UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

# DIZERTAČNÍ PRÁCE

## Metody hodnocení založené na maticích párových porovnání

**Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky**
Vedoucí dizertační práce: **doc. RNDr. Jana Talašová, CSc.**
Vypracovala: **Mgr. Věra Jandová**
Studijní program: P1104 Aplikovaná matematika
Studijní obor 1103V004 Aplikovaná matematika
Forma studia: prezenční
Rok odevzdání: 2017

# BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKACE

**Autor:** Mgr. Věra Jandová

**Název práce:** Metody hodnocení založené na maticích párových porovnání

**Typ práce:** Dizertační práce

**Pracoviště:** Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

**Vedoucí práce:** doc. RNDr. Jana Talašová, CSc.

**Rok obhajoby práce:** 2017

**Abstrakt:** Tato dizertační práce se zabývá metodami hodnocení založenými na maticích párových porovnání. Je popsán aditivní a multiplikativní přístup k zadávání preferencí mezi dvěma objekty. Práce se zaměřuje na konzistenci matic párových porovnání a shrnuje hlavní přístupy, které je možno použít k posouzení míry konzistence těchto matic. Následně je zaveden nový přístup ke konzistenci - podmínka slabé konzistence, která je chápána jako podmínka pro určení přijatelné konzistence matice. Je ukázáno, že podmínka slabé konzistence se dá využít pro snížení počtu intenzit preferencí zadávaných hodnotitelem, což má význam především u matic párového porovnání velké dimenze. Je navržen algoritmus pro efektivní zadávání prvků takové preferenční matice a pro výpočet intervalových hodnocení prvků z takové matice. Dále je popsáno využití metod párového srovnávání v modelech, kde varianty nejsou předem známy a kde proto předmětem porovnávání jsou obecné kategorie. Je popsáno několik přístupů k výpočtu hodnocení kategorií a jsou ukázány jejich výhody a nevýhody. Nakonec je navržena nová metoda.

**Klíčová slova:** Matice párového porovnání, konzistence, slabá konzistence, neúplné matice párových porovnání, porovnávání obecných kategorií.

**Počet stran:** 129

**Počet příloh:** 0

**Jazyk:** český

# BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

**Author:** Mgr. Věra Jandová

**Title:** Evaluation Methods Based on Pairwise Comparison Matrices

**Type of thesis:** Doctoral Thesis

**Department:** Department of Mathematical Analysis and Application of Mathematics

**Supervisor:** doc. RNDr. Jana Talašová, CSc.

**The year of presentation:** 2017

**Abstract:** This Doctoral Thesis is focused on evaluation metods based on pairwise comparisons matrices. Additive and multiplicative approaches to express preferences between two objects are described. Next, the consistency of pairwise comparison matrices is discussed. Various approaches to establish acceptable level of consistency are presented. Furthemore, different approach to consistency is introduced. The weak-consistency condition is proposed as a minimal requirement to preserve reasonable consistency of judgements. It is demonstrated that weak-consistency condition can be employed for lowering number of preference intensities required by the decision maker. This is an advantage when the large dimensional problem has to be solved. In this context, the algorithm for effective construction of pairwise comparison matrix and for deriving interval evaluations is proposed. Further, utilization of the pairwise comparison methods for ranking categories of alternatives is described. Several approaches to scoring categories by the pairwise comparison methods are described and their advantages and disadvangtages are highlighted. Afterwards, different solution is proposed and discussed.

**Key words:** Pairwise comparison matrices, consistency, weak consistency, incomplete pairwise comparison matrices, rating categories.

**Number of pages:** 129

**Number of appendices:** 0

**Language:** Czech

**Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem tuto dizertační práci zpracovala samostatně pod vedením doc. RNDr. Jany Talašové, CSc. a všechny použité zdroje jsem uvedla v seznamu literatury.

V Olomouci dne .......................... ....................................................

podpis

# Obsah

**Poděkování**

Ráda bych na tomto místě poděkovala vedoucí dizertační práce doc. RNDr. Janě Talašové, CSc. za obětavou spolupráci i za čas, který mi věnovala při konzultacích. Dále chci poděkovat rodině a přátelům za podporu po celou dobu studia a vyučujícím na PřF UP za to, že nás učili správnému matematickému myšlení.

# Použité značení

| | |
|---|---|
| $A \succ B$ | $A$ je preferováno před $B$ |
| $A \sim B$ | $A$ je indiferentní s $B$ |
| $A \succeq B$ | $A$ je preferováno před $B$ nebo je $A$ idniferentní s $B$ |
| $P = \{p_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ | čtvercová matice $P$ řádu $n$ |
| $f : X \to Y$ | zobrazení $f$ z $X$ do $Y$ |
| $\log_a x$ | logaritmus $x$ o základu $a$ |
| $\ln x$ | přirozený logaritmus $x$ o základu $e$, kde $e$ je Eulerovo číslo |
| $\{a, b, c\}$ | množina obsahující prvky $a$, $b$, $c$ |
| $a \in A$ | $a$ náleží $A$ |
| $X \subset Y$ | $X$ je vlastní podmnožinou $Y$ |
| $X \subseteq Y$ | $X$ je podmnožinou $Y$ |
| $\binom{n}{k}$ | kombinační číslo, čteme $n$ *nad* $k$ |
| $a \neq b$ | $a$ se nerovná $b$ |
| $a \approx b$ | $a$ je přibližně rovno $b$ |
| $a \wedge b$ | $a$ a zároveň $b$ |
| $a \vee b$ | $a$ nebo $b$ |
| $a \Rightarrow b$ | $a$ implikuje $b$, resp. jestliže platí $a$, pak platí také $b$ |
| $a \Leftrightarrow b$ | $a$ je ekvivalentní s $b$, resp. $a$ platí právě tehdy, když platí $b$ |
| $Card(A)$ | kardinalita množiny $A$ |
| $Det(P)$ | determinant matice $P$ |
| $\square$ | konec důkazu |
| $\triangle$ | konec příkladu |

# Úvod

Hodnocení a s ním spjaté rozhodování jsou procesy, které se pojí s běžnými životními situacemi. Aniž si to často uvědomujeme, tak v podstatě hodnotíme každý den. Pokud je třeba ohodnotit několik objektů zároveň, může být pro člověka složité vyjádřit srozumitelně své preference. Proto je lepší problém zjednodušit a zaměřit se vždy jen na dva objekty současně, tedy hodnotit párově. Metody hodnocení založené na párovém porovnání objektů představují jednoduše použitelný a přitom dostatečně univerzální nástroj pro hodnocení. Těmito metodami se zabývá tato dizertační práce.

Cílem této práce je popsat metody párového srovnávání a vytvořit tak dostatečný teoretický podklad pro jejich detailnější zkoumání. Práce je zaměřena především na konzistenci matic párového porovnání - jak konzistenci zjišťovat, měřit a zajistit. Bude navržena slabší podmínka konzistence, která bude zajišťovat základní racionalitu hodnotitele ve smyslu von Neumanna a Morgensterna, bude dodržitelná v reálných situacích a kontrolovatelná v průběhu zadávání preferenční matice. V případě, že je porovnávaných objektů velké množství, budou použity neúplné preferenční matice jako nástroj, jak snížit počet párových srovnání. S pomocí slabé konzistence bude popsáno, jak takto hodnotiteli usnadnit proces hodnocení a jak jej vést, aby při zadávání preferencí udržel určitou konzistenci. Nakonec bude rozebráno, jak použít metody párového srovnávání v situacích, kdy varianty nejsou předem známy. Bude ukázáno, jak sestrojit obecné kategorie variant a jak pomocí nich získat hodnocení pro konkrétní varianty.

Struktura dizertační práce je následující: V první kapitole je shrnut teoretický základ metod párového porovnání. Nejprve je uvedena metoda hodnocení založená na incidenční matici preferenční relace, kde se provádí porovnání dvojic prvků, ale nezadává se zde intenzita preference. Potom jsou zavedeny složitější metody pracující s intenzitami prefencí - je představena multiplikativní a aditivní verze těchto metod. Nakonec jsou v rámci této kapitoly shrnuty výhody a nevýhody metod párového srovnávání.

Druhá kapitola je zaměřena na problém konzistence matic párového porovnání. Nejprve je popsáno, jak tento problém řešili různí autoři pro multiplikativní i pro aditivní preferenční matice. Následně je pro matice párového porovnání zavedena podmínka slabé konzistence a jsou ukázány s ní související vlastnosti.

Třetí kapitola se zabývá neúplnými maticemi párového porovnání, které jsou zde pojaty jako nástroj ke zjednodušení problému velkého počtu párových porovnání. Nejprve je shrnuto, jaké typy algoritmů byly v literatuře navrženy pro získání neúplné preferenční matice a pro výpočet hodnocení variant z takovéto matice. Potom je popsán algoritmus pro vyplňování neúplné preferenční matice autorů Fedrizzi a Giove. Pomocí tohoto algoritmu je následně navržena nová metoda pro konstrukci neúplné preferenční matice a pro výpočet hodnocení porovnávaných prvků z této matice.

Ve čtvrté kapitole je řešen problém hodnocení obecných kategorií variant pomocí metod párového srovnávání. Nejprve je tato problematika vysvětlena a následně jsou popsány známé přístupy k hodnocení kategorií. Nakonec je zaveden nový přístup k výpočtu hodnocení kategorií.

V poslední páté kapitole jsou nové přístupy navržené v této práci aplikovány na reálném příkladu modelu hodnocení uměleckých děl, který je použit v Registru uměleckých výstupů (RUV). Nejprve je popsán model hodnocení použitý v RUV. Následně je pomocí nově navrženého algoritmu sestaven hodnotící model s neúplnou preferenční maticí a z něj získaná hodnocení jsou porovnána s původními hodnoceními z modelu RUV. Nakonec je vytvořen model hodnocení, v němž je aplikován nově navržený způsob výpočtu hodnocení kategorií. Výsledky jsou opět porovnány s výsledky z původního modelu RUV.

# Kapitola 1

# Metody párového porovnání

Tato kapitola popisuje teoretická východiska metod hodnocení založených na párovém srovnávání. Metody párového porovnání představují metody hodnocení založené na srovnávání každých dvou prvků dané množiny. Přitom se určuje, který ze dvou prvků je preferovanější, resp. s jakou intenzitou. Na základě toho vzniká preferenční matice, která slouží k výpočtu relativních hodnocení všech prvků.

Nejprve bude v kapitole 1.1 představena metoda, kde se provádí porovnání dvojic prvků, ale nezadává se intenzita preference, pracuje se pouze s informací, který ze dvou prvků je preferovanější. Následně budou v kapitole 1.2 uvedeny složitější metody hodnocení, kde už kromě preference mezi dvěma prvky hodnotitel vyjadřuje i její sílu, resp. stupeň. Rozlišují se dva typy zadaných párových preferencí: multiplikativní a aditivní. Pro oba přístupy bude postupně v kapitolách 1.2.1 a 1.2.2 vysvětleno, jak sestrojit matici párového porovnání a jak z ní vypočítat hodnocení variant. Bude uvedeno, jaké požadavky jsou v jednotlivých případech kladeny na matice párového porovnání. Potom bude v kapitole 1.2.3 ukázáno, že oba tyto přístupy používané k vyjádření preferencí jsou ekvivalentní a existují mezi nimi převodní vztahy. Následně bude v kapitole 1.2.4 definováno, jak s metodami párového srovnávání pracovat v případě více kritérií. Nakonec budou v kapitole 1.3 shrnuty výhody a nevýhody metod párového srovnávání.

## 1.1. Metoda hodnocení založená na incidenční matici preferenční relace

Nejjednodušší metoda párového srovnávání bývá v literatuře [92] nazývána jednoduše *metoda párového srovnávání*. Tato metoda vyžaduje po hodnotiteli určit pouze to, jestli jsou dva prvky indiferentní (tj. stejně preferované) nebo je jeden preferovaný před druhým. V případě preference neurčujeme její sílu. Vychází se z incidenční matice binární relace, pomocí níž hodnotitel zadal své preference na množině variant. Aby získaná hodnocení variant nesla relevantní informace a aby případný následný rozhodovací proces byl smysluplný, incidenční matice by měla být blízká incidenční matici nějaké preferenční relace. Uvažují-li se v hodnotícím procesu indiferentní varianty, potom by touto preferenční relací mělo být kvazisupořádání, které dle von Neumanna a Morgensterna odpovídá racionálnímu chování hodnotitele, viz [44]. Z toho důvodu nyní budou uvedeny některé pojmy z teorie binárních relací na množině. Níže uvedené definice a věty lze nalézt v [13, 92].

### Základní pojmy z teorie relací

**Definice 1.1.** Nechť $A$ a $B$ jsou množiny. Potom množinu uspořádaných dvojic $A \times B = \{(a, b); a \in A, b \in B\}$ nazveme *kartézský součin* množin $A$ a $B$. Podmnožinu $R \subseteq A \times A$ nazveme *binární relace* na množině $A$ . Zápisem $(a, b) \in R$ nebo $a\ R\ b$ značíme to, že prvky $a, b \in A$ jsou spolu v relaci $R$.

**Definice 1.2.** Nechť $R$ je binární relace na $A$, kde $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ je konečná množina o $n$ prvcích. Potom matici $R' = \{r_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ nazveme *incidenční maticí* relace $R$, jestliže pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$ platí

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jestliže } (a_i, a_j) \in R; \\ 0 & \text{jestliže } (a_i, a_j) \notin R. \end{cases}$$

**Definice 1.3.** Nechť $R$ je binární relace na $A$. Potom řekneme, že $R$ je:

1. *reflexivní*, jestliže pro každé $a \in A$ platí $(a, a) \in R$;
2. *symetrická*, jestliže pro každé $a, b \in A$ platí $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$;
3. *asymetrická*, jestliže pro každé $a, b \in A$ platí $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \notin R$;
4. *tranzitivní*, jestliže pro každé $a, b, c \in A$ platí $(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$;
5. *úplná*, jestliže pro každé $a, b \in A$ platí: $(a, b) \in R \vee (b, a) \in R$;
6. *slabě úplná*, jestliže pro každé $a, b \in A$, $a \neq b$ platí $(a, b) \in R \vee (b, a) \in R$.

**Definice 1.4.** Nechť $R$ je binární relace na $A$. Potom řekneme, že $R$ je:

1. *relace ekvivalence*, jestliže $R$ je reflexivní, symetrická a tranzitivní;
2. *(ostré) lineární uspořádání*, jestliže $R$ je asymetrická, tranzitivní a slabě úplná;
3. *kvaziuspořádání*, jestliže $R$ je tranzitivní a úplná.

**Věta 1.1.** *Nechť $P$ a $I$ jsou binární relace na $A$. Potom binární relace $R = P \cup I$ na $A$ je kvaziuspořádání, jestliže relace $P$ a $I$ splňují následující podmínky:*

1. *platí* trichotomie, *tj. pro každé $a, b \in A$ platí právě jeden ze vztahů*

$$(a, b) \in P, \quad (b, a) \in P, \quad (a, b) \in I;$$

2. *I je relace ekvivalence;*
3. *P je tranzitivní relace;*
4. *pro P a I platí* smíšená tranzitivita, *tj. pro každé $a, b, c \in A$ platí*

$$(a,b) \in P \wedge (b,c) \in I \quad \Longrightarrow \quad (a,c) \in P;$$
$$(a,b) \in I \ \wedge (b,c) \in P \quad \Longrightarrow \quad (a,c) \in P.$$

**Důkaz:** viz [92], str. 91. □

**Věta 1.2.** *Nechť R je kvaziuspořádání na A. Nechť P a I jsou binární relace na A, pro které platí pro každé $a, b \in A$ následující:*

$$(a,b) \in P \quad \Longleftrightarrow \quad (a,b) \in R \wedge (b,a) \notin R;$$
$$(a,b) \in I \quad \Longleftrightarrow \quad (a,b) \in R \wedge (b,a) \in R.$$

*Potom pro relace P a I platí vlastnosti 1.–4. z věty 1.1.*

**Důkaz:** viz [92], str. 91. □

Vlastnosti 1.–4. z věty 1.1 představují pro binární relaci $R = P \cup I$ systém axiomů známých jako von Neumann-Morgensternovy axiomy a je na nich založena teorie utility, viz [44]. Preferenční systém splňující tyto axiomy definuje racionální chování hodnotitele.

### Hodnocení variant vzhledem k jednomu kritériu

Nyní bude metoda párového srovnávání popsána tak, jak byla zavedena v [92]. Následně bude ukázáno, jak se dají požadované vlastnosti interpretovat z pohledu binárních relací.

Uvažujme konečnou množinu variant $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, kterou je třeba ohodnotit vzhledem ke kritériu $K$. Pro porovnání variant se vytvoří preferenční matice $P = \{p_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$, kde pro každé $i, j = 1, 2 \ldots, n$ platí:

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jestliže } A_i \succ A_j; \\ 0{,}5, & \text{jestliže } A_i \sim A_j; \\ 0 & \text{jestliže } A_j \succ A_i. \end{cases}$$

Dle [92] je vyžadováno, aby pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$ byl splněn vztah

$$p_{ji} = 1 - p_{ij}. \tag{1.1}$$

Tento požadavek může být pro $i, j = 1, 2, \ldots, n$ interpretován následně: Jestliže je $A_i$ preferována před $A_j$, potom neplatí, že $A_j$ je preferována před $A_i$ nebo že jsou indiferentní. Stejně tak jestliže $A_i$ je indiferentní s $A_j$, potom $A_j$ je indiferentní s $A_i$. Odtud je také zřejmé, že musí platit $p_{ii} = 0{,}5$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$.

Jak bylo ukázáno v [46], aby byly preference zadány racionálně a vypočtená hodnocení nesla relevantní informace, musí pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$ platit

$$p_{ij} \geq 0{,}5 \wedge p_{jk} \geq 0{,}5 \quad \Longrightarrow \quad p_{ik} = \max\{p_{ij}, p_{jk}\}. \tag{1.2}$$

Tento požadavek v sobě pro $i, j = 1, 2, \ldots, n$ shrnuje několik vlastností: Jestliže $A_i$ je preferováno před $A_j$ a $A_j$ je preferováno před $A_k$, pak také $A_i$ je preferováno před $A_k$. Dále pokud je $A_i$ indiferentní s $A_j$ a $A_j$ je indiferentní s $A_k$, pak také $A_i$ musí být indiferentní s $A_k$. Dále je-li $A_i$ preferováno před $A_j$ a $A_j$ je indiferentní s $A_k$, pak $A_i$ musí být preferováno před $A_k$. Analogicky je-li $A_i$ indiferentní s $A_j$ a $A_j$ je preferováno před $A_k$, pak musí být $A_i$ preferováno před $A_k$.

Nenormovaná hodnocení $g_1, g_2, \ldots, g_n$ variant $A_1, A_2, \ldots, A_n$ se vypočtou pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$ dle vzorce

$$g_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}. \tag{1.3}$$

Normovaná hodnocení $h_1, h_2 \ldots, h_n$ potom dostaneme pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$ pomocí vzorce

$$h_i = \frac{g_i}{\sum\limits_{j=1}^{n} g_j}. \tag{1.4}$$

Vezmeme-li matici $P$, potom je možno ji psát ve tvaru $P = V + 0{,}5I$, kde $V$ je incidenční matice relace $\succ$ a $I$ je incidenční matice relace $\sim$. Můžeme tedy definovat relaci $R$ jako sjednocení relací $\succ$ a $\sim$. Aby chování hodnotitele bylo racionální, je požadováno, aby matice $P$ splňovala vztahy (1.1) a (1.2). To odpovídá tomu, že relace $R$ je kvaziuspořádání, jak nyní bude ukázáno. Z toho, jak byla definována matice $P$, je vidět, že pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$ platí vztahy

$$A_i \succ A_j \quad \Longleftrightarrow \quad (A_i, A_j) \in R \wedge (A_j, A_i) \notin R,$$

$$A_i \sim A_j \quad \Longleftrightarrow \quad (A_i, A_j) \in R \wedge (A_j, A_i) \in R.$$

Pak tedy dle vět 1.1 a 1.2 je $R$ kvaziuspořádání právě tehdy, když $\succ$ a $\sim$ splňují vlastnosti 1.–4. ve větě 1.1. Toto je splněno, jak shrnují následující body:

- Pro každý prvek matice $P = \{p_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ platí $p_{ij} \in \{0, 0{,}5, 1\}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Přitom pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$ platí: $p_{ij} = 0$ právě tehdy, když $A_j \succ A_i$, $p_{ij} = 1$ právě tehdy, když $A_i \succ A_j$ a $p_{ij} = 0{,}5$ právě tehdy, když $A_i \sim A_j$. Je tedy splněna trichotomie.
- Z (1.1) plyne, že $p_{ii} = 0{,}5$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$, tj. relace $\sim$ je reflexivní. Dále z (1.1) plyne, že pokud $p_{ij} = 0{,}5$, pak $p_{ji} = 0{,}5$ pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Tzn. relace $\sim$ je symetrická. Nakonec z (1.2) plyne, že pokud $A_i \sim A_j$ a $A_j \sim A_k$, potom také $A_i \sim A_k$ pro každé $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$. Tj. relace $\sim$ je tranzitivní. Dohromady tedy relace $\sim$ tvoří relaci ekvivalence.

- Z (1.2) plyne, že pokud $A_i \succ A_j$ a $A_j \succ A_k$, potom také $A_i \succ A_k$ pro každé $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$. Tj. relace $\succ$ je tranzitivní.
- Z (1.2) plynou pro každé $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$ také následující vztahy: Pokud $A_i \sim A_j$ a $A_j \succ A_k$, pak $A_i \succ A_k$. Pokud $A_i \succ A_j$ a $A_j \sim A_k$, potom $A_i \succ A_k$. Tj. platí smíšená tranzitivita relací $\succ$ a $\sim$.

Tedy racionalita zavedená v této metodě odpovídá klasické racionalitě hodnotitele zavedené von Neumannem a Morgensternem. Chování hodnotitele je totiž považováno za racionální právě tehdy, když relace $R$ je kvazisupořádání. Pokud by tedy byly porovnávané prvky $A_1, A_2 \ldots, A_n$ seřazeny od nejpreferovanějšího po nejméně preferovaný, tak v matici $P$ budou na diagonále bloky čtvercových matic, jejichž elementy nabývají hodnoty 0,5. Nad touto diagonálou budou bloky matic, které jsou tvořeny pouze hodnotami 1, a pod touto diagonálou budou bloky matic, které jsou tvořeny pouze hodnotami 0. Nebudou-li porovnávané prvky takto preferenčně uspořádáné, potom je možno je přečíslovat podle jejich řádkových součtů $\sum_{j=1}^{n} p_{ij}$, kde $i = 1, 2, \ldots, n$, tak, že $A_1$ bude mít největší řádkový součet a $A_n$ bude mít nejmenší řádkový součet. Tedy přeuspořádaná matice $P_U$ bude reprezentovat porovnání variant uspořádaných od nejpreferovanější po nejméně preferovanou a podle jejího tvaru je možno snadno poznat, jestli je chování hodnotitele racionální.

**Vícekriteriální hodnocení variant**

Uvažujme konečnou množinu variant $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, kterou je třeba ohodnotit vzhledem ke konečně mnoha kritériím $K_1, K_2, \ldots, K_m$. U vícekriteriálního hodnocení je aplikován stejný princip jak na výpočet dílčích hodnocení variant, tak na výpočet vah kritérií. Nejprve se dle postupu popsaného výše provede párové porovnání variant $A_1, A_2, \ldots, A_n$ vzhledem ke každému kritériu $K_j$ a vypočtou se jejich dílčí normovaná hodnocení $h_1^j, h_2^j, \ldots, h_n^j$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Potom se stejným způsobem párově porovnají kritéria a pomocí vzorce (1.3) se vypočtou váhy jednotlivých kritérií, které se následně znormují dle (1.4) a získají se tak normované váhy $v_1, v_2, \ldots, v_m$. Celková hodnocení $h_1^{(C)}, h_2^{(C)}, \ldots, h_n^{(C)}$ variant $A_1, A_2, \ldots, A_n$ se vypočtou pomocí *váženého průměru* dílčích hodnocení, tj. pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$ platí

$$h_i^{(C)} = \sum_{j=1}^{m} v_j h_i^j. \tag{1.5}$$

## 1.2. Metody hodnocení založené na multiplikativních a aditivních maticích párového porovnání

Složitější metody párového srovnávání vyžadují po hodnotiteli nejen určit, jestli jsou dva prvky indiferentní nebo je jeden preferován před druhým. V případě preference jednoho prvku před druhým totiž hodnotitel musí ještě přiřadit intenzitu, resp. stupeň, této preference. Rozlišují se modely s multiplikativními a aditivními preferencemi. U multiplikativního přístupu zadané párové srovnání reprezentuje přímo intenzitu preference, která vyjadřuje podíl hodnocení dvou prvků. Tedy říká, kolikrát je jeden prvek preferovanán před druhým. U aditivního přístupu zadané párové srovnání reprezentuje stupeň preference jednoho prvku před druhým. Intenzitu preference potom představuje rozdíl párového srovnání a jeho reciproké hodnoty. Zde intenzita preference vyjadřuje rozdíl hodnocení dvou prvků, tj. říká, o kolik je jeden prvek preferován před druhým.

### 1.2.1. Multiplikativní přístup

V této kapitole budou popsány základní vlastnosti metod párového porovnání, kde jsou preference vyjádřeny na multiplikativní škále. Základy tohoto přístupu byly položeny v [72].

**Zadání matice intenzit preferencí**
Uvažujme konečnou množinu variant $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, kterým je třeba přiřadit hodnocení $h_1, h_2, \ldots, h_n$ vzhledem ke kritériu $K$. Chceme vytvořit matici relativních intenzit preferencí $M = \{m_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$, kde prvek $m_{ij}$ bude vyjadřovat multiplikativní intenzitu preference mezi $A_i$ a $A_j$, tj. kolikrát je varianta $A_i$ lepší než varianta $A_j$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Prvek $m_{ij}$ bude tedy představovat odhad poměru hodnocení variant $A_i$ a $A_j$, tj.

$$m_{ij} \approx \frac{h_i}{h_j}$$

pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Prvky matice $M$ jsou definované na multiplikativní škále $\langle \frac{1}{\sigma}, \sigma \rangle$, $\sigma > 1$, která je popsána v tabulce 1.1.

V některé literatuře [53, 78] je zmiňována také multiplikativní škála $(0, \infty)$. V praxi jsou však nejpoužívanější omezené hodnotící škály. Často jsou hodnocení vyjádřena na diskrétní škále, jejíž hodnoty jsou jazykově popsány, viz dále. Proto budeme dále pracovat pouze se škálou $\langle \frac{1}{\sigma}, \sigma \rangle$, $\sigma > 1$.

Dále je vyžadováno, aby matice $M$ byla *reciproká*, tj. musí platit

$$m_{ji} = \frac{1}{m_{ij}} \tag{1.6}$$

| intenzita preference | význam (slovní popis) |
|---|---|
| $m_{ij} = \sigma$ | $A_i$ je **extrémně** lepší než $A_j$ |
| $m_{ij} \in (1, \sigma)$ | $A_i$ je lepší než $A_j$ |
| $m_{ij} = 1$ | $A_i$ je **stejně** dobré jako $A_j$ |
| $m_{ij} \in \left(\frac{1}{\sigma}, 1\right)$ | $A_j$ lepší než $A_i$ |
| $m_{ij} = \frac{1}{\sigma}$ | $A_j$ je **extrémně** lepší než $A_i$ |

Tab. 1.1: Multiplikativní škála

pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Neboli pokud je varianta $A_i$ $m_{ij}$-krát lepší než varianta $A_j$, potom varianta $A_j$ je z $\frac{1}{m_{ij}}$tiny tak dobrá jako varianta $A_i$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Dále je zřejmé, že musí platit $m_{ii} = 1$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$. Na základě tohoto je nyní zavedena následující definice. Bude-li se další text odkazovat na matici $M$, bude se jednat o matici specifikovanou v definici 1.5, nebude-li řečeno jinak.

**Definice 1.5.** Nechť $M = \{m_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ je čtvercová matice, kde $m_{ij} \in \langle \frac{1}{\sigma}, \sigma \rangle$, $\sigma > 1$, pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Dále nechť je $M$ reciproká, tj. $m_{ij} = \frac{1}{m_{ji}}$ pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Potom řekneme, že $M$ je *multiplikativní preferenční matice.*

**Požadavek konzistence**

Aby informace v matici $M$ byly zadány zcela racionálně a určovaly přesně hodnocení $h_1, h_2, \ldots, h_n$, je třeba, aby matice $M$ byla *konzistentní*, tj. aby platilo

$$m_{ij} m_{jk} = m_{ik} \tag{1.7}$$

pro každé $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$, viz [73]. Jedná se o přirozený požadavek, který říká, že pokud je varianta $A_i$ $m_{ij}$-krát lepší než varianta $A_j$ a varianta $A_j$ je $m_{jk}$-krát lepší než varianta $A_k$, kde $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, pak by měla být také varianta $A_i$ $m_{ik}$-krát lepší než $A_k$, kde $m_{ik} = m_{ij} m_{jk}$. Tento požadavek je ale v reálných situacích, zejména v případě větších matic, obtížně dosažitelný. Naplnění požadavku konzistence naráží také na problém související s omezeností hodnotící škály - vyjadřují-li např. $m_{ij}$ i $m_{jk}$ maximální sílu preference, potom vynásobením těchto čísel vznikne intenzita preference, která bude větší než maximální intenzita preference uvažované škály.

Lze ukázat [68], že matice $M$ je konzistentní právě tehdy, když existuje vektor $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$ s kladnými složkami, tj. $h_i > 0$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$, takový, že $m_{ij} = \frac{h_i}{h_j}$ pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Což je také právě tehdy, když $\mathbf{h}$ je vlastní vektor příslušný maximálnímu vlastnímu číslu $\lambda_{max} = n$. Pro reciprokou matici $M = \{m_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$, kde $m_{ij}$ jsou odhady $\frac{h_i}{h_j}$, kde $h_i > 0$, $h_j > 0$ pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$, obecně platí $\lambda_{max} \geq n$, viz [68]. Čím více se ale bude $m_{ij}$ blížit $\frac{h_i}{h_j}$ pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$ a čím bližší bude $\lambda_{max}$ hodnotě $n$, tím více konzistentní tato matice bude.

**Výpočet hodnocení variant**

K výpočtu hodnocení variant z multiplikativní preferenční matice $M$ lze použít několik metod, jejichž přehled lze nalézt v [6]. Zde si uvedeme dvě nejpoužívanější metody:

1. *Geometrický průměr řádků*
   Hodnocení variant lze z matice $M = \{m_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ vypočíst pomocí metody nejmenších logaritmických čtverců. Protože pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$ platí $m_{ij} \approx \frac{h_i}{h_j}$, pak také $\ln m_{ij} \approx \ln \frac{h_i}{h_j}$ a hodnocení $h_1, h_2, \ldots, h_n$ lze vypočítat minimalizací výrazu $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (\ln m_{ij} - (\ln h_i - \ln h_j))^2$ za podmínky $\sum_{i=1}^{n} h_i = 1$, $h_i > 0$ pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Crawford a Williams [14] ukázali, že řešením této úlohy je geometrický průměr řádků matice $M$, tj. pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$ platí

$$h_i = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} m_{ij}}. \tag{1.8}$$

2. *Metoda vlastního vektoru*
   Tuto metodu navrhl Saaty [73] a vychází z poznatků o vlastních vektorech a vlastních číslech nezáporných reciprokých matic. Z Perron-Frobiovy věty a dalších vět dokázaných v [68, 73] vyplývá, že matice $M$ má vždy kladné reálné maximální vlastní číslo $\lambda_{max}$. Pro ně navíc platí $\lambda_{max} \geq n$, kde $n$ je řád matice $M$. Vlastní vektor matice $M$ příslušný $\lambda_{max}$ má všechny složky kladné (je určen jednoznačně až na násobení konstantou). Dále je v [68] ukázáno, že pokud by platilo $m_{ij} = \frac{h_i}{h_j}$ pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$, potom $\lambda_{max} = n$ a ostatní vlastní čísla matice $M$ jsou nulová. Navíc vektor $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$ je vlastní vektor příslušný $\lambda_{max}$. Protože $m_{ij} \approx \frac{h_i}{h_j}$ pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$, pak se vektor hodnocení $\mathbf{h}$ hledá jako vlastní vektor matice $M$ příslušný jejímu maximálnímu vlastnímu číslu $\lambda_{max}$, tj.

$$M\mathbf{h} = \lambda_{max}\mathbf{h}. \tag{1.9}$$

Hodnocení vypočtená pomocí (1.8) a (1.9) vyjdou ve většině případů nenormovaná, proto je pro jejich znormování potřeba použít vzorec (1.4). Je-li matice $M$ konzistentní, potom je vektor hodnocení vypočtený geometrickým průměrem řádků a metodou vlastního vektoru stejný. Obecně se však jedná o různé vektory. Srovnání těchto dvou metod lze nalézt např. v [12, 45].

**Výběr multiplikativní škály**

Multiplikativní škála musí splňovat vlastnosti dané v tabulce 1.1 a reciprocitu danou vzorcem (1.6). Multiplikativní škála byla zavedena jako interval $\langle \frac{1}{\sigma},$

kde $\sigma\rangle$, $\sigma > 1$, v praxi se však často používá diskrétní reciproká podmnožina tohoto intervalu. Počet hodnot multiplikativní škály, které vyjadřují preferenci nebo indiferenci prvního prvku před druhým, se pak většinou pohybuje mezi 7 až 9. To vychází z psychologické studie [79], dle které je lidský mozek schopen najednou rozlišit nejvýše $7 \pm 2$ úrovní preference. Protože pro hodnotitele je většinou obtížné určit, kolikrát je nějaký prvek preferovaný před jiným, přiřazují se hodnotám škály také slovní popisy.

Nejpoužívanější multiplikativní škála je škála, kterou definoval Saaty [73] a která se používá v nejznámější metodě tohoto typu - v Analytickém hierarchickém procesu (AHP) [6, 68, 73]. *Saatyho škála* je definována v tabulce 1.2. Tato škála se skládá ze 17 hodnot, kde 9 (tj. $7+2$) hodnot vyjadřuje preferenci a indiferenci, přičemž 5 (tj. $7-2$) z nich jsou přiřazeny slovní popisy. Při určování intenzity preference hodnotitel nejprve vybírá mezi těmito 5 stupni. Mezihodnoty použije pouze, když se nemůže rozhodnout mezi dvěma sousedními hodnotami s přiřazenými slovními popisy. Na stejném principu potom definovali škály i další autoři.

| intenzita preference | význam (slovní popis) |
|---|---|
| 1 | $A_i$ je **stejně** dobrá jako $A_j$ |
| 3 | $A_i$ je **mírně** lepší než $A_j$ |
| 5 | $A_i$ je **silně** lepší než $A_j$ |
| 7 | $A_i$ je **velmi silně** lepší než $A_j$ |
| 9 | $A_i$ je **extrémně** lepší než $A_j$ |
| 2, 4, 6, 8 | mezihodnoty |
| $\frac{1}{9}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2}$ | reciproké hodoty |

Tab. 1.2: Saatyho škála

Saatyho škála bude dále v textu nejčastěji používána, proto je nyní zavedena následující definice.

**Definice 1.6.** Nechť $S = \{s_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ je multiplikativní preferenční matice, jejíž prvky jsou dány na Saatyho škále, tj. $s_{ij} \in \{\frac{1}{9}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2}, 1, 2, \ldots, 9\}$ pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Potom matici $S$ nazveme *Saatyho matice.*

Nyní bude uveden přehled několika používaných multiplikativních diskrétních škal. Uvažujme multiplikativní škálu $I \subset \langle \frac{1}{\sigma}, \sigma \rangle$, $\sigma > 1$, $I = L \cup \{1\} \cup P$, kde $P = \{c_i; i = 2, 3, \ldots, N\}$ a $L = \{\frac{1}{c_i}; i = 2, 3, \ldots, N\}$, přičemž $c_N = \sigma$. Hodnoty $c_i$, $i = 2, 3, \ldots, N$, a hodnota $N$ jsou definovány pro jednotlivé škály následovně:

1. *Saatyho škála* [73]: $c_i = i$ pro $i = 2, 3, \ldots, N$, $N = 9$.
   Hodnoty z množiny $\{1\} \cup P$ jsou rovnoměrně rozloženy na intervalu $\langle 1, 9 \rangle$.

2. *Škála Ma-Zheng* [59]: $c_i = \frac{9}{10-i}$ pro $i = 2, 3, \ldots, N$, $N = 9$.
   Hodnoty z množiny $L \cup \{1\}$ jsou rovnoměrně rozloženy na intervalu $\left\langle \frac{1}{9}, 1 \right\rangle$.

3. *Geometrická škála*: $c_i = \sqrt{k}^{i-1}$, kde $k > 0$, pro $i = 2, 3, \ldots, N$, $N \in \{7, 9\}$. Volba parametru $k$ je v literatuře určena několika způsoby. Lootsma [57] pracuje s hodnotami 2 a 4. Finan a Hurley [22] považují za adekvátní hodnoty mezi 1,2 a 2. Geometrická škála je založena na psychologickém výzkumu [56, 57], dle kterého lidé intuitivně používají geometrickou škálu, když mají rozdělit na intervaly takové veličiny jako čas nebo intenzitu světla.

4. *Vyvážená škála* [81]: $c_i = \frac{0{,}5+(i-1)k}{0{,}5-(i-1)k}$, kde $k \in \left\{\frac{1}{20}, \frac{1}{17}\right\}$, pro $i = 2, 3, \ldots, N$, $N = 9$.

5. *Zobecněná Saatyho škála* [51]: $c_i = 1 + k(i-1)$, kde $k > 0$, pro $i = 2, 3, \ldots, N$, $N = 9$.

6. *Škála Triantaphyllou a kol.* [96]: $c_i = kc_i^{Saaty} + (1-k)c_i^{Ma-Zheng}$, kde $k \in (0, 1)$, pro $i = 2, 3, \ldots, N$, $N = 9$.

Vlastnosti uvedených škal jsou blíže zkoumány v [17, 51, 96]. Všechny výše zavedené škály přiřazují číselným hodnotám slovní popisy zavedené Saatym. V tabulce 1.3 jsou vyjmenovány hodnoty některých těchto škal pro množinu $\{1\} \cup P$ a přiřazeny k příslušným slovním hodnotám.

| slovní popis | Saaty | Ma-Zheng | vyvážená $k = 1/20$ | vyvážená $k = 1/17$ | geom. $k = 4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| stejná preference | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| - | 2 | 9/8 | 11/9 | 19/15 | 2 |
| mírná preference | 3 | 9/7 | 12/8 | 21/13 | 4 |
| - | 4 | 9/6 | 13/7 | 23/11 | 8 |
| silná preference | 5 | 9/5 | 14/6 | 25/9 | 16 |
| - | 6 | 9/4 | 15/5 | 27/7 | 32 |
| velmi silná preference | 7 | 9/3 | 16/4 | 29/5 | 64 |
| - | 8 | 9/2 | 17/3 | 31/3 | 128 |
| extrémní preference | 9 | 9 | 9 | 33 | 256 |

Tab. 1.3: Přehled hodnot některých diskrétních multiplikativních škal

### 1.2.2. Aditivní přístup

V této kapitole budou popsány základní vlastnosti metod párového porovnání, kde jsou preference vyjádřeny na aditivní škále.

Aditivní reprezentace může být definována buď na škále $\langle 0, 1\rangle$ s hodnotou indiferentního prvku 0,5, nebo na škále $\langle -a, a\rangle$, $a > 0$, s hodnotou indiferentního prvku 0. Tato práce je zaměřena na první zmíněnou škálu $\langle 0, 1\rangle$. V tomto případě jsou aditivní preference v literatuře nazývány také jako *reciproké relace* [16] nebo *fuzzy preferenční relace* [64, 95]. Podrobnosti o druhé aditivní reprezentaci na škále $\langle -a, a\rangle$, kde $a > 0$, lze nalézt v [3, 31, 63].

#### Zadání preferenční matice

Uvažujme konečnou množinu variant $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, kterým je třeba přiřadit hodnocení $h_1^A, h_2^A, \ldots, h_n^A$ vzhledem ke kritériu $K$. Chceme vytvořit matici relativních preferencí $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$, kde pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$ bude prvek $a_{ij}$ vyjadřovat aditivní preferenci mezi $A_i$ a $A_j$, tj. při porovnávání variant $A_i$ a $A_j$ je třeba rozdělit 100% preference mezi tyto dvě varianty. Hodnotitel tedy přiřadí uspořádané dvojici variant $(A_i, A_j)$ hodnotu $a_{ij} \in \langle 0, 1\rangle$ vyjadřující míru preference $A_i$ před $A_j$ a analogicky uspořádané dvojici variant $(A_j, A_i)$ hodnotu $a_{ji} \in \langle 0, 1\rangle$ vyjadřující míru preference $A_j$ před $A_i$ tak, že $a_{ij} + a_{ji} = 1$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Díky tomuto lze matici $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ interpretovat jako incidenční matici $A$ *fuzzy relace preferencí* s funkcí příslušnosti $\mu_A : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \langle 0, 1\rangle$, kde $\mu_A(A_i, A_j) = a_{ij}$ vyjadřuje stupeň preference $A_i$ před $A_j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, viz [95].

Prvky matice $A$ jsou definované na aditivní škále $\langle 0, 1\rangle$, která je popsána v tabulce 1.4.

| preference | význam (slovní popis) |
|---|---|
| $a_{ij} = 1$ | $A_i$ je **extrémně** lepší než $A_j$ |
| $a_{ij} \in (0{,}5, 1)$ | $A_i$ je lepší než $A_j$ |
| $a_{ij} = 0{,}5$ | $A_i$ je **stejně** dobrá jako $A_j$ |
| $a_{ij} \in (0, 0{,}5)$ | $A_j$ je lepší než $A_i$ |
| $a_{ij} = 0$ | $A_j$ je **extrémně** lepší než $A_i$ |

Tab. 1.4: Aditivní škála

Jak je popsáno výše, je požadováno, aby matice $A$ byla *aditivně reciproká*, tj. pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$ musí platit

$$a_{ji} = 1 - a_{ij}. \tag{1.10}$$

Dále je zřejmé, že musí platit také $a_{ii} = 0{,}5$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$. Na základě tohoto je nyní zavedena následující definice. Bude-li text dále odkazovat na matici $A$, bude se jednat o matici specifikovanou v definici 1.7, nebude-li řečeno jinak.

**Definice 1.7.** Nechť $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ je čtvercová matice, kde $a_{ij} \in \langle 0, 1\rangle$ pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Dále nechť je $A$ aditivně reciproká, tj. $a_{ij} = 1 - a_{ji}$ pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Potom řekneme, že $A$ je *aditivní preferenční matice.*

Poznamenejme, že preferenční matice použitá v metodě párového srovnávání v kapitole 1.1 je speciálním případem aditivní preferenční matice $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$, kde $a_{ij} \in \{0, 0{,}5, 1\}$ pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

### Požadavek konzistence a výpočet hodnocení variant

Aby informace v matici $A$ byly zadány zcela racionálně a určovaly přesně hodnocení $h_1^A, h_2^A, \ldots, h_n^A$, je třeba, aby matice $A$ byla *aditivně konzistentní*, tj. aby platilo

$$(a_{ij} - 0{,}5) + (a_{jk} - 0{,}5) = (a_{ik} - 0{,}5) \tag{1.11}$$

pro každé $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$, viz [94, 95]. Tato podmínka může být přepsána do zkráceného tvaru $a_{ik} = a_{ij} + a_{jk} - 0{,}5$ nebo $a_{ij} + a_{jk} + a_{ki} = 0{,}5$ pro každé $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$. Požadavek aditivní konzistence je ale v reálných situacích, zejména v případě větších matic, obtížně dosažitelný. Naplnění požadavku aditivní konzistence naráží také na problém související s omezeností hodnotící škály - bude-li např. dvojice párových srovnání dána $a_{ij} = 0{,}8$ a $a_{jk} = 0{,}9$, potom by muselo platit $a_{ik} = 1{,}2$, aby byla podmínka (1.11) splněna. Tato hodnota ale nenáleží intervalu $\langle 0, 1\rangle$.

Tanino [94] ukázal, že matice $A$ je aditivně konzistentní právě tehdy, když existuje nezáporný vektor $\mathbf{h}^A = (h_1^A, h_2^A, \ldots, h_n^A)$ takový, že $\mid h_i^A - h_j^A \mid < 1$ a $a_{ij} = 0{,}5 + 0{,}5(h_i^A - h_j^A)$ pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Odečte-li se z tohoto vztahu $a_{ji}$, dostaneme $a_{ij} - a_{ji} = h_i^A - h_j^A$ pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Pro reálně zadávanou aditivní preferenční matici $A$ tedy bude platit, že pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$ rozdíly mezi $a_{ij}$ a $a_{ji}$ představují odhady rozdílů mezi hodnoceními $h_i^A$ a $h_j^A$, což zapisujeme

$$a_{ij} - a_{ji} \approx h_i^A - h_j^A.$$

Tedy rozdíl $a_{ij} - a_{ji}$ (a stejně i $h_i^A - h_j^A$) bude reprezentovat odhad intenzity preference mezi variantami $A_i$ a $A_j$, tedy po vynásobení 100 tento rozdíl vyjadřuje, o kolik % je varianta $A_i$ lepší než varianta $A_j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Je-li např. $a_{ij} = 0{,}5$ a $a_{ji} = 0{,}5$, potom hodnocení $A_i$ a $A_j$ budou stejná, tj. $h_i^A = h_j^A$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Dále, je-li $a_{ij} = 0{,}8$ a $a_{ji} = 0{,}2$, potom $A_i$ je hodnocena o 60% lépe než $A_j$, tj. $h_i^A - h_j^A = 0{,}6$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Vzhledem k tomu, že rozdíl $a_{ij} - a_{ji}$ vyjadřuje rozdíl v hodnocení variant $A_i$ a $A_j$, tak podmínka aditivní konzistence (1.11) neříká nic jiného než, že je-li $A_i$ preferována před $A_j$ s intenzitou $a_{ij} - a_{ji}$ a $A_j$ je preferována před $A_k$ s intenzitou $a_{jk} - a_{kj}$, potom musí být $A_i$ preferována před $A_k$ s intenzitou $a_{ik} - a_{ki} = (a_{ij} - a_{ji}) + (a_{jk} - a_{kj})$. Použije-li se totiž ve vyjádření této intenzity preference podmínka aditivní reciprocity, po její úpravě je výsledkem vztah (1.11).

