Univerzita Hradec Králové

Přírodovědecká fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

2021 **Veronika Havlátová**

Univerzita Hradec Králové

Přírodovědecká fakulta

Katedra matematiky

Grafické zobrazení vztahů mezi základními prvky matematické analýzy

Bakalářská práce

Autor: Veronika Havlátová

Studijní program: B1101 Matematika

Studijní obor: Bc. učitelství - všeobecný základ
Informatika se zaměřením na vzdělávání
Matematika se zaměřením na vzdělávání

Vedoucí práce: Mgr. Veronika Borůvková

Hradec Králové červen 2021

Univerzita Hradec Králové
Přírodovědecká fakulta

Zadání bakalářské práce

Autor:	**Veronika Havlátová**
Studium:	S17MA006BP
Studijní program:	B1101 Matematika
Studijní obor:	Informatika se zaměřením na vzdělávání, Matematika se zaměřením na vzdělávání
Název bakalářské práce:	**Grafické zobrazení vztahů mezi základními prvky matematické analýzy**
Název bakalářské práce AJ:	Graphical presentation of relations between basic concepts of calculus.

Cíl, metody, literatura, předpoklady:

Teoretická část práce představuje rešerši literatury, v níž budou definovány základní pojmy, jež budeme používat, spolu se vzájemnými vztahy, příklady a protipříklady. Výstupem praktické části pak bude plakát zobrazující tyto vztahy graficky.

Veselý, J. *Matematická analýza pro učitele,* Matfyzpress, Praha 2001.

Kopáček, J. *Matematická analýza nejen pro fyziky,* Matfyzpress, Praha 2004.

Protter, M.H., Morrey, C.B.*A First Course in Real Analysis,* Springer, USA 1991.

Shilov, Georgi E. *Elementary Real and Complex Analysis,* Dover Publications, USA 1996.

Garantující pracoviště:	Katedra matematiky, Přírodovědecká fakulta
Vedoucí práce:	Mgr. Veronika Borůvková
Oponent:	doc. Mgr. Dušan Bednařík, Ph.D.

Datum zadání závěrečné práce: 23.1.2020

Prohlášení:

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně a že jsem v seznamu použité literatury uvedla všechny prameny, ze kterých jsem vycházela.

V Hradci Králové dne Veronika Havlátová

Poděkování

Na tomto místě bych chtěla velmi poděkovat paní Mgr. Veronice Borůvkové nejen za odborné vedení práce, ale především za spoustu cenných rad a dostatek trpělivosti.

Anotace

V předkládané práci shrnuji základní definice a věty úvodní části matematické analýzy od posloupností reálných čísel až po derivace funkcí. Z probraných pojmů a vlastností následně vytvářím mapu, která graficky znázorňuje vztahy mezi těmito matematickými objekty.

Klíčová slova

Posloupnost; funkce; limita; derivace; mapa; grafické znázornění; matematická analýza

Annotation

In the present work, I summarise the basic definitions and theorems of the introductory part of mathematical analysis, from the sequences of real numbers to the derivatives of functions. From the concepts and properties discussed, I then create a map that graphically illustrates the relationships between these mathematical objects.

Keywords

Sequence; function; limit; derivative; map; graphical illustration; mathematical analysis

Obsah

Úvod **1**

Přehled použitého značení **3**

1 Posloupnosti **4**
1.1 Limita posloupnosti 5

2 Funkce **14**
2.1 Limita funkce 15
2.2 Spojitost funkce 19

3 Derivace **25**
3.1 Věty o střední hodnotě 29
3.2 Využití derivací při vyšetřování průběhu funkce 30

4 Grafické znázornění **41**

Závěr **42**

Seznam použité literatury **43**

Příloha **44**

Úvod

Matematika je jako velká síť skládající se z navzájem propojených definic a vět. Veškeré teorémy a pojmy, s nimiž matematici pracují, v konečném důsledku plynou z několika základních axiomů teorie množin. Velká spousta matematiků při práci s nimi nikterak nevyžaduje geometrickou představivost a vystačí si pouze s algebraickými metodami. Naopak druhá skupina by si nedokázala provozování matematiky bez nějakého základního znázornění vůbec představit. Matematická skripta, s nimiž studenti pracují, samozřejmě usilují o využívání obou těchto pohledů. Vždy se však omezují jen na konkrétní případy, jako je např. znázornění Rolleovy věty (viz obrázek 3.4a). Dosud jsem však nikde neviděla mapu, která by vykreslila více vět současně a ukázala, jak na sobě navzájem závisí.

Právě tato vizualizace je cílem mé bakalářské práce. Pokusím se tedy – doslova – zmapovat vybrané věty matematické analýzy a graficky ukázat vztahy, které mezi nimi panují. Zaměřím se konkrétně na úvodní kapitoly, s nimiž se studenti kurzů matematické analýzy setkávají v úvodních semestrech svého studia.

Myšlenkově lze práci rozdělit do dvou nestejně obsáhlých a navzájem se prolínajících částí. Teoretická se skládá z předložení definic, vět, důkazů a přidružených poznámek, zatímco praktickou částí rozumím protipříklady doplněné obrázky a výsledné mapy. Po formální stránce má text 4 kapitoly. V první se zabývám posloupnostmi, vedle definic základních pojmů se soustředím především na limitu posloupnosti společně s nejznámějšími větami, jako je například ta Bolzanova-Weierstrassova. V druhé kapitole popisuji funkce, jejich limity, vlastnosti monotonie, spojitost apod. Ve třetí části výčet úvodních partií matematické analýzy zakončím derivacemi, které umožňují formulovat tvrzení propojující dříve vyložené vlastnosti. V poslední části vysvětlím, jak jsem postupovala při tvorbě map.

Abychom se nezdržovali definováním základních pojmů, odvolám se na tomto místě na skripta [1, s. 1-10], odkud jsem čerpala především. V tomto textu je možné dohledat přesné znění definice kartézského součinu, relace, uspořádání, uspořádané množiny, prostého zobrazení, bijekce, reálného čísla, intervalu nebo třeba grafu. Protože platnost spousty vět závisí na pomocných lemmatech, pokládám za důležité zmínit lemmata přímo v textu u příslušných vět. Jejich důkazy jsem ale kvůli plynulosti textu vynechala, což vynahradím alespoň tím, že pod nimi uvádím odkaz na zdroj, ve kterém je důkaz k dispozici.

Na závěr bych chtěla dodat, že si v práci a výsledných mapách rozhodně nekladu ambice na úplnost. Existuje totiž velké množství dodatečných tvrzení a vlastností, které v práci nezohledňuji. Mým cílem však není podat vyčerpávající výčet odlehlých partií analýzy, nýbrž pokrýt tu její část, se kterou se běžně studenti naší fakulty setkávají.

Přehled použitého značení

Pro snazší orientaci v textu uvádím přehled a popis symbolů, které se v práci vyskytují.

$\mathbb{N}$	množina přirozených čísel
$\mathbb{Z}$	množina celých čísel
$\mathbb{Q}$	množina racionálních čísel
$\mathbb{I}$	množina iracionálních čísel
$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
$\mathbb{R}^*$	množina reálných čísel rozšířená o symboly $\pm\infty$
$\mathbb{C}$	množina komplexních čísel
$\mathscr{O}(x_0)$	okolí bodu x_0
$\mathscr{O}_\varepsilon(a)$	epsilonové okolí bodu a
$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$	posloupnost reálných čísel

Kapitola 1

Posloupnosti

Abychom mohli pokročit k vlastnostem posloupností, které nás zajímají především, je třeba nejprve definovat základní pojmy. Síla matematické analýzy stojí na popisu a práci s nekonečně malými veličinami. S tím úzce souvisí vztah mezi body, které se nacházejí v nějakém blízkém sousedství, resp. okolí.

Definice 1.1. Je-li dáno $\varepsilon > 0$, pak množinu všech řešení soustavy nerovnic v $\mathbb{R}$

$$a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$$

budeme nazývat *ε-okolím bodu a*. V některých případech budeme místo uvedených nerovnic využívat úspornějšího zápisu pomocí symbolu $\mathscr{O}$. Tzn. že okolí bodu a budeme značit $\mathscr{O}_\varepsilon(a)$, případně jen $\mathscr{O}(a)$, pokud neuvažujeme konkrétní hodnotu ε.

Definice 1.2. *Posloupností* nazýváme zobrazení $a : \mathbb{N} \to M$. Je-li $M = \mathbb{R}$ hovoříme o posloupnosti reálných čísel, je-li $M = \mathbb{C}$ hovoříme o posloupnosti komplexních čísel. Celou posloupnost pak zapisujeme $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, hodnoty posloupnosti obvykle namísto $a(n)$ značíme a_n, přičemž pro konkrétní n nazýváme a_n *n-tý člen posloupnosti*.

Grafem posloupnosti pak není nic jiného, než izolované body. V této práci se budeme zabývat pouze posloupnostmi čísel reálných. V následujícím textu tudíž nebudeme tento přívlastek explicitně zmiňovat.

Mezi nejjednodušší vlastnosti posloupností patří popis toho, jak se chovají, tj. zda s rostoucími hodnotami $n \in \mathbb{N}$ rostou také jejich hodnoty $a(n) \in \mathbb{R}$ apod.

Definice 1.3 (Vlastnosti posloupností)**.** Posloupnost a_n se nazývá:

rostoucí, jestliže $a_n < a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$,
klesající, jestliže $a_n > a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$,
nerostoucí, jestliže $a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$,

neklesající, jestliže $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$,
monotónní, jestliže je nerostoucí, nebo neklesající,
ryze monotónní, jestliže je rostoucí, nebo klesající,
shora omezená, jestliže $\exists U \in \mathbb{R}$ takové, že $a_n \leq U \quad \forall n \in \mathbb{N}$,
zdola omezená, jestliže $\exists L \in \mathbb{R}$ takové, že $a_n \geq L \quad \forall n \in \mathbb{N}$,
omezená, jestliže je omezená shora i zdola.

1.1 Limita posloupnosti

Ústředním nástrojem matematické analýzy je limita, proto nyní uvedeme její definici.

Definice 1.4. Nechť je dána posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a číslo $A \in \mathbb{R}$. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *má vlastní limitu* A, jestliže platí:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tak, že } \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 : |a_n - A| < \varepsilon.$$

Jestliže má posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vlastní limitu A, říkáme, že *konverguje*, a značíme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *má nevlastní limitu* $+\infty$, resp. $-\infty$, jestliže platí:

$$\forall A \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tak, že } \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 : a_n > A,$$

resp.

$$\forall A \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tak, že } \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 : a_n < A.$$

Jestliže má posloupost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nevlastní limitu $+\infty$, resp. $-\infty$, říkáme, že posloupnost *diverguje* a značíme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, resp. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$. Existuje ještě třetí možnost, a to taková, že posloupnost neustále kmitá mezi různými hodnotami. Takovou oscilující posloupnost však budeme rovněž označovat jako divergentní.

Nyní se již podíváme na jednotlivá tvrzení o posloupnostech, která se týkají vztahu mezi konvergencí, divergencí, omezeností, neomezeností posloupnosti a její limitou.

Věta 1.5. *Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.*

Důkaz. Pro spor předpokládejme, že existuje posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, která má dvě různé limity. Tedy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = B$, kde $A,\ B \in \mathbb{R}$ a $A \neq B$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $A < B$ (analogicky lze dokázat pro $A > B$).

Podle definice víme, že:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_A \in \mathbb{N} \text{ tak, že } \forall n \geq n_A : |a_n - A| < \varepsilon,$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_B \in \mathbb{N} \text{ tak, že } \forall n \geq n_B : |a_n - B| < \varepsilon.$$

Pro každé ε položme $n_0 = max\{n_A, n_B\}$. Pro všechna ε, tedy i pro $\varepsilon = \frac{B-A}{2}$ a pro nějaké $k \in \mathbb{N},\ k > n_0$ platí $|A - a_k| < \frac{B-A}{2}$ a $|B - a_k| < \frac{B-A}{2}$, což znamená, že vzdálenost a_k od bodu A i od bodu B je menší, než polovina vzdálenosti těchto dvou bodů, což je spor. Obdobně vyřešíme případy, kde $A = -\infty$, resp. $B = -\infty$ [1, s. 23]. □

Lemma 1.6. *Nechť pro dvě posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $n \in \mathbb{N}$, existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ tak, že $a_n = b_n$, $\forall n > n_1$. Potom platí:*

a) Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená právě tehdy, když posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená.

b) Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu A právě tehdy, když posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu A.

Důkaz. a) Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená. To znamená, že pro nějaké $K \in \mathbb{R}$ je $|a_n| \leq$ $\leq K$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Je-li $G = \max(|b_1|, |b_2|, ..., |b_{n_1}|)$, pak je $|b_n| \leq \max(K,\ G)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Z toho plyne, že posloupnost $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená.

b) Má-li posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vlastní limitu A, pak podle definice $\forall \varepsilon > 0$ existuje n_0 tak, že $|a_n - A| < \varepsilon$, $\forall n > n_0$. Jestliže je $n_2(\varepsilon) = \max(n_0,\ n_1)$, je pro $n > n_2(\varepsilon)$ $|b_n - A| = |a_n - A| < \varepsilon$, což znamená, že $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$.
Tím je věta dokázána, protože $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou v tomto tvrzení rovnocenné.
Podobně bychom dokázali druhou část věty i pro $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A = +\infty$, resp. $-\infty$ [3, s. 29]. □

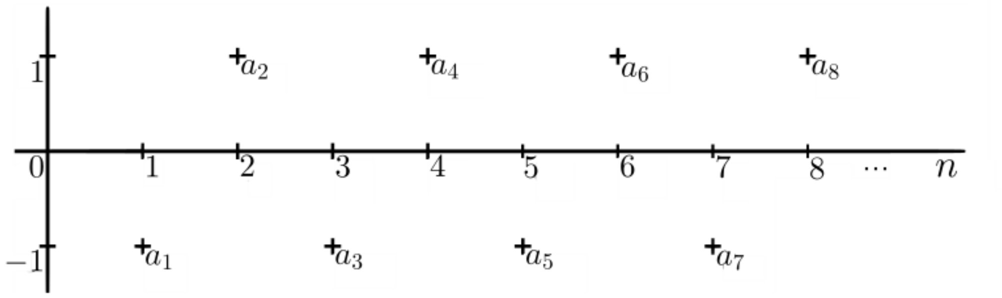
Věta 1.7. *Každá konvergentní posloupnost je omezená.*

Důkaz. Předpokládejme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní, tedy že existuje $A \in \mathbb{R}$ takové, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$. K důkazu omezenosti posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je třeba najít $K \in \mathbb{R}$ tak, aby platilo $|a_n| < K$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Zvolme $\varepsilon = 1$. Podle definice limity k tomuto ε existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n \in \mathbb{N}$, kde $n \geq n_0$, je $|a_n - A| < 1$. Potom

$$|a_n| = |a_n - A + A| \leq |a_n - A| + |A| < 1 + |A|.$$

Jestliže platí $n_0 = 1$, zvolíme $K = |A| + 1$. V opačném případě označme $M =$ $= \{|a_n| : n \in \mathbb{N}, n < n_0\}$ a zvolme $K = \max\left(\max M, |A| + 1\right)$. Pro takto zvolené K platí $|a_n| < K, \forall n \in \mathbb{N}$, což jsme měli dokázat [3, s. 30]. □

Příklad 1.8. Obrácená implikace věty 1.7 neplatí. Tj. pokud je posloupnost omezená, pak ještě nemusí nutně být konvergentní. Uvažme například posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = (-1)^n$. Z obrázku 1.1 můžeme snadno vyčíst, že tato posloupnost je omezená, ale není konvergentní.



Obrázek 1.1: Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = (-1)^n$.

Pokud pracujeme s uspořádanými množinami, můžeme se zároveň ptát, který prvek je v dané množině největší, resp. nejmenší. Zavedeme proto následující pojmy a formulujeme s tím související větu.

