PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA UNIVERZITY PALACKÉHO
KATEDRA ALGEBRY A GEOMETRIE

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Algebraický přístup k relačním systémům

2015

Petr Ševčík

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně pod vedením Prof. RNDr. Ivana Chajdy, DrSc., a že jsem uvedl veškerou použitou literaturu.

V Olomouci 21. února 2015 ....

Zde bych rád poděkoval Prof. RdDr. Ivanu Chajdovi, DrSc., vedoucímu mé práce, za podněty, cenné rady a čas, který mi věnoval.

Obsah

1 Úvod

Studium relačních systémů má původ už v minulosti. První systematický přístup však byl představen J. Riguetem ([1]). Algebraický přístup byl vyvinut A. I. Mal'cevem ([2]).

Cílem této práce bude přiřadit každému relačnímu systému $\mathcal{A}$ parciální grupoid $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ takovým způsobem, aby bylo možné vyjádřit jeho vlastnosti pomocí parciálních identit na $\mathcal{G}(\mathcal{A})$. Dále rozšířit parciální grupoid $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ na grupoid $\mathcal{G}^*(\mathcal{A})$ a popsat vlastnosti relačního systému pomocí identit na $\mathcal{G}^*(\mathcal{A})$.

Tento přístup umožní definovat podstruktury, kongruence a faktorové struktury relačních systémů a zkoumat jejich vlastnosti vzhledem k původnímu relačnímu systému.

Pro speciální (takzvané usměrněné) relační systémy byl tento přístup již zkoumán I. Chajdou a H. Längerem ([4][5][6][7]), kteří v uvedených pracích představili dva způsoby přiřazení grupoidu relačnímu systému.

V této práci daný přístup zobecním pro libovolné relační systémy a budu zkoumat jejich vlastnosti.

2 Relační systémy a (parciální) grupoidy

Nejprve tedy zavedeme několik pojmů a popíšeme základní fakta o parciálních grupoidech.

Definice 2.1. Nechť A je neprázdná množina, $D(A) \subseteq A$. Zobrazení $D(A) \times D(A) \to A$ nazveme *parciální binární operace*, $D(A)$ je její *definiční obor*. Je-li $D(A) = A$, nazývá se tato parciální binární operace *binární operací*. Je-li $\cdot$ parciální binární operace na A, nazývá se dvojice $\mathcal{A} = (A, \cdot)$ *parciální grupoid*, je-li $\cdot$ binární operace, nazývá se $\mathcal{A} = (A, \cdot)$ *grupoid*.

Definice 2.2. *Relačním systémem* rozumíme uspořádanou dvojici $\mathcal{A} = (A, R)$, kde A je neprázdná množina a R je binární relace na A, t.j. $R \subseteq A \times A$.

Definice 2.3. Nechť $\mathcal{A} = (A, \cdot)$ je parciální grupoid a $p(x_1, \ldots, x_n)$, $q(x_1, \ldots, x_n)$ jsou n-ární termy signatury $(\cdot)$. Řekneme, že

$$p(x_1, \ldots, x_n) = q(x_1, \ldots, x_n)$$

je *existenční identita* na $\mathcal{A}$, jestliže pro každé $a_1, \ldots, a_n \in A$ pro které jsou $p(a_1, \ldots, a_n)$ i $q(a_1, \ldots, a_n)$ definované platí $p(a_1, \ldots, a_n) = q(a_1, \ldots, a_n)$.
Značíme $\stackrel{e}{=}$.
Řekneme, že

$$p(x_1, \ldots, x_n) = q(x_1, \ldots, x_n)$$

je *silná identita* na A, jestliže pro každé $a_1, \ldots, a_n \in A$ je $p(a_1, \ldots, a_n)$ definováno právě když $q(a_1, \ldots, a_n)$ je definováno, a pak platí $p(a_1, \ldots, a_n) = q(a_1, \ldots, a_n)$.
Značíme $\stackrel{s}{=}$.

Příklad 2.1. *Uvažujme parciální grupoid $G_1 = (\{a, b, c, d\}, \cdot)$ daný tabulkou:*

$\cdot$	a	b	c	d
a	b	b	-	a
b	b	c	c	-
c	-	c	d	d
d	a	-	d	a

Pak G_1 splňuje existenční identitu $(xy)x \stackrel{e}{=} xx$, ale nesplňuje odpovídající silnou identitu (např. $(ca)c$ není definováno, zatímco $cc = d$).
Nyní uvažujme parciální grupoid $G_2 = (\{a, b, c, d\}, *)$ daný tabulkou:

$*$	a	b	c	d
a	c	c	c	-
b	c	c	c	-
c	c	c	d	d
d	-	-	d	-

Pak G_2 splňuje silnou identitu $(xy)x \stackrel{s}{=} xx$.

Ukážeme, že každý parciální grupoid lze rozšířit na grupoid.

Definice 2.4. Buď $\mathcal{A} = (A, \cdot)$ parciální grupoid a nechť $1 \notin A$. Jeho jednobodovým rozšířením rozumíme grupoid $\mathcal{A}^* = (A \cup \{1\}, *)$, kde operace $*$ je definovaná následovně:

$$a * b = \begin{cases} a \cdot b & \text{pokud } a, b \in D(A) \\ 1 & \text{v ostatních případech.} \end{cases}$$

Definice 2.5. Buď $\mathcal{G}$ parciální grupoid. Jeho *zúplněním* $\mathcal{G}^*$ rozumíme jeho jednobodové rozšíření, pokud parciální grupoid $\mathcal{G}$ není úplný, a samotný grupoid $\mathcal{G}$, pokud je úplný.

Lemma 2.6. Buď $\mathcal{A} = (A, \cdot)$ parciální grupoid splňující silnou identitu $p \stackrel{s}{=} q$. Pak jeho jednobodové rozšíření $\mathcal{A}^* = (A, \cdot)$ splňuje identitu $p = q$.

Důkaz: Nechť $\mathcal{A}$ splňuje $p \stackrel{s}{=} q$. Pak pokud $p(a_1, \ldots, a_n)$ je definováno, pak i $q(a_1, \ldots, a_n)$ je definováno a platí $p(a_1, \ldots, a_n) = q(a_1, \ldots, a_n)$ v $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}^*$. Pokud $p(a_1, \ldots, a_n)$ není definováno, pak také $q(a_1, \ldots, a_n)$ není definováno. Odtud matematickou indukcí přes složitost termu dostáváme $p(a_1, \ldots, a_n) = 1 = q(a_1, \ldots, a_n)$ v $\mathcal{A}^*$. $\square$

Poznámka 2.7. Tvrzení z Lemmatu 2.6 pro existenční identity neplatí. Uvažujme parciální grupoid $\mathcal{G}_1$ z Příkladu 2.1. Ten splňuje existenční identitu $(xy)x \stackrel{e}{=} xx$, pro jeho jednobodové rozšíření $\mathcal{G}_1^*$ však platí např. $(ac)a = 1 \neq b = aa$, tedy nesplňuje identitu $(xy)x = xx$.

3 Přiřazení prvního typu

Jak bylo zmíněno v předchozí části, lze relačnímu systému přiřadit (parciální) grupoid dvěma způsoby.

V tomto oddílu, buď R binární relace na množině A.