V [25] je ukázáno, že pro aditivně konzistentní matici můžou být aditivní hodnocení $h_1^A, h_2^A, \ldots, h_n^A$ vypočtena pomocí vzorce

$$h_i^A = \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \tag{1.12}$$

pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Vektor hodnocení $\mathbf{h}^A$ je dán jednoznačně až na přičtení libobolné reálné konstanty $k$. Je-li potřeba vektor hodnocení znormovat, potom je to možné provést přičtením nějaké konstaty $k$. Fedrizzi a Brunelli [24] toto navrhují provést přičtením konstanty $k = -\min\{h_1^A, h_2^A, \ldots, h_n^A\}$. Takto bude nejmenší hodnocení rovno 0 a ostatní hodnocení budou ležet v intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Další způsoby výpočtu aditivních hodnocení variant lze nalézt v [100, 102].

### 1.2.3. Multiplikativní vs. aditivní přístup

Multiplikativní přístup popsaný v kapitole 1.2.1 a aditivní přístup popsaný v kapitole 1.2.2 jsou ekvivalentní v tom smyslu, že oba modely jsou izomorfní, jak je ukázáno v [23, 69].

**Převod multiplikativní matice na aditivní**

Multiplikativní preferenční matici $M = \{m_{ij}\}_{i,j=1}^n$, kde $m_{ij} \in \langle \frac{1}{\sigma}, \sigma\rangle$, $\sigma > 1$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, lze převést na aditivní preferenční matici $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$, kde $a_{ij} \in \langle 0, 1\rangle$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, pomocí vzorce

$$a_{ij} = \frac{1}{2}(1 + \log_\sigma m_{ij}) \tag{1.13}$$

pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Tato funkce je pro $\sigma > 1$ rostoucí a převede bod $\frac{1}{\sigma}$ na 0, bod 1 na 0,5 a bod $\sigma$ na 1. V [23, 69] je ukázáno, že z reciprocity (1.6) matice $M$ plyne aditivní reciprocita (1.10) matice $A$ a pokud je $M$ konzistentní dle (1.7), pak také $A$ je aditivně konzistentní dle (1.11). Multiplikativní hodnocení $h_i$ vypočtená pomocí metody geometrického průměru řádků (1.8) lze převést na aditivní hodnocení $h_i^A$ daná vztahem (1.12) pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$ vzorcem:

$$h_i^A = 1 + \log_\sigma h_i.$$

**Převod aditivní matice na multiplikativní**

Analogicky lze aditivní preferenční matici $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$, kde $a_{ij} \in \langle 0, 1\rangle$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, převést na multiplikativní preferenční matici $M = \{m_{ij}\}_{i,j=1}^n$, kde $m_{ij} \in \langle \frac{1}{\sigma}, \sigma\rangle$, $\sigma > 1$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Dle [23, 69] to lze provést pomocí inverzní funkce k funkci (1.13), tj. pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$ platí

$$m_{ij} = \sigma^{2a_{ij}-1}. \tag{1.14}$$

Tato funkce je pro $\sigma > 1$ rostoucí a převede bod 0 na $\frac{1}{\sigma}$, bod 0,5 na 1 a bod 1 na $\sigma$. V [23, 69] je dokázáno, že z aditivní reciprocity (1.10) matice $A$ plyne reciprocita (1.6) matice $M$. Obdobně je-li $A$ aditivně konzistentní dle (1.11), pak je $M$ konzistentní dle (1.7). Aditivní hodnocení $h_i^A$ dané vzorcem (1.12) lze převést na multiplikativní hodnocení $h_i$ odpovídající metodě geometrického průměru řádků (1.8). Pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$ platí

$$h_i = \sigma^{h_i^A - 1}. \tag{1.15}$$

**Přehled vlastností multiplikativních a aditivních matic**

Tabulka 1.5 shrnuje pro přehlednost základní vlastnosti multiplikativního a aditivního přístupu k párovému srovnávání objektů.

| vlastnost | multiplikativní $M$ | aditivní $A$ |
|---|---|---|
| hodnotící škála | $\langle \frac{1}{\sigma}, \sigma \rangle$, $\sigma > 1$ | $\langle 0, 1 \rangle$ |
| hodnota indiference | 1 | 0,5 |
| reciprocita | $m_{ij} m_{ji} = 1$ | $a_{ij} + a_{ji} = 1$ |
| konzistence | $m_{ij} m_{jk} = m_{ik}$ | $(a_{ij} - 0{,}5) + (a_{jk} - 0{,}5) = (a_{ik} - 0{,}5)$ |
| výpočet hodnocení | $h_i = \sqrt[n]{\prod\limits_{j=1}^{n} m_{ij}}$ | $h_i^A = \frac{2}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}$ |
| význam hodnocení | $m_{ij} \approx \frac{h_i}{h_j}$ | $a_{ij} - a_{ji} \approx h_i^A - h_j^A$ |
| intenzita preference | $m_{ij}$ | $a_{ij} - a_{ji}$ |
| převod prvků matic | $m_{ij} = \sigma^{2a_{ij} - 1}$ | $a_{ij} = \frac{1}{2}(1 + \log_\sigma m_{ij})$ |
| převod hodnocení | $h_i = \sigma^{h_i^A - 1}$ | $h_i^A = 1 + \log_\sigma h_i$ |

Tab. 1.5: Přehled charakteristik multiplikativního a aditivního přístupu

## 1.2.4. Vícekriteriální hodnocení variant

Nyní bude popsáno, jak vypadá hodnotící model, když v něm vystupuje více kritérií.

**Agregace dílčích hodnocení**

Uvažujme opět konečnou množinu variant $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, kterou je tentokrát třeba ohodnotit vzhledem ke konečně mnoha kritériím $K_1, K_2, \ldots, K_m$. Celkové hodnocení varianty $A_i$ bude stejně jako v případě metody párového srovnávání vypočteno vzorcem (1.5), tedy jako vážený průměr dílčích hodnocení, tj. pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$ platí $h_i^{(C)} = \sum_{j=1}^{m} v_j h_i^j$, kde $v_1, v_2, \ldots, v_m$ jsou normované váhy kritérií $K_1, K_2, \ldots, K_m$ a $h_1^j, h_2^j, \ldots, h_n^j$ jsou normovaná dílčí hodnocení variant $A_1, A_2, \ldots, A_n$ vzhledem ke kritériu $K_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

Váhy kriterií se vypočtou z preferenční matice párového porovnání těchto kriterií vzhledem k danému cíli. Váha každého kritéria musí vyjadřovat, jak moc se toto kritérium podílí na celkovém cíli vzhledem ke všem ostatním kritériím. Jinými slovy součet vah jednotlivých kritérií musí být roven 1. V případě multiplikativních preferencí se váhy kriterií vypočtou metodou geometrického průměru řádků (1.8) nebo metodou vlastního vektoru (1.9) a následně se znormují dle (1.4). V případě aditivních preferencí se aditivní váhy vypočtou pomocí vzorce (1.12). Tyto váhy jsou dány jednoznačně až na přičtení libovolné konstanty, nelze je tedy vydělit součtem vah tak, aby byl součet výsledných vah 1. Proto je nejprve třeba aditivní váhy převést na multiplikativní váhy dle (1.15) a následně je znormovat pomocí (1.4).

Analogický postup platí pro dílčí hodnocení variant. Ta se vypočtou z preferenční matice párového porovnání variant vzhledem k jednotlivým kritériím. Vypočtené dílčí hodnocení varianty se upraví tak, aby vyjadřovalo podíl varianty na daném kritériu vzhledem ke všem ostatním variantám. V případě multiplikativních preferencí se dílčí hodnocení variant vypočtou metodou geometrického průměru řádků (1.8) nebo metodou vlastního vektoru (1.9) a následně je se znormují dle (1.4). V případě aditivních preferencí se nejprve vypočtou aditivní dílčí hodnocení pomocí vzorce (1.12). Získaná hodnocení se převedou na multiplikativní hodnocení dle (1.15) a následně se znormují pomocí (1.4).

Další přístupy k agregaci aditivních hodnocení získaných z aditivní preferenční matice lze nalézt např. v [39, 40, 99]. Způsoby agregace kombinace multiplikativních a aditivních preferencí lze nalézt v [21, 103].

#### Hierarchická struktura kritérií

Saaty [73] navrhl pro usnadnění a zpřehlednění problému kritéria členit do hierarchické struktury. Tento způsob práce s kritérii aplikoval ve své metodě Analytický hierarhický proces (AHP), kde je do hierarchie členěn celý hodnotící proces včetně alternativ. Hierarchická struktura kritérií byla navržena pro multiplikativní preference. Vypočtené váhy totiž musí v každém kroku vyjadřovat podíl kritéria na uvažovaném celku (tj. na nadřazeném kritériu nebo na celkovém cíli). Pokud bychom chtěli tuto metodu aplikovat i pro aditivní preference, je opět třeba všechny získané aditivní váhy převést na multiplikativní váhy dle (1.15). Nyní bude popsáno, jak obecně probíhá proces členění kritérií do hierarchií. Další informace k této problematice lze nalézt v [68].

Na první úrovni hierarchie uvažujeme samotný cíl hodnocení. Na druhé úrovni uvažujeme kritéria, která je možno členit na konkrétnější kritéria. Ta se opět můžou zpřesňovat v další hierarchické úrovni. Vznikají tak množiny spolu souvisejících *subkritérií*. Takto tedy dochází k vytváření hierarchické struktury, kde na vyšších úrovních jsou kritéria obecnějšího významu a postupně jsou konkretizována. Přitom v každé úrovni může být různý počet kritérií a z každého kritéria může vycházet různý počet kritérií na nižší úrovni. Jako příklad hierarchie lze uvést hodnocení lokality ke stavbě domu, kde první úroveň tvořil cíl hodnocení a na druhé úrovni uvažujeme kritéria ekonomická, ekologická, sociální a technická. Potom např. ekonomická kritéria na další úrovni bude představovat pouze cena za $m^2$ pozemku a sociální kritéria budou členěna na subkritéria dostupnost škol a školek v okolí, dopravní ruch v okolí a kulturní vyžití v okolí lokality.

Jsou-li kritéria hierarchicky rozčleněna, potom se spolu párově porovnávají vždy jen ta kritéria, která jsou na stejné hierarchické úrovni a vycházejí ze stejného kritéria na vyšší hierarchické úrovni (popř. společně vycházejí přímo z cíle hodnocení). Normovaná váha kritéria vypočtená z matice párového porovnání potom vyjadřuje podíl kritéria na nadřazeném kritériu. Aby váha kritéria byla vyjádřena vzhledem k celkovému cíli, je třeba ji vynásobit normovanými váhami všech nadřazených kritérií. Kritéria, ze kterých nevychází žádná sukritéria, můžeme nazývat *hodnotící kritéria*, a kritéria, která mají nějaké podřízené kritérium, můžeme nazývat *pomocná kritéria*. Potom pro hodnotící kritétia platí, že součet jejich vah vzhledem k celkovému cíli je roven 1. Výpočet dílčích hodnocení variant probíhá pouze vzhledem k hodnotícím kritériím. Agregace dílčích hodnocení se provádí opět pomocí metody váženého průměru (1.5), kde váhy kritérií jsou vyjádřeny vzhledem k celkovému cíli.

Jednou z výhod tohoto přístupu je snížení počtu párových srovnání mezi kritérii. Pokud by např. hodnotící problém tvořilo 8 hodnotících kritérií, potom by bez jejich členění do hierarchií bylo třeba potřeba provést $\binom{8}{2} = 28$ párových srovnání. Pokud jsou ale rozdělena na 2 skupiny po 3 a 5 hodnotících kritériích, potom bude třeba provést pouze $\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{5}{2} = 14$ párových srovnání.

**Analytický hierarchický proces (AHP)**

Členění hodnotícího problému do hierarchií, stejně tak použití devítibodové hodnotící škály pro multiplikativní preference nebo výpočet dílčích hodnocení pomocí metody vlastního vektoru byly navrženy Saatym [73] pro *Analytický hierarchický proces* (AHP). Jedná se o jednu z nejpoužívanějších metod párového srovnávání a celkově o jednu z nejpoužívanějších metod vícekriteriálního hodnocení a rozhodování.

*Fáze rozhodování pomocí AHP:*

1. *Definování a analýza problému*: V této fázi je definován hodnotící problém a stanoven cíl hodnocení. Určí se soubor kritérií a množina variant, která dle nich bude hodnocena.
2. *Strukturování hierarchického modelu*: V této fázi je vytvořena hierarchická struktura, kde na první úrovni je cíl hodnocení, na poslední úrovni varianty, které se budou hodnotit, a na meziúrovních je konkretizován cíl rozhodování, tj. je členěn na jednotlivá kritéria a ta popř. postupně ještě na subkritéria atd. Následně jsou určeny důsledky variant vzhledem k hodnotícím kritériím.
3. *Dílčí výpočty*: V této fázi jsou vypočteny váhy kritérií a dílčí hodnocení variant. Párové srovnání se provede pomocí Saatyho škály $\{\frac{1}{9}, \frac{1}{8}, \ldots, 1, 2 \ldots, 9\}$, jejíž slovní popisy jsou definované v tabulce 1.2. Provede se:

- párové srovnání kritérií vzhledem k celkovému cíli nebo vzhledem k nadřazenému kritériu, které se nachází v předchozí hierarchické úrovni;
- párové srovnání všech alternativ vzhledem ke každému hodnotícímu kritériu.

U matic párových porovnání se ověří, jestli jsou dostatečně konzistentní dle indexu $CR$ (2.2), který bude popsán v kapitole 2.1. Výpočet vah kritérií a dílčích hodnocení variant se provede pomocí metody vlastního vektoru (1.9) a následně se použije znormování dle vzorce (1.4). Pokud má hierarchie více než 3 úrovně, vypočtou se váhy kritérií vzhledem k celkovému cíli dle postupu uvedeného v kapitole. 1.2.4 v části *Hierarchická struktura kritérií*.

4. *Celkové hodnocení variant*: Nakonec jsou vypočtena celková hodnocení variant pomocí váženého průměru (1.5) dílčích hodnocení.

Postupně vznikala spousta modifikací metody AHP. Autoři navrhovali měnit hodnotící škálu, podmínku konzistence matice párového porovnání nebo výpočet dílčích hodnocení a vah kritérií. Dali tak vzniknout celé třídě metod párového srovnávání tak, jak byla představena v předchozích kapitolách. Sám Saaty např. modifikoval metodu AHP pro použití k hodnocení obecných kategorií variant [75, 76]. AHP se také začalo používat pro skupinové rozhodování [19, 20] a pro rozhodování za rizika [60, 62].

Poměrně často používanou modifikací AHP je *fuzzy AHP* [11, 98], tj. fuzzikovaná verze této metody. Fuzzy AHP vychází z teorie fuzzy množin, jejíž základy položil Zadeh [106]. Více k teorii fuzzy množin lze nalézt v [18, 52]. Při párovém porovnání dvou prvků se rozhodovatel často obtížně rozhoduje pro konkrétní intenzity preference vyjádřené hodnotou ze Saatyho škály. Nahrazení ostrých vstupů pomocí fuzzy čísel dokáže tuto neurčitost jeho názoru postihnout. Vzniká tak fuzzy matice párových porovnání, jejíž prvky jsou trojúhelníková fuzzy čísla. Hlavní problém, se kterým se metoda fuzzy AHP potýká, je vhodný výpočet vektoru hodnocení. K tomuto se nejčastěji používá fuzzifikace geometrického průměru řádků. V této oblasti svými výsledky přispěli např. Ramík a Korviny [71], van Laarhoven a Pedrycz [98], Pan a Yuan [65] nebo Krejčí [54].

## 1.3. Výhody a nevýhody tohoto typu metod

O výhodách a nevýhodách metod párového srovnávání pojednává např. [30, 37, 38, 80]. Nyní budou shrnuty hlavní přínosy a problémy, které se vysktují v tomto typu metod. Důraz bude kladen především na metody hodnocení založené na multiplikativních a aditivních preferenčních maticích.

### Výhody metod párového srovnávání

- *Jednoduchost pro hodnotitele*: Pracuje se vždy pouze se dvěma prvky najednou. Takto je jednodušší určit, který prvek je preferovanější a s jakou intenzitou, než když je třeba porovnávat celý soubor prvků najednou. U diskrétní hodnotící škály lze navíc k vyjádření intenzity preferencí použít slovních popisů prvků škály.
- *Výpočetní jednoduchost*: Hodnocení variant lze často získat i bez použití specializovanáho softwaru. U multiplikativních preferencí lze váhy a dílčí hodnocení vypočítat pomocí geometrického průměru řádků příslušných matic, u aditivních preferencí jako dvojnásobky aritmetického průměru řádků uvažovaných matic. Celkové hodnocení se potom vypočte jako vážený průměr dílčích hodnocení. Při více kritériích však ještě u aditivních preferencí musí být použit předem převod na multiplikativní preference (jak u vah kritérií, tak u dílčích hodnocení variant).
- *Různé typy kritérií*: Metody dokáží pracovat jak s kvantitativními kritérii, tak s kvalitativními kritérii. Díky tomu je také možné kombinovat kritéria, jejichž důsledky jsou dány objektivně, a kritéria, kde jsou důsledky určeny subjektivně hodnotitelem.
- *Vytváření hierarchií*: Především pro multiplikativní preference je možné hodnotící kritéria členit do hierarchií. To umožňuje zpřehlednit problém a snížit potřebný počet párových porovnání mezi krititérii. Díky tomu je také možné do hodnotící situace zakomponovat i větší počet kritérií, protože spolu nebudeme muset všechny porovnávat. Je třeba si ale uvědomit, že v takovém případě je stále nutno porovnat varianty vzhledem ke všem hodnotícím kritériím.
- *Široké spektrum aplikací*: Metody párového srovnávání lze použít nejen k hodnocení variant, ale také k řešení různého typu problémů. Nejznámější a nejpoužívanější metoda párového srovnávání je AHP [68, 73]. Přehled aplikací této metody lze nalézt v [97], kde je ukázáno, že tato metoda lze použít např. k rozhodování o výběru varianty, přerozdělování zdrojů, plánování a priorizaci nebo k předpovědím. Jak už bylo řečeno, AHP lze použít také ve skupinovém rozhodování. Existuje také fuzzifikace této metody pracující s neurčitostí zadaných preferencí.

### Nevýhody metod párového srovnávání

- *Konzistence zadaných preferencí*: Aby intenzity preferencí nesly informaci využitelnou k výpočtu hodnocení variant, musí být zadány racionálně. Toto kontroluje podmínka konzistence. Jak ale bylo ukázáno v předchozích kapitolách, multiplikativní podmínka konzistence (1.7) i aditivní podmínka konzistence (1.11) jsou v reálných situacích obtížně dosažitelné. Mají-li např. oba porovnávané prvky extrémní sílu preference, potom by výsledná preference musela nabývat hodnoty, která je mimo uvažovanou škálu. Pro multiplikativní preference definované na $\langle \frac{1}{\sigma}, \sigma \rangle$, $\sigma > 1$, by dle podmínky konzistence muselo platit $\sigma\sigma = \sigma^2 > \sigma$ a pro aditivní preference na škále $\langle 0, 1 \rangle$ zase $1 + 1 - 0{,}5 = 1{,}5 > 1$. Stejný problém nastává i pro jinou kombinaci intenzit preferencí než je dvojice extrémních preferencí. Např. při použití Saatyho škály může být pro uvažované párové srovnání dle dvojice nepřímých srovnání vyžadována intenzita preference $3 \cdot 5 = 15 > 9$. Určitou míru konzistence zadávaných vstupů je však třeba udržet, aby výsledná hodnocení měla vypovídající hodnotu.

- *Počet párových porovnání*: Jednou z nevýhod těchto metod je velký počet párových porovnání. Díky reciprocitě stačí vždy vyplnit pouze horní trojúhelník matice, spodní trojúhelník a diagonála jsou dopočteny automaticky. I tak ale máme-li $m$ hodnotících kritérií a $n$ variant, potom musí hodnotitel provést pro kritéria $\binom{m}{2}$ párových srovnání a pro varianty vzhledem ke všem kritériím ještě $m\binom{n}{2}$ párových srovnání.
- *Postupné vstupování variant do modelu*: V praxi se často vyskytují situace, kde varianty nejsou předem známy a do modelu vstupují postupně. Použití metod párového srovnávání tak, jak byly dosud popsány, není v tomto případě úplně vhodné. Při každém vstupu nové varianty do modelu by se pro každé kritérium musela provést nová párová srovnání této varianty se všemi ostatními. Dále by se musela přepočítat všechna dílčí hodnocení a stejně tak hodnocení celková.
- *Změna preferenčního pořadí variant*: Přidáním nebo odebráním varianty v uvažovaném modelu může dojít ke změně preferenčního pořadí zbývajících variant, aniž by došlo k jakékoliv změně doposud zadaných dat. Takováto změna preferenčního pořadí může reálně nastat, použijeme-li metodu k úloze typu rozdělení disponobilních zdrojů (tj. celku) mezi jednotlivé varianty. Např. rozdělení finančních odměn mezi jednotlivé zaměstnance. Ve většině ostatních reálných situací není přitom takováto změna preferenčního pořadí žádaná.

Některé aspekty výše zmíněných nevýhod metod párového srovnávání budou v následujících kapitolách podrobně analyzovány. Bude uveden přehled způsobů, jak se s těmito problémy vypořádali různí autoři. Budou také navrženy nové způsoby řešení.

# Kapitola 2

# Konzistence matic párového porovnání

Tato část nejprve v kapitolách 2.1 a 2.2 podává přehled aktuálního stavu problematiky konzistence matic párového porovnání. V kapitole 2.3 je potom představen popis nového konceptu ověření přijatelné konzistence matice párového porovnání a s tím související původní výsledky, jejichž podstatná část byla publikována v [47, 50, 89].

Je třeba, aby zadané preferenční matice byly alespoň do jisté míry konzistentní, aby z nich bylo možné vypočítat relevantní vektor hodnocení. Základní definovaná podmínka konzistence však není na omezených škálách v reálných situacích dodržitelná, proto se konstruují různé alternativní ukazatele konzistence.

Nejprve budou v kapitole 2.1 představeny různé přístupy k měření nekonzistence multiplikativních preferenčních matic. Následně bude v kapitole 2.2 ukázáno, jaké podmínky kladou na přijatelnou konzistenci matice párového porovnání autoři zabývající se aditivními preferencemi. Nakonec bude v kapitole 2.3 definována pro multiplikativní i aditivní preference slabá konzistence - nová koncepce posuzování konzistence matic párového porovnání. Dále budou ukázány vlastnosti a výhody, které z takovéto podmínky plynou.

## 2.1. Konzistence multiplikativních preferencí

Uvažujme multiplikativní preferenční matici $M = \{m_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$. Matice $M$ by měla splňovat podmínku konzistence (1.7), která je ale příliš silná. Proto byly zavedeny další přístupy, dle nichž je možné posoudit konzistenci matice. Přehled některých ukazatelů (ne)konzistence lze nalézt v [7, 8]. Většina autorů zabývajících se multiplikativními preferencemi postupovala tak, že se zaměřila na nějakou vlastnost, kterou splňuje matice konzistentní dle (1.7). Dle tohoto byl následně zkontruován koeficient ověřující, do jaké míry je tato podmínka v rámci dané matice splněna. Některé tyto přístupy budou nyní uvedeny.

**Indexy nekonzistence $CI$ a $CR$**

Saaty [73] definoval *index nekonzistence* $CI$ pro matici $M$ následně:

$$CI = \frac{\lambda_{max} - n}{n - 1}, \tag{2.1}$$

kde $\lambda_{max}$ je maximální vlastní číslo matice $M$ a $n$ její řád. Z Perron-Frobiovy věty a dalších vět dokázaných v [68, 73] plyne, že $\lambda_{max}$ pro matici $M$ vždy existuje a že $\lambda_{max} \geq n$, tj. $CI \geq 0$. Dále platí, že $M$ je konzistentní dle (1.7) právě tehdy, když $\lambda_{max} = n$, tj. $CI = 0$. Čím větší je $CI$, tím větší je nekonzistence matice $M$. Bylo však ukázáno, že hodnota indexu $CI$ zůstává stále ještě závislá na proměnné $n$. S rostoucím $n$ roste i hodnota $CI$. Aby bylo možné porovnávat indexy nekonzistence různě velkých matic, byl zaveden *podílový koeficient nekonzistence* $CR$, který je definován takto:

$$CR = \frac{CI}{RI(n)}, \tag{2.2}$$

kde $RI(n)$ je *náhodný index nekonzistence*, což je průměrná hodnota indexu nekonzistence $CI$ získaná z náhodně vygenerovaných reciprokých matic řádu $n$, jejichž prvky jsou dány na stejné multiplikativní škále jako prvky matice $M$. Platí $CR \geq 0$. $M$ je konzistentní dle (1.7) právě tehdy, když $CR = 0$. Saaty stanovil, že pokud $CI$ nepřesahuje desetinu náhodného indexu nekonzistence $RI(n)$, tj. pokud $CR \leq 0{,}1$, pak může být $M$ považována za dostatečně konzistentní.

Saaty [77] pro každé $n = 3, 4, \ldots, 15$ provedl experiment s 50 000 náhodně vygenerovanými Saatyho maticemi $S$ a pro každé uvažované $n$ spočítal index $RI(n)$. Pro náhodný index nekonzistence Saatyho matice tak získal výsledky uvedené v tabulce 2.1. Hodnoty $RI(n)$ pro Saatyho matici potom dalšími simulacemi zpřesňovali různí autoři, viz [2].

| **n** | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **RI(n)** | 0,52 | 0,89 | 1,11 | 1,25 | 1,35 | 1,40 | 1,45 | 1,49 | 1,52 | 1,54 | 1,56 | 1,58 | 1,59 |

Tab. 2.1: Hodnoty náhodného indexu nekonzistence $RI(n)$ Saatyho matice

**Modifikovaný podílový index nekonzistence $CR^*$**

Alonso a Lamata [2] navrhli modifikaci Saatyho podílového indexu nekonzistence (2.2). Tato modifikace vychází ze studie náhodného indexu nekonzistence $RI(n)$, který upravili takto:

$$RI^*(n) = \frac{\overline{\lambda}_{max}(n) - n}{n - 1},$$

kde $n$ je řád matice $M$ a $\overline{\lambda}_{max}(n)$ je *průměrné maximální vlastní číslo* náhodně vygenerovaných reciprokých matic řádu $n$, jejichž prvky jsou dány na stejné multiplikativní škále jako prvky matice $M = \{m_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$. Potom lze podílový index nekonzistence matice $M$ řádu $n$ psát

$$CR^* = \frac{\lambda_{max} - n}{\overline{\lambda}_{max} - n},$$

kde $\lambda_{max}$ je maximální vlastní číslo matice $M$. Opět je-li $CR^* \leq 0{,}1$, pak je $M$ považována za dostatečně konzistentní.

Dále Alonso a Lamata [2] ukázali, že pro Saatyho matici $S$ dimenze $n$ je možno použít následující odhad průměrného maximálního vlastního čísla:

$$\overline{\lambda}_{max}(n) \approx 2{,}7699n - 4{,}3513.$$

**Index nekonzistence determinantů** $DI$

Lamata a Pelaez [55] vyjádřili determinant matice $M = \{m_{ij}\}_{i,j=1}^{3}$ řádu 3:

$$Det(M) = \frac{m_{13}}{m_{12}m_{23}} + \frac{m_{12}m_{23}}{m_{13}} - 2.$$

Vzhledem k tomu, že $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 \geq 0$ pro každé $a, b > 0$, tak pro matici $M$ řádu 3 platí $Det(M) \geq 0$. Matice $M$ řádu 3 je konzistentní dle (1.7) právě tehdy, když $Det(M) = 0$. Čím větší je $Det(M)$, tím větší je nekonzistence $M$.

Na tomto poznatku byl definován index nekonzistence pro matice libovolné dimenze. Ten představuje aritmetický průměr determinantů všech reciprokých submatic matice $M = \{m_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ řádu 3. Takových submatic pro matici řádu $n$ existuje $\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$. *Index nekonzistence determinantů* potom lze vyjádřit ve tvaru

$$DI = \frac{6}{n(n-1)(n-2)} \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=i+1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n} \left( \frac{m_{ik}}{m_{ij}m_{jk}} + \frac{m_{ij}m_{jk}}{m_{ik}} - 2 \right).$$

Platí $DI \geq 0$. Matice $M$ je konzistentní dle (1.7) právě tehdy, když $DI = 0$. Čím větší je $DI$, tím větší je nekonzistence matice $M$.

**Geometrický index nekonzistence** $GCI$

Crawford a Williams [15] pracovali s hodnoceními $h_1, h_2, \ldots, h_n$ vypočtenými z matice $M = \{m_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ geometrickým průměrem řádků (1.8). Vzhledem k nim stanovili pro každý prvek $m_{ij}$ matice $M = \{m_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ výraz

$$e_{ij} = m_{ij}\frac{h_j}{h_i},$$

$i, j = 1, 2, \ldots, n$. Platí $e_{ij} > 0$ pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Pro konzistentní matici $M$ platí $m_{ij} = \frac{h_i}{h_j}$, tj. $e_{ij} = 1$, tj. $\ln e_{ij} = 0$ pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Na tomto základě byl potom definován *geometrický index nekonzistence* matice $M$ ve tvaru

$$GCI = \frac{2}{(n-1)(n-2)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} \ln^2 e_{ij}.$$

Platí $GCI \geq 0$. Matice $M$ je konzistentní dle (1.7) právě tehdy, když $GCI = 0$. Čím větší je $GCI$, tím větší je nekonzistence matice $M$. Brunelli a kol. [9] ukázali, že tento index lze použít k ověření podmínky konzistence (1.7) bez ohledu na to, jak jsou vypočtena hodnocení z matice $M$ (zda geometrickými průměry řádků nebo metodou vlastního vektoru).

**Index nejednoznačnosti $AI$**

Salo a Hämäläinen [82] pro všechny prvky matice $M = \{m_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ zjišťovali, jakých hodnot by měly nabývat, aby pro ně byla splněna podmínka konzistence (1.7). Pro každý prvek $m_{ij}$, kde $i, j = 1, 2, \ldots, n$, zkonstruovali množinu

$$K_{ij} = \{m_{ik} m_{kj}; k = 1, 2, \ldots, n\}$$

vytvořenou na základě všech nepřímých porovnání mezi prvky $m_{ik}$ a $m_{kj}$, $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$. Protože při definici množiny $K_{ij}$ je uvažováno i $k = i, j$, platí $m_{ij} \in K_{ij}$. Dále je vidět, že $M$ je konzistentní právě tehdy, když $K_{ij} = \{m_{ij}\}$ pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Místo množiny $K_{ij}$ můžeme uvažovat interval reálných čísel

$$\langle m_{ij}^L, m_{ij}^U \rangle := \langle \min K_{ij}, \max K_{ij} \rangle,$$

ve kterém leží hodnota $m_{ij}$ pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Čím širší jsou tyto intervaly, tím méně konzistentní je matice $M$. Index nekonzistence tedy vznikl jako aritmetický průměr normovaných délek intervalů $\langle m_{ij}^L, m_{ij}^U \rangle$, $i < j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Pro matici $M$ dimenze $n$ je takových intervalů $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. *Index nejednoznačnosti* je tedy definován

$$AI = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \frac{m_{ij}^U - m_{ij}^L}{(1 + m_{ij}^U)(1 + m_{ij}^L)}.$$

Platí $AI \geq 0$. Matice $M$ je konzistentní dle (1.7) právě tehdy, když $AI = 0$. Čím větší je $AI$, tím větší je nekonzistence matice $M$.

**Harmonický index nekonzistence $HCI$**

Stein a Mizzi [88] při definování indexu nekonzistence brali do úvahy sloupce $m_j = (m_{1j}, m_{2j}, \ldots, n_{mj})^T$, $j = 1, 2, \ldots, n$, konzistnetní matice $M = \{m_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$.

Pro ty platí $m_j m_{j(j+1)} = m_{j+1}$, $j = 1, 2, \ldots, n-1$. Matice $M$ je tedy konzistentní právě tehdy, když její hodnost je rovna 1. Dále bylo pro sloupcové součty

$$s_j = \sum_{i=1}^{n} m_{ij},$$

$j = 1, 2, \ldots, n$, matice $M$ dokázáno, že platí $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{s_j} \leq 1$. Matice $M$ je konzistentní dle (1.7) právě tehdy, když $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{s_j} = 1$. Čím menší je tento výraz, tím nekonzistentnější je matice $M$ . *Harmonický průměr* sloupcových součtů $s_1, s_2, \ldots, s_n$ potom lze vyjádřit ve tvaru

$$HM = \frac{n}{\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{s_j}},$$

kde $n$ je řád matice $M$. Pro matici $M$ řádu $n$ platí $HM \geq n$. $M$ je konzistentní dle (1.7) právě tehdy, když $HM = n$. Čím větší je $HM$, tím více nekonzistentní je matice $M$.

Harmonický průměr $HM$ byl následně znormován, aby jeho chování bylo srovnatelné se Saatyho indexem nekonzistence $CI$. Byl tedy definován *harmonický index nekonzistence*

$$HCI = \frac{(HM - n)(n + 1)}{n(n - 1)}.$$

Platí $HCI \geq 0$. Matice $M$ je konzistentní dle (1.7) právě tehdy, když $HCI = 0$. Čím větší je $HCI$, tím větší je nekonzistence matice $M$.

**Oslabená konzistence**

Basile a D'Apuzzo [4] k posuzování konzistence přistoupili jinak než výše zmínění autoři. Pro přijatelnou konzistenci matice $M = \{m_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ definovali slabší podmínku než je (1.7). Jejich podmínka vychází z podmínky *tranzitivity*, která je pro každé $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$ definována takto

$$m_{ij} > 1 \wedge m_{jk} > 1 \quad \Longrightarrow \quad m_{ik} > 1.$$

a která říká, že je-li $A_i$ preferována před $A_j$ a $A_j$ je preferována před $A_k$, potom by i $A_i$ mělo být preferována před $A_k$.

Autoři uvažovali lineární uspořádání prvků, tj. žádné dva různé prvky nejsou indiferentní. *Oslabená konzistence* je pro takový soubor prvků pro každé $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$ definována takto

$$m_{ij} > 1 \wedge m_{jk} > 1 \quad \Longrightarrow \quad m_{ik} > \max\{m_{ij}, m_{jk}\}. \tag{2.3}$$

a je interpretována takto: Je-li $A_i$ preferována před $A_j$ s intenzitou preference $m_{ij}$ a $A_j$ je preferována před $A_k$ s intenzitou preference $m_{jk}$, potom by $A_i$ měla být preferována před $A_k$ s intenzitou preference $m_{ik}$ větší než maximum z obou předchozích intenzit preferencí.

Platí, že je-li matice $M$ konzistentní dle (1.7), potom je také oslabeně konzistentní (2.3). Oslabená podmínka konzistence je definována racionálně a dá se v reálných případech dodržet lépe než samotná konzistence. Není však definována pro soubor prvků, kde jsou alespoň dva různé prvky indiferentní. Navíc pokud jedna z intenzit preferencí na levé straně výrazu (2.3) znamená extrémní preferenci $\sigma > 1$, potom tuto podmínku není možné na škále $\langle \frac{1}{\sigma}, \sigma \rangle$ splnit.

**T-multiplikativní tranzitivita**

Chiclana a kol. [41] přistoupili také k definování slabší podmínky než je (1.7). Pro ověření přijatelné konzistence matice $M = \{m_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ definovali *T-multiplikativní tranzitivitu* pro každé $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$ následně:

$$m_{ij} \geq 1 \wedge m_{jk} \geq 1 \quad \Longrightarrow \quad m_{ik} \geq \max\{m_{ij}, m_{jk}\}, \tag{2.4}$$

$$m_{ij} \leq 1 \wedge m_{jk} \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad m_{ik} \leq \min\{m_{ij}, m_{jk}\}, \tag{2.5}$$

$$(m_{ij} > 1 \wedge m_{jk} < 1) \vee (m_{ij} < 1 \wedge m_{jk} > 1) \quad \Longrightarrow \quad m_{ik} = m_{ij} m_{jk}. \tag{2.6}$$

Tyto podmínky jsou pro $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$ interpretovány jako: Je-li $A_i$ preferována před $A_j$ s intenzitou preference $m_{ij}$ nebo je s ní indiferentní a $A_j$ je preferována před $A_k$ s intenzitou preference $m_{jk}$ nebo je s ní indiferentní, potom by $A_i$ měla být preferována před $A_k$ s intenzitou preference $m_{ik}$ větší nebo rovnou maximu z obou předchozích intenzit preferencí. Analogická podmínka je požadována pro hodnoty menší nebo rovny 1. Dále pokud je jedna z hodnot nepřímých srovnání větší než 1 a druhá menší než 1, potom je požadováno, aby pro přímé srovnání byla splněna podmínka konzistence.

Platí, že pokud je $M$ konzistentní dle (1.7), potom je T-multiplikativně tranzitivní (2.4)–(2.6). Vhodnost T-multiplikativní tranzitivity jako požadavku dostatečné konzistence nyní podrobíme detailní analýze.

Pro každé $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$ platí: Pokud bude ve vztahu (2.4) platit $m_{ij} = 1$ a $m_{jk} > 1$ nebo $m_{ij} > 1$ a $m_{jk} = 1$, potom můžeme zvolit libovolně $m_{ik} \geq \max\{m_{ij}, m_{jk}\}$, aby byla podmínka (2.4) splněna. Pokud ale bude $m_{ij} = 1$ a $m_{jk} = 1$ nebo bude platit $m_{ij} > 1$ a $m_{jk} > 1$, potom nelze zvolit libovolné $m_{ik} \geq \max\{m_{ij}, m_{jk}\}$. Díky (2.6) bude podmínka (2.4) splněna pouze tehdy, když bude platit $m_{ik} = m_{ij} m_{jk}$. Analogická vlastnost díky reciprocitě platí pro vztah (2.5). Tj. kromě speciálního případu, kdy jedno z nepřímých srovnání představuje indiferenci a druhé ne, se T-multiplikativní tranzitivita redukuje na konzistenci (1.7), jak si nyní ukážeme:

- Nechť $m_{ij} = 1$ a zároveň $m_{jk} = 1$ pro nějaké $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

  Pak z (2.4) plyne $m_{ik} \geq 1$ a z (2.5) plyne, že $m_{ik} \leq 1$, tj. dohromady $m_{ik} = 1$ pro uvažované $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Přitom indexy $i, j, k$ byly zvoleny libovolně. Pro každé $i, j, k = 1, 2, \dots, n$ tedy platí, že pokud $m_{ij} = 1$ a zároveň $m_{jk} = 1$, pak $m_{ik} = m_{ij}m_{jk}$, tj. podmínka konzistence (1.7).

- Nyní uvažujme $m_{ij} > 1$ a zároveň $m_{jk} > 1$ pro nějaké $i, j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Dále nechť pro tato $i, j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$ platí $m_{ik} \neq m_{ij}m_{jk}$.

  Z podmínky (2.4) dostaneme $m_{ik} \geq \max\{m_{ij}, m_{jk}\} > 1$. Dále z reciprocity (1.6) platí $m_{ji} < 1$ a $m_{kj} < 1$. Pro tuto dvojici z podmínky (2.5) plyne $m_{ki} \leq \min\{m_{kj}, m_{ji}\} < 1$. Následně pro $m_{ki} < 1$ a $m_{ij} > 1$ z podmínky (2.6) plyne $m_{kj} = m_{ki}m_{ij}$. Dále dle předpokladu platí $m_{ik} \neq m_{ij}m_{jk}$, tj. díky reciprocitě $m_{ki} \neq m_{kj}m_{ji}$. Po dosazení této nerovnosti do vztahu $m_{kj} = m_{ki}m_{ij}$ dostaneme $m_{kj} \neq (m_{kj}m_{ji})m_{ij} = m_{kj}(m_{ij}m_{ji}) = m_{kj}$. Došli jsme tedy ke sporu. Přitom indexy $i, j, k$ byly zvoleny libovolně. Pro každé $i, j, k = 1, 2, \dots, n$ tedy platí, že aby pro $m_{ij} > 1$ a zároveň $m_{jk} > 1$ byly zároveň splněny podmínky (2.4) a (2.6), muselo by platit $m_{ik} = m_{ij}m_{jk}$, tj. podmínka konzistence (1.7).

- Nyní nechť $m_{ij} < 1$ a zároveň $m_{jk} < 1$ pro nějaké $i, j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

  Potom lze analogicky jako v předchozím případě ukázat, že pro každé $i, j, k = 1, 2, \dots, n$ platí, že aby byly zároveň splněny podmínky (2.5) a (2.6), muselo by platit $m_{ik} = m_{ij}m_{jk}$, tj. podmínka konzistence (1.7).

T-multiplikativní tranzitivitu je díky právě ukázanému možno přepsat do tvaru, který bude hodnotiteli jednoznačněji ukazovat, jak mají být intenzity preference zadány. Přitom je možno úplně vynechat podmínku (2.5), která je díky reciprocitě (1.6) ekvivalentní podmínce (2.4). T-multiplikativní tranzitivitu pak lze přepsat do tvaru

$$(m_{ij} = 1 \wedge m_{jk} = 1) \vee (m_{ij} > 1 \wedge m_{jk} > 1) \implies m_{ik} = m_{ij}m_{jk}, \tag{2.7}$$

$$(m_{ij} = 1 \wedge m_{jk} > 1) \vee (m_{ij} > 1 \wedge m_{jk} = 1) \implies m_{ik} \geq \max\{m_{ij}, m_{jk}\} \tag{2.8}$$

pro každé $i, j, k = 1, 2, \dots, n$. Podmínka (2.7) je pro intenzity preference větší než 1 moc silná a nedá se v reálných situacích dodržet. Podmínka (2.8) se zase může pro uvažované intenzity preferencí zdát slabá, protože pro její splnění postačuje z indiference a preference dostat preferenci s libovolnou intezitou větší nebo rovnou předchozí intenzitě preference.

**Některé další přístupy**

Shiraishi a Obata [85] definovali index nekonzistence na základě koeficientu $c_3$ charakteristického polynomu matice $M$, který přísluší $\lambda^{n-3}$. Tento koeficient vyjádřili pomocí prvků matice $M$ a ukázali, že pro nekonzistentní matice je záporný.

Barzilai [3] zavedl *index relativní chyby*, který vyžaduje konstrukci pomocné matice získané z matice $M$ zlogaritmováním jejích prvků a také konstrukci vektoru hodnocení pomocí aritmetického průměru řádků z takto vytvořené matice.

## 2.2. Konzistence aditivních preferencí

Uvažujme aditivní preferenční matici $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$, jejíž prvky vyjadřují aditivní preference definované na škále $\langle 0, 1\rangle$, jejíž interpretace je popsána v tabulce 1.4. Matice $A$ by měla splňovat podmínku aditivní konzistence (1.11), která je ale na uvažované škále příliš silná. Proto byly zavedeny další podmínky, při jejichž splnění lze matici považovat v jistém smyslu za přijatelně konzistentní. Jejich přehled lze nalézt v [35, 91]. V případě aditivních preferencí se pro ověření racionality hodnotitele nejčastěji vychází z tranzitivity preferencí: Je-li $x$ preferováno před $y$ a je-li $y$ preferováno před $z$, potom musí platit také, že $x$ preferováno před $z$. Některé přístupy k ověřování přijatelné konzistence matice $A$ budou nyní uvedeny.

**Trojúhelníková nerovnost** [58]

Tato vlastnost je pro každé $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$ definována takto

$$a_{ij} + a_{jk} \geq a_{ik}. \tag{2.9}$$

a shrnuje následující geometrickou interpretaci: Varianty $A_i$, $A_j$ a $A_k$ představují vrcholy trojúhelníku s délkami příslušných stran $a_{ij}$, $a_{jk}$ a $a_{ik}$. Proto by mělo platit, že strana spojující vrcholy $A_i$ a $A_k$ nesmí být delší než součet délek stran spojujících vrchol $A_i$ s $A_j$ a vrchol $A_j$ s $A_k$.

Jedná se o slabší podmínku, než je aditivní konzistence. Platí totiž: Je-li matice $A$ aditivně konzistentní dle (1.11), potom splňuje také trojúhelníkovou nerovnost (2.9). Trojúhelníková nerovnost však povoluje také z $a_{xy} = 1$ a $a_{yz} = 1$ odvodit $a_{xz} = 0$, tj. dostali bychom $x \succ y$, $y \succ z$ a $z \succ x$. Takto by ale byla porušena tranzitivita a preference by nebyly v tomto smyslu zadány racionálně.

**Slabá tranzitivita (slabá stochastická tranzitivita)** [95]

Tato vlastnost je pro každé $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$ definována takto

$$a_{ij} \geq 0{,}5 \wedge a_{jk} \geq 0{,}5 \quad \Longrightarrow \quad a_{ik} \geq 0{,}5 \tag{2.10}$$

a je interpretována takto: Je-li $A_i$ preferována před $A_j$ nebo je s ní indiferentní a $A_j$ je preferována před $A_k$ nebo je s ní indiferentní, potom by $A_i$ měla být preferována před $A_j$ nebo s ní být indiferentní.

