PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA UNIVERZITY PALACKÉHO
KATEDRA ALGEBRY A GEOMETRIE

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Nekonečno v matematice

2012 Vojtěch Zlámal

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně pod vedením Mgr. Michala Botura, Ph.D., a že jsem uvedl veškerou použitou literaturu.

V Olomouci 21. května 2012 ....

Zde bych rád poděkoval Mgr. Michalu Boturovi, Ph.D., vedoucímu mé práce, za podněty, cenné rady a čas, který mi věnoval.

Obsah

Seznam obrázků

Úvod

Tato práce se zabývá pojmem nekonečno, který označuje něco neukončeného, neohraničeného. Jde o běžný pojem, objevuje se všude kolem nás, je možné na něj narazit i u hrajících si dětí:

A: Až já budu velký, budu moc bohatý.
B: A kolik peněz budeš mít?
A: Tisíc.
B: Tak to já budu mít víc, budu mít milion.
A: Já deset milionů.
B: Já nekonečno.
A: Já dvě nekonečna.

V matematice se pak nekonečno objevuje v různých podobách (čísla, geometrické útvary, atp.), avšak na základní a střední škole se žáci nekonečnem nezabývají hlouběji a využívá se pouze jejich intuitivních představ. Takto uchopené nekonečno je dostatečné pro nižší matematiku (základní a střední školy), ale ve vyšší matematice již intuitivní představy mohou vést k chybným výsledkům. Hlavním cílem této diplomové práce je tak vytvoření textu přibližující problematiku nekonečna v matematice čtenáři s nejvýše maturitním vzděláním, přičemž u čtenáře se předpokládají základní znalosti práce s množinami na úrovni střední školy.

V současné matematice vychází pojem nekonečna z teorie nekonečných množin a jejich mohutností vyjádřených tzv. kardinálním číslem. Proto se tato práce zabývá základy teorie množin, na kterých je následně vystavěn pojem kardinálního čísla množiny. A právě pochopení vlastností mohutnosti nekonečných množin vede k hlubšímu pochopení celé problematiky nekonečných množin.

Celá práce je rozdělena do čtyř kapitol. V první kapitole je stručně popsán vývoj chápání nekonečna v dějinách, v druhé se text zabývá výkladem základů teorie množin a ve třetí zavedením kardinálního čísla. Čtvrtá kapitola se zabývá aritmetikou kardinálních čísel, přičemž tato část je do textu zařazena z důvodu ucelenosti pohledu na nekonečno. Pro pochopení základních úvah týkajících mohutnosti nekonečných množin uvedených ve třetí kapitole není však bezpodmínečně nutná.

Celý text je vysázen v systému LaTeX, vložené obrázky byly vytvořeny v programech Geogebra, METAPOST a editoru diagramů Dia. Tato práce a veškeré zdrojové soubory jsou přiloženy na CD.

1 Různá vnímání nekonečna v dějinách

V průběhu dějin se vnímání nekonečna měnilo. Zásadním zlomem pak bylo vytvoření teorie množin Georgem Cantorem koncem 19. století, kterážto kromě změny pohledu na nekonečno přinesla nový způsob výstavby matematiky celkově. Přestože tato teorie obsahovala vážné trhliny, pojetí nekonečna vycházející z Cantorovy teorie se v matematice používá dosud.

Problematika nekonečna se nachází na hranici matematiky s filosofií a teologií, což se v průběhu dějin velmi výrazně projevilo. Filosofie a teologie ovlivňovaly chápání matematiky, ale také naopak matematika výrazně ovlivnila ony dva obory.

1.1 Období před vznikem teorie množin

Velké změny v chápání nekonečna před vznikem teorie množin se udály ve starověku (především ve starověkém Řecku) a následně pak v průběhu středověku, kdy byl právě nejvýraznější vliv teologie. Z období těsně před Cantorovou formulací teorie množin je pak nutné zmínit dílo Bernarda Bolzana, který formuloval základní poznatky, na nichž Cantor svoji teorii vybudoval.

1.1.1 Starověké Řecko

Už v tomto období bylo nekonečno známo. Tehdejší matematici chápali, že neexistuje největší přirozené číslo, tedy že ke každému existujícími přirozenému číslu lze najít číslo o jedno větší. Nekonečnost přirozených čísel viděli v onom *procesu* hledání stále větších čísel, tedy v *možnosti* nalézat tato čísla. Připuštění nekonečna v možnosti (potenci) neukončeného procesu tvorby se nazývá *potenciální nekonečno*.

Přestože je korektní práce s nekonečně malými veličinami zavedena až v 17. a 18. století Newtonem a Leibnizem [Jeli], vytvořil kolem roku 450 př. n. l. Zenón z Eleje úvahy, jinak zvané aporie (paradoxy), které pracují právě s nekonečně malými částmi. Tyto aporie byly sepsány tak, že nabourávaly tehdejší chápání práce s nekonečnem [Stru]. Například ve své úvaze o Achillovi a želvě oddělil Zenón při pohybu objektu jeho pozici a dobu, za kterou této pozice dosáhne, použitím sekvence pozic daného objektu namísto pohybu. Tuto sekvenci následně rozdělil na nekonečně mnoho částí.

> *Achilles a želva se pohybují přímočaře v témže směru. Achilles je mnohem rychlejší než želva, avšak aby ji dohonil, musí nejprve projít bodem P, z něhož želva vyšla. V okamžiku, kdy dostihl bodu P, postoupila již želva k bodu P_1. Achilles však nemůže chytit želvu, aniž by prošel bodem*

P_1, avšak želva zatím postoupí do nového bodu P_2. Je-li Achilles v P_2, želva zatím dosáhla dalšího bodu P_3, atd. Achilles tedy nemůže dohonit želvu.

Podařilo se mu tak poukázat na rozpory tehdejšího chápání sčítání nekonečně mnoha konečných částí. V té době se totiž předpokládalo, že sečtením nekonečně mnoha libovolných částí je možné dostat libovolně velký výsledek, s čímž přichází do rozporu Zenónova úvaha (rozpor = aporie). Tyto aporie ovlivnily práce matematiků a filosofů na celá staletí.

Poznatkem, který pochází také z období starověkého Řecka, je tzv. *Archimédův axiom*[1]:

Tvrzení 1 (Archimédův axiom)**.** *Pro libovolné reálné číslo x existuje přirozené číslo n takové, že $x < n$.*

Jelikož v tomto období nebyla známa reálná čísla (jako *čísla* byla označována pouze přirozená a racionální čísla), bylo uvedené tvrzení zapsáno pomocí geometrických útvarů [Stru]:

Větší ze dvou daných veličin, ať jsou to úsečky, plochy nebo tělesa, přesahuje menší o jistý rozdíl, který, když je dostatečně vynásoben, je větší než než každá z obou daných veličin.

V případě úseček lze situaci interpretovat tak, že k libovolné úsečce lze sestrojit úsečku delší, jejíž délka je rovna k-násobku délky libovolné kratší úsečky. Přičemž délka použité kratší úsečky může být vyjádřena například přirozeným číslem.

1.1.2 Středověk a počátky novověku

Nekonečno přejímá středověká matematika v podobě potenciálního nekonečna a následně se snaží o vyřešení problematiky *aktuálního nekonečna*, čímž se rozumí připuštění aktuální existence všech prvků určitého nekonečného souboru. Například potenciální nekonečno přirozených čísel říká, že neexistuje největší přirozené číslo, protože ke každému přirozenému lze vždy vytvořit číslo větší, jelikož základním principem poteciálního nekonečna je tak *možnost tvorby.* Naopak aktuální nekonečno přirozených čísel vychází z předpokladu, že již všechna přirozená čísla existují (byla již vytvořena). Jelikož je matematika (stejně jako celá věda) tohoto období pevně svázána s teologií, měly pokusy o vypořádání se s aktuálním nekonečnem značné teologické důsledky. V knihách *Suma proti pohanům* a *Suma theologická* filosof a

[1] Sám Archimédes však formulaci tohoto axiomu připisuje Eudoxovi a jeho teorii proporcí.

teolog Tomáš Akvinský vylučuje aktuální nekonečnost z reálného světa a připisuje ji pouze bohu [Vop1]. Myšlenkou aktuální nekonečnosti se následně zabývá Mikuláš Kusánský, jeho úvahy však byly vedeny formou *kdyby*, čímž se vyhnul konfliktu s tehdejším pojetím světa [Fuch].

Pokusy o práci s aktuálním nekonečnem v reálném světě se dostávaly do konfliktu právě s teologií, neboť závěry, které z nich bylo možno logicky vyvodit, odporovaly chápání boha a světa. Pro učence tak byly teorie, které se dotýkaly aktuálního nekonečna, velmi ožehavým tématem. Dne 16. února roku 1600 se o tom na náměstí Campo defiori (náměstí Květin) v Římě přesvědčil Giordano Bruno a stal se tak obětí římské inkvizice. Na hranici ho dovedlo tvrzení, že vesmír je aktuálně nekonečný s nekonečným počtem světů [Vop1], čímž popřel dělení vesmíru na sublunární (před Měsícem, obsahující celý reálný svět) a supralunární (za Měsícem, božská část), kteréžto bylo v té době považováno za základ uspořádání světa již z dob Aristotela (384 př. n. l. až 322 př. n. l.). Onou hranicí mezi sublunární a supralunární částí byla v Aristotelově pojetí křišťálová kulová plocha osázená hvězdami. Rozvojem myšlenky aktuálního nekonečna v reálném světě tak Bruno smazal rozdíl mezi božským a reálným, za což se následně musel zodpovídat inkvizici.

Dalším matematikem, který se nekonečnem zabýval, byl Galileo Galilei [Vop1]. Jeho přístup byl pro tehdejší společnost přijatelný, protože používal pouze potenciální nekonečno a považoval za nesmyslné srovnávat nekonečné množiny. Tuto nesmyslnost uvedl ve svém díle Dialogy, kde ukazuje možnost jednoznačného přiřazení přirozených čísel ke svým čtvercům (druhým mocninám), což jsou také přirozená čísla. Úvahou přichází na to, že oněch čtverců by měl být stejný počet jako všech přirozených čísel, což je v rozporu s tím, že čtverce jsou jejich podmnožinou. Tuto úvahu tedy považuje za důkaz nesmyslnosti takového počínání [Fuch].

V současnosti používaný symbol ∞ pro nekonečno zavedl anglický matematik John Wallis roku 1655. Nejen že použil symbol ∞ pro nekonečně velké, ale také $\frac{1}{\infty}$ pro nekonečně malé [Cajo]. Ve svých dílech navazuje na práci Bonaventury Cavalieriho a připravuje půdu pro výstavbu infinitezimálního počtu Newtonem a Leibnizem a jeho následný rozvoj Cauchym a Weiestrassem do dnešní podoby diferenciálního a integrálního počtu.

1.1.3 Dílo Bernarda Bolzana

K vývoji pojmu nekonečno výrazně přispěl český matematik Bernard Bolzano[2]. Přes své matematické nadání nebyl na pražské univerzitě profesorem matematiky,

[2]Označení český je diskutabilní, jelikož psal pouze německy a latinsky. Narodil se ale roku 1781 v Praze a celý svůj život prožil v Čechách [Stru].

ale působil jako kněz a vyučoval náboženství. Pro své názory byl však suspendován a následně se odebral na venkov, kde napsal největší část svého díla.

Kniha Paradoxy nekonečna, ve které se Bolzano zabývá právě touto problematikou, byla vydána roku 1851 (tři roky po Bolzanově smrti) v Lipsku. Český překlad vyšel až v roce 1963. V tomto díle zdůvodňuje nutnost práce s *aktuálním* nekonečnem a využívá množin prvků (souhrnů prvků). Důkaz existence aktuálního nekonečna je veden pomocí všeobecně pravdivých tvrzení (nezávisle pravdivých vět, tautologií), v originálu *pravd o sobě*, následujícím způsobem [Vop2]:

Nechť A = „Existuje alespoň jedno všeobecně pravdivé tvrzení (jedna pravda o sobě).“, pak A je všeobecně pravdivé tvrzení (pravda o sobě).

Pokud by jím nebyla, byla by všeobecně pravdivým tvrzením věta „Neexistuje žádné všeobecně pravdivé tvrzení (žádná pravda o sobě)“, což by byl spor. Následně lze uvažovat o povaze vysloveného tvrzení o A:

Tvrzení A_1 = „A je všeobecně pravdivé tvrzení.“ je také všeobecně pravdivým tvrzením.

Obecně lze tímto způsobem sestavit nekonečnou posloupnost pravd o sobě:

A_n = „A_{n-1} je všeobecně pravdivé tvrzení.“ je všeobecně pravdivé tvrzení.

Tento postup je konstrukcí potenciálního nekonečna, neboť dává pouze návod, jak se dopracovat k dalšímu všeobecně pravdivému tvrzení. Bolzano však provádí tzv. *aktualizaci nekonečna*, když říká, že souhrn všech všeobecně pravdivých tvrzení je aktuálně nekonečný, protože bůh je všechny zná a vidí.

Bolzano zde také uvažuje o porovnávání nekonečných souhrnů z hlediska množství. Myšlenku porovnávání nezavrhuje (jak to učinil Galilei), ale upřednostňuje představu vycházející z reálného světa. V případě, že mezi dvěma souhrny prvků, kde evidentně první z nich je částí druhého[3], existuje přiřazení takové, že všem prvkům z prvního souhrnu jednoznačně přiřadí prvek z druhého souhrnu, je toto přiřazení nepodstatné. Bolzano uvádí, že tento způsob porovnávání množství pomocí přiřazování prvků je možný pouze pro konečné množiny [Bolz].

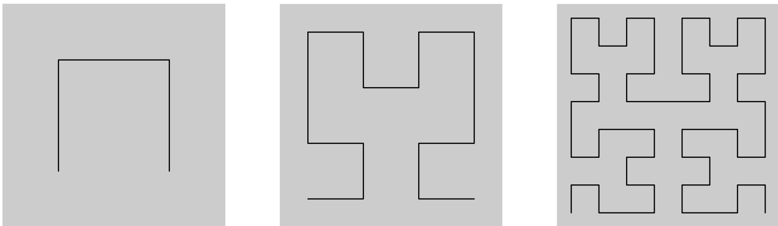
Přestože Bolzanův závěr o porovnávání nekonečných souhrnů byl z dnešního pohledu chybný, dílčí poznatky a obhajoba aktuálního nekonečna byly posléze použity jako východisko Cantorovy teorie množin a nejen jí.

[3]Jako příklad uvádí souhrn veličin (reálných čísel) mezi 0 a 5 a souhrn veličin mezi 0 a 12.

1.2 Georg Cantor

Další stupeň vývoje matematiky je založen na poznatcích Georga Cantora, jehož práce se týká aktuálně nekonečných množin, jejich mohutnosti a zavedení kardinálního čísla. Přestože se Cantor s Bolzanem nikdy nesetkal[4], byl Cantor Bolzanovou prací velmi ovlivněn [Stru].

Poté, co se Cantor stal roku 1872 mimořádný profesorem v Halle, seznámil se s matematikem Richardem Dedekindem. Od té chvíle se tito dva matematikové výrazně ovlivňovali [Cant]. Následujícího roku píše Cantor Dedekindovi o nespočetnosti $\mathbb{R}$, tedy nemožnosti očíslování všech reálných čísel přirozenými čísly. V roce 1877 zasílá Cantor dopisem důkaz bijekce úsečky na čtverec, k čemuž dodává: „Vidím to před sebou, ale nemohu tomu uvěřit.“ Na jeho práci posléze navázali Giuseppe Peano a David Hilbert se svými křivkami, které vyplňují celý rovinný útvar. Roku 1882



Obrázek 1. První tři kroky při konstrukci Hilbertovy křivky vyplňující čverec

vyslovil Cantor důležitou větu, kterou dnes známe jako Cantor-Bernsteinovu nebo Cantor-Schröder-Bernsteinovu větu, protože její důkaz byl podán roku 1896 Friedrichem Schröderem a 1897 Felixem Bernsteinem. Tato věta pojednává o srovnávání mohutností dvou množin pomocí zobrazení jedné množiny do druhé. Ze vzájemné spolupráce Cantora s Dedekindem vyplynula také Dedekindova konstrukce reálných čísel pomocí řezů, jeho myšlenka byla založena na Cantorově konstrukci iracionálních čísel jakožto limit racionálních posloupností. Cantor dále pokračoval ve výzkumu a roku 1890 zasílá Dedekindovi popis tzv. diagonální metody, kterou využil při důkazu spočetnosti čísel celých a racionálních. Díky větě o potenční množině, která byla na Cantorovu počest následně pojmenována Cantorova věta, a zavedení kardinálního čísla pomocí ekvivalence množin dokázal Cantor vybudovat teorii množin, ve které bylo možno srovnávat nekonečné množiny z hlediska jejich mohutností. Zavedením spočetnosti a nespočetnosti Cantor ukázal, že neexistuje jen „jedno nekonečno“, a pomocí věty o potenční množině dokázal, že nekonečných mohutností je také nekonečně mnoho.

[4]Georg Cantor se narodil roku 1845 a Bernard Bolzano zemřel roku 1848.

Významem Cantorovy práce bylo, že teorií množin bylo možno postihnout celou matematiku od základů. Teorie množin se tak stala univerzálním nástrojem a základem veškerého matematického poznání. Později byla nazvána intuitivní, jelikož mnoho pojmů nebylo přesně definováno (tyto pojmy byly brány za „zřejmé“).

1.3 Krize intuitivní teorie množin

Ještě za Cantorova života (zemřel 1918) se objevují antinomie (protimluvy) Cantorovy teorie. Sám Cantor v roce 1899 jednu objevil, avšak nejznámější je antinomie Russelova (občas označovaná jako Russelův paradox) z roku 1902 týkající se množiny všech množin. Antinomie tak ukazují spornost intuitivní teorie množin, což bylo ale vážným problémem, neboť matematika již na ní byla vystavěna. Cantor byl přesvědčen o možnosti úpravy své teorie, ale ukázalo se, že je to neproveditelné. Následně se matematická společnost rozděluje na dva směry podle toho, jakým způsobem chtějí matematiku vystavět [Fuch].

Intuicionistický směr. Zde je zastáván názor, že do tohoto stavu matematiku dovedlo použití nepřípustných nástrojů, mezi které patří také aktuální nekonečno. Je třeba tedy popřít značnou část matematiky a začít ji budovat od začátku, například bez použití existenčních důkazů (neboli použití aktuálního nekonečna). Tento směr se však příliš neprosadil.

Formalistický směr. Na rozdíl od intuicionistického směru se zde požaduje důsledné zpřesněné veškerých matematických pojmů, tedy odstranění jejich intuitivního zavádění. Tento směr vyústil do dvou teorií:

Teorie typů. Tato teorie říká, že nelze definovat nové pojmy pomocí pojmů stejné úrovně, proto zavádí hierarchický systém, kde lze definovat pomocí pojmů dané úrovně pouze nové pojmy v nižší úrovni, než je úroveň stávající.

Axiomatická výstavba matematiky. Zde je požadován systém základních tvrzení (tzv. axiomů), ze kterých je možno odvodit jakékoliv tvrzení teorie. Na axiomatický systém byl kladen požadavek *nezávislosti* axiomů, *úplnosti* a *bezespornosti* tohoto systému [Kope]. Podmínka nezávislosti vyžaduje, aby žádný axiom nebylo možné odvodit z ostatních axiomů. Úplný systém axiomů je takový systém, ve kterém lze o každém tvrzení rozhodnout, zda je pravdivé nebo nepravdivé (lze jej odvodit z axiomů nebo lze odvodit jeho opak). Požadavek bezespornosti říká, že v daném systému neexistuje tvrzení takové, že by bylo odvoditelné ono samo i jeho negace.

Poslední jmenovaný směr výstavby se prosadil nejvíce. Na počátku 30. let 20. století však Kurt Gödel ukázal, že neexistuje nezávislý, bezesporný a přitom úplný axiomatický systém, na kterém by bylo možné vystavět celou matematiku. Tento fakt tak narušil snahu o perfektní axiomatizaci matematiky, čímž začala tzv. *třetí krize matematiky*, která trvá až do současnosti. Přesto současné chápání nekonečna vychází právě mohutnosti (kardinálního čísla) množin.

2 Základní pojmy teorie množin

Pro zavedení pojmů množiny a náležení do množiny na úrovni středních škol se nejčastěji vychází z intuitivní představy množiny jako libovolné skupiny prvků. Např. učebnice [mat1] říká, že

množina je souhrn předmětů (objektů),

nebo například v literatuře [Bart] je uvedeno, že

soubor právě těch objektů, které mají určitou vlastnost V,
se nazývá množina definovaná vlastností V.

Protože naším hlavním cílem je zkoumání nekonečných množin a jejich vlastností, které se mohou jevit jako paradoxní, je tento intuitivní přístup nevhodný. Hlavním důvodem, který vedl k opuštění tohoto přístupu a který donutil matematiky vytvořit přesnou (exaktní) definici množiny, je tzv. Russelův paradox [Balc]. Jedním ze základních předpokladů teorie množin je skutečnost, že množina nemůže obsahovat sebe samu, z čehož Bernard Russel vyvodil, že nemůže existovat množina všech množin. Pokud by *skupina všech množin* byla množinou, potom by tato množina musela obsahovat sama sebe, což je v rozporu s tímto předpokladem[5].

Russelův paradox donutil matematiky vyloučit „extrémně velké skupiny objektů“ z teorie množin a zavést pro ně nový název *třídy.* Přestože standardní SŠ definice množin vytváří intuitivně správnou představu množiny a vlastnosti náležení prvků do množiny, není pro práci s některými soubory objektů dostatečně vhodná. Zavedení množin tak v teoretické matematice probíhá odlišným způsobem.

Každou matematickou teorii zavádíme pomocí souboru základní pravidel (axiomů), které vytváří tzv. axiomatický systém teorie. Na počátku 20. století se objevilo několik nezávislých pokusů o vytvoření axiomatického systému pro teorii množin. Dva v současnosti používané jsou Zermelo-Fraenkelův a Gödel-Bernaysův (Zermelo-Fraenkelova a Gödel-Bernaysova teorie množin). Přestože se liší v počtu a formulaci axiomů, teorie množin, které popisují, jsou stejně silné [Soch], dají se v nich tedy dokázat stejná množinová tvrzení.

[5] Tento paradox je také známý jako problém holiče [Russ]: *Holič ze Sevilly holí právě ty ze sevillských mužů, kteří se neholí sami. Kdo holí holiče?* Pokud by se holič holil sám, pak by spadal mezi ty, kteří se holí sami, tedy by pak sám sebe nesměl holit. A naopak pokud by se sám neholil, patřil by tedy mezi takové, kteří se sami neholí, a měl by se tedy sám holit. Zamyslíme-li se nad způsobem konstrukce tohoto paradoxu, zjistíme, že je analogický ke konstrukci Russelovy „množiny všech množin“.

Axiomy teorie množin nedefinují množinu přímo, ale pouze popisují vlastnosti množin a *náležení* do množiny[6]. Teoretické zavedení množin není v rozporu s naší intuitivní představou množin, ale pouze nahrazuje předchozí vágní definice. Proto není nutné úplně zavrhnout středoškolské pojetí množiny jakožto souboru prvků, ale je nutné uvědomit si omezení tohoto přístupu vyplývající z Russelova paradoxu[7].

2.1 Práce s množinami

Existují dva základní způsoby určení množiny, přičemž v obou případech se pro zápis užívají složené závorky { a }. Prvním způsobem je určení výčtem všech prvků množiny. Tento postup je vhodný pouze pro množiny obsahující konečný počet prvků[8]. Například zápisem $\{1, x, \heartsuit\}$ se rozumí množina obsahující právě tři prvky: 1, x a $\heartsuit$. Druhým možným způsobem je určení pomocí charakteristické vlastnosti prvků množiny. Množina určená jako

„Množina všech prvků x, které splňují podmínku P“

se formálně zapisuje $\{x; P\}$. Například proto

- Množina všech přirozených čísel větších než 1 a menších než 5 se zapisuje

$$\{x \in \mathbb{N}; 1 < x < 5\}.$$

(Čte se „Množina všech $x \in \mathbb{N}$, které splňují podmínku $1 < x < 5$.“)

- Množina všech řešení kvadratické rovnice $x^2 - 3x + 2 = 0$ se vyjádří

$$\{x \in \mathbb{R}; x^2 - 3x + 2 = 0\}.$$

(„Množina všech $x \in \mathbb{R}$, které splňují podmínku $x^2 - 3x + 2 = 0$.“)

- Množina všech bodů ležících na kružnici o středu $[0; 0]$ a poloměru r se symbolicky zapíše

$$\{[x; y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = r^2\}.$$

(„Množina všech $[x; y] \in \mathbb{R}^2$, které splňují podmínku $x^2 + y^2 = r^2$.“)

[6] V symbolickém zápisu se užívá symbol $\in$, který vyjadřuje *náležení do množiny*, neboli vlastnost *být prvkem množiny*. Výraz $x \in Y$ se pak čte přirozeně „x náleží do množiny Y“.

[7] Obdobně jako eukleidovská geometrie je navržena tak, že prostor kolem nás je jejím modelem, teorie množin je navržena tak, že do určité míry ji modeluje naše intuitivní představa množin (množina jako souhrn nějakých objektů). Jinak řečeno pracovat se soubory nebo souhrny jakožto množinami můžeme, ale nelze s nimi provádět ty úkony, které nedovoluje axiomatický systém.

[8] Občas se podobného postupu používá i k určení nekonečných množin, například $\{2, 4, 6, 8, \dots\}$ pro množinu násobků čísla 2. Tento způsob ale předpokládá schopnost čtenáře porozumět předpisu uvedené posloupnosti a následně nacházet její další členy.

– Množinu všech sudých přirozených čísel vyjadřuje zápis

$$\{x \in \mathbb{N}; \text{existuje } n \in \mathbb{N} \text{ takové, že } 2n = x\}.$$

(„Množina všech $x \in \mathbb{N}$, které splňují podmínku, že existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $2n = x$.“)

Je patrné, že stejnou množinu je možno zapsat různými způsoby, například

$$\{x \in \mathbb{R}; x^2 - 3x + 2 = 0\} = \{1, 2\},$$

ale také

$$\{1, 2\} = \{x \in \mathbb{N}; 0 < x < 3\}.$$

Pro další postup je důležité uvědomit si poznatek, že prvkem množiny může být nejen elementární prvek, ale také množina[9]. Například prvky množiny $\{a, \{b, c\}\}$ jsou právě a a množina $\{b, c\}$, původní množina $\{a, \{b, c\}\}$ je tedy dvouprvková.

2.1.1 Prázdná množina

Nejjednodušší situace nastane, pokud množina neobsahuje žádný prvek. V tom případě se označuje jako *prázdná množina* a obvykle se značí[10] $\emptyset$.

2.1.2 Rovnost množin

Množiny X a Y se rovnají právě tehdy, když obě dvě množiny obsahují shodné prvky, což se symbolicky zapisuje $X = Y$.

$$X = Y \text{ právě tehdy, když platí-li } x \in X, \text{ pak } x \in Y, \text{ a platí-li } y \in Y, \text{ pak } y \in X.$$

Pokud se množiny nerovnají (nemají všechny prvky stejné) lze tuto skutečnost symbolicky zapsat $X \neq Y$. Jednoduchým příkladem rovnosti je

$$\{x \in \mathbb{N}; 1 < x < 4\} = \{x \in \mathbb{N}; 1 < x^2 < 10\},$$

neboť obě dvě množiny obsahují pouze prvky 2 a 3. Malá změna v předcházejícím příkladě vytvoří z rovnosti nerovnost

$$\{x \in \mathbb{N}; 1 \leq x < 4\} \neq \{x \in \mathbb{N}; 1 < x^2 < 10\},$$

protože množina na levé straně obsahuje kromě 2 a 3 také 1, kterou ovšem množina na pravé straně neobsahuje.

[9] Analogií vycházející z praxe může být příklad s krabicemi knih. Krabice představují množiny a knihy jednotlivé elementární prvky. Každá krabice tak může obsahovat nejen přímo knihy, ale také další krabice.

[10] Jiný způsob značení je $\{\}$.