Definice 3.1. Řekneme, že parciální operace $\cdot$ *je přiřazená* relaci R (ve smyslu prvního typu), jestliže pro každé $x, y \in A$ platí následující:

$$x \cdot y = y \text{ jestliže } (x, y) \in R$$
$$x \cdot y \in U_R(x, y) \text{ jestliže } (x, y) \notin R \text{ a zároveň } U_R(x, y) \neq \varnothing,$$

kde symbolem $U_R(x, y) := \{z \in A | (x, z), (y, z) \in R\}$ označujeme *horní kužel* prvků x a y vzhledem k relaci R.
Řekneme, že parciální grupoid $\mathcal{G} = (A, \cdot)$ *je přiřazený* relačnímu systému $\mathcal{A} = (A, R)$ (ve smyslu prvního typu), jestliže operace $\cdot$ je přiřazená relaci R.

V tomto oddílu, budu-li mluvit o parciálním grupoidu přiřazeném dané relaci (relačnímu systému), je jím míněn grupoid přiřazený ve smyslu prvního typu.

Poznámka 3.2. Parciální operace $\cdot$ přiřazená relaci R je úplná právě když pro každé $x, y \in A$ platí $(x, y) \in R$ nebo $U_R(x, y) \neq \varnothing$ (nebo obojí).

Lemma 3.3. Je-li parciální operace $\cdot$ přiřazená relaci R a $a, b \in A$, pak platí:

(i) Je-li $a \cdot b$ definováno, pak $(a, a \cdot b) \in R$.

(ii) $(a, b) \in R$ právě když $a \cdot b = b$.

Důkaz:

(i) Pokud $(a, b) \in R$, pak $(a, a \cdot b) = (a, b) \in R$. Pokud $(a, b) \notin R$, pak $a \cdot b \in U_R(a, b)$, a tedy $(a, a \cdot b) \in R$. $\square$

(ii) Pokud $(a, b) \in R$, pak $a \cdot b = b$. Nyní nechť $a \cdot b = b$. Pak pro $(a, b) \notin R$ dostáváme $(a, b) = (a, a \cdot b) \in R$, což je spor. Proto $(a, b) \in R$.

Poznámka 3.4. Parciální operace $\cdot$ je přiřazená nějaké binární relaci právě když pro každé $x, y \in A$ platí:

1. Pokud $x \cdot y \neq y$ a existuje $z \in A$ takové, že $x \cdot z = y \cdot z = z$, pak $x \cdot (x \cdot y) = y \cdot (x \cdot y) = x \cdot y$.

2. Pokud $x \cdot y$ je definováno, pak buď $x \cdot y = y$ nebo existuje $z \in A$ takové, že $x \cdot z = y \cdot z = z$.

Věta 3.5. Je-li parciální operace $\cdot$ přiřazená nějaké reflexivní relaci, pak platí $x \cdot x \overset{s}{=} x$, $x \cdot (x \cdot y) \overset{s}{=} x \cdot y$, $y \cdot (x \cdot y) \overset{s}{=} x \cdot y$.

Důkaz: Buď $a, b \in A$ a nechť parciální operace $\cdot$ je přiřazená reflexivní relaci S. Protože $(a, a) \in S$, dostáváme $a \cdot a = a$. Pokud $(a, b) \in S$, pak $a \cdot (a \cdot b) = a \cdot b$ a $b \cdot (a \cdot b) = b \cdot b = b = a \cdot b$. Pokud $(a, b) \notin S$ a $U_s(a, b) \neq \varnothing$, pak $a \cdot b \in U_S(a, b)$, a tedy $a \cdot (a \cdot b) = b \cdot (a \cdot b) = a \cdot b$. Pokud $(a, b) \notin S$ a $U_S(a, b) = \varnothing$, pak $a \cdot b$, $a \cdot (a \cdot b)$, ani $b \cdot (a \cdot b)$ nejsou definovány. □

Věta 3.6. Buď $\mathcal{A} = (A, R)$ relační systém a $\mathcal{G} = (A, \cdot)$ jemu přiřazený parciální grupoid. Pak platí:

1. R je reflexivní právě když $\mathcal{G}$ je idempotentní, tedy splňuje $x \cdot x \overset{s}{=} x$.
2. Je-li R symetrická, pak v $\mathcal{G}$ platí $(x \cdot y) \cdot x \overset{e}{=} x$.
   Platí-li v $\mathcal{G}$ $(x \cdot y) \cdot x \overset{s}{=} x$, pak R je symetrická.
3. R je tranzitivní právě když v $\mathcal{G}$ platí $x \cdot ((x \cdot y) \cdot z) \overset{s}{=} (x \cdot y) \cdot z$.
4. Platí-li v $\mathcal{G}$ identita $(x \cdot y) \cdot z \overset{s}{=} x \cdot (y \cdot z)$, pak je R tranzitivní.
5. Platí-li v $\mathcal{G}$ identita $x \cdot y \overset{e}{=} y \cdot x$, pak je R antisymetrická.
6. Platí-li v $\mathcal{G}$ identita $(x \cdot y) \cdot x \overset{e}{=} x \cdot y$, pak je R antisymetrická.

Důkaz:

1. Zjevný.
2. Nechť R je symetrická. Pak buď $(a, a \cdot b) \in R$, tedy $(a \cdot b, a) \in R$, a proto $(a \cdot b) \cdot a = a$. Nebo $U_{a,b} = \varnothing$ a tedy $a \cdot b$ ani $(a \cdot b) \cdot a$ není definováno.
   Nechť $(x \cdot y) \cdot x \overset{s}{=} x$ a nechť $(a, b) \in R$. Pak $a = (a \cdot b) \cdot a = b \cdot a$. Odtud $(b, a) \in R$.
3. Nechť R je tranzitivní. Pokud $(a \cdot b) \cdot c$ není definováno, pak ani $a \cdot ((a \cdot b) \cdot c)$ není definováno. Nechť tedy $(a \cdot b) \cdot c$ je definováno. Pak $(a, a \cdot b) \in R$ a zároveň $(a \cdot b, (a \cdot b) \cdot c) \in R$. Protože R je tranzitivní tak i $(a, (a \cdot b) \cdot c) \in R$.
   Nechť v $\mathcal{G}$ platí $x \cdot ((x \cdot y) \cdot z) \overset{s}{=} (x \cdot y) \cdot z$, a nechť $(a, b), (b, c) \in R$. Pravá strana se rovná $(a \cdot b) \cdot c = b \cdot c = c$. Proto i levá strana je definovaná a rovná se $a \cdot ((a \cdot b) \cdot c) = a \cdot c$. Tedy $a \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot ((a \cdot b) \cdot c) = c$, $(a, c) \in R$.
4. Nechť v $\mathcal{G}$ platí $(x \cdot y) \cdot x \overset{s}{=} x \cdot (y \cdot z)$, a nechť $(a, b), (b, c) \in R$. Pak levá strana $(a \cdot b) \cdot c = b \cdot c = c$. Protože je levá strana definovaná, je definovaná i pravá strana a rovná se $a \cdot (b \cdot c) = a \cdot c$, tedy $a \cdot c = c$, $(a, c) \in R$.

5. Nechť v $\mathcal{G}$ platí $x \cdot y \stackrel{e}{=} y \cdot x$, a nechť $(a, b) \in R$, $a \neq b$. Pak $a \cdot b = b$ a $b \cdot a = \begin{cases} a \cdot b = b \neq a \\ \text{není definováno} \end{cases}$
V obou případech $(b, a) \notin R$.