Opět se jedná o slabší podmínku než je aditivní konzistence: Je-li matice $A$ aditivně konzistentní dle (1.11), potom je také slabě tranzitivní (2.10).

**Max-min tranzitivita** [18]

Tato vlastnost je pro každé $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$ definována takto

$$a_{ik} \geq \min\{a_{ij}, a_{jk}\} \tag{2.11}$$

a je interpretována takto: Hodnota preference mezi $A_i$ a $A_k$ by měla být rovna alespoň minimu z hodnot preferencí nepřímých srovnání provedených mezi $A_i$ a $A_j$ a mezi $A_j$ a $A_k$.

Jedná se o silnější podmínku než je slabá tranzitivita: Je-li matice $A$ max-min tranzitivní (2.11), potom je také slabě tranzitivní (2.10). Z aditivní reciprocity (1.10) a max-min tranzitivity (2.11) pro každé $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$ plyne

$$a_{ki} = 1 - a_{ik} \leq 1 - \min\{a_{ij}, a_{jk}\} = \max\{a_{kj}, a_{ji}\}.$$

Pro reciprokou matici $A$ tedy může být podmínka max-min tranzitivity pro každé $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$ psána ve tvaru

$$\min\{a_{ij}, a_{jk}\} \leq a_{ik} \leq \max\{a_{ij}, a_{jk}\}.$$

Max-min tranzitivita je jednou z tradičních podmínek používaných k určení racionality a konzistence fuzzy preferenční relace [108]. Tato podmínka je ale pro aditivní preference příliš silná, jak bylo ukázáno v [43]. Uvažujme varianty $x, y, z$, kde $x \succ y \succ z$, a jejich aditivní preference jsou vyjádřeny maticí $A$:

$$A = \begin{array}{c} \\ x \\ y \\ z \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}7 & 1 \\ 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}6 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}5 \end{pmatrix} \end{array}$$

Z prvního řádku horního trojúhelníku matice $A$ je vidět, že $x \succ y \succ z$, stejně tak ze druhého řádku, že $x \succ y$. Z tohoto pohledu je tedy $A$ zadána racionálně. Tato matice splňuje slabou tranzitivitu i trojúhelníkovou nerovnost. Na druhou stranu díky tomu, že $a_{13} = 1$, není $A$ max-min tranzitivní, neboť $a_{31} = 0 < \min\{a_{32}, a_{21}\} = \min\{0{,}4, 0{,}7\} = 0{,}4$.

**Max-max tranzitivita** [18]

Tato vlastnost je pro každé $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$ definována takto

$$a_{ik} \geq \max\{a_{ij}, a_{jk}\} \tag{2.12}$$

a je interpretována takto: Hodnota preference mezi $A_i$ a $A_k$ by měla být rovna alespoň maximu z hodnot preferencí nepřímých srovnání provedených mezi $A_i$ a $A_j$ a mezi $A_j$ a $A_k$.

Jedná se o silnější podmínku než je max-min tranzitivita a platí: Je-li matice $A$ max-max tranzitivní (2.12), potom je také max-min tranzitivní (2.11) a slabě tranzitivní (2.10). Max-max tranzitivita je ale pro reciprokou matici $A$ moc silná a pro dvojici různých intenzit preferencí nemůže být splněna. Z aditivní reciprocity (1.10) a max-max tranzitivity (2.12) totiž plyne pro každé $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$

$$a_{ki} = 1 - a_{ik} \leq 1 - \max\{a_{ij}, a_{jk}\} = \min\{a_{kj}, a_{ji}\}.$$

Zároveň ale z (2.12) plyne $a_{ki} \geq \max\{a_{kj}, a_{ji}\}$ pro každé $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$.

**Restriktivní max-min tranzitivita (střední stochastická tranzitivita)** [95]

Tato vlastnost je pro každé $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$ definována takto

$$a_{ij} \geq 0{,}5 \wedge a_{jk} \geq 0{,}5 \quad \Longrightarrow \quad a_{ik} \geq \min\{a_{ij}, a_{jk}\} \tag{2.13}$$

a je interpretována takto: Je-li $A_i$ preferována před $A_j$ s hodnotou preference $a_{ij}$ nebo je s ní indiferentní a $A_j$ je preferována před $A_k$ s hodnotou preference $a_{jk}$ nebo je s ní indiferentní, potom by $A_i$ měla být preferována před $A_k$ s hodnotou preference větší nebo rovnou minimu z obou předchozích.

Jedná se o slabší podmínku než je max-min tranzitivita: Je zřejmé, že, je-li matice $A$ max-min tranzitivní (2.11), pak je také restriktivně max-min tranzitivní (2.13). Dále platí, že je-li matice $A$ aditivně konzistentní dle (1.11), potom je také restriktivně max-min tranzitivní (2.13). Je-li matice $A$ restriktivně max-min tranzitivní (2.13), potom je také slabě tranzitivní (2.10). Tato podmínka je pro reciproké matice definována smysluplně a v reálných situacích je dodržitelná. Mohla by být považovaná za lepší podmínku pro přijatelnou konzistenci aditivní preferenční matice než slabá tranzitivita.

**Restriktivní max-max tranzitivita (silná stochastická tranzitivita)** [95]

Tato vlastnost je pro každé $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$ definována takto

$$a_{ij} \geq 0{,}5 \wedge a_{jk} \geq 0{,}5 \quad \Longrightarrow \quad a_{ik} \geq \max\{a_{ij}, a_{jk}\} \tag{2.14}$$

a je interpretována takto: Je-li $A_i$ preferována před $A_j$ s hodnotou preference $a_{ij}$ nebo je s ní indiferentní a $A_j$ je preferována před $A_k$ s hodnotou preference $a_{jk}$ nebo je s ní indiferentní, potom by $A_i$ měla být preferována před $A_k$ s hodnotou preference větší nebo rovnou maximu z obou předchozích.

Jedná se o silnější podmínku než je restriktivní max-min tranzitivita, ale o slabší podmínku než je max-max tranzitivita. Je zřejmé, že, je-li matice $A$ max-max tranzitivní (2.12), pak je také restriktivně max-max tranzitivní (2.14). Dále platí, že je-li matice $A$ aditivně konzistentní dle (1.11), potom je také restriktivně max-max tranzitivní (2.14). Je-li matice $A$ restriktivně max-max tranzitivní (2.14), potom je také restriktivně max-min tranzitivní (2.13) a slabě tranzitivní (2.10). Tato podmínka je pro reciproké matice definována smysluplně a v reálných situacích je dodržitelná. Mohla by být tudíž považovaná za lepší podmínku pro přijatelnou konzistenci aditivní preferenční matice než slabá tranzitivita a restriktivní max-min tranzitivita.

**T-aditivní tranzitivita** [41]

Chiclana a kol. [41] definovali *T-aditivní tranzitivitu* pro každé $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$ následně:

$$a_{ij} \geq 0{,}5 \wedge a_{jk} \geq 0{,}5 \quad \Longrightarrow \quad a_{ik} \geq \max\{a_{ij}, a_{jk}\}, \tag{2.15}$$

$$a_{ij} \leq 0{,}5 \wedge a_{jk} \leq 0{,}5 \quad \Longrightarrow \quad a_{ik} \leq \min\{a_{ij}, a_{jk}\}, \tag{2.16}$$

$$(a_{ij} > 0{,}5 \wedge a_{jk} < 0{,}5) \vee (a_{ij} < 0{,}5 \wedge a_{jk} > 0{,}5) \quad \Longrightarrow \quad a_{ik} = a_{ij} + a_{jk} - 0{,}5. \tag{2.17}$$

Tato vlastnost je pro $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$ interpretována takto: Je-li $A_i$ preferována před $A_j$ s hodnotou preference $a_{ij}$ nebo je s ní indiferentní a $A_j$ je preferována před $A_k$ s hodnotou preference $a_{jk}$ nebo je s ní indiferentní, potom by $A_i$ měla být preferována před $A_k$ s hodnotou preference větší nebo rovnou maximu z obou předchozích hodnot preference. Analogická vlastnost platí pro hodnoty menší než 0,5. Dále pokud je jedna z hodnot nepřímých srovnání větší než 0,5 a druhá menší než 0,5, potom je požadováno, aby pro přímé srovnání byla splněna podmínka aditivní konzistence.

Platí, že je-li matice $A$ aditivně konzistentní dle (1.11), potom je také T-aditivně tranzitivní dle (2.15)–(2.17). Dále lze analogicky jako u T-multiplikativní tranzitivity (2.4)–(2.6) ukázat, že T-aditivní tranzitivita se ve většině případů redukuje na aditivní konzistenci (1.11) a lze ji přepsat do tvaru

$$(a_{ij} = 0{,}5 \wedge a_{jk} = 0{,}5) \vee (a_{ij} > 0{,}5 \wedge a_{jk} > 0{,}5) \Longrightarrow a_{ik} = a_{ij} + a_{jk} - 0{,}5, \tag{2.18}$$

$$(a_{ij} = 0{,}5 \wedge a_{jk} > 0{,}5) \vee (a_{ij} > 0{,}5 \wedge a_{jk} = 0{,}5) \Longrightarrow a_{ik} \geq \max\{a_{ij}, a_{jk}\} \tag{2.19}$$

pro každé $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$. Podmínka (2.18) je pro intenzity preference větší než 0,5 moc silná a nedá se v reálných situacích dodržet. Podmínka (2.19) se zase může pro uvažované intenzity preferencí zdát slabá, protože pro její splnění postačuje z indiference a preference dostat preferenci s libovolnou intezitou větší nebo rovnou předchozí intenzitě preference.

**Některé další přístupy**

Chiclana a kol. [42] definovali skupinu vlastností, které požadují po aditivní prefenční matici, aby ji mohli považovat za přijatelně konzistentní. Na základě toho definovali tzv. *U-konzistenci*. Herrera-Viedma a kol [36] definovali index nekonzistence aditivní preferenční matice na základě podmínky aditivní konzistence. Tanino [94] zavedl podmínku multiplikativní konzistence pro aditivní preferenční matice. Je-li však požadována tato podmínka, potom jsou pro prvky preferenční matice uvažovány jiné významy než bylo zavedeno v kapitole 1.2.2 a stejně tak se jiným způsobem počítají hodnocení variant.

## 2.3. Slabá konzistence

V této kapitole bude definována *slabá konzistence*, nová koncepce, která představuje původní přístup k posuzování konzistence matic párového porovnání.

### 2.3.1. Motivace

Multiplikativní preferenční matice $M = \{m_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ je konzistentní, pokud pro každé $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$ platí $m_{ij}m_{jk} = m_{ik}$. Aditivní preferenční matice $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ je aditivně konzistentní, pokud pro každé $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$ platí $a_{ij} + a_{jk} - 0{,}5 = a_{ik}$. Tyto požadavky nejsou na omezených škálách v reálných situacích splnitelné a otázka posouzení přijatelnosti konzistence představuje proto jeden z hlavních problémů této metody. Z toho důvodu se autoři snaží konstruovat různé alternativní ukazatele konzistence.

Autoři zabývající se studiem multiplikativních preferenčních matic většinou vycházeli ze zavedené podmínky konzistence a zaměřili se na zkonstruování koeficientu, který vyjadřuje míru konzistence matice. Vycházeli tak tedy z toho, že zavedená podmínka konzistence je pro kvantitativní vyjádření preferencí mezi dvěma prvky smysluplně definovaná, ale je třeba nějakým způsobem měřit její míru, protože na omezené škále není plně dosažitelná. Máme-li několik preferenčních matic, potom je možné porovnat jejich indexy nekonzistence a určit, která z nich se více blíží konzistentní matici. Obtížným úkolem je v tomto případě stanovit, do jaké hodnoty uvažovaného indexu nekonzistence bude matice považována za ještě přijatelně konzistentní. Při praktickém ověření dostatečné konzistence matice pomocí nějakého indexu nekonzistence je nevýhodou to, že koeficient nelze často vyhodnotit již v průběhu zadávání preferenční matice, ale až po vyplnění celé matice. Pokud matice není přijatelně konzistentní, potom je třeba ji vyplnit znovu. Respektive je třeba změnit některé její intenzity preference a ověřit, jestli je míra konzistence nové matice větší. Další nevýhodou ověřování dostatečné konzistence preferenční matice pomocí koeficientů nekonzistence je to, že v tomto případě se nezohledňuje, jestli zadané preference zachovávají tranzitivitu.

Autoři zabývající se studiem aditivních preferenčních matic se naopak zase zaměřili v obdobně problematické situaci s dosažením aditivní konzistence spíše na to, jak oslabit tuto podmínku tak, aby byla dosažitelná i na omezené hodnotící škále. Jako minimální požadavek pro takovou podmínku konzistence bylo stanoveno právě zachování tranzitivity preferencí. Jak je shrnuto v kapitole 2.2, vhodnými kandidáty pro reciproké preferenční matice jsou restriktivní max-min tranzitivita (2.13) a restriktivní max-max tranzitivita (2.14). Takto nadefinované podmínky konzistence jsou ověřitelné již při zadávání preferenční matice. Na druhou stranu tyto podmínky říkají pouze, které matice jsou dle dané podmínky považovány za přijatelně konzistentní. Není ale dle nich možné srovnat několik takto přijatelně konzistentních matic a říct, která z nich je bližší požadavku aditivní konzistence.

V této části dizertační práce budeme chtít nadefinovat novou podmínku konzistence, která by byla použitelná pro multiplikativní a modifikovaně i pro aditivní preferenční matice. Klasická podmínka konzistence je vázána na číselné vyjádření zadaných preferencí. V praxi však hodnotitel zejména v případě multiplikativních preferenčních matic vyjadřuje své preference jazykově, nejčastěji pomocí jazykových deskriptorů Saatyho škály. Proto se u nově zavedeného přístupu zaměříme na to, aby nově navržená podmínka konzistence představovala přirozený požadavek zejména s ohledem na tato slovní hodnocení. Vezmeme-li si Saaty škálu, která je nejpoužívanější škálou pro multiplikativní preferenční matice, potom vidíme, že jejím slovním hodnotám klasická (multiplikativní) konzistence příliš nevyhovuje. Např. z dvojice mírných preferencí dle podmínky konzistence vyplývá extrémní preference, tj. $s_{xy} = 3$ a $s_{yz} = 3$ implikuje $s_{xz} = 9$. Přitom bychom očekávali spíše to, že výsledkem dvou mírných preferencí bude silná preference, tj. $s_{xz} = 5$, ale ne extrémní. Nová podmínka konzistence tedy musí být slabší než podmínka konzistence tak, aby jí bylo možné dosáhnout v reálných situacích a aby odpovídala slovním hodnotám škály. Zároveň ale musí být dostatečně silná, aby vypočtený vektor hodnocení podával relevantní informace. Proto budeme při definici nové podmínky konzistence vycházet ze základů racionálního chování hodnotitele, které byly definovány von Neumannem a Morgensternem, viz kapitola 1.1. Zde tedy navážeme na autory zabývající se studiem konzistence pro aditivní preferenční matice, protože stejně jako oni požadujeme zachování tranzitity preferencí ve spojení s kvantitativní stránkou zadávaných preferencí. Vyjdeme-li z podmínek, které definovali ostatní autoři pro aditivní preferenční matice, tak se jako vhodné požadavky jeví restriktivní max-min tranzitivta a restriktivní max-max trazitivita. Restriktivní max-max tranzitivita je přitom silnější podmínka a je stále dosažitelná v reálných situacích. Navíc lépe odpovídá slovním hodnotám hodnotící škály. Na jejím základě tedy definujeme *slabou konzistenci*.

Podmínku konzistence vycházející z vlastnosti restriktivní max-max tranzitivity (2.14) se snažili zkonstruovat Chiclana a kol. [41]. Ti definovali T-multiplikativní tranzitivitu (2.4)-(2.6) a T-aditivní tranzitivitu (2.15)-(2.17). Bereme-li v preferenční matici obě hodnoty preference z $\langle 1, \sigma \rangle$, $\sigma > 1$, resp. $\langle 0{,}5, 1 \rangle$, potom u výsledné preference často dochází k porušení podmínky konzistence (1.7), resp. (1.11). Proto pro prvky ze stejné strany škály vzhledem k hodnotě indiference tito autoři požadovali splnění pouze restriktivní max-max tranzitivity. Pro prvky z různé strany škály vzhledem k hodnotě indiference pak už vyžadovali přímo splnění podmínky konzistence. Pro ně totiž při použití multiplikativní konzistence (1.7) vyjde hodnota z $\langle \frac{1}{\sigma}, \sigma \rangle$, $\sigma > 1$, a při použití aditivní konzistence (1.11) hodnota z $\langle 0, 1 \rangle$. Problémem této definice ale je, že když si uvědomíme reciprocitu preferenční matice, tak se v podstatě redukuje přímo na podmínku multiplikativní, resp. aditivní, konzistence. Jak bylo ukázáno v kapitole 2.1, aby byly splněny zároveň všechny podmínky (2.4)–(2.6), resp. (2.15)–(2.17), musí z každé dvojice nepřímých porovnání, kde právě jedno nepřímé porovnání nepředstavuje indiferenci, plynout pro přímé porovnání hodnota odpovídájící konzistenci (1.7), resp. (1.11).

Další podmínku konzistence vycházející z vlastnosti restriktivní max-max tranzitivity (2.14) stanovili Basile a D'Apuzzo [4]. Tito autoři ale pracovali pouze s ostrým uspořádáním prvků, tj. s takovou množinou prvků, kde žádné dva různé prvky nejsou stejně preferované. Pro takové prvky potom stanovili oslabenou konzistenci. Podmínku restriktivní max-max tranzitivity přitom zpřísnili tak, že intenzita preference přímého srovnání dvou prvků musí být větší než intenzita preference nepřímých srovnání. Tato podmínka ale opět naráží na to, že v reálných situacích většinou není dodržitelná. Jakmile se v hodnotícím problému objeví extrémní preference, potom ji opět nelze dodržet. Další problém je i to, že se neuvažují dva stejně hodnocené prvky. V reálných hodnotících situacích jsou takovéto situace zcela běžné. Např. pokud dva uchazeči o zaměstnání splňují nastavené vstupní požadavky stejně, musí být do hodnotícího modelu zahrnuti oba dva.

My se nyní pokusíme nadefinovat novou podmínku konzistence matic párových porovnání, která bude také vycházet z restriktivní max-max tranzitivity (2.14). Přitom budeme zohledňovat i situaci, kdy v modelu máme několik stejně hodnocených prvků. Restriktivní max-max tranzitivita dovoluje při kombinaci indiference a preference dostat libovolnou preferenci s intenzitou rovnou alespoň té původní uvažované hodnotě preference. My v takovémto případu budeme požadovat přímo rovnost uvažované intenzitě preference nepřímého srovnání. Analogickou podmínku slabé konzistence budeme požadovat jak pro multiplikativní, tak po aditivní preferenční matici. Matice splňující podmínku slabé konzistence bude pak v obou případech považována za přijatelně konzistentní. V případě potřeby je možné pro takovou matici vzít nějaký index nekonzistence a vypočítat jeho hodnotu. Získanou hodnotu je potom možno porovnávat s hodnotami ostatních matic párového porovnání a určit, která z nich je konzistentnější.

### 2.3.2. Slabá konzistence pro multiplikativní preference

Nyní bude zavedena slabá konzistence pro multiplikativní preference. Pokud bude tato podmínka pro multiplikativní preferenční matici splněna, potom bude matice považována za přijatelně konzistentní.

**Definice 2.1.** Nechť $M = \{m_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ je multiplikativní preferenční matice. Potom řekneme, že $M$ je *slabě konzistentní*, jestliže pro každé $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$ platí

$$m_{ij} > 1 \wedge m_{jk} > 1 \quad \Longrightarrow \quad m_{ik} \geq \max\{m_{ij}, m_{jk}\}; \tag{2.20}$$

$$(m_{ij} = 1 \wedge m_{jk} \geq 1) \vee (m_{ij} \geq 1 \wedge m_{jk} = 1) \quad \Longrightarrow \quad m_{ik} = \max\{m_{ij}, m_{jk}\}. \tag{2.21}$$

**Příklad:** Uvažujme následující prvky multiplikativní preferenční matice $M = \{m_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$. Bude ověřeno, jestli splňují podmínku slabé konzistence.

1. Nechť $m_{ij} = 3$, $m_{jk} = 5$ a $m_{ik} = 7$. Tato trojice splňuje podmínku (2.20) slabé konzistence, neboť $m_{ik} = 7 \geq \max\{3, 5\}$.
2. Nechť $m_{ij} = 5$, $m_{jk} = 9$ a $m_{ik} = 7$. Tato trojice nesplňuje podmínku (2.20) slabé konzistence, neboť $m_{ik} = 7 < \max\{5, 9\}$. $\triangle$

Slabá konzitence představuje oslabení podmínky konzistence. Je-li preferenční matice konzistentní, pak je také slabě konzistentní, jak vyjadřuje následující věta.

**Věta 2.1.** *Nechť $M = \{m_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ je multiplikativní preferenční matice, která je konzistentní, tj. $m_{ik} = m_{ij}m_{jk}$ pro každé $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$. Pak je $M$ také slabě konzistentní.*

**Důkaz:** Nechť $M$ je konzistentní, tj. $m_{ik} = m_{ij}m_{jk}$ pro každé $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$. Potom z $m_{ij} > 1$ a $m_{jk} > 1$ plyne $m_{ik} = m_{ij}m_{jk} > \max\{m_{ij}, m_{jk}\}$, tj. první podmínka (2.20) slabé konzistence je splněna. Dále jestliže $m_{ij} = 1$ a $m_{jk} \geq 1$, pak $m_{ik} = m_{jk} = \max\{m_{ij}, m_{jk}\}$. Stejně tak pokud $m_{ij} \geq 1$ a $m_{jk} = 1$, pak $m_{ik} = m_{ij} = \max\{m_{ij}, m_{jk}\}$. Tedy platí také druhá podmínka (2.21) slabé konzistence. $\square$

Slabá konzistence také představuje oslabení podmínky konzistence pro slovní popisy hodnotící škály. Pro Saatyho škálu definovanou v tabulce 1.2 platí, že pokud je $x$ slabě preferováno před $y$ a $y$ je slabě preferováno před $z$, tak musí pro dodržení konzistence platit, že $x$ je extrémně preferováno před $z$. Aby byla dodržena slabá konzistence, potom stačí, aby bylo $x$ slabě preferováno před $z$.

Z multiplikativní preferenční matice $M$, významy jejíchž prvků jsou definované v tabulce 1.1, lze získat incidenční matice binárních relací preference $\succ$ a indiference $\sim$. Pokud je multiplikativní preferenční matice $M$ slabě konzistentní, pak tyto klasické relace $\succ$ a $\sim$ splňují axiomy von Neumanna a Morgensterna pro racionální chovální hodnotitele. Tedy binární relace $\succeq$, která je sjednodením relací $\succ$ a $\sim$, představuje kvaziuspořádání.

**Věta 2.2.** *Nechť $M = \{m_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ je slabě konzistentní multiplikativní preferenční matice, která slouží k párovému srovnání variant $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Označme $A_i \succ A_j$ právě tehdy, když $m_{ij} > 1$, a $A_i \sim A_j$ právě tehdy, když $m_{ij} = 1$, pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Potom preferenční uspořádání prvků $A_1, A_2 \ldots, A_n$ určené binární relací $\succeq$, která je sjednocením binárních relací $\succ$ a $\sim$, tvoří kvaziuspořádání.*

**Důkaz:** Nechť $M = \{m_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ je multiplikativní preferenční matice, která je slabě konzistentní. $M$ je reciproká, tedy platí $m_{ij} = \frac{1}{m_{ji}}$ pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Pro elementy matice $M$ platí $m_{ij} \in \langle \frac{1}{\sigma}, \sigma \rangle$, $\sigma > 1$, pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Označíme-li $A_i \succ A_j$ právě tehdy, když $m_{ij} > 1$, a $A_i \sim A_j$ právě tehdy, když $m_{ij} = 1$, pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$, potom je možno zavést matice $P = \{p_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$, $Q = \{q_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ a $N = \{n_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ takové, že pro jejich prvky pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$ platí

$$\begin{aligned}
p_{ij} &= 1 \Leftrightarrow m_{ij} > 1 \Leftrightarrow A_i \succ A_j, & p_{ij} &= 0 \Leftrightarrow m_{ij} \leq 1 \Leftrightarrow \rceil(A_i \succ A_j),\\
q_{ij} &= 1 \Leftrightarrow m_{ij} = 1 \Leftrightarrow A_i \sim A_j, & q_{ij} &= 0 \Leftrightarrow m_{ij} \neq 1 \Leftrightarrow \rceil(A_i \sim A_j),\\
n_{ij} &= 1 \Leftrightarrow m_{ij} < 1 \Leftrightarrow A_j \succ A_i, & n_{ij} &= 0 \Leftrightarrow m_{ij} \geq 1 \Leftrightarrow \rceil(A_j \succ A_i).
\end{aligned}$$

Odtud je vidět, že $P$ je incidenční matice relace $\succ$ a $Q$ je incidenční matice relace $\sim$. Nyní je možno definovat relaci $R$, která bude sjednocením relací $\succ$ a $\sim$ a jejíž incidenční maticí bude $P + Q$. Potom $N$ je incidenční matice relace $R^* := \rceil R = \rceil(\succ \cup \sim)$. Dále je vidět, že díky tomu, že $M$ je reciproká, platí pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$

$$A_i \succ A_j \quad \Leftrightarrow \quad (A_i, A_j) \in R \wedge (A_j, A_i) \in R^* \quad \Leftrightarrow \quad (A_i, A_j) \in R \wedge (A_j, A_i) \notin R,$$
$$A_i \sim A_j \quad \Leftrightarrow \quad (A_i, A_j) \in R \wedge (A_j, A_i) \in R.$$

Pak tedy dle vět 1.1 a 1.2 je relace $R$ kvaziuspořádání právě tehdy, když relace $\succ$ a $\sim$ splňují vlastnosti 1.–4. ve větě 1.1. Nyní bude ukázáno, že tyto vlastnosti jsou splněny:

1) Pro každý prvek matice $M$ platí $m_{ij} \in \langle \frac{1}{\sigma}, \sigma \rangle$, $\sigma > 1$. Přitom pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$ platí $m_{ij} > 1$ právě tehdy, když $A_i \succ A_j$, $m_{ij} < 1$ právě tehdy, když $A_j \succ A_i$ a $m_{ij} = 1$ právě tehdy, když $A_i \sim A_j$. Je tedy splněna trichotomie.

2) a) Z reciprocity matice $M$ plyne $m_{ii} = 1$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$. Tedy $A_i \sim A_i$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$. Tzn. relace $\sim$ je reflexivní.

   b) Dále z reciprocity matice $M$ plyne: pokud $m_{ij} = 1$, pak $m_{ji} = \frac{1}{m_{ij}} = 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$. To je ekvivalentní tomu, že pokud $A_i \sim A_j$, potom také $A_j \sim A_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Tedy relace $\sim$ je symetrická.

   c) Nakonec z podmínky (2.21) slabé konzistence plyne: pokud $m_{ij} = 1$ a $m_{jk} = 1$, potom $m_{ik} = \max\{m_{ij}.m_{jk}\} = 1$. Platí tedy, že pokud $A_i \sim A_j$ a $A_j \sim A_k$, potom také $A_i \sim A_k$, $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$. Relace $\sim$ je tedy také tranzitivní.

   Dohromady tedy tyto vlastnosti říkají, že relace $\sim$ je relace ekvivalence.

3) Z podmínky (2.20) slabé konzistence plyne: pokud $m_{ij} > 1$ a $m_{jk} > 1$, pak $m_{ik} \geq \max\{m_{ij}, m_{jk}\} > 1$. Potom tedy pokud $A_i \succ A_j$ a $A_j \succ A_k$, pak také $A_i \succ A_k$, $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$. Tedy relace $\succ$ je tranzitivní.

4) a) Z podmínky (2.21) slabé konzistence plyne: pokud $m_{ij} = 1$ a $m_{jk} > 1$, potom $m_{ik} \geq \max\{m_{ij}, m_{jk}\} > 1$, $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$. Tedy pokud $A_i \sim A_j$ a $A_j \succ A_k$, potom $A_i \succ A_k$, $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$.

b) Z podmínky (2.21) slabé konzistence plyne: pokud $m_{ij} > 1$ a $m_{jk} = 1$, potom $m_{ik} \geq \max\{m_{ij}, m_{jk}\} > 1$, $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$. Tedy pokud $A_i \succ A_j$ a $A_j \sim A_k$, potom $A_i \succ A_k$, $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$.

Relace $\succ$ a $\sim$ tedy splňují smíšenou tranzitivitu.

Nyní z věty 1.1 plyne, že relace $R$, kterou můžeme pro jednoduchost značit $\succeq$, je relace kvaziuspořádání. $\square$

Důsledkem předchozí věty je, že multiplikativní preferenční matice, která je slabě konzistentní, zachovává jak tranzitivitu preference, tak tranzitivitu indiference.

**Důsledek 2.1.** *Nechť $M = \{m_{ij}\}_{i,j=1}^n$ je slabě konzistentní multiplikativní preferenční matice, která slouží k párovému srovnání variant $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Označme $A_i \succ A_j$ právě tehdy, když $m_{ij} > 1$, a $A_i \sim A_j$ právě tehdy, když $m_{ij} = 1$, pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Potom platí následující tvrzení:*

1. *Binární relace preference $\succ$ je tranzitivní, tj. pro každé $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$ platí $A_i \succ A_j \wedge A_j \succ A_k \Longrightarrow A_i \succ A_k$ a $m_{ij} > 1 \wedge m_{jk} > 1 \Longrightarrow m_{ik} > 1$.*
2. *Binární relace indiference $\sim$ je tranzitivní, tj. pro každé $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$ platí $A_i \sim A_j \wedge A_j \sim A_k \Longrightarrow A_i \sim A_k$ a $m_{ij} = 1 \wedge m_{jk} = 1 \Longrightarrow m_{ik} = 1$.*

**Důkaz:** Viz důkaz věty 2.2, body 2c) a 3). $\square$

Slabá konzistence jako jednu z vlastností tedy přináší tranzitivitu preference. Pokud by přijatelná konzistence preferenční matice byla ověřována pomocí nějakého indexu nekonzistence vztaženého ke stanovené hranici, vzhledem k níž je matice považována za dostatečně konzistentní, potom by matice $M$ nemusela splňovat tranzitivitu. Takto může být tedy za přijatelně konzistentní považována i matice, kde hodnotitel dělá nekonzistentní rozhodnutí v tom smyslu, že při přímém srovnání označí první prvek preferován před druhým, ale z nepřímého srovnání vyplývá, že je druhý prvek preferován před prvním. V tomto ohledu může být slabá konzistence lepším oslabením požadavku konzistence než index nekonzistence, jehož hodnota pod určitou hranicí bude považována za kritérium přijatelné konzistence matice. Hodnotitel by tedy měl nejprve zadat slabě konzistentní preferenční matici, a až potom počítat indexy nekonzistence. Výše popsaná situace bude nyní demonstrována na Saatyho podílovém indexu nekonzistence $CR$, kde pokud $CR \leq 0{,}1$, potom je matice $M$ považována za dostatečně konzistentní.

**Příklad:** Mějme následující Saatyho matice $S = \{s_{ij}\}_{i,j=1}^4$ a $S' = \{s'_{ij}\}_{i,j=1}^4$. Bude ukázáno, že matice $S$ je považována za dostatečně konzistentní dle Saatyho podílového indexu nekonzistence (2.2), ale není slabě konzistentní. Obdobně bude ukázáno, že matice $S'$ je slabě konzistentní, ale není považována za dostatečně konzistentní dle Saatyho podílového indexu nekozistence (2.2).

$$S = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} x & y & z & w \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \\ w \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ \frac{1}{2} & 1 & 4 & 3 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 1 & 2 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad S' = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} x & y & z & w \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \\ w \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 \\ \frac{1}{5} & 1 & 5 & 7 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{5} & 1 & 7 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

1. Maximální vlastní číslo matice $S$ je $\lambda_{max} = 4{,}1267$. Dle vzorců (2.1) a (2.2) je index nekonzistence roven $CI = \frac{4{,}1267-4}{4-1} = 0{,}0422$ a podílový index nekozistence je roven $CR = \frac{0{,}0422}{0{,}89} = 0{,}0475 < 0{,}1$. Tedy dle Saatyho podílového indexu nekonzistence je matice považována za dostatečně konzistentní. Přitom v této matici není zachováno preferenční pořadí prvků. Z druhého řádku matice je vidět, že $w$ je preferováno před $z$. Ze třetího řádku matice ale vyplývá, že $z$ je preferováno před $w$. Zároveň platí, že matice není slabě konzistentní, protože z toho, že $s_{12} = 2$ a $s_{23} = 4$ by muselo plynout, že $s_{13} \geq 4$. Zde ale platí $s_{13} = 3$.

2. Maximální vlastní číslo matice $S'$ je $\lambda_{max} = 4{,}5853$. Dle vzorců (2.1) a (2.2) je index nekonzistence roven $CI = \frac{4{,}5853-4}{4-1} = 0{,}1951$ a podílový index nekozistence je roven $CR = \frac{0{,}1951}{0{,}89} = 0{,}2192 > 0{,}1$. Tedy tato matice není považována za dostatečně konzistentní dle Saaytyho podílového indexu nekonzistence. Zároveň je ale vidět, že matice $S'$ je slabě konzistentní. Dle definice slabé konzistence stačí ověřit podmínky (2.20) a (2.21) pro elementy matice $S'$, které jsou větší nebo rovny 1. Zde platí $s'_{ij} > 1$ pro $i, j = 1, 2, 3, 4,\ i < j$. Platí

$$s'_{13} = 7 > \max\{s'_{12}, s'_{23}\} = \max\{5, 5\} = 5,$$
$$s'_{14} = 9 > \max\{s'_{12}, s'_{24}\} = \max\{5, 7\} = 7,$$
$$s'_{14} = 9 > \max\{s'_{13}, s'_{34}\} = \max\{3, 7\} = 7.$$

   Tedy matice $S'$ je slabě konzistentní. Díky tomu je zajištěna tranzitivita preferencí. Navíc je zajištěno, že pokud je $x$ preferováno před $y$ a $y$ je preferováno před $z$, potom je $x$ preferováno před $z$ s intenzitou preference rovnou alespoň větší ze dvou předchozích uvažovaných intenzit preference. Hodnotitel tedy zadal intenzity preference racionálně ve smyslu uspořádání uvažovaných variant a dodržel slabou konzistenci. Na druhou stranu podle prvních dvou řádků matice $S'$ není mezi variantami $z$ a $w$ příliš velký rozdíl. Na základě přímého srovnání ale hodnotitel zadal hodnotu 7. Z tohoto hlediska není matice $S'$ zadána konzistentně, o čemž vypovídá i hodnota Saatyho indexu nekonzistence.

$\triangle$

Pokud je multiplikativní preferenční matice $M$ slabě konzistentní, potom dle předchozí věty preferenční matice určuje kvaziuspořádaní. Tzn. že matici $M$ je vždy možné přeuspořádat tak, aby v jejím horním trojúhelníku byly pouze hodnoty větší nebo rovny 1. Následující věta tedy vyjadřuje nutnou podmínku pro to, aby byla preferenční matice slabě konzistentní.

**Důsledek 2.2.** *Nechť $M = \{m_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ je slabě konzistentní multiplikativní preferenční matice, která slouží k párovému srovnání variant $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Označme $A_i \succ A_j$ právě tehdy, když $m_{ij} > 1$, a $A_i \sim A_j$ právě tehdy, když $m_{ij} = 1$, pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Potom existuje permutace $\pi : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ taková, že pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$, kde $\pi(i) < \pi(j)$, platí $m_{\pi(i)\pi(j)} \geq 1$ a $A_{\pi(i)} \succeq A_{\pi(j)}$, kde $\succeq$ je sjednocení binárních relací $\succ$ a $\sim$.*

**Důkaz:** Nechť $M = \{m_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ je slabě konzistentní multiplikativní preferenční matice, která slouží k párovému srovnání variant $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Označme $A_i \succ A_j$ právě tehdy, když $m_{ij} > 1$, a $A_i \sim A_j$ právě tehdy, když $m_{ij} = 1$, pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Potom dle věty 2.2 preferenční matice $M$ určuje binární relaci kvaziuspořádání, kterou značíme $\succeq$ a která je sjednocením binárních relací $\succ$ a $\sim$. Tzn. že existuje permutace $\pi : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ taková, že $A_{\pi(i)} \succeq A_{\pi(j)}$ pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$ takové, že $\pi(i) < \pi(j)$. Tento zápis je ekvivalentní tomu, že $m_{\pi(i)\pi(j)} \geq 1$ pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$ takové, že $\pi(i) < \pi(j)$. $\square$

Vzhledem k tomu, že preferenční matice $M$ je reciproká, zadává se většinou pouze horní trojúhelník matice $M$ a dolní trojúhelník se dopočte dle podmínky reciprocity. Výhodné tedy je, když v horním trojúhelníku matice $M$ jsou pouze hodnoty větší nebo rovny 1. Uspořádají-li se nejprve porovnávané prvky od nejpreferovanějšího po nejméně preferovaný, což lze provést pomocí jednoduché metody párového srovnání popsané v kapitole 1.1, potom bude matice $M$ v horním trojúhelníku obsahovat pouze hodnoty větší nebo rovny 1, tj. $m_{ij} \geq 1$ pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $i < j$. V tomto případě je navíc velmi jednoduché v průběhu zadávání intenzit preferencí ověřovat slabou konzistenci. Slabá konzistence je pak totiž ekvivalentní s tím, že každý řádek horního trojúhelníku matice musí představovat neklesající posloupnost čísel a každý sloupec horního trojúhelníku zase nerostoucí posupnost. Navíc ještě musí platit, že pokud $m_{ij} = 1$, $i \neq j$, pak se řádky $i$ a $j$ musí rovnat a stejně tak i sloupce $i$ a $j$. Pokud nejsou porovnávané varianty předem takto uspořádané, potom je možné zkusit přeuspořádat řádky a sloupce matice $M$. Pokud bude existovat takové přeuspořádání, že pro nově vzniklou matici budou splněny výše zmíněné vlastnosti, potom je matice $M$ slabě konzistentní.

Myšlenka ke kontrolování přijatelné konzistence zadávaných intenzit preferencí pro preferenčně uspořádané prvky byla zavedena v [93] pro model hodnocení uměleckých děl, který je použit v Registru uměleckých výstupů (RUV). V tomto modelu museli experti zadat Saatyho matici řádu 27, což vyžadovalo provést 351 párových srovnání. Aby bylo možné kontrolovat racionalitu výpovědí expertů již při zadávání preferenční matice, byla pro tento model zavedena podmínka slabé konzistence jako multiplikativní verze restriktivní max-max tranzitivity. Před zadáním preferenční matice byly nejprve porovnávané kategorie uměleckých děl seřazeny od nejlepší po nejhorší pomocí metody párového srovnávání, která je uvedena v kapitole 1.1. Následně při zadávání Saatyho matice bylo kontrolováno, že intenzity preferencí jsou nerostoucí v každém řádku a neklesající v každém sloupci horního trojúhelníku zadávané matice. V této dizertační práci byla podmínka slabé konzistence zavedená v [93] modifikována a byl precizován její matematický popis. Vlastnost preferenční matice, kterou s sebou nese porovnávání uspořádaných variant, bude nyní matematicky popsána v následující větě.

**Věta 2.3.** *Nechť $M = \{m_{ij}\}_{i,j=1}^n$ je multiplikativní preferenční matice. Potom $M$ je slabě konzistentní právě tehdy, když existuje permutace $\pi : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ taková, že platí následující:*

1. *posloupnost $\{m_{\pi(i)\pi(j)}\}_{\pi(j)=\pi(i)}^n$ je neklesající pro každé $i = 1, 2 \ldots, n$;*
2. *posloupnost $\{m_{\pi(i)\pi(j)}\}_{\pi(i)=1}^{\pi(j)}$ je nerostoucí pro každé $j = 1, 2, \ldots, n$;*
3. *jestliže $m_{\pi(i)\pi(j)} = 1$ pro nějaké $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, kde $\pi(i) < \pi(j)$, potom $m_{\pi(l)\pi(i)} = m_{\pi(l)\pi(j)}$ pro každé $l = 1, 2, \ldots, n$, kde $\pi(l) \leq \pi(i) < \pi(j)$;*
4. *jestliže $m_{\pi(i)\pi(j)} = 1$ pro nějaké $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, kde $\pi(i) < \pi(j)$, potom $m_{\pi(i)\pi(k)} = m_{\pi(j)\pi(k)}$ pro každé $k = 1, 2, \ldots, n$, kde $\pi(i) < \pi(j) \leq \pi(k)$.*

**Důkaz:** Nechť $M = \{m_{ij}\}_{i,j=1}^n$ je multiplikativní preferenční matice. Budou zvlášť ověřeny případy, kdy nejsou v uvažovaném souboru různé varianty, které by byly považovány za indiferentní, a případy, kdy soubor obsahuje alespoň dvě různé varianty, které jsou z hlediska hodnotitele indiferentní:

1) Nechť $m_{ij} \neq 1$ pro každé $i \neq j$. Nyní bude ukázáno, že pokud $M$ obsahuje hodnotu 1 jen na hlavní diagonále, tak matice $M$ splňuje podmínku (2.20), tedy je slabě konzistentní, právě tehdy, když existuje permutace $\pi$ množiny indexů $\{1, 2, \ldots, n\}$ taková, že pro ni platí vlastnosti 1. a 2.

   a) Nechť $M$ je slabě konzistentní. Potom dle důsledku 2.2 existuje permutace $\pi : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ taková, že $m_{\pi(i)\pi(j)} > 1$ pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$ takové, že $\pi(i) < \pi(j)$. Potom dle vlastnosti (2.20) slabé konzistence platí

   $$m_{\pi(i)\pi(k)} \geq \max\{m_{\pi(i)\pi(j)}, m_{\pi(j)\pi(k)}\}$$

   pro každé $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$ takové, že $\pi(i) < \pi(j) < \pi(k)$. Toto je ekvivalentní tomu, že

   $$m_{\pi(i)\pi(k)} \geq m_{\pi(i)\pi(j)} \quad \wedge \quad m_{\pi(i)\pi(k)} \geq m_{\pi(j)\pi(k)}$$

pro každé $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$ takové, že $\pi(i) < \pi(j) < \pi(k)$. Toto je opět ekvivalentní tomu, že posloupnost $\{m_{\pi(i)\pi(j)}\}_{\pi(j)=\pi(i)+1}^{n}$ je neklesající pro každé $\pi(i) = 1, 2 \ldots, n-1$ a posloupnost $\{m_{\pi(i)\pi(j)}\}_{\pi(i)=1}^{\pi(j)-1}$ je nerostoucí pro každé $\pi(j) = 2, 3, \ldots, n$. Protože $m_{\pi(i)\pi(i)} = 1$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$, je možné uvažované posloupnosti rozšířit o tento diagonální prvek a jejich vlastnost se nezmění. Tj. $\{m_{\pi(i)\pi(j)}\}_{\pi(j)=\pi(i)}^{n}$ je neklesající pro každé $\pi(i) = 1, 2 \ldots, n$, tedy i pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$, a $\{m_{\pi(i)\pi(j)}\}_{\pi(i)=1}^{\pi(j)}$ je nerostoucí pro každé $\pi(j) = 1, 2, \ldots, n$, tedy také pro každé $j = 1, 2, \ldots, n$. Tedy platí vlastnosti 1. a 2.

b) Nechť existuje permutace $\pi : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ taková, že pro posloupnosti prvků $m_{\pi(i)\pi(j)}$ platí vlastnosti 1. a 2. Protože $m_{\pi(i)\pi(i)} = 1$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$, potom z těchto vlastností plyne, že $m_{\pi(i)\pi(j)} > 1$ pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$ takové, že $\pi(i) < \pi(j)$.

   Vlastnost 1. lze přepsat pro každé $i = 1, 2 \ldots, n$ následujícím způsobem:

$$1 < m_{\pi(i)\pi(i)+1} \leq m_{\pi(i)\pi(i)+2} \leq \cdots \leq m_{\pi(i)n-1} \leq m_{\pi(i)n}.$$

   Toto lze zkráceně psát $1 < m_{\pi(i)\pi(j)} \leq m_{\pi(i)\pi(k)}$ pro každé $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$ takové, že $\pi(i) < \pi(j) < \pi(k)$.

   Vlastnost 2. lze přepsat pro každé $k = 1, 2 \ldots, n$ následujícím způsobem:

$$m_{1\pi(k)} \geq m_{2\pi(k)} \geq \cdots \geq m_{\pi(k)-2\pi(k)} \geq m_{\pi(k)-1\pi(k)} > 1.$$

   Toto lze přepsat do tvaru $m_{\pi(i)\pi(k)} \geq m_{\pi(j)\pi(k)} > 1$ pro každé $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$ takové, že $\pi(i) < \pi(j) < \pi(k)$.

   Dohromady dosáváme, že $m_{\pi(i)\pi(k)} \geq m_{\pi(i)\pi(j)} > 1$ a $m_{\pi(i)\pi(k)} \geq m_{\pi(j)\pi(k)} > 1$ pro každé $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$, kde $\pi(i) < \pi(j) < \pi(k)$. Toto lze psát $m_{\pi(i)\pi(k)} \geq \max\{m_{\pi(i)\pi(j)}, m_{\pi(j)\pi(k)}\} > 1$ pro každé $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$ takové, že $\pi(i) < \pi(j) < \pi(k)$. Tedy je splněna podmínka (2.20) slabé konzistence.

Bylo tedy dokázáno, že pokud $m_{ij} \neq 1$ pro každé $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, pak je matice $M$ slabě konzistentní, tj. splňuje (2.20), právě tehdy, když existuje permutace množiny indexů $\pi$ taková, že pro ni platí vlastnosti 1. a 2.