2.1.3 Průnik množin

Společné prvky dvou množin tvoří tzv. *průnik množin*, pro množiny X a Y tak jejich průnik tvoří všechny prvky, které mají tu vlastnost, že náleží do X i do Y. Symbolicky se průnik množin zapisuje $X \cap Y$.

$$X \cap Y = \{x;\ x \in X \text{ a současně } x \in Y\}$$

Například průnikem množin

$$\{1, y, \heartsuit\} \text{ a } \{1, x, \heartsuit\}$$

je množina

$$\{1, \heartsuit\}.$$

V případě, že se množiny X a Y rovnají (mají všechny prvky shodné), je jejich průnikem celá množina X respektive Y:

$$\begin{aligned} X &= \{x \in \mathbb{N}; 1 < x < 4\} = \{2, 3\}, \\ Y &= \{x \in \mathbb{N}; 1 < x^2 < 10\} = \{2, 3\}, \\ X \cap Y &= \{2, 3\} = X = Y. \end{aligned}$$

2.1.4 Podmnožina

Nastane-li situace, že průnikem dvou množin X a Y je celá množina Y, značí to, že Y je částí X neboli že Y je *podmnožinou* X. O množině Y lze říci, že je *podmnožinou* množiny X, právě pokud všechny prvky množiny Y jsou také prvky množiny X. Tento vztah se zapisuje $Y \subseteq X$.

$$Y \subseteq X, \text{ pokud platí, že je-li } y \in Y, \text{ pak } y \in X$$

Například pro

$$Y = \{1, \heartsuit\} \text{ a } X = \{1, x, \heartsuit\}.$$

S využitím pojmu rovnosti množin lze rozlišovat podmnožiny dvojího druhu – vlastní a nevlastní. Pokud platí, že $Y \subseteq X$ a současně $X \neq Y$, pak se Y označuje jako *vlastní podmnožina*, což lze značit $Y \subset X$. Pro uvedené množiny $X = \{1, x, \heartsuit\}$ a $Y = \{1, \heartsuit\}$ platí, že Y je vlastní podmnožinou X. V opačném případě, kdy $Y \subseteq X$ a $X = Y$, jde o *nevlastní podmnožinu*. Pro použitou množinu X je pak množina

$$Z = \{1, x, \heartsuit\}$$

nevlastní podmnožinou, neboť $Z \subseteq X$, ale také $Z = X$.

Speciálním případem v otázce podmnožin libovolné množiny X je prázdná množina $\emptyset$ a celá původní množina X. Sama o sobě je prázdná množina vždy podmnožinou libovolné množiny[11]. Celá množina X je však také podmnožinou sebe sama, jak je zmíněno výše, proto lze tvrdit, že ke každé množině (s výjimkou prázdné množiny) lze najít alespoň dvě její podmnožiny. Podmnožinou prázdné množiny $\emptyset$ je jen $\emptyset$, ale například jednoprvková množina $\{a\}$ má podmnožiny $\emptyset$ a $\{a\}$,

Výchozí množina	Podmnožiny
$\emptyset$	$\emptyset$
$\{a\}$	$\emptyset$, $\{a\}$
$\{a,b\}$	$\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a,b\}$
$\{a,b,c\}$	$\emptyset$, $\{a\}$, $\{c\}$, $\{a,b\}$, …, $\{a,b,c\}$
$\vdots$	$\vdots$

Obrázek 2. Různé podmnožiny různých množin

Pomocí vztahu *být podmnožinou* lze však vyjádřit již uvedenou rovnost množin. Platí-li totiž $Y \subseteq X$ (množina Y je částí X, všechny prvky množiny Y jsou obsaženy v množině X) a současně $X \subseteq Y$ (množina X je částí Y, všechny prvky množiny X jsou obsaženy v množině Y), pak nutně musí obě množiny mít všechny prvky shodné, neboli $X = Y$. Například u množin

$$X = \{x \in \mathbb{N}; 1 < x < 4\},$$
$$Y = \{x \in \mathbb{N}; 1 < x^2 < 10\}$$

je množina X podmnožinou Y, neboť druhé mocniny všech přirozených čísel mezi 1 a 4 jsou mezi 1 a 10. Naopak množina Y je podmnožinou X, protože všechna přirozená čísla, jejichž druhé mocniny jsou větší než 1 a menší než 10, musí být větší než 1 a menší než 4. Důsledkem je, že $X = Y$, což bylo uvedeno již dříve.

2.1.5 Rozdíl množin

Další úvaha se bude zabývat prvky, jimiž se jedna množina „liší“ od druhé. *Rozdílem množin* X a Y (v tomto pořadí) se rozumí množina všech prvků, které náleží do množiny X a nenáleží do množiny Y, jinými slovy jsou v množině X

[11] Analogie s krabicemi: Přeskládá-li se obsah jedné krabice do několika dalších, představují tyto krabice různé podmnožiny původní množiny. Je-li však jedna z těchto krabice prázdná, pak také představuje podmnožinu, neboť neobsahuje nic, co neobsahovala původní krabice.

„navíc“. Rozdíl množin X a Y tak tvoří všechny prvky X, které neleží v průniku $X \cap Y$. Pro množiny

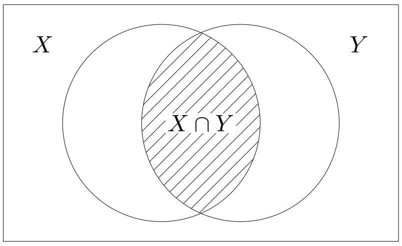
$$X = \{1, a, \heartsuit\} \text{ a } Y = \{1, b, \heartsuit\}$$

je rozdíl

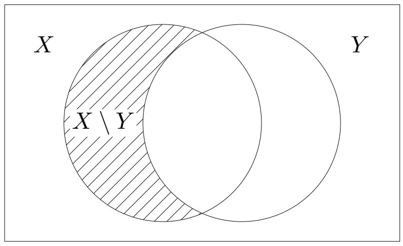
$$X \setminus Y = \{a\}.$$

Průnikem oněch množin je $\{1, \heartsuit\}$, což znamená, že množinou prvků X, které neleží v uvedeném průniku, je jednoprvková množina $\{a\}$.

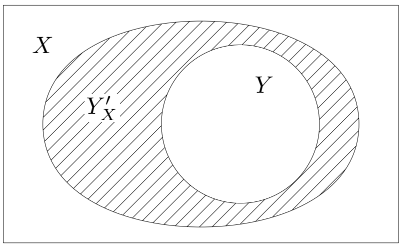
S rozdílem množin souvisí pojem *doplněk množiny.* Jako *doplněk množiny Y v množině X* se označuje rozdíl množin $X \setminus Y$, přičemž Y je podmnožinou X. Toto značení vychází z faktu, že onen doplněk tvoří spolu s množinou Y celou množinu X (množinu Y doplňuje na množinu X). Symbolicky pak tento doplněk značíme Y'_X. Například doplňkem množiny $Y = \{1, a\}$ v množině $X = \{1, a, \heartsuit\}$ je množina $\{\heartsuit\}$.



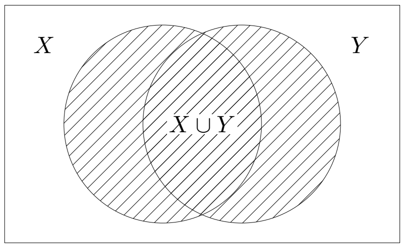
(a) Průnik množin



(b) Rozdíl množin



(c) Doplněk množiny v množině



(d) Sjednocení množin

Obrázek 3. Základní operace s množinami

2.1.6 Sjednocení množin

Poslední klasickou operací s množinami je jejich sjednocení. V tomto případě se z množin X a Y vytváří nová množina, která obsahuje všechny prvky jedné i druhé množiny. *Sjednocením množin* X a Y se pak nazve množina, která bude obsahovat *právě všechny* prvky X a *právě všechny* prvky Y. Slovním spojení *právě všechny* říká, že ona množina nebude obsahovat žádné prvky „navíc“ než ty, které patří buď do množiny X, nebo do množiny Y. Pro symbolický zápis užívá značky $\cup$, tedy $X \cup Y$.

$$X \cup Y = \{x;\ x \in X \text{ nebo } x \in Y\}$$

Například sjednocením množin

$$X = \{1, a, \heartsuit\} \text{ a } Y = \{1, b, \clubsuit\}$$

bude množina

$$X \cup Y = \{1, a, b, \heartsuit, \clubsuit\}.$$

2.1.7 Potenční množina

Podmnožiny libovolné množiny X lze považovat za prvky určité množiny. Množina obsahující právě všechny podmnožiny množiny X se nazývá *potenční množina* množiny X. Pro označení se užívá symbolika vycházející z tohoto názvu, $\mathcal{P}(X)$. Například potenční množinou množiny $X = \{\heartsuit, \clubsuit\}$ je

$$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{\heartsuit\}, \{\clubsuit\}, \{\heartsuit, \clubsuit\}\}.$$

Výchozí množina X	Potenční množina $\mathcal{P}(X)$
$\emptyset$	$\{\emptyset\}$
$\{a\}$	$\{\emptyset, \{a\}\}$
$\{a, b\}$	$\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$
$\{a, b, c\}$	$\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$
$\vdots$	$\vdots$

Obrázek 4. Ukázky potenčních množin

2.2 Kartézský součin

Pro definici kartézského součinu je nezbytné zavést pojem *uspořádané dvojice* prvků. Libovolnou dvojici prvku lze považovat za uspořádanou, je-li jednoznačně určeno, který z prvků je na prvním místě a který na druhém. Uspořádaná dvojice se zapisuje pomocí hranatých závorek, tedy například $[a, b]$ je dvojice prvků a a b, kde a je na prvním místě. Například dvojice $[b, a]$ není s předchozí totožná, protože záleží na pořadí, v jakém jsou prvky uvedeny, na rozdíl od množin, kde na pořadí nezáleží[12].

Pro dvě množiny tak lze vytvořit množinu všech uspořádaných dvojic, ve kterých je na prvním místě prvek z první množiny a na druhém místě prvek z druhé množiny. Tato množina se pak nazývá *kartézský součin* původních dvou množin. Symbolicky se kartézský součin množin X a Y zapisuje $X \times Y$.

$$X \times Y = \{[x, y]; x \in X \text{ a současně } y \in Y\}$$

Zápis kartézského součinu pomocí tabulky je uveden na obrázku 5. Jelikož kartézský součin je tvořen *uspořádanými* dvojicemi, vždy záleží, v jakém pořadí se s množinami pracuje. Součin $X \times Y$ je proto jiný než $Y \times X$.

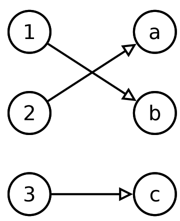
$X \times Y$	$Y = \{a, b, c\}$		
	$[1, a]$	$[1, b]$	$[1, c]$
$X = \{1, 2, 3\}$	$[2, a]$	$[2, b]$	$[2, c]$
	$[3, a]$	$[3, b]$	$[3, c]$

$Y \times X$	$X = \{1, 2, 3\}$		
	$[a, 1]$	$[a, 2]$	$[a, 3]$
$Y = \{a, b, c\}$	$[b, 1]$	$[b, 2]$	$[b, 3]$
	$[c, 1]$	$[c, 2]$	$[c, 3]$

Obrázek 5. Ukázka dvou různých kartézských součinů stejných množin

2.3 Zobrazení

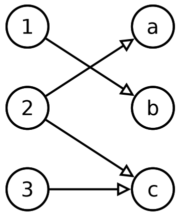
Práce s množinami vyžaduje alespoň základní znalost problematiky zobrazení. Zobrazení množiny X do množiny Y přiřazuje jednotlivým prvkům množiny X prvky množiny Y (vytváří vztah *vzor–obraz*), přičemž každému prvku množiny X je přiřazen vždy právě jeden prvek množiny Y. První množina se tak označuje jako *množina vzorů* a druhá jako *množina obrazů*[13]. Například zobrazení množiny $\{1, 2, 3\}$ do množiny $\{a, b, c\}$ znázorněné diagramem



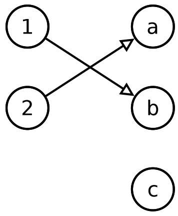
[12] Množina $\{a, b\}$ je totožná s množinou $\{b, a\}$.

[13] Příkladem zobrazení ve středoškolské matematice jsou reálné funkce. Zde množinu vzorů i obrazů tvoří obvykle intervaly reálných čísel (definiční obor a obor hodnot funkce), přičemž oba intervaly závisí na povaze funkce. Dalším příkladem jsou posloupnosti, ve kterých množinou vzorů jsou všechna přirozená čísla a množinou obrazů jsou čísla reálná. Přirozená čísla vyjadřují člen posloupnosti, kterému je přiřazena určitá reálná hodnota.

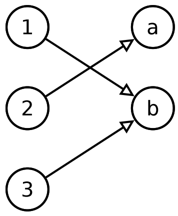
ukazuje, že obrazem prvku 1 je prvek b a naopak pro prvek b je vzorem prvek 1. Obdobně obrazem prvku 2 je a a obrazem prvku 3 je c, naopak vzorem prvku a je 2 a vzorem prvku c je 3. Ovšem vztah množin vyjádřený diagramem



není zobrazením neboť prvek 2 má více než jeden obraz. Pro zobrazení není nutné, aby byl ke každému prvku množiny obrazů přiřazen vzor. Například následující diagram znázorňuje také zobrazení:

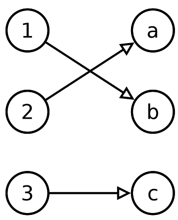


Právě uvedené zobrazení, ve kterém každý prvek množiny obrazů má nejvýše jeden vzor, se označuje jako *prosté* zobrazení množiny do množiny. Jiný typ zobrazení, v němž jednomu obrazu přísluší více vzorů, je znázorněn na následujícím diagramu:



Zobrazení, kde každý prvek množiny obrazů má alespoň jeden vzor, se označuje jako zobrazení množiny *na* množinu.

Spojením obou situací (zobrazení *na* a *prostého* zobrazení do) vzniká *vzájemně jednoznačné zobrazení* neboli *bijekce*. Jelikož každému prvku množiny obrazů přísluší nejvýše jeden vzor a současně mu příslušní alespoň jeden vzor, platí, že každému prvku množiny obrazů přísluší *právě jeden* vzor. Tuto podmínku splňuje již uvedené zobrazení:



Jak je patrné ze zmíněné definiční podmínky vzájemně jednoznačného zobrazení, mají-li obě množiny (množina vzorů i obrazů) konečný počet prvků a existuje-li mezi nimi toto zobrazení, mají zmíněné množiny stejný počet prvků. Na tomto poznatku je postaveno další zkoumání množin, neboť je lze třídit právě na základě existence vzájemně jednoznačného zobrazení mezi nimi.

2.4 Konečná a nekonečná množina

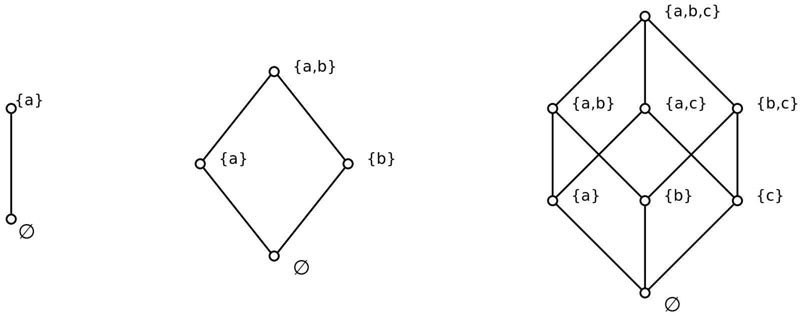
Přestože lze pojmy konečná a nekonečná množina pojímat intuitivně, například tvrzením, že konečná množina je taková množina, která má konečný počet prvků, pro potřeby axiomatické teorie množin je tento postup nedostačující, neboť samotný pojem *konečnosti* je obtížně definovatelný. Proto je třeba konečnou či nekonečnou množinu definovat přímo. Nezávisle na sobě vytvořili Alfred Tarski [Balc] a Richard Dedekind [BlaVoj] definice konečné množiny, přičemž každá z nich je vytvořena na odlišném základě. Nekonečnou množinou se pak rozumí množina, která uvedenou definici nesplňuje.

2.4.1 Tarského definice konečné množiny

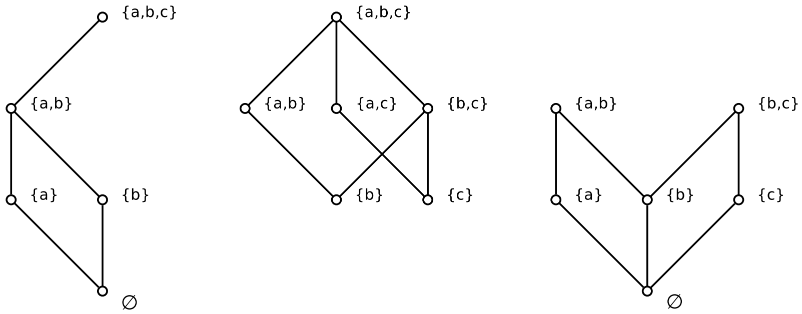
Tato definice se zakládá na faktu, že pro podmnožiny A, B libovolné množiny X je možné se ptát, zda $A \subseteq B$ nebo $A \supseteq B$. V celém systému podmnožin je pak možné najít vztahy mezi jednotlivými množinami (rozumí se vztah, kdy jedna množina je podmnožinou druhé) a na základě těchto vztahů celý systém podmnožin uspořádat. Toto uspořádání se zpravidla zakresluje do diagramu, ve kterém je každá množina spojena s množinou, ve které tvoří podmnožinu. Je stanoveno, že ony „větší“ množiny vždy leží nad svými podmnožinami. Jak je vidět z obrázku 6.a, pro množiny s různým počtem prvků bude mít diagram různý tvar. Stejným způsobem lze uspořádat také libovolný podsystém původního systému podmnožin, jak pro různé podsystémy systému podmnožin tříprvkové množiny $\{a, b, c\}$ ukazuje obrázek 6.b.

Definice 1 (Tarského definice)**.** *Nechť X je libovolná množina. Jestliže každý její systém podmnožin má v uspořádání pomocí $\subseteq$ maximální prvek, je X konečnou množinou.*

Maximální prvek uspořádaného systému množin je množina, pro kterou v daném systému neexistuje množina, ve které by ona množina byla vlastní podmnožinou. Jinými slovy neexistuje v systému „větší“ množina. Maximální prvek daného systému může být jeden, jak je tomu u systémů vlevo a uprostřed na obrázku 6.b, kde je



(a) Různé možnosti uspořádání systému podmnožin



(b) Různé podsystémy systému podmnožin množiny $\{a, b, c\}$

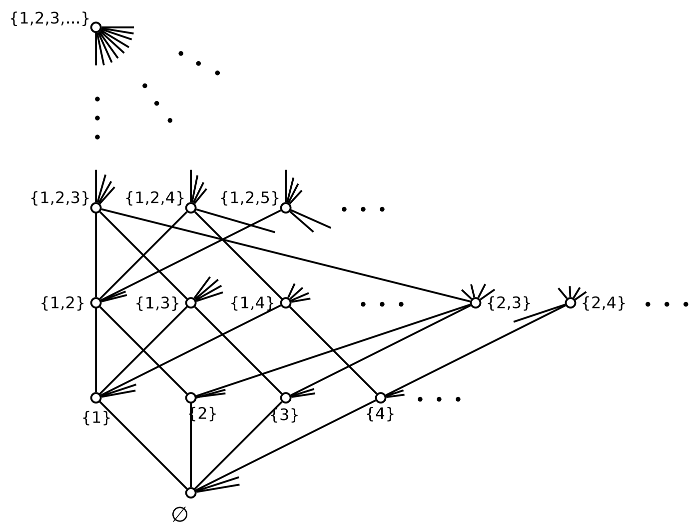
Obrázek 6. Uspořádání systémů podmnožin

maximálním prvkem množina $\{a, b, c\}$, ale existují systémy, ve kterých je více maximálních prvků, například na obrázku 6.b vpravo, kde jsou maximálními prvky množiny $\{a, b\}$ a $\{b, c\}$.

Příkladem systému podmnožin, ve kterém maximální prvek neexistuje, je následující posloupnost k-prvkových množin obsažená v potenční množině množiny všech přirozených čísel $\mathbb{N}$:

$$\{1\},\ \{1,2\},\ \{1,2,3\},\ \{1,2,3,4\},\ \ldots$$

K libovolné množině této posloupnosti lze sestavit množinu „větší“, jinými slovy v níž je ona množina podmnožinou. Množina $\mathbb{N}$ tak nesplňuje podmínku konečnosti dle Tarského definice, protože existuje systém podmnožin, který nemá maximální prvek, z čehož vyplývá, že je *nekonečná*. Důsledkem je také fakt, že libovolná množina X obsahující množinu $\mathbb{N}$ je nutně také nekonečná, neboť libovolný systém podmnožin množiny $\mathbb{N}$ (mezi které patří i zmíněná posloupnost) je pak systémem podmnožin množiny X. Jako příklad lze uvést množiny $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ či $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$.



Obrázek 7. Nástin uspořádání podmnožin množiny ℕ

2.4.2 Dedekindova definice konečné množiny

Na rozdíl od Tarského definice je tato definice založena zobrazení množin, konkrétně na vzájemně jednoznačném zobrazení neboli bijekci.

Definice 2 (Dedekindova definice)**.** *Nechť X je libovolná množina. X je konečná množina, právě když neexistuje bijekce mezi X a libovolnou její vlastní podmnožinou.*

U množin, které mají počet prvků daný přirozeným číslem (např. 7, 13, 42), je zřejmé, že výše zmíněná bijekce zde neexistuje, neboť jejich vlastní podmnožiny mají počet prvků vždy alespoň o 1 menší. Jiná situace je u množiny všech přirozených čísel $\mathbb{N}$ a množiny všech sudých čísel (značeno D), která je její vlastní podmnožinou. Způsob, jak jednoznačně zobrazit množinu $\mathbb{N}$ na množinu D, ukazuje obrázek 8. Každému číslu v $\mathbb{N}$ (tedy každému prvku $\mathbb{N}$) je přiřazen jeho dvojnásobek a naopak každému číslu z D je přiřazena jeho polovina. Nalezení dvojnásobku (respektive poloviny) je jednoznačné, zobrazení mezi $\mathbb{N}$ a D je vzájemně jednoznačné, z čehož vyplývá, že množina $\mathbb{N}$ je nekonečná i podle této definice.

Bylo však dokázáno, že mezi uvedenými definicemi není významový rozdíl, což lze vyjádřit následovně:

Tvrzení 2. *Množina X je konečnou množinou dle Tarského definice, právě když je konečnou množinou dle Dedekindovy definice.*

$\vdots$		$\vdots$
7	$\longleftrightarrow$	14
6	$\longleftrightarrow$	12
5	$\longleftrightarrow$	10
4	$\longleftrightarrow$	8
3	$\longleftrightarrow$	6
2	$\longleftrightarrow$	4
1	$\longleftrightarrow$	2

Obrázek 8. Bijekce mezi $\mathbb{N}$ a množinou všech sudých čísel

2.4.3 Vlastnosti

Pro práci s nekonečnými množinami je třeba vyjasnit vztahy a vlastnosti definovaných konečných množin, aby nedošlo k omylům vycházejících z intuitivního pojetí. První uvedená vlastnost se zabývá podmnožinami libovolné konečné množiny.

Tvrzení 3. *Nechť X je konečná množina a Y její libovolná podmnožina, pak Y je konečnou množinou.*

Jelikož je Y podmnožinou X, pak všechny podmnožiny množiny Y jsou také podmnožinami konečné množiny X. Podle Tarského definice obsahuje libovolný systém podmnožin v X maximální prvek. Obsahuje ho tak i libovolný systém podmnožin množiny Y, což znamená, že Y je konečná.

Přímým důsledkem uvedeného tvrzení je i následující.

Tvrzení 4. *Nechť X a Y jsou konečné množiny, pak jejich průnik $X \cap Y$ je také konečnou množinou.*

Platnost uvedeného tvrzení vyplývá z faktu, že průnik dvou množin je částí (podmnožinou) každé z nich. Jsou-li výchozí množiny konečné, je konečná i tato podmnožina.

Použitím Tarského definice konečné množiny lze také rozhodnout o konečnosti sjednocení dvou konečných množin.

Tvrzení 5. *Nechť X a Y jsou konečné množiny, pak jejich sjednocení $X \cup Y$ je také konečnou množinou.*

Podle Tarského definice bude nutné ověřit, zda libovolný systém podmnožin vytvořeného sjednocení obsahuje maximální prvek. K tomuto účelu byl sestrojen univerzální postup hledání maximálního prvku libovolného systému podmnožin množiny $X \cup Y$ [Balc]. Nechť S označuje libovolný systém podmnožin množiny $X \cup Y$, například pro množiny

$$X = \{a, b\},\ Y = \{1, 2, 3\} \quad \Rightarrow \quad X \cup Y = \{a, b, 1, 2, 3\}$$

může systémem S být systém množin

$$\begin{aligned} &\{b, 1\}, \\ &\{b, c, 3\}, \\ &\{2, 3\}, \\ &\{b, c, 1, 3\}. \end{aligned}$$

Prvním krokem bude výběr systému S_1 takových množin, které obsahují prvky z X. Pro uvedený příklad to bude

$$\begin{aligned} &\{b, 1\}, \\ &\{b, c, 3\}, \\ &\{b, c, 1, 3\}. \end{aligned}$$

Následně budou ze systému S_1 vybrány množiny prvků z X tak, aby bylo možné vytvořit všechny množiny systému S_1 přidáním prvků z Y. V daném příkladě budou vybrány

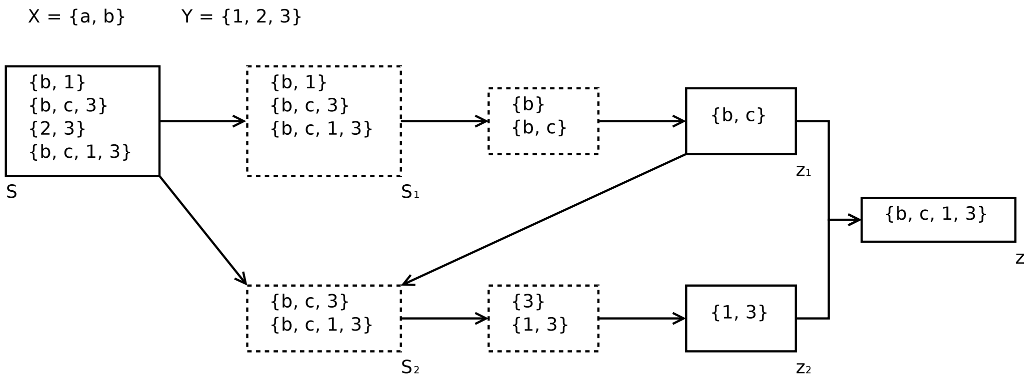
$$\begin{aligned} &\{b\}, \\ &\{b, c\}. \end{aligned}$$

Tyto vybrané množiny tvoří systém podmnožin v X a lze v něm dle Tarského najít maximální množinu z_1. Ve zmíněném příkladě bude $z_1 = \{b, c\}$. Další postup již se systémem S_1 nepracuje, ale vytváří nový systém S_2 z původního systému S. Ten bude obsahovat všechny množiny systému S, které v sobě obsahují všechny prvky množiny z_1 doplněné o prvky z Y. V konkrétním případě

$$\begin{aligned} &\{b, c, 1\}, \\ &\{b, c, 1, 3\}. \end{aligned}$$

Ze systému S_2 budou opět vybrány množiny prvků z Y tak, aby bylo možné vytvořit všechny množiny systému S_2 přidáním prvků ze z_1.

$$\begin{aligned} &\{1\}, \\ &\{1, 3\}. \end{aligned}$$



Obrázek 9. Postup hledání maximálního prvku sjednocení dvou konečných množin

Vybrané množiny tvoří systém podmnožin v Y, existuje v něm tak maximální množina z_2. V uvedeném případě bude onou vybranou množinou $\{1, 3\}$. Množina vytvořená sjednocením $z = z_1 \cup z_2$ je maximální množinou původního systému. Výsledná množina z příkladu je tak $\{b, c, 1, 3\}$. Celkový postup ilustruje obrázek 9.

Přímým důsledkem předchozího je následující skutečnost.

Tvrzení 6. *Nechť X je konečná množina a $\{y\}$ libovolná jednoprvková množina, pak sjednocení $X \cup \{y\}$ je konečnou množinou.*

Význam uvedeného tvrzení spočívá v tom, že postupným přidáváním prvků ke konečné množině (tedy po určitém počtu kroků) vznikají pouze množiny konečné. Vytvoření nekonečné množiny tak vyžaduje abstrakční skok, ve kterém je najednou provedeno nekonečně mnoho zmíněných kroků.

Poslední vlastnost ukazuje, že z vzájemně jednoznačného zobrazení konečné množiny na libovolnou množinu lze usoudit na konečnost množiny obrazů.

Tvrzení 7. *Nechť X je konečná množina a Y libovolná množina. Pokud existuje vzájemně jednoznačné zobrazení mezi X a Y, pak je Y také konečnou množinou.*

Zdůvodnění se opírá o Tarského definici konečné množiny. Pokud existuje vzájemně jednoznačné zobrazení mezi Y a X, je možné jednoznačně zobrazit systém všech podmnožin Y na systém všech podmnožin X, z čehož vyplývá, že mají stejné vlastnosti. A jelikož systém podmnožin X splňuje Tarského definici, splňuje ji i systém podmnožin Y, množina Y je tedy konečnou množinou.

3 Kardinální čísla

Možností, jak charakterizovat množiny, je spousta, avšak v teorii množin se užívá způsob, který vychází z množství prvků obsažených v množinách. Každá množina tak má určitou *mohutnost*[14]. Pro konečné množiny je mohutnost vyjádřena přirozeným číslem nebo nulou, což udává počet prvků dané množiny. Protože přirozeným číslem není možné popsat množství prvků nekonečné množiny, byly zavedeny speciální symboly právě pro popis nekonečných množin. Jak je však popsáno v kapitole 4, s těmito symboly je možné pracovat jako s čísly, proto se společně s přirozenými čísly a nulou souhrnně označují jako *kardinální čísla*. Uvedenou myšlenku shrnuje následující tvrzení:

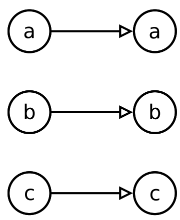
Tvrzení 8. *Libovolná množina (konečná i nekonečná) má jistou mohutnost, která je vyjádřena kardinálním číslem (přirozené číslo, nula nebo speciální symbol).*

3.1 Zavedení kardinálního čísla

Jelikož je celá teorie množin tvořena axiomaticky, není možné v ní užívat intuitivní pojmy, proto je nutné zavést i kardinální číslo exaktně. K tomu již v 19. století použil Georg Cantor vzájemně jednoznačné zobrazení (bijekci) a z toho vycházející pojem *ekvivalence množin*.

