = 9 900 473. Následovala čtvrtá, poslední tabulka, kdy vytvořil dalších 68 záznamů za použití poměru 9 900 473/10 000 000, což bylo skoro 0,99. Poslední záznam se ukázal jako 9 900 473 · 9968 = 4 998 609 – zhruba polovina původního čísla.

Dnes by samozřejmě takový úkol byl zpracován na počítači, i při použití kalkulačky by to trvalo maximálně pár hodin. Napier takové věci neměl a výpočty musel provádět pouze na papír s perem. Dá se teda pochopit jeho zájem minimalizovat použití desetiných zlomků. Svými vlastními slovy: „In forming this progression (the entries of the second table), since the proportion between 10 000 000,000 00, the first of the second table, and 9 995 001, 222 927, the last of the same, is troublesome; therefore compute the twentyone numbers in the easy proportion of 10 000 to 9 995, which is sufficiently near to it; the last of these, if you have not erred, will be 9 900 473, 578 08."- volně přeloženo „Při vytváření tohoto postupu (položky druhé tabulky), jelikož poměr mezi prvním záznamem 10 000 000,000 00 a posledním 9 995 001, 222 927 je obtížný, proto vypočítáme dvacet čísel pomocí podílu 10 000/ 9 995, který je dostatečně blízko k těmto číslům, přičemž poslední z nich bude 9 900 473,578 08".[4]

Po dokončení tohoto monumentálního díla, zůstaly zásluhy Napierovi. Nejprve nazýval exponent za „umělé číslo", ale později se rozhodl pro termín logaritmus, slovo znamenající „číslo v poměru". V moderním zápise to znamená, že když (v jeho první tabulce) $N=10^7(1-10^{-7})^L$, kde exponenciála L je (Napierův) logaritmus N. Napierova definice logaritmu se liší v několika ohledech od definice, kterou známe například

[4] Volně přeloženo SMITH, David Eugene. *A source book in mathematics*. Dover ed. New York: Dover Publications, 1959. Dover classics of science and mathematics. ISBN 978-0-486-64690-9. str. 150.

z roku 1728 Leonhardem Eulerem: jestliže $N=b^L$, kde b je stálé kladné číslo, jiné než 1 potom L je logaritmus N o základu b. Například v Napierově systému $L=0$ odpovídá $N=10^7$ (kde Nap log $10^7=0$). Zatím co v modelovém systému $L=0$ odpovídá $N=1$ (tj. $log_b 1 = 0$). Ještě důležitější je, že základní pravidlo pro práci s logaritmu = součtu jednotlivých logaritmů. A nakonec, protože $1\text{-}10^7$ je menší než 1, Napierovi logaritmy s rostoucími počty klesají, zatímco naše běžné logaritmy se zvětšují. Tyto rozdíly jsou však relativně malé a jsou důsledkem toho, že by se jednotka měla rovnat 10^7 podjednotkám. Kdyby nebyl tak znepokojen desetinnými zlomky, jeho definice mohla být jednodušší a mohla se přiblížit k definici Eulera.

Z pohledu zpět, Napier nevědomky přišel do stavu mysle, kdy objevil číslo, které o jedno století později bude uznáno jako univerzální základ logaritmů a které by hrálo roli v matematice hned po číslu π. Toto číslo je e a zapíšeme ho například jako limitu $\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ kde n roste do nekonečna.[5]

Napier publikoval svůj objev v roce 1614 v knize *Mirifici logarithmorum canonis descripptio* (Nádherný popis kánonických logaritmů). Pozdější práce, *Mirifici logarithmorum canonis constructio*, byla vydána posmrtně jeho synem Robertem v roce 1619. Zřídka kdy v historii vědy byla nová myšlenka přijata více nadšeně. Napierův objev byl rychle přijat vědci po celé Evropě a dokonce i ve vzdálené Číně. Mezi první učence, kteří použili logaritmy ve svých prací byl Johannes Kepler, který s velkým úspěchem použil ve svých komplikovaných výpočtech oběžních drah planet. Henry Briggs (1561 – 1631) byl profesorem geometrie na Gresham College v Londýně, když se k němu dostali Napierovy tabulky. Byl ohromen objevem, že se rozhodl jet do Skotska a osobně se seznámit s objevitelem – Napierem.

[5] Ve skutečnosti se Napier přiblížil k objevování číslo 1/*e*, definovaný jako limit $\left(1\text{-}\frac{1}{\mathrm{n}}\right)\mathrm{n}$, kdy $n \to \infty$. Jak již bylo uvedeno, jeho definice logaritmů je ekvivalentní rovnice $N = 10^7 (1 - 1O^{-7})^L$. Pokud rozdělíme oba N *a* L na 10^7 (která pouze činí změnu velikosti naší proměnné), rovnice $N * = \left[(1-10^{-7})^{10^7}\right]^{L*}$, kde $N * = \mathrm{N} / 10^7$ a $L * = \mathrm{L}/10^7$. Vzhledem k tomu, $(1-10^{-7})^{10^7} = \left(1-\frac{1}{10^7}\right)^{10^7}$ je velmi blízko k *1/e,* Napierovy logaritmy jsou prakticky logaritmy o základu *1/e.* Často je tvrzeno, že Napier objevili tuto základnu (nebo dokonce *e* samotné) nicméně je to chybné. Jak jsme viděli, nemyslel si, že jde o základu, což je pojem, který vyvinul teprve později se zavedením „společných“ (základ 10) logaritmů.


MIRIFICI
LOGARITHMO-
RVM CANONIS
DESCRIPTIO,
Ejuſque uſus, in utraque Trigonome-
tria; ut etiam in omni Logiſtica Ma-
thematica, ampliſsimi, facillimi,
& expeditiſſimi explicatio.
ACCESSERVNT OPERA POSTHVMA;
Primò, Mirifici ipſius canonis conſtructio, & Logarith-
morum ad naturales ipſorum numeros habitudines.
Secundò, Appendix de alia, eâque præſtantiore Loga-
rithmorum ſpecie conſtruenda.
Tertiò, Propoſitiones quædam eminentiſſimæ, ad Trian-
gula ſphærica mira facilitate reſolvenda.
Autore ac Inventore IOANNE NEPERO,
Barone Merchiſtonii, &c. Scoto.
EDINBVRGI,
EXCVDEBAT ANDREAS HART.
ANNO 1619.

Obrázek 1: Titulní strana Napierovi knihy Mirifici logarithmornm canonis descriptio z roku 1619, která obsahovala i jeho výklad.

Na tomto setkání navrhl Briggs dvě menší úpravy: když je logaritmus 1, měl by se rovnat 0, než 10^7. A proto máme logaritmus 10 se rovná 10. Po zvážení několika možností, nakonec rozhodli, že $log\ 10 = 1 = 100$. Dnes to znamená, že pokud kladné číslo N je napsáno jako $N = 10^L$, potom L je „klasický“ logaritmus psaný $log_a N$. Tím vzniklo pojetí základny.

Napier rychle souhlasil s těmito návrhy, ale už v té době byl v pokročilém věku a postrádal energii k výpočtu nového souboru tabulek. Briggs se zavázal tímto úkolem a své výsledky publikoval v roce 1624 pod názvem Aritmetica logarithmica. Jeho tabulky obsahovaly logaritmy všech celých čísel od 1 do 20 000 a od 90 000 do 100 000 o základu 10 s přesností na čtrnáct desetinných míst. Celá čísla od 20 000 do 90 000 později vyplnil holandský vydavatel Adriaan Vlacq (1600-1667) a jeho dodatky byly zahrnuty ve druhém vydání Aritmetica logarithmica v roce 1628. S drobnými úpravami zůstala tato práce základem všech následujících logaritmických tabulek až do dnešního století. Teprve v roce 1924 začali v Anglii přepracovávat tabulky na 20 desetinných míst při příležitosti třístých oslav vynalezení logaritmů. Práce byla dokončena v roce 1949.