2) Nyní naopak připusťme, že nastává případ, že $m_{ij} = 1$ pro nějaké $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$. Bude ukázáno, že pokud $M$ obsahuje hodnotu 1 i mimo hlavní diagonálu, potom matice $M$ splňuje vztahy (2.20) a (2.21), tedy je slabě konzistentní, právě tehdy, když existuje permutace $\pi$ množiny indexů $\{1, 2, \ldots, n\}$ taková, že pro ni platí vlastnosti 1.–4.

   Nechť $m_{ij} = 1$ pro nějaké $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$. Potom také pro uvažovanou permutaci $\pi$ indexů $\{1, 2, \ldots, n\}$ bude platit $m_{\pi(i)\pi(j)} = 1$ a $m_{\pi(j)\pi(i)} = 1$, kde $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$. Přitom vlastnosti 1. a 2. jsou definovány pouze pro elementy $m_{\pi(i)\pi(j)}$, kde $\pi(i) \leq \pi(j)$, ale slabá konzistence, kterou je třeba dokázat, je definována pro všechny elementy větší nebo rovny jedné, tedy i pro $m_{\pi(j)\pi(i)} = 1$, kde $\pi(i) \leq \pi(j)$. Přesto není třeba se těmito elementy zabývat, a to z následujícího důvodu:

Uvažujme $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takové, že $\pi(i) < \pi(j) < \pi(k)$: Pokud $m_{\pi(i)\pi(j)} = 1$, pak pro $m_{\pi(j)\pi(k)} \geq 1$ dle (2.21) platí $m_{\pi(i)\pi(k)} = \max\{m_{\pi(i)\pi(j)}, m_{\pi(j)\pi(k)}\} = m_{\pi(j)\pi(k)}$. Díky reciprocitě je $m_{\pi(i)\pi(j)} = 1$ ekvivalentní s $m_{\pi(j)\pi(i)} = 1$. Potom z podmínky (2.21) pro $m_{\pi(i)\pi(k)} \geq 1$ plyne $m_{\pi(j)\pi(k)} = \max\{m_{\pi(j)\pi(i)}, m_{\pi(i)\pi(k)}\} = m_{\pi(i)\pi(k)}$. Tedy pro $m_{\pi(i)\pi(j)} = 1$ i pro $m_{\pi(j)\pi(i)} = 1$ plyne $m_{\pi(i)\pi(k)} = m_{\pi(j)\pi(k)}$. Pokud se tedy v matici $M$ bude vyskytovat hodnota 1 jinde než na hlavní diagonále, stačí i tak pracovat pouze s hodnotami nad hlavní diagonálou.

a) Nejprve předpokládejme, že matice $M$ je slabě konzistentní, tj. platí pro ni (2.20) a (2.21). Bude ukázáno, že taková matice splňuje i vlastnosti 1.–4.

- Dle důsledku 2.2 existuje permutace $\pi : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ taková, že $m_{\pi(i)\pi(j)} \geq 1$ pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$ takové, že $\pi(i) < \pi(j)$. Protože diagonální prvek je roven 1, platí $m_{\pi(i)\pi(j)} \geq 1$ i pro $i, j = 1, 2, \ldots, n$ takové, že $\pi(i) \leq \pi(j)$.
- Vlastnosti 1. a 2 nezohledňují, jestli pro nějaký element matice $M$ pro $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, kde $\pi(i) < \pi(j)$, platí $m_{\pi(i)\pi(j)} = 1$. Proto je nutno ukázat, že (2.20) a (2.21) vždy implikují vlastnosti 1. a 2.:
  Vztah (2.20) říká, že pro $m_{\pi(i)\pi(j)} > 1$ a $m_{\pi(j)\pi(k)} > 1$ plyne $m_{\pi(i)\pi(k)} \geq \max\{m_{\pi(i)\pi(j)}, m_{\pi(j)\pi(k)}\}$, kde $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\pi(i) < \pi(j) < \pi(k)$. Jak je ukázáno v bodu 1a), toto implikuje $\{m_{\pi(i)\pi(j)}\}_{\pi(j)=\pi(i)}^{n}$ je neklesající posloupnost pro každé $i = 1, 2 \ldots, n$ a $\{m_{\pi(i)\pi(j)}\}_{\pi(i)=1}^{\pi(j)}$ je nerostoucí posloupnost pro každé $j = 1, 2, \ldots, n$. Tj. platí vlastnosti 1. a 2.
  Je-li $m_{\pi(i)\pi(j)} = 1$ a $m_{\pi(j)\pi(k)} \geq 1$ nebo je-li $m_{\pi(i)\pi(j)} \geq 1$ a $m_{\pi(j)\pi(k)} = 1$ pro nějaké $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, kde $\pi(i) < \pi(j) < \pi(k)$, pak díky podmínce (2.21) slabé konzistence platí $m_{\pi(i)\pi(k)} = \max\{m_{\pi(i)\pi(j)}, m_{\pi(j)\pi(k)}\}$. Potom stále platí, že pro uvažovanou permutaci $\pi$ jsou zachovány neklesající a nerostoucí posloupnosti prvků matice $M$ dané vlastnostmi 1. a 2.
- Vlastnosti 3. a 4. se vztahují jen k prvkům $m_{\pi(i)\pi(j)} = 1$ pro $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takové, že $\pi(i) < \pi(j)$. Stejně tak se u slabé konzistence k těmto prvkům vztahuje jen podmínka (2.21). Proto je třeba ukázat, že (2.21) implikuje vlastnosti 3. a 4. Dle předpokladu $m_{\pi(i)\pi(j)} = 1$ pro nějaké $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\pi(i) < \pi(j)$.
  Dále platí $m_{\pi(j)\pi(k)} \geq 1$ pro každé $j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takové, že $\pi(j) \leq \pi(k)$. Ze slabé konzistence (2.21) potom plyne $m_{\pi(i)\pi(k)} = \max\{m_{\pi(i)\pi(j)}, m_{\pi(j)\pi(k)}\} = m_{\pi(j)\pi(k)}$ pro každé $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$

takové, že $\pi(i) < \pi(j) \leq \pi(k)$. Tj. platí vlastnost 3.
Dále platí $m_{\pi(l)\pi(i)} \geq 1$ pro každé $i, l \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takové, že $\pi(l) \leq \pi(i)$. Ze slabé konzistence (2.21) potom plyne $m_{\pi(l)\pi(j)} = \max\{m_{\pi(l)\pi(i)}, m_{\pi(i)\pi(j)}\} = m_{\pi(l)\pi(i)}$ pro každé $i, j, l \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takové, že $\pi(l) \leq \pi(i) < \pi(j)$. Tj. platí vlastnost 4.

Bylo dokázáno, že vztahy (2.20) a (2.21) implikují vlastnosti 1.–4.

b) Nyní předpokládejme, že existuje permutace $\pi : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ taková, že pro posloupnosti prvků $m_{\pi(i)\pi(j)}$ platí vlastnosti 1.–4. Bude ukázáno, že potom je matice $M$ slabě konzistentní, tj. platí pro ni (2.20) a (2.21).

- Uvažujme nejprve pouze vlastnosti 1. a 2. Ty říkají, že $\{m_{\pi(i)\pi(j)}\}_{\pi(j)=\pi(i)}^{n}$ je neklesající posloupnost pro každé $i = 1, 2 \ldots, n$ a $\{m_{\pi(i)\pi(j)}\}_{\pi(i)=1}^{\pi(j)}$ je nerostoucí posloupnost pro každé $j = 1, 2, \ldots, n$. Jak je ukázáno v bodu 1b), toto pro $m_{\pi(i)\pi(j)} > 1$ a $m_{\pi(j)\pi(k)} > 1$ implikuje $m_{\pi(i)\pi(k)} \geq \max\{m_{\pi(i)\pi(j)}, m_{\pi(j)\pi(k)}\} > 1$. Stejně tak i pro $m_{\pi(i)\pi(j)} \geq 1$ a $m_{\pi(j)\pi(k)} \geq 1$ plyne $m_{\pi(i)\pi(k)} \geq \max\{m_{\pi(i)\pi(j)}, m_{\pi(j)\pi(k)}\} \geq 1$. Vlastnosti 1. a 2 tedy samy o sobě zaručují pouze platnost vztahu (2.20).
- Předpokládejme navíc, že platí také vlastnosti 3. a 4. Dle předpokladu $m_{\pi(i)\pi(j)} = 1$ pro nějaké $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takové, že $\pi(i) < \pi(j)$.
  Dále platí $m_{\pi(j)\pi(k)} \geq 1$ pro každé $j, k = 1, 2, \ldots, n$, $\pi(j) \leq \pi(k)$. Z vlastnosti 4. potom plyne $m_{\pi(i)\pi(k)} = m_{\pi(j)\pi(k)}$ pro každé $k = 1, 2, \ldots, n$ takové, že $\pi(i) < \pi(j) \leq \pi(k)$. Toto lze rozepsat $m_{\pi(i)\pi(k)} = m_{\pi(j)\pi(k)} = \max\{1, m_{\pi(j)\pi(k)}\} = \max\{m_{\pi(i)\pi(j)}, m_{\pi(j)\pi(k)}\}$ pro uvažované $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takové, že $\pi(i) < \pi(j) \leq \pi(k)$.
  Dále platí $m_{\pi(l)\pi(i)} \geq 1$ pro každé $i, l = 1, 2, \ldots, n$, $\pi(l) \leq \pi(i)$. Z vlastnosti 3. potom plyne $m_{\pi(l)\pi(i)} = m_{\pi(l)\pi(j)}$ pro každé $l = 1, 2, \ldots, n$ takové, že $\pi(l) \leq \pi(i) < \pi(j)$. Toto lze rozepsat $m_{\pi(l)\pi(j)} = m_{\pi(l)\pi(i)} = \max\{m_{\pi(l)\pi(i)}, 1\} = \max\{m_{\pi(l)\pi(i)}, m_{\pi(i)\pi(j)}\}$ pro uvažované $i, j, l \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takové, že $\pi(l) \leq \pi(i) < \pi(j)$.
  Vlastnosti 3. a 4 dohromady tedy implikují podmínku (2.21).

Bylo dokázáno, že pro uvažovanou permutaci $\pi$ vlastnosti 1.–4. implikují vztahy (2.20) a (2.21).

V bodech 2a) a 2b) bylo dokázáno, že matice $M$ je slabě konzistentní právě tehdy, když existuje permutace $\pi$ množiny indexů $\{1, 2, \ldots, n\}$ taková, že jsou splněny vlastnosti 1.–4. □

Nyní bude na příkladu ukázáno, jak v praxi probíhá kontrola slabé konzistence preferenční matice dle věty 2.3.

**Příklad:**

1. Mějme následující multiplikativní preferenční matici $M = \{m_{ij}\}_{i,j=1}^{5}$, jejíž prvky náleží geometrické škále $\{\frac{1}{32}, \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, 16, 32\}$. Bude ukázáno, že matice $M$ je slabě konzistentní.

$$M = \begin{array}{c} \\ x \\ y \\ z \\ v \\ w \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & y & z & v & w \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 8 & 32 & 4 & 8 \\ \frac{1}{8} & 1 & 8 & \frac{1}{8} & 1 \\ \frac{1}{32} & \frac{1}{8} & 1 & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & 8 & 16 & 1 & 8 \\ \frac{1}{8} & 1 & 8 & \frac{1}{8} & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad M' = \begin{array}{c} \\ x \\ z \\ w \\ y \\ v \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & z & w & y & v \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 & 8 & 32 \\ \frac{1}{4} & 1 & 4 & 8 & 16 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & 1 & 1 & 8 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & 1 & 1 & 8 \\ \frac{1}{32} & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Řádky a sloupce matice $M$ lze přeuspořádat tak, aby vznikla matice $M' = \{m'_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$. Každý řádek v horním trojúhelníku matice $M'$ tvoří neklesající posloupnost. Stejně tak každý sloupec v horním trojúhelníku matice $M'$ tvoří neroustoucí posloupnost. Navíc v horním trojúhelníku $M'$ nastalo $m'_{34} = 1$. Je vidět, že třetí a čtvrtý řádek matice $M'$ se rovnají, stejně tak třetí a čtvrtý sloupec. Matice $M$ i $M'$ jsou tedy dle věty 2.3 slabě konzistentní.

2. Mějme následující multiplikativní preferenční matice $N = \{n_{ij}\}_{i,j=1}^{5}$ a $N' = \{n'_{ij}\}_{i,j=1}^{5}$, kde hodnoty intenzit preference náleží geometrické škále $\{\frac{1}{32}, \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, 16, 32\}$. Bude ukázáno, že matice $N$ není slabě konzistentní a také, jak doplnit chybějící prvek matice $N'$ tak, aby byla slabě konzistentní.

$$N = \begin{array}{c} \\ x \\ y \\ z \\ v \\ w \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & y & z & v & w \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ \frac{1}{2} & 1 & 4 & 16 & 16 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 1 & 8 & 8 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & 1 & 4 \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad N' = \begin{array}{c} \\ x \\ y \\ z \\ v \\ w \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & y & z & v & w \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & n'_{14} & 16 \\ \frac{1}{2} & 1 & 4 & 16 & 16 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 1 & 8 & 8 \\ n'_{41} & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & 1 & 4 \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

   (a) Pro matici $N$ platí, že každý řádek v horním trojúhelníku matice $N$ tvoří neklesající posloupnost. Ve čtvrtém sloupci matice $N$ se však v horním trojúhelníku nachází posloupnost $\{8, 16, 8\}$. Tato posloupnost není nerostoucí. Matici $N$ nelze přeuspořádat jiným způsobem tak, aby v horním trojúhelníku byly pouze hodnoty větší nebo rovny 1, proto dle věty 2.3 matice $N$ není slabě konzistentní. Použije-li se přímo definice slabé konzistence, potom z $n_{12} = 2$ a $n_{24} = 16$ by mělo platit $n_{14}$ je alespoň 16, kdežto zde nastalo $n_{14} = 8$.

(b) Uvažujme nyní matici $N'$, která se od $N$ liší pouze tím, že porovnání prvků $x$ a $v$ není zadáno. Chceme, aby matice $N'$ byla zadána slabě konzistentně. Protože $n'_{13} = 4$ a $n'_{34} = 8$, potom ze slabé konzistene plyne, že $n'_{14} \geq 8 > 1$. Potom dle věty 2.3 musí řádky horního trojúhelníku tvořit neklesající posloupnosti. Odtud $n'_{14} \in \{4, 8, 16\}$. Dále musí sloupce tvořit nerostoucí posloupnosti. Odtud $n'_{14} \in \{16, 32\}$. Protože oboje musí platit současně, matice $N'$ bude konzistentní právě tehdy, když $n'_{14} = 16$. △

Slabá konzistence může být v preferenční matici přeuspořádané dle preferenčního pořadí porovnávaných objektů jednoduše prověřena dle analogických podmínek jako jsou uvedeny ve větě 2.3 také v celé matici místo v horním trojúhelníku. Prověření slabé konzistence je možno provést pro sloupce nebo řádky matice $M$, jak vyjadřují následující dva důsledky.

**Důsledek 2.3.** *Nechť $M = \{m_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ je multiplikativní preferenční matice. Potom $M$ je slabě konzistentní právě tehdy, když existuje permutace $\pi : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$ taková, že platí následující:*

1. *posloupnost $\{m_{\pi(i)\pi(j)}\}_{\pi(j)=1}^{n}$ je neklesající pro každé $i = 1, 2 \dots, n$;*
2. *jestliže $m_{\pi(i)\pi(j)} = 1$ pro nějaké $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, kde $i \neq j$, potom $m_{\pi(l)\pi(i)} = m_{\pi(l)\pi(j)}$ pro každé $l = 1, 2, \dots, n$.*

**Důkaz:** Nechť $M = \{m_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ je multiplikativní preferenční matice. Ať budeme nejprve předpokládat existenci permutace $\pi$ splňující vlastnosti 1. a 2. nebo slabou konzistenci matice $M$, potom analogicky jako v důkazu věty 2.3, dojdeme v obou případech k tomu, že $\pi : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$ je taková permutace, že $m_{\pi(i)\pi(j)} \geq 1$ pro každé $i, j = 1, 2, \dots, n$ takové, že $\pi(i) < \pi(j)$. Bude ukázáno, že vlastnosti 1.–4. uvedené ve větě 2.3 jsou pro tuto permutaci $\pi$ ekvivalentní s vlastnostmi 1. a 2. v této větě. Ekvivalence plyne z reciprocity (1.6) matice $M$.

1) Vlastnost 1. je ekvivalentní s vlastnostmi 1. a 2. ve větě 2.3:

a) Vlastnost 1. ve větě 2.3 říká, že posloupnost $\{m_{\pi(i)\pi(j)}\}_{\pi(j)=\pi(i)}^{n}$ je neklesající pro každé $i = 1, 2 \dots, n$. Toto lze přepsat do tvaru $m_{\pi(i)\pi(i)} \leq m_{\pi(i)\pi(i)+1} \leq \dots \leq m_{\pi(i)n-1} \leq m_{\pi(i)n}$ pro každé $i = 1, 2 \dots, n$.

b) Vlastnost 2. ve větě 2.3 říká, že posloupnost $\{m_{\pi(k)\pi(i)}\}_{\pi(k)=1}^{\pi(i)}$ je nerostoucí pro každé $i = 1, 2, \dots, n$. Toto lze přepsat do tvaru $m_{1\pi(i)} \geq m_{2\pi(i)} \geq \dots \geq m_{\pi(i)-1\pi(i)} \geq m_{\pi(i)\pi(i)}$ pro každé $i = 1, 2 \dots, n$. Z reciprocity (1.6) je toto ekvivalentní s $m_{\pi(i)1} \leq m_{\pi(i)2} \leq \dots \leq m_{\pi(i)\pi(i)-1} \leq m_{\pi(i)\pi(i)}$ pro každé $i = 1, 2 \dots, n$.

Dohromady tedy platí $m_{\pi(i)1} \leq m_{\pi(i)2} \leq \cdots \leq m_{\pi(i)\pi(i)} \leq m_{\pi(i)\pi(i)+1} \leq \cdots \leq m_{\pi(i)n}$, tj. posloupnost $\{m_{\pi(i)\pi(j)}\}_{\pi(j)=1}^{n}$ je neklesající pro každé $i = 1, 2 \ldots, n$.

2) Vlastnost 2. je ekvivalentní s vlastnostmi 3. a 4. ve větě 2.3. Nechť $m_{\pi(i)\pi(j)} = 1$ pro nějaké $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, kde $\pi(i) < \pi(j)$. Z reciprocity také $m_{\pi(j)\pi(i)} = 1$. Tj. tento předpoklad je ekvivalentní předpokladu $m_{\pi(i)\pi(j)} = 1$ pro nějaké $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takové, že $i \neq j$. Dále platí:

   a) Věta 2.3 říká, že pak $m_{\pi(l)\pi(i)} = m_{\pi(l)\pi(j)}$ pro každé $l \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takové, že $\pi(l) \leq \pi(i) < \pi(j)$. Pro každé $l = 1, 2, \ldots, n$ je možno uvažovanou rovnost přepsat do tvaru $m_{\pi(l)\pi(l)} = m_{\pi(l)\pi(l)+1} = \cdots = m_{\pi(l)n-1} = m_{\pi(l)n}$.
   b) Věta 2.3 říká také, že pak $m_{\pi(i)\pi(k)} = m_{\pi(j)\pi(k)}$ pro každé $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takové, že $\pi(i) < \pi(j) \leq \pi(k)$. Pro každé $k = 1, 2, \ldots, n$ je možno uvažovanou rovnost přepsat do tvaru $m_{1\pi(k)} = m_{2\pi(k)} = \cdots = m_{\pi(k)-1\pi(k)} = m_{\pi(k)\pi(k)}$. Z reciprocity toto platí právě tehdy, když $m_{\pi(k)1} = m_{\pi(k)2} = \cdots = m_{\pi(k)\pi(k)-1} = m_{\pi(k)\pi(k)}$.

Spojením výsledků z bodu 2a) a z bodu 2b) pro $k = l$ plyne $m_{\pi(l)1} = m_{\pi(l)2} = \cdots = m_{\pi(l)\pi(l)} = \cdots = m_{\pi(l)n}$, tj. $m_{\pi(l)\pi(i)} = m_{\pi(l)\pi(j)}$ pro každé $l = 1, 2, \ldots, n$. □

**Důsledek 2.4.** *Nechť $M = \{m_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ je multiplikativní preferenční matice. Potom $M$ je slabě konzistentní právě tehdy, když existuje permutace $\pi : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ taková, že platí následující:*

1. *posloupnost $\{m_{\pi(i)\pi(j)}\}_{\pi(i)=1}^{n}$ je nerostoucí pro každé $j = 1, 2 \ldots, n$;*
2. *jestliže $m_{\pi(i)\pi(j)} = 1$ pro nějaké $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, kde $i \neq j$, potom $m_{\pi(i)\pi(k)} = m_{\pi(j)\pi(k)}$ pro každé $k = 1, 2, \ldots, n$.*

**Důkaz:** Provede se analogicky jako pro důsledek 2.3. □

Pro slabě konzistentní multiplikativní preferenční matici $M$ platí, že preferenční pořadí porovnávaných prvků, které je jim přiřazeno dle příslušných hodnocení získaných z $M$ geometrickým průměrem řádků nebo metodou vlastního vektoru, je stejné jako preferenční pořadí, které pro tyto prvky lze odvodit z $M$ pomocí incidenčních matic binárních relací preference $\succ$ a indiference $\sim$. Tuto vlastnost sumarizuje následující věta.

**Věta 2.4.** *Nechť $M = \{m_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ je slabě konzistentní multiplikativní preferenční matice, která slouží k párovému srovnání variant $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Nechť je variantám $A_1, A_2, \ldots, A_n$ přiřazen vektor hodnocení $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$, který je vypočten z matice $M$ pomocí geometrického průměru řádků (1.8) nebo pomocí metody vlastního vektoru (1.9). Označme $A_i \succ A_j$ právě tehdy, když $m_{ij} > 1$, a $A_i \sim A_j$ právě tehdy, když $m_{ij} = 1$, pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Nechť $\succeq$ je sjednocení binárních relací $\succ$ a $\sim$ definovaných na dané množině variant. Potom* *platí, že* $h_{\pi(1)} \geq h_{\pi(2)} \geq \cdots \geq h_{\pi(n)}$*, kde* $\pi : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ *je permutace taková, že* $A_{\pi(1)} \succeq A_{\pi(2)} \succeq \cdots \succeq A_{\pi(n)}$.

**Důkaz:** Nechť $M = \{m_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ je slabě konzistentní multiplikativní preferenční matice. Potom dle důsledku 2.2 existuje permutace $\pi : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ taková, že pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$ takové, že $\pi(i) < \pi(j)$ platí $m_{\pi(i)\pi(j)} \geq 1$ a

$$A_{\pi(1)} \succeq A_{\pi(2)} \succeq \cdots \succeq A_{\pi(n)},$$

kde $\succeq$ je relace kvaziuspořádání. Dále dle důsledku 2.4 platí, že posloupnost $\{m_{\pi(i)\pi(j)}\}_{\pi(i)=1}^{n}$ je neroustoucí pro každé $j = 1, 2, \ldots, n$. Navíc pro $M$ platí $m_{ij} > 0$ pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Dohromady je možno pro každé $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$, kde $\pi(i) < \pi(k) < \pi(j)$ psát

$$m_{\pi(i)\pi(j)} \geq m_{\pi(k)\pi(j)} > 0.$$

1) Uvažujme nejprve, že hodnocení $h_1, h_2, \ldots, h_n$ jsou z matice $M$ vypočtena pomocí geometrického průměru řádků (1.8). Potom platí následující:

   Vynásobením jednotlivých nerovnic $m_{\pi(i)\pi(j)} \geq m_{\pi(k)\pi(j)}$ přes všechna $j = 1, 2, \ldots, n$ se nezmění znaménko nerovnosti:

$$\prod_{j=1}^{n} m_{\pi(i)\pi(j)} \geq \prod_{j=1}^{n} m_{\pi(k)\pi(j)},$$

   kde $i, k = 1, 2, \ldots, n$ takové, že $\pi(i) < \pi(k) < \pi(j)$. Stejně tak aplikováním $n$-té odmocniny není porušeno znaménko nerovnosti:

$$\sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} m_{\pi(i)\pi(j)}} \geq \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} m_{\pi(k)\pi(j)}},$$

   kde $i, k = 1, 2, \ldots, n$ takové, že$\pi(i) < \pi(k) < \pi(j)$. Toto lze přepsat do tvaru

$$h_{\pi(i)} \geq h_{\pi(k)},$$

   kde $i, k = 1, 2, \ldots, n$ takové, že $\pi(i) < \pi(k)$, přičemž $h_{\pi(i)}$ jsou hodnocení variant $A_{\pi(i)}$ vypočtená pomocí geometrického průměru řádků (1.8).

2) Nyní uvažujme, že hodnocení $h_1, h_2, \ldots, h_n$ jsou z matice $M$ vypočtena pomocí metody vlastního vektoru (1.9). Potom platí následující:

   Vynásobením nerovnic $m_{\pi(i)\pi(j)} \geq m_{\pi(k)\pi(j)}$ nezápornou konstantou $h_{\pi(j)} \geq 0$ se znaménko nerovnosti nezmění, tj. pro každé $j = 1, 2, \ldots, n$ platí také

$$m_{\pi(i)\pi(j)} h_{\pi(j)} \geq m_{\pi(k)\pi(j)} h_{\pi(j)},$$

kde $i, k = 1, 2, \ldots, n$, $\pi(i) < \pi(k) < \pi(j)$. Stejné znaménko nerovnosti platí i pro sečtení předchozích nerovnic přes všechna $j = 1, 2, \ldots, n$:

$$\sum_{j=1}^{n} m_{\pi(i)\pi(j)} h_{\pi(j)} \geq \sum_{j=1}^{n} m_{\pi(k)\pi(j)} h_{\pi(j)},$$

kde $i, k = 1, 2, \ldots, n$ takové, že $\pi(i) < \pi(k) < \pi(j)$. Stejně tak vynásobení kladnou konstatou $\frac{1}{\lambda_{max}} > 0$ nezmění znaménko nerovnosti:

$$\frac{1}{\lambda_{max}} \sum_{j=1}^{n} m_{\pi(i)\pi(j)} h_{\pi(j)} \geq \frac{1}{\lambda_{max}} \sum_{j=1}^{n} m_{\pi(k)\pi(j)} h_{\pi(j)},$$

kde $i, k = 1, 2, \ldots, n$ takové, že $\pi(i) < \pi(k) < \pi(j)$. V této poslední nerovnosti jsou porovnávána hodnocení $h_1, h_2, \ldots, h_n$ prvků $A_1, A_2, \ldots, A_n$ vypočtená pomocí metody vlastního vektoru $M\mathbf{h} = \lambda_{max}\mathbf{h}$, kde pro $i$-tou složku vektoru $\mathbf{h}$ platí:

$$\lambda_{max} h_i = (\lambda_{max} h)_i = (M\mathbf{h})_i = \sum_{j=1}^{n} m_{ij} h_j,$$

tj. $h_i = \frac{1}{\lambda_{max}} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} h_j$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$. Poslední nerovnici lze tedy přepsat do tvaru

$$h_{\pi(i)} \geq h_{\pi(k)},$$

kde $i, k = 1, 2, \ldots, n$ takové, že $\pi(i) < \pi(k)$.

V obou případech tedy pro uvažovanou permutaci $\pi$ dostáváme $h_{\pi(1)} \geq h_{\pi(2)} \geq \cdots \geq h_{\pi(n)}$. □

Slabou konzisteci by bylo možé analogicky zadefinovat pomocí prvků menších nebo rovných 1 a pomocí minima, jak vyjadřuje následující věta.

**Věta 2.5.** *Nechť $M = \{m_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ je multiplikativní preferenční matice. Potom $M$ je slabě kozistentní právě tehdy, když pro každé $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$ platí*

$$m_{ij} < 1 \wedge m_{jk} < 1 \quad \Longrightarrow \quad m_{ik} \leq \min\{m_{ij}, m_{jk}\}; \tag{2.22}$$

$$(m_{ij} = 1 \wedge m_{jk} \leq 1) \vee (m_{ij} \leq 1 \wedge m_{jk} = 1) \quad \Longrightarrow \quad m_{ik} = \min\{m_{ij}, m_{jk}\}. \tag{2.23}$$

**Důkaz:**

1) Nejprve bude dokázáno, že z vlastností slabé konzistence (2.20) a (2.21) plynou vztahy (2.22) a (2.23). Tedy nechť $M$ je slabě konzistentní, tj. pro každé $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$ platí (2.20) a (2.21). Dále v následujících bodech předpokládejme, že $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

a) Nechť $m_{ij} < 1$ a $m_{jk} < 1$, pak z reciprocity (1.6) plyne $m_{ji} > 1$ a $m_{kj} > 1$. Ze slabé konzistence (2.20) plyne $m_{ki} \geq \max\{m_{kj}, m_{ji}\}$, tj. $m_{ik} \leq \frac{1}{\max\{m_{kj}, m_{ji}\}}$. Odtud $m_{ik} \leq \frac{1}{m_{kj}} = m_{jk}$ a $m_{ik} \leq \frac{1}{m_{ji}} = m_{ij}$. Pak také $m_{ik} \leq \min\{m_{ij}, m_{jk}\}$.

b) Nechť $m_{ij} = 1$ a $m_{jk} \leq 1$. Pak z reciprocity (1.6) platí $m_{ji} = 1$ a $m_{kj} \geq 1$. Ze slabé konzistence (2.21) plyne $m_{ki} = m_{kj}$. Odtud opět použitím reciprocity plyne $m_{ik} = m_{jk} = \min\{m_{ij}, m_{jk}\}$.

c) Nechť $m_{ij} \leq 1$ a $m_{jk} = 1$. Pak z reciprocity (1.6) platí $m_{ji} \geq 1$ a $m_{kj} = 1$. Ze slabé konzistence (2.21) plyne $m_{ki} = m_{ji}$. Odtud opět použitím reciprocity plyne $m_{ik} = m_{ij} = \min\{m_{ij}, m_{jk}\}$.

Dohromady bylo tedy v tomto bodě dokázáno, že je-li matice $M$ slabě konzistentní, pak platí vztahy (2.22) a (2.23) pro každé $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$.

2) Nyní bude dokázáno, že z vlastností (2.22) a (2.23) plynou vztahy pro slabou konzistenci (2.20) a (2.21). Předpokládejme tedy, že pro matici $M$ platí vztahy (2.22) a (2.23) pro každé $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$. Dále v následujících bodech předpokládejme, že $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

a) Nechť $m_{ji} > 1$ a $m_{kj} > 1$. Pak z reciprocity (1.6) plyne $m_{ij} < 1$ a $m_{jk} < 1$. Dále ze vztahu (2.22) platí $m_{ik} \leq \min\{m_{ij}, m_{jk}\}$. Tzn. $m_{ik} \leq m_{ij}$ a $m_{ik} \leq m_{jk}$. Z reciprocity plyne $m_{ki} \geq m_{ji}$ a $m_{ki} \geq m_{kj}$, tj. $m_{ki} \geq \max\{m_{kj}, m_{ji}\}$.

b) Nechť $m_{ji} = 1$ a $m_{kj} \geq 1$. Pak z reciprocity (1.6) plyne $m_{ij} = 1$ a $m_{jk} \leq 1$. Dále ze vztahu (2.23) platí $m_{ik} = m_{jk} = \min\{m_{ij}, m_{jk}\}$. Odtud použitím reciprocity plyne $m_{ki} = m_{kj} = \max\{m_{kj}, m_{ji}\}$.

c) Nechť $m_{ji} \geq 1$ a $m_{kj} = 1$. Pak z reciprocity (1.6) plyne $m_{ij} \leq 1$ a $m_{jk} = 1$. Dále ze vztahu (2.23) platí $m_{ik} = m_{ij} = \min\{m_{ij}, m_{jk}\}$. Odtud použitím reciprocity plyne $m_{ki} = m_{ji} = \max\{m_{kj}, m_{ji}\}$.

Dohromady v tomto bodě bylo odvozeno, že platí-li pro prvky $M$ vztahy (2.22) a (2.23) pro každé $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$, tak je tato matice slabě konzistentní. $\square$

Vztah mezi elementy matice $M$ menšími než jedna a většími než jedna vyjadřují následující věta a její důsledek. Jedná se o nutné a zároveň postačující podmínky pro to, aby preferenční matice $M$ byla slabě konzistentní.

**Věta 2.6.** *Nechť $M = \{m_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ je multiplikativní preferenční matice. Potom $M$ je slabě kozistentní právě tehdy, když pro každé $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$ takové, že*

$$m_{ij} > 1 \wedge m_{jk} < 1,$$

*platí pro $m_{ik}$ následující pro každé $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$:*

$$m_{ij} > m_{kj} \implies 1 < m_{ik} \leq m_{ij}; \tag{2.24}$$

$$m_{ij} < m_{kj} \quad \Longrightarrow \quad m_{jk} \leq m_{ik} < 1; \tag{2.25}$$

$$m_{ij} = m_{kj} \quad \Longrightarrow \quad m_{ji} \leq m_{ik} \leq m_{ij}. \tag{2.26}$$

**Důkaz:** Nejprve dokážeme, že ze slabé konzistence plynou vztahy (2.24)–(2.26). Nechť $M$ je slabě konzistentní, tj. platí vztahy (2.20) a (2.21) pro každé $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$. Dále nechť $m_{ij} > 1$ a $m_{jk} < 1$ pro $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Z reciprocity (1.6) platí $m_{ji} < 1$ a $m_{kj} > 1$, $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Vyšetříme, jak bude vypadat $m_{ik}$, $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, za různých předpokladů. Dále v následujících bodech předpokládejme opět $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

1) Nechť $m_{ij} > m_{kj}$. Pro $m_{ik}$ můžou nastat následující situace:

   a) Předpokládejme, že $m_{ik} < 1$. Pak z reciprocity $m_{ki} > 1$. Díky slabé konzistenci z $m_{ki} > 1$ a $m_{ij} > 1$ pomocí vztahu (2.20) plyne $m_{kj} \geq \max\{m_{ki}, m_{ij}\} \geq m_{ij}$, což je ale spor s předpokladem, že $m_{ij} > m_{kj}$.
   b) Předpokládejme, že $m_{ik} = 1$. Protože $m_{kj} > 1$ a matice $M$ je slabě konzistentní, tak ze vztahu (2.21) dostaneme $m_{ij} = \max\{m_{ik}, m_{kj}\} = m_{kj}$. To je ale spor s předpokladem, že $m_{ij} > m_{kj}$.
   c) Tedy musí platit $m_{ik} > 1$. Pak protože $m_{kj} > 1$, plyne ze slabé konzitence $m_{ij} \geq \max\{m_{ik}, m_{kj}\} \geq m_{ik}$. Tedy platí $1 < m_{ik} \leq m_{ij}$. Byl tak dokázán vztah (2.24).

2) Nyní nechť $m_{ij} < m_{kj}$. Pro $m_{ik}$ můžou nastat následující situace:

   a) Předpokládejme, že $m_{ik} > 1$. Protože $m_{kj} > 1$, tak stejně jako v 1c) dostaneme $m_{ij} \geq \max\{m_{ik} m_{kj}\}$, což je spor s předpokladem, že $m_{ij} < m_{kj}$.
   b) Předpokládejme nyní $m_{ik} = 1$. Protože $m_{kj} > 1$, tak stejně jako v 1b) dostaneme $m_{ij} = m_{kj}$, což je opět spor s předpokladem, že $m_{ij} < m_{kj}$.
   c) Musí tedy platit $m_{ik} < 1$. Protože $m_{ki} > 1$ a $m_{ij} > 1$, pak stejně jako v 1a) dostaneme $m_{kj} \geq \max\{m_{ki}, m_{ij}\} \geq m_{ki}$. Z reciprocity pak dostaneme $m_{jk} \leq m_{ik} < 1$. Byl tak dokázán vztah (2.25).

3) Nechť $m_{ij} = m_{kj}$. Pro $m_{ik}$ můžou nastat následující situace:

   a) Nechť $m_{ik} > 1$. Pak protože $m_{kj} > 1$, z podmínky (2.20) slabé konzistence dostaneme $m_{ij} \geq \max\{m_{ik}, m_{kj}\}$. Aby byl zároveň splněn předpoklad $m_{ij} = m_{kj}$, musí platit $m_{ij} \geq m_{ik} > 1$.
   b) Nyní nechť $m_{ik} < 1$. Pak z reciprocity $m_{ki} > 1$. Protože také $m_{ij} > 1$, plyne z podmínky (2.20) slabé konzistence $m_{kj} \geq \max\{m_{ki}, m_{ij}\}$. Aby byl zároveň splněn předpoklad $m_{ij} = m_{kj}$, musí platit $m_{ij} \geq m_{ki}$, tj. $m_{ji} \leq m_{ik} < 1$.
   c) Poslední možnost je $m_{ik} = 1$. Pak protože $m_{kj} > 1$, plyne z podmínky (2.21) slabé konzistence $m_{ij} = \max\{m_{ik}, m_{kj}\} = m_{kj}$. Dostali jsme tak tedy předpoklad $m_{ij} = m_{kj}$.

Z bodů 3a)–3c) dohromady vyplynulo, že $m_{ji} \le m_{ik} \le m_{ij}$. Byl tedy dokázán vztah (2.26).

Nyní bude dokázáno, že ze vztahů (2.24)–(2.26) plyne slabá konzistence. Nechť pro $m_{ij} > 1$ a $m_{jk} < 1$ pro $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ platí vztahy (2.24)–(2.26). Z reciprocity (1.6) platí $m_{kj} > 1$, $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Dále v následujících bodech předpokládejme opět $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

4) Nejprve nechť platí $m_{ij} > m_{kj}$. Potom ze vztahu (2.24) plyne $1 < m_{ik} \le m_{ij}$. Z těchto dvou vztahů lze dále psát $m_{ij} \ge \max\{m_{ik}, m_{kj}\}$, přičemž platí $m_{ik} > 1$ a $m_{kj} > 1$. Tedy platí (2.20).
5) Nyní nechť platí $m_{ij} < m_{kj}$. Potom ze vztahu (2.25) plyne $m_{jk} \le m_{ik} < 1$. Z reciprocity plyne $m_{kj} \ge m_{ki} > 1$. Odtud dále plyne $m_{kj} \ge \max\{m_{ki}, m_{ij}\}$, přičemž $m_{ki} > 1$ a $m_{ij} > 1$. Tedy platí (2.20).
6) Nyní nechť platí $m_{ij} = m_{kj}$. Potom ze vztahu (2.26) plyne $m_{ji} \le m_{ik} \le m_{ij}$. Druhý vztah bude rozdělen na 3 samostatné podmínky:
   a) Nechť $1 < m_{ik} \le m_{ij}$. V kombinaci s $m_{ij} = m_{kj}$ odtud plyne $m_{ij} = \max\{m_{ik}, m_{kj}\}$, přičemž $m_{ik} > 1$ a $m_{kj} = m_{ij} > 1$. Tedy platí (2.21).
   b) Nechť $m_{ik} = 1$. V kombinaci s $m_{ij} = m_{kj}$ potom platí $m_{ij} = m_{kj} = \max\{1, m_{kj}\} = \max\{m_{ik}, m_{kj}\}$, kde $m_{ik} = 1$ a $m_{kj} > 1$. Tedy platí (2.21).
   c) Nechť $m_{ji} \le m_{ik} < 1$. V kombinaci s $m_{ij} = m_{kj}$ potom z reciprocity plyne $m_{ij} \ge m_{ki} > 1$. Dále plyne $m_{kj} = \max\{m_{ki}, m_{ij}\}$, přičemž $m_{ki} > 1$ a $m_{ij} > 1$. Tedy platí (2.21). □

**Důsledek 2.5.** *Nechť $M = \{m_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ je multiplikativní preferenční matice. Potom $M$ je slabě kozistentní právě tehdy, když pro každé $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$ takové, že*

$$m_{ij} < 1 \wedge m_{jk} > 1,$$

*platí pro $m_{ik}$ následující pro každé $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$:*

$$m_{jk} > m_{ji} \implies 1 < m_{ik} \le m_{jk}; \tag{2.27}$$

$$m_{jk} < m_{ji} \implies m_{ij} \le m_{ik} < 1; \tag{2.28}$$

$$m_{jk} = m_{ji} \implies m_{kj} \le m_{ik} \le m_{jk}. \tag{2.29}$$

**Důkaz:** Provede se analogicky jako ve větě 2.6. Tedy nejprve se ukáže, že ze slabé konzistence plynou vztahy (2.27)–(2.29) tak, že se postupně projdou případy $m_{jk} > m_{ji}$, $m_{jk} < m_{ji}$ a $m_{jk} = m_{ji}$. Pro každý případ se projdou následující možnosti pro $m_{ik}$: $m_{ik} > 1$, $m_{ik} < 1$ a $m_{ik} = 1$. Takto se dojde k požadovaným vztahům. Následně se bude předpokládat platnost vztahů (2.27)–(2.29). Postupně se ukáže, že tyto vlastnosti implikují slabou konzistenci. □

### 2.3.3. Slabá konzistence pro aditivní preference

Nyní bude zavedena slabá konzistence pro aditivní preference. Pokud bude tato podmínka pro aditivní preferenční matici splněna, potom ji budeme považovat za přijatelně konzistentní.

**Definice 2.2.** Nechť $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ je aditivní preferenční matice. Potom řekneme, že $A$ je *aditivně slabě konzistentní*, jestliže pro každé $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$ platí

$$a_{ij} > 0{,}5 \wedge a_{jk} > 0{,}5 \quad \Longrightarrow \quad a_{ik} \geq \max\{a_{ij}, a_{jk}\}; \tag{2.30}$$

$$(a_{ij} = 0{,}5 \wedge a_{jk} \geq 0{,}5) \vee (a_{ij} \geq 0{,}5 \wedge a_{jk} = 0{,}5) \Longrightarrow a_{ik} = \max\{a_{ij}, a_{jk}\}. \tag{2.31}$$

**Příklad:** Uvažujme následující prvky aditivní preferenční matice $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$. Bude ověřeno, jestli splňují podmínku aditivní slabé konzistence.

1. Nechť $a_{ij} = 0{,}6$, $a_{jk} = 0{,}7$ a $a_{ik} = 0{,}9$. Tato trojice splňuje podmínku (2.30) aditivní slabé konzistence, neboť $a_{ik} = 0{,}9 \geq \max\{0{,}6, 0{,}7\}$.
2. Nechť $a_{ij} = 0{,}6$, $a_{jk} = 0{,}8$ a $a_{ik} = 0{,}7$. Tato trojice nesplňuje podmínku (2.30) aditivní slabé konzistence, neboť $a_{ik} = 0{,}7 < \max\{0{,}6, 0{,}8\}$. △

Aditivní slabá konzistence představuje oslabení podmínky aditivní konzistence. Je-li preferenční matice aditivně konzistentní, pak je také aditivně slabě konzistentní, jak vyjadřuje následující věta.

**Věta 2.7.** *Nechť $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ je aditivní preferenční matice, která je aditivně konzistentní, tj. $a_{ik} = a_{ij} + a_{jk} - 0{,}5$ pro každé $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$. Pak je $A$ také aditivně slabě konzistentní.*

**Důkaz:** Provede se analogicky jako pro větu 2.1. □

Z aditivní preferenční matice $A$, významy jejíchž prvků jsou definované v tabulce 1.1, lze získat incidenční matice binárních relací preference $\succ$ a indiference $\sim$. Pokud je aditivní preferenční matice $A$ aditivně slabě konzistentní, pak tyto klasické relace $\succ$ a $\sim$ splňují axiomy von Neumanna a Morgensterna pro racionální chování hodnotitele. Tedy binární relace $\succeq$, která je sjednodením relací $\succ$ a $\sim$, představuje kvaziuspořádání.

**Věta 2.8.** *Nechť $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ je aditivní preferenční matice, která slouží k párovému srovnání variant $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Dále nechť $A$ je aditivně slabě konzistentní. Označme $A_i \succ A_j$ právě tehdy, když $a_{ij} > 0{,}5$, a $A_i \sim A_j$ právě tehdy, když $a_{ij} = 0{,}5$, pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Potom preferenční uspořádání prvků $A_1, A_2 \ldots, A_n$ určené binární relací $\succeq$, která je sjednocením binárních relací $\succ$ a $\sim$, tvoří kvaziuspořádání.*

**Důkaz:** Provede se analogicky jako pro větu 2.2. $\square$

**Poznámka**: Jak bylo uvedeno dříve, preferenční matice použitá v metodě párového srovnávání v kapitole 1.1 je speciálním případem aditivní preferenční matice $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$, kde $a_{ij} \in \{0, 0{,}5, 1\}$ pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Pro tuto metodu je zavedena podmínka racionality (1.2), která spolu s podmínkou aditivní reciprocity (1.1) zajišťuje kvaziuspořádání prvků. Podmínka (1.2) je speciálním případem aditivní slabé konzistence. Vztah (1.2) lze rozepsat na dílčí vlastnosti:

1. $a_{ij} = 1 \wedge a_{jk} = 1 \Longrightarrow a_{ik} = 1$;
2. $a_{ij} = 0{,}5 \wedge a_{jk} = 0{,}5 \Longrightarrow a_{ik} = 0{,}5$;
3. $(a_{ij} = 0{,}5 \wedge a_{jk} = 1) \vee (a_{ij} = 1 \wedge a_{jk} = 0{,}5) \Longrightarrow a_{ik} = 1$.

Vztah v bodě 1. odpovídá podmínce (2.20) slabé konzistence. Vztahy v bodech 2. a 3. odpovídají podmínce (2.21) slabé konzistence.