Definice 3. *Množiny X a Y jsou ekvivalentní, právě když mezi nimi existuje bijekce.*

Existuje-li vzájemně jednoznačné zobrazení mezi množinami X a Y, jsou tyto množiny ekvivalentní, ale také naopak, jsou-li X a Y ekvivalentní, pak nutně musí existovat vzájemně jednoznačné zobrazení mezi nimi. Okamžitým důsledkem je fakt, že libovolná množina je ekvivalentní sama se sebou, neboť existuje zobrazení množiny samy na sebe takové, že se prvky zobrazí právě samy na sebe, jak ukazuje obrázek 10.



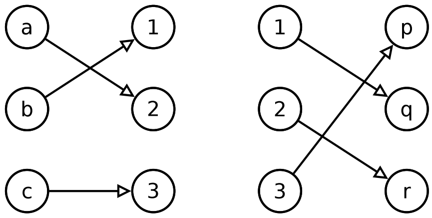
Obrázek 10. Zobrazení množiny samy na sebe

[14]Značení $|X|$ vyjadřuje mohutnost množiny X

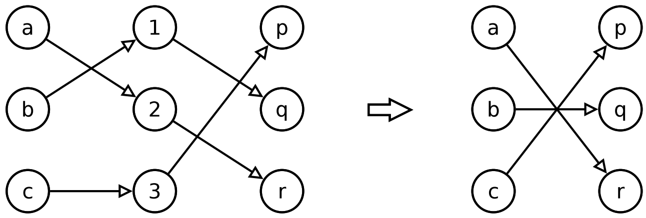
Ná základě ekvivalence množin je možné navzájem ekvivalentní množiny seskupovat do tříd. V takto vytvořeném systému tříd platí následující:

a) Každá množina leží v nějaké třídě, vždy je totiž ekvivalentní alespoň sama se sebou.

b) Pokud je ekvivalentní množina X s množinou Y (existuje mezi nimi bijekce, leží v jedné třídě) a zároveň také množina Y s množinou Z, pak je určitě množina X ekvivalentní s množinou Z, což ilustruje obrázek 11. Do určité



(a) Bijekce mezi množinami X a Y, Y a Z



(b) Vytvoření bijekce mezi množinami X a Z

Obrázek 11. Vzájemná ekvivalence množin X, Y, Z

třídy tak náleží *právě všechny* množiny, které jsou navzájem ekvivalentní, jinými slovy nemůže nastat situace, ve které by množina z jedné třídy byla ekvivalentní s množinou z druhé třídy.

Systém vytvořený podle uvedených zásad se pak nazývá *rozklad* systému množin podle ekvivalence a vytvořené třídy množin se pak nazývají *třídy rozkladu.*

Například množiny $\{a, b, c\}$, $\{1, 2\}$, $\{\pi, \varphi, \psi\}$, $\{x, y\}$, $\{42\}$ a $\{\heartsuit, \spadesuit, \clubsuit\}$ lze rozdělit na základě existence vzájemně jednoznačného zobrazení následovně[15]:

$\{a, b, c\}$	$\{1, 2\}$	$\{42\}$
$\{\pi, \varphi, \psi\}$	$\{x, y\}$	
$\{\heartsuit, \spadesuit, \clubsuit\}$		

[15] Je totiž možné jednoznačně zobrazit $\{a, b, c\}$ na $\{\heartsuit, \spadesuit, \clubsuit\}$, ale už ne na například $\{x, y\}$, atp.

Jak je vidět z tabulky, konečné množiny patřící do jedné skupiny mají stejný počet prvků. Ve stejné skupině nemohou být množiny s rozdílným počtem prvků, jelikož neexistuje vzájemně jednoznačné zobrazení mezi množinami s různým počtem prvků. Důsledkem tohoto poznatku je následující tvrzení:

Tvrzení 9. *Dvě konečné množiny jsou ekvivalentní, právě když obsahují stejný počet prvků.*

Zavedení kardinálních čísel následně vychází z myšlenky seskupování množin podle ekvivalentnosti:

Definice 4. *Kardinálním číslem nazýváme třídu rozkladu systému všech množin podle ekvivalence.*

Význam definice je ten, že kardinální číslo množiny označuje skupinu, do které množina patří. Jelikož platí, že konečné množiny jsou ekvivalentní, právě pokud mají stejný počet prvků, ono kardinální číslo u nich udává právě počet prvků.

Je nutné připomenout, že prvkem množiny může být také množina, například množina $\{x, \{\heartsuit, \clubsuit\}\}$ obsahuje prvky x a $\{\heartsuit, \clubsuit\}$. Jelikož se při zjišťování ekvivalentnosti množin jednoznačně zobrazují celé prvky, není důležité, zda oním prvkem je elementární prvek nebo množina. Uvedený příklad množiny je tak ekvivalentní s množinou $\{\pi, \varphi\}$, neboť prvek x lze zobrazit na prvek π a celý prvek $\{\heartsuit, \clubsuit\}$ na φ. Obě uvedené množiny mají tedy stejná kardinální čísla.

0	$\emptyset$
1	$\{a\}$, $\{42\}$, $\{\delta\}$, $\{\{x, y\}\}$, ...
2	$\{1, 2\}$, $\{x, y\}$, $\{\varphi, \{\heartsuit, \clubsuit, \spadesuit\}\}$, $\{\{\heartsuit, \clubsuit\}, \{a, b, c\}\}$, ...
3	$\{a, b, c\}$, $\{\pi, \varphi, \alpha\}$, $\{\heartsuit, \spadesuit, \clubsuit\}$, $\{\{x, y\}, 13, \{\delta, \varepsilon\}\}$, ...
$\vdots$	$\vdots$

Obrázek 12. Kardinální čísla konečných množin

Z hlediska množství v teorii množin nezáleží na konkrétní podobě jednotlivých prvků množin, není tedy třeba rozlišovat mezi ekvivalentními množinami.

3.2 Operace s kardinálními čísly

Základním úkonem prováděným s čísly je jejich porovnání. Porovnání kardinálních čísel je porovnání množství prvků množin, které daná kardinální čísla popisují. Pro potřeby teorie množin se ono porovnání zavádí pomocí vztahu množin.

Definice 5. *Kardinální čísla α a β lze zapsat ve vztahu $\alpha \leq \beta$, právě když existují množiny X a Y takové, že $|X| = \alpha$, $|Y| = \beta$, a platí, že $X \subseteq Y$.*

Jelikož libovolná podmnožina X dané množiny Y nemůže obsahovat větší množství prvků než původní množina, může jich obsahovat stejné nebo menší množství. Tato definice tak značí, že kardinální číslo α zastupuje podmnožinu množiny zastoupené kardinálním číslem β, z čehož vyplývá, že zastupuje množinu s menším nebo stejným množstvím prvků. Jelikož pro daná dvě kardinální čísla α, β lze vždy sestrojit vhodné množiny X a Y, ať už $X \subseteq Y$ nebo $Y \subseteq X$, je možné tímto způsobem porovnávat libovolná dvě kardinální čísla. V praktickém použití je pak porovnávání konečných kardinálních čísel shodné s porovnáním čísel přirozených (s nulou), neboť přirozená čísla (s nulou) vyjadřují v tomto smyslu počet prvků nějaké konečné množiny.

Konkrétním příkladem budiž porovnání kardinálních čísel 2 a 3. Pro tato čísla lze sestavit množiny $\{\varphi, \heartsuit\}$ a $\{a, \varphi, \heartsuit\}$, přičemž platí, že

$$|\{\varphi, \heartsuit\}| = 2 \quad \text{a} \quad |\{a, \varphi, \heartsuit\}| = 3.$$

Protože uvedené množiny jsou ve vztahu

$$\{\varphi, \heartsuit\} \subseteq \{a, \varphi, \heartsuit\},$$

platí

$$2 \leq 3.$$

Ostrá nerovnost mezi kardinálními čísly $\alpha < \beta$ vychází z neostré nerovnosti $\alpha \leq \beta$, přičemž je vyloučena možnost $\alpha = \beta$ (ekvivalentnost uvažovaných množin). Při porovnávání konečných kardinálních čísel jde opět o klasické porovnávání přirozených čísel (s nulou).

$$0 < 1 < 2 < 3 < 4 < 5 < \cdots$$

Pro další práci není nutné znát formální zavedení aritmetiky kardinálních čísel. Lze se spokojit s tím, že základní operace s kardinálními čísly odpovídají intuitivní představě. Z důvodu kompletnosti je však tato problematika zařazena do kapitoly 4.

3.3 Kardinální čísla nekonečných spočetných množin

3.3.1 Množina přirozených čísel

Jelikož množina všech přirozených čísel je nekonečná (důkaz v kapitole 2.4) a každé přirozené číslo popisuje mohutnost konečné množiny, neexistuje přirozené číslo, které by popisovalo mohutnost množiny všech přirozených čísel. Proto bylo zavedeno označení $\aleph_0$ (čte se „alef nula“) pro mohutnost množiny přirozených čísel[16], neboli kardinálním číslem množiny $\mathbb{N}$ je $\aleph_0$.

Jelikož problematika práce s množinou všech přirozených je základem pro tvorbu dalších číselných množin, je nutné se jí podrobněji věnovat. Ke snazšímu pochopení této problematiky přispěl na počátku 20. století David Hilbert svým paradoxem hotelu[17]:

> *Předpokládejme, že existuje hotel s nekonečně mnoha pokoji, které jsou očíslovány 1, 2, 3, atd. V každém pokoji bydlí jeden host, hotel je tedy plně obsazen. Jednou na recepci přišel člověk a žádal o pokoj, recepční mu však odpověděl, že žádné pokoje nejsou volné. Nově příchozí však navrhl recepčnímu, ať požádá ubytované hosty, aby se přemístili každý do pokoje s o jedna vyšším číslem, než měl každý doposud, tedy host z pokoje č. 1 se přesune na pokoj č. 2, host z pokoje č. 3 na pokoj č. 4, atp. K velkému překvapení recepčního tento postup fungoval a pokoj č. 1 byl nyní volný, takže do něj mohl recepční nově příchozího hosta ubytovat. Když se tedy poté přišel ubytovat další host, recepční celý postup zopakoval a hosta také ubytoval.*

1	2	3	4	5	$\cdots$
h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	$\cdots$

$\Downarrow$

	h_1	h_2	h_3	h_4	$\cdots$

$\Downarrow$

$h_\clubsuit$	h_1	h_2	h_3	h_4	$\cdots$

Obrázek 13. Ubytování nového hosta $h_\clubsuit$ v Hilbertově hotelu

Protože je ubytování hosta v daném pokoji jednoznačné (jde o jednoznačné přiřazení hosta k pokoji či naopak), jde z množinového pohledu o jednoznačné zobrazení (bijekci) mezi množinou hostů a množinou pokojů. Každý hotelový pokoj je označen přirozeným číslem, proto lze množinu pokojů nahradit množinou přirozených čísel. Existence bijekce mezi mezi množinou přirozených čísel a množinou hotelových hostů ukazuje na ekvivalenci uvedených dvou množin.

[16] Písmeno $\aleph$ pochází z hebrejské abecedy, v níž je prvním písmenem, ale značí také číslovku 1 [Alef].
[17] Tento příklad je také znám pod názvem Hilbertův hotel.

Definice 6. *Množiny, které jsou ekvivalentní s množinou všech přirozených čísel, se nazývají spočetné.*

Zmíněnou bijekci mezi množinou přirozených čísel a libovolnou množinou lze pojmout jako označování prvků oné množiny přirozenými čísly neboli spočítání prvků, z čehož vychází název *spočetnost*. Pro libovolnou množinu tak platí, že lze-li prvky této množiny *očíslovat* všemi přirozenými čísly, je tato množina ekvivalentní s množinou přirozených čísel. Je zřejmé, že možnost očíslovat prvky dané množiny spočívá v jejich seřazení do posloupnosti, neboť členy libovolné posloupnosti lze očíslovat.

Z uvedeného příkladu vyplývá, že množiny hostů

$$\{h_1, h_2, h_3, \dots\} \text{ a } \{h_\clubsuit, h_1, h_2, h_3, \dots\}$$

jsou spočetné, neboť každému hostu byl přiřazen pokoj (přirozené číslo). Jelikož jsou navzájem ekvivalentní množiny z hlediska teorie množiny záměnné, je možné namísto množiny hostů $\{h_1, h_2, h_3, \dots\}$ užívat množinu přirozených čísel $\{1, 2, 3, \dots\}$. Množina $\mathbb{N}$ je tak ekvivalentní s množinou $\mathbb{N} \cup \{h_\clubsuit\}$, což značí, že obsahují stejné

1	2	3	4	5	$\cdots$
1	2	3	4	5	$\cdots$

$$\Downarrow$$

	1	2	3	4	$\cdots$

$$\Downarrow$$

$h_\clubsuit$	1	2	3	4	$\cdots$

Obrázek 14. Záměna množiny hostů za množinu přirozených čísel

množství prvků.

1	2	3	4	5	6	$\cdots$
$h_\clubsuit$	1	2	3	4	5	$\cdots$
φ	$\Diamond$	1	2	3	4	$\cdots$
π	f̌	$h_\clubsuit$	1	2	3	$\cdots$

Obrázek 15. Ukázky spočetných množin vzniklých rozšiřováním množiny $\mathbb{N}$

Přidáním dalšího prvku k množině $\mathbb{N} \cup \{h_\clubsuit\}$ se situace nezmění, neboť tuto množinu bude možno očíslovat, bude tedy spočetná. Všechny množiny získané zmíněným postupným přidáváním prvků k množině přirozených čísel budou také spočetné.

Z obrázku 15. je patrné, že postupné přidávání prvků je možné nahradit jednorázovým přidáním konečné množiny prvků, například $\mathbb{N} \cup \{\pi, \check{\mathrm{f}}, h_{\clubsuit}\}$. Přidáním konečné množiny prvků k $\mathbb{N}$ tak nedochází ke změně mohutnosti množiny, což lze zapsat:

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \cup \{\pi, \heartsuit, \ \ldots \ , \check{\mathrm{f}}, h_{\clubsuit}\}| = \aleph_0$$

Přirozeným důsledkem uvedeného tvrzení je fakt, že množina přirozených čísel s nulou (značeno $\mathbb{N}_0$) je spočetná:

1	2	3	4	5	6	···
0	1	2	3	4	5	···

Analogicky lze postupovat v opačném případě – při odebírání prvků z množiny $\mathbb{N}$. Například prvky množiny vzniklé odebráním prvků 1 a 2 z množiny $\mathbb{N}$ je možné očíslovat přirozenými čísly, tato množina je tedy také spočetná. Ukázky očíslování prvků množin tvořených odebíráním konečného počtu prvků z množiny $\mathbb{N}$ jsou na obrázku 16. Uvedené vlastnosti množiny přirozených čísel shrnuje následující tvrzení:

1	2	3	4	5	···
3	4	5	6	7	···

1	2	6	7	8	···

5	6	7	8	9	···

Obrázek 16. Ukázky spočetných množin vzniklých odebíráním konečného počtu prvků z $\mathbb{N}$

Tvrzení 10. *Přidáním konečného počtu prvků k množině $\mathbb{N}$ či jejich odebráním z ní nedochází ke změně mohutnosti, nově vzniklá množina je ekvivalentní s $\mathbb{N}$ (je spočetná).*

Za pomoci množiny přirozených čísel je možné vytvořit kritérium pro rozpoznání nekonečné množiny.

Tvrzení 11. *Množina je nekonečná, právě když obsahuje nekonečnou spočetnou podmnožinu.*

Zdůvodnění uvedeného tvrzení bude probíhat ve dvou krocích. Jako první je nutné dokázat, že libovolná množina obsahující nekonečnou spočetnou podmnožinu je nekonečná, a následně, že libovolná nekonečná množina obsahuje nekonečnou spočetnou podmnožinu.

V prvním kroku je potřeba ukázat, že množina obsahující nekonečnou spočetnou podmnožinu vyhovuje definici nekonečné množiny, tedy nalézt jednoznačné zobrazení množiny do své vlastní podmnožiny (Dedekindova definice 2.4.2). Prvky množiny je možné rozdělit do dvou podmnožin: prvky tvořící nekonečnou spočetnou podmnožinu (označeny například x_1, x_2, x_3, $\dots$) a ostatní prvky (například z, φ, $\clubsuit$, $\check{f}$, $\dots$, $\heartsuit$). Hledaným zobrazením je pak zobrazení do množiny

$$\{z, \varphi, \clubsuit, \check{f}, \dots, \heartsuit, 42, x_1, x_2, x_3, x_4, \dots\},$$

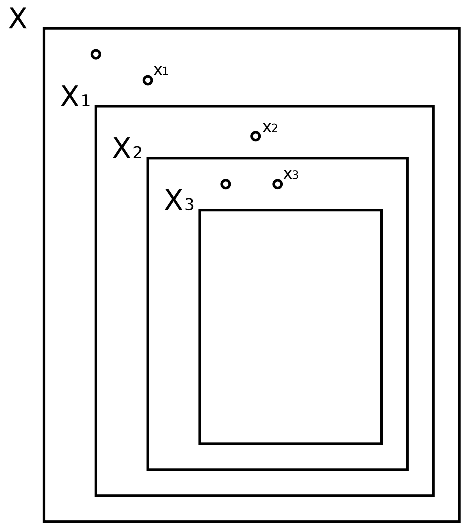
což je původní množina, ze které byl odebrán prvek x_1 (kvůli splnění požadavku vlastní podmnožiny).

$$\begin{array}{ccc}
\vdots & & \vdots \\
\boxed{x_4} & \longleftrightarrow & \boxed{x_3} \\
\boxed{x_3} & \longleftrightarrow & \boxed{x_2} \\
\boxed{x_2} & \longleftrightarrow & \boxed{x_1} \\
\boxed{42} & \longleftrightarrow & \boxed{42} \\
\boxed{\heartsuit} & \longleftrightarrow & \boxed{\heartsuit} \\
\vdots & & \vdots \\
\boxed{\check{f}} & \longleftrightarrow & \boxed{\check{f}} \\
\boxed{\clubsuit} & \longleftrightarrow & \boxed{\clubsuit} \\
\boxed{\varphi} & \longleftrightarrow & \boxed{\varphi} \\
\boxed{z} & \longleftrightarrow & \boxed{z}
\end{array}$$

Prvky tvořící spočetnou podmnožinu se zobrazí vždy na prvek následující, zatímco prvky druhé skupiny se zobrazí samy na sebe. Právě vytvořené zobrazení dokazuje nekonečnost množiny obsahující nekonečnou spočetnou podmnožinu.

Druhý krok naopak vychází z faktu, že množina je nekonečná, a bude zde nutné ukázat, že tato množina obsahuje nekonečnou spočetnou posloupnost. Dedekindova definice nekonečné množiny říká, že je libovolná nekonečná množina X ekvivalentní se svou vlastní podmnožinou X_1. Jelikož je X_1 *vlastní* podmnožinou, existuje nejméně jeden prvek množiny X, který do množiny X_1 nepatří, například x_1. Analogickou úvahou lze najít prvek x_2, ležící v množině X_1, ale neležící v množině X_2, což je vlastní podmnožina množiny X_1, se kterou je X_1 ekvivalentní. Množina X_2 musí existovat, neboť je-li množina X nekonečná, je nekonečná i množina X_1, musí tedy vyhovovat Dedekindově definici. Pokračováním uvedeným postupem je následně vytvořena posloupnost prvků

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ \dots$$



Obrázek 17. Hledání nekonečné spočetné podmnožiny v libovolné nekonečné množině

Jelikož zmíněné prvky tvoří posloupnost, je možné je očíslovat přirozenými čísly. Množina

$$\{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ \ldots\}$$

je tak nekonečná spočetná podmnožina původní množiny X.

Je-li v každé nekonečné množině obsažena spočetná množina, pak spočetné množiny jsou ze všech nekonečných množin nejmenší. Pro všechna nekonečná kardinální čísla tak platí:

Tvrzení 12. *Kardinální číslo $\aleph_0$ je nejmenší nekonečné kardinální číslo.*

3.3.2 Množina celých čísel

Pro práci s celými čísly je nutné si uvědomit způsob vytvoření této množiny za pomoci přirozených čísel, což lze znázornit následovně:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} & & & & & & & & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, \ \ldots \\ \ldots, & -7, & -6, & -5, & -4, & -3, & -2, & -1, \ 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, \ \ldots \\ \ldots, & 7, & 6, & 5, & 4, & 3, & 2, & 1 & & & & & & & \end{array}$$

K základu, který tvoří přirozená čísla, byl připojen prvek 0 a přirozená čísla se znaménkem mínus. Přidání konečného počtu prvků k množině přirozených čísel mohutnost nezmění, zde je však přidáno nekonečné množství prvků. Vzniklou situaci je možné popsat na příkladu Hilbertova hotelu.

Dokud do hotelu chodily konečné skupiny hostů, recepční je vždy zvládl ubytovat (posunul již ubytované hosty o určitý počet pokojů dále a skupinu nově příchozích ubytoval do uvolněných pokojů). Jednou se však na recepci objevil nekonečný zástup nových hostů. Recepční si s novou situací nevěděl rady, proto zavolal vedoucího, aby nově příchozím sdělil, že pro ně nemá pokoje. Namísto toho však vedoucí požádal ubytované hosty, aby se přestěhovali do pokojů, které mají dvojnásobné číslo, než měl každý doposud. Tedy host z pokoje č. 1 do pokoje č. 2, host z pokoje č. 2 do pokoje č. 4, atd. Uvolnily se tak všechny liché pokoje, do kterých pak mohl recepční ubytovat příchozí skupinu.

Na základě principu z uvedeného příkladu je možné seřadit množinu celých čísel následovně:

1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$

$$\Downarrow$$

	1		2		3		4	$\cdots$

$$\Downarrow$$

0	1	-1	2	-2	3	-3	4	$\cdots$

Prvky takto seřazené množiny celých čísel lze očíslovat přirozenými čísly:

1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$
0	1	-1	2	-2	3	-3	4	$\cdots$

Lze-li množinu celých čísel očíslovat, je tato množina spočetná, ekvivalentní s množinou přirozených čísel. Má tedy stejnou mohutnost jako množina $\mathbb{N}$.

$$|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$$

V obecné rovině pak lze množinu $\mathbb{N}$ sjednotit s libovolnou spočetnou množinou a výsledná množina bude spočetná, neboť onu spočetnou množinu bude vždy možné označit pomocí přirozených čísel[18], následně seřadit do posloupnosti a očíslovat přirozenými čísly.

1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$
$1'$	1	$2'$	2	$3'$	3	$4'$	4	$\cdots$

Tvrzení 13. *Přidáním spočetné množiny k množině $\mathbb{N}$ nedojde ke změně mohutnosti, nově vzniklá množina je ekvivalentní s $\mathbb{N}$ (je spočetná).*

[18]Pro přehlednost se k přirozeným číslům označujícím zmíněnou množinu přidává znaménko, například $1'$ či $\overline{1}$.

3.3.3 Množina racionálních čísel

Způsob práce s množinou racionálních čísel je opět odvozen od způsobu tvorby této množiny. Libovolný zlomek je možné pojmout jako uspořádanou dvojici celého čísla a čísla přirozeného[19], přičemž zápis $\frac{a}{b}$ lze chápat jako $[a, b]$. Dále je zřejmé, že libovolné celé číslo k je možné také vyjádřit zlomkem $\frac{k}{1}$. Množinu všech zlomků je tedy možné zapsat do tabulky:

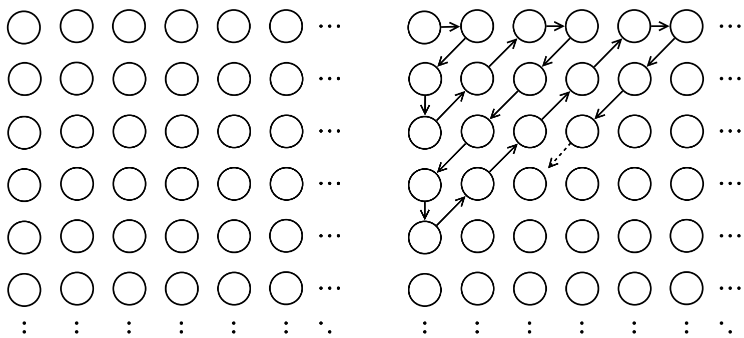
		$\{1,2,3,\dots\}$			
		1	2	3	$\dots$
$\{0,1,-1,2,-2,\dots\}$	0	$[0,1]$	$[0,2]$	$[0,3]$	$\dots$
	1	$[1,1]$	$[1,2]$	$[1,3]$	$\dots$
	-1	$[-1,1]$	$[-1,2]$	$[-1,3]$	$\dots$
	2	$[2,1]$	$[2,2]$	$[2,3]$	$\dots$
	-2	$[-2,1]$	$[-2,2]$	$[-2,3]$	$\dots$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

$\sim$

$\{1,2,3,\dots\}$			
1	2	3	$\dots$
$\frac{0}{1}$	$\frac{0}{2}$	$\frac{0}{3}$	$\dots$
$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\dots$
$\frac{-1}{1}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{3}$	$\dots$
$\frac{2}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\dots$
$\frac{-2}{1}$	$\frac{-2}{2}$	$\frac{-2}{3}$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Otázku spočetnosti této množiny je možné převést na problém recepčního Hilbertova hotelu:

Jednoho dne pan recepční zjistil, že před hotelem stojí vedle sebe seřazeno nekonečně mnoho nekonečných zástupů nových hostů. Věděl, že je může ubytovat jenom tehdy, pokud se mu je podaří seřadit do jedno zástupu. Stoupl si tedy na schůdky, aby si je pořádně prohlédl, a zjistil, že noví hosté vlastně už v zástupu stojí, jen se ten zástup vlní jako had.



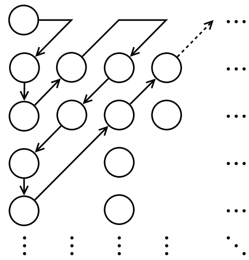
[19]Tato úvaha se provádí kvůli zjednodušení, neboť libovolný zlomek lze převést na tvar, kdy v čitateli je číslo celé (kladné, záporné, nula) a ve jmenovateli je číslo přirozené:

$$\frac{3}{-4} = \frac{-3}{4} \qquad \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$$

Aplikací uvedeného postupu pana recepčního je možné seřadit a následně očíslovat celou množinu zlomků. Tato množina je tedy spočetná a její kardinální číslo je $\aleph_0$.

Nelze však opomenout, že množina všech zlomků není totožná s množinou všech racionálních čísel, neboť například zlomky $\frac{2}{3}$ a $\frac{4}{6}$ vyjadřují jedno a totéž racionální číslo. Množina racionálních čísel vznikne z množiny všech zlomků odstraněním zlomků, které nejsou *v základním tvaru*[20]. Vytvořená množina racionálních čísel je nekonečná, neboť obsahuje množinu všech přirozených čísel. Jak vyplývá z obrázku 18. množinu všech zlomků s vynecháním zlomků, které nejsou v základním

		$\{1,2,3,\dots\}$			
		1	2	3	$\dots$
$\{0,1,-1,2,-2,\dots\}$	0	$\frac{0}{1}$	$\bullet$	$\bullet$	$\dots$
	1	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\dots$
	-1	$\frac{-1}{1}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	$\dots$
	2	$\frac{2}{1}$	$\bullet$	$\frac{2}{3}$	$\dots$
	-2	$\frac{-2}{1}$	$\bullet$	$\frac{-1}{3}$	$\dots$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$



Obrázek 18. Spočetnost množiny zlomků vyjádřených v základním tvaru

tvaru, tedy celou množinu racionálních čísel, je možno seřadit do posloupnosti, z čehož vyplývá, že je ji možné očíslovat přirozenými čísly. Její mohutnost je tak $\aleph_0$.

$$|\mathbb{Q}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$$

3.4 Cantor-Schröder-Bernsteinova věta

Na rozdíl od manipulace s konečnými kardinálními čísly nejsou některé úkony intuitivně zřejmé. Například zda platí tvrzení, že pokud současně

$$\alpha \leq \beta \quad \text{a} \quad \alpha \geq \beta,$$

platí rovnost

$$\alpha = \beta.$$

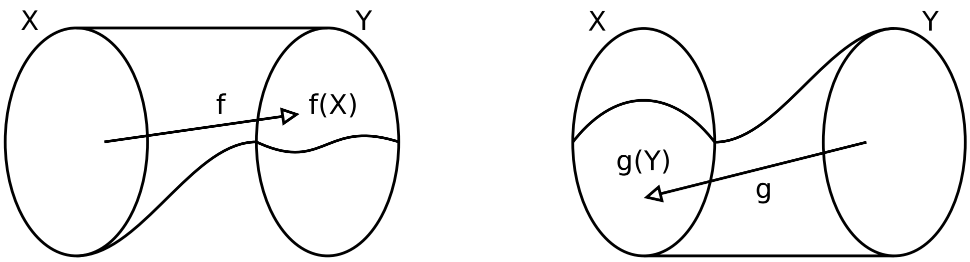
Toto tvrzení je intuitivně uchopitelné pro konečné množiny, neboť kardinální čísla v těchto případech vyjadřují počet prvků množiny. Je-li tedy počet prvků množiny X větší nebo roven počtu prvků množiny Y a současně je počet prvků množiny X

[20] Jako základní tvar zlomku se uvažuje taková dvojice čísel, jejichž největším společným dělitelem je číslo 1. Například základním tvarem zlomku $\frac{3}{6}$ je $\frac{1}{2}$, $\frac{-4}{2}$ je $\frac{-2}{1}$ a $\frac{0}{7}$ je $\frac{0}{1}$.

menší nebo roven počtu prvků množiny Y, logicky plyne, že se oba zmíněné počty rovnají. Kvůli existenci nekonečných kardinálních čísel je však nutné toto tvrzení exaktně dokázat. Nutnost existence tohoto tvrzení pro celou teorii množin ukázal roku 1882 Georg Cantor, ale dokázali ji až Friedrich W. Schröder (roku 1896) a Felix Bernstein (roku 1897). Zmíněné tvrzení tak obvykle nese pojmenování po všech třech matematicích, ale je možné se setkat i s označením po pouze dvou z nich (Cantor-Bernsteinova věta nebo Schöder-Bernsteinova věta). Toto tvrzení je možno vyjádřit také bez použití kardinálních čísel, neboť nerovnost $\alpha \leq \beta$ pro libovolné množiny X, Y takové, že $|X| = \alpha$ a $|Y| = \beta$, je možné vyjádřit jako $X_1 \subseteq Y_1$, přičemž X je ekvivalentní s X_1 a Y s Y_1 (mají stejná kardinální čísla).