V roce 1683 Jacob Bernoulli (1654 – 1705) věnoval problematice složeného úročení a snažil se najít limitu výrazu $(1+\frac{1}{n})^n$. Dokázal, že daná limita leží mezi hodnotami čísel 2 a 3. Tento odhad lze považovat za první zmínku čísla e.

Leonhard Euler (1707 – 1783) byl plodný matematik a dalo by se říci, že působil v téměř každém oboru matematiky své doby. První definoval logaritmus jako exponent.

$$log_a x = y \ \ a\ pro\ něj\ platí\ a^y = x\ .$$

V roce 1748 Euler publikuje ve své práci Introductio v Analysin infinitorum plno myšlenek týkající se e. Ukázal, že

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{k!}$$

a přiblížil e na 18 desetinných míst.

e = 2,718 281 828 459 045 235.

Euler počítal s k=20, ale ve skutečnosti byl výsledek dosti přesný. (V dnešní době je eulerovo číslo vyčísleno přes milion desetinných míst.) [6]

6 ttp://www.gvp.cz/~vinkle/mafynet/_M/funkce/expon_log_fce_rce/diplomka_eulerovo_cislo.pdf

Euler se zabýval mnoha způsoby, jak vyjádřit toto číslo. Jeden z nich je ve formě nekonečných řetězových zlomků[7] a obráceně. Pro číslo e použil vyjádření pomocí nekonečné řady $e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{k!}$.

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{4}{5 + \cdots}}}}}$$

Co je nekonečný řetězový zlomek si ukážeme na příkladu. Máme zlomek $\frac{14}{9}$. Můžeme jej napsat jako 1 + $\frac{5}{9}$. Což jde dále napsat jako $1 + \frac{1}{\frac{9}{5}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{4}{5}}$ a v tomto bychom mohli dále pokračovat. Dostáváme tedy:

$$\frac{14}{9} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{4}{5}}.$$

Introductio je obvykle citován jako první místo, kde se objevil symbol *e*. Milně mnozí lidé předpokládají, že Euler vybral *e* jako „Euler“. Eulerova skromnost by mu nedovolila takovou okázalost. Se vší pravděpodobností si vybral *e* jako „exponenciální“, nebo proto, že to bylo další písmeno v abecedě, jež není široce používané k jinému účelu[8]. [9]

7 kde a je celé číslo a čísla ai jsou kladná přirozená čísla. Pokud je dána pouze konečná posloupnost (a0, a_1, a_2,...), pak mluvíme o konečném řetězovém zlomku, pokud je tato posloupnost nekonečná, pak mluvíme o nekonečném řetězovém zlomku, který bývá také značen:

[8] Vlastní překlad z anglického originálu

9 http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/e.html

3 Současnost - Eulerovo číslo v matematické analýze

3.1 Limita a posloupnost

Eulerovo číslo lze zapsat jako limitu:

$$e = lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Než se pustíme do důkazu této limity, připomeneme si některé poznatky, které budeme potřebovat. Důležité je si uvědomit, že při hledání $lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ hledáme limitu posloupnosti, jejíž n-tý člen má tvar $(1+\frac{1}{n})^n$. Připomeneme si pár základních znalostí o posloupnosti.

Množinu všech čísel, jež jsou členy této posloupnosti, nazveme množinu všech členů posloupnosti a_1, a_2, a_3, ..., a na okamžik ji označíme číslem *M*. Číslo *x* je prvkem množiny právě tehdy, když existuje alespoň jedno přirozené číslo n takové, že $a_n = x$. Například množina *M* naší posloupnosti se skládá ze všech čísel tvaru $(1+\frac{1}{n})^n$, pár jejich členů nalezneme v tabulce:

Tabulka 3.1 Numerické vyčíslení daných posloupností s rostoucím *k* [10]

k	$n = 2^k$	$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$
0	1	2,00000000	4,00000000
1	2	2,25000000	3,37500000
2	4	2,44140625	3,05175781
3	8	2,56578451	2,88650757
4	16	2,63792850	2,80279902
5	32	2,67699013	2,76064607

[10] http://www.zas.cz/prednasky/prednaska_koutny_euler.pdf

10	1 024	2,71695573	2,71960900
15	32 768	2,71824035	2,71832330
20	1 048 576	2,71828053	2,71828312
25	33 554 432	2,71828179	2,71828186

Teď se zaměříme na existenci limity $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ n→∞. Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde a_n = $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ je rostoucí. Dále budeme mít posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde b_n = $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ je klesající. Vše pro n=1,2,3,...

Důkaz. Posloupnost je rostoucí právě tehdy, když pro každé n platí $a_n < a_{n+1}$. Důkaz provedeme AG-nerovností (vztah mezi geometrickým průměrem a aritmetickým průměrem, kterou použijeme na součin n činitelů $(1+\frac{1}{n})^{n}$. Budeme mít

$$\sqrt[n+1]{x_1 x_2 \dots x_{n+1}} = \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}$$

a dále

$$\frac{x_1 + \dots + x_{n+1}}{n+1} = \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1} = \frac{(n+1)+1}{n+1} = 1+\frac{1}{n+1}.$$

Víme, že platí $\sqrt[n+1]{(1+\frac{1}{n})^{n}} < 1+\frac{1}{n+1}$ (platí ostrá nerovnost, protože činitelé si nejsou rovni). Umocníme obě strany nerovnosti (n+1) a dostaneme:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = a_{n+1} \;\; (n = 1, 2, \dots).$$

Vychází nám, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je rostoucí posloupnost. Pro druhou část důkazu položme $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1+\frac{1}{n+1}$, $\quad x_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{2}$. Potom

$$\sqrt[n+1]{x_1 x_2 \dots x_{n+1}} = \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^2} = \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}}$$

a

$$\frac{x_1 + \dots + x_{n+1}}{n+1} = \frac{n\frac{n+2}{n+1} + \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2}{n+1} = \frac{(n+1)^3 + (n+1)^2 + (n+1) + 1}{(n+1)^3} =$$

$$= 1 + \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3}\right] \leq$$

$$\leq 1 + \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \dots + \frac{1}{(n+1)^k} + \dots\right] = 1 + \frac{1}{n}$$

v hranaté závorce se jedná o geometrickou řadu s kvocientem $\frac{1}{n+1}$. Dle AG nerovnosti dostáváme $\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} < 1 + \frac{1}{n}$, po odstranění mocniny (umocnění obou stran nerovnosti výrazem (n+1) dostaneme:

$$b_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = b_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Tedy $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$je klesající posloupnost.

Teď si nadefinujeme větu, kterou budeme potřebovat dále.

Věta. Nechť je daná neklesající posloupnost $a_1, a_2, a_3, \dots$. Je-li tato posloupnost shora omezená, má vlastní limitu.

Zřejmě pro každé $n \in \mathbb{N}$*platí, že* $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = b_n$, a proto je pro každé $n \in \mathbb{N}$ $a_n < b_n \leq b_1 = 4$. Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je shora omezená a dokázali jsme, že je i rostoucí. Proto víme, že tato posloupnost má konečnou limitu

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Dále si všimněme, že

$$\boldsymbol{lim_{n\to\infty} b_n = lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \underbrace{lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{1} \cdot \underbrace{lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}_{a_n} = \lim_{n\to\infty} a_n}\ .$$

Tedy platí, že

$$\boldsymbol{e = lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}$$

a vzhledem k tomu, že daná posloupnost $\{\boldsymbol{a_n}\}_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty}$ ($\{\boldsymbol{b_n}\}_{\boldsymbol{n=1}}^{\infty}$) je rostoucí (klesající) posloupnost, platí:

$$\boldsymbol{a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = b_n \quad (n = 1, 2, \dots)}$$

Nerovnost nám pomáhá určit přibližnou hodnotu čísla *e*, například pro n=1 dostaneme 2< *e* <4, pro n=2 dostaneme $\boldsymbol{\frac{9}{4} < e < \frac{27}{8}}$ a podobně. (, s.16)

3.1.1 Příklad

Vyřešte příklad $\boldsymbol{lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2n})^{n}}$