6. Nechť v $\mathcal{G}$ platí $(x \cdot y) \cdot x \stackrel{e}{=} x \cdot y$ a nechť $(a, b) \in R$, $a \neq b$. Pak pravá strana se rovná $a \cdot b = b$, levá strana $(a \cdot b) \cdot a = b \cdot a = \begin{cases} b \neq a \\ \text{není definováno} \end{cases}$
V obou případech $(b, a) \notin R$. $\square$

Příklad 3.1. Parciální grupoid přiřazený relačnímu systému se symetrickou relací R nemusí splňovat silnou identitu $(x \cdot y) \cdot x \stackrel{s}{=} x$. Uvažujme relační systém $\mathcal{A} = (\{a, b, c, d\}, \{(a, b), (b, a), (b, c), (c, b), (c, d), (d, c)\})$ a jemu přiřazený parciální grupoid $\mathcal{G}(A) = (A, \cdot)$ daný tabulkou:

·	a	b	c	d
a	b	b	b	-
b	a	c	c	c
c	b	b	b	d
d	-	c	c	c

Relace R je symetrická, ale hodnota $(a \cdot d) \cdot a$ není definovaná.

Příklad 3.2. Je-li parciální grupoid $\mathcal{G} = (A, \cdot)$ přiřazený relačnímu systému $\mathcal{A} = (A, R)$ a platí-li v $\mathcal{G}$ existenční identita $(x \cdot y) \cdot x \stackrel{e}{=} x$, relace R nemusí být symetrická. Uvažujme relační systém $\mathcal{A} = (A, R) = (\{a, b, c\}, \{(a, c), (b, c), (c, a)\})$ a jemu přiřazený parciální grupoid $\mathcal{G}$ daný tabulkou:

·	a	b	c
a	c	c	c
b	c	c	c
c	a	-	-

Relace R není symetrická, přesto v $\mathcal{G}$ platí existenční identita $(x \cdot y) \cdot x \stackrel{e}{=} x$.

Příklad 3.3. Silnou identitu v bodě 3. Věty 3.6 nelze nahradit existenční identitou. Uvažujme relační systém s relací $R = \{(a, c), (a, d), (b, c), (b, e), (c, d), (c, e), (d, d), (e, e)\}$ a jemu přiřazený parciální grupoid $\mathcal{G}$ daný tabulkou:

·	a	b	c	d	e
a	c	c	c	d	-
b	c	c	c	-	e
c	d	e	d	d	e
d	d	-	d	d	-
e	-	e	e	-	e

V $\mathcal{G}$ platí existenční identita $x \cdot ((x \cdot y) \cdot z) \stackrel{e}{=} (x \cdot y) \cdot z$, ale R není tranzitivní.

Příklad 3.4. Silnou identitu v bodě 4. Věty 3.6 nelze nahradit existenční identitou. Uvažujme relační systém s relací $R = \{(a, b), (b, c), (c, c)\}$ a jemu přiřazený parciální grupoid $\mathcal{G}$ daný tabulkou:

·	a	b	c
a	b	b	-
b	-	c	c
c	-	c	c

V $\mathcal{G}$ platí existenční identita $(x \cdot y) \cdot z \stackrel{e}{=} x \cdot (y \cdot z)$, ale R není tranzitivní.

Příklad 3.5. Implikaci v bodě 5. Věty 3.6 nelze obrátit. Uvažujme relační systém s antisymetrickou relací $R = \{(a, b), (a, c), (b, c), (c, c)\}$ a jemu přiřazený (parciální) grupoid $\mathcal{G}$ daný tabulkou:

·	a	b	c
a	c	b	c
b	c	c	c
c	c	c	c

V $\mathcal{G}$ ale existenční identita $x \cdot y \stackrel{e}{=} y \cdot x$ neplatí. Například $a \cdot b = b$, ale $b \cdot a = c$. Stejně tak implikaci v bodě 6. Věty 3.6 nelze obrátit, protože v $\mathcal{G}$ neplatí ani existenční identita $(x \cdot y) \cdot x \stackrel{e}{=} x \cdot y$. Například $(a \cdot b) \cdot a = b \cdot a = c$, ale $a \cdot b = b$.

4 Přiřazení druhého typu

Nyní se zabývejme druhou možností přiřazení.

V tomto oddílu opět, buď R binární relace na množině A.

Definice 4.1. Parciální operace $\cdot$ *je přiřazená* relaci R (ve smyslu druhého typu), jestliže pro každé $x, y \in A$ platí následující:

$$
\begin{aligned}
&x \cdot y = y \text{ jestliže } (x, y) \in R \\
&x \cdot y = x \text{ jestliže } (x, y) \notin R \text{ a zároveň } (y, x) \in R \\
&x \cdot y \in U_R(x, y) \text{ jestliže } (x, y) \notin R \text{ a zároveň } U_R(x, y) \neq \varnothing.
\end{aligned}
$$

Řekneme, že parciální grupoid $\mathcal{G} = (A, \cdot)$ *je přiřazený* relačnímu systému $\mathcal{A} = (A, R)$ (ve smyslu druhého typu), jestliže operace $\cdot$ je přiřazená relaci R.

V tomto oddílu, budu-li mluvit o parciálním grupoidu přiřazeném dané relaci, je jím míněn grupoid přiřazený ve smyslu druhého typu.

Poznámka 4.2. Buď $\mathcal{A} = (A, R)$ relační systém a $\mathcal{G} = (A, \cdot)$ přiřazený parciální grupoid. Pak pro každé $x, y \in A$ je $x \cdot y$ definováno právě když $y \cdot x$ je definováno.

Poznámka 4.3. Parciální operace $\cdot$ přiřazená relaci R je úplná, právě když pro každé $x, y \in A$ platí $(x, y) \in R$ nebo $(y, x) \in R$ nebo $U_R(x, y) \neq \varnothing$.

Lemma 4.4. Je-li parciální operace $\cdot$ přiřazená relaci R, pak pro každé $a, b \in A$ platí $(a, b) \in R$ právě když $a \cdot b = b$.

Důkaz: Jestliže $(a, b) \in R$, pak z Definice 4.1 plyne $a \cdot b = b$. Nechť $(a, b) \notin R$. Pokud $(b, a) \in R$, pak $a \cdot b = a \neq b$. Pokud $(b, a) \notin R$, ale $U_R(a, b) \neq \varnothing$, pak $a \cdot b \in U_R(a, b)$, tedy $(a, a \cdot b) \in R$, ale $(a, b) \notin R$ a tedy $a \cdot b \neq b$. Pokud $(b, a) \notin R$ a $U_R(a, b) = \varnothing$, pak $a \cdot b$ není definováno. □

Poznámka 4.5. Parciální operace $\cdot$ je přířazená nějaké relaci právě když pro každé $x, y \in A$ platí:

(i) Pokud $x \cdot y \neq y$ a $y \cdot x = x$, pak $x \cdot y = x$.

(ii) Pokud $x \cdot y \neq y$ a $y \cdot x \neq x$ a pokud existuje $z \in A$ takové, že $x \cdot z = y \cdot z = z$, pak $x \cdot (x \cdot y) = y \cdot (x \cdot y) = x \cdot y = y \cdot x$.

(iii) Je-li $x \cdot y$ definováno, pak $x \cdot y = y$ nebo $y \cdot x = x$ nebo existuje $z \in A$ takové, že $x \cdot z = y \cdot z = z$. □

Věta 4.6. Buď $\mathcal{A} = (A, R)$ relační systém a $\mathcal{G} = (A, \cdot)$ přiřazený parciální grupoid. Pak platí:

1. R je reflexivní právě když $\mathcal{G}$ splňuje $x \cdot x \stackrel{s}{=} x$.
2. R je symetrická, právě když v $\mathcal{G}$ platí $(x \cdot y) \cdot x \stackrel{e}{=} x$.
3. Je-li R symetrická, pak v $\mathcal{G}$ platí $x \cdot (x \cdot y) \stackrel{s}{=} x \cdot y$
4. Platí-li v $\mathcal{G}$ identita $(x \cdot y) \cdot z \stackrel{s}{=} x \cdot (y \cdot z)$, pak je R tranzitivní.
5. Platí-li v $\mathcal{G}$ identita $x \cdot ((x \cdot y) \cdot z) \stackrel{s}{=} (x \cdot y) \cdot z$ pak je R tranzitivní.
6. R je antisymetrická právě když v $\mathcal{G}$ platí $x \cdot y \stackrel{e}{=} y \cdot x$, což je ekvivalentní s $x \cdot y \stackrel{s}{=} y \cdot x$.