Definice 1.9. Nechť $A \neq \emptyset$ je uspořádaná množina a $B \subseteq A$, kde $B \neq \emptyset$, je libovolná podmnožina A. Řekneme, že prvek $G \in A$ je *supremum* (*nejmenší horní závora*) množiny B, a píšeme $G = \sup B$, jestliže:

1. $x \leq G$, $\forall x \in B$,

2. je-li $y \in A$ takové, že $x \leq y$, $\forall x \in B$, pak je $G \leq y$.

Řekneme, že prvek $g \in A$ je *infimum* (*největší dolní závora*) množiny B, a píšeme $g = \inf B$, jestliže:

1. $x \geq g$, $\forall x \in B$,

2. je-li $y \in A$ takové, že $x \geq y$, $\forall x \in B$, pak je $g \geq y$.

Poznámka 1.10. Definici suprema a infima lze dodefinovat také pro neomezené množiny, tj. tak, aby mohla nabývat hodnot $\pm\infty$.

Poznámka 1.11. V některé literatuře můžeme narazit na jinou ekvivalentní definici suprema, resp. infima. Protože ji později použijeme v důkazu věty 1.13, uvedeme i tuto alternativu.

Lemma 1.12. *Buď $A \neq \emptyset$, $A \subset \mathbb{R}$. Potom $G = \sup A$ právě tehdy, když je G horní závorou A a platí:*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in A)(x > G - \varepsilon).$$

Analogicky $g = \inf A$ právě tehdy, když je g dolní závorou A a platí:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in A)(x < g + \varepsilon).$$

Důkaz. Předpokládejme pro spor, že $G = \sup A$. Pokud by pak pro žádné $x \in A$ neplatilo, že $x > G - \varepsilon$, muselo by platit $G - \varepsilon =: G' < G$ a $x \leq G'$ pro všechna $x \in A$, což je spor s tím, že G je nejmenší horní závora. Nechť naopak existuje horní závora $G' < G$. Potom stačí zvolit $\varepsilon := G - G'$, abychom nenalezli žádné vhodné x.

Obdobným způsobem bychom dokázali tvrzení pro infimum [2, s. 25]. □

Věta 1.13. *Nechť je dána monotónní posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Potom existuje $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, přičemž tato limita je:*

a) *Vlastní právě tehdy, když je posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ omezená a zároveň $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, je-li $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ neklesající, resp. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, je-li $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nerostoucí.*

b) *Nevlastní právě tehdy, když je posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ neomezená.*

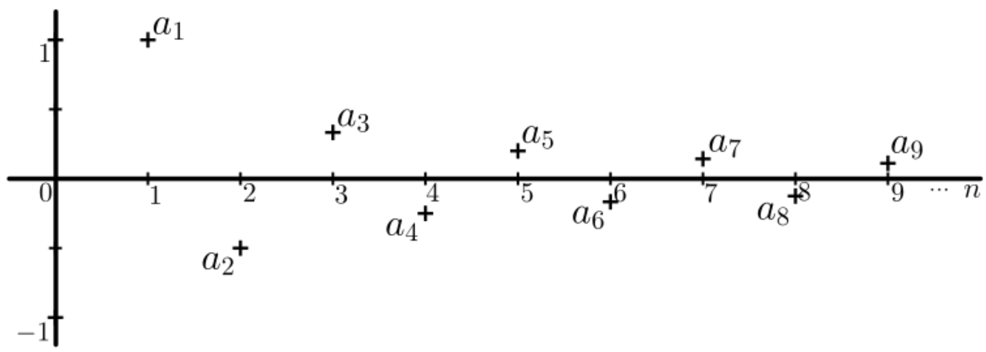
Důkaz. Dokážeme jen první část, kterou si rozdělíme na dva případy:

(i) Nechť je $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ omezená, pak má infimum g a supremum G. Předpokládejme nejprve, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesající, a ukažme, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = G$.
Podle definice suprema a lemmatu 1.12 platí:

1. $a_n \leq G$, $\forall n \in \mathbb{N}$,
2. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0$ tak, že $G - \varepsilon < a_{n_0} \leq G$.

Posloupnost je neklesající, tj. $\forall n > n_0$ je $a_n \geq a_{n_0}$. Odtud $G - \varepsilon < a_n \leq G < G + \varepsilon$, což znamená, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = G$.
Analogicky dokážeme, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$ pro omezenou nerostoucí posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

(ii) Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je monotónní posloupnost neomezená shora, nebo zdola. Uvažujeme první případ, tj. neklesající posloupnost neomezenou shora. Protože $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ není omezená shora, pak $\forall K \in \mathbb{R}\, \exists n_0(K) \in \mathbb{N}$ tak, že $a_{n_0(K)} > K$. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesající posloupnost, proto platí, že $\forall n > n_0(K)$ je $a_n \geq a_{n_0(K)}$. Odtud dostáváme $a_n \geq a_{n_0(K)} > K$, což je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.
Analogicky bychom mohli dokázat, že $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ pro nerostoucí posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ neomezenou zdola [3, s. 30]. □



Obrázek 1.2: Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$.

Příklad 1.14. Nyní ukážeme, že v opačném směru implikace věty 1.13 neplatí. Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ totiž osciluje mezi kladnými a zápornými hodnotami, a přesto má limitu rovnu 0, viz obrázek 1.2.

Definice 1.15. Nechť je dána posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $k_1, k_2, \dots, k_n$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Pak posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ pro $k \in \mathbb{N}$ budeme nazývat *vybraná posloupnost* z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

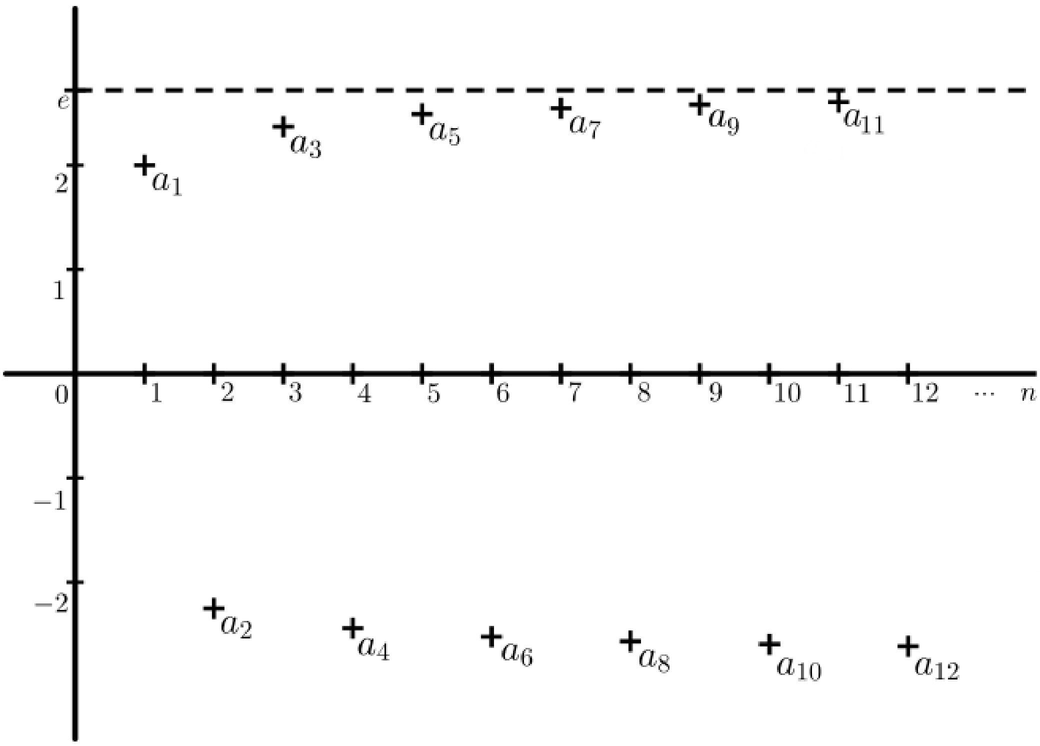
Věta 1.16. *Nechť posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ je vybraná posloupnost z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a nechť posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má limitu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$. Pak $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = A$.*

Důkaz. Tvrzení dokážeme z definice limity. Nechť je dáno libovolné $\varepsilon > 0$. Pak podle předpokladu $\exists n^*$ takové, že $\forall n \geq n^*$ je $|a_n - A| < \varepsilon$. Posloupnost $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ je posloupnost přirozených čísel, a proto můžeme zvolit k_0 tak, aby platilo, že $n_{k_0} \geq$ $\geq n^*$. Pak pro všechna $k > k_0$ je $n_k > n_{k_0} \geq n^*$, a proto také platí, že $|a_{n_k} - A| < \varepsilon$ [1, s. 32]. □

Příklad 1.17. Implikace věty 1.16 v obráceném směru neplatí. Například posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = (-1)^{n+1}(1+\frac{1}{n})^n$ nemá limitu (viz obrázek 1.3). Vybraná podposloupnost a_{n_k} lichých členů posloupnosti a_n však už limitu má, $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = e$.

Věta 1.18. *Z každé neomezené posloupnosti lze vybrat posloupnost, která má nevlastní limitu.*

Důkaz. Nechť posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ není shora omezená. Sestrojíme-li rostoucí posloupnost přirozených čísel $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, že $a_{k_n} \geq n$, pak bude věta dokázána. Protože $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ není shora omezená, $\exists k_1 \in \mathbb{N}$ tak, že $a_{k_1} \geq 1$. Pokud jsme již našli $n-1$ čísel $k_1 < k_2 < \cdots < k_{n-1}$ takových, že platí $a_{k_i} \geq i$ pro $i = 1, 2, \dots, n-1$, pak musí existovat $k_n \in \mathbb{N}$, které má následující vlastnosti:



Obrázek 1.3: Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = (-1)^{n+1}(1+\frac{1}{n})^n$.

1. $k_n > k_{n-1}$,
2. $a_{k_n} \geq n$.

Kdyby totiž pro všechna $k > k_{n-1}$ bylo $a_k < n$, pak by posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ byla omezená shora, což není pravda [3, s. 41]. □

Pro posloupnosti, které nejsou konvergentní, je důležité definovat pojem hromadného bodu, který zobecňuje pojem limity posloupnosti.

Definice 1.19. Číslo $A \in \mathbb{R}^*$ se nazývá *hromadný bod* posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, jestliže pro každé $\mathscr{O}(A)$ existuje nekonečně mnoho indexů $n \in \mathbb{N}$, pro které platí, že $a_n \in \mathscr{O}(A)$.

Věta 1.20. *Číslo A je hromadným bodem posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ právě tehdy, když existuje vybraná posloupnost $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ taková, že $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = A$.*

Důkaz. Tvrzení plyne přímo z definic vybrané posloupnosti 1.15 a hromadného bodu 1.19 [1, s. 33]. □

Lemma 1.21. *Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou konvergentní posloupnosti a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Pak platí:*

1. *Jestliže $a < b$ pak existuje n_0 tak, že pro všechna $n \geq n_0$ platí $a_n < b_n$.*
2. *Jestliže $\exists n_0$ tak, že pro všechna $n \geq n_0$ je $a_n \leq b_n$, pak $a \leq b$.*

Důkaz. První tvrzení plyne přímo z definice limity 1.4. Druhé tvrzení pak plyne z prvního. Kdyby $a > b$, pak by platilo $a_n > b_n$ pro velká n, což je však spor [1, s. 26]. □

Věta 1.22 (Věta o dvou policajtech)**.** *Nechť jsou dány tři posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, pro něž platí:*

1. $a_n \leq c_n \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$,
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = A \in \mathbb{R}$,

pak také $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$.

Důkaz. Z definice limity a dle 2. předpokladu víme, že $A \in \mathbb{R}$ a že $\forall \varepsilon > 0$ existuje n_0 tak, že $A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$. Zároveň také platí, že $A - \varepsilon < b_n < A + \varepsilon$, $\forall n > n_0$. Z 1. předpokladu pak víme, že $A - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < A + \varepsilon$, odtud tedy plyne, že $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$ [3, s. 39]. □

Lemma 1.23. *Každá posloupnost má nejmenší a největší hromadný bod.*

Důkaz. Viz [1, s. 34]. □

Lemma 1.24. *Nechť je dána posloupnost omezených intervalů $\langle a_1, b_1\rangle$, $\langle a_2, b_2\rangle$, $\ldots$, $\langle a_n, b_n\rangle$, pro které platí $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ (tj. $\langle a_{n+1}, b_{n+1}\rangle \subset \langle a_n, b_n\rangle$), $\forall n \in \mathbb{N}$. Pak posloupnosti mají limity $a \in \mathbb{R}$, resp. $b \in \mathbb{R}$ a platí, že $a_n \leq a \leq b \leq b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\langle a, b\rangle = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \langle a_i, b_i\rangle$. Pokud je navíc $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$, platí, že $a = b$.*

Důkaz. Viz [3, s. 41]. □

Nasledující věta je velmi významná pro řadu částí matematické analýzy.

Věta 1.25 (Bolzanova-Weierstrassova)**.** *Z každé omezené posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost.*

Důkaz. Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená, proto existují $A,\ B \in \mathbb{R}$ tak, že $A \leq a_n \leq$ $\leq B,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Nyní rozpůlíme interval $\langle A, B\rangle$ v hodnotě $\frac{A+B}{2}$. Alespoň v jednom z těchto dvou intervalů $\langle A, \frac{A+B}{2}\rangle$, $\langle \frac{A+B}{2}, B\rangle$ leží členy posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ pro nekonečně mnoho indexů n (může se stát, že v obou intervalech leží členy posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ pro nekonečně mnoho indexů n, pak vybereme kterýkoliv z těchto intervalů). Tento interval označíme jako $\langle A_1, B_1\rangle$. Interval $\langle A_1, B_1\rangle$ opět rozpůlíme na intervaly $\langle A_1, \frac{A_1+B_1}{2}\rangle$, $\langle \frac{A_1+B_1}{2}, B_1\rangle$ a interval, v němž leží $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ pro nekonečně mnoho indexů n, označíme $\langle A_2, B_2\rangle$ (opět se může stát, že v obou intervalech leží členy posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ pro nekonečně mnoho indexů n, pak opět vybereme kterýkoliv z těchto intervalů). Takto postupným půlením vytvoříme posloupnost intervalů $\langle A_k, B_k\rangle,\ k \in \mathbb{N}$ pro něž platí:

1) $\langle A_{k+1}, B_{k+1}\rangle \subset \langle A_1, B_1\rangle$,

2) $B_k - A_k = \frac{B-A}{2^k}$,

3) $\forall k \in \mathbb{N}$ v $\langle A_k, B_k\rangle$ leží a_n pro nekonečně mnoho indexů n.