Víme, že *e* je definované jako limita (vysvětleno výše)

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n} = e}$$

Když se podíváme na příklad a na limitu, kterou je definované eulerovo číslo, vidíme, že jsou si dost podobný, kromě jmenovatele ve zlomku. Buď se musíme „zbavit“ čísla 2 ve jmenovateli, nebo číslo 2 přidat k exponentu, abychom mohli použít substituci (2n = m). Stačí nám si uvědomit matematickou operaci

$$\boldsymbol{a = \sqrt[x]{a^x} = (a^x)^{\frac{1}{x}} = a^{\frac{x}{x}} = a}\ .$$

A můžeme se pustit do počítání

$$\boldsymbol{lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2n})^{n} = lim_{n\to\infty}\sqrt[2]{(1+\frac{1}{2n})^{2n}} =}$$

teď nastane daná substituce 2n = m

$$= \lim_{m\to\infty} \sqrt[2]{(1+\frac{1}{m})^{m}} = \sqrt[2]{e}$$

3.2 Řady

$$\boldsymbol{e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots}$$

Součet nekonečné řady je pro vyčíslení eulerova čísla výhodnější než $\boldsymbol{lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$. Jak ukazuje tabulka, tak řada konverguje rychleji než limita. Je to hlavně pro to, že *n!* roste rychle ve jmenovateli každého členu. Navíc jsou všechny členy kladné, konvergence je monotónní –větší *n* =>blíží se k limitě.

Tabulka 3.2 Konvergence řady a limity		
n	$\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}}$	$\boldsymbol{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$
1	2,00000000	2,00000000
2	2,50000000	2,25000000
3	2,66666666	2,37037037
4	2,70833333	2,44140625
5	2,71666666	2,48832000
6	2,71805555	2,52162637
7	2,71825396	2,54649969

Součet řady je součet jednotlivých prvků $a_1, a_2, a_3, \ldots$ [11]a značíme ji jako (s_n), jejíž členy jsou určeny jako

$$\boldsymbol{s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k}\,.$$

Posloupnost (s_n) označujeme jako posloupnost částečných součtů řady, a člen s_n nazýváme n-tým částečným součtem nekonečné řady. To znamená, že pro naši posloupnost by s_5 = 2,71666666.

$$s_5 = \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} = 2{,}71666666\,.$$

Součet nekonečné řady je definován prostřednictvím limity $lim_{n\to\infty}\, s_n$.

[11] Je dána posloupnost (a_n). Výraz tvaru $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ se nazývá řada. Členy posloupnosti se nazývají členy řady.

Zamyslíme se. Jak by vypadala nekonečná řada e^x? Nekonečnou řadu ekvivalentní e^x také objevil Newton: [12]

$$\boldsymbol{e^x = +1\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ ...}$$

3.2.1 Příklad

Určete součet řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = ln2 + ln\frac{3}{2}} + \cdots$$

Řešení: Pro n-tý částečný součet řady platí

$$\boldsymbol{s_n = ln2 + ln\frac{3}{2} + \cdots + ln\frac{n+1}{n}} =$$

$$= \boldsymbol{ln2 + ln3 - ln2} + \cdots + \boldsymbol{ln(n+1) - ln\,n = ln\,(n+1)}.$$

Protože

$$\boldsymbol{lim_{n\to\infty}\, s_n = lim_{n\to\infty}\, ln(n+1)} = \infty,$$

příslušná řada diverguje.

[12]http://www.gvp.cz/~vinkle/mafynet/_M/funkce/expon_log_fce_rce/diplomka_eulerovo_cislo.pdf

3.3 Derivace

V kapitole 2 Historie jsme viděli, jak Henry Briggs zdokonalil Napierovi logaritmické tabulky tím, že zavedl základnu 10 a pracoval s pravidly této základny. Základem logaritmu může být jakékoliv kladné číslo krom 1. Když naznačíme základ b a jeho exponent *x*, dostaneme exponenciální funkci o základu *b*, *y*= b^x. Zde *x* představuje jakékoliv reálné číslo (kladné nebo záporné). Musíme však objastnit, co myslíme $\boldsymbol{bx}$, když $\boldsymbol{x}$ není celé číslo. Když x je racionální číslo zapsané ve formátu *m/n*, definujeme $\boldsymbol{bx}$ buď $\sqrt[n]{\boldsymbol{b^m}}$ nebo $\left(\sqrt[n]{\boldsymbol{b}}\right)^{\boldsymbol{m}}$ - oba výrazi jsou stejné, za předpokladu, že *m/n* jsou v základním tvaru. Například $\mathbf{8^{\frac{2}{3}}} = \sqrt[3]{\mathbf{8^2}} = \sqrt[3]{\mathbf{64}} = \mathbf{4}$, nebo $\mathbf{8^{\frac{2}{3}}} = \left(\sqrt[3]{\mathbf{8}}\right)^{\mathbf{2}} = \mathbf{2^2} = \mathbf{4}$. Ale když x je iracionální – když nemůžeme zapsat ve zlomku dvou čísel, tahle definice nemá smysl. V tomto případě přiblížíme hodnotu *x* racionálnímu číslu, která v mezní hodnotě konverguje na *x*. Vezmeme si například $3^{\sqrt{2}}$. můžeme myslet na exponent $x \to \sqrt{2} = 1{,}414213$ ....(iracionální číslo) jako limita nekonečné posloupnosti konečných desetinných míst $x_1 = 1$, $x_2 = 1{,}4$, $x_3 = 1{,}141$, $x_4 = 1414$, ... každé z nich je racionální číslo. Z těchto x_i určuje jedinečnou hodnotu 3^{x_i}, definujeme jako $3^{\sqrt{2}}$, jako limitu poslounost $3^{x_i}\ kdy\ i \to \infty$. pomocí kalkulačky můžeme snadno najít prvních pár hodnot této posloupnosti:

$$3^{x_i}$$

$$3^1 = 3$$

$$3^{1,4} = 4{,}656$$

$$3^{1,41} = 4{,}707$$

$$3^{1,414} = 4{,}728$$

...

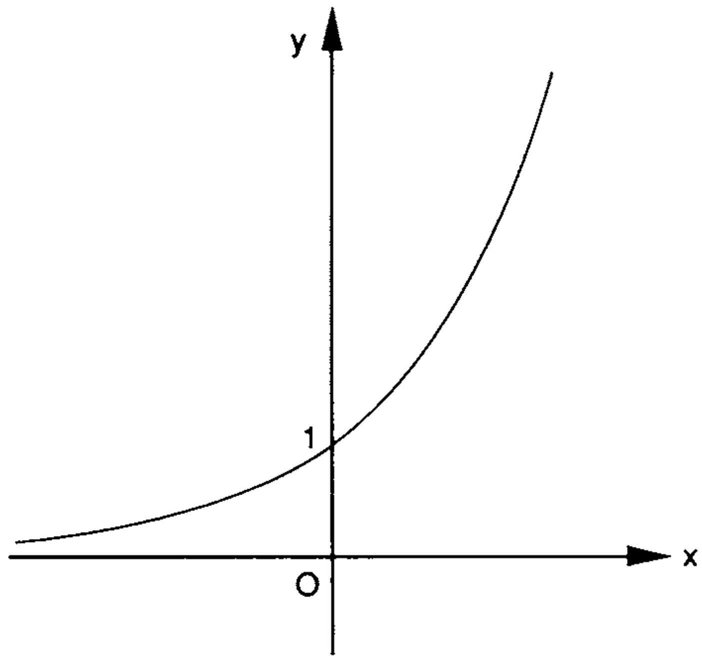
zaokrouhleno na 3 desetinná místa. Limita se bude blížit k číslu 5.

Předpokládáme, že funkce *y*= 3^x, obecně $y = b^x$ je spojitá funkce *x*, že se mění plynule. Předpoklad plynulosti je hlavní podmínka diferenciálního počtu. To je již zahrnuto v definici derivace, protože když vypočítáme $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ jako $\Delta \boldsymbol{x} \to \mathbf{0}$ mají tendenci jít k 0 obě součastně.