Tvrzení 14 (Cantor-Schröder-Bernsteinova věta)**.** *Mějme libovolné množiny X a Y. Pokud platí, že X je ekvivalentní s podmnožinou Y a současně Y je ekvivalentní s podmnožinou X, pak X a Y jsou ekvivalentní.*

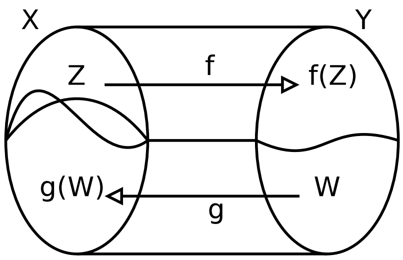
Ekvivalence množiny X s podmnožinou v množině Y a množiny Y s podmnožinou v množině X je vyjádřena pomocí jednoznačného zobrazení f a g na obrázku 19. (obraz množiny X je značen $f(X)$ a obraz množiny Y je značen $g(Y)$). Důkaz ekvi-



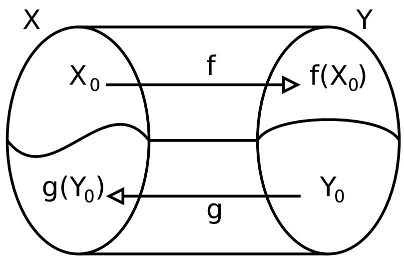
Obrázek 19. Zobrazení ekvivalencí Cantor-Schröder-Bernsteinovy věty

valence množin X a Y je dokazováním existence vzájemně jednoznačného zobrazení mezi množinami X a Y. Pokud by existovala podmnožina X_0 množiny X taková, že doplněk Y_0 jejího obrazu $f(X)$ se zpět zobrazí na množinu $g(Y_0)$ s tím, že množina $g(Y_0)$ je doplňkem původní množiny X_0 (obecný i tento specifický případ jsou vyznačeny na obrázku 20.), bylo by možné ono vzájemně jednoznačné zobrazení určit. Množinu X by bylo možné rozdělit na dvě množiny (vzájemně se doplňující): X_0 a $g(Y_0)$. Prvkům množiny X_0 jsou pak jednoznačně přiřazeny prvky množiny $f(X_0)$ a prvkům množiny $g(Y_0)$ jsou jednoznačně přiřazeny jejich vzory, tedy prvky množiny Y_0. Dokazování uvedené věty se tak transformovalo na hledání množiny X_0.

K zjednodušení zápisu se zavádí nové zobrazení h, kde zobrazení libovolné podmnožiny A množiny X zapsané $h(A)$ je pouze nahrazením sledu zobrazení. Množina A je zobrazena na množinu $f(A)$ zobrazením f. Dále je určen doplněk k této množině

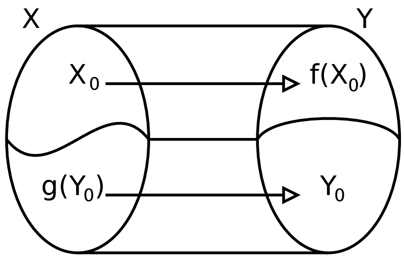


(a) Obecný případ zpětného zobrazení



(b) Hledaná množina X_0 její zpětné zobrazení

Obrázek 20. Zpětné zobrazení podmnožiny v množině X



Obrázek 21. Vzájemně jednoznačné zobrazení mezi množinami X a Y vytvořené pomocí množiny X_0

v množině Y, ten je značen Y_A. Poté je zpětně zobrazena množina Y_A na množinu $g(Y_A)$. Ke zmíněnému obrazu je určen doplněk v množině X a tento doplněk je hledaným obrazem množiny A, tedy $h(A)$. Z obrázku 20.b plyne, že obraz $h(X_0)$ hledané množiny X_0 by byl totožný s hledanou množinou X_0.

$$h(X_0) = X_0$$

Obrazem celé množiny X v zobrazení h bude množina $h(X)$, která je zřejmě podmnožinou v X

$$h(X) \subseteq X.$$

Nabízí se však otázka, jaký bude obraz množina $h(X)$ v zobrazení h. Jelikož všechny prvky množiny X se zobrazí do množiny $h(X)$, zobrazí se do ní také prvky, které jsou obsaženy v $h(X)$, neboť $h(X)$ je částí (podmnožinou) X. Obrazem množiny $h(X)$ tak bude podmnožina v ní samotné.

$$h(h(X)) \subseteq h(X)$$

Ze stejného důvodu pak bude obraz $h(h(h(X)))$ množiny $h(h(X))$ podmnožinou v $h(h(X))$, atd.

$$X \supseteq h(X) \supseteq h(h(X)) \supseteq h(h(h(X))) \supseteq \cdots$$

Pro další potřebu bude průnik všech uvedených množin označen $\overline{X}$.

$$\overline{X} = X \cap h(X) \cap h(h(X)) \cap h(h(h(X))) \cap \cdots$$

Jelikož jsou všechny množiny $h(X)$, $h(h(X))$, atd. podmnožinami množiny X lze ze zápisu množiny $\overline{X}$ vlastní množinu X vynechat.

$$\overline{X} = h(X) \cap h(h(X)) \cap h(h(h(X))) \cap \cdots$$

Je možné dále zkoumat obraz zmíněné množiny $\overline{X}$. Jelikož je tato množina zavedena jako průnik množin, je nutné zjistit pravidlo pro zobrazení libovolného průniku množin

$$A_0 \cap A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots ,$$

kde všechny množiny A_i jsou podmnožinami původní množiny X. Nechť x je libovolný bod ležící ve zmíněném průniku

$$x \in A_0 \cap A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots ,$$

pak nutně platí, že

$$x \in A_0 \text{ a současně } x \in A_1 \text{ a současně } x \in A_2 \text{ atd.}$$

Obraz bodu x v zobrazení f, zapsáno $f(x)$, pak jistě leží v obrazu každé množiny A_i.

$$f(x) \in f(A_0) \text{ a současně } f(x) \in f(A_1) \text{ a současně } f(x) \in f(A_2) \text{ atd.}$$

Doplňkem množiny obrazů všech bodů x z uvedeného průniku jsou pak všechna taková y z množiny Y, pro která platí

$$y \notin f(A_0) \text{ nebo } y \notin f(A_1) \text{ nebo } y \notin f(A_2) \text{ atd.}$$

jinými slovy

$$y \in B_0 \text{ nebo } y \in B_1 \text{ nebo } y \in B_2 \text{ atd.},$$

kde B_0 označuje doplněk množiny $f(A_0)$ v množině Y, B_1 doplněk množiny $f(A_1)$, atd. Pro zpětné zobrazení všech bodů y do množiny X pomocí zobrazení g pak platí, že obraz libovolného y, $g(y)$, leží v alespoň jednom obrazu množin B_i, $g(B_I)$.

$$g(y) \in g(B_0) \text{ nebo } g(y) \in g(B_1) \text{ nebo } g(y) \in g(B_2) \text{ atd.}$$

Následným doplňkem množiny všech obrazů $g(y)$ v množině X je množina takových prvků x, které neleží v ani jedné množině $g(B_i)$, neboli leží v každém doplňku množiny $g(B_i)$ v množině X. Jelikož daný postup vytvářel ke každé množině A_i její obraz $f(A_i)$ v zobrazení f, následně doplněk k tomuto obrazu značený B_i, dále pak obraz zmíněného doplňku v zobrazení g, tedy $g(B_i)$, je doplněk množiny $g(B_i)$ v množině X podle definice zobrazení h obrazem $h(A_i)$ množiny A_i. Body x ležící v každém doplňku množiny $g(B_i)$ v množině X tak leží v každé množině $h(A_i)$, jinými slovy leží v průniku všech množin $h(A_i)$.

$$x \in h(A_0) \cap h(A_1) \cap h(A_2) \cap h(A_3) \cap \cdots$$

Zobrazení libovolného bodu průniku

$$A_0 \cap A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots$$

tak bude ležet v průniku obrazů jednotlivých množin

$$h(A_0) \cap h(A_1) \cap h(A_2) \cap h(A_3) \cap \cdots$$

Platí tak vztah

$$h(A_0 \cap A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots) = h(A_0) \cap h(A_1) \cap h(A_2) \cap h(A_3) \cap \cdots$$

Tedy obrazem množiny $\overline{X}$ bude

$$h(X \cap h(X) \cap h(h(X)) \cap h(h(h(X))) \cap \cdots) = h(X) \cap h(h(X)) \cap h(h(h(X))) \cap \cdots,$$

což je ovšem druhé možné vyjádření množiny $\overline{X}$. Platí tak

$$h(\overline{X}) = \overline{X},$$

z čehož vyplývá, že množina $\overline{X}$ je hledanou množinou X_0. Tím je potvrzena existence vzájemně jednoznačného zobrazení mezi množinami X a Y, neboli jejich ekvivalence. Důkaz Cantor-Schröder-Bernsteinovy věty je tak dokončen.

3.5 Kardinální číslo potenční množiny

K určení kardinálního čísla potenční množiny $\mathcal{P}(X)$ příslušící k libovolné množině X je nutné zavést vhodný způsob zápisu podmnožin. Popis libovolné podmnožiny dané množiny zahrnuje nejen všechny prvky, které podmnožina obsahuje, ale také všechny prvky původní množiny, které neobsahuje. Například podmnožina $\{\clubsuit\}$ množiny $\{\heartsuit, \clubsuit, \spadesuit\}$ obsahuje prvek $\clubsuit$ a neobsahuje prvky $\heartsuit$ a $\spadesuit$. V daném pořadí prvků množiny je tak možné jednoznačně popsat podmnožinu pomocí posloupnosti číslic 1 a 0, kde 1 značí, že podmnožina daný prvek obsahuje, a 0 značí,

	$\{\heartsuit, \clubsuit, \spadesuit\}$		
	$\heartsuit$	$\clubsuit$	$\spadesuit$
$\emptyset$	0	0	0
$\{\heartsuit\}$	1	0	0
$\{\clubsuit\}$	0	1	0
$\{\spadesuit\}$	0	0	1
$\{\heartsuit, \clubsuit\}$	1	1	0
$\{\heartsuit, \spadesuit\}$	1	0	1
$\{\clubsuit, \spadesuit\}$	0	1	1
$\{\heartsuit, \clubsuit, \spadesuit\}$	1	1	1

Obrázek 22. Popis podmnožin množiny $\{\heartsuit, \clubsuit, \spadesuit\}$ pomocí posloupnosti číslic 0 a 1

že jej neobsahuje. Pro uvedenou množinu $\{\heartsuit, \clubsuit, \spadesuit\}$ jsou na obrázku 22. popsány zmíněným postupem všechny její podmnožiny. Je zřejmé, že v posloupnosti určující libovolnou podmnožinu dané množiny bude stejné množství číslic (členů), jako je prvků v původní množině. Podmnožinu jednoprvkové množiny bude popisovat jedna číslice (1 nebo 0), protože podmnožinami jednoprvkové množiny jsou prázdná množina nebo ona množina sama o sobě. Pro popis podmnožiny prázdné množiny tak nebude použita žádná číslice, neboť prázdná množina obsahuje pouze jedinou podmnožinu (prázdnou množinu), je tedy dána jednoznačně. Opačným extrémním případem bude potenční množina množiny všech přirozených čísel, neboť libovolnou podmnožinu množiny $\mathbb{N}$ popisuje nekonečná posloupnost 0 a 1, jak ukazuje obrázek 23.

	$\mathbb{N}$									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
$\emptyset$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
$\{1, 2\}$	1	1	0	0	0	0	0	0	0	...
$\{2, 5\}$	0	1	0	0	1	0	0	0	0	...
$\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \dots\}$	0	0	1	1	1	1	1	1	1	...
$\{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$	1	0	1	0	1	0	1	0	1	...
$\{2, 4, 6, 8, \dots\}$	0	1	0	1	0	1	0	1	0	...

Obrázek 23. Příklady popisu podmnožin množiny $\mathbb{N}$ pomocí posloupností 1 a 0

Kardinální číslo potenční množiny dané množiny je tak určeno množstvím posloupností určujících jednotlivé podmnožiny. Vzhledem k faktu, že v libovolné posloupnosti popisující podmnožinu existují pro každou pozici dvě možnosti (na pozici je 1 nebo 0) a že pro množinu s kardinálním číslem α má každá taková posloupnost právě α členů (číslic), je množství všech možných posloupností rovno[21] 2^α. Odsud pak vyplývá:

Tvrzení 15. *Nechť množina X má kardinální číslo α. Pak kardinální číslo množiny $\mathcal{P}(X)$, tedy množiny všech podmnožin X, je rovno 2^α.*

Na konci 19. století Georg Cantor dokázal matematickou větu osvětlující základní vztah mezi kardinálním číslem libovolné množiny a kardinálním číslem její potenční množiny. Tato věta byla na jeho počest po něm pojmenována.

Tvrzení 16 (Cantorova věta)**.** *Pro libovolnou množinu X má potenční množina $\mathcal{P}(X)$ obsahující všechny podmnožiny množiny X větší kardinální číslo, než je kardinální číslo množiny X.*

$$\alpha < 2^\alpha$$

Jinými slovy množství všech podmnožin dané množiny je vždy větší než množství prvků oné množiny, což je využito následně při práci s nekonečnými množinami.

Pro libovolnou množinu X obsahuje její potenční množina $\mathcal{P}(X)$ „kopii“[22] původní množiny X, například pro množinu $\{\heartsuit, \clubsuit, \spadesuit\}$

X		$\heartsuit$	$\clubsuit$	$\spadesuit$				
$\mathcal{P}(X)$	$\emptyset$	$\{\heartsuit\}$	$\{\clubsuit\}$	$\{\spadesuit\}$	$\{\heartsuit, \clubsuit\}$	$\{\heartsuit, \spadesuit\}$	$\{\clubsuit, \spadesuit\}$	$\{\heartsuit, \clubsuit, \spadesuit\}$

Platí tedy neostrá nerovnost

$$\alpha \leq 2^\alpha.$$

Ke kompletnímu důkazu je tak nutné vyloučit případ $\alpha = 2^\alpha$ pro všechny množiny.

[21] V libovolné takové posloupnosti jsou vždy dvě možnosti, jaká číslice bude na dané pozici v posloupnosti. Je-li počet všech posloupností o n členech roven k, pak počet posloupností o $n+1$ členech bude $2 \cdot k$, neboť pro obě varianty přidaného členu (1 nebo 0) bude počet posloupností s danou variantou roven k. Protože počet posloupností vyjadřující podmnožiny jednoprvkové množiny je 2, bude počet posloupností vyjadřující podmnožiny dvouprvkové množiny roven $2 \cdot 2$, pro tříprvkovou množinu $2 \cdot 2 \cdot 2$, atd. pro α-prvkovou množinu bude počet posloupností roven

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \quad \cdots \quad \cdot 2}_{\alpha\text{-krát}} = 2^\alpha.$$

[22] Jde o množinu jednotlivých prvků x původní množiny, které vystupují jako jednoprvkové množiny $\{x\}$.

Tato část je vedena metodou sporu[23]. Pokud by tedy platil alespoň pro jednu množinu X vztah $\alpha = 2^\alpha$, značilo by to existenci vzájemně jednoznačného zobrazení mezi X a $\mathcal{P}(X)$ (prvky množiny X by se jednoznačně zobrazovaly na podmnožiny X). Z prvků množiny X by následně bylo možné sestavit množinu Y takovou, že Y by obsahovala právě ty prvky X které by *nenáležely* do podmnožiny X, na kterou by se zobrazily. Například zobrazil-li by se prvek $\heartsuit$ na množinu $\{\clubsuit, \spadesuit\}$, patřil by do Y, zobrazil-li by se na množinu $\{\heartsuit, \spadesuit\}$, do Y by nepatřil.

Jelikož by Y byla podmnožinou X, byla by tak prvkem $\mathcal{P}(X)$. Vzhledem k předpokladu existence bijekce mezi X a $\mathcal{P}(X)$ by pak musel nutně existovat prvek y množiny X, který by se zobrazil na Y. Protože Y tvoří v X podmnožinu, lze se ptát, zda onen prvek y leží či neleží v Y. Pokud by $y \in Y$, znamenalo by to podle definice Y, že prvek y nenáleží do množiny, na kterou se zobrazí, tedy $y \notin Y$, naopak pokud $y \notin Y$, z definice množiny Y by pak plynulo, že prvek y musí náležet do množiny, na kterou se zobrazí, tedy $y \in Y$.

Tímto byl nalezen logický spor vycházející z předpokladu existence jednoznačného zobrazení mezi X a $\mathcal{P}(X)$, pro žádnou množinu X tak neplatí rovnost $\alpha = 2^\alpha$, čímž je Cantorova věta dokázána.

Bezprostředním důsledkem Cantorovy věty je fakt, že mohutnost potenční množiny $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ je ostře větší než mohutnost množiny všech přirozených čísel,

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) > \aleph_0,$$

jinými slovy prvků množiny $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ je „větší nekonečno“ než prvků množiny $\mathbb{N}$. Všechny množiny, jejichž mohutnost je větší než mohutnost množiny $\mathbb{N}$ se označují jako *nespočetné* množiny, neboť nejsou s množinou $\mathbb{N}$ ekvivalentní, jejich prvky tedy nelze očíslovat (spočítat).

Ona nespočetnost množiny $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ vybízí k otázce, zda odebráním části prvků dojde ke změně kardinálního čísla [Kope]. Množina Y vzniklá odebráním konečného nebo nekonečného spočetného množství prvků (množina X) z množiny $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ je nespočetná.

[23] Princip metody sporu je založen na dvou krocích:

a) Připuštění pravdivosti opaku dokazovaného tvrzení.

b) Nalezení logického sporu vycházejícího z pravdivosti onoho opaku dokazovaného tvrzení, čímž je dokázána nepravdivost opaku dokazovaného tvrzení a pravdivost dokazovaného tvrzení.

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus X = Y$$
$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) = X \cup Y$$

Pokud by množina Y byla konečná nebo nekonečná spočetná, sjednocení $X \cup Y$ by bylo také spočetné, protože jde o sjednocení spočetné množiny a konečné nebo nekonečné spočetné množiny. Znamenalo by to tak, že množina $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ by byla spočetná, což není. Proto musí být množina Y nekonečná nespočetná.

$$|Y| > \aleph_0$$

Jelikož je množina Y nekonečná, obsahuje v sobě nekonečnou spočetnou podmnožinu Y_1, přičemž Y_2 označuje množinu zbývajících prvků množiny Y.

$$Y = Y_1 \cup Y_2$$
$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus X = Y_1 \cup Y_2$$

Množinu $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ je tak možné psát

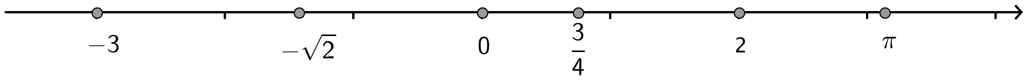
$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) = X \cup (Y_1 \cup Y_2) = (X \cup Y_1) \cup Y_2.$$

Protože množina X je konečná nebo nekonečná spočetná a množina Y_1 nekonečná spočetná, vznikne jejich sjednocením nekonečná spočetná množina. Množiny $X \cup Y_1$ a Y_1 jsou tak ekvivalentní. Proto jsou ekvivalentní také sjednocení $(X \cup Y_1) \cup Y_2$ a $Y_1 \cup Y_2$, což znamená, že jsou ekvivalentní množiny $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ a $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus X$ (mají stejná kardinální čísla).

Tvrzení 17. *Kardinální číslo množiny $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ je stejné jako kardinální číslo množiny $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, ze které byla odebrána libovolná konečná nebo nekonečná spočetná podmnožina prvků.*

3.6 Kontinuum

Významem pojmu kontinuum je něco spojitého, například přímka. V matematice se užívá přímka jako číselná osa k vyznačení reálných čísel (množina reálných čísel se značí $\mathbb{R}$). Platí, že jakékoliv reálné číslo lze vyznačit na číselné ose a naopak jakýkoliv bod číselné osy určuje reálné číslo. Úvaha nad mohutností množiny reálných čísel se tak zaměří na množství bodů na přímce, protože odpovídá-li přímka reálným číslům, odpovídá množství bodů na ní množství reálných čísel.



Obrázek 24. Číselná osa

3.6.1 Úsečka, kružnice a přímka

Naznačená úvaha o mohutnosti reálných čísel začíná rozborem situace dvou úseček, které neleží na jedné přímce[24]. Pro spojnice odpovídajících si krajních bodů dvou úseček mohou nastat dvě situace, jak ukazuje obrázek 25.:

– Spojnice budou rovnoběžné.

– Spojnice se budou protínat v jednom bodě.

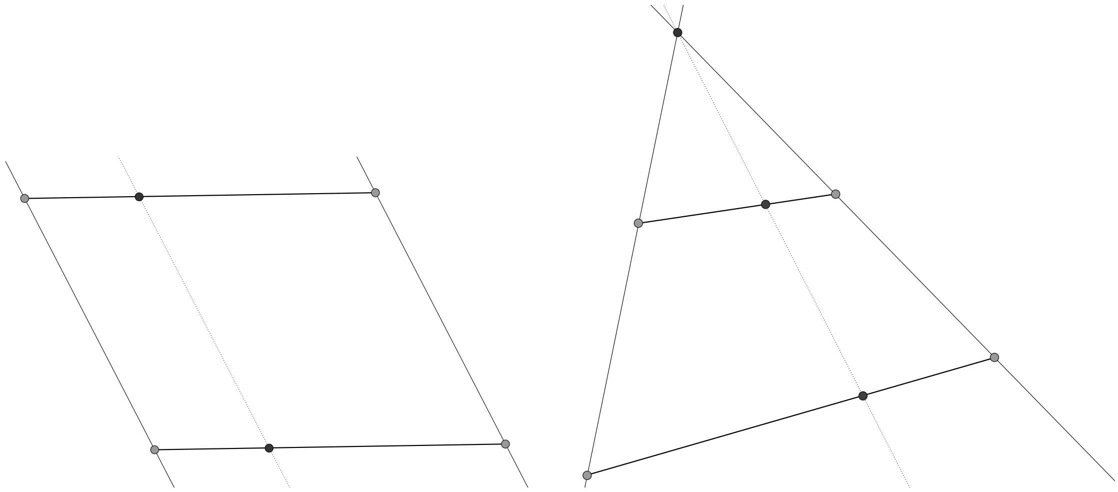
V prvním případě lze pomocí rovnoběžky se spojnicí odpovídajících si krajních bodů jednoznačně přiřadit libovolnému bodu jedné úsečky bod na úsečce druhé (obrázek 25.a). V druhém případě je možné vést přímku libovolným bodem jedné úsečky a průsečíkem spojnic odpovídajících si krajních bodů. K danému bodu na jedné přímce je na druhé přímce jednoznačně přiřazen bod jako průsečík oné druhé úsečky a uvedené přímky (obrázek 25.b). Přiřazení odpovídajících si bodů na úsečkách (v obou případech) je vzájemně jednoznačné, neboť určenost průsečíku přímky s úsečkou, přímky pomocí bodu a směru a přímky pomocí dvou bodů je jednoznačné. Jelikož je pro libovolné dvě úsečky možné vzájemně jednoznačně přiřadit body jedné úsečky bodům druhé úsečky[25], obsahují libovolné dvě úsečky stejné množství bodů, přičemž nezáleží na jejich délce.

Problematika úseček zahrnuje také úsečky, které neobsahují krajní body (jeden nebo oba). Protože platí, že libovolné dvě úsečky (s krajními body) obsahují stejné množství bodů, bude mít jedna z nich po odebrání krajních bodů[26] *nejvýše* stejné množství jako ona druhá. Obdobnou konstrukcí jako na obrázku 25. je na obrázku 26. ukázán způsob jak převést úsečku s oběma krajními body na část úsečky bez obou krajních bodů. Pozice bodu, ve kterém se protínají spojnice krajních bodů dané úsečky a krajních bodů hledané části, je volitelná, proto lze danou úsečku převést na libovolnou část druhé úsečky. Z postupu je zřejmé, že úsečka bez krajních bodů

[24] Situaci dvou úseček ležících na jedné přímce lze převést na situaci, kdy úsečky na jedné přímce neleží, například pomocí posunutí jedné z nich.

[25] Na úsečce neexistuje bod, pro který by neexistoval odpovídající bod na druhé úsečce.

[26] Z důvodu návaznosti je uváděna práce s úsečkami bez obou krajních bodů, pro úsečku s jedním krajním bodem je úvaha obdobná.



(a) Rovnoběžné spojnice krajních bodů (b) Různoběžné spojnice krajních bodů

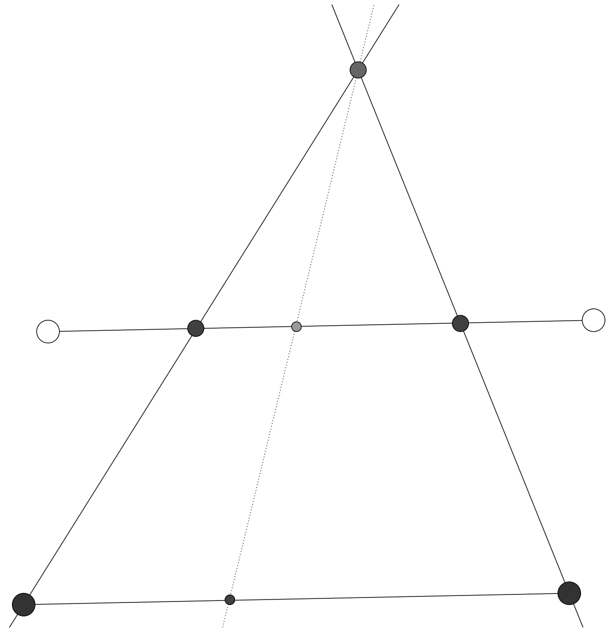
Obrázek 25. Vzájemně jednoznačné přiřazení bodů dvou úseček

obsahuje *nejméně* stejné množství bodů jako úsečka s oběma krajními body, z čehož plyne závěr, že obě úsečky obsahují *stejné* množství bodů, proto z hlediska množství bodů na úsečce není nutné rozlišovat případy, kdy úsečka obsahuje nebo neobsahuje své krajní body.

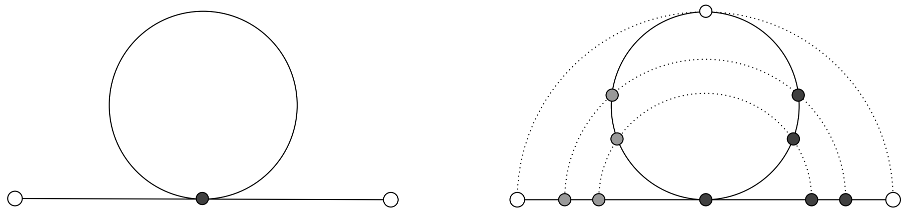
Dalším krokem v úvaze o reálných číslech je „stočení“ úsečky do kružnice. Přestože je tento úkon proveditelný intuitivně, v axiomatické teorii je nutné jej zavést exaktně. Na obrázku 27. je uvedeno jednoznačné přiřazení bodů úsečky bodům kružnice. Použitá kružnice má průměr roven polovině délky dané úsečky a dotýká se této úsečky v jejím středu. Popsané přiřazení využívá půlkružnic o středu právě ve středu dané úsečky a procházející dvěma symetricky umístěnými body na úsečce. Tyto dva body pak symetricky přenáší na zmíněnou kružnici. Opět z důvodu návaznosti je na obrázku použita úsečka bez obou krajních bodů, na kružnici tak chybí jediný bod (na obrázku je vyznačen bílou barvou). Tomuto bodu by byl přiřazen jeden z krajních bodů úsečky, pokud by byla použita úsečka s jedním krajním bodem[27]. Jelikož z hlediska množství jsou úsečky bez krajních bodů a s krajními body libovolně zaměnitelné, jsou libovolně zaměnitelné i kružnice (ať již s vynechaným nebo nevynechaným bodem), všechny kružnice tak obsahují stejné množství bodů.