Důsledkem předchozí věty je, že aditivní preferenční matice, která je aditivně slabě konzistentní, zachovává jak tranzitivitu preference, tak tranzitivitu indiference.

**Důsledek 2.6.** *Nechť $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ je aditivní preferenční matice, která slouží k párovému srovnání variant $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Dále nechť $A$ je aditivně slabě konzistentní. Označme $A_i \succ A_j$ právě tehdy, když $a_{ij} > 0{,}5$, a $A_i \sim A_j$ právě tehdy, když $a_{ij} = 0{,}5$, pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Potom platí následující tvrzení:*

1. *Binární relace preference $\succ$ je tranzitivní, tj. pro každé $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$ platí $A_i \succ A_j \wedge A_j \succ A_k \Longrightarrow A_i \succ A_k$ a $a_{ij} > 0{,}5 \wedge a_{jk} > 0{,}5 \Longrightarrow a_{ik} > 0{,}5$.*
2. *Binární relace indiference $\sim$ je tranzitivní, tj. pro každé $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$ platí $A_i \sim A_j \wedge A_j \sim A_k \Longrightarrow A_i \sim A_k$ a $a_{ij} = 0{,}5 \wedge a_{jk} = 0{,}5 \Longrightarrow a_{ik} = 0{,}5$.*

**Důkaz:** Provede se analogicky jako pro důsledek 2.1. $\square$

Pokud je aditivní preferenční matice $A$ aditivně slabě konzistentní, potom dle předchozí věty matice $A$ určuje kvazisupořádání. Tzn. že matici $A$ je vždy možné přeuspořádat tak, aby v jejím horním trojúhelníku byly pouze hodnoty větší nebo rovny 0,5. Následující věta tedy vyjadřuje nutnou podmínku pro to, aby preferenční matice $A$ byla aditivně slabě konzistentní.

**Důsledek 2.7.** *Nechť $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ je aditivní preferenční matice, která slouží k párovému srovnání variant $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Dále nechť $A$ je aditivně slabě konzistentní. Označme $A_i \succ A_j$ právě tehdy, když $a_{ij} > 0{,}5$, a $A_i \sim A_j$ právě tehdy, když $a_{ij} = 0{,}5$, pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Potom existuje permutace $\pi : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ taková, že pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$ takové, že $\pi(i) < \pi(j)$, platí $a_{\pi(i)\pi(j)} \geq 0{,}5$ a $A_{\pi(i)} \succeq A_{\pi(j)}$, kde $\succeq$ je sjednocením binárních relací $\succ$ a $\sim$.*

**Důkaz:** Provede se analogicky jako pro důsledek 2.2. □

Při zadávání aditivní preferenční matice $A$ se většinou pracuje pouze s horním trojúhelníkem této matice. Zbylé hodnoty se doplní z vlastnosti aditivní reciprocity. V tomto případě je výhodné, aby horní trojúhelník obsahoval pouze hodnoty větší nebo rovny 0,5. Toho se docílí tím, že porovnávané prvky se uspořádají od nejpreferovanějšího po nejméně preferovaný. Je-li matice v tomto tvaru, potom je navíc velmi jednoduché aditivní slabou konzistenci kontrolovat již při zadávání preferenční matice. Aditivní slabá konzistence je v tomto případě totiž ekvivalentní s tím, že každý řádek horního trojúhelníku matice představuje neklesající posloupnost čísel a každý jeho sloupec nerostoucí posloupnost. Navíc ještě musí platit, že pokud se jinde než na hlavní diagonále vyskytuje hodnota představující indiferenci mezi dvěma prvky, potom srovnání každého prvku s libovolným z těchto dvou prvků musí být přiřazena stejná hodnota preference. Pokud nejsou porovnávané varianty předem takto uspořádané, potom je možné zkusit přeuspořádat řádky a sloupce matice $A$. Pokud bude existovat takové přeuspořádání, že pro nově vzniklou matici budou splněny výše zmíněné vlastnosti, potom je matice $A$ aditivně slabě konzistentní. Tato vlastnost je popsána v následující větě.

**Věta 2.9.** *Nechť $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ je aditivní preferenční matice. Potom $A$ je aditivně slabě konzistentní právě tehdy, když existuje permutace $\pi : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ taková, že platí následující:*

1. *posloupnost $\{a_{\pi(i)\pi(j)}\}_{\pi(j)=\pi(i)}^n$ je neklesající pro každé $i = 1, 2 \ldots, n$;*
2. *posloupnost $\{a_{\pi(i)\pi(j)}\}_{\pi(i)=1}^{\pi(j)}$ je nerostoucí pro každé $j = 1, 2, \ldots, n$;*
3. *jestliže $a_{\pi(i)\pi(j)} = 0{,}5$ pro nějaké $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, kde $\pi(i) < \pi(j)$, potom $a_{\pi(l)\pi(i)} = a_{\pi(l)\pi(j)}$ pro každé $l = 1, 2, \ldots, n$ takové, že $\pi(l) \leq \pi(i) < \pi(j)$;*
4. *jestliže $a_{\pi(i)\pi(j)} = 0{,}5$ pro nějaké $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, kde $\pi(i) < \pi(j)$, potom $a_{\pi(i)\pi(k)} = a_{\pi(j)\pi(k)}$ pro každé $k = 1, 2, \ldots, n$ takové, že $\pi(i) < \pi(j) \leq \pi(k)$.*

**Důkaz:** Provede se analogicky jako pro větu 2.3. □

Prověření aditivní slabé konzistence pro preferenčně uspořádané prvky je možno místo v horním trojúhelníku matice provést pouze ve sloupcích nebo pouze v řádcích matice $A$, jak vyjadřují následující dva důsledky.

**Důsledek 2.8.** *Nechť $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ je aditivní preferenční matice. Potom $A$ je aditivně slabě konzistentní právě tehdy, když existuje permutace $\pi : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ taková, že platí následující:*

1. *posloupnost $\{a_{\pi(i)\pi(j)}\}_{\pi(j)=1}^n$ je neklesající pro každé $i = 1, 2 \ldots, n$;*

2. *jestliže* $a_{\pi(i)\pi(j)} = 0{,}5$ *pro nějaké* $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, *kde* $i \neq j$, *potom* $a_{\pi(l)\pi(i)} = a_{\pi(l)\pi(j)}$ *pro každé* $l = 1, 2, \ldots, n$.

**Důkaz:** Provede se analogicky jako pro důsledek 2.3. □

**Důsledek 2.9.** *Nechť* $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ *je aditivní preferenční matice. Potom* $A$ *je aditivně slabě konzistentní právě tehdy, když existuje permutace* $\pi : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ *taková, že platí následující:*

1. *posloupnost* $\{a_{\pi(i)\pi(j)}\}_{\pi(i)=1}^n$ *je nerostoucí pro každé* $j = 1, 2 \ldots, n$;
2. *jestliže* $a_{\pi(i)\pi(j)} = 0{,}5$ *pro nějaké* $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, *kde* $\pi(i) \neq \pi(j)$, *potom* $a_{\pi(i)\pi(k)} = a_{\pi(j)\pi(k)}$ *pro každé* $k = 1, 2, \ldots, n$.

**Důkaz:** Provede se analogicky jako pro důsledek 2.4. □

Pro aditivně slabě konzistentní aditivní preferenční matici $A$ platí, že preferenční pořadí porovnávaných prvků, které je jim přiřazeno dle příslušných aditivních hodnocení získaných z $A$ pomocí vzorce (1.12), je stejné jako preferenční pořadí, které pro tyto prvky lze odvodit z $A$ pomocí incidenčních matic binárních relací preference $\succ$ a indiference $\sim$. Tuto vlastnost sumarizuje následující věta.

**Věta 2.10.** *Nechť* $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ *je aditivní preferenční matice, která slouží k párovému srovnání variant* $A_1, A_2, \ldots, A_n$. *Nechť je variantám* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *přiřazen vektor hodnocení* $\mathbf{h}^A = (h_1^A, h_2^A, \ldots, h_n^A)$, *který je z matice* $A$ *vypočten pomocí vzorce* (1.12). *Označme* $A_i \succ A_j$ *právě tehdy, když* $a_{ij} > 0{,}5$, *a* $A_i \sim A_j$ *právě tehdy, když* $a_{ij} = 0{,}5$, *pro každé* $i, j = 1, 2, \ldots, n$. *Nechť* $\succeq$ *je sjednocení binárních relací* $\succ$ *a* $\sim$ *na dané množině variant. Potom platí, že* $h_{\pi(1)}^A \geq h_{\pi(2)}^A \geq \cdots \geq h_{\pi(n)}^A$, *kde* $\pi : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ *je permutace taková, že* $A_{\pi(1)} \succeq A_{\pi(2)} \succeq \cdots \succeq A_{\pi(n)}$.

**Důkaz:** Nechť $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ je aditivní preferenční matice, která je aditivně slabě konzistentní. Potom dle důsledku 2.8 existuje permutace $\pi : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ taková, že pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$, kde $\pi(i) < \pi(j)$ platí $a_{\pi(i)\pi(j)} \geq 0{,}5$ a

$$A_{\pi(1)} \succeq A_{\pi(2)} \succeq \cdots \succeq A_{\pi(n)},$$

kde $\succeq$ je relace kvaziuspořádání. Dále dle důsledku 2.9 plyne, že posloupnost $\{a_{\pi(i)\pi(j)}\}_{\pi(i)=1}^n$, kde $\pi(i) < \pi(j)$, je pro každé $j = 1, 2, \ldots, n$ nerostoucí, tj. platí

$$a_{\pi(i)\pi(j)} \geq a_{\pi(k)\pi(j)},$$

pro každé $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$ takové, že $\pi(i) < \pi(k) < \pi(j)$. Pro součty výrazů na levé a pravé straně nerovnice bude platit stejná nerovnost:

$$\sum_{j=1}^n a_{\pi(i)\pi(j)} \geq \sum_{j=1}^n a_{\pi(k)\pi(j)},$$

pro každé $i, k = 1, 2, \ldots, n$ takové, že $\pi(i) < \pi(k) < \pi(j)$. Stejně tak vynásobením kladnou konstantou $\frac{2}{n} > 0$ nebude nerovnost porušena, tj. platí

$$\frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{\pi(i)\pi(j)} \geq \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{\pi(k)\pi(j)},$$

pro každé $i, k = 1, 2, \ldots, n$ takové, že $\pi(i) < \pi(k) < \pi(j)$. V poslední nerovnici se porovnávají hodnocení $h_1^A, h_2^A, \ldots, h_n^A$ prvků $A_1, A_2, \ldots, A_n$ získaná pomocí vzorce (1.12), lze ji tedy přepsat do tvaru

$$h_{\pi(i)}^A \geq h_{\pi(k)}^A,$$

kde $i, k = 1, 2, \ldots, n$ takové, že $\pi(i) < \pi(k) < \pi(j)$. □

**Příklad:**

1. Mějme následující aditivní preferenční matici $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^4$, která reprezentuje aditivní preference mezi prvky $x, y, z, w$. Bude ukázáno, že matice $A$ je aditivně slabě konzistentní a z ní vypočtená hodnocení zachovávají preferenční uspořádání porovnávaných prvků, které lze odvodit pomocí binárních relací preference a indiference.

$$A = \begin{array}{c} \\ x \\ y \\ z \\ w \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & w \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}6 & 0{,}8 & 1 \\ 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}7 & 0{,}8 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}7 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \end{pmatrix} \end{array}$$

   Pro matici $A$ platí $a_{ij} > 0{,}5$ pro každé $i, j = 1, 2, 3, 4$, $i < j$. Dle binární relace preference tedy pro porovnávané prvky platí $x \succ y \succ z \succ w$.

   Aditivní slabou konzistenci je možno ověřovat v horním trojúhelníku, v řádcích nebo ve sloupcích, jak říká věta 2.9 a důsledky 2.8 a 2.9. Je zřejmé, že řádky matice $A$ tvoří neklesající posloupnosti a sloupce matice $A$ tvoří nerostoucí poslounosti. Matice $A$ je tudíž aditivně slabě konzistentní. Pro hodnocení prvků $x, y, z, w$ dle vzorečku (1.12) platí

$$h_x^A = 1{,}45, \quad h_y^A = 1{,}2, \quad h_z^A = 0{,}85, \quad h_w^A = 0{,}5.$$

   Tj. platí $h_x^A > h_y^A > h_z^A > h_w^A$.

   Na matici $A$ byla demonstrována vlastnost ukázaná ve větě (2.10).

2. Mějme následující aditivní preferenční matice $B = \{b_{ij}\}_{i,j=1}^4$ a $C = \{c_{ij}\}_{i,j=1}^4$, které reprezentují aditivní preference mezi prvky $x, y, z, w$. Bude ukázáno, že matice $B$ ani $C$ nejsou aditivně slabě konzistentní. Přitom $B$ zachovává preferenční uspořádání porovnávaných prvků vycházející z binárních relací preference a indiference, kdežto $C$ jej nezachovává.

$$B = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} x & y & z & w \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \\ w \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}6 & 0{,}6 & 0{,}9 \\ 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}6 & 0{,}7 \\ 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}8 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix} \end{array} \qquad C = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} x & y & z & w \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \\ w \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}6 & 0{,}6 & 0{,}9 \\ 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}6 & 0{,}7 \\ 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}5 & 1 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0 & 0{,}5 \end{pmatrix} \end{array}$$

(a) Pro matici $B$ platí $b_{ij} > 0{,}5$ pro každé $i, j = 1, 2, 3, 4,\ i < j$. Z relace preference tedy vyplývá následující uspořádání prvků: $x \succ y \succ z \succ w$. Nyní bude ukázáno, jak se dá pomocí různých úhlů pohledu odvodit, že $B$ není aditivně slabě konzistentní. Pro řádky této matice matice platí: čtvrtý řádek nepředstavuje neklesající posloupnost $\{0{,}1, 0{,}3, 0{,}2, 0{,}5\}$, tedy dle důsledku 2.8 matice $B$ není aditivně slabě konzistentní. Stejně tak ve čtvrtém sloupci matice $A$ není nerostoucí posloupnost $\{0{,}9, 0{,}7, 0{,}8, 0{,}5\}$, takže stejný závěr plyne z důsledku 2.9. Pokud by se kontroloval jen horní trojúhelník matice (včetně diagonály) dle věty 2.9, potom je opět porušena neklesající posloupnost ve čtvrtém sloupci: $\{0{,}9, 0{,}7, 0{,}8, 0{,}5\}$. Matice $B$ tudíž není slabě konzistentní. Pro hodnocení prvků $x, y, z, w$ dle vzorečku (1.12) platí:

$$h_x^B = 1{,}3, \quad h_y^B = 1{,}1, \quad h_z^B = 1{,}05, \quad h_w^B = 0{,}55.$$

Tj. zde platí $h_x^B > h_y^B > h_z^B > h_w^B$, což odpovídá preferenčnímu pořadí prvků odvozenému z binární relace preference.

(b) Pro matici $C$ platí $c_{ij} > 0{,}5$ pro každé $i, j = 1, 2, 3, 4,\ i < j$. Z relace preference tedy vyplývá následující uspořádání prvků: $x \succ y \succ z \succ w$. Matice $C$ se od matice $B$ liší pouze porovnáním prvků $z$ a $w$. V horním trojúhelníku matice $C$ (včetně diagonály), je vidět, že ve čtvrtém sloupci není nerostoucí posloupnost: $\{0{,}9, 0{,}7, 1, 0{,}5\}$. Dle věty 2.9 tedy matice $C$ není aditivně slabě konzistentní. Pro hodnocení prvků $x, y, z, w$ dle vzorečku (1.12) platí:

$$h_x^C = 1{,}3, \quad h_y^C = 1{,}1, \quad h_z^C = 1{,}15, \quad h_w^C = 0{,}45.$$

Platí tedy $h_x^C > h_z^C > h_y^C > h_w^C$. Dostali jsme tedy $h_z^C > h_y^C$, ale z relace preference plyne $y \succ z$.

Nyní bylo ukázáno, že pokud aditivní preferenční matice není aditivně slabě konzistentní, potom není zaručeno, že získaná hodnocení budou odpovídat preferenčnímu uspořádání prvků, které plyne z použitých relací preference a indiference. △

Aditivní slabá konzistence je definována jen pro hodnoty z intervalu $\langle 0{,}5, 1\rangle$. Analogicky by bylo možné aditivní slabou konzisteci zadefinovat pro prvky z intervalu $\langle 0, 0{,}5\rangle$, což vyjadřuje následující věta.

**Věta 2.11.** *Nechť* $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ *je aditivní preferenční matice. Potom* $A$ *je aditivně slabě kozistentní právě tehdy, když pro každé* $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$ *platí*

$$a_{ij} < 0{,}5 \wedge a_{jk} < 0{,}5 \quad \Longrightarrow \quad a_{ik} \leq \min\{a_{ij}, a_{jk}\}; \tag{2.32}$$

$$(a_{ij} = 0{,}5 \wedge a_{jk} \leq 0{,}5) \vee (a_{ij} \leq 0{,}5 \wedge a_{jk} = 0{,}5) \Longrightarrow a_{ik} = \min\{a_{ij}, a_{jk}\}. \tag{2.33}$$

**Důkaz:** Provede se analogicky jako pro větu 2.5. □

Jak vypadá nepřímé srovnání dvou prvků u slabě konzistentní matice $A$, pokud přímá srovnání dvou prvků nabývají hodnot z intervalů $\langle 0, 0{,}5)$ a $(0{,}5, 1\rangle$, vyjadřuje následující věta a její důsledek. Popisují další nutné a zároveň postačující podmínky pro to, aby matice $A$ byla aditivně slabě konzistentní.

**Věta 2.12.** *Nechť* $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ *je aditivní preferenční matice. Potom* $A$ *je aditivně slabě kozistentní právě tehdy, když pro každé* $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$ *takové, že*

$$a_{ij} > 0{,}5 \wedge a_{jk} < 0{,}5,$$

*platí pro* $a_{ik}$ *následující pro každé* $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$*:*

$$a_{ij} > a_{kj} \quad \Longrightarrow \quad 0{,}5 < a_{ik} \leq a_{ij}; \tag{2.34}$$

$$a_{ij} < a_{kj} \quad \Longrightarrow \quad a_{jk} \leq a_{ik} < 0{,}5; \tag{2.35}$$

$$a_{ij} = a_{kj} \quad \Longrightarrow \quad a_{ji} \leq a_{ik} \leq a_{ij}. \tag{2.36}$$

**Důkaz:** Provede se analogicky jako pro větu 2.6. □

**Důsledek 2.10.** *Nechť* $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ *je aditivní preferenční matice. Potom* $A$ *je aditivně slabě kozistentní právě tehdy, když pro každé* $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$ *takové, že*

$$a_{ij} < 0{,}5 \wedge a_{jk} > 0{,}5,$$

*platí pro* $a_{ik}$ *následující pro každé* $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$*:*

$$a_{jk} > a_{ji} \quad \Longrightarrow \quad 0{,}5 < a_{ik} \leq a_{jk}; \tag{2.37}$$

$$a_{jk} < a_{ji} \quad \Longrightarrow \quad a_{ij} \leq a_{ik} < 0{,}5; \tag{2.38}$$

$$a_{jk} = a_{ji} \quad \Longrightarrow \quad a_{kj} \leq a_{ik} \leq a_{jk}. \tag{2.39}$$

**Důkaz:** Provede se analogicky jako pro důsledek 2.5. □

### 2.3.4. Multiplikativní vs. aditivní slabá konzistence

Slabá konzistence byla pro multiplikativní i pro aditivní preferenční matici nadefinována tak, aby na zadané preference byly kladeny stejné požadavky. Podmínky multiplikativní a aditivní slabé konzistence jsou tudíž izomorfní.

**Věta 2.13.** *Nechť $M = \{m_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ je multiplikativní preferenční matice, kde $m_{ij} \in \langle \frac{1}{\sigma}, \sigma \rangle$, $\sigma > 1$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ a nechť $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ je aditivní preferenční matice, kde $a_{ij} \in \langle 0, 1 \rangle$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Nechť pro prvky těchto matic platí $m_{ij} = \sigma^{2a_{ij}-1}$, resp. $a_{ij} = \frac{1}{2}(1 + \log_\sigma m_{ij})$, pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Potom matice $M$ je slabě konzistentní právě tehdy, když matice $A$ je aditivně slabě konzistentní.*

**Důkaz:** Nechť $M = \{m_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ je multiplikativní preferenční matice s hodnotami náležícími $\langle \frac{1}{\sigma}, \sigma \rangle$, $\sigma > 1$, a nechť $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ je aditivní preferenční matice s hodnotami z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Nechť pro převod mezi prvky matic platí (1.14) a (1.13).

1) Nechť $M$ je slabě konzistentní, tj. platí (2.20) a (2.21) pro každé $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$:

$$m_{ij} > 1 \wedge m_{jk} > 1 \quad \Longrightarrow \quad m_{ik} \geq \max\{m_{ij}, m_{jk}\}.$$

$$(m_{ij} = 1 \wedge m_{jk} \geq 1) \vee (m_{ij} \geq 1 \wedge m_{jk} = 1) \quad \Longrightarrow \quad m_{ik} = \max\{m_{ij}, m_{jk}\}.$$

Dle převodního vztahu (1.13) mezi maticemi platí $a_{ij} = \frac{1}{2}(1 + \log_\sigma m_{ij})$ pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Pro $m_{ij} = 1$ odtud plyne $a_{ij} = 0{,}5$. Protože $\sigma > 1$, převodní vztah (1.13) představuje rostoucí funkci. Pak bude-li $m_{ij} > 1$, pak platí $a_{ij} > 0{,}5$. Stejně tak platí následující: je-li $m_{ik} \geq m_{ij}$, pak $a_{ik} \geq a_{ij}$, je-li $m_{ik} \geq m_{jk}$, pak $a_{ik} \geq a_{jk}$, je-li $m_{ik} = m_{ij}$, pak $a_{ik} = a_{ij}$, a je-li $m_{ik} = m_{jk}$, pak $a_{ik} = a_{jk}$, $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$. Díky tomu je možno předchozí dva vztahy přepsat pro každé $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$ do tvaru

$$a_{ij} > 0{,}5 \wedge a_{jk} > 0{,}5 \quad \Longrightarrow \quad a_{ik} \geq \max\{a_{ij}, a_{jk}\}.$$

$$(a_{ij} = 0{,}5 \wedge a_{jk} \geq 0{,}5) \vee (a_{ij} \geq 0{,}5 \wedge a_{jk} = 0{,}5) \quad \Longrightarrow \quad a_{ik} = \max\{a_{ij}, a_{jk}\}.$$

2) Nechť $A$ je aditivně slabě konzistentní, tj. platí (2.30) a (2.31) pro každé $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$:

$$a_{ij} > 0{,}5 \wedge a_{jk} > 0{,}5 \quad \Longrightarrow \quad a_{ik} \geq \max\{a_{ij}, a_{jk}\}.$$

$$(a_{ij} = 0{,}5 \wedge a_{jk} \geq 0{,}5) \vee (a_{ij} \geq 0{,}5 \wedge a_{jk} = 0{,}5) \quad \Longrightarrow \quad a_{ik} = \max\{a_{ij}, a_{jk}\}.$$

Dle převodního vztahu (1.14) mezi maticemi platí $m_{ij} = \sigma^{2a_{ij}-1}$ pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Pro $a_{ij} = 0{,}5$ odtud plyne $m_{ij} = 1$. Vztah (1.14) představuje pro $\sigma > 1$ rostoucí funkci. Díky tomu je možno analogicky jako v bodě 1) aditivní slabou konzistenci přepsat pro každé $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$ do tvaru

$$m_{ij} > 1 \wedge m_{jk} > 1 \quad \Longrightarrow \quad m_{ik} \geq \max\{m_{ij}, m_{jk}\}.$$

$$(m_{ij} = 1 \wedge m_{jk} \geq 1) \vee (m_{ij} \geq 1 \wedge m_{jk} = 1) \quad \Longrightarrow \quad m_{ik} = \max\{m_{ij}, m_{jk}\}.$$

Bylo dokázáno, že matice $M$ je slabě konzistentní právě tehdy, když matice $A$ je aditivně slabě konzistentní. $\square$

Je-li hodnocení vypočteno ze slabě konzistentní matice $M$ nebo z aditivně slabě konzistentní matice $A$, ponesou tato hodnocení stejnou informaci o uspořádání porovnávaných prvků.

**Věta 2.14.** *Nechť $M = \{m_{ij}\}_{i,j=1}^n$ je slabě konzistentní multiplikativní preferenční matice, která slouží k párovému srovnání variant $A_1, A_2, \dots, A_n$. Nechť je variantám $A_1, A_2, \dots, A_n$ přiřazeno hodnocení $h_1, h_2, \dots, h_n$, které je vypočteno z matice $M$ pomocí geometrického průměru řádku (1.8) nebo pomocí metody vlastního vektoru (1.9). Nechť $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ je aditivně slabě konzistentní aditivní preferenční matice, která vznikne z matice $M$ pomocí převodního vztahu (1.13). Nechť $h_1^A, h_2^A, \dots, h_n^A$ jsou aditivní hodnocení variant $A_1, A_2, \dots, A_n$ vypočtená z matice $A$ dle vzorce (1.12). Označme $A_i \succ A_j$ právě tehdy, když $m_{ij} > 1$, a $A_i \sim A_j$ právě tehdy, když $m_{ij} = 1$, pro každé $i, j = 1, 2, \dots, n$. Nechť $\succeq$ je sjednocení binárních relací $\succ$ a $\sim$ definovaných na dané množině variant. Potom pro uspořádání hodnocení dle velikosti platí:*

$$h_{\pi(1)} \geq h_{\pi(2)} \geq \cdots \geq h_{\pi(n)} \quad \Longleftrightarrow \quad h_{\pi(1)}^A \geq h_{\pi(2)}^A \geq \cdots \geq h_{\pi(n)}^A,$$

*kde $\pi : \{1, 2, \dots, \} \to \{1, 2, \dots, n\}$ je permutace taková, že $A_{\pi(1)} \succeq A_{\pi(2)} \succeq \cdots \succeq A_{\pi(n)}$.*

**Důkaz:** Nechť platí uvedené předpoklady a nechť $\pi : \{1, 2, \dots, \} \to \{1, 2, \dots, n\}$ je permutace taková, že $A_{\pi(1)} \succeq A_{\pi(2)} \succeq \cdots \succeq A_{\pi(n)}$, kde $\succeq$ je relace kvaziuspořádání, která vznikne sjednocením binárních relací $\succ$ a $\sim$ odvozených z matice $M$.

Dle věty 2.4 pro hodnocení vypočtená ze slabě konzistentní matice $M$ dle (1.8) nebo (1.9) platí $h_{\pi(1)} \geq h_{\pi(2)} \geq \cdots \geq h_{\pi(n)}$. Funkce (1.13), která převádí prvky matice $M$ na prvky matice $A$, je rostoucí funkce. Navíc platí, že prvek $m_{ij} = 1$ se předeve na $a_{ij} = 0{,}5$ a prvek $m_{ij} > 1$ se přede na $a_{ij} > 0{,}5$. Potom tedy platí, že matice $A$ určuje stejnou relaci kvaziuspořádání jako matice $M$. Tedy permutace $\pi$ určuje stejné preferenční pořadí porovnávaných variant. Potom dle věty 2.10 pro aditivní hodnocení vypočtená z aditivně slabě konzistentní matice $A$ dle (1.12) platí $h_{\pi(1)}^A \geq h_{\pi(2)}^A \geq \cdots \geq h_{\pi(n)}^A$. Tedy hodnocení vypočtená z obou uvažovaných matic udávají stejné uspořádání prvků, tj. $h_{\pi(1)} \geq h_{\pi(2)} \geq \cdots \geq h_{\pi(n)} \Longleftrightarrow h_{\pi(1)}^A \geq h_{\pi(2)}^A \geq \cdots \geq h_{\pi(n)}^A$. $\square$

**Věta 2.15.** *Nechť $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ je aditivně slabě konzistentní aditivní preferenční matice, která slouží k párovému srovnání variant $A_1, A_2, \dots, A_n$. Nechť je variantám $A_1, A_2, \dots, A_n$ přiřazeno aditivní hodnocení $h_1^A, h_2^A, \dots, h_n^A$, které je vypočteno z matice $A$ pomocí vzorce (1.12). Nechť $M = \{m_{ij}\}_{i,j=1}^n$ je slabě konzistentní multiplikativní preferenční matice, která vznikne z matice $A$*

*pomocí převodního vztahu* (1.14). *Nechť* $h_1, h_2, \dots, h_n$ *jsou hodnocení variant* $A_1, A_2, \dots, A_n$ *vypočtená z matice* $M$ *pomocí geometrického průměru řádku* (1.8) *nebo pomocí metody vlastního vektoru* (1.9). *Označme* $A_i \succ A_j$ *právě tehdy, když* $a_{ij} > 0{,}5$, *a* $A_i \sim A_j$ *právě tehdy, když* $a_{ij} = 0{,}5$, *pro každé* $i, j = 1, 2, \dots, n$. *Nechť* $\succeq$ *je sjednocení binárních relací* $\succ$ *a* $\sim$ *definovaných na dané množině variant. Potom pro uspořádání hodnocení dle velikosti platí:*

$$h^A_{\pi(1)} \geq h^A_{\pi(2)} \geq \dots \geq h^A_{\pi(n)} \quad \Longleftrightarrow \quad h_{\pi(1)} \geq h_{\pi(2)} \geq \dots \geq h_{\pi(n)},$$

*kde* $\pi : \{1, 2, \dots, \} \to \{1, 2, \dots, n\}$ *je permutace taková, že* $A_{\pi(1)} \succeq A_{\pi(2)} \succeq \dots \succeq A_{\pi(n)}$.

**Důkaz:** Provede se analogicky jako důkaz věty 2.14. □

# Kapitola 3

# Neúplné matice párových porovnání

Tato kapitola je zaměřena na situaci, kdy je třeba párově porovnat velký počet prvků a problém nelze rozdělit na jednodušší subproblémy. Bude popsáno, jak tuto situaci zjednodušit výpočtem hodnocení z neúplných matic párového porovnání. V kapitole 3.1 bude shrnut aktuální stav této problematiky. V kapitole 3.2 bude popsán algoritmus Fedrizziho a Gioveho pro optimální vyplňování neúplné matice, který bude následně použit k zavedení nové metody v kapitole 3.3. Původní výsledky uvedené v této kapitole byly publikovány v [47].

## 3.1. Algoritmy pro neúplné matice párových porovnání

V reálných aplikacích se hodnotitel může potýkat s tím, že do hodnotícího procesu je zahrnuto velké množství prvků. Jak víme, pro $n$ prvků je potřeba provést $n(n-1)/2$ párových porovnání. Pro velká $n$ potom může být pro hodnotitele problematické zadat úplnou preferenční matici. Pokud se v hodnotícím modelu vyskytuje velký počet kritérií, potom Saaty [73] navrhuje rozdělit je do hierarchické struktury, čímž dojde ke snížení počtu nutných párových srovnání. Tento postup ale nemusí být vždy vhodný. Může se stát, že jednotlivé skupiny kritérií jsou pro hodnotitele moc abstraktní a těžko uchopitelné a nedokáže je tak spolu porovnat. Pro velký počet porovnávaných variant je zase možno místo konkrétních variant porovnávat obecné katergorie, do kterých se potom varianty následně zařazují, viz více v kapitole 4. Takto jsou tedy místo konkrétních variant v podstatě porovnávány skupiny variant s podobnou vlastností. V důsledku toho se stírají jemné rozdíly mezi jednotlivými variantami a celá skupina variant má stejné ohodnocení. Toto tedy také nemusí být požadovaný stav, kterého chce hodnotitel dosáhnout.

Pokud tedy uvažovaný problém nemůže být rozdělen na menší subproblémy, potom je nutno pracovat s preferenční maticí porovnávající všech uvažovaných $n$ prvků. Pro velká $n$ je ale často problematické získat od hodnotitele všechny hodnoty. Např. pro 20 prvků bychom takto museli provést 190 párových srovnání. Čím větší je počet požadovaných párových srovnání, tím větší je také často únava a nepozornost hodnotitele, v důsledku čehož narůstá nekonzistence zadávaných hodnot. Výsledná preferenční matice potom nemusí nést dostatečně relevantní informace o preferencích hodnotitele.

Možným řešením takové situace je nechat hodnotitele vyplnit jen část z potřebných $n(n-1)/2$ hodnot a hodnocení prvků tak získat na základě neúplné preferenční matice. Tato situace s sebou však přináší dvě otázky: Jak sestavit neúplnou preferenční matici tak, aby hodnotitel musel zadat sice co nejméně párových srovnání, ale zároveň dostatečný počet hodnot na to, aby matice nesla dostatek informací k získání relevantního hodnocení prvků? Jak z neúplné preferenční matice vypočítat hodnocení porovnávaných prvků? Níže budou představeny přístupy, kterými tyto problémy řešili různí autoři.

**Metody zadávání neúplné matice párových porovnání**

Pro efektivní zadání neúplné matice párového porovnání, které by snížilo počet párových porovnání potřebných od hodnotitele, bylo navrženo několik metod. Touto problematikou se zabývali např. Herrera-Viedma a kol. [35], Harker a Millet [34], Fedrizzi a Giove [27], Sanchez a Sayer [83] nebo Ra [67].

Minimální počet párových srovnání pro $n$ variant tak, aby z těchto párových srovnání bylo možno odvodit vztahy pro celou množinu variant, je $n-1$. Metodou pracující na tomto principu se zabývali např. Herrera-Viedma a kol. [35]. Wedley, Schoner a Tang [101] se zaměřili na různé způsoby, jak těchto $n-1$ párových srovnání vybrat. Tento přístup odpovídá požadavku maximálně zredukovat počet vstupů požadovaných od hodnotitele. Na druhou stranu ale tato metoda nepracuje s důležitou vlastností metod párového srovnávání - nevyužívá redundanci informací zadaných v preferenční matici, díky níž lze odhalit, pokud hodnotitel provádí iracionální úsudky.

Harker [33, 32] a později také Harker a Millet [34] navrhli iterativní metodu pro výběr následující dvojice prvků, pro které má hodnotitel zadat párové srovnání. V této metodě uvažovali chybějící párová srovnání v multiplikativní preferenční matici $M = \{m_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ ve tvaru $m_{ij} = \frac{h_i}{h_j}$, kde $h_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, jsou hodnocení příslušných variant. V každém kroku metody se vypočte gradient vektoru hodnocení a hodnotiteli je předloženo k vyplnění párové srovnání, pro nějž příslušná složka vektoru hodnocení nabývá největší změny. Proces je zastaven, když se vektor hodnocení vypočtený v posledních dvou krocích metody liší méně, než je zadaná hranice.

Fedrizzi a Giove [27] předkládají hodnotiteli k vyplnění párové srovnání pro tu dvojici prvků, která maximalizuje hodnotící funkci založenou na dvou kritériích. Prvním kritériem je, jak moc informací už o daném párovém srovnání máme. Tj. jak moc nepřímých párových srovnání už bylo pro uvažované párové srovnání provedeno. Druhým kritériem je, jak kvalitní informaci pro toto párové srovnání máme. Tj. jak moc nekonzistentní vychází uvažované párové srovnání pomocí již zadaných nepřímých párových srovnání. Touto metodou se ještě budeme dále zabývat a proto bude podrobně popsána v kapitole 3.2.

**Metody výpočtu hodnocení vycházející z neúplné matice párových porovnání**

Jakmile je k dispozici neúplná matice párových porovnání, je potřeba z ní získat hodnocení porovnávaných variant. To lze udělat dvěma způsoby:

1. Doplněním chybějících hodnot matice párových porovnání a vypočtením hodnocení variant dle běžně používaných metod pro úplné matice párových porovnání.

   V tomto případě jsou chybějící párová srovnání odhadnuta na základě párových srovnání provedených hodnotitelem. Tyto dopočtené hodnoty jsou různými způsoby odvozené z podmínky konzistence. Vychází se přitom z myšlenky, že doplněná matice by měla být co nejvíce v souladu s preferencemi zadanými hodnotitelem.

   Tímto způsobem výpočtu hodnocení variant z neúplné preferenční matice se zabývali např. Alonso a kol. [1], Fedrizzi a Giove [26], Herrera-Viedma a kol.[35], Shiraishi a kol. [86] nebo Srdjevic a kol. [87]. Brunelli a kol. [10] publikovali simulační studii porovnávající 7 metod výpočtu hodnocení pomocí rekonstrukce neúplné matice párového porovnání.

2. Výpočtem hodnocení variant přímo z neúplné matice párových porovnání.

   V tomto případě se vychází z toho, že párová srovnání představují odhad výrazu, který reprezentuje vztah mezi hodnoceními uvažovaných prvků. Hodnocení variant se potom počítají různými způsoby pomocí minimalizace chyby takového odhadu. Z vypočteného hodnocení je potom možné rekonstruovat chybějící hodnoty v uvažované matici párových porovnání.

   Metodami tohoto typu, kdy je možné odvodit hodnocení variant přímo z neúplné preferenční matice, se zabývali např. Bozóki a kol. [5], Gao a kol. [28], Gong [29], Ramík [70] nebo Xu [104, 105].

## 3.2. Algoritmus Fedrizziho a Gioveho

Nyní bude popsán algoritmus autorů Fedrizzi a Giove [27] pro výběr optimální dvojice prvků, pro kterou je třeba vyplnit párové srovnání v neúplné preferenční matici. Tento algoritmus bude v následující kapitole upraven tak, aby pracoval s podmínkou slabé konzistence a bude k němu doplněno, jak vypočítat hodnocení porovnávaných prvků.

Nechť $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ je aditivní preferenční matice sloužící k párovému porovnání prvků $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Označme zjednodušeně $(i, j)$ uspořádanou dvojici prvků $A_i$ a $A_j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Algoritmus představený v [27] pracuje s hodnotící funkcí $f$, která určuje nezbytnost provést párové srovnání pro dvojici $(i, j)$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, pro niž zatím není párové srovnání zadáno. Tato hodnotící funkce je definována

$$f(i, j) = \lambda z_{ij} + (1 - \lambda)p_{ij}, \tag{3.1}$$

kde $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$. Proměnná $z_{ij}$ je definována vztahem (3.3) a proměnná $p_{ij}$ je definována vztahem (3.4). Tyto proměnné lze chápat jako kritéria s následujícími významy: První kritérium je označeno $z_{ij}$ a slouží k tomu, aby pro každý nevyplněný element prefenční matice hodnotitel získal dostatečný počet nepřímých párových srovnání. Druhé kritérium se značí $p_{ij}$ a slouží k redukci nekonzistence matice párového porovnání. Parametr $\lambda$ potom slouží k určení významnosti mezi těmito kritérii. Čím větší je hodnota funkce $f$, tím je nutnější provést srovnání $A_i$ s $A_j$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Proto v každém kroku algoritmu hodnotitel vyplní $a_{ij}$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, pro které platí

$$(i, j) = \arg \max_{(k,l)\in\Omega\setminus Q} f(k, l), \tag{3.2}$$

kde $Q$ je množina těch dvojic prvků v horním trojúhelníku matice, pro které již bylo hodnotitelem zadáno párové srovnání, a $\Omega = \{(i, j); i, j = 1, 2, \ldots, n, i < j\}$ je množina všech dvojic mezi uvažovanými $n$ prvky, pro něž je třeba zadat párové srovnání k úplnému vyplnění matice $A$. Tj. pracuje se jen s horním trojúhelníkem matice, dolní trojúhelník je vyplněn automaticky z aditivní reciprocity (1.10) a prvky na diagonále jsou rovny 0,5.

Kritéria použitá v hodnotící funkci $f$ jsou definována pro každé $(i, j) \in \Omega \setminus Q$ následovně:

$$z_{ij} = 1 - \frac{Card(Q_i) + Card(Q_j)}{2(n - 2)}, \tag{3.3}$$

$$p_{ij} = \frac{3\varphi_{ij}}{Card(Q_i \cap Q_j) + 1}. \tag{3.4}$$

Uvažujme nejprve pro $(i, j) \in \Omega\setminus Q$ výraz (3.3): Zde platí $Q_i = \{k; (i, k) \in Q\}$. Potom $Card(Q_i) + Card(Q_j)$ je počet provedených párových srovnání s prvky $A_i$ a $A_j$. Přitom $Card(Q_i) \leq n - 2$, neboť pro dvojici $(i, j)$ ještě nebylo párové srovnání hodnotitelem zadáno a dvojice $(i, i)$ se neuvažuje. Proto platí $Card(Q_i)+Card(Q_j) \leq 2(n - 2)$ a výraz $(Card(Q_i) + Card(Q_j))/2(n - 2)$ reprezentuje normovaný počet párových srovnání zahrnujících varianty $A_i$ a $A_j$. Kritérium $z_{ij}$ je potom pomocí tohoto výrazu definováno v (3.3) tak, aby představovalo rostoucí funkci. Kritérium $z_{ij}$ je možno interpretovat jako nedostatek provedených párových srovnání mezi objekty $A_i$ a $A_j$.

Nyní uvažujme pro $(i, j) \in \Omega \setminus Q$ druhý výraz (3.4): Zde je $\varphi_{ij}$ střední hodnota nekonzistence nepřímých srovnání provedených s prvky $A_i$ a $A_j$. Nejprve je třeba zadefinovat si proměnnou $\mu_{ij}$, která představuje střední hodnotu nepřímých srovnání s prvky $A_i$ a $A_j$. Tato proměnná je založena na tom, jak by měla vypadat přímá srovnání dle podmínky aditivní konzistence (1.11):

$$\mu_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{jestliže } Q_i \cap Q_j = \emptyset, \\ \sum\limits_{k \in Q_i \cap Q_j} \frac{a_{ik}+a_{kj}-0{,}5}{Card(Q_i \cap Q_j)}, & \text{jestliže } Q_i \cap Q_j \neq \emptyset. \end{cases} \tag{3.5}$$

Nepřímá srovnání ale nejsou obvykle úplně konzistentní, proto je zavedena střední hodnota nekonzistence $\varphi_{ij}$ nepřímých srovnání provedených s prvky $A_i$ a $A_j$:

$$\varphi_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{jestliže } Q_i \cap Q_j = \emptyset, \\ \sum\limits_{k \in Q_i \cap Q_j} \frac{(a_{ik}+a_{kj}-0{,}5-\mu_{ij})^2}{Card(Q_i \cap Q_j)}, & \text{jestliže } Q_i \cap Q_j \neq \emptyset. \end{cases} \tag{3.6}$$

Hodnota $\varphi_{ij}$ představuje rozptyl $(a_{ih} + a_{hj} - 0{,}5)$ a platí, že $\varphi_{ij} = 0$ právě tehdy, když všechna nepřímá srovnání $A_i$ a $A_j$ jsou aditivně konzistentní. Označíme-li $\Delta\varphi_{ij}$ maximální možnou redukci $\varphi_{ij}$, potom jí můžeme dosáhnout zadáním přímého srovnání $a_{ij} = \mu_{ij}$. Potom dostaneme $\Delta\varphi_{ij} = \varphi_{ij}/(Card(Q_i \cap Q_j) + 1)$. Jak je ukázáno v [27], platí $\Delta\varphi_{ij} \leq \frac{1}{3}$. Tedy kritérium $p_{ij}$ definované v (3.4) představuje normovanou hodnotu $\Delta\varphi_{ij}$. Toto kritérium reprezentuje maximální možnou redukci nekonzistence $\varphi_{ij}$, která může být dosažena zadáním přímého srovnání pro dvojici $(i, j)$.

Níže jsou shrnuty jednotlivé kroky algoritmu pro výběr optimální dvojice prvků pro zadání párového srovnání, který navrhli Fedrizzi a Giove:

1. Nejprve se zvolí $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$. V matici $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ jsou doplněna párová srovnání pro dvojice $(i, i)$, tj. $a_{ii} = 0{,}5$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$. Pracuje se pouze s horním trojúhelníkem matice $A$. Pokaždé, když bude zadáno párové srovnání pro $(i, j)$, kde $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i < j$, tj. $a_{ij} \in \langle 0, 1\rangle$, bude dle podmínky aditivní reciprocity (1.10) doplněna hodnota $a_{ji} = 1 - a_{ij}$.
2. Na začátku algoritmu nejsou v horním trohúhelníku matice $A$ vyplněny žádné hodnoty, tj. $Q = \emptyset$. Tedy $z_{ij} = 1$, $p_{ij} = 0$ a $f(i, j) = \lambda$ pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $i < j$. Je doporučeno jako počáteční hodnoty zadat párová srovnání pro dvojice $\{(2i - 1, 2i); i = 1, 2, \ldots, n/2\}$, jestliže $n$ je sudé, a $\{(2i - 1, 2i); i = 1, 2, \ldots, (n - 1)/2\}$, pokud $n$ je liché.
3. V každém kroku algoritmu je pro všechna chybějící párová srovnání vypočtena hodnota funkce $f$ pomocí vzorce (3.1). Dle (3.2) je vybrána dvojice prvků $(i, j) \in \Omega \setminus Q$, pro niž hodnotitel provede zadání párového srovnání. Pokud vyjde více dvojic prvků vyhovujících (3.2), potom se vybere ta dvojice, pro kterou je minimální součet indexů $i + j$. Pokud je i takových dvojic více, potom bude zvolen pár, který obsahuje nejmenší index.

4. Algoritmus končí, když hodnota funkce $f$ bude menší než zvolená hranice $\delta \in \langle 0, 1 \rangle$, tj. když platí

$$\max_{\{i,j\} \in \Omega \setminus Q} f(i,j) \leq \delta. \tag{3.7}$$

Výsledkem je neúplná preferenční matice $A$, která má pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$ na pozicích $a_{ij}$, kde $(i, j) \in Q$, vyplněny hodnoty ze škály $\langle 0, 1 \rangle$ a na pozicích $a_{ij}$, kde $(i, j) \in \Omega \setminus Q$, nejsou zadány žádné hodnoty.