Chceme-li vidět obecné rysy exponenciální funkce, vybereme si základ 2. Omezujeme-li se na integrální hodnoty *x*, získáváme následující tabulku:

Tabulka 3.3 Hodnoty exponenciální funkce se základem 2											
x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
2^x	1/32	1/16	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8	16	32

Pokud tyto hodnoty vykreslujeme v souřadnicovém systému, dostaneme graf znázorněný na obrázku 31. Vidíme, jak hodnota x roste, hodnota y roste až do nekonečna. A naopak, když *x* klesá, *y* klesá stále pomaleji. Nikdy nedosáhne hodnoty 0, ale přiblíží se k ní.



Obrázek 1 Graf rostoucí exponenciální funkce

Rychlost růstu exponenciální funkce může být docela ohromující. Slavná legenda vypráví o učenci, který vymyslel hru šachy a pomocí ní mladému králi otevřel oči. Král byl poučen a nadšen a proto se zeptal učence, co si přeje za odměnu. Učenec odpověděl, že by chtěl, aby mu na první pole šachovnice dal jedno zrníčko pšenice, na druhé dvě, na třetí čtyři, na čtvrté osm a tak dále – tedy na každé další pole dvojnásobek zrníček z pole předchozího. Král ocenil učencovu skromnost, ale přání nemohl splnit. V celé zemi nebylo dostatečné množství zrníček.

Bylo celkem potřeba 2^{64} = 18 446 774 073 709 551 615 (více než 18 trilionů).

Funkce *y=f(x)* je definovaná jako *dy/dx* = $\boldsymbol{lim}_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Naším cílem je najít změnu rychlosti pro $y=b^x$. Pokud zvýšíme hodnotu z *x* na $\Delta \boldsymbol{x}$, *y* se zvýší o velikost

$$\Delta \boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}^{\boldsymbol{x}+\Delta \boldsymbol{x}} - \boldsymbol{b}^{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}^{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{b}^{\Delta \boldsymbol{x}} - \boldsymbol{b}^{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b}^{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{b}^{\Delta \boldsymbol{x}} - \mathbf{1}).$$

Požadovaná velikost změny je

$$\frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dx}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{b}^{\Delta \boldsymbol{x}} - \mathbf{1})}{\Delta \boldsymbol{x}}. \qquad (1)$$

V tomto okamžiku by vylo vhodné nahradit $\Delta \boldsymbol{x}$ jediným písmenem a to třeba h. Takže rovnice (1) se stává

$$\frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dx}} = \lim_{h \to 0} \frac{\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{h}} - \mathbf{1})}{\boldsymbol{h}}. \qquad (2)$$

Můžeme provést druhé zjednodušení a to tím, že „odstraníme“ b^x. Protože v rovnici limity (2) zahrnuje pouze proměnnou h, zatím co x je považováno za fixní. Přijdeme k výrazu

$$\frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dx}} = \boldsymbol{b}^{\boldsymbol{x}} \lim_{h \to 0} \frac{\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{h}} - \mathbf{1}}{\boldsymbol{h}}. \qquad (3)$$

Označíme tuto limitu písmenem k a získáme následující výsledek:

$$\boldsymbol{Jestli}\ \ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}^{\boldsymbol{x}},\ \ \boldsymbol{pak} \frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dx}} = \boldsymbol{k}\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{k}\boldsymbol{y}\,. \qquad (4)$$

Tento výsledek má tak zásadní význam, že jej vyslovíme slovy: Odvození derivace exponenciální funkce je úměrné samotné funkci.

Všimněte si, že jsme použili výraz "derivace exponenciální funkce", nikoliv exponenciální funkce, protože až dosud byla volba b úplně libovolná. Ale teď nastává otázka: Existuje nějaká zvláštní hodnota b, která by byla zvláště vhodná? Vrátíme-li se zpět k rovnici (4), kdybychom mohli zvolit b tak, aby se konstanta k rovnala 1, to by jasně učinilo rovnici (4) obzvláště jednoduchou; Bylo by to opravdu "přirozená" volba b. Naším úkolem je tedy určit hodnotu b, pro kterou k bude rovno 1, tedy

$$\lim_{h\to 0}\frac{b^h-1}{h}=1.$$

Naším úkolem je určit hodnotu b tak, aby platilo $\lim_{h\to 0}\frac{b^h-1}{h}=1$. Začneme s výrazem $\frac{b^h-1}{h}$ a nastavíme je na 1:

$$\frac{b^h-1}{h}=1. \qquad (5)$$

Jistě pokud je tento výraz shodná s hodnotou 1, pak i $\lim_{h\to 0}\frac{b^h-1}{h}=1$. Nyní řešíme rovnici (5) pro b. Provedeme dva kroky. První

$$b^h=1+h$$

a druhý

$$b=\sqrt[h]{(1+h)}=(1+h)^{\frac{1}{h}} \qquad (6)$$

kde jsme dostali radikální znamení s částečným exponentem. Nyní rovnici (5) vyjadřuje *b* jako implicitní funkci *h*. Protože rovnice (5) a (6) jsou rovnocenné, limita se bude blížit k 0

$$\lim_{h\to 0}\frac{b^h-1}{h}=1$$

a

$$b=\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}. \qquad (7)$$

Poslední limita je číslo *e*. Tak aby se výraz $\lim_{h\to 0}\frac{b^h-1}{h}$ rovnal 1, *b* se musí rovnat *e* = 2.71828 ...

Nejedná se o důkaz, ale jen o nástin.

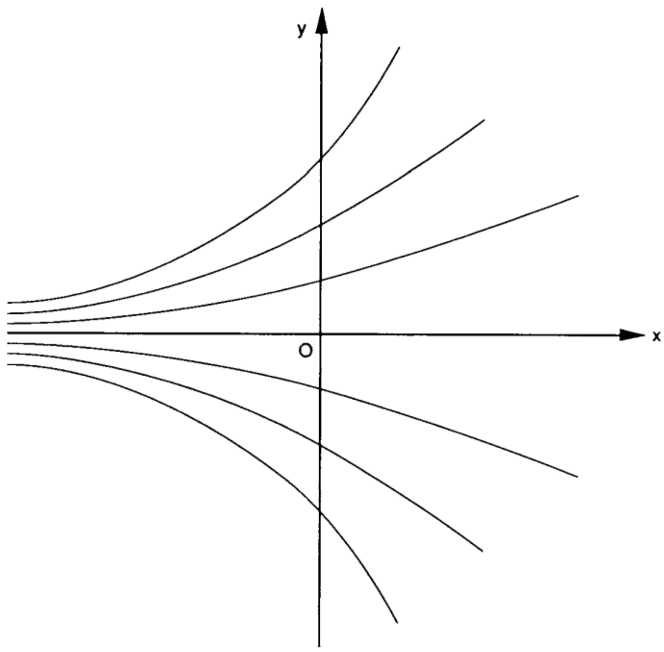
Teď pokud v této rovnici nahradíme písmeno *1/h* písmenem *m*, limita půjde k nekonečnu. Proto máme

$$\boldsymbol{b = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}} \qquad (8)$$

A však limita uvedená v rovnici 8 není nic jiného než naše vtedy k následujícím závěrům: Pokud je číslo *e* zvoleno jako základ, exponenciální funkce se rovná své derivaci

$$\boldsymbol{Jestliže\ y = e^{x}, pak \frac{dy}{dy} = e^{x}.}$$

Ale tento výsledek je více. Nejen že se funkce e^{x} rovná svojí vlastní derivaci, je to jediná funkce, která má tuto vlastnost. Jinak řečeno, pokud řešíme rovnici dy/dx = y (diferenciální rovnici) pro funkci y dostaneme řešení *y=Ce,* kde *C* je libovolná konstanta. Toto řešení představuje skupinu exponenciálních křivek (obrázek 2), z nichž každá odpovídá odlišné hodnotě *C*.