Závěrečným krokem v geometrické úvaze o reálných číslech je jednoznačné přiřazení bodů na kružnici bodům na přímce. Postup přiřazení, jak ho ukazuje obrázek 28., je založen na dotyku libovolné přímky a kružnice. Libovolnému bodu na

[27]Pro případ úsečky s oběma krajními body není tento způsob přiřazení vhodný, což ale z hlediska množství bodů není důležité, jak bylo ukázáno výše.



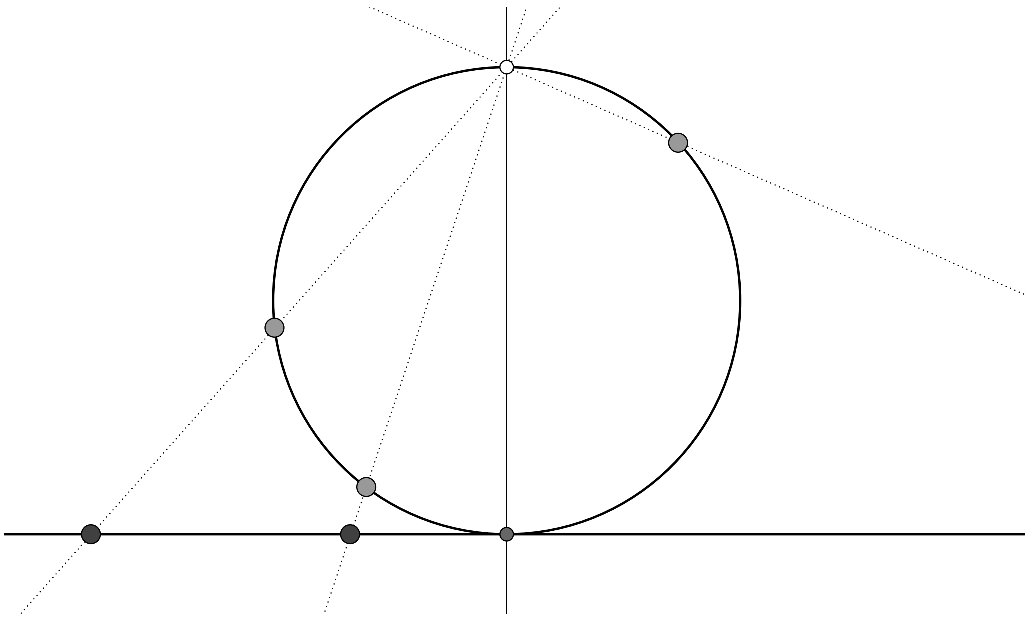
Obrázek 26. Převod jedné úsečky na část úsečky druhé



Obrázek 27. Jednoznačné přiřazení bodů úsečky bodům na kružnici

dané kružnici bude odpovídat průsečík dané přímky s přímkou určenou bodem na kružnici a bodem, který je průsečíkem kružnice a spojnice středu kružnice a bodu dotyku[28] (označován jako pól, na obrázku vyznačen bílou barvou). Uvedený postup lze také obrátit a libovolnému bodu přímky přiřadit bod na kružnici jako průsečík kružnice a přímky určené daným bodem a pólem kružnice. Jediný bod kružnice, kterému nelze popsaným způsobem přiřadit bod na přímce a který nebude přiřazen žádnému bodu přímky, je zmíněný pól. Vzhledem k jednoznačnosti přiřazení bodů platí, že přímka obsahuje stejné množství bodů jako kružnice, na které je vynechán pól. Jelikož z hlediska množství nezáleží na tom, zda na kružnici je či není vynechán bod, obsahuje libovolná přímka stejné množství bodů jako libovolná kružnice.

[28]Leží přímo „naproti“ bodu dotyku.



Obrázek 28. Jednoznačné přiřazení bodů přímky bodům na kružnici

Jelikož platí, že

– dvě libovolné úsečky obsahují stejné množství bodů,

– libovolná úsečka obsahuje stejné množství bodů jako kružnice,

– libovolná přímka obsahuje stejné množství bodů jako kružnice,

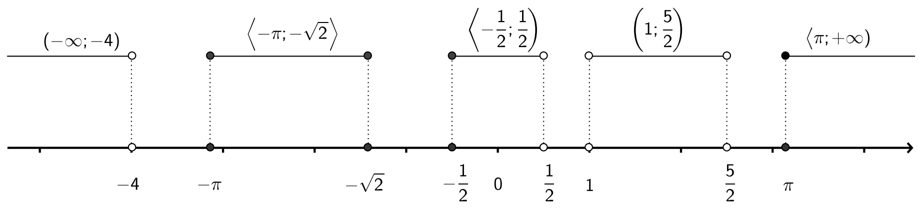
obsahují všechny zmíněné útvary (úsečka, kružnice, přímka) stejné množství bodů. Posledním útvarem, který dosud nebyl zmíněn, je polopřímka. Jelikož polopřímka (s krajním bodem nebo bez něj) je součásti přímky, může obsahovat *nejvýše* stejné množství bodů jako přímka. Protože však část polopřímky tvoří úsečka, musí polopřímka obsahovat *nejméně* stejné množství bodů jako úsečka. Množství bodů na přímce a na úsečce je stejné, z čehož vyplývá, že množství bodů na polopřímce musí být nutně stejné jako na obou zmíněných útvarech[29].

3.6.2 Mohutnost reálných čísel

Na základě předchozího textu lze srovnat mohutnost částí (podmnožin) množiny reálných čísel. Pro běžnou práci s reálnými čísly se užívají intervaly. Uzavřené,

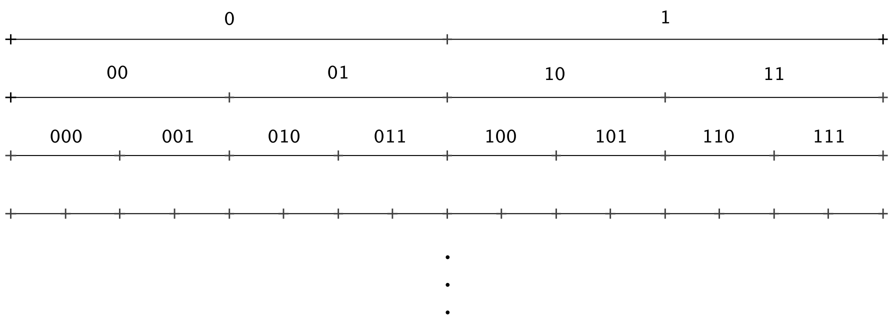
[29]Dané množství je nejméně stejné jako množství bodů na přímce (úsečce) a zároveň nejvýše stejné jako množství bodů na přímce (úsečce), z čehož logicky vyplývá, že je stejné jako množství bodů na přímce (úsečce).

otevřené nebo polouzavřené či polootevřené intervaly vyjadřují úsečky (obsažení krajních bodů je dáno otevřeností či uzavřeností daného intervalu). Intervaly neohraničené, které se obvykle zapisují $\langle a; +\infty)$, $(-\infty; a\rangle$, $(a; +\infty)$ nebo $(-\infty; a)$, vyjadřují polopřímky. Specifickým typem neohraničeného intervalu je $(-\infty; +\infty)$, který vyjadřuje celou reálnou osu, neboli celou množinu reálných čísel. Přehledně tyto intervaly ukazuje obrázek 29.



Obrázek 29. Intervaly na číselné ose

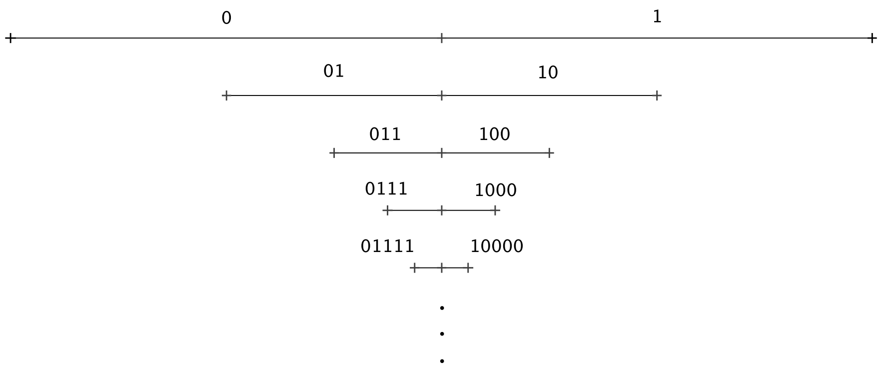
Jelikož množství bodů na uvedených útvarech je stejné, je také množství prvků množin, které tyto útvary vyjadřují, stejné, což jinými slovy značí, že mohutnost množiny reálných čísel je stejná jako mohutnost libovolného intervalu. Proto při zjišťování kardinálního čísla množiny reálných čísel je možné pracovat pouze s libovolným intervalem $\langle a; b)$, kde a a b jsou reálná čísla. K určení množství bodů (reálných čísel) intervalu se užívá tzv. metoda půlení, jejímž výsledkem je možnost popsání pozice libovolného bodu intervalu pomocí posloupnosti číslic 1 a 0. Na



Obrázek 30. Zápis čísel intervalu metodou půlení

obrázku 30. je naznačen postup konstrukce posloupností označující jednotlivé body. Bod x_1 označuje polovinu intervalu $\langle a; b)$ a rozděluje jej na dva intervaly $I_0 = \langle a; x_1)$ a $I_1 = \langle x_1; b)$. Posloupnost popisující body obsažené v intervalu I_0 bude začínat číslicí 0, zatímco posloupnost popisující body v intervalu I_1 číslicí 1. Intervaly I_0 a I_1 budou opět rozděleny na poloviny (podintervaly). Posloupnosti označující body v uvedených podintervalech budou pokračovat číslicí 1 nebo 0 v závislosti na tom, do jakého podintervalu bod patří. Tedy například bod, které leží ve třech čtvrtinách intervalu $\langle a; b)$, by vyjadřovala posloupnost $1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots$

Pro každý bod intervalu $\langle a; b)$ tak existuje zápis pomocí 1 a 0, avšak vztah mezi body uvedeného intervalu a všemi posloupnostmi 0 a 1 není jednoznačný. Problematické jsou posloupnosti, které od určité pozice obsahují jen samé číslice 1. Například z obrázku 31. je patrné, že posloupnost $0, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots$ by měla popisovat bod



Obrázek 31. Dvojí možná zápis čísla v polovině intervalu

v polovině intervalu stejně jako posloupnost $1, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots$ První z posloupností popisuje postup „zleva“ a druhá „zprava“. Množinu bodů daného intervalu je tak možné jednoznačně popsat množinou všech posloupností z 1 a 0, přičemž z této množiny byly odebrány všechny posloupnosti obsahující od určitého místa pouze 1. Libovolná vyhovující posloupnost 1 a 0 popisuje bod intervalu a naopak libovolný bod intervalu může být vyhovující posloupností popsán.

Jak bylo uvedeno v kapitole 3.5 všechny posloupnosti 0 a1 popisují všechny podmnožiny množiny $\mathbb{N}$ (množina všech uvedených posloupností je ekvivalentní s množinou $\mathcal{P}(\mathbb{N})$). S ohledem na skutečnost, že všechna reálná čísla v libovolném intervalu je možné popsat posloupnostmi 0 a 1 s vynecháním určitých nevyhovujících posloupností, je nutné zjistit, jaká bude mohutnost systému všech podmnožin množiny $\mathbb{N}$ bez podmnožin, které odpovídají uvedeným nevyhovujícím posloupnostem 0 a 1.

Libovolnou zmíněnou nevyhovující posloupnost 0 a 1 lze vždy charakterizovat pozicí, od které se již objevují pouze číslice 1. Protože uvedená sekvence číslic 1 může začínat na libovolném místě posloupnosti a těchto míst v posloupnosti je nekonečně mnoho, je také nevyhovujících posloupností nekonečně mnoho. Pozice začátku sekvence 1 může být určena přirozeným číslem (určujícím pořadové číslo místa v posloupnosti), část posloupnosti před začátkem sekvence 1 je tak konečná. Na základě pozice začátku sekvence 1 a tvaru části posloupnosti před začátkem oné sekvence je možné všechny nevyhovující posloupnosti vhodně uspořádat a následně očíslovat:

$$\begin{array}{rl}
1 & \vert\; 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ \dots \\
2 & 0\ \vert\; 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ \dots \\
3 & 0\ 0\ \vert\; 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ \dots \\
4 & 1\ 0\ \vert\; 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ \dots \\
5 & 0\ 0\ 0\ \vert\; 1\ 1\ 1\ 1\ \dots \\
6 & 1\ 0\ 0\ \vert\; 1\ 1\ 1\ 1\ \dots \\
7 & 0\ 1\ 0\ \vert\; 1\ 1\ 1\ 1\ \dots \\
8 & 1\ 1\ 0\ \vert\; 1\ 1\ 1\ 1\ \dots \\
 & \quad\quad \vdots
\end{array}$$

Uvedená možnost očíslování jednotlivých posloupností vyjadřuje *spočetnost* nekonečné množiny nevyhovujících posloupností.

Vyloučení nekonečné spočetné množiny posloupností znamená vyloučení spočetně mnoha množin ze systému všech podmnožin množiny $\mathbb{N}$. Protože jednoznačné přiřazení podmnožin množiny $\mathbb{N}$ posloupnostem popisujícím body intervalu lze chápat jako vzájemně jednoznačné zobrazení mezi množinou vyhovujících posloupností a upraveným systémem podmnožin množiny $\mathbb{N}$ (upravenou množinou $\mathcal{P}(\mathbb{N})$), jsou množina vyhovujících posloupností a upravená množina $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ *ekvivalentní.* Ze závěrů kapitoly 3.5 plyne, že takto upravená množina $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ má stejnou mohutnost jako neupravená množina $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

– Mohutnost systému podmnožin množiny $\mathbb{N}$ bez spočetně mnoha podmnožin je stejná jako mohutnost celé množiny $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

– Množina vyhovujících posloupností odpovídající bodům libovolného intervalu je ekvivalentní systému podmnožin množiny $\mathbb{N}$, přičemž nevyhovujících posloupností (a tedy nevyhovujících podmnožin) je spočetně mnoho.

– Množství bodů reálné osy (reprezentující množinu reálných čísel) je stejné jako množství bodů libovolného intervalu.

Logickým důsledkem je pak:

Tvrzení 18. *Množina $\mathbb{R}$ všech reálných čísel má stejnou mohutnost (kardinální číslo) jako potenční množina $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ množiny všech přirozených čísel $\mathbb{N}$.*

Pro kardinální číslo množiny reálných čísel se užívá označení *mohutnost kontinua* a značí se $\mathfrak{c}$ (gotické písmeno c). Uvedené tvrzení lze pak zapsat

$$\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}.$$

Z Cantorovy věty (tvrzení 16) pro množinu všech přirozených čísel vyplývá:

$$\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} > \aleph_0$$
$$\mathfrak{c} > \aleph_0$$

Reálných čísel je „mnohem víc“ než čísel přirozených, nelze je tedy sestavit do posloupnosti a očíslovat, jinými slovy reálných čísel je „větší nekonečno“.

3.6.3 Rovina, prostor a množina komplexních čísel

V geometrii používáme dvojice reálných čísel jako vyjádření souřadnic bodů v rovině $\mathbb{R}^2$. Celá rovina je tak množinou všech dvojic reálných čísel, které nám popisují jednotlivé body. Jelikož mohutnost reálných čísel odpovídá mohutnosti množiny $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, odpovídá množství uspořádaných dvojic reálných čísel množství uspořádaných dvojic podmnožin $\mathbb{N}$. Každou podmnožinu $\mathbb{N}$ je možné vyjádřit jako nekonečnou posloupnost 1 a 0, zmíněná uspořádaní dvojice je tak dvojicí uvedených posloupností. Takzvanou metodou slučování [BlaVoj] je možné ze dvou posloupností vytvořit jednu, přičemž původní posloupnosti lze z této jedné posloupnosti zpětně jednoznačně zkonstruovat. Ona nová posloupnost se vytváří tak, že se za sebe dávají střídavě číslice z prvního a z druhého zápisu (obrázek 32.). Zpětně pak z výsledné

$$
\begin{array}{ll|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}
\cline{3-11}
1\;1\;0\;1,\ldots & \longrightarrow & 1 & & 1 & & 0 & & 1 & & \ldots \\
\cline{3-11}
\multicolumn{1}{l}{} & \multicolumn{1}{l}{} & \multicolumn{1}{c}{\downarrow} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{\downarrow} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{\downarrow} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{\downarrow} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} \\
\multicolumn{1}{l}{} & \multicolumn{1}{l}{} & \multicolumn{1}{c}{1} & \multicolumn{1}{c}{1} & \multicolumn{1}{c}{1} & \multicolumn{1}{c}{0} & \multicolumn{1}{c}{0} & \multicolumn{1}{c}{1} & \multicolumn{1}{c}{1} & \multicolumn{1}{c}{0} & \multicolumn{1}{c}{\ldots} \\
\multicolumn{1}{l}{} & \multicolumn{1}{l}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{\uparrow} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{\uparrow} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{\uparrow} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{\uparrow} & \multicolumn{1}{c}{} \\
\cline{3-11}
1\;0\;1\;0,\ldots & \longrightarrow & & 1 & & 0 & & 1 & & 0 & \ldots \\
\cline{3-11}
\end{array}
$$

Obrázek 32. Slučování dvou zápisů reálných čísel

posloupnosti lze získat původní zápisy tak, že číslice na lichých místech vytváří první původní posloupnost a na sudých místech druhou původní posloupnost. Protože tak lze vzájemně jednoznačně zobrazit množinu dvojic posloupností 1 a 0 (jejíž mohutnost je stejná jako mohutnost množiny dvojic reálných čísel) na samotnou množinu posloupností 1 a 0 (jejíž mohutnost odpovídá mohutnosti množiny $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, tedy mohutnosti množiny reálných čísel), zmíněné dvě mohutnosti si odpovídají (obě jsou rovny $\mathfrak{c}$). Geometrickým významem je tedy fakt, že celá rovina $\mathbb{R}^2$ obsahuje stejné množství bodů jako přímka.

Využití roviny ovšem není čistě geometrické, je totiž vyjádřením komplexních čísel. Každé komplexní číslo ze zapisuje ve tvaru $a + bi$, kde a, b jsou reálná čísla, přičemž a se nazývá reálná část komplexního čísla a b imaginární část. Každé komplexní číslo tak lze považovat za uspořádanou dvojici $[a, b]$. Všechny tyto dvojice pak tvoří tzv. Gaussovu rovinu komplexních čísel. Ze stejného důvodu, jakým byla zdůvodněna mohutnost klasické geometrické roviny, je mohutnost množiny všech komplexních čísel rovna $\mathfrak{c}$.

Obdobná situace nastane i v případě geometrického prostoru $\mathbb{R}^3$. Všechny body v tomto prostoru lze popsat souřadnicemi neboli uspořádanou trojicí reálných čísel. Význam této trojice je ale možné chápat i tak, že bodu v rovině (tedy uspořádané dvojici $[a, b]$) je přiřazena výška c nad uvažovanou rovinou. Výsledkem je tak dvojice, kde na prvním místě je bod v rovině a na druhém místě jeho výška nad onou rovinou.

$$[[a, b], c]$$

Zjednodušením zápisu je pak klasický zápis souřadnic bodu v prostoru $[a, b, c]$, neboť jej lze vždy jednoznačně rozdělit na určení bodu v rovině a přiřazení výšky. Pro účel určení mohutnosti množiny všech bodů v prostoru se vychází právě ze tvaru $[[a, b], c]$. Protože množina všech bodů v rovině má mohutnost $\mathfrak{c}$ (je ekvivalentní množině všech reálných čísel) a množina všech čísel označujících výšky (množina reálných čísel) má také mohutnost $\mathfrak{c}$, odpovídá mohutnost množiny všech uvedených dvojic množině dvojic reálných čísel, jejíž kardinální číslo je $\mathfrak{c}$. Geometrický prostor $\mathbb{R}^3$ tak obsahuje stejné množství bodů jako rovina $\mathbb{R}^2$ a jako libovolná přímka.

3.6.4 Netypické množiny s mohutností kontinua

V matematice existují velmi různorodé útvary a množiny, které svými prokazatelnými vlastnostmi působí nepřirozeně. U uvedených útvarů je onou vlastností to, že množina bodů, které je tvoří, má mohutnost kontinua.

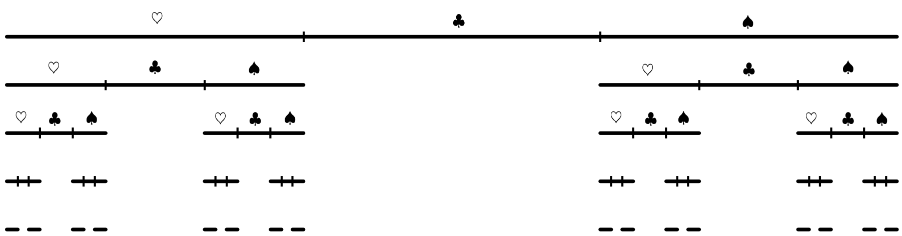
Cantorovo diskontinuum. Roku 1883 uvedl Georg Cantor [JurPei] příklad zvláštní množiny, tzv. matematického monstra, která je pro svou důležitost nakonec po Georgu Cantorovi pojmenována. Ona důležitost spočívala v tom, že se tato množina stala prapředkem celého jednoho matematického odvětví – studia fraktálů.

Základem tohoto útvaru je libovolná úsečka AB s oběma krajními body. Princip dalších úprav je velmi jednoduchý. Z původní úsečky je vyjmuta prostřední třetina, neboli úsečka je rozdělena body X_1 a X_2 na tři části a následně je vyjmuta úsečka X_1X_2 (vlastní body X_1 a X_2 zůstávají na místě). Vzniklé úsečky AX_1 a X_2B mají stejnou délku. Obě dvě jsou pak upraveny podle stejného principu (vyjmutí prostřední třetiny). Získané čtyři úsečky se opět upraví podle daného principu.

Opakování zmíněného postupu je naznačeno na obrázku 33. Délky jednotlivých vytvořených úseček jsou po prvním kroku $\frac{1}{3}$ původní délky, po druhém kroku $\frac{1}{9}$, po třetím $\frac{1}{27}$, atd. Neustálým opakováním postupu se tak délka úseček bude blížit k nule. Nezůstane tak žádný souvislý kus úsečky, proto tato množina dostala označení *diskontinuum*. Přestože ve výsledné množině nezůstane žádný souvislý kus, zůstane zde

Obrázek 33. Postupné vytváření Cantorova diskontinua

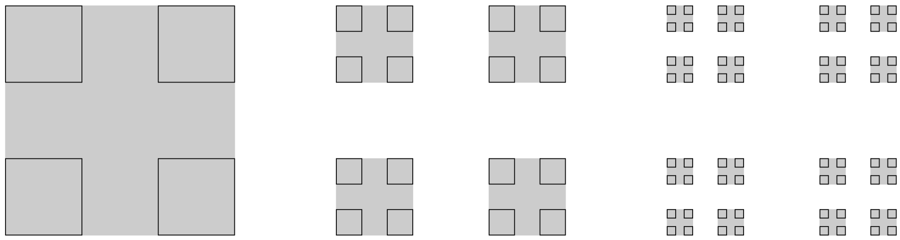
nekonečné množství bodů: krajní body, následně body, kterými byla úsečka rozdělena na třetiny, poté body, kterými byly vzniklé úsečky rozděleny na třetiny, atp. Tyto body, které v množině zůstanou, je možné popsat [BlaVoj]. Body na úsečce rozdělené na třetiny je možné označit pomocí symbolů ♡, ♣ a ♠ tak, že bodům v první třetině bude přiřazen znak ♡, v druhé třetině ♣ a ve třetí třetině ♠. Body úseček vzniklých úseček v dalším kroku je možné popsat stejným způsobem. Pro každý bod tak vzniká nekonečná posloupnost znaků ♡, ♣, ♠, která jej popisuje, jak ukazuje obrázek 34. Z postupu tvorby Cantorova diskontinua je zřejmé, že ve



Obrázek 34. Označování částí Cantorova diskontinua

výsledné množině nezůstanou body, které mají v označení symbol ♣. Znamená to tedy, že všechny body, které zůstanou, bude možné popsat nekonečnou posloupností, ve které budou pouze znaky ♡ a ♠. Každá taková posloupnost pak bude popisovat jeden bod Cantorova diskontinua. Dosazením číslice 0 za znak ♡ a číslice 1 za znak ♠ vzniknou všechny možné posloupnosti 0 a 1. Jelikož právě všechny nekonečné posloupnosti 1 a 0 popisují všechny podmnožiny množiny $\mathbb{N}$, je mohutnost množiny bodů Cantorova diskontinua stejná jako mohutnost $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \mathfrak{c}$.

Cantorův prach. Dvourozměrnou obdobou Cantorova diskontinua je Cantorův prach. Základním útvarem je zde čtverec, který je rozdělen na devět shodných čtverců. Z nich jsou ponechány pouze čtverce v rozích, které se budou dále dělit podle stejného schématu (obrázek 35.). Množina bodů, které tvoří tento útvar, je

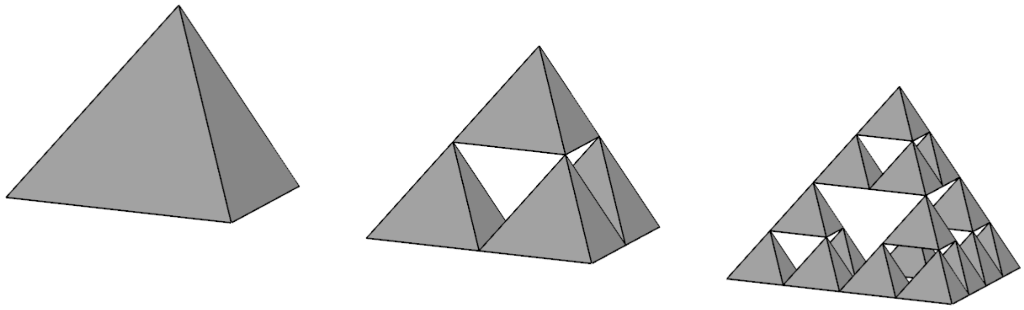


Obrázek 35. Postupné vytváření Cantorova prachu

nekonečná a ekvivalentní množině všech reálných čísel. Při každém dělení je možné přidělit bodům každého čtverce označení 00, 01, 10 nebo 11. Neustálým dělením tak bude každý bod, který v útvaru zůstane, popsán nekonečnou posloupností tvořenou 0 a 1. Naopak každá taková posloupnost bude popisovat bod, protože ji lze rozkouskovat na dvojice 1 a 0 seřazené za sebou (všechny možnosti zmíněných dvojic jsou právě 00, 01, 10 a 11). Zdůvodnění mohutnosti množiny bodů tvořících Cantorův prach je tak obdobné jako u Cantorova diskontinua.

Sierpinského čtyřstěn. Ukázkou třírozměrného objektu útvar, který jako první popsal polský matematik Wacław Sierpiński. Je jím Sierpinského čtyřstěn. Styl vytváření tohoto útvaru je obdobný jako u předchozích uvedených útvarů. Základním tělesem je zde čtyřstěn neboli pravidelný trojboký jehlan, jehož všechny stěny i podstava jsou rovnostranné trojúhelníky. Tento čtyřstěn je rozdělen čtyřmi řezy procházejícími vždy třemi středy hran tak, že jsou odděleny jednotlivé vrcholy, jak ukazuje obrázek 36. Následně budou použity čtyři čtyřstěny s poloviční délkou hrany obsahující vrcholy původního čtyřstěnu, zbytek původního čtyřstěnu je vyjmut. Všechny čtyři čtyřstěny jsou pak upraveny podle stejného principu, atd. Popis bodů umístěných v jednotlivých čtyřstěnech je možný pomocí stejného označení jako v případě Cantorova prachu, tedy 00, 01, 10 nebo 11, z čehož opět vyplývá mohutnost množiny bodů, které tento objekt tvoří.

Další útvary. Uvedené útvary jsou klasickými příklady jednoduchých fraktálů neboli útvarů, které jsou tzv. soběpodobné. Soběpodobnost útvaru je skutečnost, kdy výřez původního útvaru má tvar podobný celku. Například u Sierpinského čtyřstěnu je každý ze čtyř základních podčtyřstěnů kopií původního Sierpinského čtyřstěnu.