## 3.3. Nový algoritmus pro konstrukci neúplných preferenčních matic

V této kapitole bude zavedena metoda pro efektivní získávání párových srovnání variant od hodnotitele tak, aby získaná data byla přijatelně konzistentní a aby vzniklá preferenční matice nesla dostatek informací k výpočtu hodnocení porovnávaných variant. Tato metoda bude založena na algoritmu Fedrizziho a Gioveho [27] pro konstrukci neúplné prefernční matice, který je popsán v kapitole 3.2, a bude využívat podmínku slabé konzistence zavedenou v kapitole 2.3. Pro výpočet hodnocení bude použita fuzzifikace váženého průměru navržená v [54] a zmíněná v kapitole 1.2.4. Výsledná hodnocení tak budou dána intervalově. Narozdíl od běžně používaných metod tedy bude v tomto přístupu zachována neurčitost daná v preferenční matici chybějícími párovými srovnáními.

Většina výhod navržené metody plyne z využití podmínky slabé konzistence matice. V každém kroku algoritmu bude mít hodnotitel k dispozici hodnoty, které může pro vybrané párové srovnání vyplnit tak, aby přitom neporušil slabou konzistenci matice. Podmínka slabé konzistence bude navíc využita také k automatickému vyplňování některých prvků matice. Tímto dojde pro hodnotitele ke zjednodušení celého procesu zadávání preferenční matice. Z výsledné neúplné preferenční matice je díky slabé konzistenci možno určit preferenční uspořádání porovnávaných variant bez nutnosti počítat jejich hodnocení. Intervalová hodnocení porovnávaných prvků získaná z preferenční matice zachovávají díky slabé konzistenci toto uspořádání.

**Popis metody**

Navržený algoritmus pracuje s diskrétní hodnotící škálou. Taková škála je využívaná častěji než spojitá díky tomu, že jejím prvkům lze přiřadit slovní hodnoty. Navržená metoda vychází z algoritmu autorů Fedrizzi a Giove popsaného v kapitole 3.2. Pomocí něj je vybrán optimální element matice, který by měl hodnotitel vyplnit tak, aby přinesl dostatek informace a nezvýšil významně nekonzistenci matice. Z hodnot ostatních prvků matice jsou pro tento element vypočteny povolené hodnoty, ze kterých může hodnotitel vybírat tak, aby matice zůstávala slabě konzistentní. Přípustné hodnoty pro zachování slabé konzistence jsou vypočteny také pro všechny ostatní dosud jednoznačně nedefinované prvky matice. Pro jednoduchost jsou tyto množiny zapisovány přímo do preferenční matice místo chybějících hodnot. Takto vzniká v podstatě neurčitá preferenční matice, jejíž elementy tvoří diskrétní intervaly hodnot. Protože tento algoritmus navazuje na algoritmus Fedrizziho a Gioveho pro zadávání párových srovnání v neúplné preferenční matici, je i zde vyplňovaná preferenční matice nazývána neúplnou maticí. V tomto případě však budou chybějící data nahrazena množinami přípustných hodnot, budou tedy dána neurčitě.

Jakmile hodnotitel v uvažované matici vyplní nějakou intenzitu párové preference, jsou všechny tyto množiny přípustných hodnot přepočítány a může dojít k jejich zúžení. V některých případech je pro dané párové srovnání přípustná jediná hodnota, která zajistí slabou konzistenci matice. V takovém případě je tedy jednoznačně definovaná hodnota určena automaticky a nepředkládá se již k doplnění hodnotiteli. Toto zajistí snížení počtu párových srovnání, která musí být vyplněna přímo hodnotitelem. Jakmile je k dispozici dostatek vyplněných, resp. jednoznačně definovaných, párových porovnání, zadávání hodnot skončí. Výsledkem je neúplná, resp. neurčitá, matice párových porovnání, kde každý její element bude buď dán jednoznačně prvkem z uvažované škály, nebo pro něj bude vymezena množina přípustných hodnot z této škály. Bude se jednat o takové hodnoty, které nebudou porušovat slabou konzistenci matice. U takovéto matice je třeba ještě zkontrolovat, jestli všechny množiny přípustných hodnot obsahují pouze hodnoty z jedné strany hodnotící škály vzhledem k indiferenci. Pokud ne, tak nelze určit preferenční pořadí porovnávaných variant. V takovém případě je ještě nutné obdobným postupem, který byl popsán výše, doplnit konkrétní hodnoty expertně. Jakmile je toto provedeno, je možné z této neúplné matice určit preferenční pořadí porovnávaných variant. Pro porovnávané prvky se vypočtou jejich intervalová hodnocení, k čemuž jsou využity vzorce pro výpočet fuzzifikovaného geometrického průměru uvedené v [54]. Tyto vzorce byly zavedeny pro fuzzy AHP, které je zmíněno v kapitole 1.2.4. Získaná intervalová hodnocení jsou taková, že pokud by hodnotitel vyplnil celou preferenční matici tak, aby byla slabě konzistentní, potom příslušná reálná hodnocení budou ležet uvnitř těchto intervalů. Simulace ukázaly, že tímto způsobem je možno v průměru zredukovat párová srovnání požadovaná od hodnotitele až o 60%.

**Předpoklady**

Algoritmus je možno definovat jak pro multiplikativní preferenční matici $M$, tak pro aditivní preferenční matici $A$. Vzhledem k tomu, že tyto dva přístupy jsou dle kapitoly 1.2.3 ekvivalentní, je algoritmus popsán pro případ, kdy hodnotitel zadává multiplikativní preference. Nakonec bude pouze stručně shrnuta aditivní verze. Uvažujeme diskrétní škálu. Intenzity preferencí se tedy budou zadávat na multiplikativní škále $I \subset \langle \frac{1}{\sigma}, \sigma \rangle$, $\sigma > 1$, kde $I = L \cup \{1\} \cup P$, $P = \{c_2, c_3, \ldots, c_N\}$, $L = \{\frac{1}{c_N}, \frac{1}{c_{N-1}}, \ldots, \frac{1}{c_2}\}$, $c_2, c_3 \ldots, c_N > 1$, $c_N = \sigma$.

Uvažujme varianty $A_1, A_2, \ldots, A_n$, kterým je třeba přiřadit hodnocení vůči kritériu $K$. Dále uvažujme slabě konzistentní multiplikativní preferenční matici $M = \{m_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$, kde $m_{ij} \in I$ pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Jedná se o preferenční matici, která by vznikla v případě, že by hodnotitel zadal všechna párová srovnání. Tedy $M$ by představovala *úplnou preferenční matici* párového porovnání variant $A_1, A_2, \ldots, A_n$, tj. takovou preferenční matici, kde jsou všechna párová srovnání jednoznačně zadána. Dále uvažujme hodnocení $h_1, h_2, \ldots, h_n$ variant $A_1, A_2, \ldots, A_n$, která by v tomto případě byla z matice $M$ vypočtena pomocí geometrického průměru řádků (1.8).

Nyní uvažujme multiplikativní preferenční matici příslušnou variantám $A_1, A_2, \ldots, A_n$, kterou bude hodnotitel v průběhu algoritmu vyplňovat. Požadujeme opět, aby tato matice byla zadávána tak, aby byla slabě konzistnetní. Bude-li hodnotitel zadávat párové srovnání variant $A_i$ a $A_j$, bude jeho volba tedy opět $m_{ij}$, kde $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Pro chybějící hodnoty budou odvozeny množiny přípustných hodnot takových, pro které nebude porušena slabá konzistence zadávané preferenční matice. Toto lze společně zapsat do jedné matice, kde zadané hodnoty budou reálné a nezadané budou specifikované množinou přípustných hodnot. Reálná čísla je možno přepsat na jednoprvkové množiny. Obecně tedy můžeme říct, že v této metodě pracujeme s neurčitou maticí $\tilde{M} = \{\tilde{m}_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$, kde $\tilde{m}_{ij} = [m_{ij}^L, m_{ij}^U]$ představuje uspořádanou množinu hodnot od $m_{ij}^L$ do $m_{ij}^U$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Pro jednoduchost a přehlednost potom v případě, že pro nějaké $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ platí $m_{ij}^L = m_{ij}^U$, což je také rovno $m_{ij}$, bude použito jednoduše značení $\tilde{m}_{ij} = m_{ij}$. *Neúplnou preferenční maticí* tedy budeme rozumět takovou matici $\tilde{M} = \{\tilde{m}_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$, kde některé elementy jsou zadané konkrétně reálnými čísly a jiné jsou zadané neurčitě, množinou přípustných hodnot splňujících podmínku slabé konzistence. Takové elementy potom představují nezadané hodnoty, které se budou v algoritmu předkládat hodnotiteli k vyplnění, popř. budou v průběhu algoritmu jednoznačně určeny automaticky.

Protože preferenční matice $\tilde{M}$ musí být reciproká, zadává hodnotitel pouze párová srovnání v horním trojúhelníku matice a ostatní hodnoty jsou dopočteny dle (1.6). Uspořádanou dvojici variant $A_i$ a $A_j$ budeme pro potřeby algoritmu pro jednoduchost značit $(i, j)$, kde $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Množinu všech dvojic variant, pro něž by muselo být zadáno přesné párové srovnání, aby z matice $\tilde{M}$ vznikla úplná matice $M$, označíme $\Omega = \{(i, j); i, j = 1, 2, \ldots, n, i < j\}$. Počet takových dvojic je $n(n-1)/2$. Množina dvojic variant, pro něž již bylo provedeno párové srovnání, tj. je zadána konkrétní reálná hodnota, bude označena $Q$. Tudíž $\Omega \setminus Q$ značí ty dvojice variant, pro které v horním trojúhelníku matice nebylo párové srovnání zatím konkrétně zadáno, tj. je známá pouze množina přípustných hodnot.

Nyní je možno pro tyto množiny zavést zjednodušený tvar matice $\tilde{M} =$

$\{\tilde{m}_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$. Pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $i < j$, platí

$$\tilde{m}_{ij} = \begin{cases} [m_{ij}^L, m_{ij}^U], & \text{jestliže } (i,j) \in \Omega \setminus Q, \\ m_{ij}, & \text{jestliže } (i,j) \in Q, \end{cases} \tag{3.8}$$

kde $[m_{ij}^L, m_{ij}^U] \subseteq I$ značí uspořádanou množinu hodnot ze škály $I$ od $m_{ij}^L$ do $m_{ij}^U$, které vyhovují vlastnosti slabé konzistence matice. Je zřejmé, že pro $(i,j) \in \Omega \setminus Q$ platí $m_{ij} \in [m_{ij}^L, m_{ij}^U]$. Dále jak bylo řečeno výše, pro $(i,j) \in Q$ by bylo možno psát také $\tilde{m}_{ij} = [m_{ij}^L, m_{ij}^U]$, kde $m_{ij}^L = m_{ij}^U = m_{ij}$. Dále platí $\tilde{m}_{ii} = 1$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$. Pro reciproké hodnoty pod hlavní diagonálou pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $i < j$, platí

$$\tilde{m}_{ji} = \begin{cases} [m_{ji}^L, m_{ji}^U] = \left[\frac{1}{m_{ij}^U}, \frac{1}{m_{ij}^L}\right], & \text{jestliže } (i,j) \in \Omega \setminus Q, \\ m_{ji} = \frac{1}{m_{ij}}, & \text{jestliže } (i,j) \in Q. \end{cases} \tag{3.9}$$

Konstrukce množin $[m_{ij}^L, m_{ij}^U]$ probíhá následujcím způsobem: Pro každé $(i,j) \in \Omega \setminus Q$ je definována množina $PH_{ij} \subseteq I$, která bude představovat *množinu přípustných hodnot* škály $I$ takových, pro které dané párové srovnání dodrží slabou konzistenci matice. Protože slabá konzistence vždy pro uvažovaný element matice omezuje jen jeho maximální nebo minimální uvažovanou hodnotu, je množina $PH_{ij} \subseteq I$ jednoznačně určena svými hodnotami $\min PH_{ij}$ a $\max PH_{ij}$. Pro $(i,j) \in \Omega \setminus Q$ je tedy možno množinu přípustných hodnot označit $[\min PH_{ij}, \max PH_{ij}]$. Tímto zápisem rozumíme množinu hodnot z $I$ od $\min PH_{ij}$ po $\max PH_{ij}$. Např. pro Saatyho škálu popsanou v tabulce 1.2 bude množina $[3, 7]$ znamenat množinu $\{3, 4, 5, 6, 7\}$. Pro reciproká párová srovnání $(j, i)$, kde $(i,j) \in \Omega \setminus Q$, budou tyto množiny zavedeny následovně: Pro $(j, i)$ takové, že $(i,j) \in \Omega \setminus Q$, bude platit $PH_{ji} = [\min PH_{ji}, \max PH_{ji}] = [\frac{1}{\max PH_{ij}}, \frac{1}{\min PH_{ij}}]$. Je zřejmé, že pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$ platí $[m_{ij}^L, m_{ij}^U] = [\min PH_{ij}, \max PH_{ij}]$.

Získávání množiny slabě konzistentních hodnot probíhá pomocí slabé konzistence zavedené pro úplnou preferenční matici $M$. Je přitom třeba pracovat jak s jednoznačně zadanými prvky matice, tak s množinami přípustných hodnot. Pro tyto množiny může nastat libovolná z uvažovaných přípustných hodnot, proto je třeba prošetřit slabou konzistenci pro každou povolenou hodnotu zvlášť a výsledek sjednotit. Toto je detailně popsáno v příslušném kroku algoritmu. Slabou konzistenci je potom na základě podmínek pro úplnou preferenční matici $M$ množno zavést i pro matici $\tilde{M}$. Podmínku (2.20) pro matici $M$ je možné pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$ přepsat do tvaru

$$m_{ij} \in [c_2, \sigma] \wedge m_{jk} \in [c_2, \sigma] \quad \Longrightarrow \quad m_{ik} \in [\max\{m_{ij}, m_{jk}\}, \sigma].$$

Tedy jsou-li pro dvojice $(i,j)$ a $(j,k)$ zadány přesné hodnoty, potom pro dvojici $(i,k)$ bude párové srovnání rovno alespoň $\max\{m_{ij}, m_{jk}\}$. Pokud bychom uvažovali matici $\tilde{M}$, kde pro dvojici $(i,j)$ a $(j,k)$ jsou zadány přesné hodnoty a pozice $(i, k)$ zatím není zadána, potom je tímto způsobem možno definovat množinu přípustných hodnot pro dvojici $(i, k)$. Je tedy možno psát

$$m_{ij} \in [c_2, \sigma] \wedge m_{jk} \in [c_2, \sigma] \quad \Longrightarrow \quad [m_{ik}^L, m_{ik}^U] = [\max\{m_{ij}, m_{jk}\}, \sigma]. \qquad (3.10)$$

Pokud by pro uvažované dvojice $(i, j)$ a $(j, k)$ byly místo konkrétních hodnot dány množiny přípustných hodnot, bylo by pro (3.10) třeba udělat sjednocení přes všechny $m_{ij} \in [m_{ij}^L, m_{ij}^U]$ a $m_{jk} \in [m_{jk}^L, m_{jk}^U]$. Potom by plynulo, že pro dvojici $\tilde{m}_{ij} = [m_{ij}^L, m_{ij}^U] \subseteq [c_2, \sigma]$ a $\tilde{m}_{jk} = [m_{jk}^L, m_{jk}^U] \subseteq [c_2, \sigma]$ musí platit

$$\tilde{m}_{ik} = [m_{ik}^L, m_{ik}^U] = \bigcup_{m_{ij} \in [m_{ij}^L, m_{ij}^U], m_{jk} \in [m_{jk}^L, m_{jk}^U]} [\max\{m_{ij}, m_{jk}\}, \sigma] = [\max\{\min\{m_{ij};$$
$$m_{ij} \in [m_{ij}^L, m_{ij}^U]\}, \min\{m_{jk}; m_{jk} \in [m_{jk}^L, m_{jk}^U]\}\}, \sigma] = [\max\{m_{ij}^L, m_{jk}^L\}, \sigma].$$

Analogický postup by byl použit, pokud by pouze pro jednu z dvojic $(i, j)$ a $(j, k)$ byla dána množina přípustných hodnot. Obdobně by potom bylo možné odvodit také vztahy vyplývající pro $\tilde{M}$ z podmínky (2.21) slabé konzistence. *Slabou konzistenci preferenční matici* $\tilde{M} = \{\tilde{m}_{ij}\}_{i,j=1}^n$, jejíž prvky jsou dány vztahy (3.8) a (3.9), je potom možné definovat s přihlédnutím k tomu, že pro $(i, j) \in Q$ je místo $\tilde{m}_{ij} = m_{ij}$ možno psát $\tilde{m}_{ij} = [m_{ij}^L, m_{ij}^U] = [m_{ij}, m_{ij}]$ a místo $\tilde{m}_{ji} = m_{ji}$ je možno psát $\tilde{m}_{ji} = [m_{ji}^L, m_{ji}^U] = [m_{ji}, m_{ji}]$ pro každé $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$ následovně:

$$\tilde{m}_{ij} \subseteq [c_2, \sigma] \wedge \tilde{m}_{jk} \subseteq [c_2, \sigma] \quad \Longrightarrow \quad \tilde{m}_{ik} = [\max\{m_{ij}^L, m_{jk}^L\}, \sigma], \qquad (3.11)$$

$$\tilde{m}_{ij} = 1 \wedge \tilde{m}_{jk} \subseteq [1, \sigma] \quad \Longrightarrow \quad \tilde{m}_{ik} = \tilde{m}_{jk}, \qquad (3.12)$$

$$\tilde{m}_{ij} \subseteq [1, \sigma] \wedge \tilde{m}_{jk} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \tilde{m}_{ik} = \tilde{m}_{ij}. \qquad (3.13)$$

Slabě konzistentní preferenční matice $\tilde{M}$ má analogické vlastnosti jako slabě konzistentní úplná preferenční matice $M$. Matice $\tilde{M}$ je slabě konzistentní právě tehdy, když existuje permutace $\pi : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ taková, že pro horní trojúhelník a diagonálu matice přesupořádané pomocí této permutace platí:

1. posloupnosti $\{m_{\pi(i)\pi(j)}^L\}_{\pi(j)=\pi(i)}^n$, $\{m_{\pi(i)\pi(j)}^U\}_{\pi(j)=\pi(i)}^n$ jsou neklesající pro každé $i = 1, 2 \ldots, n$;
2. posloupnosti $\{m_{\pi(i)\pi(j)}^L\}_{\pi(i)=1}^{\pi(j)}$, $\{m_{\pi(i)\pi(j)}^U\}_{\pi(i)=1}^{\pi(j)}$ jsou nerostoucí pro každé $j = 1, 2, \ldots, n$;
3. jestliže $\tilde{m}_{\pi(i)\pi(j)} = 1$ pro nějaké $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, kde $\pi(i) < \pi(j)$, potom $\tilde{m}_{\pi(l)\pi(i)} = \tilde{m}_{\pi(l)\pi(j)}$ pro každé $l = 1, 2, \ldots, n$, kde $\pi(l) \leq \pi(i) < \pi(j)$;
4. jestliže $\tilde{m}_{\pi(i)\pi(j)} = 1$ pro nějaké $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, kde $\pi(i) < \pi(j)$, potom $\tilde{m}_{\pi(i)\pi(k)} = \tilde{m}_{\pi(j)\pi(k)}$ pro každé $k = 1, 2, \ldots, n$, kde $\pi(i) < \pi(j) \leq \pi(k)$.

Přičemž v bodech 1. a 2. pro $(i, j) \in Q$ platí $m_{\pi(i)\pi(j)}^L = m_{\pi(i)\pi(j)}^U = m_{\pi(i)\pi(j)}$ a $m_{\pi(j)\pi(i)}^L = m_{\pi(j)\pi(i)}^U = m_{\pi(j)\pi(i)}$. Důkaz tohoto tvrzení by se provedl analogicky jako důkaz věty 2.3 s přihlédnutím k tomu, že některé prvky matice $\tilde{M}$ jsou vymezeny uspořádanou množinou hodnot.

**Popis kroků algoritmu**

Nyní bude popsán algoritmus pro získání preferenční matice $\tilde{M}$ a pro výpočet intervalových hodnocení variant, který kombinuje algoritmus Fedrizziho a Gioveho, podmínku slabé konzistence a výpočet hodnocení pomocí fuzzifikovaného geometrického průměru.

Některé úkony se provádí automaticky a nejsou součástí popisu algoritmu: V některých krocích metody je třeba přecházet mezi multiplikativními a aditivními preferencemi. V takovém případě jsou použity převodní vztahy (1.13) a (1.14). Dále vždy, když dojde k vyplnění hodnoty $\tilde{m}_{ij} = m_{ij}$, bude automaticky doplněna hodnota $\tilde{m}_{ji} = m_{ji} = \frac{1}{m_{ij}}$. Stejně tak vždy, když bude pro chybějící element matice předefinována množina $PH_{ij} = [\min PH_{ij}, \max PH_{ij}]$, bude automaticky upravena množina $PH_{ji} = [\min PH_{ji}, \max PH_{ji}] = [\frac{1}{\max PH_{ij}}, \frac{1}{\min PH_{ij}}]$. Pro jednoduchost budou množiny $PH_{ij}$ pro chybějící prvky zapisovány přímo do matice $\tilde{M}$, tj. množina $PH_{ij}$ bude automaticky ztotožněna s $\tilde{m}_{ij} = [m_{ij}^L, m_{ij}^U]$.

*Kroky algoritmu*:

1. Nejprve jsou provedena počáteční nastavení. U multiplikativní preferenční matice $\tilde{M} = \{\tilde{m}_{ij}\}_{i,j=1}^n$ jsou zadány diagonální prvky, tj. $\tilde{m}_{ij} = 1$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$. Stanoví se množina přípustných řešení $PH_{ij}$ pro každé $(i,j) \in \Omega \setminus Q$. Na začátku je $Q = \emptyset$, tj. $PH_{ij} = [\frac{1}{\sigma}, \sigma]$ pro každé $i,j = 1, 2, \ldots, n$, $i < j$. Je stanoven parametr $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$ pro výběrovou funkci (3.1).

2. Hodnotitel zadá počáteční párová srovnání pro dvojice $(2i-1, 2i)$, $i = 1, 2, \ldots, \lfloor n/2 \rfloor$, kde $\lfloor n/2 \rfloor$ je celá část čísla $n/2$. Tj. zadá intenzity preference $\tilde{m}_{2i-1,2i} = m_{2i-1,2i}$ pro $i = 1, 2, \ldots, \lfloor n/2 \rfloor$.

   Je použita stejná množina počátečních párových srovnání jako v [27]. Můžou být vybrána i jiná počáteční párová srovnání. Pokud by takto ale vznikla nějaká dvojice nepřímých srovnání, musely by být přepočítány hodnoty $PH_{ij}$ jako v kroku 3b a zkontrolována slabá konzistence.

3. Nyní bude provedena interaktivní část algoritmu:

   (a) Hodnotitel provede zadání intenzity preference, tj. vyplní $\tilde{m}_{ij}$, kde $(i,j) \in \Omega \setminus Q$ takové, které vyhovuje (3.2), tj. dvojice prvků, která maximalizuje hodnotící funkci (3.1). Pokud by takových dvojic prvků bylo více, bude vybrána dvojice s nejmenším součtem indexů, popř. s nejmenším indexem. Zadávané párové srovnání musí splňovat slabou konzistenci, hodnotitel tedy volí $\tilde{m}_{ij} \in PH_{ij}$. Zde tedy $\tilde{m}_{ij} = m_{ij}$. Po vyplnění párového srovnání hodnotitelem je předefinováno $\Omega$ a $Q$.

Je použita výběrová funkce a výběrové pravidlo navržené v algoritmu autorů Fedrizzi a Giove, který je popsán v kapitole 3.2. Tato funkce vyhledává dvojice prvků, pro které není zadán dostatek nepřímých párových srovnání a které by přinesly redukci nekonzistence matice. Parametr $\lambda$ této funkce slouží jako váha mezi těmito kritérii.

(b) Jsou přepočteny množiny přípustných hodnot a pro jednoprvkové množiny je provedeno jejich dosazení do matice. Tj. pomocí vztahů (2.20)–(2.29) jsou přepočteny množiny přípustných hodnot $PH_{ij}$ pro všechny chybějící $(i, j) \in \Omega \setminus Q$ tak, aby nadále odpovídaly slabé konzistenci. Vychází se přitom z dvojic $\tilde{m}_{ik}$, $\tilde{m}_{kj}$, $k \neq i, j$, kde jeden nebo oba tyto prvky můžou představovat množinu přípustných hodnot. Potom jsou pro toto konkrétní $k \neq i, j$ pomocí podmínek (2.20)–(2.29) vyšetřeny všechny dvojice $\tilde{m}_{ik} = \alpha_{ik}$ a zároveň $\tilde{m}_{kj} = \beta_{kj}$, kde $\alpha_{ik} \in [m_{ik}^L, m_{ik}^U]$ a $\beta_{kj} \in [m_{kj}^L, m_{kj}^U]$, přičemž pro $(i, k) \in Q$ platí $m_{ik}^L = m_{ik}^U = m_{ik}$. Pro každou takovou dvojici je výsledkem množina $PH_{ij}(\alpha_{ik}, \beta_{kj})$. Pro všechny kombinace těchto dvojic vznikne množina $PH_{ij}(\tilde{m}_{ik}, \tilde{m}_{kj}) = \bigcup_{\alpha_{ik} \in [m_{ik}^L, m_{ik}^U], \beta_{kj} \in [m_{kj}^L, m_{kj}^U]} PH_{ij}(\alpha_{ik}, \beta_{kj})$. Celková množina přípustných hodnot pro $(i, j)$ je potom průnik přes tyto množiny pro jednotlivá $k \neq i, j$, tj. $PH_{ij} = \bigcap_{k=1,2,\ldots,n,k\neq i,j} PH_{ij}(\tilde{m}_{ik}, \tilde{m}_{kj})$.

Pokud pro nějaké $(i, j) \in \Omega \setminus Q$ platí $PH_{ij} = \{\alpha_{ij}\}$, kde $\alpha_{ij} \in \langle \frac{1}{\sigma}, \sigma \rangle$, potom je doplněna tato hodnota do preferenční matice $\tilde{M}$ automaticky bez zásahu hodnotitele, tj. $\tilde{m}_{ij} = \alpha_{ij}$. Je zřejmé, že $\alpha_{ij} = m_{ij}$. Následně jsou upraveny množiny $\Omega$ a $Q$. Došlo-li ke zúžení nějaké množiny $PH_{ij}$ (ať už na jednoprvkovou množinu nebo ne), zopakuje se tento krok 3b. Jinak se pokračuje na krok 3c.

(c) *Zastavovací kritérium*: Je požadováno, aby pro každý nezadaný prvek existovala dvojice nepřímých srovnání se zadanou intenzitou preference, tj. zkontroluje se, jestli pro každé $(i, j) \in \Omega \setminus Q$ existuje $k$ takové, že $k \neq i, j$ a $(i, k), (k, j) \in Q$. Pokud je toto kritéirum splněno, pokračuje se na krok 4. Jinak se vracíme zpět na krok 3a.

Existují-li pro nezadané prvky dvojice nepřímých srovnání s vyplněnou intenzitou preference, pak to znamená, že hodnoty $PH_{ij}$ jsou přímo ovlivněny podmínkou slabé konzistence. Jsou tedy stejné nebo méně početné než v kroku 1. Přičemž $PH_{ij}$ je stejná jako na začátku algoritmu jen tehdy, když pro $(i, j)$ sice existuje zadaná dvojice nepřímých srovnání, ale po aplikování podmínky slabé konzistence nedošlo k jejímu zúžení. Toto zastavovací kritérium se liší od kritéria (3.7), které použili Fedrizzi a Giove.

4. Nyní jsou eliminovány množiny $PH_{ij}$, dle kterých nelze rozlišit, který ze dvou porovnávaných prvků je preferovanější.

(a) Je identifikováno, jestli v matici $\tilde{M}$ existují tzv. *nejednoznačné množiny přípustných hodnot*, tj. jestli existuje množina $PH_{ij}$, $(i,j) \in V \subseteq \Omega \setminus Q$, taková, že $1 \in PH_{ij}$ nebo že $\{c_k, \frac{1}{c_k}\} \subseteq PH_{ij}$, kde $c_k \in P$, $k \in \{2, 3, \dots, N\}$. Pokud $V \neq \emptyset$, pokračuje se na krok 4b. V opačném případě se pokračuje na krok 5.

(b) Hodnotitel provede zadání intenzity preference, tj. zadá párové srovnání pro dvojici prvků $(k,l) \in V$ takovou, že $(k,l) = \arg\max_{(i,j)\in V} Card(PH_{ij})$. Pokud je takových dvojic více, vybere se jedna z nich náhodně. Následně dojde k úpravě množin $\Omega$ a $Q$.

(c) Dojde k přepočtení množin přípustných hodnot $PH_{ij}$, kde $(i,j) \in \Omega \setminus Q$ a pro jednoprvkové množiny se provede jejich dosazení do matice, tj. provádí se postup uvedený v kroku 3b, dokud dochází ke zužování množin přípustných hodnot. Následně je upravena množina $V$ a vracíme se zpět na krok 4a.

Je-li $PH_{ij}$ nejednoznačná, potom z ní není možné jednoznačně určit, jestli je $A_i$ preferováno před $A_j$ nebo $A_j$ před $A_i$, popř. jestli jsou indiferentní. Proto jsou takovéto dvojice prvků postupně předkládány hodnotiteli k vyplnění, dokud pro každou takovou dvojici není hodnotitelem zadáno párové srovnání nebo dokud k ní příslušná množina přípustných hodnot není zúžena na jednoznačnou množinu (jako důsledek zadání hodnoty pro jinou nejednoznačnou množinu). Aby od hodnotitele nebylo třeba vyžadovat moc dodatečných informací, předkládají se mu k vyplnění tyto nejednoznačné množiny od nejpočetnější. Výsledkem tohoto kroku je finální preferenční matice $\tilde{M}$, ze které je možno určit preferenční uspořádání variant a vypočítat jejich hodnocení.

5. Nyní je určeno preferenční uspořádání variant. Pro každé $i = 1, 2, \dots, n$ vypočte se $s_i = \sum_{j \in O_j} 1$, kde $O_j = \{j; j = 1, 2, \dots, n : \tilde{m}_{ij} \in [1, \sigma] \vee \tilde{m}_{ij} \subseteq [1, \sigma]\}$. Potom se varianty $A_1, A_2, \dots, A_n$ pomocí permutace $\pi : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ takové, že $s_{\pi(1)} \geq s_{\pi(2)} \geq \dots \geq s_{\pi(n)}$, přečíslují na $A_{\pi(1)}, A_{\pi(2)}, \dots, A_{\pi(n)}$. Uspořádání prvků $A_{\pi(1)} \succeq A_{\pi(2)} \succeq \dots \succeq A_{\pi(n)}$ představuje kvaziuspořádání. Neúplnou preferenční matici příslušnou $A_{\pi(1)}, A_{\pi(2)}, \dots, A_{\pi(n)}$ budeme značit $\tilde{M}_U$.

   Preferenční uspořádání variant se tedy odvodí tak, že pro každou variantu se zjistí počet variant, před kterými je tato variantami preferovaná nebo je s nimi indiferentní. Vychází se přitom z toho, kolik je v každém řádku elementů větších nebo rovných 1. Preferenční uspořádání variant se takto dá odvodit díky tomu, že matice $\tilde{M}$ je slabě konzistentní, což s sebou nese informaci o kvaziuspořádání porovnávaných variant. Toto uspořádání určuje právě permutace $\pi$ taková, že platí $\tilde{m}_{\pi(i)\pi(j)} \in [1, \sigma]$ nebo $\tilde{m}_{\pi(i)\pi(j)} \subseteq [1, \sigma]$ pro každé $i, j = 1, 2, \dots, n$, kde $\pi(i) < \pi(j)$.

Přeuspořádaná matice $\tilde{M}_U = \{\tilde{m}_{Uij}\}_{i,j=1}^n$ není nutná pro výpočet hodnocení variant. Je však pro hodnotitele přehlednější, neboť pro ni platí $\tilde{m}_{Uij} \subseteq [1,\sigma]$ nebo $\tilde{m}_{Uij} \in [1,\sigma]$ pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $i < j$. V horním trojúhelníku této matice je potom také jednoduše vidět, že tato matice je slabě konzistentní, neboť jsou splněny vlastnosti (3.11)–(3.13).

6. Na závěr je vypočteno hodnocení variant. Pro potřeby výpočtu hodnocení se s $PH_{ij}$, kde $(i,j) \in \Omega \backslash Q$, pracuje jako s intervaly reálných čísel, díky čemuž i výsledná hodnocení budou intervalová. Pro jejich výpočet je použit fuzzifikovaný geometrický průměr uvedený v [54]. Jedná se o vzorce pro výpočet krajních hodnot trojúhelníkového fuzzy hodnocení. Intervalové hodnocení $\tilde{h}_i = \langle h_i^l, h_i^U \rangle$ varianty $A_i$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$ se vypočte

$$h_i^L = \frac{\sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} m_{ij}^L}}{\sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} m_{ij}^L} + \max\left\{ \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} \sqrt[n]{m_{ki}^U \prod_{\substack{l=1 \\ l\neq i}}^{k-1} \frac{1}{m_{lk}^*} \prod_{\substack{l=k+1 \\ l\neq i}}^{n} m_{kl}^*} \; ; \begin{array}{l} m_{kl}^* \in \left\langle m_{kl}^L, m_{kl}^U \right\rangle, \\ k,l = 1,2,\ldots,n, \\ k,l \neq i, k < l \end{array} \right\}}, \tag{3.14}$$

$$h_i^U = \frac{\sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} m_{ij}^U}}{\sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} m_{ij}^U} + \min\left\{ \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} \sqrt[n]{m_{ki}^L \prod_{\substack{l=1 \\ l\neq i}}^{k-1} \frac{1}{m_{lk}^*} \prod_{\substack{l=k+1 \\ l\neq i}}^{n} m_{kl}^*} \; ; \begin{array}{l} m_{kl}^* \in \left\langle m_{kl}^L, m_{kl}^U \right\rangle, \\ k,l = 1,2,\ldots,n, \\ k,l \neq i, k < l \end{array} \right\}}. \tag{3.15}$$

Hodnocení variant je možno vypočítat jak z matice $\tilde{M}$, tak z matice $\tilde{M}_U$. Pro jednoduchost značení jsou vzorce (3.14) a (3.15) dány v podobě pro $\tilde{M}$.

Pro výpočet intervalových hodnocení jsou použity vzorce zavedené v [54] původně pro metodu fuzzy AHP, o které je zmínka v kapitole 1.2.4. Tyto vzorce slouží k výpočtu fuzzy hodnocení z fuzzy preferenční matice, kde intenzity preferencí jsou zadané trojúhelníkovými fuzzy čísly, pomocí nichž je postihnuta neurčitost na vstupu. Výsledná hodnocení získaná pomocí fuzzifikovaného geometrického průměru, jejichž krajní body jsou dány vzorci (3.14) a (3.15), jsou potom také trojúhelníková fuzzy čísla. Použití této metody by tedy mělo adekvátně zpracovat a zachovat neurčitost v matici $\tilde{M}$, kde některé hodnoty jsou dány neurčitě množinou přípustných hodnot.

Protože je matice $\tilde{M}$ slabě konzistentní (resp. protože po přeuspořádání na matici $\tilde{M}_U$ krajní body přípustných množin v jednotlivých sloupcích představují nerostoucí posloupnosti), platí pro intervalová hodnocení variant získaná pomocí vzorců (3.14) a (3.15) analogická vlastnost jako pro hodnocení získaná z úplné preferenční matice ve větě 2.4. Tedy permutace $\pi$ získaná v kroku 5. určuje také uspořádání hodnocení variant dle velikosti, tj. platí $\tilde{h}_{\pi(1)} \geq \tilde{h}_{\pi(2)} \geq \cdots \geq \tilde{h}_{\pi(n)}$, kde pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$ označení $\tilde{h}_{\pi(i)} \geq \tilde{h}_{\pi(j)}$ znamená $h_i^L \geq h_j^L$ a zároveň $h_i^U \geq h_j^U$.

Pro aditivní neúplnou preferenční matici $\tilde{A} = \{\tilde{a}_{ij}\}_{i,j=1}^n$ by zavedený algoritmus fungoval analogicky. Uvažovali bychom diskrétní aditivní škálu $I_A \subset \langle 0, 1\rangle$, kde $I_A = L_A \cup \{0{,}5\} \cup P_A$, $P_A = \{d_2, d_3, \ldots, d_N\}$, $L_A = \{1 - d_N, 1 - d_{N-1}, \ldots, 1 - d_2\}$, $d_2, d_3, \ldots, d_N > 0{,}5$, $d_N = 1$. Pro prvky matice $\tilde{A}$ by platilo: Pokud $\tilde{a}_{ij} = [a_{ij}^L, a_{ij}^U]$, tak $\tilde{a}_{ji} = [a_{ji}^L, a_{ji}^U] = [1 - a_{ij}^U, 1 - a_{ij}^L]$. Množiny přípustných hodnot $PH_{ij}^A$ by se omezovaly dle podmínek (2.30)–(2.39). Platilo by $PH_{ji}^A = [1 - \max PH_{ij}^A, 1 - \min PH_{ij}^A]$. Nejednoznačné přípustné množiny by potom byly takové $PH_{ij}^A$, kde $0{,}5 \in PH_{ij}^A$ nebo $\{d_k, 1 - d_k\} \subseteq PH_{ij}^A$, $d_k \in P_A$, $k \in \{2, 3, \ldots, N\}$. Pomocná proměnná pro přeuspořádání matice $\tilde{A}$ na $\tilde{A}_U$ by se počítala $s_i^A = \sum_{j \in O_j^A} 1$, kde $O_j^A = \{j; j = 1, 2, \ldots, n : \tilde{a}_{ij} \in [0{,}5, 1] \vee \tilde{a}_{ij} \subseteq [0{,}5, 1]\}$. Výsledná aditivní preferenční matice $\tilde{A}$ (resp. $\tilde{A}_U$) by byla převedena pomocí (1.14) na multiplikativní preferenční matici $\tilde{M}$ (resp. $\tilde{M}_U$) a z ní by bylo vypočeteno hodnocení variant dle vztahů (3.14) a (3.15).

**Ilustrativní příklad**

Na následujícím příkladě bude pro lepší ilustraci ukázáno, jak probíhá omezování množiny přípustných hodnot v kroku 3b.

**Příklad:** Mějme neúplnou Saatyho matici $\tilde{S} = \{\tilde{s}_{ij}\}_{i,j=1}^n$, kde element $\tilde{s}_{ij}$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, není vyplněn. Podívejme se, jaké přípustné hodnoty by pro něj plynuly dle postupu v kroku 3b uvedeného algoritmu z konkrétních hodnot $\tilde{s}_{ik}$ a $\tilde{s}_{kj}$, $k \neq i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

1. Jestliže $\tilde{s}_{ik} = 5$ a $\tilde{s}_{kj} \in [1, 7]$, potom vyšetříme jednotlivé případy $\tilde{s}_{kj} = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ a hodnoty, které pro jednotlivé dvojice párových srovnání dostaneme ze vzorců (2.20)–(2.21), sjednotíme:
$PH_{ij}(\tilde{s}_{ik}, \tilde{s}_{kj}) = [5, 5] \cup [5, 9] \cup [5, 9] \cup [5, 9] \cup [5, 9] \cup [6, 9] \cup [7, 9] = [5, 9]$.
2. Jestliže $\tilde{s}_{ik} \in [1/7, 1/5]$ a $\tilde{s}_{kj} = 1/3$, potom přes jednotlivé případy $\tilde{s}_{ik} = 1/7, 1/6, 1/5$ dostaneme pomocí vzorce (2.22) následující:
$PH_{ij}(\tilde{s}_{ik}, \tilde{s}_{kj}) = [1/9, 1/7] \cup [1/9, 1/6] \cup [1/9, 1/5] = [1/9, 1/5]$.
3. Jestliže $\tilde{s}_{ik} = 5$ a $\tilde{s}_{kj} \in [1/6, 1/4]$, potom přes jednotlivé případy$\tilde{s}_{jk} = 1/6, 1/5, 1/4$ dostaneme pomocí vzorců (2.24)–(2.26) následující:
$PH_{ij}(\tilde{s}_{ik}, \tilde{s}_{kj}) = [1/6, 1/2] \cup [1/5, 5] \cup [2, 5] = [1/6, 5]$. V tomto případě ovšem nené možno určit, jestli je prvek s indexem $i$ preferován před prvkem s indexem $j$ nebo naopak.

4. Jestliže $\tilde{s}_{ik} \in [1/9, 1/7]$ a $\tilde{s}_{kj} = 5$, potom přes jednotlivé případy $\tilde{s}_{jk} = 1/9, 1/8, 1/7$ dostaneme pomocí vzorce (2.28) následující:
$PH_{ij}(\tilde{s}_{ik}, \tilde{s}_{kj}) = [1/9, 1/2] \cup [1/8, 1/2] \cup [1/7, 1/2] = [1/6, 1/2] = [1/9, 1/2]$.
5. Jestliže $\tilde{s}_{ik} = 5$ a $\tilde{s}_{kj} \in [1/3, 2]$, potom přes jednotlivé případy $\tilde{s}_{jk} = 1/3, 1/2, 1, 2$ dostaneme pomocí vzorců (2.20), (2.21) a (2.24) následující:
$PH_{ij}(\tilde{s}_{ik}, \tilde{s}_{kj}) = [2, 5] \cup [2, 5] \cup [5, 5] \cup [5, 9] = [2, 9]$.
6. Jestliže $\tilde{s}_{ik} \in [5, 6]$ a $\tilde{s}_{kj} \in [4, 7]$, potom nejprve pro $\tilde{s}_{ik} = 5$ vezmeme jednotlivé hodnoty $\tilde{s}_{kj} = 4, 5, 6, 7$ a následně stejné hodnoty vezmeme pro $\tilde{s}_{ik} = 6$. Tyto případy vyšetříme pomocí vzorce (2.20) a po jejich sjednocení dostaneme:
$PH_{ij}(\tilde{s}_{ik}, \tilde{s}_{kj}) = [5, 9] \cup [5, 9] \cup [6, 9] \cup [7, 9] \cup [6, 9] \cup [6, 9] \cup [6, 9] \cup [7, 9] = [5, 9]$.
7. Uvažujme nyní $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $k \neq i, j$, pro které $\tilde{s}_{ik} = 5$ a $\tilde{s}_{kj} \in [1, 7]$. Potom pro něj dle bodu 1. plyne $PH_{ij}(\tilde{s}_{ik}, \tilde{s}_{kj}) = [5, 9]$. Uvažujme dále, že pro nějaké $l \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $l \neq i, j, k$ platí $\tilde{s}_{il} = 5$ a $\tilde{s}_{lj} \in [1/6, 1/4]$. Potom dle bodu 3. bude $PH_{ij}(\tilde{s}_{il}, \tilde{s}_{lj}) = [1/6, 5]$. Pokud by toto byly jediné dvě dvojice nepřímých srovnání v matici $\tilde{S}$ (tj. $\tilde{S}$ je řádu 4), potom $PH_{ij} = [5, 9] \cap [1/6, 5] = 5$. V tomto případě bychom měli jedinou přípustnou hodnotu pro $\tilde{s}_{ij}$, proto bychom automaticky dosadili $\tilde{s}_{ij} = 5$. $\triangle$

Na následujícím příkladě bude pro lepší ilustraci navrženého algoritmu ukázána konstrukce preferenční matice $\tilde{M}$ a získání intervalových hodnocení variant z této matice.

**Příklad:** Uvažujme varianty $A_1, A_2, \ldots, A_7$, které chceme ohodnotit pomocí párového srovnávání na Saatyho škále, která je popsána v tabulce 1.2. Vyžadujeme, aby při párovém srovnání byla dodržena podmínka slabé konzistence. Dále uvažujme, že kdyby hodnotitel vyplnil celou Saatyho matici $S = \{s_{ij}\}_{i,j=1}^{7}$, potom by vypadala tak, jako je to dáno v tabulce 3.1. Hodnocení $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_7)$ variant $A_1, A_2, \ldots, A_7$ vypočtená z $S$ pomocí geometrického průměru řádku (1.8) jsou dána v tabulce 3.5 . Ukážeme si, jak bude vypadat slabě konzistentní Saatyho matice $\tilde{S} = \{\tilde{s}_{ij}\}_{i,j=1}^{7}$, která bude výsledkem algoritmu navrženého v kapitole 3.3, a jak budou vypadat intervalová hodnocení $\tilde{\mathbf{h}} = (\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \ldots, \tilde{h}_7)$ variant $A_1, A_2, \ldots, A_7$ vypočtená z $\tilde{S}$ pomocí vzorců (3.14) a (3.15).

Matice v tomto příkladu budou pro přehlednost dány ve formě tabulek a budou v nich zobrazeny pouze elementy nad hlavní diagonálou a na ní. Elementy pod hlavní diagonálou jsou dány jednoznačně dle podmínky reciprocity (1.6). Pro větší srozumitelnost jsou v tabulce 3.1 pro matici $S$ porovnávané varianty seřazeny od nejlepší po nejhorší, tj. $A_3, A_7, A_2, A_6, A_1, A_4, A_5$. Odtud je dle věty 2.3 vidět, že matice $S$ je slabě konzistentní.