Můžeme proto vybrat rostoucí posloupnost přirozených čísel $k_i,\ i \in \mathbb{N}$ tak, že $a_{k_i} \in \langle A_i, B_i\rangle,\ \forall i \in \mathbb{N}$. To znamená, že $A_i \leq a_{k_i} \leq B_i$. Dle lemmatu 1.24 je $\lim\limits_{i\to\infty} A_i =$ $= \lim\limits_{i\to\infty} B_i$. Jejich společnou hodnotu označíme a, pak je dle věty 1.22 také $\lim\limits_{i\to\infty} a_{k_i} =$ $= a$, čímž je Bolzanova-Weierstrassova věta dokázána [3, s. 42]. □

Definice 1.26. Nechť je dána posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Řekneme, že $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňuje *Bolzanovo-Cauchyovo kritérium*, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$, kde $m, n > n_0$, platí nerovnost $|a_n - a_m| < \varepsilon$. Pomocí kvantifikátorů píšeme:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall m, n \in \mathbb{N}, m, n > n_0 : |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

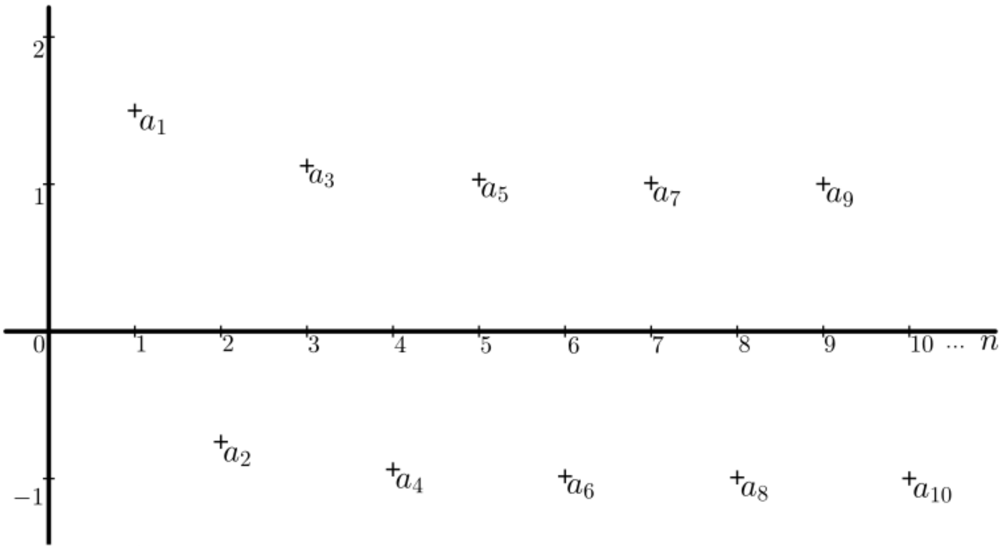
Věta 1.27. *Splňuje-li posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ Bolzanovo-Cauchyovo kritérium, pak je tato posloupnost omezená.*

Důkaz. Dle Bolzanova-Cauchyova kritéria existuje $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ tak, že pro $n,\ m > \tilde{n}$ je $|a_n - a_m| < 1$, a tedy $\forall n > \tilde{n}$ je $|a_n| \leq |a_n - a_{\tilde{n}+1}| + |a_{\tilde{n}+1}| \leq 1 + |a_{\tilde{n}+1}|$. Nyní stačí použít lemma 1.6 [3, s. 44]. □

Příklad 1.28. Opačný směr implikace věty 1.27 neplatí. Jak můžeme vidět z obrázku 1.4. Posloupnost

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \begin{cases} \frac{1}{2^n} - 1 & \text{pro } n \text{ sudé} \\ \frac{1}{2^n} + 1 & \text{pro } n \text{ liché} \end{cases}$$

je omezená, ale nesplňuje Bolzanovo-Chauchyovo kritérium.



Obrázek 1.4: Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \begin{cases} \frac{1}{2^n} - 1 & \text{pro } n \text{ sudé} \\ \frac{1}{2^n} + 1 & \text{pro } n \text{ liché.} \end{cases}$

Věta 1.29. *Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergetntní právě tehdy, když splňuje Bolzanovo-Cauchyovo kritérium.*

Důkaz. "$\Rightarrow$"Nejprve předpokládejme, že posloupnost je konvergentní a tedy má vlastní limitu, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$. Zvolíme $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. K tomuto ε nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \in \mathbb{N}$, dle definice limity platí $|a_n - A| < \varepsilon$. Pak $\forall m, n \in \mathbb{N}$, kde $m \geq n_0$ a $n \geq n_0$, platí: $|a_n - a_m| \leq |a_n - A| + |A - a_m| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$.
Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tedy splňuje Bolzanovo-Cauchyovo kritérium.

"$\Leftarrow$"Nyní naopak předpokládejme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ splňuje Bolzanovo-Cauchyovo kritérium. Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je dle lemmatu 1.27 omezená. A tedy z ní lze dle věty 1.25 vybrat konvergentní podposloupnost $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$. Je-li limita této vybrané posloupnosti A, ukažme, že také $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$. Platí totiž

$$|a_n - A| = |a_n - a_{k_n} + a_{k_n} - A| \leq |a_n - a_{k_n}| + |a_{k_n} - A|, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Protože $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = A$, pak $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro $n > n_0$ je $|a_{k_n} - A| < \frac{\varepsilon}{2}$. Podle Bolzanovo-Cauchyova kritéria k tomuto ε existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ tak, že $|a_n - a_{k_n}| < \frac{\varepsilon}{2}$ pro $n > n_1$ (díky $k_n \geq n$). Proto pro $n > \tilde{n}$, kde $\tilde{n} = \max\{n_0,\ n_1\}$, je $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, což jsme chtěli dokázat [3, s. 45].

$\square$

Kapitola 2

Funkce

Pokud v definici posloupnosti nahradíme výchozí množinu přirozených čísel nějakou podmnožinou čísel reálných, získáme ústřední pojem celé matematiky.

Definice 2.1. Nechť $M \subseteq \mathbb{R}$. Pak zobrazení $f : M \to \mathbb{R}$ nazýváme *reálnou funkcí jedné reálné proměnné* nebo zkráceně *reálnou funkcí jedné proměnné*. *Definičním oborem* funkce f je množina M a značí se $D(f)$, *oborem hodnot* funkce f je množina $H(f) := \{f(x), x \in M\}$.

Grafem reálné funkce je množina bodů $G = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2;\ x \in D(f)\}$, kde $(x, f(x))$ značí bod roviny s pravoúhlými souřadnicemi x a y. Protože budeme v celém textu pracovat pouze s reálnými funkcemi jedné proměnné, nebudeme dále tuto charakteristiku explicitně uvádět. Budeme místo toho – podobně jako v případě posloupností – mluvit pouze o funkci.

Definice 2.2. Nechť je dán bod $x_0 \in \mathbb{R}$ a číslo $\delta \in \mathbb{R}$, kde $\delta > 0$, pak množinu $\mathscr{O}(x_0) = (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ nazveme *okolím bodu* x_0. Intervalelm $\langle x_0,\ x_0 + \delta)$ budeme rozumět *pravé okolí bodu* x_0 a intervalem $(x_0 - \delta,\ x_0\rangle$ *levé okolí bodu* x_0. Monožina $\mathscr{O} \setminus \{x_0\}$ se nazývá *ryzím okolím* bodu x_0.
Nechť $a \in \mathbb{R}$. Pak interval $\mathscr{O}(+\infty) = (a, +\infty)$ nazveme okolím bodu $+\infty$ a interval $\mathscr{O}(-\infty) = (-\infty, a)$ okolím bodu $-\infty$.

Poznámka 2.3. Pro okolí bodu platí tyto vlastnosti:

1. Jestliže $\mathscr{O}_{\delta_1}(x_0)$ a $\mathscr{O}_{\delta_2}(x_0)$ jsou okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}^*$, pak také $\mathscr{O}_{\delta_1}(x_0) \cap \cap \mathscr{O}_{\delta_2}(x_0)$ je okolí bodu x_0.

2. Jestliže $x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}^*$ a $x_1 \neq x_2$, pak existují $\mathscr{O}_{\delta_1}(x_1)$ a $\mathscr{O}_{\delta_2}(x_2)$ taková, že $\mathscr{O}_{\delta_1}(x_1) \cap \mathscr{O}_{\delta_2}(x_2) = \emptyset$.

Stejně jako u posloupností také u funkcí můžeme pozorovat monotonii nebo ohraničenost. Některé vlastnosti však lze rozlišovat, týkají-li se pouze konkrétního bodu, nebo jistého intervalu.

Definice 2.4. Řekneme, že funkce f je *rostoucí* (resp. *klesající*) *v bodě* x_0, jestliže existuje okolí $\mathscr{O}(x_0) = (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$ takové, že pro všechna $x \in (x_0 - \delta,\ x_0)$ je $f(x) < f(x_0)$ (resp. $f(x) > f(x_0)$) a pro všechna $x \in (x_0,\ x_0 + \delta)$ je $f(x_0) <$ $< f(x)$ (resp. $f(x_0) > f(x)$). Pokud bychom ostré nerovnosti ve vztazích, kde se porovnávají funkční hodnoty, nahradili neostrými nerovnostmi, získali bychom definici funkce *nerostoucí* (resp. *neklesající*) *v bodě*.

Funkci, která je rostoucí nebo klesající v bodě x_0, budeme nazývat funkcí *ryze monotonní v bodě* x_0. Funkci, která je nerostoucí nebo neklesající v bodě x_0, budeme nazývat funkcí *monotonní v bodě* x_0.

Definice 2.5 (Vlastnosti funkce)**.** Nechť je dána funkce $f : D(f) \to \mathbb{R}$ a množina $I \subseteq D(f)$, pak řekneme, že funkce f je:

rostoucí na množině I, jestliže $\forall x_1,\ x_2 \in I$, kde $x_1 < x_2$, je $f(x_1) < f(x_2)$,
klesající na množině I, jestliže $\forall x_1,\ x_2 \in I$, kde $x_1 < x_2$, je $f(x_1) > f(x_2)$,
nerostoucí na množině I, jestliže $\forall x_1,\ x_2 \in I$, kde $x_1 < x_2$, je $f(x_1) \geq f(x_2)$,
neklesající na množině I, jestliže $\forall x_1,\ x_2 \in I$, kde $x_1 < x_2$, je $f(x_1) \leq f(x_2)$,
monotónní na množině I, je-li funkce nerostoucí, nebo neklesající,
ryze monotónní na množině I, je-li funkce rostoucí, nebo klesající,
shora ohraničená, jestliže $\exists U \in \mathbb{R}$ takové, že $f(x) \leq U,\ \forall x \in D(f)$,
zdola ohraničená , jestliže $\exists L \in \mathbb{R}$ takové, že $f(x) \geq L,\ \forall x \in D(f)$,
ohraničená, jestliže je shora i zdola ohraničená, tj. $\exists K \in \mathbb{R}$, kde $K > 0$ takové, že $|f(x)| \leq K,\ \forall x \in D(f)$.

U posloupností jsme se nezmiňovali o inverzi. Ta by totiž jakožto zobrazení $a^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$ postrádala jakýkoli smysl. Naproti tomu funkce jsou definovány jako zobrazení $M \to \mathbb{R}$, kde $M \subset \mathbb{R}$, tudíž alespoň u prostých funkcí o inverzní funkci uvažovat můžeme.

Definice 2.6. Nechť je dána prostá funkce f. Funkci g nazveme *inverzní funkcí* k funkci f, jestliže $\forall x \in D(f)$ platí $g(f(x)) = x$. Inverzní funkci k funkci f obvykle značíme f^{-1}.

Lemma 2.7. *Inverzní funkce k funkci f rostoucí, resp. klesající, na množině $D(f)$ je rostoucí, resp. klesající, na množině $H(f)$.*

Důkaz. Viz [1, s. 20]. □

2.1 Limita funkce

Definice 2.8. Nechť je dáno $x_0,\ L \in \mathbb{R}^*$. Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 *limitu* rovnou číslu L, tj. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$, jestliže ke každému okolí $\mathscr{O}(L)$ bodu L existuje okolí $\mathscr{O}(x_0)$ bodu x_0 tak, že pro všechna $x \in \mathscr{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ platí $f(x) \in \mathscr{O}(L)$.

Pomocí kvantifikátorů lze tuto definici zapsat

$$\forall\, \mathscr{O}(L)\ \exists\, \mathscr{O}(x_0)\ \forall x \in \mathscr{O}(x_0) \setminus \{x_0\} : f(x) \in \mathscr{O}(L).$$

Podobně jako v případě limity posloupnosti i zde rozlišujeme speciální případy limity podle toho, zda x_0 a L nabývá hodnoty z $\mathbb{R}$ (vlastní limita) nebo $\pm\infty$ (nevlastní limita):

a) *Vlastní limita ve vlastním bodě*, je-li $x_0, L \in \mathbb{R}$.
b) *Vlastní limita v nevlastním bodě*, je-li $x_0 = \pm\infty$ a $L \in \mathbb{R}$.
c) *Nevlastní limita*, je-li $L = \pm\infty$.

Pokud máme vlastní limitu ve vlastním bodě, pak okolí $\mathscr{O}(L)$ můžeme popsat pomocí hodnoty ε a okolí $\mathscr{O}(x_0)$ pomocí hodnoty δ. Dostáváme pak tzv. ε-δ definici uvedenou níže.

Definice 2.9. Nechť $x_0, L \in \mathbb{R}$. Pak $\lim\limits_{x\to x_0} = L$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí:

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Mluvíme-li o vlastní limitě v nevlastním bodě ($+\infty$), potom tuto limitu definujeme následovně (analogicky pro $-\infty$).

Definice 2.10. Řekneme, že $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$, $L \in \mathbb{R}$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $A > 0$ takové, že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí:

$$x > A \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Podobně bychom definovali další případy nevlastních limit v nevlastních bodech.

Věta 2.11. *Funkce f má v libovolném bodě nejvýše jednu limitu.*

Důkaz. Důkaz věty provedeme sporem. Budeme tedy předpokládat, že $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L_1$ a zároveň $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L_2$, kde $L_1 \neq L_2$ a x_0, L_1, $L_2 \in \mathbb{R}^*$. Z druhého bodu poznámky 2.3 o vlastnostech okolí bodu víme, že existují $\mathscr{O}(L_1)$ a $\mathscr{O}(L_2)$, pro která platí $\mathscr{O}(L_1) \cap \mathscr{O}(L_2) = \emptyset$. Z definice limity 2.8 plyne:

$$\exists\, \mathscr{O}_1(x_0) \text{ takové, že } \forall x \in \mathscr{O}_1(x_0) \setminus \{x_0\} \text{ platí } f(x) \in \mathscr{O}(L_1),$$

$$\exists\, \mathscr{O}_2(x_0) \text{ takové, že } \forall x \in \mathscr{O}_2(x_0) \setminus \{x_0\} \text{ platí } f(x) \in \mathscr{O}(L_2).$$

Podle prvního bodu poznámky 2.3 je $\mathscr{O}_1(x_0) \cap \mathscr{O}_2(x_0) = \mathscr{O}(x_0)$ také okolí bodu x_0 a zároveň musí platit, že $\forall x \in \mathscr{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ je $f(x) \in \mathscr{O}(L_1) \cap \mathscr{O}(L_2)$, což je spor [1, s. 66].

□

V běžných situacích počítáme v konkrétním bodě oboustrannou limitu. V některých případech se ale funkce chová jiným způsobem, pokud budeme její průběh sledovat z levé strany a jiným z pravé strany. Uvažme funkci $\operatorname{sgn}(x)$. Ta nemá limitu v bodě $x_0 = 0$, a to i přesto, že je v okolí bodu $x_0 = 0$ zleva i zprava konstatntní. Definujme proto nyní pojem jednostranné limity, který bude oproti oboustranné definici limity redukován pouze na pravé, resp. levé okolí bodu x_0.

Definice 2.12. Nechť $L \in \mathbb{R}^*$ a $x_0 \in \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 *limitu zprava* rovnu L, tj. $\lim\limits_{x \to x_0^+} = L$, jestliže:

$$\forall \mathscr{O}(L)\ \exists \delta > 0\ \forall x \in (x_0,\ x_0 + \delta) : f(x) \in \mathscr{O}(L).$$

Podobně definujeme limitu zleva, tj. $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L$, jestliže:

$$\forall \mathscr{O}(L)\ \exists \delta > 0\ \forall x \in (x_0 - \delta,\ x_0) : f(x) \in \mathscr{O}(L).$$

Poznámka 2.13. Věta 2.11 platí také pro jednostranné limity funkce.

Věta 2.14. *Funkce f má v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ limitu právě tehdy, když existují v bodě x_0 limity zprava i zleva a tyto limity se rovnají. Navíc platí rovnost:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x).$$

Důkaz. "$\Rightarrow$" Nechť $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$. Libovolně zvolíme $\mathscr{O}(L)$. Nalezneme podle definice limity 2.8 takové $\mathscr{O}(x_0)$, pro které platí:

$$\forall x \in \mathscr{O}(x_0) \setminus \{x_0\} \text{ platí } f(x) \in \mathscr{O}(L).$$

Podle definice 2.12 lze také najít dostatečně malé číslo δ, pro které platí:

$$\forall x \in (x_0,\ x_0 + \delta) \text{ platí } f(x) \in \mathscr{O}(L).$$

Rovněž platí, že $(x_0,\ x_0 + \delta) \subset \mathscr{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$, čímž je dokázáno, že $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$. Podobně bychom dokázali, že $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L$.