Obrázek 36. Sierpinského čtyřstěn

3.7 Další nekonečná kardinální čísla

Jelikož nejmenším nekonečným kardinálním číslem je $\aleph_0$ a větším pak $\mathfrak{c}$, objevuje se otázka, zda existují ještě další nekonečná kardinální čísla. Skok od $\aleph_0$ k $\mathfrak{c}$ byl proveden přes potenční množinu. Protože Cantorova věta říká

$$2^a > a$$

pro libovolné kardinální číslo a, je možné ji využít také pro vytvoření nového, mnohem „nekonečnější“ čísla $\mathfrak{c}_1$ k číslu $\mathfrak{c}$:

$$\mathfrak{c}_1 = 2^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c}.$$

Tímto způsobem lze najít ke každému, byť nekonečnému, kardinálnímu číslu kardinální číslo větší.

Otázkou zůstává, zda postup přes potenční množinu je jediný možný, tedy jestli například mezi kardinálními čísly $\aleph_0$ a $\mathfrak{c}$ neexistuje nějaké kardinální číslo x takové, že by platilo

$$\aleph_0 < x < \mathfrak{c}.$$

Matematická teorie zvaná *hypotéza kontinua* říká, že takové kardinální číslo mezi $\aleph_0$ a $\mathfrak{c}$ neexistuje. Rozšířením tohoto tvrzení je pak *zobecněná hypotéza kontinua*, která tvrdí, že neexistuje žádný jiný způsob přechodu k většímu nekonečnému kardinálnímu číslu než přes potenční množinu. Původní hypotéza kontinua je tak vlastně jen speciálním případem, který se zaměřil pouze na přechod od $\aleph_0$ k $\mathfrak{c}$. Zda tato hypotéza platí nebo ne, patřilo dlouhou dobu k velkým nerozhodnutým problémům matematiky. Současná matematika již zná odpověď. Onou odpovědí je však to, že tuto hypotézu nelze v teorii množin ani dokázat, ani vyvrátit.

4 Aritmetika kardinálních čísel

Protože se pro zápis konečných kardinálních čísel užívají přirozená čísla, lze očekávat, že budou mezi kardinálními čísly definovány základní aritmetické operace sčítání, násobení a umocňování [BlaVoj]. Pokud by zmíněné operace byly zavedeny jen z hlediska přirozených čísel, nebylo by možné tento působ aplikovat na nekonečná kardinální čísla, která již nejsou přirozenými čísly vyjádřitelná, proto se při definování součtu, součinu a mocniny užívá pouze množinových operací. Součet se zavádí pomocí množinového sjednocení, součin pomocí kartézského součinu množin a mocnina pomocí zobrazení množin. Takto vytvořené operace jsou použitelné i pro práci s nekonečnými kardinálními čísly.

4.1 Součet

Jak již bylo uvedeno, sčítání dvou kardinálních čísel se zavádí pomocí sjednocení množin, jejichž mohutnost tato čísla vyjadřují. Například sjednocením množin $\{a, b\}$ (kard. číslo 2) a $\{c, d, e\}$ (kard. číslo 3) bude množina $\{a, b, c, d, e\}$ s kardinálním číslem 5, tedy $2 + 3 = 5$.

$$2 + 3 = |\{a, b\} \cup \{c, d, e\}| = |\{a, b, c, d, e\}| = 5$$

Tento způsob však má jedno úskalí, které ukazuje například situace sjednocení množin $\{a, b, c\}$ a $\{c, d, e\}$. Obě mají kardinální číslo 3, ale obě obsahují prvek c, proto jejich sjednocením bude množina $\{a, b, c, d, e\}$, která má kardinální číslo 5, přičemž $3 + 3 = 6$.

$$|\{a, b, c\} \cup \{c, d, e\}| = |\{a, b, c, d, e\}| \neq 6$$

Z příkladu je tak zřejmé, že množiny použité pro sjednocení nemohou být libovolné. Aby při sjednocení nenastala situace podobná uvedenému příkladu, je nutné sjednocovat množiny, které neobsahují *žádné* společné prvky.

Tohoto stavu je možné dosáhnout tím, že z jednotlivých prvků původních množiny vytvoří dvojice, které na prvním místě budou obsahovat původní prvek, ze kterého byly vytvořeny, a na druhém místě to bude symbol určující množinu, ze které pochází původní prvek. Dvojice pocházející z jedné původní množiny je pak možné opět seskupit do množiny. Takto vytvořená množina dvojic bude mít stejnou mohutnost, jako měla původní množina, neboť z každého prvku původní množiny vznikla právě jedna dvojice. Například z množin

$$X = \{a, b, c\} \quad \text{a} \quad Y = \{c, d, e\}$$

budou vytvořeny dvě množiny dvojic

$$\{[a, X], [b, X], [c, X]\} \qquad \{[c, Y], [d, Y], [e, Y]\}.$$

Vytvořené množiny dvojic lze bez problémů sjednotit a získat tak správný výsledek sčítání jejich kardinálních čísel, neboť díky přítomnosti druhého prvku ve dvojici v nich neexistují dva stejné prvky (dvě stejné dvojice). Sjednocením uvedených množin dvojic je tak množina

$$\{[a, X], [b, X], [c, X], [c, Y], [d, Y], [e, Y]\},$$

která má kardinální číslo 6. Tedy platí $3 + 3 = 6$.

$$\begin{aligned} 3 + 3 &= |\{[a, X], [b, X], [c, X]\} \cup \{[c, Y], [d, Y], [e, Y]\}| = \\ &= |\{[a, X], [b, X], [c, X], [c, Y], [d, Y], [e, Y]\}| = 6 \end{aligned}$$

Uvedený postup je univerzální a lze jím upravit libovolné dvě množiny tak, aby neobsahovaly žádné společné prvky. Proto se sčítání kardinálních čísel zavádí právě s jeho pomocí.

Definice 7. *Součtem kardinálních čísel příslušících množinám X a Y nazýváme kardinální číslo množiny $X_1 \cup Y_1$, kde X_1 a Y_1 jsou upravené množiny X a Y tak, aby neobsahovaly stejné prvky.*

Takto vytvořený součet má pro libovolná tři kardinální čísla α, β, γ a kardinální číslo 0 vlastnosti, které lze intuitivně předpokládat, přičemž zdůvodnění vychází přímo z vlastností sjednocení množin. Další část této kapitoly se těmito vlastnostmi postupně zabývá.

a) $\boxed{\alpha + \beta = \beta + \alpha}$
   Tato vlastnost (komutativita sčítání) vychází z faktu, že sjednocením $X \cup Y$ nebo $Y \cup X$ je jedna a táž množina[30]. Uvedené sjednocení tak reprezentují součty $\alpha + \beta$ a $\beta + \alpha$.

b) $\boxed{(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma) = \alpha + \beta + \gamma}$
   Uvedená vlastnost (asociativita sčítání) uvádí, že při sčítání více kardinálních čísel není nutné brát ohled na pořadí sčítanců. Vychází se zde opět z podobné vlastnosti platné pro sjednocení více množin, jelikož při tomto úkonu také nezáleží na pořadí, ve kterém se množiny sjednocují $X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z$.

[30]Předpokládá se zde, že množiny X a Y nemají žádné společné prvky, neboť v případě, že by společné prvky měly, výše uvedeným postupem je lze jednoduše upravit.

c) $\boxed{\alpha + 0 = \alpha}$
Přičítání nuly k libovolnému kardinálnímu číslu vyjadřuje sjednocení množiny (s mohutností určenou daným kardinálním číslem) s prázdnou množinou. Je zřejmé, že výsledkem bude opět původní množina, kardinální číslo se tak nezmění.

d) $\boxed{\alpha \leq \beta \quad \Rightarrow \alpha + \gamma \leq \beta + \gamma}$
Pro libovolná tři kardinální čísla α, β, γ, přičemž platí $\alpha \leq \beta$, je možné se ptát, zda přičtení γ k oběma stranám nerovnice tuto nerovnici ovlivní. Pro libovolné množiny X, Y, Z po řadě příslušící k daným kardinálním číslům tak nerovnost $\alpha \leq \beta$ vyjadřuje vztah $X \subseteq Y$. Úpravy jednotlivých stran nerovnice přičtením čísla γ vyjadřují sjednocení $X \cup Z$ a $Y \cup Z$. Jelikož jsou všechny prvky množiny X obsaženy v množině Y, prvky sjednocení $X \cup Z$ náleží buď do množiny Y (pocházející z X) nebo do množiny Z, jsou tedy prvky množiny sjednocení $Y \cup Z$. Množina $X \cup Z$ je tak podmnožinou množiny $Y \cup Z$, což vyjadřuje nerovnice $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$. Například nechť kardinálním číslům 1, 2, 3 jsou po řadě přiřazeny množiny

$$X = \{a\},\ Y = \{a, b\} \text{ a } Z = \{\heartsuit, \clubsuit, \spadesuit\}.$$

Pak nerovnost $1 \leq 2$ vyjadřuje

$$\{a\} \subseteq \{a, b\}.$$

Součty $1 + 3$ a $2 + 3$ vyjadřují sjednocení

$$\{a\} \cup \{\heartsuit, \clubsuit, \spadesuit\} = \{a, \heartsuit, \clubsuit, \spadesuit\}, \quad \{a, b\} \cup \{\heartsuit, \clubsuit, \spadesuit\} = \{a, b, \heartsuit, \clubsuit, \spadesuit\}.$$

Zřejmě však platí

$$\{a, \heartsuit, \clubsuit, \spadesuit\} \subseteq \{a, b, \heartsuit, \clubsuit, \spadesuit\},$$

což vyjadřuje

$$1 + 3 \leq 2 + 3.$$

Vlastnosti součtu pro kardinální čísla nekonečných množin[31] se mohou vymykat intuitivnímu pojetí, neboť analogické vlastnosti, které by platily pro součet přirozených čísel, neexistují. První vlastnost platnou pro číslo $\aleph_0$ vyplývá z příkladu Hilbertova hotelu v kapitole 3.3.1, kde se jednalo o ubytování jednoho nového hosta $h_\clubsuit$ v hotelu obsazeného hosty označené přirozenými čísly 1, 2, 3, … Z množinového

[31] Všechny dále uváděné příklady součtu kardinálních čísel nekonečných množin se budou zabývat pouze kardinálními čísly $\aleph_0$ a $\mathfrak{c}$, protože se jedná o základní dvě nekonečná kardinální čísla.

pohledu jde v uvedeném příkladě o sjednocení množiny přirozených čísel a jednoprvkové množiny $\{h_\clubsuit\}$.

$$\{1,2,3,4,\dots\} \cup \{h_\clubsuit\}$$

Nová množina $\{h_\clubsuit,1,2,3,4,\dots\}$ je však ekvivalentní s množinou přirozených čísel, neboť prvky této množiny je možné přirozenými čísly označit, ona nová množina má tak stejné kardinální číslo jako množina přirozených čísel. Jelikož byl součet kardinálních čísel definován právě pomocí sjednocení množin s danou mohutností, lze zmíněný příklad zapsat jako

$$\aleph_0 + 1 = |\{1,2,3,4,\dots\} \cup \{h_\clubsuit\}| = |\{h_\clubsuit,1,2,3,4,\dots\}| = \aleph_0.$$

Obdobně lze ze stejného důvodu (ubytování konečného počtu dalších hostů – množiny s kardinálním číslem n) psát:

$$\aleph_0 + n = \aleph_0.$$

Na tuto vlastnost je třeba dávat pozor obzvláště v nerovnostech, ve kterých se pracuje právě s kardinálním číslem $\aleph_0$. Například přestože číslo 3 jistě není menší nebo rovno 2,

$$3 \nleq 2,$$

platí

$$3 + \aleph_0 \leq 2 + \aleph_0,$$

protože $3 + \aleph_0 = \aleph_0$ a také $2 + \aleph_0 = \aleph_0$. Nastalá situace tak popisuje stav $\aleph_0 \leq \aleph_0$, což platí vždy, jelikož nastává právě ona rovnost.

Další vlastnost součtu, ve kterém se objevuje číslo $\aleph_0$, vychází z definice množiny celých čísel v kapitole 3.3.2. Zde bylo použito sloučení dvou nekonečných posloupností – přirozených čísel a záporných čísel s nulou. Z hlediska množin se jedná o sjednocení dvou nekonečných spočetných množin, přičemž obě tyto množiny mají mohutnost vyjádřitelnou číslem $\aleph_0$.

$$\{1,2,3,4,5,\dots\} \cup \{0,-1,-2,-3,-4,\dots\}$$

Výslednou množinu bylo možné opět očíslovat přirozenými čísly, její kardinální číslo tedy bylo $\aleph_0$. Jelikož uvedené množiny nemají žádné společné prvky, lze význam tohoto sjednocení na základě definice součtu kardinálních čísel psát:

$$\begin{aligned} \aleph_0 + \aleph_0 &= |\{1,2,3,4,5,\dots\} \cup \{0,-1,-2,-3,-4,\dots\}| = \\ &= |\{0,1,-1,2,-2,3,-3,\dots\}| = \aleph_0 \end{aligned}$$

Případné další rozšíření uvedeného součtu na $\aleph_0 + \aleph_0 + \aleph_0$ lze řešit pomocí základní vlastnosti součtu kardinálních čísel

$$\aleph_0 + \aleph_0 + \aleph_0 = (\aleph_0 + \aleph_0) + \aleph_0 = (\aleph_0) + \aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$$

Pro konečné nenulové číslo n tak lze tuto úvahu zobecnit

$$\underbrace{\aleph_0 + \aleph_0 + \aleph_0 + \cdots + \aleph_0}_{n\text{-krát}} = \underbrace{(\aleph_0 + \aleph_0) + \aleph_0 + \cdots + \aleph_0}_{n\text{-krát}} =$$
$$= \underbrace{(\aleph_0) + \aleph_0 + \cdots + \aleph_0}_{(n-1)\text{-krát}} = \cdots = \aleph_0.$$

Uvedené vlastnosti nerovností mezi kardinálními čísly jsou ukázány pouze pro neostrou nerovnost $\leq$, pro ostrou nerovnost však již platit nemusí, což ilustruje právě příklad přičítání hodnoty $\aleph_0$ k oběma stranám nerovnice $2 < \aleph_0$. Na levé straně nerovnosti by se totiž objevil součet

$$2 + \aleph_0 = \aleph_0$$

a na pravé straně

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0.$$

Na obou stranách nerovnice se tak objevily stejné hodnoty, což ale použité znaménko nerovnosti vylučuje.

$$2 + \aleph_0 \not< \aleph_0 + \aleph_0$$
$$\aleph_0 \not< \aleph_0$$

Uvažovanou úpravu (přičtení hodnoty $\aleph_0$ k oběma stranám nerovnice) tak nelze provést.

Vlastnosti součtu v případě dalšího nekonečného kardinálního čísla $\mathfrak{c}$ jsou obdobné vlastnostem součtu, ve kterých se vyskytuje $\aleph_0$, s tím rozdílem, že jejich odůvodnění vychází z geometrického pojetí mohutnosti kontinua pomocí úseček (intervalů). Jelikož kardinální číslo $\mathfrak{c}$ odpovídá mohutnosti libovolného intervalu, lze použít interval bez krajních bodů, například $(0; 1)$. Přidáním jednoprvkové množiny obsahující jeden krajní bod (například bod 1) uvedeného intervalu právě ke zmíněnému intervalu vznikne interval $(0; 1\rangle$, jehož mohutnost je stále $\mathfrak{c}$. Vzhledem k tomu, že ono přidání vyjadřuje sjednocení množiny bodů daného intervalu a jednoprvkové množiny, přičemž tento prvek v intervalu neleží, vyjadřuje tento postup součet kardinálního čísla $\mathfrak{c}$ a čísla 1.

$$\mathfrak{c} + 1 = |\{1\} \cup (0; 1)\,| = |\,(0; 1\rangle\,| = \mathfrak{c}$$

Jelikož libovolné přirozené číslo n je možno rozepsat jako $\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n\text{-krát}}$, je také součet $\mathfrak{c}+n$ rozepsat jako $\mathfrak{c}+\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n\text{-krát}}$. Postupným užitím závorek je tak možné dojít k závěru, že

$$\mathfrak{c}+1+1+\cdots+1=(\mathfrak{c}+1)+1+\cdots+1=(\mathfrak{c})+1+\cdots+1=\cdots=\mathfrak{c}.$$

Pomocí intervalů je také zavedeno sčítání $\mathfrak{c}+\mathfrak{c}$. Pro intervaly $\langle 0;1)$ a $\langle 1;2)$ platí, že oba mají mohutnost $\mathfrak{c}$ a neobsahují žádné společné body. Jejich sjednocení tak vyjadřuje uvedený součet $\mathfrak{c}+\mathfrak{c}$, přičemž nově vzniklý interval $\langle 0;2)$ má opět mohutnost kontinua.

$$\mathfrak{c}+\mathfrak{c}=\mathfrak{c}$$

Analogicky ke konstrukci součtu $\underbrace{\aleph_0+\aleph_0+\cdots+\aleph_0}_{n\text{-krát}}$ lze zkonstruovat součet

$$\underbrace{\mathfrak{c}+\mathfrak{c}+\mathfrak{c}+\cdots+\mathfrak{c}}_{n\text{-krát}}=\underbrace{(\mathfrak{c}+\mathfrak{c})+\mathfrak{c}+\cdots+\mathfrak{c}}_{n\text{-krát}}=\underbrace{(\mathfrak{c})+\mathfrak{c}+\cdots+\mathfrak{c}}_{(n-1)\text{-krát}}=\cdots=\mathfrak{c}.$$

Odlišně se však zavádí součet $\mathfrak{c}+\aleph_0$. V tomto případě se vychází ze dvou platných nerovností pro libovolné přirozené n

$$n\leq\aleph_0 \quad \text{a současně} \quad \aleph_0\leq\mathfrak{c}.$$

Podle uvedených vlastností nerovnosti kardinálních čísel lze k oběma stranám obou nerovností přičíst číslo $\mathfrak{c}$.

$$n+\mathfrak{c}\leq\aleph_0+\mathfrak{c} \quad \text{a současně} \quad \aleph_0+\mathfrak{c}\leq\mathfrak{c}+\mathfrak{c}$$

Vzhledem k právě zavedenému součtu $\mathfrak{c}+n$ a $\mathfrak{c}+\mathfrak{c}$ se nerovnosti upraví na

$$\mathfrak{c}\leq\aleph_0+\mathfrak{c} \quad \text{a současně} \quad \aleph_0+\mathfrak{c}\leq\mathfrak{c},$$

z čehož plyne, že

$$\mathfrak{c}+\aleph_0=\mathfrak{c}.$$

4.2 Součin

Z logiky násobení dvou přirozených čísel například $2\cdot 3$ plyne, že uvedený součin je možno rozepsat na součet $3+3$ nebo také $2+2+2$. Jelikož hodnoty 2 a 3 vyjadřují kardinální čísla množin $\{\heartsuit,\clubsuit\}$ a $\{a,b,c\}$, je možné uvedené sčítání zapsat jako sjednocení tří kopií množiny $\{\heartsuit,\clubsuit\}$ nebo sjednocení dvou kopií množiny $\{a,b,c\}$. Ve smyslu definice součtu musí být zmíněné kopie upraveny tak, aby neobsahovaly žádné společné prvky. Protože kopií jedné množiny je stejné množství jako je prvků druhé množiny, je možné k rozlišení prvků jednotlivých kopií použít právě prvky druhé množiny:

$$\boxed{\begin{array}{c}{[\heartsuit,a]}\\ {[\clubsuit,a]}\end{array}} \cup \boxed{\begin{array}{c}{[\heartsuit,b]}\\ {[\clubsuit,b]}\end{array}} \cup \boxed{\begin{array}{c}{[\heartsuit,c]}\\ {[\clubsuit,c]}\end{array}} \qquad \text{nebo} \qquad \boxed{\begin{array}{c}{[a,\heartsuit]}\\ {[b,\heartsuit]}\\ {[c,\heartsuit]}\end{array}} \cup \boxed{\begin{array}{c}{[a,\clubsuit]}\\ {[b,\clubsuit]}\\ {[c,\clubsuit]}\end{array}}$$

Výsledné sjednocení je možné zapsat do přehledné tabulky:

$$\boxed{\begin{array}{ccc}{[\heartsuit,a]} & {[\heartsuit,b]} & {[\heartsuit,c]}\\ {[\clubsuit,a]} & {[\clubsuit,b]} & {[\clubsuit,c]}\end{array}} \qquad \text{nebo} \qquad \boxed{\begin{array}{cc}{[a,\heartsuit]} & {[a,\clubsuit]}\\ {[b,\heartsuit]} & {[b,\clubsuit]}\\ {[c,\heartsuit]} & {[c,\clubsuit]}\end{array}}$$

Vzhledem k tomu, že v uvedených tabulkách jsou přítomny všechny možné dvojice prvků množin $\{\heartsuit,\clubsuit\}$ a $\{a,b,c\}$, vyjadřují kartézský součin $\{\heartsuit,\clubsuit\} \times \{a,b,c\}$ a $\{a,b,c\} \times \{\heartsuit,\clubsuit\}$:

		$\{a,b,c\}$		
		a	b	c
$\{\heartsuit,\clubsuit\}$	$\heartsuit$	$[\heartsuit,a]$	$[\heartsuit,b]$	$[\heartsuit,c]$
	$\clubsuit$	$[\clubsuit,a]$	$[\clubsuit,b]$	$[\clubsuit,c]$

		$\{\heartsuit,\clubsuit\}$	
		$\heartsuit$	$\clubsuit$
$\{a,b,c\}$	a	$[a,\heartsuit]$	$[a,\clubsuit]$
	b	$[b,\heartsuit]$	$[b,\clubsuit]$
	c	$[c,\heartsuit]$	$[c,\clubsuit]$

Mohutnost obou vzniklých množin je totožná, rovna 6. Ze způsobu vytváření výsledné množiny lze říci, že pro libovolná přirozená čísla α a β bude platit

$$\alpha \cdot \beta = \underbrace{\alpha + \alpha + \cdots + \alpha}_{\beta\text{-krát}} = \underbrace{\beta + \beta + \cdots + \beta}_{\alpha\text{-krát}}.$$

Proto zavedením součinu dvou kardinálních čísel jako mohutnosti kartézského součinu zůstává zachována intuitivní práce s přirozenými čísly.

Definice 8. *Součinem dvou kardinálních čísel příslušících množinám X a Y bude kardinální číslo kartézského součinu $X \times Y$.*

Obdobně jako u součtu dvou kardinálních čísel je nutné se přesvědčit, zda platí intuitivně předpokládané vlastnosti tohoto součinu. Následující text tak bude těmito vlastnostmi zabývat pro libovolná kardinální čísla α, β, γ.

a) $\boxed{\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha}$
Uvedená vlastnost (komutativita součinu) vychází ze způsobu zavedení kartézského součinu $X \times Y$. Ten je definován jako množina všech dvojic, kde na prvním místě je prvek z X a na druhém místě Y. Záměnou umístění prvků ve

dvojicích se tak množina stává kartézským součinem $Y \times X$. Mohutnost obou množin je stejná, neboť nebyly přidány ani ubrány žádné dvojice. Ukázkou zmíněné vlastnosti je úvodní příklad této kapitoly, $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$.

b) $\boxed{\alpha \cdot 1 = \alpha}$
Z pohledu množin je zde vytvářen kartézský součin množiny X s jednoprvkovou množinou. Množina vytvořených dvojic je ekvivalentní s množinou X, protože každému prvku množiny X je přiřazena právě jedna dvojice, kterou tvoří prvek množiny X a jediný prvek zmíněné jednoprvkové množiny. Kardinální číslo vytvořené množiny dvojic je tak stejné jako kardinální číslo množiny X. Jako příklad lze uvést součin $3 \cdot 1$, který lze reprezentovat množinami $\{a, b, c\}$ a $\{\clubsuit\}$:

		$\clubsuit$
$\{a, b, c\}$	a	$[a, \clubsuit]$
	b	$[b, \clubsuit]$
	c	$[c, \clubsuit]$

c) $\boxed{(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma}$
Jelikož prvky kartézského součinu množin $X \times Y$ odpovídajícího součinu $\alpha \cdot \beta$ jsou uspořádané dvojice $[x_i, y_i]$, přičemž prvek x_i je libovolný prvek množiny X a prvek y_i množiny Y, jsou prvky kartézského součinu $(X \times Y) \times Z$ odpovídajícího součinu $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$ uspořádané dvojice $[[x_i, y_i], z_i]$, prvek z_i je libovolný prvek množiny Z. Každou uvedenou dvojici je možné nahradit trojicí $[x_i, y_i, z_i]$, neboť přiřazení trojice dvojici i zpětné přiřazené dvojice trojici je jednoznačné. Obdobným způsobem konstrukce jsou získány prvky kartézského součinu $X \times (Y \times Z)$, dvojice $[x_i, [y_i, z_i]]$. Těmto dvojicím lze také jednoznačně přiřadit trojici $[x_i, y_i, z_i]$ a libovolné trojici opětovně dvojici, z čehož vyplývá, že množství dvojic typu $[[x_i, y_i], z_i]$ je stejné jako množství trojic $[x_i, y_i, z_i]$ a dvojic typu $[x_i, [y_i, z_i]]$, proto nezáleží na uzávorkování součinu více kardinálních čísel, neboť kartézské součiny množin vzniklé různým způsobem uzávorkování jsou navzájem ekvivalentní (mají stejná kardinální čísla). Právě uvedená vlastnost se nazývá asociativita součinu. Příkladem může být součin $(2 \cdot 3) \cdot 2$, kde uvedená kardinální čísla jsou pořadě reprezentována množinami $\{a, b\}$, $\{c, d, e\}$ a $\{\heartsuit, \clubsuit\}$.

		$\{c,d,e\}$		
		c	d	e
$\{a,b\}$	a	$[a,c]$	$[a,d]$	$[a,e]$
	b	$[b,c]$	$[b,d]$	$[b,e]$

		$\{\heartsuit,\clubsuit\}$	
		$\heartsuit$	$\clubsuit$
$\{a,b\}\times\{c,d,e\}$	$[a,c]$	$[a,c,\heartsuit]$	$[a,c,\clubsuit]$
	$[a,d]$	$[a,d,\heartsuit]$	$[a,d,\clubsuit]$
	$[a,e]$	$[a,e,\heartsuit]$	$[a,e,\clubsuit]$
	$[b,c]$	$[b,c,\heartsuit]$	$[b,c,\clubsuit]$
	$[b,d]$	$[b,d,\heartsuit]$	$[b,d,\clubsuit]$
	$[b,e]$	$[b,e,\heartsuit]$	$[b,e,\clubsuit]$

Uzávorkováním $2\cdot(3\cdot 2)$ se však výsledek nezmění.

		$\{\heartsuit,\clubsuit\}$	
		$\heartsuit$	$\clubsuit$
$\{c,d,e\}$	c	$[c,\heartsuit]$	$[c,\clubsuit]$
	d	$[d,\heartsuit]$	$[d,\clubsuit]$
	e	$[e,\heartsuit]$	$[e,\clubsuit]$

		$\{c,d,e\}\times\{\heartsuit,\clubsuit\}$					
		$[c,\heartsuit]$	$[c,\clubsuit]$	$[d,\heartsuit]$	$[d,\clubsuit]$	$[e,\heartsuit]$	$[e,\clubsuit]$
$\{a,b\}$	a	$[a,c,\heartsuit]$	$[a,c,\clubsuit]$	$[a,d,\heartsuit]$	$[a,d,\clubsuit]$	$[a,e,\heartsuit]$	$[a,e,\clubsuit]$
	b	$[b,c,\heartsuit]$	$[b,c,\clubsuit]$	$[b,d,\heartsuit]$	$[b,d,\clubsuit]$	$[b,e,\heartsuit]$	$[b,e,\clubsuit]$

Výsledkem obou způsobů uzávorkování je číslo 12.

d) $\boxed{(\alpha+\beta)\cdot\gamma=(\alpha\cdot\gamma)+(\beta\cdot\gamma)}$

Zde se využívá možnosti kartézského součinu dvou množin $X\times Y$ rozdělit všechny vzniklé dvojice podle obsažených prvků množiny X a jejich náležení v podmnožinách množiny X. Kartézský součin $X_1\times Y$ podmnožiny X_1 množiny X a množiny Y je jistě podmnožinou kartézského součinu $X\times Y$ obsahujícího všechny dvojice prvků z uvedených množin, neboť dvojice součinu $X_1\times Y$ jsou tvořeny prvky množiny X a prvky množiny Y. Pro dvě podmnožiny X_1 a X_2 množiny X takové, že nemají žádný společný prvek a jejich sjednocení vytvoří zpět celou množinu $X=X_1\cup X_2$, tvoří sjednocení kartézských součinů $X_1\times Y$ a $X_2\times Y$ celý kartézský součin $X\times Y$. Libovolný prvek množiny X náleží buď do podmnožiny X_1, nebo do podmnožiny X_2, náleží libovolná dvojice s tímto prvkem do kartézského součinu $X_1\times Y$ nebo $X_2\times Y$.

$$(X_1\cup X_2)\times Y=(X_1\times Y)\cup(X_2\times Y)$$

Například kartézský součin $\{a, b, c, d, e\} \times \{1, 2\}$ lze rozdělit na kartézské součiny $\{a, b, c\} \times \{1, 2\}$ a $\{d, e\} \times \{1, 2\}$.