Obrázek 2 Skupina exponenciálních křivek y= Ce^{x}. Každý graf odpovídá jedné hodnotě C.

Ústřední úloha funkce e^x, která se nazývá přirozená exponenciální funkce nebo prostě exponenciální funkce v matematice a vědě, je přímým důsledkem těchto skutečností. V aplikacích najdeme mnohé jevy, při kterých je změna nějakého množství úměrná samotnému množství. Každý takový jev se řídí diferenciální rovnicí $dy/dx = ay$, kde konstanta a určuje rychlost změny v každém případě. Řešením je $y= Ce^{ax}$, kde je určena libovolná konstanta C z počátečního stavu systému. Uvedeme si pár příkladů z praxe:

1. Rychlost rozpadu radioaktivní látky, a množství vyzařovaného záření, je v každém okamžiku úměrná její hmotnosti m: $dm/dt = -am$. Řešení této diferenciální rovnice $m=m_0e^{-at}$, kde m_0 je počáteční hmotnost látky (hmotnost při $t=0$). Z tohoto řešení vidíme, že m se postupně blíží k o, ale nikdy nedosáhne – látka se nikdy úplně nerozpadne. To vysvětluje proč po letech, kdy byl jaderní odpad likvidován jako odpad, může být stále nebezpečný. Hodnota a určuje rychlost rozpadu látky a obvykle se měří poločasem rozpadu, časem, kdy se radioaktivní látka rozpadne na polovinu své původní hmotnosti. Různé látky mají zřetelně odlišný poločas rozpadu. Například běžný běžný izotop uranu (U^{238}) má poločas asi pět miliard let, obyčejný rádius (Ra^{226}) asi šestnáct set let, zatímco Ra^{220} má poločas jen dvacet tři milisekund. To vysvětluje, proč se některé z nestabilních prvků v periodické tabulce nenacházejí v přírodních nerostných surovinách: jakékoliv množství, které mohlo být přítomno při vzniku země, se již dávno změnilo na stabilnější prvky.
2. Když se horký předmět při teplotě T_o umístil do prostředí teploty T_1 (samo o sobě předpokládá se, že zůstane konstantní), objekt ochladí v poměru k rozdílu $T-T_1$ mezi jeho teplotou v čase t a okolní teplotou: $dT/dt = -a\ (T-T_1)$. To je známé jako Newtonův zákon o ochlazení. Řešením je $T = T_1 + (T_o - T_1)e^{-at}$, což ukazuje, že T se bude přibližovat postupně k T_1, ale nikdy se nebudou rovnat.
3. Když zvukové vlny procházejí vzduchem (nebo jiným médiem), jejich intenzita je řízena diferenciální rovnicí $dI / dx = -aI$, kde x je ujetá vzdálenost. Řešení $I=I_0e^{-ax}$, ukazuje, že intenzita klesá exponenciálně s vzdáleností. Podobný zákon, známý jako Lambertův zákon, platí pro absorpci světla v průhledném médiu.
4. Pokud jsou peníze průběžně úročeny (tj. každým okamžikem) s roční úrokovou sazbou r, zůstatek po t letech je dán vztahem $A = Pe^{rt}$, kde P je jistina. Tato rovnováha roste exponenciálně s časem.

5. Růst obyvatelstva se řídí přibližným exponenciálním zákonem.

Rovnice $dy / dx = ax$ je diferenciální rovnice prvního řádu: zahrnuje pouze neznámou funkci a její derivát. Ale většina zákonů fyziky je vyjádřena jako diferenciální rovnice druhého řádu - rovnice zahrnující rychlost změny rychlosti změny funkce nebo její druhé derivace. Zrychlení pohybujícího se objektu je například rychlost změny jeho rychlosti; A protože rychlost samotná je rychlost změny vzdálenosti, z toho vyplývá, že zrychlením je rychlost změny rychlosti změny nebo druhého odvození vzdálenosti. Jelikož zákony klasické mechaniky jsou založeny na Newtonových třech pohybových zákonech, z nichž druhá se týká zrychlení tělesa hmoty m na sílu působící na ni ($F = ma$) - tyto zákony jsou vyjádřeny v podobě druhého řádu diferenciální rovnice. Podobná situace platí i v oblasti elektřiny.

Abychom našli druhou derivaci funkce $f(x)$, nejprve rozlišujeme $f\,(x)$, abychom získali svůj první derivát; Tento derivát je sám funkcí x, označeného jako $\boldsymbol{f'(x)}$. Pak rozlišujeme $\boldsymbol{f'(x)}$pro získání druhého derivátu, $\boldsymbol{f''(x)}$. Například, jestliže $f(x) = x^3$, pak $f\,'(x) = 3x^2$ a $f\,''(x) = 6x$. Můžeme pokračovat i dále $f'''(x) = 6$, čtvrtý derivát (0) a tak dále. S mnohočlennou funkcí stupně n, n po sobě jdoucích derivací nám poskytnou konstantu a všechny následující deriváty budou O. U jiných typů funkcí může opakovaná derivace vést ke stále složitějším výrazům. V aplikacích však málokdy potřebujeme jít nad rámec druhého derivátu.

3.3.1 Příklad

Vypočítejte derivaci prvního řádu

$$\boldsymbol{f(x) = x^3 \cdot e^{-x}}$$

ze vzorečků derivací víme, že derivace $e^x = e^x$. V dané funkci $f(x)$ *je* e^{-x} a zároveň x^3, takže se jedná o složenou funkci. V prvním kroku nás čeká rozložení pomocí vzorce pro součin.

$$\boldsymbol{[f(x) \cdot g(x)]' = f(x)' \cdot g(x) + f(x) \cdot g(x)' f(x)' = (x^3)' \cdot e^{-x} + x^3 \cdot (e^{-x})' =}$$

.

levý mnohočlen derivujeme podle pravidel. Pravý mnohočlen je složená funkce a tu musíme derivovat podle pravidel o derivaci složených funkcí.

$$\boldsymbol{f(x) = h\big(g(x)\big)}$$

$$\boldsymbol{f(x)' = h'\big(g(x)\big) \cdot g(x)'}\ .$$

takže derivace e^{-x} bude vypadat takto:

$$\boldsymbol{(e^{-x})' = e^{-x} \cdot (-x)' = e^{-x} \cdot (-1) = -e^{-x}}.$$

Dosadíme výsledek do našeho příkladu

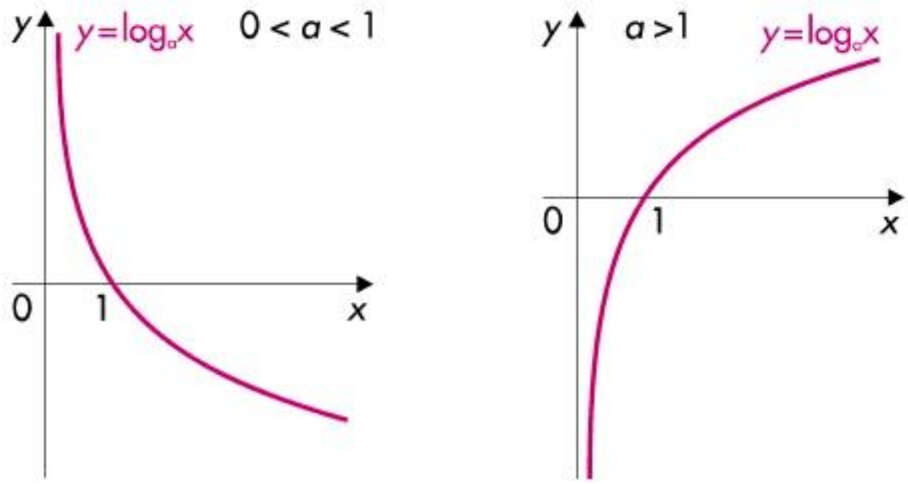
$$\boldsymbol{= 3x^2 \cdot e^{-x} + x^3 \cdot (e^{-x})' = 3x^2 \cdot e^{-x} - x^3 \cdot e^{-x} = e^{-x}(3x^2 - x^3)}.$$