Důkaz:

1. Zjevný.
2. Nechť R je symetrická a $x \cdot y$ je definováno. Pak $x \cdot y = y$ nebo $x \cdot y \in U_R(x, y)$. V obou případech $(x, x \cdot y) \in R$, a tedy ze symetrie $(x \cdot y, x) \in R$. Odtud už dostáváme, že $(x \cdot y) \cdot x = x$.
   Nechť v $\mathcal{G}$ platí $(x \cdot y) \cdot x \stackrel{e}{=} x$ a $a, b \in A$, $(a, b) \in R$. Protože $a \cdot b$ je definováno, je definováno i $b \cdot a$ a platí, že $a = (a \cdot b) \cdot a = b \cdot a$. Tedy $(b, a) \in R$.
3. Nechť R je symetrická, a nechť pro $a, b \in A$ je $a \cdot b$ definováno. Nejdříve uvažujme $(a, b) \in R$. Pak přímo vidíme, že $a \cdot (a \cdot b) = a \cdot b$. Nechť tedy $(a, b) \notin R$ pak také $(b, a) \notin R$, a tedy z definice $(a, a \cdot b) \in R$. Odtud $a \cdot (a \cdot b) = a \cdot b$.
4. Nechť v $\mathcal{G}$ platí $(x \cdot y) \cdot z \stackrel{s}{=} x \cdot (y \cdot z)$ a nechť $a, b, c \in A$ a $(a, b), (b, c) \in R$. Pak $c = b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c \stackrel{s}{=} a \cdot (b \cdot c) = a \cdot c$. Levá strana je definovaná, tedy i pravá musí být definovaná a $a \cdot c = c$, tedy $(a, c) \in R$.
5. Nechť v $\mathcal{G}$ platí $x \cdot ((x \cdot y) \cdot z) \stackrel{s}{=} (x \cdot y) \cdot z$, a nechť $a, b, c \in A$ a $(a, b), (b, c) \in R$. Pak $a \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot ((a \cdot b) \cdot c) \stackrel{s}{=} (a \cdot b) \cdot c = b \cdot c = c$. Pravá strana je definovaná, tedy i levá musí být definovaná a platí $a \cdot c = c$, tedy $(a, c) \in R$.
6. Nechť R je antisymetrická, a nechť pro $a, b \in A$ je $a \cdot b$ definováno. Je-li $a = b$ platí rovnost triviálně. Nechť tedy navíc platí $a \neq b$. Nejprve uvažujme případ, kdy $(a, b) \in R$ a zároveň tedy $(b, a) \notin R$. V tomto případě z definice parciální operace $\cdot$ dostaneme, že $a \cdot b = b = b \cdot a$. Nyní nechť $(a, b), (b, a) \notin R$. Pak z definice operace $\cdot$ dostáváme, že $a \cdot b = b \cdot a \in U_R(a, b)$.
   Nechť v $\mathcal{G}$ platí $x \cdot y \stackrel{s}{=} y \cdot x$ a nechť $(a, b), (b, a) \in R$. Pak $b = a \cdot b = b \cdot a = a$.
   □

Příklad 4.1. Existenční identitu v bodě 2. Věty 4.6 nelze nahradit silnou. Uvažujme relační systém s relací $R = \{(a,c),(c,a),(c,d),(d,c),(b,d),(d,b)\}$ a jemu přiřazený parciální grupoid daný tabulkou:

$\cdot$	a	b	c	d
a	c	-	c	c
b	-	d	d	d
c	a	d	d	c
d	c	b	c	c

Relace R je symetrická, ale $(a \cdot b) \cdot a$ není definováno.

Příklad 4.2. Implikaci v bodě 3. věty 4.6 nelze obrátit. Uvažujme relační systém s relací $R = \{(a,b),(b,b)\}$. Tomu lze jediným způsobem přiřadit (parciální) grupoid $\mathcal{G}$ a to následovně:

$\cdot$	a	b
a	b	b
b	b	b

V $\mathcal{G}$ platí $x \cdot (x \cdot y) \stackrel{s}{=} x \cdot y$, přičemž R není symetrická.

Příklad 4.3. Implikace v bodech 4. a 5. věty 4.6 nelze obrátit. Uvažujme relační systém s relací $R = \{(a,b),(b,c),(a,c)\}$ a jemu přiřazený parciální grupoid $\mathcal{G}$ daný tabulkou:

$\cdot$	a	b	c
a	b	b	c
b	b	c	c
c	c	c	-

Relace R je tranzitivní, přitom ale neplatí $(x \cdot y) \cdot z \stackrel{s}{=} x \cdot (y \cdot z)$, protože $(b \cdot a) \cdot a = b \cdot a = b \neq c = b \cdot b = b \cdot (a \cdot a)$. Obdobně neplatí ani $x \cdot ((x \cdot y) \cdot z) \stackrel{s}{=} (x \cdot y) \cdot z$, protože $b \cdot ((b \cdot a) \cdot a) = b \cdot b = c \neq b = (b \cdot a) \cdot a$.

Příklad 4.4. Silné identity v bodech 4. a 5. věty 4.6 nelze nahradit existenčními. Uvažujme relační systém s relací $R = \{(a,a),(a,b),(b,b),(b,c),(c,c)\}$ a jemu přiřazený parciální grupoid $\mathcal{G}$ daný tabulkou:

$\cdot$	a	b	c
a	a	b	-
b	b	b	c
c	-	c	c

V $\mathcal{G}$ platí existenční identita $(x \cdot y) \cdot z \stackrel{e}{=} x \cdot (y \cdot z)$ ale neplatí její silná verze, protože $(b \cdot a) \cdot c = b \cdot c = c$, ale $b \cdot (a \cdot c)$ není definováno. Stejně tak platí existenční identita $x \cdot ((x \cdot y) \cdot z) \stackrel{e}{=} (x \cdot y) \cdot z$, ale její silná verze neplatí, protože $(a \cdot b) \cdot c = b \cdot c = c$, ale $a \cdot ((a \cdot b) \cdot c)$ není definováno. Přitom relace R není tranzitivní.

Lemma 4.7. Je-li parciální operace $\cdot$ přiřazená reflexivní relaci R, pak $(x \cdot y) \cdot (y \cdot x) \stackrel{s}{=} y \cdot x$.

Důkaz: Buď $a, b \in A$ a nechť $a \cdot b$ je definováno. Pokud $(a, b), (b, a) \in R$, pak $(a \cdot b) \cdot (b \cdot a) = b \cdot a$. Pokud $(a, b) \in R$, $(b, a) \notin R$, pak $(a \cdot b) \cdot (b \cdot a) = b \cdot b = b = b \cdot a$. Pokud $(a, b) \notin R$, $(b, a) \in R$, pak $(a \cdot b) \cdot (b \cdot a) = a \cdot a = a = b \cdot a$. Pokud $(a, b), (b, a) \notin R$, pak $(a \cdot b) \cdot (b \cdot a) = (b \cdot a) \cdot (b \cdot a) = b \cdot a$. $\square$

5 Kongruence a faktorové struktury

Nyní budeme studovat faktorové struktury, speciálně faktorové relační systémy. Abychom se však mohli zabývat faktorizací, je třeba si nejdřív zavést, co rozumíme kongruencí na relačním systému.