"$\Leftarrow$" Nechť $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L$. Zvolíme libovnolně $\mathscr{O}(L)$. Podle definice limity zprava 2.12 nalezneme $\delta_1 > 0$ takové, že platí:

$$\forall x \in (x_0,\ x_0 + \delta_1) \text{ platí } f(x) \in \mathscr{O}(L),$$

dále podle definice limity zleva nalezneme $\delta_2 > 0$ takové, že platí

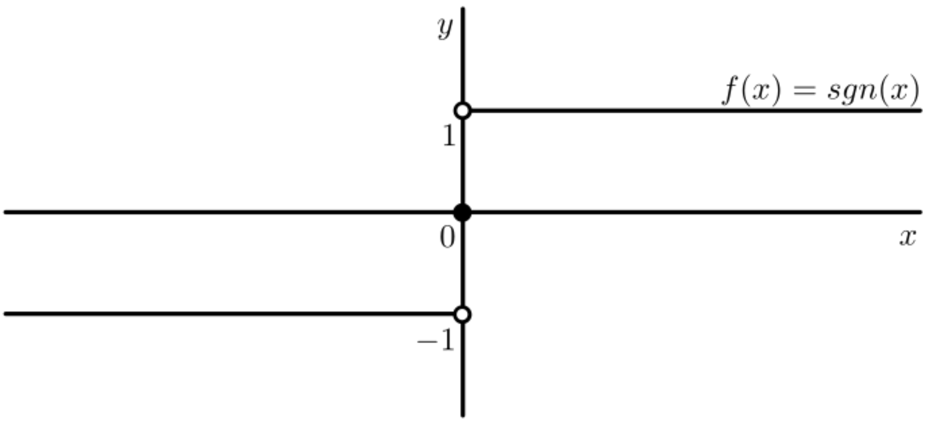
$$\forall x \in (x_0 - \delta_2,\ x_0) \text{ platí } f(x) \in \mathscr{O}(L).$$

Nyní položíme $\mathscr{O}_\delta(x_0) = \min(\delta_1,\ \delta_2)$, pak $\mathscr{O}_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \subset \mathscr{O}_{\delta_1}(x_0) \setminus \{x_0\} \cup \cup \mathscr{O}_{\delta_2}(x_0) \setminus \{x_0\}$, takže $\forall x \in \mathscr{O}_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ platí $f(x) \in \mathscr{O}(L)$, čímž jsme dokázali, že platí $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ [5, s. 207]. □

Věta 2.15. *Má-li funkce f v bodě x_0 vlastní limitu $L \in \mathbb{R}$, pak existuje $\mathscr{O}(x_0)$ takové, že f je na $\mathscr{O}(x_o)$ omezená.*

Důkaz. Nechť $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$. Potřebujeme určit $K_1,\ K_2$ tak, aby $K_1 \leq f(x) \leq \leq K_2$ pro všechna $x \in \mathscr{O}(x_0)$. Podle definice existuje k číslu $\varepsilon = 1$, okolí $\mathscr{O}(x_0)$, takové, že pro všechna $x \in \mathscr{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$ platí $L-1 < f(x) < L+1$. Pokud $f(x_0)$ existuje, zvolíme $K_1 = \min\{L-1, f(x_0)\}$ a $K_2 = \max\{L+1, f(x_0)\}$. Pokud $f(x_0)$ neexistuje, pak $K_1 = L-1$ a $K_2 = L+1$ [1, s. 66]. □

Příklad 2.16. Obrácená implikace předchozí věty platit nemusí. Uveďme funkci $f(x) = sgn(x)$. Z obrázku 2.1 je patrné, že tato funkce je omezená, ale v bodě $x_0 = 0$ má pouze jednostranné limity, které se samy sobě nerovnají.



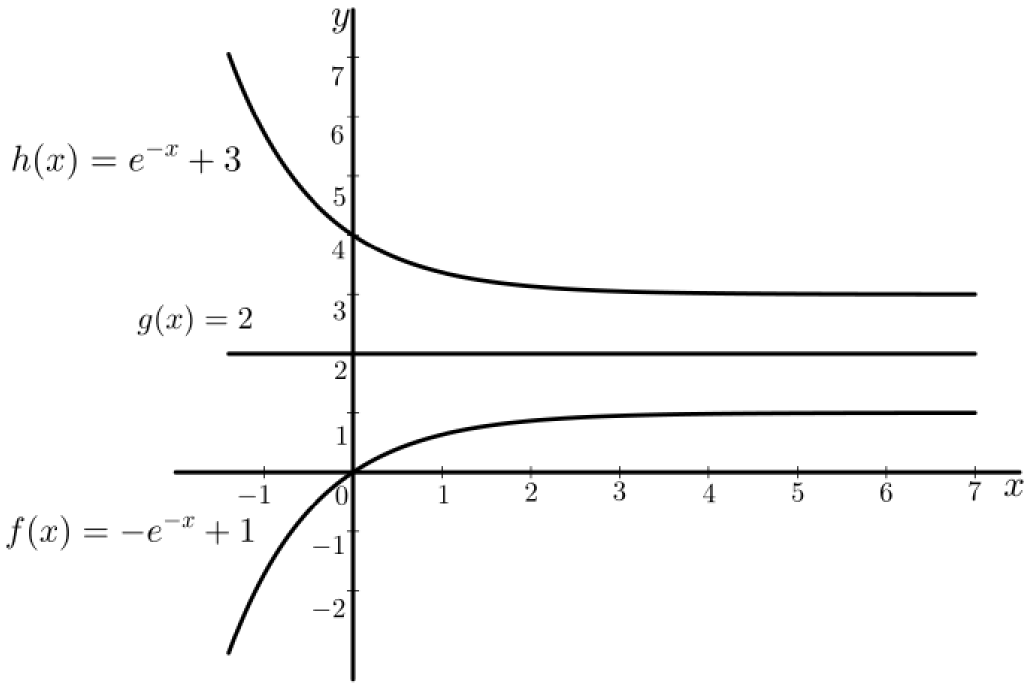
Obrázek 2.1: Funkce $f(x) = sgn(x)$.

Analogií věty o dvou policajtech je věta následující.

Věta 2.17. *Nechť existuje ryzí okolí bodu x_0 takové, že pro všechna $x \in \mathscr{O}(x_0)$ platí $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Jestliže $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = L$, pak také $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L$.*

Důkaz. Věta plyne z definice limity. □

Příklad 2.18. Obrácená implikace věty o policajtech neplatí, což můžeme ilustrovat obrázkem 2.2, na tomto obrázkou jsou uvedeny 3 funkce, pro které platí $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Limita funkce $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 2$, ale $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = 3$ a $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 1$



Obrázek 2.2: Funkce $f(x) = -e^{-x} + 1,\ g(x) = 2,\ h(x) = e^{-x} + 3$.

2.2 Spojitost funkce

Definice 2.19. Nechť je dána funkce f, která je definována na okolí bodu x_0. Řekneme, že funkce f je *v bodě x_0 spojitá*, jestliže:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Stejně jako v případě jednostranných limit můžeme definovat jednostranou spojitost.

Definice 2.20. Řekneme, že funkce je *spojitá zprava*, resp. *spojitá zleva* jestliže:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0), \qquad \text{resp.} \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

Poznámka 2.21. Je zřejmé, že funkce je spojitá v bodě x_0, jestliže je spojitá v bodě x_0 zprava i zleva.

Věta 2.22. *Nechť je funkce f spojitá v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, pak existuje takové okolí $\mathscr{O}(x_0)$, na kterém je funkce f omezená.*

Důkaz. Věta okamžitě plyne z definice spojitosti funkce v bodě. Je-li totiž funkce f v bodě x_0 spojitá, musí v tomtéž bodě existovat obě jednostranné limity takové, že $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$. Jedná se tedy o vlastní limitu, která je omezená podle věty 2.15. □

Pokud mluvíme o lokálních vlastnostech, pak nás zajíma limita funkce a spojitost funkce v bodě. Tyto vlastnosti popisují, jak se daná funkce chová na okolí nějakého bodu. Nyní se podíváme na globální vlastnosti funkce, tj. vlastnosti na nějakém intervalu I.

Definice 2.23. Nechť je dána funkce f a interval $I \subseteq D(f)$, $I = \langle a,\ b\rangle$. Řekneme, že funkce je *spojitá na intervalu* I, jestliže je spojitá v každém bodě $x \in (a,\ b)$, v spojitá zprava v bodě a a spojitá zleva v bodě b. Píšeme $f \in C(I)$, je-li $I = \langle a,\ b\rangle$ pak $f \in C\langle a,\ b\rangle$.
Podobně můžeme definovat spojitost na polouzavřeném, resp. otevřeném, intervalu.

U funkce také můžeme hledat extrémy, přičemž rozlišujeme extrémy lokální a globální. Pokud mluvíme o lokálním extrému funkce, pak máme na mysli extrém vzhledem k nějakému okolí. Pokud hovoříme o extrému globálním, pak máme na mysli maximum nebo minimum na nějakém intervalu, například na celém definičním oboru.

Definice 2.24. Řekneme, že funkce f má v bodě x_0:

lokální maximum, jestliže existuje $\mathscr{O}(x_0)$ takové, že pro každé $x \in \mathscr{O}(x_0)$ je $f(x) \leq f(x_0)$,

lokální minimum, jestliže existuje $\mathscr{O}(x_0)$ takové, že pro každé $x \in \mathscr{O}(x_0)$ je $f(x) \geq f(x_0)$,

ostré lokální maximum, jestliže existuje $\mathscr{O}(x_0)$ takové, že pro každé $x \in \in \mathscr{O}(x_0) \smallsetminus \{x_0\}$ je $f(x) < f(x_0)$,

ostré lokální minimum, jestliže existuje $\mathscr{O}(x_0)$ takové, že pro každé $x \in \in \mathscr{O}(x_0) \smallsetminus \{x_0\}$ je $f(x) > f(x_0)$.

Pokud má funkce f v bodě x_0 lokální extrém, pak musí být definována na okolí $\mathscr{O}(x_0)$, tj. $\mathscr{O}(x_0) \subseteq D(f)$.

Definice 2.25. Nechť je funkce definována na intervalu I. Funkce f má v bodě $x_0 \in I$ *globální maximum*, resp. *globální minimum*, jestliže $\forall x \in I$ platí $f(x) \leq \leq f(x_0)$, resp. $\forall x \in I$ platí $f(x) \geq f(x_0)$.

Pokud v následujícím textu neudáme interval pro vyšetření globálního extrému, pak budeme mít na mysli celý $D(f)$. Podrobněji se na extrémy funkcí podíváme v následující kapitole o derivacích.

Věta 2.26 (Weierstrassova věta)**.** *Nechť funkce $f \in C\langle a,\ b\rangle$. Pak f je na tomto intervalu omezená a nabývá na něm svého maxima a minima.*

Důkaz. Nejprve dokážeme, že funkce f nabývá na intervalu $\langle a,\ b\rangle$ svého maxima v nějakém bodě c. Nechť $\forall x \in \langle a,\ b\rangle$ platí $f(x) \leq f(c)$, z čehož vyplývá, že funkce f je shora omezená na $\langle a,\ b\rangle$. Označíme $M = \sup\{f(x);\ x \in \langle a,\ b\rangle\}$. Sestrojíme posloupnost bodů $\{x_n\}$ v $\langle a,\ b\rangle$ tak, aby $f(x_n) \to M$, přičemž víme, že $M \in \mathbb{R}^*$. Protože posloupnost $\{x_n\}$ je omezená, lze z ní podle věty 1.25 vybrat konvergentní podposloupnost $\{x_{n_k}\}$, pro kterou platí $a \leq x_{n_k} \leq b$, a tedy $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = $ $= c \in \langle a,\ b\rangle$. Pro $k \to \infty$ platí:

$$f(x_{n_k}) \to M, \qquad f(x_{n_k}) \to f(c),$$

protože jde o vybranou posloupnost z $\{x_n\}$ a zároveň f je spojitá v bodě c. Z jednoznačnosti limity plyne rovnost, tedy $M = f(c) \in \mathbb{R}$.

Analogicky bychom postupovali pro případ minima [2, s. 122]. □

Věta 2.27 (Bolzanova věta)**.** *Nechť funkce $f \in C\langle a,\ b\rangle$ a nechť $f(a) \neq f(b)$. Pak f nabývá na intervalu $\langle a,\ b\rangle$ všech hodnot mezi svým maximem a minimem.*

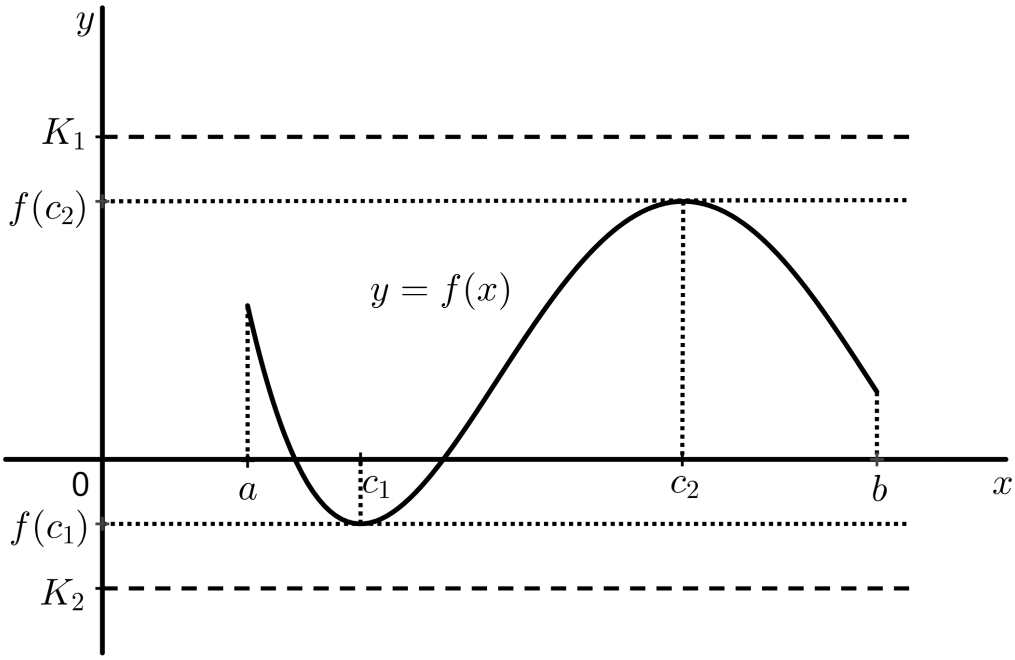
Důkaz. Podle věty 2.26 exitují $c_1,\ c_2 \in \langle a,\ b\rangle$ taková, že $f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$, kde $x \in \langle a,\ b\rangle$. Musíme tedy ukázat, že pro libovolná $x_1,\ x_2 \in \langle a,\ b\rangle$ a libovolné d, které leží mezi $f(x_1)$ a $f(x_2)$, existuje $c \in \langle a,\ b\rangle$ takové, že $f(c) = d$.

Nechť je $x_1 < x_2$ a $f(x_1) < d < f(x_2)$. Nechť A = $\{x \in \langle x_1,\ x_2\rangle : f(x) < d\}$. Množina A je neprázdná, protože $x_1 \in A$, a shora omezená číslem x_2. Pak je tedy $\sup A = c \leq x_2$. Ukážeme, že $f(c) = d$.

Předpokládejme, že $f(c) < d$. Ze spojitosti funkce f v bodě c plyne, že k číslu $\varepsilon = f(c) - d > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro $x \in (c-\delta,\ c\rangle \cap \langle x_1,\ x_2\rangle$ je $f(x) > f(c) - \varepsilon = d$. To znamená, že pro libovolné $x \in (c-\delta,\ c) \cap \langle x_1,\ x_2\rangle$ je horní závorou množiny A, což je spor s definicí číla c.