		$\{1, 2\}$	
		1	2
	a	$[a, 1]$	$[a, 2]$
	b	$[b, 1]$	$[b, 2]$
$\{a, b, c, d, e\}$	c	$[c, 1]$	$[c, 2]$
	d	$[a, 1]$	$[d, 2]$
	e	$[a, 1]$	$[e, 2]$

		$\{1, 2\}$	
		1	2
	a	$[a, 1]$	$[a, 2]$
$\{a, b, c\}$	b	$[b, 1]$	$[b, 2]$
	c	$[c, 1]$	$[c, 2]$

		$\{1, 2\}$	
		1	2
$\{d, e\}$	d	$[d, 1]$	$[d, 2]$
	e	$[e, 1]$	$[e, 2]$

Součet kardinálních čísel $(\alpha + \beta)$ tak odpovídá sjednocení množin X_1 a X_2 (X_1 a X_2 nemají žádný společný prvek), vznik množiny X a následný součin s číslem γ pak odpovídá kartézskému součinu $(X_1 \cup X_2) \times Y = X \times Y$. Naopak součinu $(\alpha \cdot \gamma)$ odpovídá kartézský součin $X_1 \times Y$ a součinu $\beta \cdot \gamma$ kartézský součin $X_2 \times Y$, přičemž jejich sjednocení je rovno $(X_1 \times Y) \cup (X_2 \times Y) = X \times Y$. Jelikož si odpovídají množiny vzniklé oběma způsoby, odpovídají si i jejich kardinální čísla, což ukazuje platnost uvedené vlastnosti součinu.

e) $\boxed{\alpha \leq \beta \quad \Rightarrow \quad \alpha \cdot \gamma \leq \beta \cdot \gamma}$

Nechť kardinálním číslům α, β, γ po řadě přísluší množiny X, Y, Z. Výchozí nerovnost vyjadřuje vztah $X \subseteq Y$, násobení $\alpha \cdot \gamma$ kartézský součin $X \times Z$ a násobení $\beta \cdot \gamma$ kartézský součin $Y \times Z$. Jelikož kartézský součin $Y \times Z$ je množinou všech dvojic prvků tvořenou prvkem množiny Y a prvkem množiny Z, zahrnuje tento součin v sobě také množinu všech dvojic tvořenou prvkem podmnožiny Y (tedy množiny X) a prvkem množiny Z. Kartézský součin $X \times Z$ tak tvoří podmnožinu kartézského součinu $Y \times Z$,

$$(X \times Z) \subseteq (Y \times Z).$$

Ze zmíněného vztahu následně vyplývá platnost nerovnosti $\alpha \cdot \gamma \leq \beta \cdot \gamma$. V konkrétním případě lze vycházet například z nerovnosti $1 \leq 2$, přičemž obě strany nerovnosti budou násobeny číslem 3. Pro uvedená kardinální čísla lze použít množiny $\{x\}$, $\{x, y\}$ a $\{\heartsuit, \clubsuit, \spadesuit\}$. Zjevně platí, že $\{x\} \subseteq \{x, y\}$. Kartézské součiny příslušící součinům $1 \cdot 3$ a $2 \cdot 3$ budou vypadat následovně:

	$\{\heartsuit, \clubsuit, \spadesuit\}$		
	$\heartsuit$	$\clubsuit$	$\spadesuit$
x	$[x, \heartsuit]$	$[x, \clubsuit]$	$[x, \spadesuit]$

		$\{\heartsuit, \clubsuit, \spadesuit\}$		
		$\heartsuit$	$\clubsuit$	$\spadesuit$
$\{x, y\}$	x	$[x, \heartsuit]$	$[x, \clubsuit]$	$[x, \spadesuit]$
	x	$[y, \heartsuit]$	$[y, \clubsuit]$	$[y, \spadesuit]$

Z uvedených tabulek vyplývá, že kartézský součin $\{x\} \times \{\heartsuit, \clubsuit, \spadesuit\}$ tvoří podmnožinu kartézského součinu $\{x, y\} \times \{\heartsuit, \clubsuit, \spadesuit\}$,

$$(\{x\} \times \{\heartsuit, \clubsuit, \spadesuit\}) \subseteq (\{x, y\} \times \{\heartsuit, \clubsuit, \spadesuit\}),$$

což vyjadřuje nerovnost $1 \cdot 3 \leq 2 \cdot 3$, neboli $3 \leq 6$.

Obdobně jako v předchozí kapitole se bude následující část textu zabývat speciálními vlastnostmi součinu pro nekonečná kardinální čísla. Při násobení kardinálního čísla $\aleph_0$ nastává situace, kdy tabulka příslušící kartézskému součinu reprezentujícímu zmíněný součin je nekonečná. Například součin $2 \cdot \aleph_0$ je možné vyjádřit jako kartézský součin množin $\{\heartsuit, \clubsuit\}$ a $\mathbb{N}$.

		$\{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$					
		1	2	3	4	5	$\dots$
$\{\heartsuit, \clubsuit\}$	$\heartsuit$	$[\heartsuit, 1]$	$[\heartsuit, 2]$	$[\heartsuit, 3]$	$[\heartsuit, 4]$	$[\heartsuit, 5]$	$\dots$
	$\clubsuit$	$[\clubsuit, 1]$	$[\clubsuit, 2]$	$[\clubsuit, 3]$	$[\clubsuit, 4]$	$[\clubsuit, 5]$	$\dots$

Střídavým umisťováním prvků prvního a druhého řádku do posloupnosti lze celou uvedenou množinu (kartézský součin) seřadit.

$$\{\heartsuit, \clubsuit\} \times \mathbb{N} = \{[\heartsuit, 1], [\clubsuit, 1], [\heartsuit, 2], [\clubsuit, 2], [\heartsuit, 3], [\clubsuit, 3], [\heartsuit, 4], [\clubsuit, 4], [\heartsuit, 5], [\clubsuit, 5], \dots\}$$

Rozšířením uvedeného principu je možné seřadit prvky libovolného kartézského součinu n-prvkové množiny (n je přirozené číslo různé od nuly) a množiny přirozených čísel. Do posloupnosti jsou postupně přidávány prvky jednotlivých řádků, například seřazení všech prvků kartézského součinu $\{\mathrm{z}, \varphi, \clubsuit, \check{\mathrm{f}}, \dots, \pi\} \times \mathbb{N}$ znázorňuje následující tabulka:

		$\{1, 2, 3, \dots\}$			
		1	2	3	$\dots$
$\{\mathrm{z}, \varphi, \clubsuit, \check{\mathrm{f}}, \dots, \pi\}$	z	$[\mathrm{z}, 1]$	$[\mathrm{z}, 2]$	$[\mathrm{z}, 3]$	$\dots$
	φ	$[\varphi, 1]$	$[\varphi, 2]$	$[\varphi, 3]$	$\dots$
	$\clubsuit$	$[\clubsuit, 1]$	$[\clubsuit, 2]$	$[\clubsuit, 3]$	$\dots$
	ř	$[\check{\mathrm{f}}, 1]$	$[\check{\mathrm{f}}, 2]$	$[\check{\mathrm{f}}, 3]$	$\dots$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
	π	$[\pi, 1]$	$[\pi, 2]$	$[\pi, 3]$	$\dots$

$\sim$

1	$n+1$	$2n+1$	$\dots$
2	$n+2$	$2n+2$	$\dots$
3	$n+3$	$2n+3$	$\dots$
4	$n+4$	$2n+4$	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
n	$n+n$	$2n+n$	$\dots$

$$\{[\text{z},1],[\varphi,1],[\clubsuit,1],[\check{\text{f}},1],\dots,[\pi,1],[\text{z},2],[\varphi,2],[\clubsuit,2],[\check{\text{f}},2],\dots,[\pi,2],$$
$$[\text{z},3],[\varphi,3],[\clubsuit,3],[\check{\text{f}},3],\dots,[\pi,3],\dots\}$$

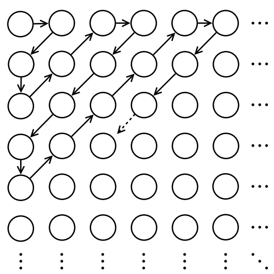
Možnost seřadit libovolný kartézský součin n-prvkové množiny a množiny $\mathbb{N}$, což vyjadřuje součin kardinálních čísel $n \cdot \aleph_0$, vyjadřuje, že kardinální číslo výsledné množiny (kartézského součinu) je

$$n \cdot \aleph_0 = \aleph_0.$$

Rozšířením předchozí situace je kartézský součin dvou nekonečných spočetných množin. Pro ilustraci lze použít přímo kartézský součin $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

		$\{1,2,3,\dots\}$			
		1	2	3	$\dots$
$\{1,2,3,\dots\}$	1	$[1,1]$	$[1,2]$	$[1,3]$	$\dots$
	2	$[2,1]$	$[2,2]$	$[2,3]$	$\dots$
	3	$[3,1]$	$[3,2]$	$[3,3]$	$\dots$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Způsobem převzatým z kapitoly 3.3.3 určeným k seřazení množiny všech zlomků je možné seřadit i tuto množinu.



$$\{[1,1],[1,2],[2,1],[3,1],[2,2],[1,3],\dots\}$$

Zmíněné seřazení vyjadřuje fakt, že výsledná množina je spočetná, její mohutnost je tedy $\aleph_0$. Vzhledem k tomu, že tato množina byla vytvořena jako kartézský součin dvou spočetných množin, což odpovídá součinu kardinálních čísel $\aleph_0 \cdot \aleph_0$, platí vlastnost

$$\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0.$$

Při zobecnění součinu $\aleph_0 \cdot \aleph_0$ pro více činitelů (počet činitelů je označen přirozeným číslem n) se užívá pravidlo asociativity součinu (libovolného uzávorkování). Například součin tří činitelů $\aleph_0$ lze vyjádřit

$$\aleph_0 \cdot \aleph_0 \cdot \aleph_0 = (\aleph_0 \cdot \aleph_0) \cdot \aleph_0 = (\aleph_0) \cdot \aleph_0 = \aleph_0$$

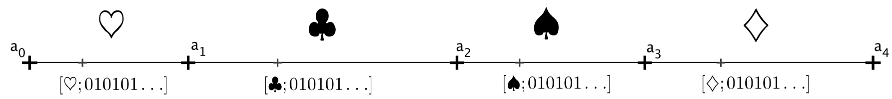
Obecně pro součin n činitelů $\aleph_0$ tak platí

$$\underbrace{\aleph_0 \cdot \aleph_0 \cdot \aleph_0 \cdot \ \cdots \ \cdot \aleph_0}_{n\text{-krát}} = \underbrace{(\aleph_0 \cdot \aleph_0) \cdot \aleph_0 \cdot \ \cdots \ \cdot \aleph_0}_{n\text{-krát}} = \underbrace{(\aleph_0) \cdot \aleph_0 \cdot \ \cdots \ \cdot \aleph_0}_{(n-1)\text{-krát}} = \cdots = \aleph_0.$$

Při odůvodňování vlastností součinu, ve kterém se objevuje kardinální číslo $\mathfrak{c}$, bude v následujícím textu použito geometrického pojetí množiny reálných čísel, ale také jejich reprezentace pomocí nekonečných posloupností 1 a 0. Prvky kartézského součinu odpovídajícího součinu kardinálních čísel $n \cdot \mathfrak{c}$ (n je přirozené číslo) jsou dvojice, ve kterých je na prvním místě prvek n-prvkové množiny a na druhém reálné číslo. Namísto reálného čísla je možné použít již zmiňovanou posloupnost číslic 1 a 0. K vyjádření výsledné množiny (kartézského součinu) je možné použít n libovolných na sebe navazujících intervalů reálných čísel

$$\langle a_0; a_1) \, , \langle a_1; a_2) \, , \ldots , \langle a_{n-1}; a_n) \, ,$$

kde čísla a_i jsou reálná čísla, přičemž každému uvedenému intervalu je přiřazen jeden prvek dané n-prvkové množiny. Jelikož každá nekonečná posloupnost 1 a 0 popisuje reálné číslo v libovolném intervalu, dvojice obsahující prvek n-prvkové množiny a nekonečnou posloupnost 1 a 0 popisuje právě jeden bod v intervalu označeném daným prvkem n-prvkové množiny. Například součin $4 \cdot \mathfrak{c}$ lze při použití množiny $\{\heartsuit, \clubsuit, \spadesuit, \diamondsuit\}$ znázornit:



Libovolná dvojice zmíněného kartézského součinu tak jednoznačně odpovídá bodu na sjednoceném intervalu $\langle a_0; a_n)$ a každý bod tohoto intervalu lze vyjádřit jako uspořádanou dvojici v závislosti na jeho příslušnosti k původním intervalům. Právě popsaný vztah vyjadřuje vzájemně jednoznačné zobrazení mezi prvky kartézského součinu a body intervalu $\langle a_0; a_n)$, z čehož vyplývá, že jejich množství je stejné:

$$n \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$$

Analogickým postupem lze vyjádřit součin kardinálních čísel $\aleph_0 \cdot \mathfrak{c}$, kterému odpovídá kartézký součin množiny všech přirozených čísel a množiny reálných čísel.

$$\mathbb{N} \times \mathbb{R}$$

Prvky tohoto součinu budou dvojice, které na prvním místě budou obsahovat přirozené číslo a na druhém místě reálné číslo. Namísto reálného čísla lze opět použít vyjádření pomocí posloupnosti 1 a 0. Každá dvojice uvedeného kartézského součinu tak popisuje právě jeden bod sjednocení nekonečného počtu na sebe navazujících intervalů

$$\langle a_0; a_1) \, , \langle a_1; a_2) \, , \ldots , \langle a_{n-1}; a_n) \, , \ldots ,$$

jelikož prvky uvedených intervalů lze označit právě přirozeným číslem a posloupností 1 a 0.

Každému prvku uvedeného kartézského součinu lze zmíněným způsobem jednoznačně přiřadit prvek sjednoceného intervalu $\langle a_0; +\infty)$ a každému prvku tohoto intervalu lze jednoznačně přiřadit prvek (dvojici) kartézského součinu v závislosti na jeho příslušnosti k původním intervalům. Jelikož je uvedené přiřazení vzájemně jednoznačné, obsahuje uvedený kartézský součin i interval $\langle a_0; +\infty)$ stejné množství prvků, proto

$$\aleph_0 \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}.$$

Poslení uvedenou vlastností součinu je součin kardinálních čísel $\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c}$. Kartézský součin $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, který uvedenému součinu kardinálních čísel odpovídá, obsahuje jako prvky dvojice reálných čísel, přičemž lze opět využít nekonečných posloupností 1 a 0 odpovídající reálným číslům. Použitím metody slučování [BlaVoj] jako v kapitole 3.6.3 při určování mohutnosti množiny bodů roviny lze určit mohutnost výsledného kartézského součinu. Z nekonečných posloupností v libovolném prvku (dvojici) kartézského součinu je možné vytvořit jednu nekonečnou posloupnost tak, že se tato nová posloupnost vytváří střídavě z prvků první a druhé uvedené posloupnosti.

$$\begin{array}{lc|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}
\cline{3-11}
1\ 1\ 0\ 1, \ldots & \longrightarrow & 1 & & 1 & & 0 & & 1 & & \ldots \\
\cline{3-11}
\multicolumn{2}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{\downarrow} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{\downarrow} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{\downarrow} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{\downarrow} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} \\
\multicolumn{2}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{1} & \multicolumn{1}{c}{1} & \multicolumn{1}{c}{1} & \multicolumn{1}{c}{0} & \multicolumn{1}{c}{0} & \multicolumn{1}{c}{1} & \multicolumn{1}{c}{1} & \multicolumn{1}{c}{0} & \multicolumn{1}{c}{\ldots} \\
\multicolumn{2}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{\uparrow} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{\uparrow} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{\uparrow} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{\uparrow} & \multicolumn{1}{c}{} \\
\cline{3-11}
1\ 0\ 1\ 0, \ldots & \longrightarrow & & 1 & & 0 & & 1 & & 0 & \ldots \\
\cline{3-11}
\end{array}$$

Jelikož je nově vzniklá posloupnost určena jednoznačně výchozími dvěma posloupnostmi a z libovolné nové posloupnosti je možné jednoznačně určit původní dvě posloupnosti (prvky na lichých místech nové posloupnosti vytváří první původní posloupnost a prvky na sudých místech vytváří druhou), je množství dvojic kartézského součinu stejné jako množství všech posloupností 1 a 0 vyjadřujících reálná čísla. Proto pro kardinální číslo $\mathfrak{c}$ platí

$$\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}.$$

Pro zobecnění součinu $\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c}$ pro n činitelů, kde n je přirozené číslo,

$$\underbrace{\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} \cdot \quad \cdots \quad \cdot \mathfrak{c}}_{n\text{-krát}},$$

se užívá možnosti libovolného uzávorkování činitelů (asociativita součinu). Například součin $\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c}$ je možné vyjádřit jako

$$\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = (\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c}) \cdot \mathfrak{c} = (\mathfrak{c}) \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}.$$

Obecně pro n činitelů platí následující rovnost

$$\underbrace{\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} \cdot \quad \cdots \quad \cdot \mathfrak{c}}_{n\text{-krát}} = \underbrace{(\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c}) \cdot \mathfrak{c} \cdot \quad \cdots \quad \cdot \mathfrak{c}}_{n\text{-krát}} = \underbrace{(\mathfrak{c}) \cdot \mathfrak{c} \cdot \quad \cdots \quad \cdot \mathfrak{c}}_{(n-1)\text{-krát}} = \cdots = \mathfrak{c}.$$

4.3 Mocnina

Jak již bylo zmíněno v úvodu kapitoly, je mocnina kardinálních čísel zavedena pomocí zobrazení množin. V tomto případě nelze použít jen vzájemně jednoznačné zobrazení, neboť použité množiny nemusí obsahovat stejné množství prvků. Například zobrazení množiny $\{a, b, c\}$ na množinu $\{\heartsuit, \clubsuit\}$ lze zapsat pomocí tabulky následovně:

$$\{a, b, c\} \to \{\heartsuit, \clubsuit\}$$

$\{a, b, c\}$	$a \to \heartsuit$ $b \to \heartsuit$ $c \to \heartsuit$	$a \to \heartsuit$ $b \to \heartsuit$ $c \to \clubsuit$	$a \to \heartsuit$ $b \to \clubsuit$ $c \to \heartsuit$	$a \to \heartsuit$ $b \to \clubsuit$ $c \to \clubsuit$	$a \to \clubsuit$ $b \to \heartsuit$ $c \to \heartsuit$	$a \to \clubsuit$ $b \to \heartsuit$ $c \to \clubsuit$	$a \to \clubsuit$ $b \to \clubsuit$ $c \to \heartsuit$	$a \to \clubsuit$ $b \to \clubsuit$ $c \to \clubsuit$

Definice 9. *Mocninou kardinálních čísel α^β se bude nazývat kardinální číslo množiny všech zobrazení mezi množinami Y a X, přičemž X je libovolná množina mohutnosti α a Y libovolná množina mohutnosti β.*

Množství všech zobrazení $\{a, b, c\} \to \{\heartsuit, \clubsuit\}$ z předcházejícího příkladu tak odpovídá mocnině $2^3 = 8$, neboť v uvedené tabulce se nachází právě 8 možností zobrazení prvků.

Pro praktické využití definované mocniny kardinálních čísel je nutné ověřit její základní vlastnosti.

a) $\boxed{1^\alpha = 1 \quad \text{pro} \quad \alpha \neq 0}$

Tato vlastnost se zabývá množstvím všech zobrazení libovolné množiny X s kardinálním číslem α na jednoprvkovou množinu. Jelikož každý prvku množiny X lze zobrazit pouze na jediný prvek, hledané zobrazení je jediné (kardinální číslo množiny všech zobrazení bude rovno 1). Například zobrazení tříprvkové množiny na jednoprvkovou množinu vyjadřující mocninu $1^3 = 1$ lze znázornit následující tabulkou.

$\{a, b, c\} \rightarrow \{\clubsuit\}$

$\{a, b, c\}$	$a \rightarrow \clubsuit$
	$b \rightarrow \clubsuit$
	$c \rightarrow \clubsuit$

b) $\boxed{\alpha^1 = \alpha}$
Možností zobrazení jednoprvkové množiny do libovolné množiny X s kardinálním číslem α je právě takové množství, jako je prvků množiny X, protože každé uvedené zobrazení přiřadí onomu jedinému prvku vždy právě jeden prvek z množiny X. Každé zobrazení tak využívá právě jeden prvek množiny X a použitím každého prvku množiny X je možno vytvořit hledané zobrazení, proto kardinální číslo množiny všech zobrazení je stejné jako kardinální číslo množiny X. Příkladem mocniny tohoto typu je $3^1 = 3$, což lze vyjádřit pomocí zobrazení množin $\{\clubsuit\}$ a $\{a, b, c\}$:

$\{\clubsuit\} \rightarrow \{a, b, c\}$

$\{\clubsuit\}$	$\clubsuit \rightarrow a$	$\clubsuit \rightarrow b$	$\clubsuit \rightarrow c$

c) $\boxed{\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma}$
Pro množiny X, Y a Z po řadě příslušící kardinálním číslům α, β a γ, přičemž množiny Y a Z nemají žádný společný prvek[32] lze zobrazení množiny $Y \cup Z$ do množiny X

$$(Y \cup Z) \rightarrow X$$

rozdělit na zobrazení prvků množiny Y do množiny X a na zobrazení prvků množiny Z do množiny X. Například rozdělení libovolného zobrazení množin $(\{a, b\} \cup \{c\}) \rightarrow \{\heartsuit, \clubsuit\}$ lze znázornit v tabulce:

$(\{a, b\} \cup \{c\}) \rightarrow \{\heartsuit, \clubsuit\}$

$(\{a,b\} \cup \{c\})$	$a \rightarrow \heartsuit$	$a \rightarrow \heartsuit$	$a \rightarrow \heartsuit$	$a \rightarrow \heartsuit$	$a \rightarrow \clubsuit$	$a \rightarrow \clubsuit$	$a \rightarrow \clubsuit$	$a \rightarrow \clubsuit$
	$b \rightarrow \heartsuit$	$b \rightarrow \heartsuit$	$b \rightarrow \clubsuit$	$b \rightarrow \clubsuit$	$b \rightarrow \heartsuit$	$b \rightarrow \heartsuit$	$b \rightarrow \clubsuit$	$b \rightarrow \clubsuit$
	$c \rightarrow \heartsuit$	$c \rightarrow \clubsuit$	$c \rightarrow \heartsuit$	$c \rightarrow \clubsuit$	$c \rightarrow \heartsuit$	$c \rightarrow \clubsuit$	$c \rightarrow \heartsuit$	$c \rightarrow \clubsuit$

Jak vyplývá z uvedené tabulky, ke každému zobrazení $Y \rightarrow X$ jsou vždy přidány všechny možnosti zobrazení $Z \rightarrow X$. Zobrazení $(Y \cup Z) \rightarrow X$ je tak

[32] Tato podmínka je zavedena pro následné zjednodušení vyjadřování součtu jako sjednocení množin.

tvořeno všemi možnými dvojicemi, ve kterých je na prvním místě zobrazení $Y \to X$ a na druhém $Z \to X$, což vyjadřuje právě kartézský součin

$$(Y \to X) \times (Z \to X).$$

Vzhledem k uvedeným kardinálním číslům jednotlivých množin je kardinální číslo zobrazení $(Y \cup Z) \to X$ rovno $\alpha^{\beta+\gamma}$ a kardinální číslo výsledného kartézského součinu rovno $\alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$, z čehož vyplývá platnost uvedené vlastnosti. K příkladu zobrazení $(\{a,b\} \cup \{c\}) \to \{\heartsuit, \clubsuit\}$ je tak možno doplnit:

	$\{a,b\} \to \{\heartsuit, \clubsuit\}$			
$\{a,b\}$	$a \to \heartsuit$ $b \to \heartsuit$	$a \to \heartsuit$ $b \to \clubsuit$	$a \to \clubsuit$ $b \to \heartsuit$	$a \to \clubsuit$ $b \to \clubsuit$

	$\{c\} \to \{\heartsuit, \clubsuit\}$	
$\{c\}$	$c \to \heartsuit$	$c \to \clubsuit$

<table>
<tr><td></td><td></td><td colspan="2">$\{c\} \to \{\heartsuit, \clubsuit\}$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>$c \to \heartsuit$</td><td>$c \to \clubsuit$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$\{a,b\} \to \{\heartsuit, \clubsuit\}$</td><td>$a \to \heartsuit$
$b \to \heartsuit$</td><td>$a \to \heartsuit$
$b \to \heartsuit$
$c \to \heartsuit$</td><td>$a \to \heartsuit$
$b \to \heartsuit$
$c \to \clubsuit$</td></tr>
<tr><td>$a \to \heartsuit$
$b \to \clubsuit$</td><td>$a \to \heartsuit$
$b \to \clubsuit$
$c \to \heartsuit$</td><td>$a \to \heartsuit$
$b \to \clubsuit$
$c \to \clubsuit$</td></tr>
<tr><td>$a \to \clubsuit$
$b \to \heartsuit$</td><td>$a \to \clubsuit$
$b \to \heartsuit$
$c \to \heartsuit$</td><td>$a \to \clubsuit$
$b \to \heartsuit$
$c \to \clubsuit$</td></tr>
<tr><td>$a \to \clubsuit$
$b \to \clubsuit$</td><td>$a \to \clubsuit$
$b \to \clubsuit$
$c \to \heartsuit$</td><td>$a \to \clubsuit$
$b \to \clubsuit$
$c \to \clubsuit$</td></tr>
</table>

d) $\boxed{(\alpha \cdot \beta)^\gamma = \alpha^\gamma \cdot \beta^\gamma}$

Levá část uvedené rovnosti popisuje zobrazení množiny Z do kartézského součinu množin $X \times Y$, každý prvek množiny Z je zobrazen na dvojici prvků množin X a Y

$$Z \to (X \times Y),$$

přičemž libovolné množiny X, Y a Z po řadě přísluší kardinálním číslům α, β a γ. Například pro množiny $\{a,b\}$, $\{c\}$, $\{\heartsuit, \clubsuit\}$ lze zobrazení

$$\{\heartsuit, \clubsuit\} \to (\{a,b\} \times \{c\})$$

vyjadřující $(2 \cdot 1)^2$ zapsat tabulkou.