Existuje několik způsobů, jak kongruenci definovat. Proto využijeme přiřazeného parciálního grupoidu, respektive jeho jednobodového rozšíření (respektive zúplnění).

V tomto oddílu, není-li uvedeno jinak, se grupoidem přiřazeným relačnímu systému rozumí grupoid přiřazený v libovolném ze dvou typů přiřazení definovaném v předchozích oddílech.

Definice 5.1. Buď $\mathcal{G} = (G, \cdot)$ parciální grupoid. Pak ekvivalenci $\theta \subseteq G \times G$ nazveme *kongruencí* na $\mathcal{G}$, jestliže na jeho zúplnění $\mathcal{G}^*$ existuje kongruence θ^* taková, že

$$\forall x, y \in G : (x, y) \in \theta \Leftrightarrow (x, y) \in \theta^*.$$

Relaci θ^* nazveme *rozšířená relace* k relaci θ.

Definice 5.2. Buď $\mathcal{A} = (A, R)$ relační systém. Pak ekvivalenci $\theta \subseteq A \times A$ nazveme kongruencí na $\mathcal{A}$, jestliže existuje parciální grupoid $\mathcal{G}$ přiřazený $\mathcal{A}$ takový, že θ je kongruencí na $\mathcal{G}$.

Definice 5.3. Nechť A je neprázdná množina a θ je ekvivalence na A. *Třídou* $[a]_\theta$ pro $a \in A$ rozumíme množinu $[a]_\theta = \{b \in A; (a, b) \in \theta\}$.
Symbolem A/θ označíme množinu všech (navzájem různých) tříd $[a]_\theta$ pro $a \in A$; A/θnazveme *faktorová množina* dle ekvivalence θ.

Je-li θ ekvivalence na množině $\mathcal{A}$, budeme její třídu, obsahující prvek $a \in A$ označovat symbolem $[a]_\theta$. Bude-li zřejmé, o jakou ekvivalenci θ se jedná, budeme index θ vynechávat, a psát jen stručně $[a]$.

Nyní tedy můžeme definovat faktorový relační systém a následně zkoumat jeho vlastnosti.

Definice 5.4. Buď $\mathcal{G} = (G, \cdot)$ parciální grupoid a θ kongruence na $\mathcal{G}$. Pak *faktorovým parciálním grupoidem* $\mathcal{G}/\theta$ rozumíme uspořádanou dvojici $(G/\theta, *)$, kde $*$ je parciální operace definovaná takto:

$$[a] * [b] = \begin{cases} [a_1 \cdot b_1] & \text{jestliže existují } a_1 \in [a], b_1 \in [b] \text{ takové, že } a_1 \cdot b_1 \\ & \text{je definováno v } \mathcal{G}. \\ \text{není definováno} & \text{v ostatních případech.} \end{cases}.$$

Věta 5.5. Buď $\mathcal{G} = (G, \cdot)$ parciální grupoid a θ kongruence na $\mathcal{G}$. Nechť p, q jsou n-ární termy signatury $(\cdot)$. Platí-li v $\mathcal{G}$ existenční identita $p \overset{e}{=} q$ pak v $\mathcal{G}/\theta$ platí stejná existenční identita $p \stackrel{e}{=} q$. Platí-li v $\mathcal{G}$ silná identita $p \stackrel{s}{=} q$ pak v $\mathcal{G}/\theta$ platí stejná silná identita $p \stackrel{s}{=} q$.

Důkaz: Nechť $a_1, \ldots, a_n \in G/\theta$ a nechť v $\mathcal{G}$ platí silná identita $p \stackrel{s}{=} q$. Nechť $p(a_1, \ldots, a_n)$ je definováno. Pak existuje n-tice prvků $b_1, \ldots, b_n \in G$, $b_i \in a_i$ taková, že $p(b_1, \ldots, b_n)$ je definováno. Protože v $\mathcal{G}$ platí silná identita $p \stackrel{s}{=} q$ musí být i $q(b_1, \ldots, q_n)$ definováno, přičemž platí $p(b_1, \ldots, b_n) = q(b_1, \ldots, b_n)$. Tedy i $q(a_1, \ldots, a_n)$ je definováno a $p(a_1, \ldots, a_n) = q(a_1, \ldots, a_n)$.
Nechť nyní v $\mathcal{G}$ platí pouze existenční identita $p \stackrel{e}{=} q$ a nechť pro $a_1, \ldots, a_n$ jsou hodnoty obou termových funkcí definovány. Pak musí existovat n-tice prvků $b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_n \in G$, $b_i, c_i \in a_i$ takové, že $p(b_1, \ldots, b_n)$ je definováno a $q(c_1, \ldots, c_n)$ je definováno. Jestliže $p(c_1, \ldots, c_n)$ je definováno, pak $p(a_1, \ldots, a_n) = [p(c_1, \ldots, c_n)] = [q(c_1, \ldots, c_n)] = q(a_1, \ldots, a_n)$. Obdobně, je-li $q(b_1, \ldots, b_n)$ definováno. Nechť tedy $p(c_1, \ldots, c_n)$ ani $q(b_1, \ldots, b_n)$ není definováno. Pak v jednobodovém rozšíření $\mathcal{G}^*$ a pro rozšířenou relaci θ^* platí: $(b_i, c_i) \in \theta^*$, přičemž θ^* je kongruence, a tedy $(p(b_1, \ldots, b_n), p(c_1, \ldots, c_n)) \in \theta^*$, což znamená $(p(b_1, \ldots, b_n), 1) \in \theta^*$. Obdobně $(q(b_1, \ldots, b_n), q(c_1, \ldots, c_n)) \in \theta^*$ tedy $(1, q(c_1, \ldots, c_n)) \in \theta^*$. Z tranzitivity pak plyne, že $(p(b_1, \ldots, b_n), q(c_1, \ldots, c_n)) \in \theta^*$. Protože θ^* je rozšířenou relací k relaci θ a $p(b_1, \ldots, b_n), q(c_1, \ldots, c_n) \in G$, tak také platí $(p(b_1, \ldots, b_n), q(c_1, \ldots, c_n)) \in \theta$. Odtud $p(a_1, \ldots, a_n) = [p(b_1, \ldots, b_n)] = [q(c_1, \ldots, c_n)] = q(a_1, \ldots, a_n)$. $\square$

Definice 5.6. Buď $\mathcal{A} = (A, R)$ relační systém a θ ekvivalence na $\mathcal{A}$. *Faktorovým relačním systémem* $\mathcal{A}/\theta$ rozumíme uspořádanou dvojici $(A/\theta, R/\theta)$, kde $R/\theta = \{([x], [y]) \in A/\theta \times A/\theta | \exists x_0 \in [x], \exists y_0 \in [y], (x_0, y_0) \in R\}$. R/θ se nazývá *faktorová relace* dle ekvivalence θ.

Uveďme několik vlastností faktorových relačních systémů, plynoucích z této definice.