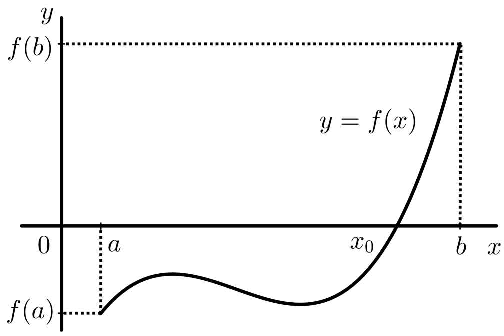
Předpokládejme nyní, že $f(c) > d$. Ze spojitosti funkce f v bodě c plyne, že k číslu $\varepsilon = d - f(c) > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro $x \in \langle c,\ c+\delta) \cap \langle x_1,\ x_2\rangle$ je $f(x) < f(c) + \varepsilon = d$. To znamená, že libovolné $x \in (c,\ c+\delta) \cap \langle x_1,\ x_2\rangle$ je prvkem množiny A. Což je opět spor s definicí čísla c. A tedy musí platit $f(c) = d$ [1, s. 77]. □

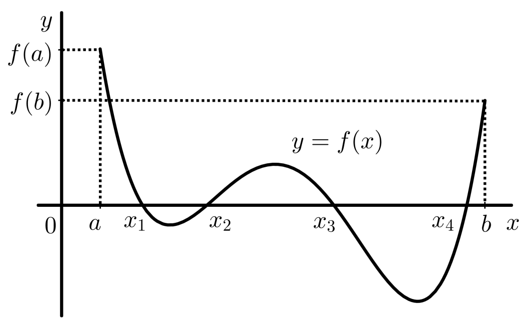
Poznámka 2.28. Věta 2.27 má následující důsledek, který nám při splnění podmínek zajišťuje existenci nulového bodu na daném intervalu. Jedná se zde pouze o podmínku postačující, tudíž při nesplnění podmínek nemůžeme s jistotou říct, že nulové body funkce f na intervalu I neexistují.



Obrázek 2.3: Weierstrassova věta

Důsledek 2.29. Nechť funkce $f \in C\langle a,\ b\rangle$ a platí, že $f(a) \cdot f(b) < 0$. Pak existuje alespoň jeden bod $x_0 \in \langle a,\ b\rangle$, pro který platí $f(x_0) = 0$.





Obrázek 2.4: Bolzanova věta.

Poznámka 2.30. Označíme $f(I) = \{f(x) : x \in I\}$. Z vět 2.26, 2.27 výplývá:

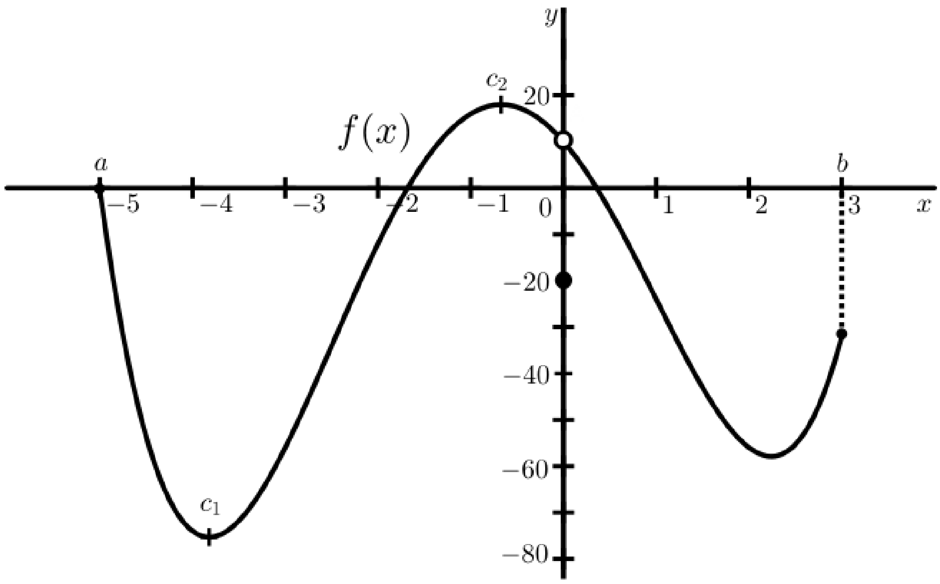
- Spojitá funkce zobrazuje interval I na bod nebo na interval $f(I)$.
- Spojitá funkce zobrazuje uzavřený, omezený interval I na bod nebo na interval $f(I)$.

- Ryze monotónní spojitá funkce zobrazuje otevřený interval I na otevřený interval $f(I)$.

Příklad 2.31. Pokud budeme uvažovat obrácené implikace k větám 2.22, 2.26 a 2.27 pak můžeme nalézt funkci, která podmínky implikací nesplňuje, ačkoliv důsledky platí. Může to být například funkce:

$$f(x) = \begin{cases} x^4 + 3x^3 - 15x^2 - 23x + 10, & \text{pro } x \in \langle -5, 0) \cup (0, 3\rangle \\ -20, & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Z příslušného grafu, viz obrázek 2.5, je patrné, že tato funkce nabývá maxima a minima a všech hodnot mezi nimi, ale není spojitá, zároveň je tato funkce omezená na okolí bodu $x_0 = 0$, ale není v tomto bodě spojitá.



Obrázek 2.5: Funkce $f(x) = \begin{cases} x^4 + 3x^3 - 15x^2 - 23x + 10, & \text{pro } x \in \langle -5, 0) \cup (0, 3\rangle \\ -20, & \text{pro } x = 0. \end{cases}$

Věta 2.32. *Nechť funkce f je na intervalu $I \subseteq D(f)$ spojitá a ryze monotónní. Pak je funkce f^{-1} spojitá a ryze monotónní na intervalu $J = f(I)$.*

Důkaz. Z poznámky 2.30 plyne, že $J = f(I)$ je interval. Předpokládejme, že f je rostoucí na I. Podle lemmatu 2.7 je f^{-1} rostoucí na J. Nechť $x_1 \in J$ je libovolný bod, který není pravým koncovým bodem tohoto intervalu, a označme

$y_1 = f^{-1}(x_1)$. Pak $y_1 \in I$, $f(y_1) = x_1$ a y_1 není pravým koncovým bodem intervalu I. Nechť $\varepsilon > 0$ je zvoleno libovolně tak, aby $y_1 + \varepsilon \in I$. Potom položme $x_2 = f(y_1 + \varepsilon)$. Pak $x_2 \in J$ a protože je f rostoucí, je $x_2 = f(y_1 + \varepsilon) > f(y_1) = x_1$. Označme dále $x_2 - x_1 = \delta$. Pak $\delta > 0$ a pro $x \in \langle x_1,\ x_1 + \delta)$ platí nerovnost $f^{-1}(x_1) \leq f^{-1}(x) < f^{-1}(x_1 + \delta) = f^{-1}(x_2) = y_1 + \varepsilon = f^{-1}(x_1) + \varepsilon$. Pak tedy je $|f^{-1}(x) - f^{-1}(x_1)| < \varepsilon$, tj. f^{-1} je spojitá zprava v bodě x_1.

Podobně bychom dokázali, že funkce f^{-1} je spojitá zleva v každém bodě intervalu J, který není jeho levým koncovým bodem. Proto je f^{-1} spojitá na intervalu J [1, s. 79]. □

Poznámka 2.33. Řekněme, že funkce f je definována na $\mathscr{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$. Podíváme se nyní na situace, které mohou nastat, jestliže funkce není v bodě x_0 spojitá

1. Bod x_0 nazveme bodem *odstranitelné nespojitosti*, pokud funkce f má v bodě x_0 vlastní limitu, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$, ale $L \neq f(x_0)$
2. Jestliže neexituje výše uvedená vlastní limita, pak bod x_0 nazýváme
   a) bodem *nespojitosti prvního druhu*, jestliže existují obě vlastní jednostranné limity v bodě x_0, $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L_1$ a $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L_2$, kde $L_1 \neq L_2$,
   b) bodem *nespojitosti druhého druhu*, jestliže alespoň jedna z jednostranných limit v bodě x_0 neexistuje nebo je nevlastní.

Pokud má funkce f v bodě x_0 odstranitelnou nespojitost a $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$, pak můžeme dodefinovat hodnotu v bodě x_0, čímž bod nespojitosti odstraníme, výsledná funkce $\bar{f}$ pak bude spojitá.

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} L, & x = x_0, \\ f(x), & x \in D(f) \setminus \{x_0\}. \end{cases}$$

Kapitola 3

Derivace

Jakmile disponujeme limitou funkce, můžeme bez potíží definovat další základní nástroj matematické analýzy, jímž jsou derivace.

Definice 3.1. Nechť je dána funkce f a bod $x_0 \in D(f)$. Jestliže existuje:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

potom tuto limitu nazývame *derivací funkce f v bodě x_0* a značíme ji $f'(x_0)$. Podobně definujeme také derivaci funkce f v bodě x_0 zprava a derivaci zleva:

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \qquad f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Derivaci zprava a derivaci zleva nazýváme jednostrannými derivacemi.

Poznámka 3.2. U derivace funkce může nastat jeden z těchto případů. Derivace funkce f v bodě x_0:

1. Neexistuje.
2. Existuje a pak je:
   (a) Vlastní, jestliže je limita z definice 3.1 vlastní.
   (b) Nevlastní, jestliže je limita z definice 3.1 nevlastní.

Ne všechny funkce mají derivaci. Některé derivaci postrádají pouze v jednom konkrétním bodě, jako např. funkce $f(x) = |x|$ pro $x_0 = 0$. jiné nejsou diferencovatelné v žádném bodě. Příkladem může být funkce Dirichletova:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{pro } x \in \mathbb{I}. \end{cases}$$

Abychom tyto případy dokázali rozlišovat, uvedeme následující definici.

Definice 3.3. Řekneme, že funkce f je *diferencovatelná* v bodě $x_0 \in \mathbb{R}$, jestliže existuje okolí $\mathscr{O}(x_0)$ tohoto bodu takové, že pro všechny body $x_0 + h \in \mathscr{O}(x_0)$ platí:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = Ah + \tau(h),$$

kde A je vhodné číslo a $\tau(h)$ je funkce taková, že $\lim_{h \to 0} \frac{\tau(h)}{h} = 0$. Číslo Ah budeme nazývat *diferenciál* funkce f v bodě x_0 a značit $\mathrm{d}f(x_0)$. Řekneme, že funkce f je diferencovatelná, jestli je diferencovatelná ve všech bodech $D(f)$.

Pro jednostranné derivace funkce dále platí obdobá věta jako pro jednostranné limity funkce.

Věta 3.4. *Funkce f má v bodě x_0 derivaci právě tehdy, když má v bodě x_0 derivaci zprava i zleva a tyto derivace se rovnají. Platí pak rovnost:*

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0).$$

Důkaz. Protože jsme derivaci definovali jako limitu (případně jednostranné derivace jako jednostranné limity) vyplývá tvrzení přímo z věty 2.14. □

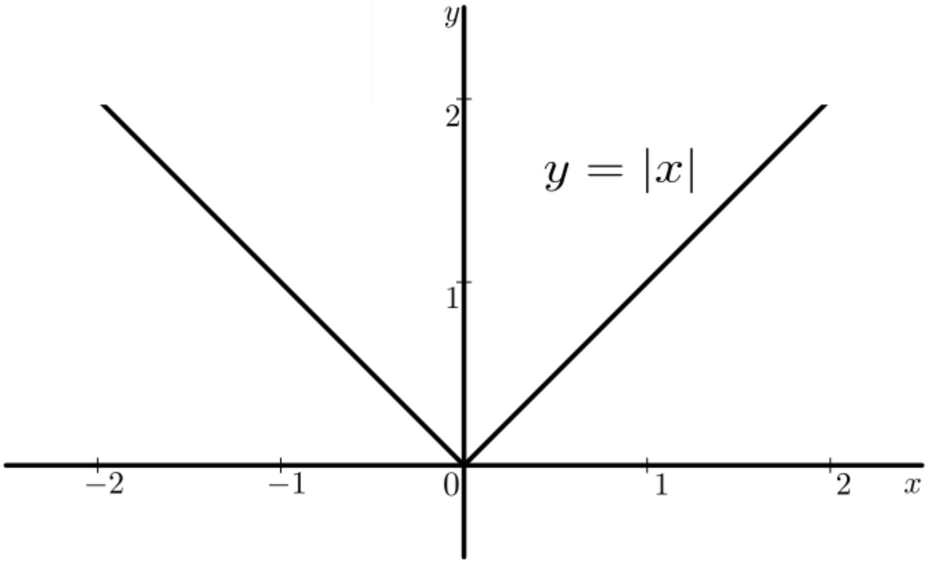
Věta 3.5. *Jestliže má funkce f v bodě x_0 vlastní derivaci, pak je v tomto bodě spojitá.*

Důkaz. Nechť existuje $f'(x_0) \neq \pm\infty$. Podle definice spojitosti funkce dokážeme, že $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Platí

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} f(x) &= \lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0) + f(x_0)) = \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) + \lim_{x \to x_0} f(x_0) = \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) + f(x_0) = \\ &= f'(x_0) \cdot 0 + f(x_0) = f(x_0) \text{ [1, s. 91].} \end{aligned}$$

□

Příklad 3.6. Obrácená implikace věty 3.5 neplatí, jak si můžeme všimnout na obrázku 3.1. Funkce $f(x) = |x|$ je spojitá v bodě $x_0 = 0$, ale nemá v tomto bodě derivaci.



Obrázek 3.1: Funkce $f(x) = |x|$.

Věta 3.5 platí i v případě jednostranných derivací funkce a jednostranných spojitostí funkce.

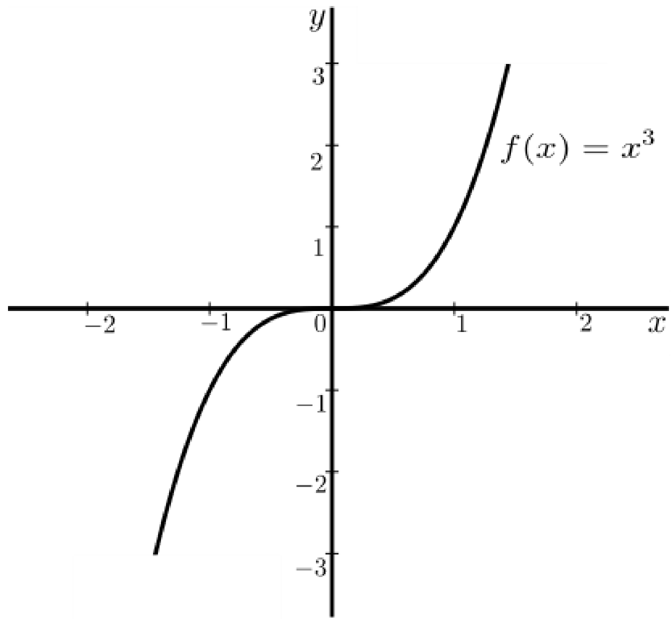
Definice 3.7. Nechť je dána funkce f a existuje první derivace funkce $f'(x)$, *druhou derivací* funkce f rozumíme funkci $f'' = (f')'$. Jestliže existuje derivace $n-1$. řádu, pak *derivací n-tého řádu* funkce f rozumíme $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

Věta 3.8. *Nechť je dána funkce f a bod x_0, na němž je f definována. Jestliže $f'(x_0) < 0$, pak je funkce v bodě x_0 klesající, naopak pokud je $f'(x_0) > 0$, pak je funkce v bodě x_0 rostoucí.*

Důkaz. Dosazením do první nerovnosti dostáváme z definice derivace vztah $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < 0$. Předpokládejme nyní, že pro nějaké $\delta > 0$ je $x \in (x_0 - \delta,\ x_0)$. Pak zřejmě $x - x_0 < 0$. Aby zároveň platila podmínka $f'(x_0) < 0$, musí být $f(x) - f(x_0) > 0$, a funkce f je proto klesající na levém okolí bodu x_0. Nechť tentokrát $x \in (x_0,\ x_0 + \delta)$. Potom $x - x_0 > 0$ a $f(x) - f(x_0) < 0$. Funkce f je proto klesající i na pravém okolí bodu x_0.

Obdobně bychom dokázali druhou část tvrzení [1, s. 99]. □

Příklad 3.9. Abychom ukázali, že obrácená implikace předchozí věty neplatí, uvedeme funkci $f(x) = x^3$, která je rostoucí na celém definičním oboru, ale $f'(0) = 0$ (viz obrázek 3.3).



Obrázek 3.2: Funkce $f(x) = x^3$.