		$\{c\}$
		c
$\{a,b\}$	a	[a, c]
	b	[b, c]

$\{\heartsuit, \clubsuit\} \to \{[a,c],[b,c]\}$

$\{\heartsuit, \clubsuit\}$	$\heartsuit \to [a,c]$ $\clubsuit \to [a,c]$	$\heartsuit \to [a,c]$ $\clubsuit \to [b,c]$	$\heartsuit \to [b,c]$ $\clubsuit \to [a,c]$	$\heartsuit \to [b,c]$ $\clubsuit \to [b,c]$

Pravá část dané rovnosti vyjadřuje kartézský součin množin vyjadřujících zobrazení $Z \to X$ a $Z \to Y$, jehož prvky budou obsahovat popis zobrazení všech prvků množiny Z do množiny X a také popis zobrazení všech prvků množiny Z do množiny Y. Pro uváděný konkrétní případ:

$\{\heartsuit, \clubsuit\} \to \{a,b\}$

$\{\heartsuit, \clubsuit\}$	$\heartsuit \to a$ $\clubsuit \to a$	$\heartsuit \to a$ $\clubsuit \to b$	$\heartsuit \to b$ $\clubsuit \to a$	$\heartsuit \to b$ $\clubsuit \to b$

$\{\heartsuit, \clubsuit\} \to \{c\}$

$\{\heartsuit, \clubsuit\}$	$\heartsuit \to c$ $\clubsuit \to c$

		$\{\heartsuit, \clubsuit\} \to \{c\}$
		$\heartsuit \to c$ $\clubsuit \to c$
$\{\heartsuit, \clubsuit\} \to \{a,b\}$	$\heartsuit \to a$ $\clubsuit \to a$	$\begin{bmatrix} \heartsuit \to a & \heartsuit \to c \\ \clubsuit \to a ,& \clubsuit \to c \end{bmatrix}$
	$\heartsuit \to a$ $\clubsuit \to b$	$\begin{bmatrix} \heartsuit \to a & \heartsuit \to c \\ \clubsuit \to b ,& \clubsuit \to c \end{bmatrix}$
	$\heartsuit \to b$ $\clubsuit \to a$	$\begin{bmatrix} \heartsuit \to b & \heartsuit \to c \\ \clubsuit \to a ,& \clubsuit \to c \end{bmatrix}$
	$\heartsuit \to b$ $\clubsuit \to b$	$\begin{bmatrix} \heartsuit \to b & \heartsuit \to c \\ \clubsuit \to b ,& \clubsuit \to c \end{bmatrix}$

Každému prvku množiny Z jsou uvedeným způsobem přiřazeny vždy dva prvky – jeden z množiny X a jeden z množiny Y. Proto lze danou situaci jednoznačně převést na stav, kdy každému prvku ze Z je přiřazena dvojice prvků, jeden z X a jeden z Y, což odpovídá významu levé strany dokazované rovnosti.

$$
\begin{array}{|c|}
\hline
\left[\begin{matrix}\heartsuit \to a \\ \clubsuit \to a\end{matrix}, \begin{matrix}\heartsuit \to c \\ \clubsuit \to c\end{matrix}\right] \\
\hline
\left[\begin{matrix}\heartsuit \to a \\ \clubsuit \to b\end{matrix}, \begin{matrix}\heartsuit \to c \\ \clubsuit \to c\end{matrix}\right] \\
\hline
\left[\begin{matrix}\heartsuit \to b \\ \clubsuit \to a\end{matrix}, \begin{matrix}\heartsuit \to c \\ \clubsuit \to c\end{matrix}\right] \\
\hline
\left[\begin{matrix}\heartsuit \to b \\ \clubsuit \to b\end{matrix}, \begin{matrix}\heartsuit \to c \\ \clubsuit \to c\end{matrix}\right] \\
\hline
\end{array}
\sim
\begin{array}{|c|}
\hline
\heartsuit \to [a, c] \\ \clubsuit \to [a, c] \\
\hline
\heartsuit \to [a, c] \\ \clubsuit \to [b, c] \\
\hline
\heartsuit \to [b, c] \\ \clubsuit \to [a, c] \\
\hline
\heartsuit \to [b, c] \\ \clubsuit \to [b, c] \\
\hline
\end{array}
$$

Jelikož si množinová vyjádření obou stran rovnosti jednoznačně odpovídají, jsou jejich kardinální čísla stejná.

e) $\boxed{(\alpha^{\beta})^{\gamma} = \alpha^{\beta\cdot\gamma}}$
Obdobně jako u předchozí vlastnosti je prokázání platnosti uvedeného tvrzení založeno na vztahu kartézského součinu a zobrazení množin. Levá strana uvedené rovnosti popisuje zobrazení množiny Z do množiny všech zobrazení $Y \to X$

$$Z \to \{Y \to X\},$$

kde množiny X, Y, Z po řadě odpovídají kardinálním číslům α, β, γ. Pro libovolnou možnost zobrazení množiny Z je každému prvku ze Z přiřazen popis jednoho zobrazení $Y \to X$. Například pro množiny $\{a, b\}$, $\{\heartsuit, \clubsuit\}$ a $\{c, d\}$ lze zobrazení $\{\heartsuit, \clubsuit\} \to \{a, b\}$ a následně zobrazení $\{c, d\} \to \{\{\heartsuit, \clubsuit\} \to \{a, b\}\}$ odpovídající vztahu $(2^2)^2$ zapsat tabulkou:

$\{\heartsuit, \clubsuit\} \to \{a, b\}$

$\{\heartsuit, \clubsuit\}$	$\heartsuit \to a$ $\clubsuit \to a$	$\heartsuit \to a$ $\clubsuit \to b$	$\heartsuit \to b$ $\clubsuit \to a$	$\heartsuit \to b$ $\clubsuit \to b$

$\{c, d\} \to \{\{\heartsuit, \clubsuit\} \to \{a, b\}\}$

$\{c, d\}$	$c \to \begin{pmatrix}\heartsuit\to a \\ \clubsuit\to a\end{pmatrix}$ $d \to \begin{pmatrix}\heartsuit\to a \\ \clubsuit\to a\end{pmatrix}$	$c \to \begin{pmatrix}\heartsuit\to a \\ \clubsuit\to a\end{pmatrix}$ $d \to \begin{pmatrix}\heartsuit\to a \\ \clubsuit\to b\end{pmatrix}$	$c \to \begin{pmatrix}\heartsuit\to a \\ \clubsuit\to a\end{pmatrix}$ $d \to \begin{pmatrix}\heartsuit\to b \\ \clubsuit\to a\end{pmatrix}$	$c \to \begin{pmatrix}\heartsuit\to a \\ \clubsuit\to a\end{pmatrix}$ $d \to \begin{pmatrix}\heartsuit\to b \\ \clubsuit\to b\end{pmatrix}$	$\dots$

Každá možnost zobrazení množiny Z obsahuje pro každý prvek Z zobrazení všech prvků množiny Y, což lze vyjádřit jako zobrazování kombinace prvku množiny Z a prvku množiny Y do množiny X. Uvedenou kombinaci je možné zapsat jako uspořádanou dvojici.

$\{c,d\} \to \{\{\heartsuit,\clubsuit\} \to \{a,b\}\}$

$\{c,d\}$	$[c,\heartsuit] \to a$ $[c,\clubsuit] \to a$ $[d,\heartsuit] \to a$ $[d,\clubsuit] \to a$	$[c,\heartsuit] \to a$ $[c,\clubsuit] \to a$ $[d,\heartsuit] \to a$ $[d,\clubsuit] \to b$	$[c,\heartsuit] \to a$ $[c,\clubsuit] \to a$ $[d,\heartsuit] \to b$ $[d,\clubsuit] \to a$	$[c,\heartsuit] \to a$ $[c,\clubsuit] \to a$ $[d,\heartsuit] \to b$ $[d,\clubsuit] \to b$	$\dots$

Jelikož každá možnost zobrazení množiny vyjadřuje všechny možné dvojice prvků ze Z a z Y zobrazované do množiny X, je ekvivalentní zobrazení kartézského součinu $Z \times Y$ do množiny X. Toto zobrazení odpovídá pravé straně dokazované rovnosti $(\alpha^\beta)^\gamma$.

		$\{\heartsuit,\clubsuit\}$	
		$\heartsuit$	$\clubsuit$
$\{c,d\}$	c	$[c,\heartsuit]$	$[c,\clubsuit]$
	c	$[d,\heartsuit]$	$[d,\clubsuit]$

$\{c,d\} \times \{\heartsuit,\clubsuit\} \to \{a,b\}\}$

$\{c,d\} \times \{\heartsuit,\clubsuit\}$	$[c,\heartsuit] \to a$ $[c,\clubsuit] \to a$ $[d,\heartsuit] \to a$ $[d,\clubsuit] \to a$	$[c,\heartsuit] \to a$ $[c,\clubsuit] \to a$ $[d,\heartsuit] \to a$ $[d,\clubsuit] \to b$	$[c,\heartsuit] \to a$ $[c,\clubsuit] \to a$ $[d,\heartsuit] \to b$ $[d,\clubsuit] \to a$	$[c,\heartsuit] \to a$ $[c,\clubsuit] \to a$ $[d,\heartsuit] \to b$ $[d,\clubsuit] \to b$	$\dots$

Protože si uvedené množiny jednoznačně odpovídají, mají stejná kardinální čísla, z čehož vyplývá platnost dokazované vlastnosti.

f) $\boxed{\alpha \leq \beta \quad \Rightarrow \quad \alpha^\gamma \leq \beta^\gamma}$

Nerovnost $\alpha \leq \beta$ vyjadřuje vztah $X \subseteq Y$ pro množiny X, Y příslušící po řadě kardinálním číslům α, β. Mezi všemi zobrazeními libovolné množiny Z (příslušící kardinálnímu číslu γ) do množiny Y jsou zastoupena všechna zobrazení, ve kterých je množina Z zobrazena pouze do podmnožiny X množiny Y. Množina všech zobrazení $Z \to X$ je tak podmnožinou všech zobrazení $Z \to Y$, což je vyjádření nerovnosti mezi mocninami kardinálních čísel

$$\alpha^\gamma \leq \beta^\gamma.$$

Například umocnění obou stran nerovnosti $2 \leq 3$ číslem 2 lze vyjádřit jako zobrazení množin $\{a,b\} \to \{\heartsuit,\clubsuit\}$ a $\{a,b\} \to \{\heartsuit,\clubsuit,\spadesuit\}$.

$\{a,b\} \to \{\heartsuit,\clubsuit\}$

$\{a,b\}$	$a \to \heartsuit$ $b \to \heartsuit$	$a \to \heartsuit$ $b \to \clubsuit$	$a \to \clubsuit$ $b \to \heartsuit$	$a \to \clubsuit$ $b \to \clubsuit$

$$\{a, b, c\} \to \{\heartsuit, \clubsuit, \spadesuit\}$$

$\{a, b\}$	$a \to \heartsuit$	$a \to \heartsuit$	$a \to \heartsuit$	$a \to \clubsuit$	$a \to \clubsuit$	$a \to \clubsuit$	$a \to \spadesuit$	$a \to \spadesuit$	$a \to \spadesuit$
	$b \to \heartsuit$	$b \to \clubsuit$	$b \to \spadesuit$	$b \to \heartsuit$	$b \to \clubsuit$	$b \to \spadesuit$	$b \to \heartsuit$	$b \to \clubsuit$	$b \to \spadesuit$

Všechna možná zobrazení uvedená v první tabulce je možné najít mezi zobrazeními v druhé tabulce. První množina zobrazení je tak podmnožinou druhé množiny zobrazení, z čehož vyplývá $2^2 \leq 3^2$.

g) $\boxed{\alpha \leq \beta \quad \Rightarrow \quad \gamma^\alpha \leq \gamma^\beta}$

Pro libovolné množiny $X \subseteq Y$ vyjadřující vztah $\alpha \leq \beta$ platí, že každé zobrazení množiny X do množiny Z (množina Z je libovolná množina odpovídající kardinálnímu číslu γ) je částí zobrazení množiny Y do množiny Z. Například zobrazení množin $\{a, b\} \to \{\heartsuit, \clubsuit\}$ a $\{a, b, c\} \to \{\heartsuit, \clubsuit\}$ vyjadřující 2^2 a 2^3:

$$\{a, b\} \to \{\heartsuit, \clubsuit\}$$

$\{a, b\}$	$a \to \heartsuit$	$a \to \heartsuit$	$a \to \clubsuit$	$a \to \clubsuit$
	$b \to \heartsuit$	$b \to \clubsuit$	$b \to \heartsuit$	$b \to \clubsuit$

$$\{a, b, c\} \to \{\heartsuit, \clubsuit\}$$

$\{a, b, c\}$	$a \to \heartsuit$	$a \to \heartsuit$	$a \to \heartsuit$	$a \to \heartsuit$	$a \to \clubsuit$	$a \to \clubsuit$	$a \to \clubsuit$	$a \to \clubsuit$
	$b \to \heartsuit$	$b \to \heartsuit$	$b \to \clubsuit$	$b \to \clubsuit$	$b \to \heartsuit$	$b \to \heartsuit$	$b \to \clubsuit$	$b \to \clubsuit$
	$c \to \heartsuit$	$c \to \clubsuit$	$c \to \heartsuit$	$c \to \clubsuit$	$c \to \heartsuit$	$c \to \clubsuit$	$c \to \heartsuit$	$c \to \clubsuit$

Jelikož lze přiřadit každému zobrazení $X \to Z$ zobrazení $Y \to Z$, ve kterém je obsaženo, například

$$\begin{array}{|c|}\hline a \to \heartsuit \\ b \to \clubsuit \\ \hline \end{array} \to \begin{array}{|c|}\hline a \to \heartsuit \\ b \to \clubsuit \\ \hline c \to \heartsuit \\ \hline \end{array} \qquad \text{nebo} \qquad \begin{array}{|c|}\hline a \to \heartsuit \\ b \to \heartsuit \\ \hline \end{array} \to \begin{array}{|c|}\hline a \to \heartsuit \\ b \to \heartsuit \\ \hline c \to \clubsuit \\ \hline \end{array},$$

odpovídá množině všech zobrazení $X \to Z$ podmnožina množiny všech zobrazení $Y \to Z$. Tato podmnožina má stejnou mohutnost γ^α jako ona množina všech zobrazení $X \to Z$, neboť si odpovídají po jednotlivých prvcích.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline a \to \heartsuit & a \to \heartsuit & a \to \clubsuit & a \to \clubsuit \\ b \to \heartsuit & b \to \clubsuit & b \to \heartsuit & b \to \clubsuit \\ \hline \end{array} \to \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline a \to \heartsuit & a \to \heartsuit & a \to \clubsuit & a \to \clubsuit \\ b \to \heartsuit & b \to \clubsuit & b \to \heartsuit & b \to \clubsuit \\ \hline c \to \clubsuit & c \to \heartsuit & c \to \heartsuit & c \to \clubsuit \\ \hline \end{array}$$

Ze skutečnosti, že v množině všech zobrazení $Y \to Z$ s kardinálním číslem γ^β existuje podmnožina s kardinálním číslem γ^α, plyne vztah $\gamma^\alpha \leq \gamma^\beta$.

Závěr

Jelikož cílem práce bylo vytvoření textu přibližujícího problematiku nekonečna čtenáři s nejvýše maturitním vzděláním, byly ve čtyřech kapitolách uvedeny základní úvahy, vlastnosti a postupy, které čtenáře vedou k hlubšímu pochopení problematiky nekonečna v matematice. Z důvodu srozumitelnosti textu pro čtenáře byla v práci omezena matematická symbolika a k jednotlivým úvahám byly přidány konkrétní příklady pro snazší pochopitelnost. Za stejným účelem byla pro vysvětlení uvedených úvah místy použita volnější slovní vyjádření.

Jako příloha na konci práce je uveden přehled látky středoškolské matematiky, ve které se objevuje nekonečno v různých podobách. Tato příloha pak může sloužit jako námět k dalšímu zamyšlení čtenáře a inspirace k další činnosti.

Literatura

[AigZie] AIGNER, Martin a Günter M. ZIEGLER. *Proofs from the book.* 2nd ed. New York: Springer, 2001, 215 s. ISBN 35-406-7865-4.

[Balc] BALCAR, Bohuslav. *Teorie množin.* 2. oprav. a rozš. vyd. Praha: Academia, 2000, 462 s. ISBN 80-200-0470-X.

[Bart] BARTSCH, Hans-Jochen. *Matematické vzorce.* Vyd. 4. Praha: Academia, 2006, 831 s. ISBN 80-200-1448-9.

[BlaVoj] BLAŽEK, Jaroslav a Blanka VOJTÁŠKOVÁ. *Teorie množin.* Vyd. 1. Ústí nad Labem: Pedagogická fakulta UJEP, 1994, 149 s. ISBN 80-704-4090-2.

[Bolz] BOLZANO, Bernard. *Paradoxy nekonečna.* Přeložil Otakar ZICH; předmluvu napsal Arnošt KOLMAN. Praha: Nakladatelství Československé akademie věd, 1963, 150 s.

[mat1] BUŠEK, Ivan a Emil CALDA. *Matematika pro gymnázia: základní poznatky.* 3., upr. vyd. Praha: Prometheus, 2001, 178 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 978-807-1961-468.

[Cajo] CAJORI, Florian. *A history of mathematical notations.* New York: Dover Publications, 1993, xvi, 451367. ISBN 04-866-7766-4.

[mat2] CALDA, Emil. *Matematika pro gymnázia: komplexní čísla.* 3. vyd. Praha: Prometheus, 2001, 134 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6187-6.

[mat3] CALDA, Emil a Václav DUPAČ. *Matematika pro gymnázia: kombinatorika, pravděpodobnost, statistika.* 4., upr. vyd. Praha: Prometheus, c2001, 170 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 978-807-1961-475.

[Fuch] FUCHS, Eduard. *Teorie množin pro učitele.* Vyd. 1. Brno: Masarykova univerzita, 1999, 200 s. ISBN 80-210-2201-9.

[stan] FUCHS, Eduard a František PROCHÁZKA. *Standardy a testové úlohy z matematiky pro střední odborné školy.* 2. přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 2000, 99 s. ISBN 80-719-6199-X.

[mat4] HRUBÝ, Dag a Josef KUBÁT. *Matematika pro gymnázia: diferenciální a integrální počet.* 2., upr. vyd. Praha: Prometheus, 2001, 210 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6210-4.

[mat5] CHARVÁT, Jura, Jaroslav ZHOUF a Leo BOČEK. *Matematika pro gymnázia: rovnice a nerovnice.* 3. vyd. Praha: Prometheus, 2001, 223 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6154-X.

[Jeli] JELÍNKOVÁ, Věra. Nekonečně malá veličina v základech matematické analýzy v 17. a 18. století. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie.* Praha: Jednota českých matematiků a fyziků, 1968, roč. 13, č. 3, s. 151-161. ISSN 0032-2423. Dostupné z: http://dml.cz/dmlcz/137623

[JurPei] JÜRGENS Hartmut, Heinz-Otto PEITGEN. *Chaos and Fractals: New Frontiers of Science.* 2nd ed. New York: Springer, 2004. ISBN 03-872-1823-8.

[mat6] KOČANDRLE, Milan a Leo BOČEK. *Matematika pro gymnázia: analytická geometrie.* 2., upr. vyd. Praha: Prometheus, 2001, 220 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6163-9.

[Kope] KOPECKÝ, Milan. *Základy teorie množin.* 1. vyd. Olomouc: Univerzita Palackého, 2004, 114 s. ISBN 80-244-0754-X.

[mat7] ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia: posloupnosti a řady.* 2. vyd. Praha: Prometheus, 2001, 126 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6195-7.

[mat8] ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia: goniometrie.* 3. vyd. Praha: Prometheus, 2001, 139 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6203-1.

[mat9] ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia: funkce.* 3. upr. vyd. Praha: Prometheus, 2001, 168 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6164-7.

[Pola] POLÁK, Josef. *Přehled středoškolské matematiky.* 9. vyd. Praha: Prometheus, 2008, 659 s. ISBN 978-807-1963-561.

[mat10] POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia: planimetrie.* 4. vyd. Praha: Prometheus, 2001, 206 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6174-4.

[mat11] POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia: stereometrie.* 3., upr. vyd. Praha: Prometheus, 2000, 223 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6178-7.

[Soch] SOCHOR, Antonín. *Metamatematika teorií množin.* Vyd. 1. Praha: Karolinum, 2005, 203 s. ISBN 80-246-1160-0.

[Stru] STRUIK, Dirk J. *Dějiny matematiky.* Přeložili Jaroslav FOLTA, Luboš NOVÝ. Praha: Orbis, 1963, 250 s. Malá moderní encyklopedie, sv. 12.

[Vop1] VOPENKA, Petr. *Podivuhodný květ českého baroka: první přednášky o teorii množin.* Vyd. 1. Praha: Karolinum, 1998, 296 s. ISBN 80-718-4646-5.

[Vop2] VOPĚNKA, Petr. *Horizonty nekonečna: matematický pohled na svět.* Praha: Moraviapress, 2004, 168 s. Knihovna ceny Nadace Dagmar a Václava Havlových Vize 97, sv. 6. ISBN 80-861-8166-9.

[Alef] Alef. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001– [cit. 2012-04-30]. Dostupné z: http://cs.wikipedia.org/wiki/Alef

[RVP] BALADA, Jan. *Rámcový vzdělávací program pro gymnázia: RVP G* [online]. Praha: Výzkumný ústav pedagogický v Praze, c2007, 100 s. [cit. 2012-04-30]. ISBN 978-808-7000-113. Dostupné z: http://www.vuppraha.cz/wp-content/uploads/2009/12/RVPG-2007-07_final.pdf.

[Russ] Russellův paradox. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2012-04-30]. Dostupné z: http://cs.wikipedia.org/wiki/Russell%C5%AFv_paradox

[Cant] Cantor biography. O'CONNOR, John a ROBERTSON. UNIVERSITY OF ST ANDREWS, Scotland. *MacTutor History of Mathematics* [online]. 2006, 25. 1. 2012 [cit. 2012-04-30]. Dostupné z: http://turnbull.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Cantor.html

Přílohy

A Nekonečno v matematice na SŠ

Na středních školách, ať již na gymnáziích nebo na středních odborných školách či středních odborných učilištích, se žáci také setkávají s nekonečnem, přesto nebývá v učebnicích tento pojem vysvětlen a učebnice spoléhají na jeho intuitivní pojetí. Pochopení nekonečna se na středních školách nevyžaduje, Rámcový vzdělávací program [RVP] se pochopením nekonečna také nezabývá. Z populárních učebnic nakladatelství Prometheus tématické řady Matematika pro gymnázia [mat1]–[mat11], Standardů matematického vzdělávání pro SOŠ a SOU [stan] a Přehledu středoškolské matematiky [Pola] vyplynula některá témata, ve kterých se žáci mohou setkat s pojmem nekonečno přímo či nepřímo.

A.1 Výroková logika a číselné množiny

Při práci s kvantifikovanými výroky se žáci setkávají s kvantifikátorem $\forall$ neboli *pro všechna*. Ve vztahu k nekonečnu je pozornost je v této oblasti zaměřena na výroky týkající se přirozených čísel. Žák přichází do styku s výroky používající potenciální nekonečno

„Pro libovolné přirozené číslo platí …“

nebo aktuální nekonečno

„Pro všechna přirozená čísla platí …“

Při práci s racionálními čísly se před žákem objevuje problematika čísel s neukončeným periodickým desetinným rozvojem.

$$\frac{1}{3} = 0{,}33333\ldots = 0{,}\overline{3}$$

Zde se nekonečno objevuje přímo, neboť žák pracuje s nekonečnou posloupností opakujících se číslic. Následně u iracionálních čísel se periodické opakování vytrácí. V obou situacích se tak objevuje aktuální nekonečno ve formě aktuálně nekonečného desetinného rozvoje, přičemž čistě z pohledu desetinného rozvoje lze pojímat vlastní rozvoj čísla s neukončeným periodickým rozvojem jako potenciální nekonečno, neboť daná perioda umožňuje jednoduše najít libovolnou číslici rozvoje.

Problematika intervalů reálných čísel zahrnuje také neohraničené intervaly, u kterých se žák setkává se symboly $+\infty$ a $-\infty$, „plus nekonečno“ a „mínus nekonečno“. Tyto symboly jsou však pojímány jako hypotetické konce reálné číselné osy (nedosažitelné body) nebo jako symbolické zaznačení výrazu „a stále dál“. Princip nedosažitelných bodů číselné osy se pak také objevuje v chápání nekonečna v přirozených, celých i racionálních číslech.

A.2 Funkce

V této oblasti se žáci mohou setkat s nekonečnem při studiu definičního oboru nebo při studiu chování funkčních hodnot. U definičního oboru reálných funkcí jde o reálnou číselnou osu a z toho vyplývající pojetí nekonečna.

Z hlediska růstu či klesání mohou funkční hodnoty růst/klesat mimo všechny meze. Ve formulacích „roste/klesá až do nekonečna“ je nekonečno použito pouze jako vyjádření neohraničenosti. Tento růst či klesání může byt spojen s neohraničeností definičního oboru (například rostoucí lineární funkce definovaná na celém oboru reálných čísel) nebo také s nekonečným přibližováním funkčních hodnot k dané hodnotě, například lineární lomená funkce, kde se větve hyperboly nekonečně přibližují k souřadnicovým osám, funkce exponenciální a logaritmická, které se funkční hodnoty přibližují vždy k jedné z těchto os, nebo funkce tangens, případně kotangens, které funkční hodnoty rostou nade všechny meze při přibližování velikosti použitého úhlu k hodnotám $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, respektive $k \cdot \pi$ pro kotangens, kde k označuje libovolné celé číslo. Problematika nekonečna se také objevuje v chování funkčních hodnot periodických funkcí, například u goniometrických funkcí. Zde je situace z hlediska nekonečna obdobná jako u čísel s nekonečným periodickým desetinným rozvojem.

A.3 Rovnice a nerovnice

Problematika funkcí úzce souvisí s řešením rovnic nebo soustav rovnic, promítají se sem tak všechny situace, ve kterých se objevuje nekonečno u funkcí, protože řešení rovnic lze převést na problematiku hledání průsečíků grafu funkce s osou x grafu. Množina kořenů, resp. řešení, může být nekonečná, neboť může nastat situace, kdy je daná rovnice nebo soustava řešitelná pro libovolnou hodnotu dané proměnné. Nekonečně mnoho kořenů, řešení, vyjadřuje aktuální nekonečno takových hodnot proměnné, pro které daná rovnice platí.

A.4 Planimetrie a stereometrie

Problematika nekonečna v planimetrii a stereometrii úzce souvisí s pojetím nekonečna jako nedostupného bodu. Například polopřímka by obsahovala jeden nedostupný bod, přímka dva a rovina nekonečně mnoho nedostupných bodů.

Do této části je možné zařadit také komplexní čísla, neboť na SŠ jsou probírány geometrické interpretace operací s komplexními čísly.

V analytické geometrii je možné se setkat s nekonečnem například při řešení soustav rovnic týkajících se průsečíku daných objektů, přičemž nekonečné množství řešení vyjadřuje splynutí obou útvarů, ale také při parametrickém vyjádření geometrických útvarů, kde je celý objekt popsán pomocí nekonečného množství hodnot parametru/parametrů. Prací s parametrickými rovnicemi geometrického objektu žák manipuluje konkrétním objektem, přestože se jedná o reprezentaci nekonečného množství hodnot parametru. Analogickou situací k případu nekonečného přibližování grafu funkce k jinému útvaru jsou v analytické geometrii kuželoseček asymptoty hyperboly. V tomto případě se hyperbola neustále přibližuje ke dvěma přímkám (asymptotám), nikdy je však neprotne, což je vyjádřeno tím, že soustava rovnic hyperboly a dané asymptoty nemá řešení.

A.5 Posloupnosti a řady

Jelikož základem pro posloupnosti a řady jsou přirozená čísla, pojetí nekonečna vychází právě z nich, a to v případě potenciálního nekonečna (nekonečná posloupnost dána rekurentně nebo jako funkce množiny přirozených čísel neboli zadání n-tým členem; zdůrazněn proces tvorby jednotlivých členů) i aktuálního nekonečna (manipulace se všemi členy posloupnosti najednou, například vynásobení všech členů daným číslem). V případě zadání posloupnosti jako funkce se objevuje také problematika nekonečna z této oblasti.

Do oblasti posloupností patří pojem limity posloupnosti. Z pojetí posloupnosti jako funkce vychází analogie nekonečného přibližování k dané funkční hodnotě, kde se na rozdíl od reálných funkcí využívá funkční hodnoty pouze pro n rostoucí nade všechny meze. V případě, že posloupnost nekonverguje neboli diverguje (neblíží se žádné reálné hodnotě pro n rostoucí nade všechny meze), může nastat situace, ve které hodnoty posloupnosti také rostou nebo klesají mimo všechny meze. V tom případě se užívají symboly $+\infty$ a $-\infty$ pro hodnotu limity.

Přímo navazující na posloupnosti jsou pak nekonečné řady, zde se využívá stejných nástrojů a interpretací jako u posloupností. Stejným způsobem se také využívá nekonečna v posloupnostech částečných součtů řady nebo jejich limit.

A.6 Kombinatorika a pravděpodobnost

Přestože kombinatorika a pravděpodobnost spadají do oblasti diskrétní matematiky, je zde možno najít spojitosti s nekonečnými množinami, například v teorii pravděpodobnosti při zjišťování pravděpodobnosti nějakého jevu, kde není možné onu pravděpodobnost určit výpočtem. V daném případě posloupnost relativních četností daného jevu konverguje (blíží) k hledané pravděpodobnosti, pro nekonečné množství pokusů by relativní četnost byla rovna hledané hodnotě.

V oblasti kombinatoriky je souvislost s nekonečnými množinami pouze principiální, neboť právě princip práce s variacemi s opakováním zdůvodňuje výpočet počtu podmnožin dané k-prvkové množiny pomocí k-tic složených z 0 a 1.

A.7 Diferenciální a integrální počet

V tomto oboru se dále rozvíjí práce s limitami. Nyní se již pracuje s limitami reálných funkcí, což znamená zavedení jednostranných a oboustranných limit funkce v bodě. Obdobně jako u limit posloupností se zde objevují nevlastní limity značené $+\infty$ či $-\infty$, kde uvedené symboly mají stále stejný zástupný význam. Oproti limitám číselných posloupností se může nevlastní limita objevit v konkrétním bodě (vlastním bodě).

Výpočet limit použitím

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} f(x)}{\lim\limits_{n\to\infty} g(x)}$$

může vyústit do tzv. *neurčitého výrazu*. Mezi tyto neurčité výrazy patří například

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{\infty}{0}, \quad 0 \cdot \infty, \quad \infty^0.$$

Termín *neurčitý výraz* se používá, protože klasickými aritmetickými prostředky není možné určit hodnotu daného výrazu, proto vlastní neurčitý výraz nemá přímý význam (konkrétní hodnotu), ale slouží pouze k určení dalšího postupu. Použitím dalších úprav výrazu s limitou je tak možné dojít k jednoznačnému výsledku. Přímým užitím limit funkcí v daném bodě je určování asymptot grafu dané funkce, přičemž jde opět o nekonečné přibližování grafu dané funkce k asymptotě, což reprezentuje výpočet pomocí limity.

Jiná oblast využívá *nekonečně malé hodnoty*, například při přibližování dvou bodů, kde onou hodnotou bude jejich vzdálenost. Volbou vhodného postup přibližování se vzdálenost bude neustále zmenšovat, avšak nulová nikdy nebude. Zmíněný postup se označuje jako přechod k nekonečně malým vzdálenostem zmíněných bodů.

Způsob přibližování lze popsat pomocí nekonečné posloupnosti, což umožňuje využití limit. Obdobným typem konstrukce jsou pak následně definovány tečna nebo derivace funkce v bodě.

Jiným způsobem vytváření nekonečně malých hodnot je postupné zjemňování dělení úseku na části, neboli vytváření stále více podúseků se stále se zmenšující vzdáleností jejich krajních bodů. Opět je možné postup tohoto zjemňování charakterizovat nekonečnou posloupností, z čehož vyplývá užití dalších matematických nástrojů. Pomocí zjemňování se následně definuje délka křivky a integrální součet neboli integrál.