Věta 5.7. Buď $\mathcal{A} = (A, R)$ relační systém a θ ekvivalence na $\mathcal{A}$. Pak pro faktorový relační systém $\mathcal{A}/\theta = (A/\theta, R/\theta)$ platí:

1. Je-li R reflexivní, pak je i R/θ reflexivní.

2. Je-li R symetrická, pak je i R/θ symetrická.

Důkaz: Buď R reflexivní relace na A a nechť $[a] \in A/\theta$. Pak $(a, a) \in R$ a tedy z definice faktorové relace $([a], [a]) \in R/\theta$.
Obdobně buď R symetrická a nechť $[a], [b] \in A/\theta, ([a], [b]) \in R/\theta$. Tedy existují prvky $a_1 \in [a], b_1 \in [b]$ takové, že $(a_1, b_1) \in R$. Protože je R symetrická, tak i $(b_1, a_1) \in R$, a tedy z definice faktorové relace $([b], [a]) \in R/\theta$. $\square$

Příklad 5.1. Je-li θ ekvivalence na množině A, která není kongruencí na relačním systému $\mathcal{A}$ s tranzitivní relací R, pak faktorová relace R/θ nemusí být tranzitivní. Uvažujme relační systém $\mathcal{A} = (\{a,b,c,d,e\}, \{(a,c),(a,e),(b,d),(c,e)\}$ a ekvivalenci $\theta = \{(a,a),(b,b),(c,c),(c,d),(d,c),(d,d),(e,e)\}$. Relační systém $\mathcal{A}$ má tranzitivní relaci R, ale relace $R/\theta = \{([a],[c]),([a],[e]),([b],[c]),([c],[d])\}$ již tranzitivní není, neboť $([a],[c]) \in R/\theta$, $([c],[d]) \in R/\theta$ ale $([a],[d]) \notin R/\theta$.

Obdobně, jako můžeme přiřadit parciální grupoid relačnímu systému, lze přiřadit i relační systém parciálnímu grupoidu, a to následujícím způsobem:

Definice 5.8. Buď $\mathcal{G} = (G,\cdot)$ parciální grupoid. Relačním systémem *přiřazeným* $\mathcal{G}$ rozumíme relační systém $\mathcal{A} = \mathcal{A}(G) = (G,R)$, kde $R = \{(x,y) \in G^2; x \cdot y = y\}$.

Lemma 5.9. Je-li $\mathcal{G}$ parciální grupoid přiřazený relačnímu systému $\mathcal{A}$, pak relační systém přiřazený parciálnímu grupoidu $\mathcal{G}$ je $\mathcal{A}(G) = \mathcal{A}$.

Důkaz: Buď $\mathcal{A} = (A,R)$ relační systém a $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\mathcal{A}) = (A,\cdot)$ jemu přiřazený parciální grupoid. Dále buď $\mathcal{A}' = \mathcal{A}'(\mathcal{G}) = (A,R')$ relační systém přiřazený parciálnímu grupoidu $\mathcal{G}$. Protože oba relační systémy jsou na stejné množině, platí, že $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$ právě když $R = R'$.
Nechť $(a,b) \in R$. Pak $a \cdot b = b$, a tedy $(a,b) \in R'$. Nechť $(a,b) \in R'$. To platí pouze tehdy, jestliže $a \cdot b = b$, a tedy pouze je-li $(a,b) \in R$. $\square$

Věta 5.10. Buď $\mathcal{G} = (G,\cdot)$ parciální grupoid a $\mathcal{A}(\mathcal{G}) = (G,R)$ jemu přiřazený relační systém. Pak platí následující tvrzení:

1. Je-li $\mathcal{G}$ idempotentní, pak R je reflexivní.
2. Platí-li v $\mathcal{G}$ silná identita $(x \cdot y) \cdot x \stackrel{s}{=} x$, pak je R symetrická.
3. Platí-li v $\mathcal{G}$ silná identita $(x \cdot y) \cdot z \stackrel{s}{=} x \cdot (y \cdot z)$, pak je R tranzitivní.
4. Platí-li v $\mathcal{G}$ silná identita $x \cdot ((x \cdot y) \cdot z) \stackrel{s}{=} (x \cdot y) \cdot z$, pak je R tranzitivní.
5. Platí-li v $\mathcal{G}$ existenční identita $x \cdot y \stackrel{e}{=} y \cdot x$, pak je R antisymetrická.
6. Platí-li v $\mathcal{G}$ silná identita $(x \cdot y) \cdot x \stackrel{s}{=} x \cdot y$, pak je R antisymetrická.

Důkaz:

1. Nechť v $\mathcal{G}$ platí $x \cdot x \stackrel{s}{=} x$. To znamená, že $\forall a \in G : a \cdot a = a$, a tedy $(a,a) \in R$.
2. Nechť v $\mathcal{G}$ platí $(x \cdot y) \cdot x \stackrel{s}{=} x$, a nechť $(a,b) \in R$. Pak $a \cdot b = b$, tedy $a = (a \cdot b) \cdot a = b \cdot a$. Odtud $(b,a) \in R$.

3. Nechť v $\mathcal{G}$ platí $(x \cdot y) \cdot z \stackrel{s}{=} x \cdot (y \cdot z)$ a nechť $(a, b), (b, c) \in R$. Musí tedy platit $a \cdot b = b$, a zároveň $b \cdot c = c$. Pak $c = b \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot c$. Odtud $a \cdot c = c$, a tedy $(a, c) \in R$.

4. Nechť v $\mathcal{G}$ platí $x \cdot ((x \cdot y) \cdot z) \stackrel{s}{=} (x \cdot y) \cdot z$, a nechť $(a, b)(b, c) \in R$. Musí tedy platit $a \cdot b = b$, a zároveň $b \cdot c = c$. Pak také platí $a \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot ((a \cdot b) \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c = b \cdot c = c$. Odtud $a \cdot c = c$, a tedy $(a, c) \in R$.

5. Nechť v $\mathcal{G}$ platí $x \cdot y \stackrel{e}{=} y \cdot x$ a nechť $(a, b), (b, a) \in R$. Pak musí platit $a \cdot b = b$, $b \cdot a = a$. Odtud dostáváme rovnost $a = b \cdot a = a \cdot b = b$, tedy $a = b$.

6. Nechť v $\mathcal{G}$ platí $(x \cdot y) \cdot x \stackrel{s}{=} x \cdot y$, a nechť $(a, b), (b, a) \in R$. Pak musí platit $a \cdot b = b$, $b \cdot a = a$, a tedy $(a \cdot b) \cdot a = b \cdot a = a$, a zároveň $a \cdot b = b$. Obě strany jsou definovány a musí se rovnat, tedy $a = b$. $\square$

Věta 5.11. Buď $\mathcal{A} = (A, R)$ relační systém, $\mathcal{G} = (A, \cdot)$ jemu přiřazený parciální grupoid a θ kongruence na $\mathcal{G}$. Pak pro faktorový relační systém $\mathcal{A}/\theta$ platí $\mathcal{A}/\theta = \mathcal{A}(G/\theta)$.

Důkaz: Nechť $[a], [b] \in A/\theta$ a platí $[a] * [b] = [b]$. To platí právě když existují $a_0, b_0 \in A, a_0 \in [a], b_0 \in [b]$ takové, že $a_0 \cdot b_0 = b_0$. To platí právě když $(a_0, b_0) \in R$, a tedy právě když $([a_0], [b_0]) = ([a], [b]) \in R$. $\square$

Věta 5.12. Buď $\mathcal{A} = (A, R)$ relační systém a $\mathcal{G} = (A, \cdot)$ jemu přiřazený parciální grupoid ve smyslu prvního typu. Dále nechť θ je kongruence na $\mathcal{G}$. Je-li R tranzitivní, pak i R/θ je tranzitivní.