Věta 3.10. *Nechť f je libovolná funkce. Potom platí, že jestliže je f na otevřeném intervalu $I \subseteq D(f)$ diferencovatelná, potom je na I spojitá.*

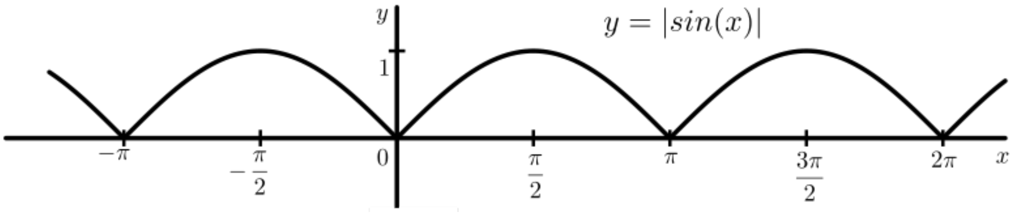
Důkaz. Předpokládejme nejprve, že je f diferencovatelná na intervalu I, což znamená, že je diferencovatelná v libovolném bodě $x_0 \in I$. Podle definice diferenciálu to znamená, že pro libovolné $x_0 \in I$ existují A a $\tau(h)$ takové, že $f(x_0+h) - f(x_0) = Ah + \tau(h)$ pro $h \in (-\delta, \delta)$, kde $\delta > 0$ a $\lim_{h\to 0} \frac{\tau(h)}{h} = 0$. Odtud pak plynou rovnosti:

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = A + \frac{\tau(h)}{h},$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \left(A + \frac{\tau(h)}{h}\right) = A.$$

Vlastní derivace v bodě x_0 tudíž existuje a nabývá hodnoty $f'(x_0) = A$. Z věty 3.5 pak plyne, že f je v bodě x_0 spojitá. Pokud tento postup použijeme na všechna $x \in I$, dostáváme tvrzení věty. □

Příklad 3.11. Obrácená implikace věty 3.10 neplatí. Vezměme například funkci $f(x) = |sin(x)|$. Ta je spojitá na celém $\mathbb{R}$, a přesto existuje nekonečně mnoho bodů, ve kterých není diferencovatelná.



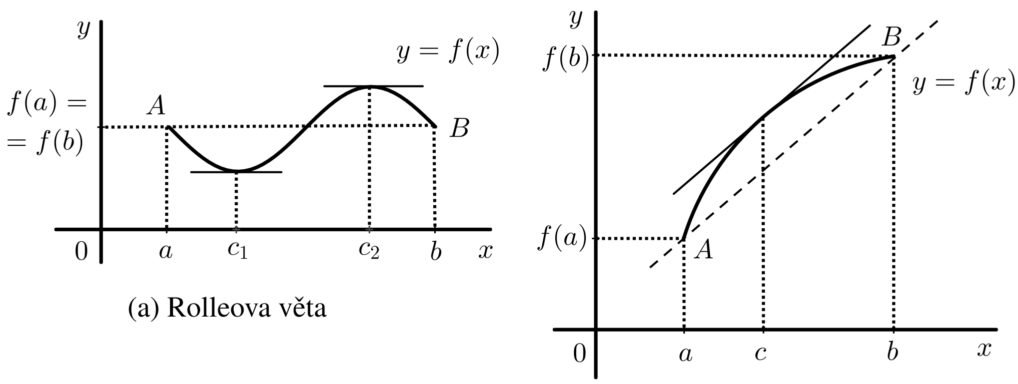
Obrázek 3.3: Funkce $f(x) = |sin(x)|$.

3.1 Věty o střední hodnotě

Věta 3.12 (Rolleova věta)**.** *Nechť je dána funkce $f \in C\langle a,\ b\rangle$, která má v každém bodě intervalu $\langle a,\ b\rangle$ derivaci vlastní nebo nevlastní a nechť $f(a) = f(b)$. Pak existuje bod $c \in \langle a,\ b\rangle$, pro který platí $f'(c) = 0$.*

Důkaz. Je-li f na intervalu $\langle a,\ b\rangle$ konstantní, pak je tvrzení jasné.

Nechť existuje $x \in (a,\ b)$ tak, že $f(x) \neq f(a)$. Nechť např. $f(x) > f(a)$ (analogicky pro $f(x) < f(a)$). Podle Weierstrassovy věty 2.26 $\exists c \in \langle a,\ b\rangle$, v němž funkce f nabývá své největší hodnoty, $f(c) = M$. Protože $f(x) > f(a) = f(b)$, je $c \in (a,\ b)$. Ukážeme, že $f'(c) = 0$. Kdyby bylo $f'(c) > 0$, pak by podle věty 3.8 existovalo $\mathscr{O}(c)$ tak, že pro $x \in \mathscr{O}(c)$, $x > c$ by platilo $f(x) > f(c) = M$, což je spor. Analogicky se dá ukázat, že $f'(c) < 0$ [1, s. 99]. □



(a) Rolleova věta

(b) Lagrangeova věta

Obrázek 3.4: Věty o střední hodnotě.

Věta 3.13 (Lagrangeova věta)**.** *Nechť je dána funkce $f \in C\langle a,\ b\rangle$, která má v každém bodě intervalu $\langle a,\ b\rangle$ derivaci. Pak existuje bod $c \in \langle a,\ b\rangle$, pro který platí:*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Důkaz. Definujeme funkci

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a), \quad x \in \langle a,\, b\rangle.$$

Protože od f odečítáme lineární funkci, která nabývá v krajních bodech $a,\ b$ stejných hodnot jako f a má vlastní derivaci $\frac{f(a)-f(b)}{(b-a)}$ ve všech bodech $x \in (a,\, b)$, je F také spojitá a má všude v $(a,\, b)$ derivaci. Zároveň též platí, že $F(a) = F(b) = 0$. Na funkci F lze tedy aplikovat větu Rolleovu 3.12, podle které existuje bod $c \in (a,\, b)$ takový, že platí $F'(c) = 0$. Dostáváme tak:

$$0 = F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

odkud již tvrzení přímo plyne [2, s. 142-143]. □

Následující lemma vyplývá z věty Lagrangeovy.

Lemma 3.14. *Nechť jsou dány funkce $f,\ g$, které mají vlastní derivace v každém bodě otevřeného intervalu I. Jestliže $\forall x \in I$ platí $f'(x) = g'(x)$, pak se funkce $f,\ g$ liší pouze o konstatu. To znamená, že $\exists c \in \mathbb{R}$ takové, že $f(x) = g(x) + c$.*

Důkaz. Nechť funkce $F(x) = f(x) - g(x)$ a body $x_1,\ x_2 \in I,\ x_1 < x_2$. Pak podle Lagrangeovy věty 3.13 existuje $c \in \langle a,\, b\rangle$ tak, že $F(x_2) - F(x_1) = (x_2 - x_1)F'(c)$. Přitom $F'(c) = f'(c) - g'(c) = 0$. Proto $F(x_1) = F(x_2)$, což je $F(x) = c$ na I, a tedy $f(x) - g(x) = c$ [1, s. 101]. □

Věta 3.15 (Cauchyova věta)**.** *Nechť $f,\ g \in C\langle a,\ b\rangle$ a nechť v každém bodě $x \in (a,\ b)$ existují vlastní derivace $f'(x),\ g'(x)$. Pak existuje $c \in (a,\ b)$ tak, že platí:*

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c).$$

Důkaz. Položme $F(x) = [f(b) - f(a)][g(x) - g(a)] - [g(b) - g(a)][f(x) - f(a)]$. Tato funkce F je spojitá na celém $\langle a,\ b\rangle$, má derivaci na $(a,\ b)$ a platí $F(a) = = F(b) = 0$, tj. splňuje předpoklady Rolleovy věty. Exituje tedy $c \in (a,\ b)$, pro které $F'(c) = 0$. Přitom platí $0 = F'(c) = [f(b) - f(a)]g'(c) - [g(b) - g(a)]f'(c)$, odkud již tvrzení přímo plyne [1, s. 100]. □

3.2 Využití derivací při vyšetřování průběhu funkce

V této podkapitole se zaměříme na vlastnosti, které souvisí s vyšetřováním průběhu funkce. Bude to například monotonie, extrémy funkce, konvexnost a konkávnost.

Věta 3.16. *Nechť je dána funkce f, tato funkce je rostoucí na otevřeném intervalu I právě tehdy, když je rostoucí v každém bodě tohoto intervalu.*

Důkaz. K důkazu ekvivalence potřebujeme dokázat implikaci zleva doprava a poté implikaci zprava doleva. První z nich je zřejmá: jestliže je funkce f rostoucí na intervalu I, potom je rovněž rostoucí v každém bodě $x \in I$.

Druhou implikaci dokážeme sporem. Předpokládejme, že f roste ve všech bodech I, ale že zároveň není rostoucí na I. Potom existují body $x,\ y \in I$, $x < y$ takové, že $f(x) \geq f(y)$. Definujme:

$$M := \{t \in \langle x,\ y); \ f(t) \geq f(y)\}, \qquad \beta := \sup M.$$

Platí, že $\beta \in \langle x,\ y\rangle$. Rozlišme tři případy:
(i) Nechť $\beta = x$. Potom $f(t) < f(y) \geq f(x)$ pro všechna $t \in (x,\ y)$ a f není rostoucí v bodě x zprava, což je spor s předpokladem.
(ii) Nechť $\beta = y$. Protože je $\beta = \sup M$, existuje v každém levém okolí bodu y takové t, pro které platí $f(t) \geq f(y)$ a f potom není rostoucí zleva v bodě y, což odporuje předpokladu.
(iii) Nechť je $\beta \in (x,\ y)$. Potom f je rostoucí v bodě β. Protože dále každé levé okolí bodu β obsahuje bod t, pro který platí $f(t) \geq f(y)$, platí také $f(\beta) \geq f(y)$. Avšak pro $t \in (\beta,\ y)$ je $f(t) < f(y)$ a f není rostoucí zprava v bodě β [2, s. 145]. □

Důsledkem této věty je věta následující.

Věta 3.17. *Nechť je dána funkce f, která má na otevřeném intervalu I vlastní derivaci, pak platí:*

1. *Funkce f je neklesající na I právě tehdy, když $f'(x) \geq 0$ na I.*

2. *Funkce f je rostoucí na I právě tehdy, když $f'(x) \geq 0$ na I, přičemž rovnost $f'(x) = 0$ neplatí na žádném podintervalu intervalu I.*

Analogické tvrzení platí pro nerostoucí a klesající funkce.

Důkaz. Rozdělme důkaz na dvě části:

1. Nechť f je neklesající na I. Je-li $x_0 \in I$ libovolný bod, pak pro $x \in I,\ x < x_0$, je $f(x) \leq f(x_0)$ a pro $x \in I$, $x > x_0$, je $f(x) \geq f(x_0)$. Proto $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$, odkud $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$.
   Naopak nechť $f'(x) \geq 0$ na I a $x,\ y \in I$, $x < y$, pak podle Lagrangeovy věty existuje $c \in (x,\ y)$ takové, že $f(y) - f(x) = f'(c)(y-x) \geq 0$, tj. $f(y) \geq f(x)$ a f je tudíž neklesající na intervalu I.

2. Nechť f je rostoucí. Pak podle první části $f' \geq 0$. Rovnost $f'(x) = 0$ přitom nemůže platit na žádném podintervalu intervalu I, neboť by pak zde byla funkce f podle lemmatu 3.14 konstantní, což je spor s tím, že je rostoucí na I.
   Naopak nechť $f \geq 0$, přičemž rovnost $f'(x) = 0$ neplatí na žádném podintervalu intervalu I. Podle první části je funkce f neklesající. Kdyby f nebyla rostoucí na I, existoval by podinterval intervalu I, na němž by byla f konstantní, takže by zde platilo $f(x) = 0$, což je spor s předpokladem [1, s. 113].

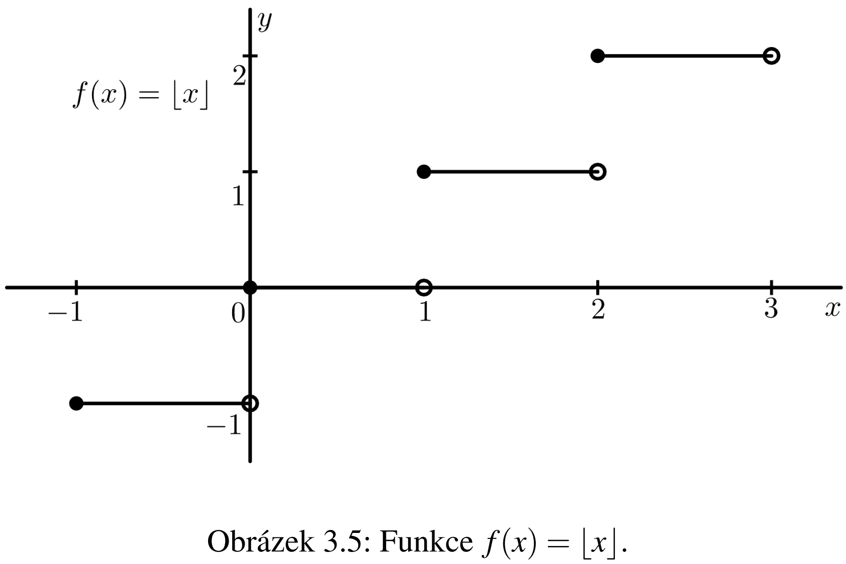
□

Nyní si uvedeme nutnou podmínku existence extrémů.

Věta 3.18. *Nechť je dána funkce f a bod x_0, ve kterém existuje $f'(x_0)$. Pak platí, že jestliže je bod x_0 lokálním extrémem funkce f, potom $f'(x_0) = 0$.*

Důkaz. Předpokládejme pro spor, že $f'(x_0) < 0$. Potom by musela být funkce f v bodě x_0 klesající, což je spor s definicí lokálního extrému. Stejná úvaha platí pro $f'(x_0) > 0$ [1, s. 116]. □

Příklad 3.19. Příkladem funkce, která ukazuje, že předchozí věta nemůže platit ve tvaru ekvivalence, je funkce znázorněná na obrázku 3.5 a definována jako dolní celá část, tj. $f(x) = \lfloor x \rfloor$. Tato funkce má v bodě $x_0 = 1{,}5$ derivaci $f'(x_0) = 0$, ale nemá v tomto bodě lokální extrém.



Obrázek 3.5: Funkce $f(x) = \lfloor x \rfloor$.

Věta 3.20. *Nechť je dána funkce f, která je spojitá v bodě x_0 a má vlastní deriaci v nějakém ryzím okolí $\mathscr{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$. Jestliže $\forall x \in \mathscr{O}(x_0),\ x < x_0$, je $f'(x) > 0$ a $\forall x \in \mathscr{O}(x_0),\ x > x_0$, je $f'(x) < 0$, pak má funkce f v bodě x_0 ostré lokální maximum.*

Důkaz. Důkaz provedeme sporem, tj. předpokládejme, že f nemá ostré lokální maximum v bodě x_0, nýbrž v nějakém bodě $c \in \mathscr{O}(x_0) \setminus \{x_0\}$. Předpokládejme dále, že $c < x_0$. Potom ale z definice ostrého lokálního maxima plyne, že na levém okolí $\mathscr{O}(c) \setminus \{c\}$ je f rostoucí, zatímco na pravém okolí klesající. To je ale ve sporu s tím, že $\forall x \in \mathscr{O}(x_0),\ x < x_0$ je $f'(x) > 0$.

Stejným způsobem větu dokážeme, pokud $c > x_0$ [1, s. 117]. □

Poznámka 3.21. Podobné tvrzení platí i pro ostré lokální minimum.

Příklad 3.22. Funkcí, která ukazuje, proč nemůže být věta 3.20 formulována jako ekvivalence, je:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{pro } x < 1 \\ -x+2, & \text{pro } x \geq 1, \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} 2x, & \text{pro } x < 1 \\ -1, & \text{pro } x \geq 1. \end{cases}$$

Ta má podle obrázku 3.6 ostré lokální maximum v bodě $[1,\ 1]$, ale derivace jejího levého prstencového okolí není pro všechna x kladná. Pokud totiž bude $\delta > 1$, pak $\exists x \in (x_0 - \delta,\ x_0)$ takové, že $f'(x) < 0$.