Nyní budeme předpokládat, že o preferenčním uspořádání variant nemáme předem informace, proto sestavíme neúplnou Saatyho matici $\tilde{S} = \{\tilde{s}_{ij}\}_{i,j=1}^{7}$ pro

| | $A_3$ | $A_7$ | $A_2$ | $A_6$ | $A_1$ | $A_4$ | $A_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_3$ | 1 | 3 | 5 | 7 | 7 | 8 | 9 |
| $A_7$ | | 1 | 4 | 7 | 7 | 7 | 9 |
| $A_2$ | | | 1 | 3 | 6 | 7 | 7 |
| $A_6$ | | | | 1 | 3 | 5 | 7 |
| $A_1$ | | | | | 1 | 3 | 5 |
| $A_4$ | | | | | | 1 | 5 |
| $A_5$ | | | | | | | 1 |

Tab. 3.1: Úplná slabě konzistentní Saatyho matice $S$

varianty v pořadí $A_1, A_2, \ldots, A_7$. Budeme postupovat dle algoritmu popsaného v kapitole 3.3. Tj. postupně projdeme tyto kroky:

1. Jsou nastaveny diagonální prvky, tj. $\tilde{s}_{ii} = 1$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, 7$. Dále jsou nastaveny množiny přípustných hodnot $PH_{ij} = [1/9, 9]$ pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, 7$. Je zvolen parametr $\lambda = 0{,}5$.
2. Hodnotitel zadá párová srovnání $\{\tilde{s}_{2i-1,2i}; i = 1, 2, 3\} = \{\tilde{s}_{12}, \tilde{s}_{34}, \tilde{s}_{56}\}$. V tomto kroku může hodnotitel vybírat z celé Saatyho škály $[1/9, 9]$. Hodnotitel tedy zadá 3 počáteční párová srovnání dle hodnot matice $S$, tj. $\tilde{s}_{12} = 1/6$, $\tilde{s}_{34} = 8$ a $\tilde{s}_{56} = 1/7$.
3. Je použita výběrová funkce Fedrizziho a Gioveho pro výběr optimální dvojice porovnávaných prvků, jejíž párové srovnání by mělo být vyplněno. Poté, co hodnotitel toto párové srovnání vyplní, jsou přepočteny množiny $PH_{ij}$ pro všechny $(i, j)$, pro něž není zadáno párové srovnání. V tomto kroku byl celkem 8-krát předložen hodnotiteli k vyplnění prvek matice. Výslednou matici $\tilde{S}$ po kroku 3 lze vidět v tabulce 3.2.

| | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ | $A_7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 1 | 1/6 | 1/7 | [2,7] | [5,7] | 1/3 | 1/7 |
| $A_2$ | | 1 | 1/5 | 7 | [7,9] | [2,6] | [1/7,1/2] |
| $A_3$ | | | 1 | 8 | [8,9] | [5,7] | [1/7,5] |
| $A_4$ | | | | 1 | 5 | [1/7,1/3] | [1/9,1/7] |
| $A_5$ | | | | | 1 | 1/7 | 1/9 |
| $A_6$ | | | | | | 1 | 1/7 |
| $A_7$ | | | | | | | 1 |

Tab. 3.2: Slabě konzistentní Saatyho matice $\tilde{S}$ po kroku 3

V tomto případě nedošlo k žádnému automatickému vyplnění hodnoty. Tzn., že pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, 7$, $i < j$ jsou hodnoty $\tilde{s}_{ij} = s_{ij}$ vyplněny hodnotitelem a hodnoty $\tilde{s}_{ij} = [s_{ij}^L, s_{ij}^U]$ jsou pomocí (2.20)–(2.29) dopočteny tak, aby odpovídaly podmínkám slabé konzistence. V tabulce máme barevně vyznačeno srovnání variant $A_3$ a $A_7$, pro které vyšla nejednoznačná množina přípustných hodnot $[1/7, 5]$.

4. V tabulce 3.2, kde je $\tilde{S}$ obdržená z předchozího kroku, se vyskytuje nejednoznačná množina přípustných hodnot $[1/7, 5]$. Proto hodnotitel dostane k vyplnění příslušné párové srovnání, tj. $\tilde{s}_{37} = 3$. Následně je nutno přepočítat $PH_{ij}$ pro všechny $(i, j)$, pro které není vyplněno párové srovnání. Výsledná matice $\tilde{S}$ po tomto kroku je vidět v tabulce 3.3. V tomto případě došlo k automatickému zadání hodnot $\tilde{s}_{35} = 9$ a $\tilde{s}_{36} = 7$. Dále došlo ke zúžení přípustných hodnot pro $\tilde{s}_{27}$ a $\tilde{s}_{47}$.

| | $A_1$ | $A_2$ | $A_3$ | $A_4$ | $A_5$ | $A_6$ | $A_7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 1 | 1/6 | 1/7 | [2,7] | [5,7] | 1/3 | 1/7 |
| $A_2$ | | 1 | 1/5 | 7 | [7,9] | [2,6] | [1/5,1/2] |
| $A_3$ | | | 1 | 8 | 9 | 7 | 3 |
| $A_4$ | | | | 1 | 5 | [1/7,1/3] | [1/8,1/7] |
| $A_5$ | | | | | 1 | 1/7 | 1/9 |
| $A_6$ | | | | | | 1 | 1/7 |
| $A_7$ | | | | | | | 1 |

Tab. 3.3: Slabě konzistentní Saatyho matice $\tilde{S}$ po kroku 4

5. Nyní je možno zjistit preferenční uspořádání prvků. Pro jednotlivé řádky matice $\tilde{S}$ se zjistí počet elementů, které jsou větší než 1, tj. platí následující: $s_1 = 2, s_2 = 4, s_3 = 6, s_4 = 1, s_5 = 0, s_6 = 3, s_7 = 5$. Odtud tedy preferenční uspořádání variant vychází: $A_3 \succeq A_7 \succeq A_2 \succeq A_6 \succeq A_1 \succeq A_4 \succeq A_5$. Matici $\tilde{S}$ je možno podle tohoto uspořadání variant přeuspořádat do přehlednějšího tvaru $\tilde{S}_U$ daného v tabulce 3.4.

| | $A_3$ | $A_7$ | $A_2$ | $A_6$ | $A_1$ | $A_4$ | $A_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A_3$ | 1 | 3 | 5 | 7 | 7 | 8 | 9 |
| $A_7$ | | 1 | [2,5] | 7 | 7 | [7,8] | 9 |
| $A_2$ | | | 1 | [2,6] | 6 | 7 | [7,9] |
| $A_6$ | | | | 1 | 3 | [3,7] | 7 |
| $A_1$ | | | | | 1 | [2,7] | [5,7] |
| $A_4$ | | | | | | 1 | 5 |
| $A_5$ | | | | | | | 1 |

Tab. 3.4: Slabě konzistentní Saatyho matice $\tilde{S}_U$ po kroku 5

Porovnají-li se matice $S$ a $\tilde{S}_U$, potom je vidět, že pro všechna chybějící párová srovnání leží skutečné párové srovnání v příslušné množině přípustných hodnot. Také je vidět, že výsledná matice $\tilde{S}_U$ (a také $\tilde{S}$) je slabě konzistentní.

6. V posledním kroku jsou pomocí vzorců (3.14) a (3.15) vypočtena z matice $\tilde{S}$ intervalová hodnocení $\tilde{\mathbf{h}} = (\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \ldots, \tilde{h}_7)$ variant $A_1, A_2, \ldots, A_7$. Pro výpočet hodnocení se s množinami přípustných hodnot pracuje jako s intervaly. Vypočtená intervalová hodnocení jsou k dispozici v tabulce 3.5. Zde jsou zobrazena také reálná hodnocení $\mathbf{h}$. Je vidět, že reálná hodnocení leží uvnitř příslušných intervalových hodnocení. Dále je vidět, že platí $\tilde{h}_3 \geq \tilde{h}_7 \geq \tilde{h}_2 \geq \tilde{h}_6 \geq \tilde{h}_1 \geq \tilde{h}_4 \geq \tilde{h}_5$.

| Varianty | $\mathbf{h}$ | $\tilde{\mathbf{h}}$ |
|---|---|---|
| $A_3$ | 0,04008 | $\langle 0{,}3988, 0{,}4088 \rangle$ |
| $A_7$ | 0,2783 | $\langle 0{,}2561, 0{,}2923 \rangle$ |
| $A_2$ | 0,1456 | $\langle 0{,}1313, 0{,}1615 \rangle$ |
| $A_6$ | 0,0808 | $\langle 0{,}0680, 0{,}0910 \rangle$ |
| $A_1$ | 0,0474 | $\langle 0{,}0447, 0{,}0569 \rangle$ |
| $A_4$ | 0,0309 | $\langle 0{,}0254, 0{,}0359 \rangle$ |
| $A_5$ | 0,0164 | $\langle 0{,}0150, 0{,}0167 \rangle$ |

Tab. 3.5: Reálná a intervalová hodnocení variant $A_1, A_2, \ldots, A_7$

Pro úplnou Saatyho matici řádu 7 by bylo požadováno 21 párových srovnání. V tomto příkladu hodnotitel zadal celkem 12 párových srovnání, konkrétně 4 počáteční v kroku 2, dalších 8 doplnil v průběhu algoritmu v kroku 3 a nakonec 1 při redukci nejednoznačných množin v kroku 4. Dále 2 párová srovnání byla zadána automaticky z vlastnosti slabé konzistence. V konečné matici zůstalo nezadaných 7 párových srovnání (vyjádřených pouze přípustnými množinami). V tomto případě bylo tedy hodnotiteli ušetřeno 43% párových srovnání, která by musel zadat pro úplnou Saatyho matici. Výsledná intervalová hodnocení v sobě obsahují reálná hodnocení variant, která bychom dostali pro úplnou slabě konzistentní Saatyho matici. △

Pro lepší ilustraci výhod navrženého algoritmu byla provedena následující simulace. Pro dimenze matice $n = 5, 10, 15, 20, 25, 30$ bylo náhodně vygenerováno 100 slabě konzistentních Saatyho matic. Pro každou takovou matici byl použit navržený algoritmus s parametrem $\lambda = 0{,}5$. V tabulce 3.6 lze vidět průměrné výsledky této simulace. Ve druhém sloupci tabulky je pro každý řád matice řečeno, kolik párových srovnání by bylo potřeba pro zadání celé Saatyho matice. Ve třetím a čtvrtém sloupci jsou vidět počty a procenta párových srovnání, která zůstala nezadána a která byla zadána automaticky. V pátem sloupci je shrnuto, kolik párových srovnání takto nemusel hodnotitel díky tomuto algoritmu zadat, opět počtem i procentuálně. V posledním sloupci jsou zobrazeny počty a procenta párových srovnáních zadaných přímo hodnotitelem. Výsledky simulace je možno obecně vztáhnout na preferenční matice používající diskrétní devítibodovou hodnotící škálu. Tj. takovou diskétní škálu $I = L \cup \{1\} \cup P$, kde stejně jako u Saatyho škály platí $Card(\{1\} \cup P) = 9$.

| řád matice | počet pár. srov. | nezadané hodnoty | | určeno automaticky | | nevyplněno hodnotitelem | | vyplněno hodnotitelem | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| # | # | # | % | # | % | # | % | # | % |
| 5 | 10 | 2 | 20% | 2 | 20% | 4 | 40% | 6 | 60% |
| 10 | 45 | 9 | 21% | 14 | 32% | 24 | 53% | 21 | 47% |
| 15 | 105 | 20 | 19% | 44 | 42% | 64 | 61% | 41 | 39% |
| 20 | 190 | 35 | 19% | 88 | 46% | 123 | 65% | 67 | 35% |
| 25 | 300 | 55 | 18% | 152 | 51% | 207 | 69% | 93 | 31% |
| 30 | 435 | 73 | 17% | 239 | 55% | 312 | 72% | 123 | 28% |

Tab. 3.6: Průměrné hodnoty párových srovnání pro náhodně vygenerované slabě konzistentní Saatyho matice $\tilde{S}$

V tabulce 3.6 je vidět, že s rostoucím řádem preferenční matice významně klesá procento párových srovnání, která musí zadat přímo hodnotitel. Pro preferenční matice uvažovaných řádů je potom v průměru od hodnotitele požadováno zadat 40% párových srovnání, tj. průměrně se jedná o 60% ušetřených párových srovnání. Dále je vidět, že procento párových srovnání, která zůstávají nezadána, je cca stejné, resp. mírně klesá. V průměru je to pro preferenční matice uvažovaných řádů 19% hodnot, které nejsou přesně určeny. Procento hodnot, které jsou v průběhu algoritmu zadány automaticky, s rostoucím řádem matice výrazně roste. V průměru se potom pro preferenční matice uvažovaných řádů jedná o 41% automaticky určených hodnot.

**Způsoby použití**

Navržený algoritmus nemusí být použit v celé své podobě, ve které zde byl prezentován. Na základě potřeb hodnotite může být zkrácen a použit v několika verzích k několika různým účelům:

Verze 1. Získání intervalových hodnocení porovnávaných variant z neúplné preferenční matice. V tomto případě bude použit celý algoritmus, tj. kroky 1–6.

Verze 2. Získání preferenčního uspořádání porovnávaných variant z neúplné preferenční matice. V tomto případě budou použity jen kroky 1–5.

Verze 3. Získání reálných hodnocení porovnávaných variant z úplné preferenční matice. V tomto případě budou použity jen kroky 1–3, přičemž jako zastavovací kritérium v bodě 3c se použije to, že v matici už není žádné chybějící (neurčitě zadané) párové srovnání. I pro tuto variantu metody zůstávají pro hodnitele zachovány její výhody: V každém kroku zadávání intenzit preferencí hodnotitel ví, z jakých hodnot může vybírat, aby jeho rozhodnutí byla racionální. Dále díky automaticky doplněným hodnotám dojde ke zmenšení počtu párových srovnání vyžadovaných od hodnotitele.

Navržený algoritmus lze použít také pro vícekriteriální hodnocení. V případě, že bude nutno porovnat velký počet kritérií $K_1, K_2, \ldots, K_m$, který nejde rozdělit do hierarchické struktury, využije se tento algoritmus k vyplnění celé matice párového porovnání. Tj. použije se metoda ve verzi 3, jejímž výsledkem budou reálné váhy $v_1, v_2, \ldots, v_m$. Bude-li třeba porovnat velký počet variant $A_1, A_2, \ldots, A_n$ vzhledem ke kritériím $K_1, K_2, \ldots, K_m$, potom se pro ně použije metoda v základní verzi 1. Výsledkem budou pro každé $j = 1, 2, \ldots, m$ intervalová hodnocení $\tilde{h}_1^j, \tilde{h}_2^j, \ldots, \tilde{h}_n^j$, kde $\tilde{h}_i^j = \langle h_i^{Lj}, h_u^{Uj} \rangle$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Celkové intervalové hodnocení $\tilde{h}_i = \langle h_i^L, h_i^U \rangle$ varianty $A_i$ vzhledem ke kritériím $K_1, K_2, \ldots, K_m$ je potom pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$ dáno pomocí vztahů

$$h_i^L = \sum_{j=1}^{m} v_j h_i^{Lj}, \qquad h_i^U = \sum_{j=1}^{m} v_j h_i^{Uj}.$$

V tomto případě je pro získání celkových hodnocení aplikována metoda fuzzy váženého průměru pro trojúhelníková fuzzy čísla s reálnými váhami; více o fuzzy váženém průměru lze nalézt v [66].

# Kapitola 4

# Hodnocení obecných kategorií pomocí párového srovnávání

V této kapitole bude popsána situace, kde varianty nejsou předem známy a model hodnocení je vytvořen pomocí párového srovnávání pro obecné kategorie. V kapitole 4.1 bude popsáno, jak takováto situace obecně vypadá. Následně bude v kapitole 4.2 zaveden model hodnocení kategorií a bude shrnut aktuální stav této problematiky. V kapitole 4.3 bude definována nová metoda pro získání hodnocení kategorií. Původní výsledky uvedené v této kapitole byly z větší části publikovány v [48].

## 4.1. Motivace

Dalším problémem při hodnocení pomocí metod párového srovnávání je, jak vytvořit vhodný hodnotící model v situacích, kdy varianty nejsou předem známy a vstupují do modelu postupně. Příkladem může být hodnocení uchazečů výběrového řízení na pracovní pozici. Použití metod párového srovnávání tak, jak bylo popsáno v kapitole 1, není vhodné. Představme si, že by při ukončení termínu výběrového řízení byli přihlášení uchazeči ohodnoceni pomocí metody párového srovnávání. Následně by byl termín ukončení výběrového řízení prodloužen, a přihlásili by se další uchazeči. Potom by bylo nutno celý model upravit. Pro každé kritérium se musely provést párová srovnání nově přidaných variant se všemi ostatními variantami. V souvislosti s tím by bylo nutno přepočítat všechna dílčí hodnocení a stejně tak celková hodnocení. Navíc, jak bylo poznamenáno v kapitole 1.3, může přidání nových variant do modelu způsobit změnu preferenčního pořadí stávajících variant v modelu, což často není žádaná vlastnost.

Pokud varianty nejsou v modelu předem dány, pak se také většinou neví, kolik variant se nakonec bude hodnotícího procesu účastnit. Toto s sebou často nese nutnost ohodnotit desítky až stovky variant. Příkladem může být právě hodnocení uchazečů výběrového řízení na pracovní pozici ve vyhlášené firmě. V takovém případě by pravděpodobně hodnotitel ani nebyl schopen vytvořit model, kde by se srovnával každého uchazeče se všemi ostatními.

V situacích, kdy varianty nejsou předem známy, je snaha vytvořit obecný hodnotící model, který bude moci být v budoucnosti použit pro hodnocení všech variant, které mohou do daného systému hodnocení vstoupit. V takovémto případě se provede výrazné zjednodušení vyjádření důsledků variant vzhledem k uvažovaným kritériím. Pro každé kritérium je vytvořena množina *úrovní* tohoto kritéria, která pro něj bude představovat úplnou hodnotící škálu. Takovou škálou může být např. pro kvantitativní kritérium praxe v oboru množina úrovní *žádná, do 2 let, 2–5 let, 5–10 let, nad 10 let.* Pro kvalitativní kritérium úroveň vzdělání, které by se posuzovalo dle konkrétní vystudované vysoké školy, se může jednat o množinu úrovní *dobrá, průměrná, ucházející.* Je tedy důležité, aby škála byla pro každé kritérium úplná. Přitom každé kritérium může mít různý počet úrovní. Tato množina úrovní by něměla být příliš velká a měla by být jazykově popsatelná.

Místo konkrétních variant jsou tedy v modelu uvažovány obecné varianty, které budeme nazývat *kategorie.* Kategorie představuje $m$-tici konkrétních úrovní jednotlivých kritérií. Všechny kategorie pro danou množinu kritérií jsou potom dány kartézským součinem množin úrovní těchto kritérií. V modelu hodnocení uchazečů výběrového řízení na pracovní pozici by tedy kategorii představoval např. uchazeč, který má praxi v oboru 2-5 let a průměrné vzdělání. Pomocí metod párového porovnání je potom provedeno ohodnocení těchto kategorií. Jakmile do modelu vstoupí varianta, je ztotožněna s jednou z definovaných kategorií a dle této kategorie je jí přiřazeno hodnocení.

Způsob hodnocení variant pomocí kategorií je tedy výhodný v tom, že varianty nemusí být předem známy. Také je takto možné ohodnotit nepřeberné množství variant. Počet párových srovnávání, které je nutné provést bude totiž záležet na počtu úrovní jednotlivých kritérií, ne na počtu variant. Dále je tímto eliminováno, že by při přidání varianty do modelu mohlo dojít ke změně preferenčního pořadí dříve uvažovaných variant. Na druhou stranu tento způsob hodnocení nemusí být vždy vhodný. Zařazením variant do kategorií se totiž snižují rozdíly mezi variantami. Drobné odlišnosti variant se ztrácejí, neboť varianty mají v tomto případě přiřazenu stejnou kategorii. Proto jsou při tomto způsobu hodnocení důležité zkušenosti tvůrce modelu hodnocení. Hodnocení pomocí kategorií je vhodné především u modelů s velkým počtem variant a u modelů s takovými kritérii, které je možno přirozeně rozdělit do úrovní. Tyto úrovně pak musí být hodnotitel schopen párově porovnat.

## 4.2. Popis modelu

Hodnocením variant v modelech párového srovnávání, kde varianty nejsou předem známy, se zabýval Saaty [75, 75]. Pro takovéto případy navrhl postup popsaný v kapitole 4.1 a vytvořil pomocí něj modifikaci metody AHP. Nyní bude takovýto model pro hodnocení obecných kategorií pomocí metod párového srovnávání formálně zaveden. Toto bude provedeno přímo pro vícekriteriální případ, neboť s ním se potom pojí různé způsoby výpočtu hodnocení těchto kategorií. V případě jednoho kritéria se bude jednat o speciální variantu představeného modelu. Intenzity preferencí je možno opět zadávat buď multiplikativně nebo aditivně.

**Struktura modelu**

Uvažujme množinu variant $\mathcal{A}$, které je třeba ohodnotit dle kritérií $K_1, K_2, \ldots, K_m$. Konkrétní varianty, které budou vstupovat do modelu, ani jejich počet není předem známý. Pro každé kritérium $K_j$ budeme uvažovat slovní hodnotící škálu danou *úrovněmi* $U_1^j, U_2^j, \ldots, U_{n_j}^j$, kde tyto úrovně jsou očíslovány od nejpreferovanější po nejméně preferovanou úroveň vzhledem ke kritériu $K_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Pro hodnotící model budou vytvořeny kategorie, které budou představovat obecné varianty pro kritéria $K_1, K_2, \ldots, K_m$: $m$-tice hodnot $(U_{i_1}, U_{i_2}, \ldots, U_{i_m})$ se bude nazývat *kategorie* a bude značena $C_{i_1,i_2,\ldots,i_m}$, $i_j \in \{1, 2, \ldots, n_j\}$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Celkový počet kategorií bude označen $n$ a platí pro něj $n = \prod_{j=1}^{m} n_j$.

Nyní uvažujme, že významnosti kritérií $K_1, K_2, \ldots, K_m$ jsou dány normovanými váhami $v_1, v_2, \ldots, v_m$. Dále pro úrovně $U_1^j, U_2^j, \ldots, U_{n_j}^j$ kritéria $K_j$ jsou dána jejich normovaná hodnocení $u_1^j, u_2^j, \ldots, u_m^j$ vzhledem ke $K_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$. *Dílčí hodnocení kategorie $C_{i_1,i_2,\ldots,i_m}$ vzhledem ke kritériu $K_j$* bude značeno $R^j_{i_1,i_2,\ldots,i_m}$, $i_j = 1, 2, \ldots, n_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Toto hodnocení bude pro každé $j = 1, 2, \ldots, m$ odvozeno z příslušné úrovně kritéria pomocí (4.2), (4.3) nebo (4.4). Vzorce (4.2) a (4.3) budou uvedeny a podrobně rozebrány níže v této kapitole a vzorec (4.4) bude následně definován v kapitole 4.3. *Celkové hodnocení (rating) kategorie $C_{i_1,i_2,\ldots,i_m}$* bude značeno $R_{i_1,i_2,\ldots,i_m}$ a analogicky jako u klasického modelu se vypočte jako vážený průměr dílčích hodnocení této kategorie vzhledem k jednotlivým kritériím, tj. pro každé $i_j = 1, 2, \ldots, n_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$ platí

$$R_{i_1,i_2,\ldots,i_m} = \sum_{j=1}^{m} v_j R^j_{i_1,i_2,\ldots,i_m}, \tag{4.1}$$

Uvažujme nyní, že do modelu vstoupí varianta $A$, která bude nabývat hodnot $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ vzhledem ke kritériím $K_1, K_2, \ldots, K_m$. Pro každé $j = 1, 2, \ldots, m$ je možno zařadit hodnotu $a_j$ vzhledem ke kritériu $K_j$ do nějaké z jeho úrovní $U_1^j, U_2^j, \ldots, U_{n_j}^j$, tj. $a_j \in U_{i_j}^j$, kde $i_j \in \{1, 2, \ldots, n_j\}$. Tzn. že variantu $A$ je možno ztotožnit s nějakou kategorií $C_{i_1,i_2,\ldots,i_m}$, jejíž celkové hodnocení je $R_{i_1,i_2,\ldots,i_m}$, $i_j \in \{1, 2, \ldots, n_j\}$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Potom hodnocení $h$ varianty $A$ vzhledem ke kritériím $K_1, K_2, \ldots, K_m$ je dáno

$$h = R_{i_1,i_2,\ldots,i_m}.$$

Pro lepší ilustraci nyní bude uveden příklad, jak mohou vypadat obecné kategorie pro konkrétní hodnotící problém.

**Příklad:** Uvažujme nyní rozhodovací problém koupě bytu o velikosti $2+1$ v lokalitě Olomouc o rozloze 45–70 $m^2$ a pohybující se v cenové relaci 1,8 – 2,4 mil. Kč. Kritéria $K1$, $K_2$ a $K_3$, dle kterých budou hodnoceny uvažované byty, jsou spolu se svými úrovněmi definována v tabulce 4.1.

| $K_1$: velikost bytu | | $K_2$: cena bytu | | $K_3$: materiál domu | |
|---|---|---|---|---|---|
| $A$: | nad 60 $m^2$ | $K$: | do 2 mil. Kč | $X$: | cihla |
| $B$: | 50–60 $m^2$ | $L$: | 2–2,2 mil. Kč | $Y$: | panel |
| $C$: | pod 50 $m^2$ | $M$: | nad 2,2 mil. Kč | | |

Tab. 4.1: Příklad modelu s obecnými kategoriemi: Koupě bytu 2+1

Z tabulky 4.1 je vidět, že kritérium $K_1$ je rozděleno na úrovně $A$, $B$ a $C$. Kritérium $K_2$ je rozděleno na úrovně $K$, $L$ a $M$. Poslední kritérium má pouze dvě úrovně $X$ a $Y$. Pro takto definované úrovně kategorií existuje $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$ kategorií variant: $AKX$, $AKY$, $ALX$, $ALY$, $AMX$, $AMY$, $BKX$, $BKY$, $BLX$, $BLY$, $BMX$, $BMY$, $CKX$, $CKY$, $CLX$, $CLY$, $CMX$, $CMY$. Přitom např. kategorie $AMX$ reprezentuje byt, který má velikost nad 60 $m^2$, stojí do 2 mil. Kč a nachází se v cihlovém domě. $\triangle$

**Multiplikativně zadané preference**

Jsou-li preference hodnotitele zadány multiplikativně, potom se pro získání vah kritérií a dílčích hodnocení variant postupujeme takto: Mějme multiplikativní preferenční matici $M = \{m_{ik}\}_{i,k=1}^{m}$ pro porovnání kritérií $K_1, K_2, \ldots, K_m$. Potom normované váhy $v_1, v_2, \ldots, v_m$ těchto kritérií jsou vypočteny pomocí geometrického průměru řádků (1.8) nebo metodou vlastního vektoru (1.9) a následně jsou znormovány dle (1.4). Dále pro každé $j = 1, 2, \ldots, m$ mějme multiplikativní preferenční matice $M^j = \{m_{ik}^j\}_{i,k=1}^{n_j}$ pro porovnání úrovní $U_1^j, U_2^j, \ldots, U_{n_j}^j$ vzhledem ke kritériu $K_j$. Potom pro každé $j = 1, 2, \ldots, m$ se vypočtou normovaná hodnocení $u_1^j, u_2^j, \ldots, u_m^j$ těchto úrovní opět vzorcem (1.8) nebo (1.9) a znormují se dle (1.4).

**Aditivně zadané preference**

Jsou-li preference hodnotitele zadány aditivně, potom se pro získání vah kritérií a dílčích hodnocení variant postupujeme stejně, jak bylo popsáno v kapitole 1.2.4 pro klasický model hodnocení variant, tj. nejprve se vypočtou aditivní váhy a aditivní hodnocení a ty se následně převedou na multiplikativní tvar.

Mějme aditivní preferenční matici $A = \{a_{ik}\}_{i,k=1}^{m}$ pro porovnání kritérií kritérií $K_1, K_2, \ldots, K_m$. Potom aditivní váhy $v_1^A, v_2^A, \ldots, v_m^A$ těchto kritérií jsou vypočteny pomocí vzorce (1.12). Následně jsou převedeny na multiplikativní váhy dle (1.15) a znormovány pomocí (1.4), výsledkem čehož jsou váhy $v_1, v_2, \ldots, v_m$. Dále pro každé $j = 1, 2, \ldots, m$ mějme aditivní preferenční matice $A^j = \{a^j_{ik}\}_{i,k=1}^{n_j}$ pro porovnání úrovní $U^j_1, U^j_2, \ldots, U^j_{n_j}$ vzhledem ke kritériu $K_j$. Potom se pro každé $j = 1, 2, \ldots, m$ vypočtou aditivní hodnocení $u^{Aj}_1, u^{Aj}_2, \ldots, u^{Aj}_m$ těchto úrovní opět vzorcem (1.12). Následně se převedou na multiplikativní hodnocení dle (1.15) a znormují se pomocí (1.4), výsledkem čehož jsou hodnocení $u^j_1, u^j_2, \ldots, u^j_m$.

**Výpočet dílčích hodnocení kategorií**

Nyní je možno přistoupit k výpočtu dílčích hodnocení kategorií. Následující dva výpočty těchto hodnocení zavedl Saaty. Oba tyto přístupy budou podrobeny detailní analýze. V následující kapitole bude potom definován nový vzorec pro výpočtet dílčích hodnocení kategorií.

*Způsoby výpočtu hodnocení kategorií dle Saatyho*

1. Saaty [75] definoval hodnocení kategorie $C_{i_1,i_2,\ldots,i_m}$ vzhledem ke kritériu $K_j$, kde $j = 1, 2, \ldots, m$, pro každé $i_j = 1, 2, \ldots, n_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$ takto:
$$R^j_{i_1,i_2,\ldots,i_m} = u^j_{i_j}. \tag{4.2}$$
Tedy dílčí hodnocení kategorie je rovno přímo hodnocení příslušné úrovně kritéria. V takovém případě ale dílčí hodnocení kategorií vzhledem ke kritériu $K_j$ nebude v součtu dávat 1, jak je v metodách tohoto typu obvyklé. Místo toho bude platit
$$\sum_{i_1=1}^{n_1}\sum_{i_2=1}^{n_2}\cdots\sum_{i_m=1}^{n_m} R^j_{i_1,i_2,\ldots,i_m} = \sum_{\substack{i_k=1,2,\ldots,n_k\\ k=1,2,\ldots,m,k\neq j}} \sum_{i_j=1}^{n_j} u^j_{i_j} = \sum_{\substack{i_k=1,2,\ldots,n_k\\ k=1,2,\ldots,m,k\neq j}} 1 = \prod_{\substack{k=1,2,\ldots,m,\\ k\neq j}} n_k.$$
Odtud je vidět, že dílčí hodnocení kategorií daná vzorcem (4.2) budou v případě různého počtu úrovní pro jednotlivá kritéria dávat v součtu různé hodnoty. Pro takováto hodnocení, která jsou daná na různých škálách, by se neměl počítat vážený průměr. Celková hodnocení kategorií vypočtená váženým průměrem těchto dílčích hodnocení jsou totiž ovlivněna počtem úrovní definovaných pro jednotlivá kritéria. Díky tomu potom může kritérium, které má nejméně úrovní, mít větší vliv na celkové hodnocení kategorie než by mělo mít dle přiřazených vah.

2. V pozdějších pracích Saaty [74, 76] předefinoval hodnocení kategorie $C_{i_1,i_2,\ldots,i_m}$ vzhledem ke kritériu $K_j$, kde $j = 1, 2, \ldots, m$, pro každé $i_j = 1, 2, \ldots, n_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$ takto:
$$R^j_{i_1,i_2,\ldots,i_m} = \frac{u^j_{i_j}}{\max\limits_{k=1,2,\ldots,n_j} u^j_k}. \tag{4.3}$$

Tedy dílčí hodnocení kategorie je rovno hodnocení příslušné úrovně kritéria upravenému tak, aby kategorie dosahující nejvyšší úrovně kritéria měla hodnocení 1. Saaty takto vypočtená hodnocení kategorií označuje jako absolutní hodnocení, viz [74]. Přitom absolutní hodnotící škála je taková, jejíž hodnoty vyjadřují naplnění cíle prezentovaného uvažovaným kritériem, přičemž jeden krajní bod znamená absolutní nenaplnění cíle a druhý krajní bod zase absolutní naplnění cíle, viz [49]. Nejčastěji se taková škála definuje na intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Potom se hodnocení $\alpha \in \langle 0, 1\rangle$ dá interpretovat tak, že uvažovaný prvek splňuje daný cíl na $\alpha \cdot 100\%$. Přičemž prvek s hodnocením 0 splňuje cíl na 0%, tj. nenaplňuje jej vůbec, a prvek s hodnocením 1 splňuje cíl na 100%, tj. absolutně naplňuje cíl.

Pro více informací o absolutním hodnocení lze nahlédnout do [49]. Tam se zabýváme absolutním hodnocením vyjadřujícím míru naplnění cíle a ukazujeme, že takovýto typ hodnocení lze zavést pomocí normované (pravděpodobnostní) míry: Hodnotící funkce vzhledem k uvažovanému cíli je definována pomocí normované míry $\mu$ na množině vlastností $X$. Hodnocení varianty $A$, která je popsána vlastnostmi $x \subseteq X$, vzhledem k danému cíli potom reprezentuje hodnota $\mu(x)$. Hodnocení je v tomto případě dáno na absolutní škále $\langle 0, 1\rangle$ a má následující interpretaci: Jestliže $\mu(x) = \alpha$, potom varianta $A$ naplňuje uvažovaný cíl na $\alpha \cdot 100\%$.

V tomto Saatyho modelu hodnocení kategorií je pro kritérium $K_j$ označena nejvyšší úroveň $U_1^j$ a nejnižší úroveň $U_{n_j}^j$. Dílčí hodnocení kategorií pomocí vzorce (4.3) je tedy definováno tak, že nejlepší kategorie dle $K_j$ má hodnocení 1 a nejhorší kategorie má hodnocení $u_{n_j}^j / u_1^j$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Pro dílčí hodnocení kategorií vzhledem ke kriteriu $K_j$ tedy pro každé $i_j = 1, 2, \ldots, n_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$ platí

$$R_{i_1, i_2, \ldots, i_m}^j \in \left\langle \frac{u_{n_j}^j}{u_1^j}, 1 \right\rangle,$$

kde $j = 1, 2, \ldots, m$. Takováto hodnocení tedy není možno interpretovat jako procenta naplnění cíle. Navíc je vidět, že pro každé kritérium jsou hodnocení kategorií definována na jiné hodnotící škále. Agregují-li se dílčí hodnocení kategorií (4.3) váženým průměrem (4.1), potom pro celkové hodnocení kategorií bude pro každé $i_j = 1, 2, \ldots, n_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$ platit

$$R_{i_1, i_2, \ldots, i_m} \in \left\langle \sum_{j=1}^{m} v_j \frac{u_{n_j}^j}{u_1^j}, 1 \right\rangle.$$

Tj. celková hodnocení kategorií budou definována ještě na jiné hodnotící škále než byly škály pro jednotlivá dílčí kritéria. Interpretace takových hodnocení je tedy diskutabilní. Nicméně pro nejlepší kategorii zůstává zachováno, že nejlepší kategorie dle všech kritérií má celkové hodnocení 1.

## 4.3. Nová metoda pro výpočet dílčích hodnocení kategorií

**Zavedení výpočtu dílčích hodnocení**

Nyní navrhneme způsob získání dílčích hodnocení kategorií, který je přímou aplikací metod párového srovnávání přímo na množinu kategorií. Místo variant budou jako porovnávané prvky vystupovat kategorie definované pomocí úrovní kritéria. To tedy znamená, že pro každé kritérium by měla být vytvořena matice porovnávající společně všechny kategorie. Řád takové matice by byl $n = \prod_{j=1}^{n} n_j$. Následně by z této matice bylo přímo vypočeteno hodnocení kategorií. Takto by bylo nutné vytvořit hodnotící model v případě, že mezi uvažovanými kategoriemi by byly nějaké interakce. Nicméně v případě, kdy se mezi kategoriemi interakce nevyskytují, je možno hodnocení kategorií definovat přímo pomocí jednotlivých úrovní kritéria, stejně jako tomu bylo u obou Saatyho modelů. Při normalizaci hodnocení je však nutno si uvědomit, že vždy $\prod_{k=1,k\neq j}^{n} n_k$ kategorií dosahuje stejné úrovně kritéria $K_j$ pro každé $j = 1, 2, \ldots, m$.

Na základě této úvahy bude hodnocení kategorie $C_{i_1,i_2,\ldots,i_m}$ vzhledem ke kritériu $K_j$, kde $j = 1, 2, \ldots, m$, definováno pro každé $i_j = 1, 2, \ldots, n_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$ takto:

$$R^j_{i_1,i_2,\ldots,i_m} = \frac{u^j_{i_j}}{\prod\limits_{k=1,k\neq j}^{m} n_k}, \tag{4.4}$$

kde $u^j_{i_j}$ jsou normovaná hodnocení úrovní $U^j_{i_j}$ kritéria $K_j$, jejichž odvození pomocí metod párového porovnání je popsáno v kapitole 4.2

Je zřejmé, že takto definovaná hodnocení kategorií jsou nezáporná. Navíc dávají v součtu 1, jak je v metodách párového srovnávání běžné.

**Věta 4.1.** *Nechť pro hodnocení kategorií* $C_{i_1,i_2,\ldots,i_m}$, $i_j = 1, 2, \ldots, n_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$ *vzhledem ke kritériím* $K_1, K_2, \ldots, K_m$ *platí vztah* (4.4). *Potom pro každé* $j = 1, 2, \ldots, m$ *platí* $\sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} \cdots \sum_{i_m=1}^{n_m} R^j_{i_1,i_2,\ldots,i_m} = 1$.

**Důkaz:** Nechť pro dílčí hodnocení kategorií platí (4.4). Potom

$$\sum_{i_1=1}^{n_1}\sum_{i_2=1}^{n_2}\cdots\sum_{i_m=1}^{n_m} R^j_{i_1,i_2,\ldots,i_m} = \sum_{\substack{i_k=1,2,\ldots,n_k\\ k=1,2,\ldots,m,k\neq j}} \sum_{i_j=1}^{n_j} R^j_{i_1,i_2,\ldots,i_m} = \sum_{\substack{i_k=1,2,\ldots,n_k\\ k=1,2,\ldots,m,k\neq j}} \sum_{i_j=1}^{n_j} \frac{u^j_{i_j}}{\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{m} n_k} =$$

$$= \frac{1}{\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{m} n_k} \sum_{\substack{i_k=1,2,\ldots,n_k\\ k=1,2,\ldots,m,k\neq j}} 1 = \frac{1}{\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{m} n_k} \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{m} n_k = 1. \quad \square$$

**Důsledek 4.1.** *Nechť pro hodnocení kategorií* $C_{i_1,i_2,\ldots,i_m}$, $i_j = 1,2,\ldots,n_j$, $j = 1,2,\ldots,m$ *vzhledem ke kritériím* $K_1, K_2, \ldots, K_m$ *platí vztah* (4.4). *Potom pro celkové hodnocení vypočtené* (4.1) *platí* $\sum_{i_1=1}^{n_1}\sum_{i_2=1}^{n_2}\cdots\sum_{i_m=1}^{n_m} R_{i_1,i_2,\ldots,i_m} = 1$.

**Důkaz:** Nechť pro dílčí hodnocení kategorií platí (4.4) a pro celkové hodnocení platí (4.1). Potom s využitím věty 4.1 plyne

$$\sum_{i_1=1}^{n_1}\sum_{i_2=1}^{n_2}\cdots\sum_{i_m=1}^{n_m} R_{i_1,i_2,\ldots,i_m} = \sum_{j=1}^{m} v_j \sum_{i_1=1}^{n_1}\sum_{i_2=1}^{n_2}\cdots\sum_{i_m=1}^{n_m} R^j_{i_1,i_2,\ldots,i_m} = \sum_{j=1}^{m} v_j = 1. \quad \square$$

**Příklad:** Mějme kritéria $K_1$ a $K_2$ a k nim příslušné normované váhy $v_1 = 0{,}6$, $v_2 = 0{,}4$. Pro kritérium $K_1$ mějme úrovně $A$, $B$, $C$ a $D$, pro kritérium $K_2$ úrovně $X$ a $Y$. Pro obě kritéria mějme zadány intenzity preferencí multiplikativně na Saatyho škále, tj. uvažujme Saatyho matice $S^1$ a $S^2$ zobrazené pořadě v tabulkách 4.2 a 4.4. Hodnocení těchto úrovní vzhledem k příslušným kritériím mějme vypočtená pomocí metody vlastního vektoru (1.9) a následně znormovaná (1.4). Příslušná normovaná hodnocení $\mathbf{u}^1$ a $\mathbf{u}^2$ jsou taktéž uvedena v tabulkách 4.2 a 4.4. Nyní si ukážeme, jak se liší hodnocení kategorií vypočtená pomocí různých vzorců (4.2), (4.3) a (4.4).

| $S^1$ | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $\mathbf{u}^1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 1 | 3 | 3 | 5 | 0,5048 |
| $B$ | $\frac{1}{3}$ | 1 | 3 | 5 | 0,2876 |
| $C$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | 1 | 3 | 0,1431 |
| $D$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{3}$ | 1 | 0,0645 |

Tab. 4.2: Hodnoc. úrovní dle $K_1$

| kategorie | $\mathbf{R}^1_1$ | $\mathbf{R}^1_2$ | $\mathbf{R}^1_3$ |
|---|---|---|---|
| $AX$, $AY$ | 0,5048 | 1,0000 | 0,2524 |
| $BX$, $BY$ | 0,2876 | 0,5698 | 0,1438 |
| $CX$, $CY$ | 0,1431 | 0,2834 | 0,0715 |
| $DX$, $DY$ | 0,0645 | 0,1277 | 0,0322 |

Tab. 4.3: Hodnocení kategorií dle $K_1$

| $S^2$ | $X$ | $Y$ | $\mathbf{u}^2$ |
|---|---|---|---|
| $X$ | 1 | 9 | 0,9 |
| $Y$ | $\frac{1}{9}$ | 1 | 0,1 |

Tab. 4.4: Hodnoc. úrovní dle $K_2$

| kategorie | $\mathbf{R}^2_1$ | $\mathbf{R}^2_2$ | $\mathbf{R}^2_3$ |
|---|---|---|---|
| $AX$, $BX$, $CX$, $DX$ | 0,9000 | 1,0000 | 0,2250 |
| $AY$, $BY$, $CY$, $DY$ | 0,1000 | 0,1111 | 0,0250 |

Tab. 4.5: Hodnocení kategorií dle $K_2$

Saatyho matice $S^1$ a $S^2$ pro kritéria $K_1$ a $K_2$ jsou slabě konzistentní, jak jde vidět z věty 2.3. Dále pro jejich podílový koeficient nekonzistence vypočtený dle (2.2) platí $CR_1 = 0{,}0722 < 0{,}1$ a $CR_2 = 0$, tudíž dle tohoto koeficientu jsou obě Saatyho matice dostatečně konzistentní. Hodnocení kategorií $AX$, $AY$, $BX$, $BY$, $CX$, $CY$, $DX$ a $DY$ bude nyní vypočteno pomocí všech dosud ukázaných přístupů.

| kat. | $\mathbf{R}_1$ |
|---|---|
| $AX$ | 0,6629 |
| $BX$ | 0,5326 |
| $CX$ | 0,4458 |
| $DX$ | 0,3987 |
| $AY$ | 0,3429 |
| $BY$ | 0,1730 |
| $CY$ | 0,0862 |
| $DY$ | 0,0391 |

| kat. | $\mathbf{R}_2$ |
|---|---|
| $AX$ | 1,0000 |
| $BX$ | 0,7419 |
| $AY$ | 0,6444 |
| $CX$ | 0,5701 |
| $DX$ | 0,4766 |
| $BY$ | 0,3863 |
| $CY$ | 0,2145 |
| $DY$ | 0,1210 |

| kat. | $\mathbf{R}_3$ |
|---|---|
| $AX$ | 0,2414 |
| $BX$ | 0,1763 |
| $AY$ | 0,1614 |
| $CX$ | 0,1329 |
| $DX$ | 0,1093 |
| $BY$ | 0,0963 |
| $CY$ | 0,0529 |
| $DY$ | 0,0293 |

Tab. 4.6: Celkové hodnocení kategorií

1. Nejprve vypočteme dílčí hodnocení $\mathbf{R}_1^1$ a $\mathbf{R}_1^2$ kategorií prvním uvedeným Saatyho přístupem, tj. dle vzorce (4.2). Tato hodnocení jsou vzhledem k jednotlivým kritériím zobrazena v tabulkách 4.3 a 4.5. Jak je vidět, kategoriím se pouze přiřazují hodnocení dle jednotlivých úrovní. Následně se vypočtou celková hodnocení $\mathbf{R}_1$ kategorií pomocí (4.1). Ta jsou dána v tabulce 4.6. Zde je vidět, že hodnocení všech kategorií s úrovní $X$ je vyšší než hodnocení kategorií s úrovní $Y$. Je to proto, že $K_2$ má jen dvě úrovně a první úroveň $X$ je extrémně preferovaná před druhou úrovní $Y$. Pak dle (4.2) má každá kategorie s úrovní $X$ vzhledem ke $K_2$ hodnocení 0,9, což potom při agregaci ovlivňuje celkové hodnocení. Podívejme se např. na kategorie $DX$ a $AY$. Hodnocení $DX$ je větší než hodnocení $AY$. Přitom $DX$ je nejhorší dle $K_1$ a nejlepší dle $K_2$, kdežto $AY$ je nejlepší dle $K_1$ a nejhorší dle $K_2$. Kritérium $K_1$ má váhu 0,6 a kritérium $K_2$ má váhu 0,4, proto bychom čekali spíše to, že $AY$ bude považována za lepší než $DX$.
2. Nyní vypočteme dílčí hodnocení $\mathbf{R}_2^1$ a $\mathbf{R}_2^2$ kategorií druhým uvedeným Saatyho přístupem, tj. dle vzorce (4.3). Tato hodnocení jsou vzhledem k jednotlivým kritériím zobrazena v tabulkách 4.3 a 4.5. Kategorie nejlepší dle daného kritéria má vždy hodnocení 1. Nejhorší kategorie má ale pokaždé jiné hodnocení. Pro $K_1$ je to 0,1277 a pro $K_2$ zase 0,1111. Celková hodnocení $\mathbf{R}_2$ kategorií se vypočtou pomocí (4.1) a jsou dána v tabulce 4.6. Kategorie nejlepší dle všech kritérií má hodnocení 1. Kategorie nejhorší dle všech kritérií 0,1210. Tzn., že všechny uvedené hodnotící škály se liší levým krajním bodem. Je vidět, že preferenční uspořádání kategorií je jiné než při použití předchozího přístupu. Kategorie $AY$ se preferenčně posunula před $CX$ a $DX$. Tedy v tomto případě je možno konstatovat, že v tomto ohledu je preferenční uspořádání prvků po agregaci smysluplné.
3. Nakonec vypočteme dílčí hodnocení $\mathbf{R}_3^1$ a $\mathbf{R}_3^2$ kategorií námi zavedeným vzorcem (4.4). Tato hodnocení jsou vzhledem k jednotlivým kritérií zobrazena v tabulkách 4.3 a 4.5. Pokud by se sečetlo hodnocení kategorií vzhle-

dem ke $K_1$, bude jejich součet roven 1. Stejně tak součet dílčích hodnocení vzhledem ke $K_2$ bude nabývat hodnoty 1. Celková hodnocení $\mathbf{R}_3$ kategorií pomocí (4.1) jsou dána v tabulce 4.6. Celková hodnocení všech kategorií budou v součtu taktéž dávat hodnotu 1. Preferenční uspořádání prvků v tomto konkrétním příkladě vyšlo stejně jako u Saatyho druhého přístupu. Tedy i zde platí, že kategorie $AY$ je lepší než $DX$. $\triangle$

### Model pro multiplikativní preference

Nyní bude ukázáno, že dílčí hodnocení kategorií definovaná dle (4.4) jsou stejná jako hodnocení vypočtená přímo z preferenční matice porovnávající všechny kategorie vzhledem k uvažovanému kritériu a následně znormovaná. Toto platí jak pro hodnocení vypočtená metodou vlastního vektoru, tak pro geometrický průměr řádků.