Důkaz: Je-li R tranzitivní, pak podle Věty 3.6 bude v $\mathcal{G}$ platit identita $x \cdot ((x \cdot y) \cdot z) \stackrel{s}{=} (x \cdot y) \cdot z$. Pak dle Věty 5.5 bude v $\mathcal{G}/\theta$ platit stejná identita. Odtud a z Věty 5.10 dostáváme, že faktorová relace R/θ je tranzitivní. $\square$

Věta 5.13. Buď $\mathcal{A} = (A, R)$ relační systém a $\mathcal{G} = (A, \cdot)$ jemu přiřazený parciální grupoid ve smyslu druhého typu. Dále nechť θ je kongruence na $\mathcal{G}$. Je-li R antisymetrická, pak i R/θ je antisymetrická.

Důkaz: Je-li R antisymetrická, pak podle Věty 4.6 bude v $\mathcal{G}$ platit identita $x \cdot y \stackrel{s}{=} x \cdot y$. Pak dle Věty 5.5 bude v $\mathcal{G}/\theta$ platit stejná identita. Odtud a z Věty 5.10 dostáváme, že faktorová relace R/θ je antisymetrická. $\square$

6 Homomorfismy a podsystémy relačních systémů

Obdobně jako v předchozím oddíle opět existuje více způsobů, jak homomorfismy a podsystémy relačních systémů definovat. Opět proto využijme parciální grupoid přiřazený danému relačnímu systému.

V tomto oddílu, není-li uvedeno jinak, se grupoidem přiřazeným relačnímu systému rozumí grupoid přiřazený v libovolném ze dvou typů přiřazení definovaném v předchozích oddílech.

Definice 6.1. Buď $\mathcal{A} = (A, \cdot)$ parciální grupoid a $\mathcal{A}^*$ jeho zúplnění. Parciální grupoid $\mathcal{B} = (B, *)$ nazveme *(parciálním) podgrupoidem* parciálního grupoidu $\mathcal{A}$, jestliže jeho zúplnění $\mathcal{B}^*$ je podgrupoidem grupoidu $\mathcal{A}^*$.

Definice 6.2. Buď $\mathcal{A} = (A, R)$ relační systém, B neprázdná podmnožina množiny A a $S := R \bigcap B^2$. Pak relační systém $\mathcal{B} = (B, S)$ nazveme *podsystém* relačního systému $\mathcal{A}$, jestliže existují (parciální) grupoidy $\mathcal{G}$ a $\mathcal{H}$, přiřazené postupně systémům $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ takové, že $\mathcal{H}$ je podgrupoidem $\mathcal{G}$.

Příklad 6.1. Buď $A = \{a, b, c, d\}$ a $\mathcal{A} = (A, R)$ relační systém s relací $R := \{(a, a), (a, c), (a, d), (b, b), (b, c), (b, d), (c, c), (d, d)\}$. Uvažujme následující parciální grupoid $\mathcal{G}_1$ přiřazený $\mathcal{A}$:

·	a	b	c	d
a	a	c	c	d
b	c	b	c	d
c	c	c	c	-
d	d	d	-	d

Buď $\mathcal{G}_2 = (B, *)$, kde $B = \{a, b, c\}$, grupoid daný tabulkou:

∗	a	b	c
a	a	c	c
b	c	b	c
c	c	c	c

Pak $\mathcal{G}_2$ je podgrupoid $\mathcal{G}_1$ přiřazený relačnímu systému $\mathcal{B} = (B, S)$, kde $S = R \bigcap B^2$. Tedy (B, S) je podsystémem $\mathcal{A}$. Naopak systém $(\{a, b\}, P)$, kde $P = R \bigcap \{a, b\}^2$ není podsystémem relačního systému $\mathcal{A}$

Definice 6.3. Nechť $\mathcal{G} = (G, \cdot), \mathcal{H} = (H, *)$ jsou parciální grupoidy a $\mathcal{G}^*, \mathcal{H}^*$ jejich zúplnění. Zobrazení $f : G \to H$ nazveme *homomorfismus* z $\mathcal{G}$ do $\mathcal{H}$, jestliže jej lze rozšířit na homomorfismus f^* z $\mathcal{G}^*$ do $\mathcal{H}^*$ takový, že $\forall a \in G : f^*(a) = f(a)$.

Poznámka 6.4. Pro homomorfismus f^* platí $f^*(a) = 1 \Rightarrow a = 1$.

Definice 6.5. Nechť $\mathcal{A} = (A, R)$, $\mathcal{B} = (B, S)$ jsou relační systémy. Zobrazení $f : A \to B$ nazveme *homomorfismus* z $\mathcal{A}$ do $\mathcal{B}$, jestliže existují parciální grupoidy $\mathcal{G}$ a $\mathcal{H}$ přiřazené postupně systémům $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ takové, že f je homomorfismus z $\mathcal{G}$ do $\mathcal{H}$.

Ukažme, že obě definice homomorfismů nejsou v rozporu s jeho běžnou definicí.

Lemma 6.6. Nechť $(G, \cdot)$ a $(H, *)$ jsou parciální grupoidy a f homomorfismus z $(G, \cdot)$ do $(H, *)$. Pak $f(a \cdot b) = f(a) * f(b)$, pokud je $a \cdot b$ definováno v $\mathcal{G}$.

Důkaz: Nechť $a{\cdot}b$ je definováno. Pro homomorfismus f^* platí $f^*(a{\cdot}b) = f^*(a){*}f^*(b) \in H$, a tedy $f(a \cdot b) = f(a) * f(b)$. □

Lemma 6.7. Buď f homomorfismus z relačního systému (A, R) do relačního systému (B, S). Je-li $(a, b) \in R$, pak $(f(a), f(b)) \in S$.

Důkaz: Je-li $(a, b) \in R$, pak v přiřazeném grupoidu $a \cdot b = b$, a tedy dle Lemma 6.6 $f(a) * f(b) = f(a \cdot b) = f(b)$. Odtud $(f(a), f(b)) \in S$. □

Věta 6.8. Buďte $\mathcal{A} = (A, R)$, $\mathcal{B} = (B, S)$ relační systémy a $f : A \to B$ homomorfismus z $\mathcal{A}$ do $\mathcal{B}$. Pak relace $\theta_f = \{(x, y) \in A^2; f(x) = f(y)\}$ je kongruence na $\mathcal{A}$.

Důkaz: Zobrazení f je homomorfismus, tedy existují parciální grupoidy $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ přiřazené relačním systémům $\mathcal{A}, \mathcal{B}$, respektive jejich zúplnění $\mathcal{G}^*, \mathcal{H}^*$ takové, že f^* je homomorfismus z $\mathcal{G}^*$ do $\mathcal{H}^*$. Zde víme, že relace $\theta^* = \{(x, y) \in (A \cup \{1\})^2; f^*(x) = f^*(y)\}$ je kongruence na $\mathcal{G}^*$. Protože pro každé $x \in A$ platí $f(x) = f^*(x)$, tak i pro každé $x, y \in A$ bude platit $(x, y) \in \theta \Leftrightarrow (x, y) \in \theta^*$. Kongruence θ^* je rozšířenou relací k relaci θ, a tedy relace θ je kongruence na $\mathcal{A}$. □

Poznámka 6.9. Buď $\mathcal{A} = (A, R)$ relační systém a θ kongruence na $\mathcal{A}$. Pak zobrazení $f_\theta : A \to A/\theta$, dané předpisem $f(x) = [x]_\theta$, nemusí být homomorfismus relačních systémů.