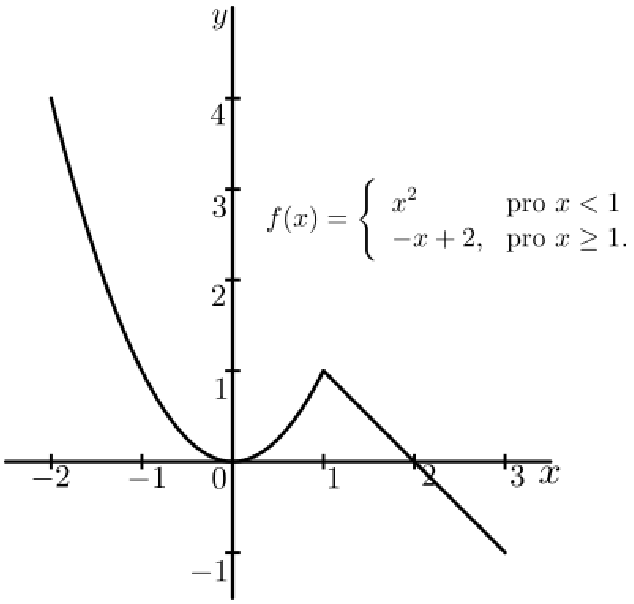
Věta 3.23. *Nechť je dána funkce f spojitá v bodě x_0 taková, že $f'(x_0) = 0$. Jestliže $f''(x_0) > 0$, pak má funkce f v bodě x_0 ostré lokální minimum. Jestliže $f''(x_0) < 0$, pak má funkce f v bodě x_0 ostré lokální maximum.*

Důkaz. Znovu dokážeme jen první část věty týkající se ostrého lokálního minima. Důkaz pro ostré lokální maximum je obdobný. Z existence $f''(x_0)$ vyplývá, že existuje vlastní derivace f' v jistém okolí $\mathscr{O}_1(x_0)$, tudíž funkce f je zde spojitá. Podle věty 3.17 je f' rostoucí v bodě x_0. Protože je $f'(x_0) = 0$, existuje okolí $\mathscr{O}_2(x_0) \subseteq \mathscr{O}_1(x_0)$ takové, že pro $x \in \mathscr{O}_2(x_0),\ x < x_0$, je $f'(x) < 0$ a pro $x \in \mathscr{O}_2(x_0),\ x > x_0$, je $f'(x) > 0$. Z věty 3.20 nyní plyne tvrzení [1, s. 118]. □

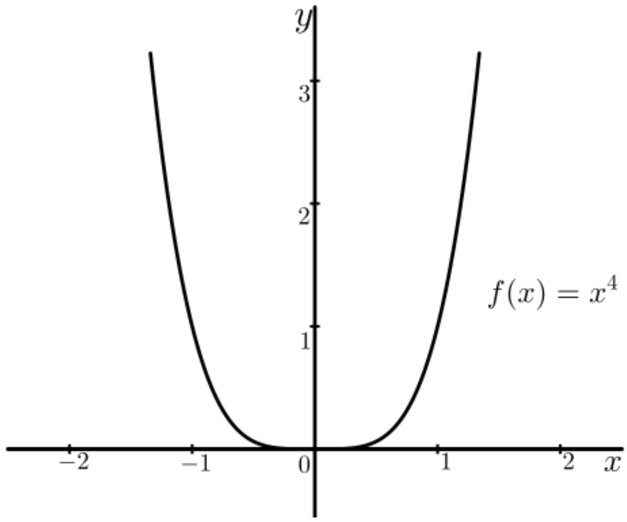
Příklad 3.24. Obrácená implikace k větě předchozí neplatí. Uvažujme funkci $f(x) = x^4$. V bodě $x_0 = 0$ má tato funkce lokální minimum, ale $f''(0) = 0$. Viz obrázek 3.7.

Definice 3.25. Řekneme, že funkce f je *konvexní* na intervalu I, jestliže pro libovolné tři body $x_1,\ x_2,\ x_3 \in I$, kde $x_1 < x_2 < x_3$, platí:

$$f(x_2) \leq f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1).$$



Obrázek 3.6: Funkce $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{pro } x < 1 \\ -x+2, & \text{pro } x \geq 1. \end{cases}$.



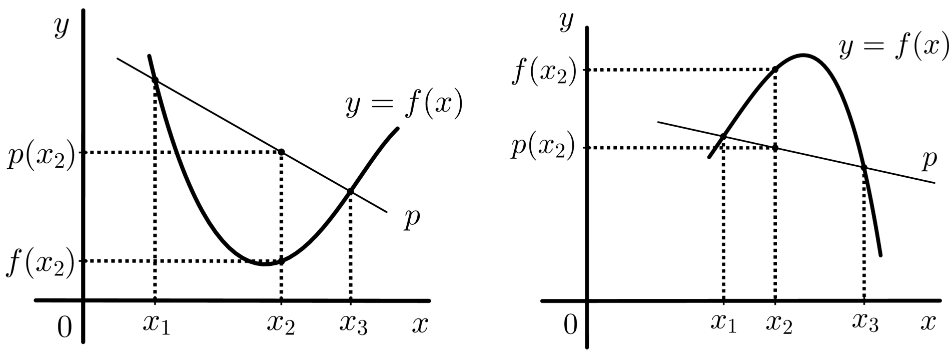
Obrázek 3.7: Funkce $f(x) = x^4$.

Řekneme, že funkce f je *konkávní* na intervalu I, jestliže pro libovolné tři body

$x_1,\ x_2,\ x_3 \in I$, kde $x_1 < x_2 < x_3$, platí:

$$f(x_2) \geq f(x_1) + \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}(x_2 - x_1).$$

Pokud v definici místo neostrých nerovností aplikujeme ostré nerovnosti pak říkáme, že je funkce *ryze konvexní*, resp. *ryze konkávní*, na intervalu I.



Obrázek 3.8: Konvexní a konkávní funkce

Konvexnost a konkávnost popisují zakřivení grafu funkce. Proto se v některých technicky laděných skriptech můžeme setkat s pojmy kladná nebo záporná křivost.

Lemma 3.26. *Nechť funkce f je definovaná na intervalu I a $x_1 < x_2 < x_3$ jsou libovolné body z I. Pak jsou následující tři nerovnosti ekvivalentní:*

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}, \tag{3.20a}$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}, \tag{3.20b}$$

$$\frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}\ [1,\ s.\ 122]. \tag{3.20c}$$

Věta 3.27. *Nechť je dána funkce f. Jestliže je f konvexní na otevřeném intervalu $I \subseteq D(f)$, pak je spojitá v každém bodě intervalu I.*

Důkaz. Nechť $x_1,\ x_2,\ x_3 \in I$ takové, že $x_1 < x_2 < x_3$. Nechť dále $y = p_1(x)$ je rovnice přímky procházející body $[x_1,\ f(x_1)]$ a $[x_2,\ f(x_2)]$, a $y = p_3(x)$ je rovnice přímky protínající body $[x_2,\ f(x_2)]$ a $[x_3,\ f(x_3)]$. Z definice konvexní funkce plyne $f(x) \leq p_3(x)$ pro $x \in \langle x_2,\ x_3\rangle$. Nechť $x_4 \in (x_2,\ x_3)$ a p je přímka procházející body $[x_2,\ f(x_2)]$ a $[x_4,\ f(x_4)]$. Potom $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_4)-f(x_2)}{x_4-x_2}$. Odtud a z rovností

$p_1(x_2) = p(x_2) = f(x_2)$ dostáváme $p_1(x) \leq p(x)$ pro $x > x_2$. Ale $p(x_4) = f(x_4)$, tudíž $p_1(x) \leq f(x)$ pro $x \in \langle x_2,\ x_3 \rangle$. Dohromady tak máme $p_1(x) \leq f(x) \leq p_3(x)$ pro $x \in \langle x_2,\ x_3 \rangle$. Protože $\lim\limits_{x \to x_2^+} p_1(x) = \lim\limits_{x \to x_2^+} p_3(x) = f(x_2)$ a protože z věty 2.17 plyne $\lim\limits_{x \to x_2^+} f(x) = f(x_2)$ a f je spojitá zprava v x_2. Spojitost zleva by se dokázala podobně [1, s. 176]. □

Věta 3.28. *Nechť je dána funkce f, která má vlastní derivaci na otevřeném intervalu I. Pak f je na intervalu I konvexní (resp. ryze konvexní) právě tehdy, když funkce f' je neklesající (resp. rostoucí) na I.*

Stejné tvrzení platí rovněž pro konkávní (resp. ryze konkávní) a f' nerostoucí (resp. klesající) na I.

Důkaz. Dokažme nejprve implikaci zprava doleva:

(i) Zvolme nějaké x_1, $x_2 \in I$ takové, že $x \in (x_1,\ x_2)$. Pak podle lemmatu 3.2 platí nerovnosti:

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2}.$$

Pokud v levém zlomku provedeme limitní přechod $x \to x_1^+$ a v pravém zlomku zase $x \to x_2^-$, dostaneme $f'(x_1) \leq f'(x_2)$. To pak znamená, že funkce f' je neklesající na I.

(ii) Pro důkaz obrácené implikace předpokládejme, že f' je neklesající na I a nechť $x_1 < x_2 < x_3$ jsou libovolné body z intervalu I. Podle stejného lemmatu pak stačí ukázat:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Funkce f splňuje na intervalech $\langle x_1,\ x_2 \rangle$ a $\langle x_2,\ x_3 \rangle$ předpoklady Lagrangeovy věty, tj. existují body $c_1 \in (x_1,\ x_2)$ a $c_2 \in (x_2,\ x_3)$ takové, že:

$$f'(c_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \quad f'(c_2) = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Protože $c_1 < c_2$ a f' je neklesající, platí $f'(c_1) \leq f'(c_2)$, čímž je tvrzení dokázáno.

Zbývající části věty lze dokázat podobně [1, s. 124-125]. □

Poznámka 3.29. Analogická věta k větě 3.28 platí pro f konkávní (ryze konkávní) a f' nerostoucí (klesající) na I.

Důsledek 3.30. Nechť je dána funkce f, která má vlastní druhou derivaci na otevřeném intervalu I.

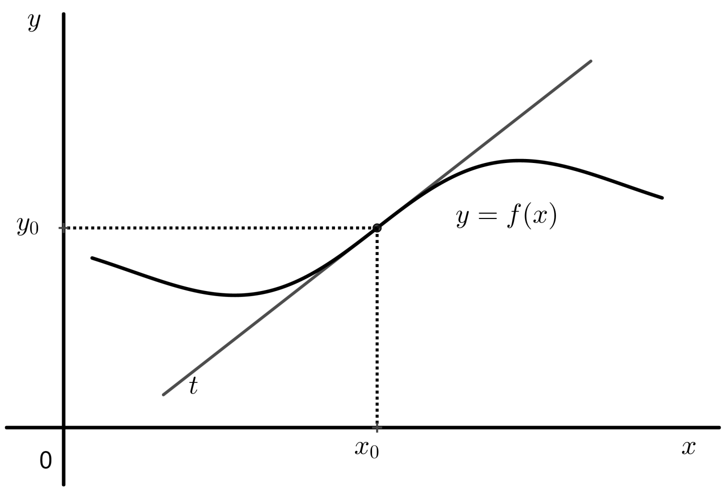
1. Jestliže $f''(x) > 0, \forall x \in I$, pak f je ostře konvexní na I.
2. Jestliže $f''(x) < 0, \forall x \in I$, pak f je ostře konkávní na I.

Definice 3.31. Nechť je dána funkce f a předpokládejme, že funkce f má v bodě x_0 derivaci. Jestliže je tato derivace nevlastní, předpokládejme navíc, že funkce f je v bodě x_0 spojitá.

Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 inflexní bod, jestliže:

1. Existuje okolí $\mathscr{O}(x_0)$ takové, že funkce f je ostře konkávní na intervalu $(x_0 - \delta,\ x_0)$ a ostře konvexní na intervalu $(x_0,\ x_0 + \delta)$.
2. Existuje okolí $\mathscr{O}(x_0)$ takové, že funkce f je ostře konvexní na intervalu $(x_0 - \delta,\ x_0)$ a ostře konkávní na intervalu $(x_0,\ x_0 + \delta)$.

Zkráceně říkáme, že funkce f má v bodě x_0 inflexi.



Obrázek 3.9: [

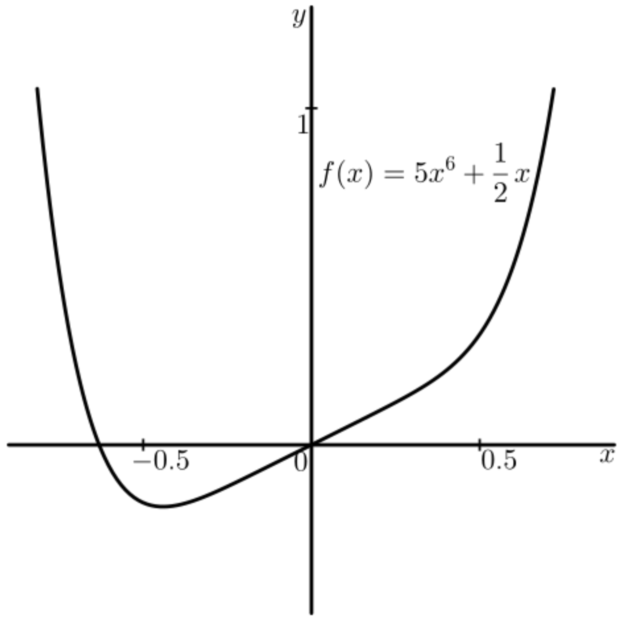
Inflexní bod]Inflexní bod.

Věta 3.32. *Nechť je dán inflexní bod x_0 a nechť existuje $f''(x_0)$, pak $f''(x_0) = 0$.*

Důkaz. Z existence $f''(x_0)$ plyne, že první derivace $f'(x)$ je konečná na okolí bodu x_0. Z definice inflexního bodu a věty 3.28 plyne existence okolí $\mathscr{O}_\delta(x_0)$ takového, že na otevřeném intervalu $(x_0 - \delta,\ x_0)$ je f' rostoucí a na otevřeném intervalu

$(x_0,\ x_0+\delta)$ je klesající, nebo naopak. Nechť nastane první možnost. Protože f je konvexní na $(x_0-\delta,\ x_0)$, platí pro libovolné $x_1 < x_2 < x_3$ z intervalu $(x_0-\delta,\ x_0)$ nerovnost 3.20b. Protože f je v bodě x_0 spojitá, dostaneme limitním přechodem $x_3 \to x^-{}_0$, že nerovnost 3.20b platí také na intervalu $(x_0-\delta,\ x_0\rangle$. Funkce f je tedy na tomto intervalu konvexní, proto je zde f' rostoucí. Podobně bychom dokázali, že f' je klesající na intervalu $\langle x_0,\ x_0+\delta)$. Z toho plyne, že funkce f' má v bodě x_0 lokální extrém. Podle věty 3.18 tedy musí být $f''(x_0) = 0$ [1, s. 127]. $\square$

Příklad 3.33. Abychom ukázali, že u předchozí věty nemůže platit vztah ekvivalence, uvažme funkci $f(x) = 5x^6 + \frac{1}{2}x$, jejíž graf nalezneme na obrázku 3.10. Druhá derivace této funkce je totiž $f''(x) = 150x^4$, což znamená, že druhá derivace je v bodě $x_0 = 0$ nulová, avšak funkce sama žádný inflexní bod nemá.