3.4 Logaritmus

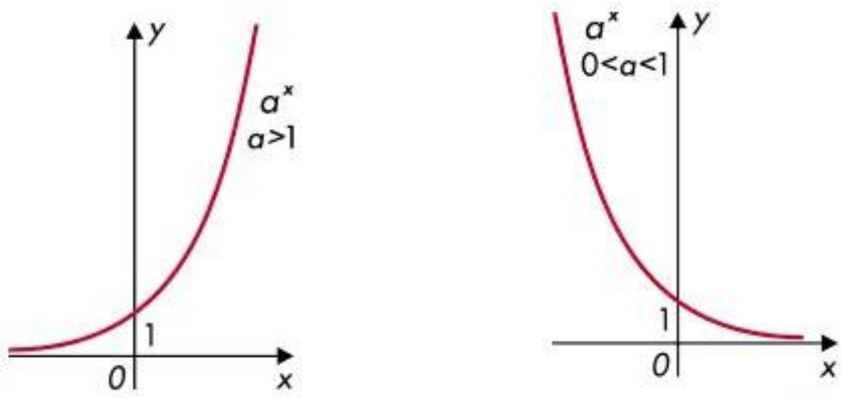
Číslo e je základem exponenciální funkce a přirozených logaritmů, je transcedentní – není kořenem žádného polynomu s celočíselnými koeficienty, je iracionální.

Logaritmická funkce (logaritmus čísla x o základu a, $\boldsymbol{y = log_a x; x} \in (\mathbf{0}; \infty)$; a $\in$ (0,1) $\cup$(1,+ ∞)) je inverzní k exponenciální funkcí *f(x)* = a^x.. Funkce

$$\boldsymbol{log_a x} \begin{cases} \boldsymbol{a > 1 - je\ daná\ funkce\ rostoucí} \\ \boldsymbol{0 < a < 1 - je\ daná\ funkce\ klesající} \end{cases}.$$



Obrázek 3 Graf logarimu v závislosti na a [13]

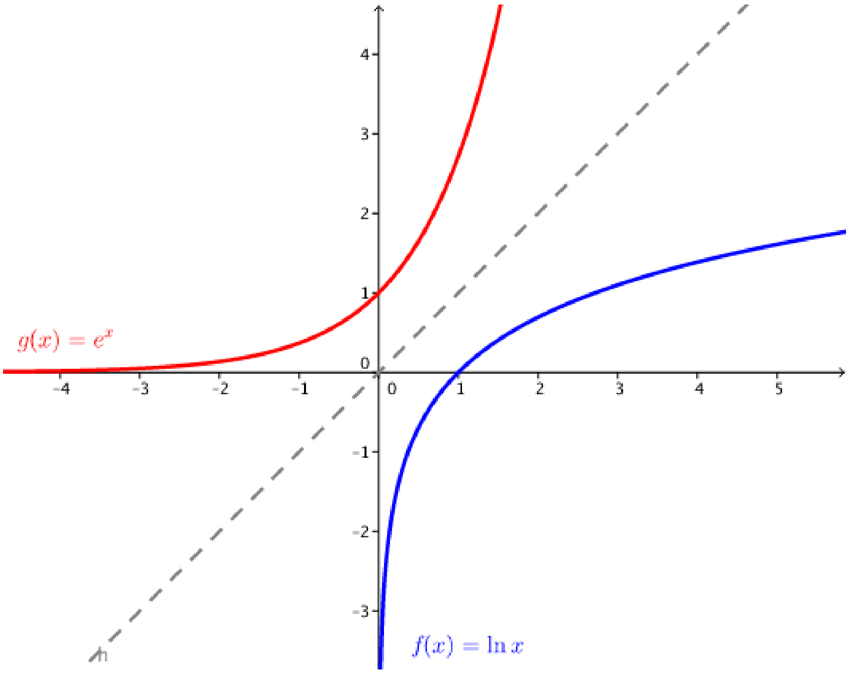


Obrázek 4 Graf exponenciální funkce[14]

[13] https://leporelo.info/logaritmus

[14] https://leporelo.info/exponencialni-funkce

K logaritmický funkci je inverzní funkce exponenciální (inverzní – přiřazení opačných hodnot Df(x) ↔ Hf(x)).



Graf funkce $y = e^x$ a $y = \log_e x$ – křivky jsou souměrné podle osy prvního a třetího kvadrantu (šedá přerušovaná čára)

Obrázek 5 Inverzní funkce[15]

Přirozený logaritmus, jehož základ je číslo *e* značíme lnx.

$$\boldsymbol{log_e x = ln\, x}$$

3.4.1 Příklad

Vyřešte rovnici

$$\boldsymbol{ln(2x+6) = 0\,;\, x \in (1, \infty)}$$

Za použití pravidla

$$\boldsymbol{ln(e^x) = x}$$

$$\boldsymbol{e^{ln(x)} = x}$$

[15] http://www.matematika.cz/logaritmy

převedeme výraz

$$e^{ln(2x+6)} = e^{0}$$

$$2x + 6 = 1$$

a už se jedná o jednoduchou rovnici, která stačí upravit a výsledek je

$$x = -\frac{5}{2}$$

3.5 Finanční aplikace

Od nepaměti hrály peníze velkou roly v životech lidí. Touha pro získání bohatství a dosažení finanční bezpečnosti. Nebylo žádným překvapením, že anonymní matematik (nebo možná obchodník či věřitel) na počátku 17. století si všiml zvláštního vztahu mezi způsobem růstu peněz a chováním určitého matematického výrazu v nekonečnu.

Praxe účtování poplatku za půjčování peněz se datuje do počátků zaznamenané historie. Například jílová tabulka z Mezopotámie z roku kolem 1700 před naším letopočtem, která se nyní nachází v Louvru, řeší následující problém: jak dlouho bude trvat, než se částka peněz zdvojnásobí, jestliže bude roční úroková sazba 20%. Abychom daný problém definovali v jazyce matematiky, poznamenáme si, že na konci každého roku součet roste o 20%, tedy o hodnotu 1,2. Po *x* letech bude součet růst o $1{,}2^x$. Otázka zní, za jak dlouho budu mít dvojnásobek původní hodnoty - $1{,}2^x = 2$.

Nyní k vyřešení této rovnice, jinak řečeno k odstranění x z exponentu, musíme použít logaritmy, které Babylonci neměli. Nicméně, oni byli schopní najít přibližnou hodnotu. Pozorovali, že $1{,}2^3 = 1{,}728$, zatím co $1{,}2^4$=2,0736. Takže *x* musí mít hodnotu mezi 3 a 4 roky. Nebylo pro ně jednoduché vypočítat správnou hodnotu, přesto jejich odpověď byla x= 3,7870, je mimořádně blízko správné odpovědi x= 3,8018 (tj. asi 3 roky, 9 měsíců a 18dní). Babylonci nepoužívali desítkový systém (používal se až v raném středověku), ale šedesátkový – číslovací systém založený na čísle 60. Odpověď na destičce v Louvru nalezneme 3;47;13;20 – v šedesátkovém systému to znamená $3/60^0 + 47/60^1 + 13/60^2 + 20/60^3 = 3{,}7870$.

Finanční matematika rozlišuje dva základní způsoby úročení finančních prostředků:

- jednoduché úročení – vyplácené úroky se nepřipočítávají k původnímu kapitálu a dále se neúročí,

- složené úročení – vyplácené úroky se naopak k původnímu kapitálu připočítávají a následně se spolu s ním úročí.[16]

Podívejme se stručně na to, jak funguje složené úročení. Předpokládejme, že vložíme 100 Kč na účet, kde je 5% roční úrok. Na konci prvního roku bude náš zůstatek $100 \cdot 1{,}05 = 105\ Kč$. Banka tuto novou částku považuje za "nový" kapitál, který byl právě reinvestován ve stejné sazbě. Na konci druhého roku bude zůstatek $105 \cdot 1{,}05 = 110{,}25\ Kč$, na konci třetího roku $110{,}25 \cdot 1{,}05 = 115{,}76\ Kč$ a tak dále. Vidíme, že náš vklad roste v geometrické posloupnosti (q=1,05). Naproti tomu účet s jednoduchým úrokováním roste aritmetickou posloupností (d=2) a má 5% úrok vždy z původního kapitálu (každý rok nám přibude na účtu 5 Kč). Po prvním roce budeme mít 105 Kč, po druhém roce 110 Kč, po třetím roce 115 Kč a tak dále. Je zřejmé, že peníze investované ve složeném úroku budou růst rychleji, než kdyby byly investovány s jednoduchým úročením.