Příklad 6.2. Uvažujme relační systém $\mathcal{A} = (A, R)$, kde $A = \{a, b, c, d\}$ a $R = \{(a, c), (b, d)\}$. Dále relaci $\theta = \{(a, a), (b, b), (c, c), (c, d), (d, c), (d, d)\}$. Relačnímu systému $\mathcal{A}$ přiřadíme smyslu přiřazení druhého typu (v tomto případě jediným možným způsobem) parciální grupoid $\mathcal{G} = (A, \cdot)$ daný tabulkou:

$\cdot$	a	b	c	d
a	c	-	c	-
b	-	d	-	d
c	c	-	-	-
d	-	d	-	-

Snadno ověříme, že θ je kongruence na $\mathcal{A}$. Dále vidíme, že zobrazení $f : A \to A/\theta$ dané předpisem $f(x) = [x]_\theta$ lze rozšířit na homomorfismus z $\mathcal{G}^*$ do $(\mathcal{G}/\theta)^*$. Parciální grupoid $\mathcal{G}/\theta = (A/\theta, *)$ (v tabulce níže) není přiřazený relačnímu systému $\mathcal{A}/\theta = (\{[a]_\theta, [b]_\theta, [c]_\theta\}, \{([a]_\theta, [c]_\theta), ([b]_\theta, [c]_\theta)\}$.

$*$	$[a]_\theta$	$[b]_\theta$	$[c]_\theta$
$[a]_\theta$	$[c]_\theta$	-	$[c]_\theta$
$[b]_\theta$	-	$[c]_\theta$	$[c]_\theta$
$[c]_\theta$	$[c]_\theta$	$[c]_\theta$	-

Horní kužel prvků $[a]_\theta$ a $[b]_\theta$ je neprázdný, ale výsledek operace $[a]_\theta * [b]_\theta$ není definovaný.
Obdobný příklad lze nalézt i pro přiřazení prvního typu.

Příklad 6.3. Uvažujme relační systémy $\mathcal{A} = (A, R)$ a $\mathcal{B} = (B, S)$, kde $A = \{a, b, c\}$, $R = \{(a, b), (a, c)\}$, $B = \{\alpha, \beta\}$, $S = \{(\alpha, \beta)\}$. Uvažujme zobrazení $f : A \to B$ dané takto:

x	a	b	c
$f(x)$	α	β	β

Relačním systémům $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ přířadíme parciální grupoidy $\mathcal{G} = (A, \cdot)$ a $\mathcal{H} = (B, *)$ ve smyslu přiřazení druhého typu například takto:

$\cdot$	a	b	c
a	c	b	c
b	b	-	-
c	c	-	-

$*$	α	β
α	β	β
β	β	-

Parciální grupoid $\mathcal{H}$ je v tomto případě (a pro přiřazení druhého typu) jediný parciální grupoid přiřazený relačnímu systému $\mathcal{B}$.
Snadno ověříme, že zobrazení f je homomorfismus z $\mathcal{G}$ do $\mathcal{H}$. Tedy f je homomorfismus z $\mathcal{A}$ do $\mathcal{B}$. Pak podle Věty 6.8 je relace $\theta = \{(a, a), (b, b), (b, c), (c, b), (c, c)\} = \{(x, y) \in A^2; f(x) = f(y)\}$ relací kongruence na $\mathcal{A}$, což lze snadno ověřit.

Věta 6.10. Buď $\mathcal{A} = (A, R)$ relační systém a $\mathcal{G} = (A, \cdot)$ jemu přiřazený parciální grupoid. Buď θ kongruence na $\mathcal{G}$. Nechť platí $\forall x, y \in A : U_R(x, y) = \varnothing \Leftrightarrow U_{R/\theta}([x], [y]) = \varnothing$. Pak faktorový parciální grupoid $\mathcal{G}/\theta$ je přiřazený faktorovému relačnímu systému $\mathcal{A}/\theta$.

Důkaz: Nechť platí předpoklady věty a nechť $a, b \in A/\theta$.
Nechť $(a, b) \in R/\theta$. To znamená, že existují $a_0 \in a, b_0 \in b$ takové, že $(a_0, b_0) \in R$.

Pak $a * b = [a_0 \cdot b_0] = [b_0] = b$.
Nechť $(a,b) \notin R/\theta, U_{R/\theta}(a,b) \neq \varnothing$. Pak i pro každé $a_0 \in a, b_0 \in b$ platí $U_R(a_0,b_0) \neq \varnothing$, tedy $\exists c \in A/\theta, \exists c_0 \in c : (a,c),(b,c) \in R/\theta, (a_0,c_0),(b_0,c_0) \in R$. Nechť $a_0 \cdot b_0 = c_0$. Pak $a * b = [a_0 \cdot b_0] = [c_0] = c \in U_{R/\theta}(a,b)$.
Nechť $(a,b) \notin R/\theta, U_{R/\theta}(a,b) = \varnothing$. Pak pro každé $a_0 \in a, b_0 \in b$ platí $U_R(a_0,b_0) = \varnothing$. Proto $a_0 \cdot b_0$ není definováno pro žádné $a_0 \in a, b_0 \in b$ a tedy ani $a * b$ není definováno.
Pro přiřazení druhého typu je třeba ověřit ještě podmínku $(a,b) \notin R/\theta, (b,a) \in R/\theta$. To znamená, že existují $a_0 \in a, b_0 \in b$ takové, že $(a_0,b_0) \notin R, (b_0,a_0) \in R$. Pak $a * b = [a_0 \cdot b_0] = [a_0] = a$. □

Věta 6.11. Buď $\mathcal{A} = (A,R)$ relační systém a θ kongruence na $\mathcal{A}$. Nechť platí $\forall x,y \in A : U_R(x,y) = \varnothing \Leftrightarrow U_{R/\theta}([x],[y]) = \varnothing$. Pak zobrazení $h_\theta : A \to A/\theta$ dané předpisem $h_\theta(x) = [x]$ je surjektivní homomorfismus.

Důkaz: Plyne z předchozí věty. □

7 Závěr

Cílem této práce bylo přiřadit danému relačnímu systému parciální grupoid a zkoumat parciální identity na tomto parciálním grupoidu reprezentující vlastnosti relačního systému. Tyto parciální identity jsou popsány pro oba typy přiřazení zkoumané v této práci, a to ve třetí a čtvrté kapitole.

Dále zde byly zkoumány faktorové relační systémy a jejich vlastnosti v závislosti na vlastnostech původního relačního systému. Definice kongruence na relačním systému a faktorového relačního systému, stejně jako vlastnosti, které se při faktorizaci zachovávají jsou popsány v páté kapitole.

Poslední kapitola je zaměřená na homomorfismy relačních systémů, především ve vztahu ke kongruencím na relačních systémech a faktorovým relačním systémům.

Literatura

[1] Riguet, J.: *Relations Binaires, fermetures, correspondances de Galois.* Bull. Soc. Math. Rf. 76 (1948), 114-155.

[2] Mal'cev, A. I.: *Algebraic Systems.* Springer, New York 1973.

[3] Burmeister, P.: *Partial Algebras - An Introductory Survey, in Algebras and Orderes.* NATO ASI Series, Series C: Mathem. and Phys. Sci, Vol 389 (ed. I. G. Rosenberg, G. Sabidussi), Kluwer Acad. Publ., Dordrecht /Boston/ London, 1993.

[4] Chajda, I., Länger, H.: *Quotients and Homomorphisms of relational systems.* Acta Univ. Palack. Olomouc., Fac. Rer. Nat., Math. 49 (2010), 37-47.

[5] Chajda, I., Länger, H.: *Directoids. An Algebraic Approach to Ordered Sets.* Heldermann, Lemgo 2011.

[6] Chajda, I., Länger, H.: *Grupoids assigned to relational systems.* Mathematica Bohemica 138 (2013), 15-23.

[7] Chajda, I., Länger, H.: *Grupoids corresponding to relational systems.* Miskolc Math. Notes (submitted).