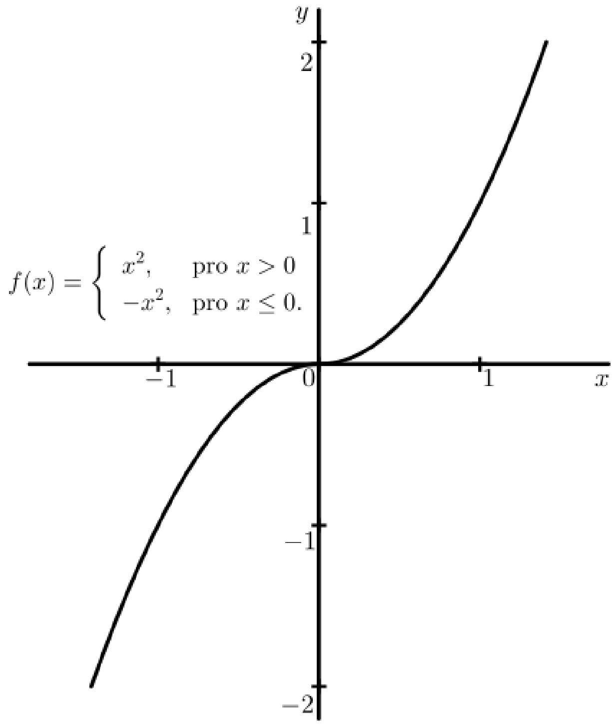
Obrázek 3.10: Funkce $f(x) = 5x^6 + \frac{1}{2}x$.

Věta 3.34. *Nechť* $f''(x_0) = 0$ *a nechť existuje okolí* $\mathcal{O}(x_0)$ *tak, že platí* $f''(x) <$ $< 0,\ \forall x \in (x_0-\delta,\ x_0)$ *a zároveň* $f''(x) > 0,\ \forall x \in (x_0,\ x_0+\delta)$*, nebo naopak. Pak* x_0 *je inflexním bodem funkce* f.

Důkaz. Z existence $f''(x_0)$ plyne, že $f'(x_0)$ je konečná. Podle důsledku 3.30 je f konkávní v levém okolí bodu x_0 a konvexní v pravém okolí bodu x_0, nebo naopak. Což dokazuje tuto větu [1, s. 127]. $\square$

Příklad 3.35. Opět uveďme funkci, na které ukážeme, že obrácený směr implikace nemůže platit. Definujme $f(x)$ po částech. Podle obrázku 3.11 se v počátku souřadnicového systému zjevně nachází inflexní bod. Druhá derivace $f''(x)$ však v bodě $x_0 = 0$ není definována:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{pro } x > 0 \\ -x^2, & \text{pro } x \leq 0 \end{cases}, \quad f''(x) = \begin{cases} 2, & \text{pro } x > 0 \\ \text{nedefinováno}, & \text{pro } x = 0 \\ -2, & \text{pro } x < 0. \end{cases}$$



Obrázek 3.11: Funkce $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{pro } x > 0 \\ -x^2, & \text{pro } x \leq 0. \end{cases}$

Lemma 3.36. *Nechť je dána funkce f a nechť existuje $f'(x_0)$, $f''(x_0) = 0$ a $f'''(x_0) \neq 0$, pak bod x_0 je inflexní bod.*

Důkaz. Z existence $f''(x_0)$ plyne, že $f''(x)$ je konečná v jistém okolí bodu x_0. Podle věty 3.8 je f'' v bodě x_0 rostoucí, nebo klesající. V nějakém okolí $\mathcal{O}_\delta(x)$ je tedy $f''(x_0) < 0$ pro $x \in (x_0 - \delta,\ x_0)$ a $f''(x) > 0$ pro $x \in (x_0,\ x_0 + \delta)$ nebo obráceně. Tvrzení nyní plyne z předchozí věty 3.34 [1, s. 127]. $\square$

Poznámka 3.37. Z předcházejících vět 3.32, 3.34 a lemmatu 3.36 plyne, že funkce f může mít inflexi pouze v bodech, kde její druhá derivace neexistuje, nebo je rovna nule.

Kapitola 4

Grafické znázornění

Když jsme nyní vyložili veškerá potřebná tvrzení, můžeme přistoupit k sestavení mapy. V této kapitole stručně zmíním postup, který jsem použila.

Nejprve jsem vybrala vhodné věty z celé práce a zobrazila je graficky. Všechny tyto věty mají tvar relace implikace (jednostranné či oboustranné), díky čemuž lze v každém tvrzení oddělit předpoklady od důsledků a vyplnit prostor mezi nimi šipkou znázorňující, že je-li splněn výchozí fakt, pak je splněn i fakt z toho plynoucí. K napsání textů jsem využila program GeoGebra, přičemž k samotnému sestavení map mi posloužil program Inkscape, který je vhodný pro práci s vektorovým obrazem, tzn. veškeré objekty jsou definovány pomocí vektorů a bodů, a se kterým jsem se seznámila během kurzu Počítačové grafiky (PPCGR). Ještě v samotném textu práce jsou uvedeny příklady k větám formulovaným jako implikace. Tyto příklady uvádím proto, abych ukázala, proč daná věta nemůže platit ve tvaru ekvivalence. Každá tato posloupnost či funkce tedy graficky znázorňuje, proč jsou šipky ve schématech pouze jednosměrné. K vytvoření grafů příkladů jsem rovněž použila program GeoGebra.

Na závěr si dovolím dodat poznámku o způsobu, jak se lze v mapách orientovat. Jednotlivé pojmy a vlastnosti matematické analýzy jsem se pokusila do prostoru vhodně rozmístit a přidat příslušné šipky. Ty jednostranné znázorňují směr implikací mezi jednotlivými pojmy. Oboustranné šipky pak symbolizují relaci ekvivalence. Pokud v některých místech plyne důsledek z více předpokladů, směřují od každého předpokladu šipky, které se spojí v symbolu "+" a až poté společně vedou k závěru.

Závěr

Matematická analýza je pro studenty úvodních ročníků vysoké školy většinou zcela novou oblastí. Troufám si tvrdit, že jen málokdo z nich se na střední škole setkal s diferenciálním počtem, a pokud ano, pak nanejvýš v některých aplikacích. Může být proto dost obtížné pochopit samotné věty, natož si pak vytvořit určitý nadhled o jednotlivých vztazích napříč jednotlivými kapitolami. Cílem mé práce bylo sestavit schémata pro základní tvrzení matematické analýzy a pokusit se tak tyto vztahy znázornit. Výsledné tři mapy lze najít v příloze bakalářské práce.

Při tvorbě map jsem postupovala tak, že jsem se pokusila především vyložit všechny relevantní pojmy, definice a věty s důkazy. Kapitoly práce na sebe navazují a prolínají se, nutno proto podotknout, že mapy nejsou jednoznačně uspořádány dle kapitol práce. Mnohdy jsem byla kvůli úplnosti nucena uvést i takové věty či lemmata, které nakonec nejsou ve schématech zohledněny, protože slouží jen jako pomocná tvrzení a netvoří kostru samotné vizualizace. Pokud jsem v textu narazila na větu ve tvaru implikace, doplnila jsem ji vlastním příkladem, který ukazuje, proč v daném místě nemůže platit ekvivalence. Tyto posloupnosti a funkce rovněž doprovází grafy vytvořené v programu GeoGebra.

Jak jsem již zmínila, ne všechny tvrzení jsou ve schématech zohledněny. Typickým příkladem jsou věty o střední hodnotě. Ty se do určité míry svou formulací vymykají ostatním větám. Jejich předpoklady či závěry se nedají dost dobře skloubit s předpoklady či závěry vět ostatních, což by znamenalo, že by tyto implikace stály stranou od celé mapy a nijak se s ostatními pojmy nespojily. Proto jsem je do schémat nezařadila.

Seznam použité literatury

[1] DOŠLÁ Z., KUBEN J. 2004. *Diferenciální počet funkcí jedné proměnné*. 1. vyd. Masarykova univerzita v Brně. Brno. ISBN 80-210-3121-2.

[2] VESELÝ J. 2001. *Matematická analýza pro učitele 1.*. 2. vyd. MATFYZPRESS. Praha. ISBN 80-85863-62-6.

[3] KOPÁČEK J. 2004. *Matematická analýza nejen pro fyziky (I)*. 4. vyd. MATFYZPRESS. Praha. ISBN 80-86732-25-8

[4] JARNÍK V. 1974. *Diferenciální počet I.*. 6. vyd. ACADEMIA. Praha.

[5] PICK L., HENCL S., SPURNÝ J., ZELENÝ M. 2020. *Matematická analýza 1* [online]. [cit. 2021-6-6]. Dostupné z: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza.pdf

[6] G. E. SHILOV, R. A. SILVERMAN 1996. *Elementary real and complex analysis* DOVER PUBLICATIONS, INC. New York ISBN 9780486689227

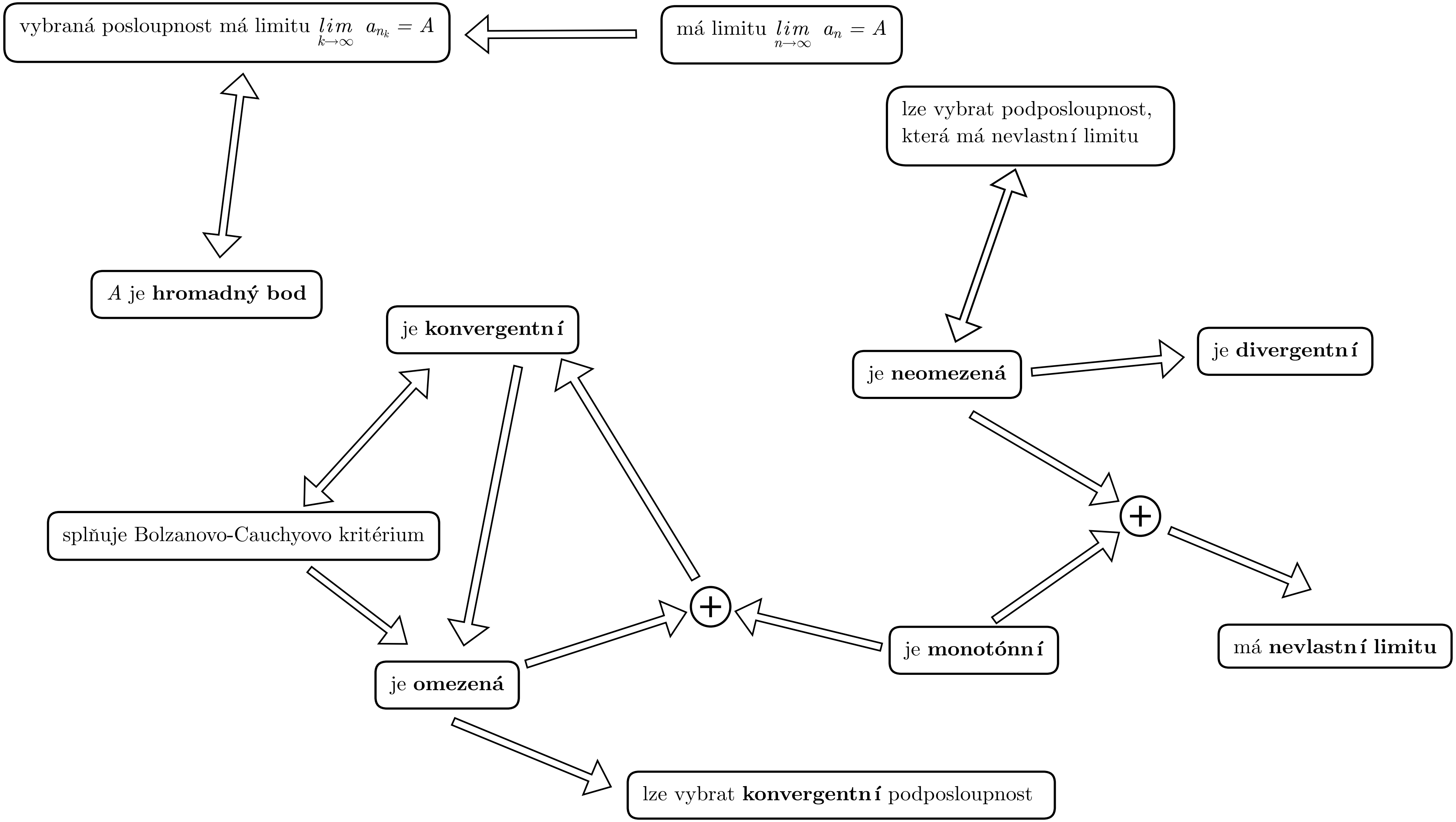
[7] GEOGEBRA 2021. *GeoGebra Příručka* [online]. [cit. 2021-6-6]. Dostupné z: https://wiki.geogebra.org/cs/P%C5%99%C3%ADru%C4%8Dka

Příloha

Příloha č.1: Posloupnost
Příloha č.2: Funkce
Příloha č.3: Derivace

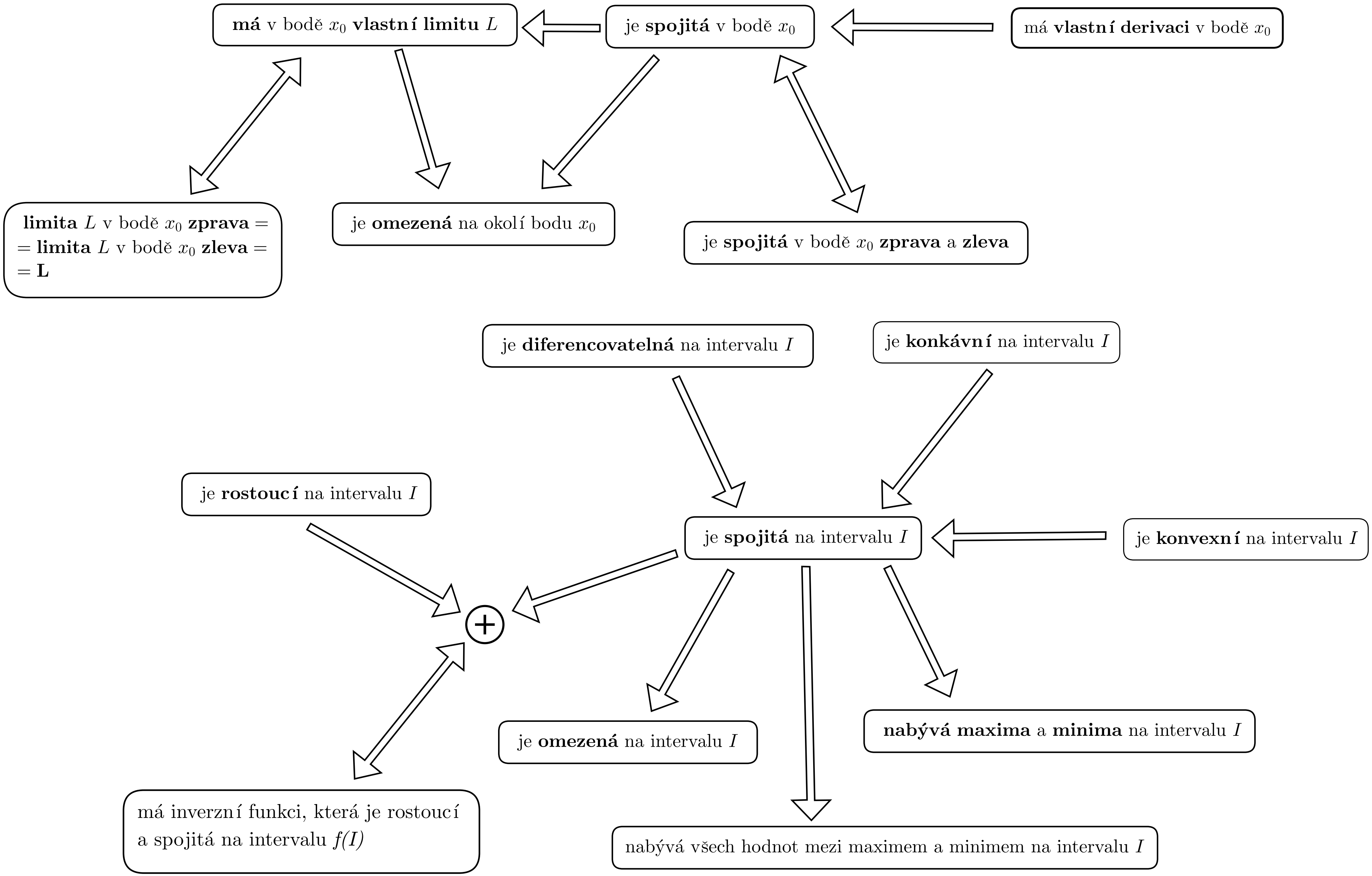
Posloupnost

Příloha č. 1



Funkce

Příloha č. 2



Derivace

Příloha č. 3