Z tohoto příkladu jde vidět, co se s našimi penězi děje ve všeobecném případě. Předpokládejme, že vložíme základní kapitál P na účet, který každoročně vyplatí r procentní úrokovou sazbu (ve výpočtech vždy vyjadřujeme r jako desetinné číslo – místo 5% počítáme s 0,05). To znamená, že na konci prvního roku bude zůstatek P(1 + r),na konci druhého roku bude $P(1 + r)^2$,.... Všeobecně můžeme napsat, že po t letech bude zůstatek $P(1 + r)^t$. Označením této částky za S se dostaneme ke vzorci

$$S = P(1 + r)^t. \qquad (1)$$

Tento vzorec je prakticky základem všech finančních výpočtů.

Některé banky využívají tzv. efektivní úrokové sazby (při ročním úrokovém období dává stejnou budoucí hodnotu, jako roční úroková sazba při častějším (například pololetní, měsíčním,...) připisování úroků.

Když budeme vycházet z příkladu výše, při vkladu 100 Kč, úrokové sazbě 5%, ale při připisování úroku dvakrát za rok, pokaždé s poloviční úrokovou sazbou (tedy

[16] RADOVÁ, Jarmila; DVOŘÁK, Petr; MÁLEK, Jiří. *Finanční matematika pro každého*. 7.aktualizované vydání. Praha : GRADA Publishing, a.s., 2009. 293 s. ISBN 978-80-247-3291-6.

2,5%) to bude činit $(100 \cdot 1{,}025)^2$ = 105,0625 Kč, asi o 6 halířů více, než kdyby se úročilo jednou za rok ve výši 5%. Úroková sazba může být definována pro různá časová období. Z tohoto pohledu rozlišujeme:

- p.a. (per annum) – roční úroková sazba,
- p.s. (per semestre) – pololetní úroková sazba,
- p.q. (per quartale) – čtvrtletní úroková sazba,
- p.m. (per mensem) – měsíční úroková sazba,
- p.d. (per diem) – denní úroková sazba.

Pro každé přechodné období banka používá roční úrokovou sazbu dělenou n, tj r/n. Hodnota t nám udává po kolika letech, ale musíme ji vynásobit n, kolikrát za rok.

$$\boldsymbol{S = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}} \qquad (2)$$

Samozřejmě rovnice 1 je jen zvláštním případem rovnice 2, kdy n=1.

Bylo by zajímavé porovnat částky peněz, které dostaneme po uplynutí prvního roku pro různá časová období. Stále počítáme P=100 Kč a r= 5%=0,05.

Tabulka 3.5 100 Kč po roce s 5% roční úrokovou sazbou za různá časová období

časové období	**n**	**r/n**	**S**
roční	1	0,05	105
pololetní	2	0,025	105,06
čtvrtletní	4	0,0125	105,09
měsíční	12	0,004166	105,12
týdenní	52	0,0009615	105,12
denní	365	0,0001370	105,13

Výsledky, které jsou uvedeny v tabulce 3.5 a jsou docela překvapující. Jak vidíme, rozdíl mezi ročním a denním úročením při 100 Kč vkladu a roční úrokové sazbě 5% je rozdíl ve 13 halířích.

Abychom tuto otázku prozkoumali dále, zvažme zvláštní případ rovnice 2, kdy *r* = 1 (to znamená roční úroková sazba je 100%), i když ještě žádná banka nikdy nepřinesla tak velkorysou nabídkou. To co máme na mysli, není skutečná situace, ale hypotetický případ, který má mnohem větší matematické důsledky. Pro zjednodušení budeme předpokládat vklad P=1 Kč a t = 1 rok. Rovnice 2 pak bude znít:

$$\boldsymbol{S = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}} \qquad (3)$$

A naším clem je zkoumat chování tohoto vzorce pro zvýšení hodnot *n*. Výsledky jsou uvedeny v tabulce 3.2.:

Tabulka 3.6 zvýšení hodnot *n*	
n	**(1 +1/n)^n**
1 (roční)	2
2 (pololetní)	2,25
3	2,37037
4 (čtvrtletní)	2,44141
5	2,48832
10	2,59374
50	2,69159
100	2,70481
1000	2,71692
10000	2,71815
100000	2,71827
1000000	2,71828
10000000	2,71828

Vypadá to, že jakýkoliv další růst čísla n bude mít na výsledek stěží vliv.

Ale bude tento vzor pokračovat? Je možné, že bez ohledu na to, jak velké je *n* hodnoty $(1+ 1/n)^n$ se budou pohybovat kolem čísla 2,71828? Tato zajímavá možnost je skutečně potvrzena pečlivou matematickou analýzou.

Nejprve ukážeme, že posloupnost

$$\boldsymbol{S_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots} \qquad (4)$$

konverguje (má limitu), když n roste nade všechny meze. Součet $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ (1 se dá zapsat jako 1/0!). roste s každým přidaným členem, máme tedy $s_n < s_{n+1}$ pro každé n; t.j. posloupnost s_n je monotónně rostoucí. Počínaje n = 3 platí také n! = 1.2.3 . . . n > 1.2.2 . . . 2 = 2n−1 , proto

$$\boldsymbol{S_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}} \tag{5}$$

pro n = 3, 4, 5, ... V tomto součtu členy počínaje druhým v pořadí tvoří členy geometrické řady s kvocientem 1/2. Součet této řady je $\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) < 2$. Máme proto $s_n < 1 + 2 = 3$, což ukazuje, že posloupnost s_n je shora omezena trojkou (t.j. hodnoty s_n nikdy nepřevýší 3). Nyní použijeme známé tvrzení z analýzy (Každá omezená monotónně rostoucí posloupnost má limitu pro $n \to \infty$. Tedy s_n konverguje (blíží se) k limitě S. Z (4) a (5) je ihned vidět, že S leží mezi 2 a 3. Nyní uvažujme posloupnost $a_n = (1 + 1/n)^n$. Ukážeme, že tato posloupnost konverguje ke stejné limitě jako s_n. Na výraz $\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^n$ použijeme binomickou větu:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T_n} &= \boldsymbol{1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\dots 1}{n!} \cdot \frac{1}{n^n}} \\ &= \boldsymbol{1 + 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{2!} + \cdots + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n!}} \end{aligned}$$

Protože hodnoty výrazů v závorkách jsou vždy menší než 1, máme $a_n \leq s_n$ (ve skutečnosti $a_n < s_n$ počínaje n = 2). Proto posloupnost a_n je rovněž shora omezená. Navíc a_n roste monotónně, jak jsme již ukázali v jedné z předchozích kapitol. Tedy a_n má limitu pro $n \to \infty$. Označíme ji písmenem A.

Nyní ukážeme, že S = A. Protože $s_n \geq a_n$ pro všechna $n \in N$, máme $S \geq A$. Teď ukážeme, že stejně tak platí i $S \leq A$. Nechť $m < n$ je pevně zvolené přirozené číslo. Vezmeme prvních m + 1 členů posloupnosti a_n

$$\boldsymbol{1 + 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{2!} \dots + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{m-1}{n}\right) \cdot \frac{1}{m!}}$$

Protože m < n a všechny členy jsou kladné, je poslední součet menší než a_n. Když teď necháme n neomezeně růst a m podržíme pevné, bude se součet blížit s_m, zatímco a_n se bude blížit A. Máme tedy $s_m \leq A$, a tudíž $S \leq A$. Protože platí zároveň $S \geq A$ a $S \leq A$, vyplývá z toho S = A, což jsme chtěli dokázat. Limitu A jsme již předem označili *e*. Je tedy

$$\boldsymbol{e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)}$$

Je na čase, abychom si ukázali, v čem tkví výhoda počítání *e* z této nekonečné řady. Z tohoto důvodu vezměme v úvahu s_n z (4) a navíc položme

$$\boldsymbol{s_k = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ \dots + \frac{1}{k!}.}$$

Pro n > k vzniká s_k z s_n tím, že ve výrazu pro s_n ponecháme vpravo z n+ 1 sčítanců pouze prvních k + 1 sčítanců, takže

$$\boldsymbol{s_n > s_k \ \ pro\, n > k.}$$

Můžeme tedy napsat

$$\boldsymbol{s_n = s_k + r_{k,n}} \qquad (6)$$

kde

$$\boldsymbol{r_{k,n} = \frac{1}{k!}\left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \ \dots + \frac{1}{(k+1)(k+2)\dots(n-1)n}\right).}$$

Tento zbytek odhadneme shora a to tak, že všechny výrazy v závorkách nahradíme k + 1, je totiž 1/k+2 ≤ 1/k+1 , atd. Dostaneme

$$\boldsymbol{r_{k,n} \leq \frac{1}{k!}\sum_{m=1}^{n-k}\frac{1}{(k+1)^m}} \ .$$

Položíme-li 1/k+1 = q, je

$$\boldsymbol{r_{k,n} \leq \frac{1}{k!}\sum_{m=1}^{n-k}\frac{1}{q^m} = \frac{1}{k!}\underbrace{\left(q + q^2 + \ \dots + q^{n-k}\right)}_{\check{c}leny\ geometrick\acute{e}\ posl.} = \frac{1}{k!}\frac{q\left(1 - q^{n-k}\right)}{1-q} < \frac{1}{k!}\frac{q}{1-q}} \ .$$

Dosadíme zpátky za q a po jednoduché úpravě dostaneme $\boldsymbol{r_{k,n} < \frac{1}{k \cdot k!}}$. Podle (6) je tedy $s_n \leq s_k + 1/k.k!$. Vtip je v tom, že pro všechna čísla s_n od (k + 1) počínaje, tj. pro s_k+1, s_k+2, s_k+3, . . . , dostáváme tutéž nerovnost, neboť pravá strana nezávisí na n. A proto také $e \leq s_k + 1/k.k!$. Pro každé celé k ≥ 3 je tedy

$$\mathbf{s_k} \leq \boldsymbol{e} \leq \mathbf{s_k} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{k \cdot k!}}, \qquad \mathbf{tj.\,0} \leq \boldsymbol{e} - \left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1!}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2!}} + \cdots + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{k!}}\right) \leq \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{k \cdot k!}}.$$

Ježto pro větší hodnoty k je 1/k.k! velmi blízko nule, lze takto číslo e velmi pohodlně počítat. Např. 1/10.10! < 3 10^8 ; odtud vypočteme e s chybou menší než 10−7 (je tedy $|e - 2.7182818| < 10^{-7}$). Pro k = 14 dostáváme číslo e s chybou menší než 10^{-12}; zkuste to propočítat, vyjde pro e přibližná hodnota 2.71828182845 . . .

4 Závěr

Cílem této práce bylo přiblížit čtenáři využití eulerova čísla v matematické analýze. V průběhu práce jsem zjistila, že práce nikdy nebude úplná. V mé práci musí mít čtenář matematický základy, aby danou problematiku pochopil. Jsem ráda, že jsem si dané téma vybrala a mohu říci, že jsem plně pochopila problematiku eulerova čísla v matematice. A na závěr jedna citace z knihy od Davida Achesona ([11],s174):

..., je vzít řadu, která reprezentuje e^t a dosadit do ní zcela bez skrupulí imaginární veličinu t = iθ, kde θ je reálné číslo a i = $\sqrt{-1}$. Dostaneme

$$e^{\mathrm{i}\theta} = 1 + \mathrm{i}\theta - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\mathrm{i}\theta^3}{2\cdot 3} + \frac{\mathrm{i}\theta^4}{2\cdot 3\cdot 4} + \cdots$$

a oddělíme-li na pravé straně reálné členy od imaginárních, vyjde

$$e^{\mathrm{i}\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{2\cdot 3\cdot 4} - \ \dots\right) \ + \ \mathrm{i}\left(\theta - + \frac{\theta^3}{2\cdot 3} + \frac{\theta^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \cdots\right)$$

Jenomže obě nekonečné řady v závorkách jsou právě ty řady, které reprezentují sin θ a cos θ na stránce 171! Takže nakonec dostáváme

$$e^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$$

Tento úžasný vzorec, který objevil Euler v roce 1748, je dostatečně významným výsledkem na závěr knihy.

Za prvé, získali jsme jej propojením široké škály sofistikovaných matematických myšlenek včetně kalkulu, nekonečných řad a imaginárních čísel.

Za druhé, vzorec má obrovský význam pro praxi. Mimo jiné je jediným důvodem, proč v technické nebo fyzikální literatuře věnované oscilacím najdeme jek *e* tak i=$\sqrt{-1}$ prakticky všude. Obě tyto konstanty významně zjednodušují mnohé výpočty.

Konečně, dosadíme-li speciální hodnotu θ = π a vzpomeneme toto, že sin π=0 a cos π=1 (viz stránka 171). dostaneme nakonec

$$e^{\mathrm{i}\theta} = -1$$

5 Literatura

[1] ACHESON, D. J. *1089 a další parádní čísla: [matematická dobrodružství]*. Praha: Dokořán, 2006. ISBN 80-7363-025-7.

[2] CAJORI, Florian. *A history of mathematical notations*. New York: Dover Publications, 1993. Dover books on mathematics. ISBN 0-486-67766-4.

[3] CRILLY, A. J. *Velké otázky*. Praha: Knižní klub, 2012. Universum (Knižní klub). ISBN 978-80-242-3596-7.

[4] KAPLAN, Robert a Ellen KAPLAN. *Umění nekonečna: náš ztracený jazyk čísel*. Praha: Triton, 2010. ISBN 978-80-7387-245-8.

[5] MAOR, Eli. *E: the story of a number*. New Princeton science library paperback. ISBN 978-0-691-16848-7.

[6] RADOVÁ, Jarmila; DVOŘÁK, Petr; MÁLEK, Jiří. *Finanční matematika pro každého*. 7.aktualizované vydání. Praha : GRADA Publishing, a.s., 2009. 293 s. ISBN 978-80-247-3291-6.

[7] SARTORI, E. Velikáni francouzské vědy. Přeložila E. Vergeinerová aj. Grospietsch. Praha: Agentura KRIGL, 2005. ISBN 80–86912–00–0 strana 24

[8] Volně přeloženo SMITH, David Eugene. *A source book in mathematics*. Dover ed. New York: Dover Publications, 1959. Dover classics of science and mathematics. ISBN 978-0-486-64690-9. str. 150.

[9] (http://theses.cz/id/9qlvst/Jezkova.pdf) Andrea Ježková, bakalářská práce – Historie *e*, 2014

[10] http://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/404206/BranaKVedeni_011-1952-1_3.pdf)

[11] http://home.pf.jcu.cz/~math4all/doc/u/H_4_3_Logaritmy_a_exponencialni_funkce.pdf

[12] *http://vs-vtipy.tonikovo.cz/vtipy/derivace/*

[13] http://www.gvp.cz/~vinkle/mafynet/_M/funkce/expon_log_fce_rce/diplomka_eulerovo_cislo.pdf

[14] http://www.matematika.cz/logaritmy

[15] http://www.zas.cz/prednasky/prednaska_koutny_euler.pdf

[16] http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/*e*.html

[17] https://leporelo.info/exponencialni-funkce

[18] https://leporelo.info/logaritmus

[19] https://plus.google.com/+HeinrichCKuhn/posts/3ZWX7zVgbK9