**Věta 4.2.** *Nechť pro každé $j = 1, 2, \dots, m$ je $M^j = \{m^j_{ik}\}^{n_j}_{i,k=1}$ multiplikativní preferenční matice pro srovnání úrovní $U^j_1, U^j_2, \dots, U^j_{n_j}$ vzhledem ke kritériu $K_j$. Nechť pro každé $j = 1, 2, \dots, m$ jsou $u^j_1, u^j_2, \dots, u^j_{n_j}$ normovaná hodnocení úrovní $U^j_1, U^j_2, \dots, U^j_{n_j}$ vzhledem ke $K_j$ získaná z $M^j$ pomocí geometrického průměru řádků (1.8) (resp. metody vlastního vektoru (1.9)) a následně znormová pomocí (1.4). Nechť pro každé $j = 1, 2, \dots, m$ je $C^j = \{c^j_{ik}\}^n_{i,k=1}$ multiplikativní preferenční matice pro srovnání kategorií $C_{i_1,i_2,\dots,i_m}$, kde $i_j = 1, 2, \dots, n_j$, vzhledem ke kritériu $K_j$. Nechť pro každé $j = 1, 2, \dots, m$ jsou $R^j_{i_1,i_2,\dots,i_m}$ normovaná hodnocení kategorií $C_{i_1,i_2,\dots,i_m}$, $i_j = 1, 2, \dots, n_j$, vzhledem ke $K_j$ získaná z $C^j$ pomocí geometrického průměru řádků (1.8) (resp. metody vlastního vektoru (1.9)) a následně pomocí normování (1.4). Potom platí vztah (4.4), tj. $R^j_{i_1,i_2,\dots,i_m} = u^j_{i_j} / \prod_{k=1,k\neq j}^m n_k$ pro každé $i_j = 1, 2, \dots, n_j$, $j = 1, 2, \dots, m$.*

**Důkaz:** Nechť platí předpoklady uvedené ve větě 4.2. Dále nechť pro každé $j = 1, 2, \dots, m$ jsou $u'^j_1, u'^j_2, \dots, u'^j_{n_j}$ nenormovaná hodnocení úrovní $U^j_1, U^j_2, \dots, U^j_{n_j}$ vzhledem ke $K_j$ vypočtená z $M^j$ pomocí geometrického průměru řádků (1.8) nebo metody vlastního vektoru (1.9). Dle předpokladů pro každé $j = 1, 2, \dots, m$ tedy platí

$$u^j_{i_j} = \frac{u'^j_{i_j}}{\sum\limits_{i_k=1}^{n_j} u'^j_{i_k}}. \tag{4.5}$$

Dále nechť pro každé $j = 1, 2, \dots, m$ jsou $R'^j_{i_1,i_2,\dots,i_m}$ nenormovaná hodnocení kategorií $C_{i_1,i_2,\dots,i_m}$, $i_j = 1, 2, \dots, n_j$, vzhledem ke $K_j$ vypočtená z $C^j$ pomocí geometrického průměru řádků (1.8) nebo metody vlastního vektoru (1.9). Dle předpokladů pro každé $j = 1, 2, \dots, m$ tedy platí

$$R^j_{i_1,i_2,\dots,i_m} = \frac{R'^j_{i_1,i_2,\dots,i_m}}{\sum\limits_{k_1=1}^{n_1} \sum\limits_{k_2=1}^{n_2} \cdots \sum\limits_{k_m=1}^{n_m} R'^j_{k_1,k_2,\dots,k_m}}. \tag{4.6}$$

Nyní bude ukázáno, že pro nenormovaná hodnocení obou dvou skupin prvků, tj. úrovní kritérií i kategorií, vypočtených buď pomocí (1.8), nebo pomocí (1.9) platí $R'^j_{k_1,k_2,\ldots,k_m} = u'^j_{i_k}$:

1) Předpokládejme, že pro každé $j = 1,2,\ldots,m$ jsou nenormovaná hodnocení $u'^j_1, u'^j_2, \ldots, u'^j_{n_j}$ úrovní kritéria $K_j$ vypočtena z $M^j$ geometrickým průměrem řádků (1.8). Tj. pro každé $i_j = 1,2,\ldots,n_j$, $j = 1,2,\ldots,m$, platí

$$u'^j_{i_j} = \sqrt[n_j]{\prod_{k_j=1}^{n_j} m^j_{i_j k_j}}. \tag{4.7}$$

Dále nechť pro každé $j = 1,2,\ldots,m$ jsou nenormovaná hodnocení $R'^j_{i_1,i_2,\ldots,i_m}$ kategorií $C_{i_1,i_2,\ldots,i_m}$, $i_j = 1,2,\ldots,n_j$, vzhledem ke kritériu $K_j$ vypočtena z $C^j$ geometrickým průměrem řádků (1.8). Tj. pro každé $i_j = 1,2,\ldots,n_j$, $j = 1,2,\ldots,m$, platí

$$R'^j_{i_1,i_2,\ldots,i_m} = \sqrt[n]{\prod_{k_1=1}^{n_1}\prod_{k_2=1}^{n_2}\cdots\prod_{k_m=1}^{n_m} c^j_{(i_1,i_2,\ldots,i_m)(k_1,k_2,\ldots,k_m)}}. \tag{4.8}$$

Porovnávají-li se vzhledem ke $K_j$ úrovně $U^j_{k_j}$ a $U^j_{l_j}$, jejich párové srovnání je označeno $m^j_{k_j l_j}$, $k_j, l_j \in \{1,2,\ldots,n_j\}$, $j = 1,2,\ldots,m$. Porovnejme nyní vzhledem ke $K_j$ kategorie $C_{i_1,i_2,\ldots,i_m}$, kde pro jednu kategorii platí $i_j = k_j$, tj. tato kategorie nabývá vzhledem ke $K_j$ úrovně $U^j_{k_j}$, a pro druhou kategorii platí $i_j = l_j$, tj. tato kategorie nabývá vzhledem ke $K_j$ úrovně $U^j_{l_j}$. Pak pro jejich párové srovnání platí také hodnota $m^j_{k_j l_j}$. Tj. obecně platí

$$c^j_{(i_1,i_2,\ldots,i_m)(k_1,k_2,\ldots,k_m)} = m^j_{i_j k_j} \tag{4.9}$$

pro každé $i_l, k_l = 1,2,\ldots,n_l$, $l = 1,2,\ldots,m$ a pro každé $j = 1,2,\ldots,m$. Nyní je možno (4.8) s pomocí (4.9) a následně (4.7) přepsat do tvaru

$$R'^j_{i_1,i_2,\ldots,i_m} = \sqrt[n]{\prod_{\substack{k_l=1,2,\ldots,n_l \\ l=1,2,\ldots,m, l\neq j}} \prod_{k_j=1}^{n_j} m^j_{i_j k_j}} = \sqrt[n]{\prod_{k_j=1}^{n_j} (m^j_{i_j k_j})^{\prod_{l=1, l\neq j}^{m} n_l}} = \sqrt[n_j]{\prod_{k_j=1}^{n_j} m^j_{i_j k_j}} = u'^j_{i_j}.$$

Bylo tedy ukázáno, že nenormované hodnocení kategorie $C_{i_1,i_2,\ldots,i_m}$ vzhledem ke $K_j$ vypočtené z $C^j$ pomocí geometrického průměru řádků je rovno nenormovanému hodnocení úrovně $U^j_{i_j}$ vypočtenému z $M^j$ taktéž geometrickým průměrem řádků.

2) Předpokládejme nyní, že pro každé $j = 1, 2, \ldots, m$ je vektor nenormovaných hodnocení $\mathbf{u}'^j = (u_1'^j, u_2'^j, \ldots, u_{n_j}'^j)$ úrovní kritéria $K_j$ vypočten z $M^j$ metodou vlastního vektoru (1.9). Tj. pro každé $j = 1, 2, \ldots, m$ platí

$$M^j \mathbf{u}'^j = \lambda_{max}^j \mathbf{u}'^j, \tag{4.10}$$

kde $\lambda_{max} \geq n_j > 0$ je maximální vlastní číslo $M^j$. Je třeba si navíc uvědomit, že $\lambda^j = \lambda_{max}^j$ je jediným nenulovým řešením soustavy $M^j \mathbf{p}^j = \lambda^j \mathbf{p}^j$ a $\mathbf{p}^j = \mathbf{u}'^j$ je vlastní vektor příslušný $\lambda_{max}^j$.

Dále nechť pro každé $j = 1, 2, \ldots, m$ je vektor nenormovaných hodnocení $\mathbf{R'^j}$ kategorií $C_{i_1,i_2,\ldots,i_m}$, $i_j = 1, 2, \ldots, n_j$, vzhledem ke kritériu $K_j$ vypočten z $C^j$ metodou vlastního vektoru (1.9). Tj. pro každé $j = 1, 2, \ldots, m$ platí

$$C^j \mathbf{R}'^j = \mu_{max}^j \mathbf{R}'^j, \tag{4.11}$$

kde $\mu_{max}^j \geq n > 0$ je maximální vlastní číslo $C^j$. Vztah (4.11) je možno s použitím (4.9) pro každé $i_j = 1, 2, \ldots, n_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$ rozepsat

$$\mu_{max}^j R'^j_{i_1,i_2,\ldots,i_m} = \sum_{k_1=1}^{n_1} \sum_{k_2=1}^{n_2} \cdots \sum_{k_m=1}^{n_m} c^j_{(i_1,i_2,\ldots,i_m)(k_1,k_2,\ldots,k_m)} R'^j_{k_1,k_2,\ldots,k_m} =$$

$$= \sum_{k_1=1}^{n_1} \sum_{k_2=1}^{n_2} \cdots \sum_{k_m=1}^{n_m} m_{i_j k_j} R'^j_{k_1,k_2,\ldots,k_m} = \sum_{k_j=1}^{n_j} m_{i_j k_j} \sum_{\substack{k_l=1,2,\ldots,n_l, \\ l=1,2,\ldots,m, l\neq j}} R'^j_{k_1,k_2,\ldots,k_m}.$$

Odtud je vidět, že pro každé $j = 1, 2, \ldots, m$ hodnota $\mu_{max}^j R'^j_{i_1,i_2,\ldots,i_m}$ závisí pouze na $i_j$ a nezávisí na ostatních hodnotách $i_l$, kde $l = 1, 2, \ldots, m$, $l \neq j$. Proto je možno pro $j = 1, 2, \ldots, m$ zavést $t_{i_j}^j := R'^j_{i_1,i_2,\ldots,i_m}$ pro každé $i_l = 1, 2, \ldots, n_l$, kde $l = 1, 2, \ldots, m$. Potom pro každé $i_j = 1, 2, \ldots, n_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$ lze psát

$$\mu_{max}^j t_{i_j}^j = \sum_{k_j=1}^{n_j} m_{i_j k_j} \sum_{\substack{k_l=1,2,\ldots,n_l, \\ l=1,2,\ldots,m, l\neq j}} t_{k_j}^j = \sum_{k_j=1}^{n_j} m_{i_j k_j} \prod_{l=1, l\neq j}^{m} n_l t_{k_j}^j.$$

Odtud pro každé $i_j = 1, 2, \ldots, n_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$ platí

$$\frac{\mu_{max}^j}{\prod\limits_{l=1,l\neq j}^{m} n_l} t_{i_j}^j = \sum_{k_j=1}^{n_j} m_{i_j k_j} t_{k_j}^j,$$

kde označíme $\rho_{max}^j := \mu_{max}^j / \prod_{l=1,l\neq j}^{m} n_l$. Platí tedy

$$M^j \mathbf{t}^j = \rho_{max}^j \mathbf{t}^j,$$

kde $\mathbf{t}^j = (t_1^j, t_2^j, \ldots, t_{n_j}^j)$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Přitom pro každé $j = 1, 2, \ldots, m$ má soustava $M^j \mathbf{p}^j = \lambda^j \mathbf{p}^j$ pouze dvě jedinečná řešení $\lambda = 0$ a $\lambda = \lambda_{max}^j \geq n_j$. Dále pro každé $j = 1, 2, \ldots, m$ platí $\rho_{max}^j = \mu_{max}^j / \prod_{l=1, l\neq j}^m n_l \geq n / \prod_{l=1, l\neq j}^m n_l = n_j$. Tedy pro každé $j = 1, 2, \ldots, m$ je $\rho_{max}^j$ nenulové a proto musí platit $\rho_{max}^j = \lambda_{max}^j = \mu_{max}^j / \prod_{l=1, l\neq j}^m n_l$ a dle (4.10) je $\mathbf{t}^j = \mathbf{u}'^j$ k němu příslušný vlastní vektor. Vzhledem k tomu, jak byly pro $j = 1, 2, \ldots, m$ definovány složky vektoru $\mathbf{t}^j$, platí $R'^j_{i_1, i_2, \ldots, i_m} = u'^j_{i_j}$ pro každé $i_l = 1, 2, \ldots, n_l$, $l = 1, 2, \ldots, m$. Tj. nenormované hodnocení kategorie $C_{i_1, i_2, \ldots, i_m}$ vzhledem ke $K_j$ vypočtené z $C^j$ metodou vlastního vektoru je rovno nenormovanému hodnocení úrovně $U_{i_j}^j$ vypočtenému z $M^j$ taktéž metodou vlastního vektoru.

Dle 1) a 2) pro hodnocení obou dvou skupin prvků, tj. úrovní kritérií i kategorií, vypočtených buď pomocí (1.8), nebo pomocí (1.9) platí $R'^j_{i_1, i_2, \ldots, i_m} = u'^j_{i_j}$. Dosazením tohoto vztahu do (4.6) a následně využitím rovnosti (4.5), plyne požadovaný vzorec (4.4):

$$R^j_{i_1, i_2, \ldots, i_m} = \frac{u'^j_{i_j}}{\sum\limits_{l_1=1}^{n_1} \sum\limits_{l_2=1}^{n_2} \cdots \sum\limits_{l_m=1}^{n_m} u'^j_{l_j}} = \frac{u'^j_{i_j}}{\prod\limits_{k=1, k\neq j}^{m} n_k \sum\limits_{l_j=1}^{n_j} u'^j_{l_j}} = \frac{u^j_{i_j}}{\prod\limits_{k=1, k\neq j}^{m} n_k}. \quad \square$$

**Model pro aditivní preference**

Nyní bude ukázáno, že analogicky jako tomu bylo u multiplikativních hodnocení, platí obdobný vztah mezi aditivními hodnoceními úrovní kritéria a aditivními hodnoceními kategorií vypočtenými přímo z aditivní preferenční matice porovnávající všechny kategorie vzhledem k uvažovanému kritériu. Zde však ještě před normováním uvažujeme převod na multiplikativní preference.

**Věta 4.3.** *Nechť pro každé $j = 1, 2, \ldots, m$ je $D^j = \{d_{ik}^j\}_{i,k=1}^{n_j}$ aditivní preferenční matice pro srovnání úrovní $U_1^j, U_2^j, \ldots, U_{n_j}^j$ vzhledem ke kritériu $K_j$. Nechť pro každé $j = 1, 2, \ldots, m$ jsou $u_1^{Aj}, u_2^{Aj}, \ldots, u_{n_j}^{Aj}$ aditivní hodnocení úrovní $U_1^j, U_2^j, \ldots, U_{n_j}^j$ vzhledem ke $K_j$ získaná z $D^j$ pomocí (1.12). Nechť pro každé $j = 1, 2, \ldots, m$ je $B^j = \{b_{ik}\}_{i,k=1}^n$ aditivní preferenční matice pro srovnání kategorií $C_{i_1, i_2, \ldots, i_m}$, kde $i_j = 1, 2, \ldots, n_j$, vzhledem ke kritériu $K_j$. Nechť pro každé $j = 1, 2, \ldots, m$ jsou $R^{Aj}_{i_1, i_2, \ldots, i_m}$ aditivní hodnocení kategorií $C_{i_1, i_2, \ldots, i_m}$, $i_j = 1, 2, \ldots, n_j$, vzhledem ke $K_j$ získaná z $B^j$ pomocí (1.12). Potom pro tato aditivní hodnocení platí $R^{Aj}_{i_1, i_2, \ldots, i_m} = u^{Aj}_{i_j}$ a po jejich převodu na multiplikativní tvar $R^j_{i_1, i_2, \ldots, i_m}$ a $u^j_{i_j}$ pomocí vzorce (1.15) a normování (1.4) platí vztah (4.4), tj. $R^j_{i_1, i_2, \ldots, i_m} = u^j_{i_j} / \prod_{k=1, k\neq j}^m n_k$ pro každé $i_j = 1, 2, \ldots, n_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$.*

**Důkaz:** Nechť platí předpoklady uvedené ve větě 4.3.

1) Nejprve bude ukázáno, že pro aditvní hodnocení platí $R^{Aj}_{i_1, i_2, \ldots, i_m} = u^{Aj}_{i_j}$ pro každé $i_j = 1, 2, \ldots, n_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

Předpokládejme, že pro každé $j = 1, 2, \ldots, m$ jsou aditivní hodnocení $u_1^{Aj}, u_2^{Aj}, \ldots, u_{n_j}^{Aj}$ úrovní kritéria $K_j$ vypočtená z $D^j$ vozrcem (1.12). Tj. pro každé $i_j = 1, 2, \ldots, n_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$, platí

$$u_{i_j}^{Aj} = \frac{2}{n_j} \sum_{k_j=1}^{n_j} d_{i_j k_j}^j. \tag{4.12}$$

Dále nechť pro každé $j = 1, 2, \ldots, m$ jsou aditivní hodnocení $R_{i_1,i_2,\ldots,i_m}^{Aj}$ kategorií $C_{i_1,i_2,\ldots,i_m}$, $i_j = 1, 2, \ldots, n_j$, vzhledem ke kritériu $K_j$ vypočtena z $B^j$ dle (1.12). Tj. pro každé $i_j = 1, 2, \ldots, n_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$, platí

$$R_{i_1,i_2,\ldots,i_m}^{Aj} = \frac{2}{n} \sum_{k_1=1}^{n_1} \sum_{k_2=1}^{n_2} \cdots \sum_{k_m=1}^{n_m} b_{(i_1,i_2,\ldots,i_m)(k_1,k_2,\ldots,k_m)}^j. \tag{4.13}$$

Stejně jako u multiplikativních preferencí platí analogie vztahu (4.9), tj. platí

$$b_{(i_1,i_2,\ldots,i_m)(k_1,k_2,\ldots,k_m)}^j = d_{i_j k_j}^j \tag{4.14}$$

pro každé $i_l, k_l = 1, 2, \ldots, n_l$, $l = 1, 2, \ldots, m$ a pro každé $j = 1, 2, \ldots, m$. Nyní je možno (4.13) s pomocí (4.14) a následně (4.12) přepsat do tvaru

$$R_{i_1,i_2,\ldots,i_m}^{Aj} = \frac{2}{n} \sum_{\substack{k_l=1,2,\ldots,n_l \\ l=1,2,\ldots,m, l\neq j}} \sum_{k_j=1}^{n_j} d_{i_j k_j}^j = \frac{2}{n} \prod_{\substack{l=1 \\ l\neq j}}^{m} n_l \sum_{k_j=1}^{n_j} d_{i_j k_j}^j = \frac{2}{n_j} \sum_{k_j=1}^{n_j} d_{i_j k_j}^j = u_{i_j}^{Aj}.$$

Bylo ukázáno, že aditivní hodnocení kategorie $C_{i_1,i_2,\ldots,i_m}$ vzhledem ke $K_j$ vypočtené z $B^j$ pomocí (1.12) je rovno aditivnímu hodnocení úrovně $U_{i_j}^j$ vypočtenému z $D^j$ taktéž pomocí (1.12).

2) Nyní se provede převod aditivních hodnocení $u_{i_j}^{Aj}$ úrovní kritéria $K_j$ na multiplikativní hodnocení $u_{i_j}'^j$ pomocí vztahu (1.15), $i_j = 1, 2, \ldots, n_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Tyto hodnoty představují pro každé $j = 1, 2, \ldots, m$ hodnocení vypočtené metodou geometrického průměru z matice $A^j$ převedené na multiplikativní preferenční matici $M^j$ pomocí vzorce (1.14). Stejně tak se provede převod aditivních hodnocení $R_{i_1,i_2,\ldots,i_m}^{Aj}$ kategorií na multiplikativní hodnocení $R_{i_1,i_2,\ldots,i_m}'^j$ pomocí (1.15), $i_j = 1, 2, \ldots, n_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Potom opět tyto hodnoty představují pro každé $j = 1, 2, \ldots, m$ hodnocení vypočtené metodou geometrického průměru z matice $B^j$ převedené na multiplikativní preferenční matici $C^j$ pomocí vzorce (1.14). Nyní je možno aplikovat větu 4.2 a pro normované verze $R_{i_1,i_2,\ldots,i_m}^j$ a $u_{i_j}^j$ tak plyne požadované tvrzení. □

# Kapitola 5

# Aplikace navržených přístupů

V této kapitole bude ukázána praktická aplikace postupů navržených v kapitolách 2.3, 3.3 a 4.3. Navržené metody budou aplikovány na model hodnocení uměleckých děl použitý v Registru uměleckých výstupů (RUV), který bude popsán dále.

Model hodnocení výsledků tvůrčí umělecké činnosti použitý v RUV pracuje s 27 kategoriemi, pro které byla pomocí Saatyho metody stanovena bodová hodnocení. Toto vyžadovalo od expertů zadat 351 párových srovnání. Jak je uvedeno v [48], model RUV byl po pilotním provozu podroben analýze, kde se ukázalo, že adekvátně slouží svému účelu. Před několika roky bylo zvažováno rozšíření zavedených 27 kategorií uměleckých děl na celkových 36 kategorií v souvislosti s navýšením počtu úrovní u jednoho z uvažovaných kritérií ze tří na čtyři. V tomto případě by však od expertů při zachování stejného postupu pro výpočet bodových hodnocení již bylo vyžadováno provést 630 párových srovnání. V této kapitole bude ukázáno, že možným řešením, jak hodnocení uměleckých děl expertům zjednodušit a zmenšit počet vyžadovaných párových srovnání, by bylo aplikovat na model jeden z přístupů navržených v této práci.

Aby bylo možné posoudit vhodnost navržených přístupů, budeme pracovat s původním modelem RUV s 27 kategoriemi uměleckých děl. Pokud by se ukázal pro tento konkrétní případ některý z uvažovaných modelů vhodný, bylo by potom možné pomocí něj vytvořit model hodnocení také pro uvažovaných 36 kategorií uměleckých děl.

Nejprve bude v kapitole 5.1 představen model výpočtu bodových hodnocení kategorií RUV. Potom bude v kapitole 5.2 na tento model RUV aplikován navržený algoritmus pro získání neúplné preferenční matice a výpočet intervalových hodnocení. Následně v kapitole 5.3 bude na úkol stanovit bodová hodnocení kategorií RUV aplikován navržený model pro vícekriteriální hodnocení obecných kategorií variant. Hodnocení získaná z obou nových modelů budou porovnána s hodnoceními z modelu RUV a bude vyhodnoceno, o kolik párových srovnání by zde bylo od expertů požadováno méně než v původním modelu RUV. V obou nových modelech bude vyžadována slabá konzistence zadávaných matic.

Pro přehlednost budou matice v této kapitole zadávány pomocí tabulek a budou zobrazeny pouze elementy matice na hlavní diagonále a nad ní. Elementy matice pod hlavní diagonálou jsou jednoznačně dány pomocí vlastnosti reciprocity.

## 5.1. Registr uměleckých výstupů (RUV)

Registr uměleckých výstupů (RUV) [107] představuje registr výsledků tvůrčí umělecké činnosti vytvořený na českých vysokých školách. Součástí RUVu je model hodnocení evidovaných uměleckých děl. Pro účely hodnocení jsou výstupy z umělecké tvorby členěny do 7 segmentů: architektura, design, audivizuální umění, hudba, literatura, scénická umění a výtvarná umění. Hodnocení uměleckých výstupů získaná z RUVu jsou brána pro jednotlivé vysoké školy jako ukazatel kvality jejich tvůrčí umělecké činnosti. Aktuálně se tato hodnocení používají jako jeden z parametrů pro financování veřejných vysokých škol ze státního rozpočtu, viz [61].

RUV je z matematického hlediska detailně popsán v [90, 93]. Tento model hodnocení používá tři kritéria hodnocení: závažnost a význam, rozsah a institucionální kontext. Pro každé z těchto kritérií jsou slovně definovány jeho úrovně:

Kritérium 1. Závažnost a význam tvůrčí umělecké činnosti:
A - dílo zásadního a objevného významu;
B - dílo přinášející významná nová řešení;
C - dílo inspirovaně rozvíjející současné vývojové trendy.

Kritérium 2. Rozsah tvůrčí umělecké činnosti:
K - dílo velkého rozsahu;
L - dílo středního rozsahu;
M - dílo malého rozsahu.

Kritérium 3. Institucionální kontext:
X - dílo vytvořené a majících účinek v mezinárodním kontextu;
Y - dílo vytvořené a majících účinek v celostátním kontextu;
Z - dílo vytvořené a majících účinek v profesionálních institucích nebo v médiích regionálního významu.

Kritérium *Závažnost a význam* je hodnoceno expertně. V každém segmentu umělecké činnosti jsou pro jednotlivé úrovně tohoto kritéria dány slovní specifikace. Pro kritérium *Rozsah* jsou pro jednotlivé segmenty úrovně popsány slovně a jsou jim přiřazeny měřitelné charasteristiky. Pro kritérium *Institucionální kontext* je dán seznam institucí pro každou uvažovanou úroveň. Dle této instituce jsou potom díla rovnou zařazena do příslušné úrovně.

Na základě uvažovaných úrovní kritéria bylo následně definováno 27 kategorií uměleckých děl. Soubor kategorií představuje množinu všech možných kombinací úrovní jednotlivých kritérií, tj. např. $ALX$, $BKZ$ nebo $CMY$. Tyto kategorie byly ohodnoceny pomocí multiplikativní metody párového srovnávání se Saatyho škálou danou v tabulce 1.2. Hodnocení kategorií bylo získáno přímo z preferenční matice porovnávající spolu jednotlivé kategorie vůči celkovému cíli. Z toho důvodu měli hodnotitelé z každého segmentu umění ke každé kategorii přiřazeny reálné příklady děl. Model nemohl být rozdělen na jednotlivé submodely kvůli interakcím mezi jednotlivými kritérii. Dalším důvodem bylo také to, že při samostatném porovnání úrovní kritéria byly slovní pojmy pro experty příliš vágní.

Kategorie uměleckých děl byly nejprve porovnány pomocí metody párového srovnávání, viz kapitola 1.1. Odtud bylo zjištěno preferenční pořadí kategorií. Následně byla k hodnocení uměleckých děl použita Saatyho metoda AHP. Jedním z důvodů použití Saatyho metody bylo to, že takto získaná hodnocení exponenciálně klesají, seřadíme-li porovnávané kategorie od nejlepší po nejhorší. Jedním z účelů tohoto hodnotícího modelu totiž je vyzdvihnout excelentní umělecká díla. Tj. aby produkce jednoho excelentního uměleckého díla byla hodnocena významně lépe než produkce několika průměrných děl.

Pro hodnocení kategorií uměleckých děl tedy byla vytvořena Saatyho preferenční matice $S = \{s_{ij}\}_{i,j=1}^{27}$ řádu 27, viz tabulka 5.1. Její modifikovaný podílový index nekonzistence je $CR^* = 0{,}1996 > 0{,}1$. Protože se jedná o matici velké dimenze, byla za účelem ověření alespoň přijatelné konzistence matice $S$ zavedena podmínka tzv. slabé konzistence, kde je pro každé $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$ požadováno $s_{ij} \geq 1 \wedge s_{jk} \geq 1 \Longrightarrow s_{ik} \geq \max\{s_{ij}, s_{jk}\}$. Jedná se o modifikaci podmínky restriktivní max-max tranzitivity pro multiplikatnivní matice. Dodržení této podmínky bylo kontrolováno již ve chvíli, kdy experti zadávali preferenční matici. Z takto vytvořené slabě konzistentní Saatyho matice byla vypočtena hodnocení kategorií jak pomocí metody geometrického průměru řádků (1.8), tak pomocí metody vlastního vektoru (1.9). Hodnocení získaná metodou vlastního vektoru lépe rozlišila poslední dvě kategorie, proto dle něj bylo stanoveno bodové hodnocení kategorií. Aby bylo možné v následující kapitole, kde se pracuje s fuzzifikovaným geometrickým průměrem řádků, lépe porovnat efektivitu použité metody, jsou v tabulce 5.2 dána hodnocení kategorií získaná geometrickým průměrem řádků (1.8) a znormována dle (1.4). Tato hodnocení jsou označena vektorem $\mathbf{R}_{RUV}$.

Poznamenejme ještě, že slabá konzistence zavedená pro model RUV je slabší podmínkou než slabá konzistence zavedaná v této práci. Jedná se o podmínku, která se stala základem slabé konzistence zavedené v kapitole 2.3 a která byla v této práci modifikována a pro tuto upravenou verzi byly v této práci ukázány její vlastnosti a výhody. Saatyho matice uvedená v tabulce 5.2 splňuje také slabou konzistenci zavedenou v této práci.

| | kategorie | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | AKX | AKY | AKZ | ALX | AMX | ALY | ALZ | BKX | AMY | AMZ | BKY | BKZ | BLX | BMX | BLY | BLZ | BMY | BMZ | CKX | CLX | CKY | CKZ | CMX | CLY | CLZ | CMY | CMZ |
| 1 | AKX | 1 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 7 | 7 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 |
| 2 | AKY | | 1 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 7 | 7 | 7 | 7 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 |
| 3 | AKZ | | | 1 | 3 | 3 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 7 | 7 | 7 | 7 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 |
| 4 | ALX | | | | 1 | 3 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 7 | 7 | 7 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 |
| 5 | AMX | | | | | 1 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 7 | 7 | 7 | 9 | 9 | 9 |
| 6 | ALY | | | | | | 1 | 3 | 3 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 7 | 7 | 7 | 9 | 9 |
| 7 | ALZ | | | | | | | 1 | 3 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 7 | 7 | 7 | 9 |
| 8 | BKX | | | | | | | | 1 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 7 | 7 | 7 |
| 9 | AMY | | | | | | | | | 1 | 3 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 7 | 7 | 7 |
| 10 | AMZ | | | | | | | | | | 1 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 7 | 7 | 7 |
| 11 | BKY | | | | | | | | | | | 1 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 7 | 7 | 7 |
| 12 | BKZ | | | | | | | | | | | | 1 | 3 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 7 | 7 | 7 |
| 13 | BLX | | | | | | | | | | | | | 1 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 7 | 7 | 7 |
| 14 | BMX | | | | | | | | | | | | | | 1 | 3 | 3 | 3 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 7 | 7 | 7 |
| 15 | BLY | | | | | | | | | | | | | | | 1 | 3 | 3 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 7 | 7 | 7 |
| 16 | BLZ | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | 3 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 7 | 7 |
| 17 | BMY | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 7 | 7 |
| 18 | BMZ | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| 19 | CKX | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | 3 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| 20 | CLX | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| 21 | CKY | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | 3 | 3 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| 22 | CKZ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | 3 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| 23 | CMX | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| 24 | CLY | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | 3 | 3 | 3 |
| 25 | CLZ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | 3 | 3 |
| 26 | CMY | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | 3 |
| 27 | CMZ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 |

Tab. 5.1: Úplná Saatyho matice porovnání kategorií uměleckých děl

| kategorie | | $\mathbf{R}_{RUV}$ |
|---|---|---|
| 1 | AKX | 0,1357 |
| 2 | AKY | 0,1132 |
| 3 | AKZ | 0,0967 |
| 4 | ALX | 0,0862 |
| 5 | ALY | 0,0761 |
| 6 | ALZ | 0,0612 |
| 7 | AMX | 0,0552 |
| 8 | AMY | 0,0498 |
| 9 | AMZ | 0,0418 |
| 10 | BKX | 0,0385 |
| 11 | BKY | 0,0335 |
| 12 | BKZ | 0,0292 |
| 13 | BLX | 0,0269 |
| 14 | BLY | 0,0222 |
| 15 | BLZ | 0,0204 |
| 16 | BMX | 0,0184 |
| 17 | BMY | 0,0167 |
| 18 | BMZ | 0,0134 |
| 19 | CKX | 0,0117 |
| 20 | CKY | 0,0106 |
| 21 | CKZ | 0,0088 |
| 22 | CLX | 0,0080 |
| 23 | CLY | 0,0072 |
| 24 | CLZ | 0,0057 |
| 25 | CMX | 0,0047 |
| 26 | CMY | 0,0042 |
| 27 | CMZ | 0,0038 |

| kategorie | | $\tilde{\mathbf{R}}$ |
|---|---|---|
| 1 | AKX | $\langle 0{,}1264, 0{,}1442\rangle$ |
| 2 | AKY | $\langle 0{,}1116, 0{,}1197\rangle$ |
| 3 | AKZ | $\langle 0{,}0931, 0{,}0977\rangle$ |
| 4 | ALX | $\langle 0{,}0839, 0{,}0883\rangle$ |
| 5 | ALY | $\langle 0{,}0734, 0{,}0790\rangle$ |
| 6 | ALZ | $\langle 0{,}0592, 0{,}0650\rangle$ |
| 7 | AMX | $\langle 0{,}0538, 0{,}0558\rangle$ |
| 8 | AMY | $\langle 0{,}0482, 0{,}0508\rangle$ |
| 9 | AMZ | $\langle 0{,}0412, 0{,}0426\rangle$ |
| 10 | BKX | $\langle 0{,}0380, 0{,}0393\rangle$ |
| 11 | BKY | $\langle 0{,}0331, 0{,}0342\rangle$ |
| 12 | BKZ | $\langle 0{,}0288, 0{,}0295\rangle$ |
| 13 | BLX | $\langle 0{,}0242, 0{,}0272\rangle$ |
| 14 | BLY | $\langle 0{,}0214, 0{,}0232\rangle$ |
| 15 | BLZ | $\langle 0{,}0194, 0{,}0210\rangle$ |
| 16 | BMX | $\langle 0{,}0179, 0{,}0194\rangle$ |
| 17 | BMY | $\langle 0{,}0163, 0{,}0177\rangle$ |
| 18 | BMZ | $\langle 0{,}0132, 0{,}0138\rangle$ |
| 19 | CKX | $\langle 0{,}0113, 0{,}0119\rangle$ |
| 20 | CKY | $\langle 0{,}0101, 0{,}0109\rangle$ |
| 21 | CKZ | $\langle 0{,}0086, 0{,}0097\rangle$ |
| 22 | CLX | $\langle 0{,}0077, 0{,}0082\rangle$ |
| 23 | CLY | $\langle 0{,}0063, 0{,}0074\rangle$ |
| 24 | CLZ | $\langle 0{,}0055, 0{,}0064\rangle$ |
| 25 | CMX | $\langle 0{,}0045, 0{,}0051\rangle$ |
| 26 | CMY | $\langle 0{,}0041, 0{,}0044\rangle$ |
| 27 | CMZ | $\langle 0{,}0034, 0{,}0039\rangle$ |

| Kategorie | | $\mathbf{R}$ |
|---|---|---|
| 1 | AKX | 0,1058 |
| 2 | ALX | 0,0980 |
| 3 | AMX | 0,0941 |
| 4 | AKY | 0,0760 |
| 5 | ALY | 0,0682 |
| 6 | AMY | 0,0643 |
| 7 | BKX | 0,0520 |
| 8 | BLX | 0,0443 |
| 9 | BMX | 0,0404 |
| 10 | AKZ | 0,0353 |
| 11 | BKY | 0,0353 |
| 12 | ALZ | 0,0276 |
| 13 | BLY | 0,0276 |
| 14 | AMZ | 0,0237 |
| 15 | BMY | 0,0237 |
| 16 | BKZ | 0,0234 |
| 17 | CKX | 0,0234 |
| 18 | CKY | 0,0212 |
| 19 | CKZ | 0,0190 |
| 20 | BLZ | 0,0157 |
| 21 | CLX | 0,0157 |
| 22 | CLY | 0,0134 |
| 23 | BMZ | 0,0117 |
| 24 | CMX | 0,0117 |
| 25 | CLZ | 0,0113 |
| 26 | CMY | 0,0095 |
| 27 | CMZ | 0,0074 |

Tab. 5.2: Hodnocení kategorií uměleckých děl

## 5.2. Aplikace navrženého algoritmu pro neúplné matice

V modelu RUV se pracuje s 27 kategoriemi. Tedy k zadání úplné matice párových porovnání je třeba od hodnotitele zadat 351 intenzit preferencí. Nyní tento problém zkusíme zjednodušit tím, že hodnotitel vyplní preferenční matici jen částečně, k čemuž se použije algoritmus zavedený v kapitole 3.3. Původní Saatyho matice $S$ zobrazená v tabulce 5.1 se použije jako zdroj dat, které bude zadávat hodnotitel. Získaná intervalová hodnocení budou porovnána s hodnoceními z modelu RUV.

V modelu RUV bylo nejprve získáno preferenční uspořádání kategorií pomocí metody párového srovnávání. Tento krok bude vynechán, místo toho navržený algoritmus aplikujeme na neúplnou Saatyho matici $\tilde{S} = \{\tilde{s}_{ij}\}_{i,j=1}^{27}$, kde budou porovnávané kategorie uspořádány náhodně. Uvažované uspořádání kategorií je vidět ve druhém řádku tabulky 5.3.

V prvním kroku jsou nastaveny diagonální prvky, tj. $\tilde{s}_{ii} = 1$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, 27$. Dále jsou nastaveny množiny přípustných hodnot $PH_{ij} = [1/9, 9]$ pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, 27$. Je zvolen parametr $\lambda = 0{,}5$, tedy obě kritéria ve výběrové funkci (3.1) mají stejnou významnost.

Ve druhém kroku hodnotitel zadá 13 počátečních párových srovnání $\{\tilde{s}_{2i-1,2i}; i = 1, 2, \ldots, 13\}$. Ve třetím kroku je aplikován algoritmus pro výběr následující dvojice prvků, pro niž hodnotitel zadá párové srovnání. Tento krok se provedl 103-krát a potom bylo jeho opakování zastaveno, neboť už ke každému párovému srovnání existovala dvojice zadných nepřímých srovnání. V matici $\tilde{S}$ zůstaly přítomny nejednoznačné množiny přípustných hodnot, takže z této preferenční matice nebylo množné určit preferenční pořadí kategorií. Proto byly v kroku 4 tyto množiny postupně zredukovány. Hodnotitel v tomto kroku doplnil dalších 17 párových srovnání. Saatyho matice $\tilde{S}$ po tomto kroku je vidět v tabulce 5.3. V kroku 5 bylo zjištěno preferenční pořadí kategorií a dle něj byla neúplná Saatyho matice přeuspořádána. Výsledná Saatyho matice $\tilde{S}_U$ s kategoriemi uspořádanými od nejpreferovanější po nejméně preferovanou se nachází v tabulce 5.4. V posledním kroku byla z matice $\tilde{S}$ pomocí vzorců (3.14) a (3.15) vypočtena intervalová hodnocení kategorií. Ta jsou společně s původními hodnoceními $\mathbf{R}_{RUV}$ použitými v modelu RUV uvedena v tabulce 5.2, kde jsou označena vektorem $\tilde{\mathbf{R}}$. Je vidět, že reálná hodnocení kategorií leží uvnitř získaných intervalových hodnocení. Tento výsledek vychází z toho, že úplná Saatyho matice $S$ pro hodnocení kategorií je slabě konzistentní a stejně tak množiny přípustných hodnot v Saatyho matici $\tilde{S}$ obsahují všechny přípustné intenzity preference, které zachovávají slabou konzistenci této matice. Tedy úplná Saatyho matice $S$ v tabulce 5.1 může být získána ze Saatyho matice $\tilde{S}$ dané v tabulce 5.4 doplněním konkrétní kombinace intenzit preferencí z uvažovaných množin přípustných hodnot.

Z původních 351 párových srovnání hodnotitel zadal celkem 133 párových srovnání (cca 38%), dalších 176 párových srovnání (cca 50%) bylo určeno automaticky dle vlastností slabé konzistence. Zbylých 42 párových srovnání (cca 12%) není v matici zadáno, ale pro každé z nich je k dispozici množina přípustných hodnot takových, které odpovídají slabé konzistenci matice. Většina těchto přípustných množin obsahuje 3 hodnoty. Intervalová hodnocení kategorií zachovávají neurčitost na vstupu a z tabulky 5.2 lze vidět, že dobře reprezentují reálná hodnocení z modelu RUV.

| | | 25 | 12 | 2 | 27 | 22 | 11 | 23 | 9 | 15 | 26 | 4 | 14 | 21 | 17 | 18 | 3 | 10 | 6 | 1 | 13 | 5 | 20 | 19 | 24 | 8 | 7 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | kategorie | CLZ | BKZ | AKY | CMZ | CKZ | BKY | CMX | AMY | BLY | CMY | ALX | BMX | CKY | BMY | BMZ | AKZ | AMZ | ALY | AKX | BLX | AMX | CLX | CKX | CLY | BKX | ALZ | BLZ |
| 25 | CLZ | 1 | $\frac{1}{7}$ | $\frac{1}{9}$ | [3,5] | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{7}$ | $[\frac{1}{5},\frac{1}{2}]$ | $\frac{1}{7}$ | $\frac{1}{7}$ | 3 | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{7}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{7}$ | $[\frac{1}{9},\frac{1}{7}]$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{7}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $[\frac{1}{5},\frac{1}{2}]$ | $\frac{1}{7}$ | $\frac{1}{7}$ | $\frac{1}{5}$ |
| 12 | BKZ | | 1 | $\frac{1}{5}$ | 7 | 5 | $\frac{1}{5}$ | 5 | $\frac{1}{5}$ | 5 | 7 | $\frac{1}{5}$ | 5 | 5 | 5 | 5 | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | 3 | $\frac{1}{5}$ | 5 | 5 | 5 | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | 5 |
| 2 | AKY | | | 1 | 9 | 9 | 5 | 9 | 5 | 5 | 9 | 5 | 5 | 7 | [5,7] | 7 | 5 | 5 | 5 | $[\frac{1}{5},\frac{1}{2}]$ | 5 | 5 | 7 | 7 | 9 | 5 | 5 | 5 |
| 27 | CMZ | | | | 1 | $\frac{1}{5}$ | $[\frac{1}{9},\frac{1}{7}]$ | $\frac{1}{5}$ | $[\frac{1}{9},\frac{1}{7}]$ | $\frac{1}{7}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{7}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{7}$ | $[\frac{1}{7},\frac{1}{5}]$ | $\frac{1}{9}$ | $[\frac{1}{9},\frac{1}{7}]$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{7}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{5}$ | $[\frac{1}{7},\frac{1}{5}]$ | $[\frac{1}{5},\frac{1}{3}]$ | $[\frac{1}{9},\frac{1}{7}]$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{7}$ |
| 22 | CKZ | | | | | 1 | $\frac{1}{5}$ | 3 | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | 5 | $\frac{1}{7}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $[\frac{1}{9},\frac{1}{7}]$ | $\frac{1}{5}$ | $[\frac{1}{7},\frac{1}{5}]$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{5}$ | $[\frac{1}{7},\frac{1}{5}]$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | 5 | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ |
| 11 | BKY | | | | | | 1 | 5 | $\frac{1}{5}$ | 5 | 7 | $\frac{1}{5}$ | 5 | 5 | 5 | 5 | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | 5 | $\frac{1}{5}$ | 5 | 5 | 5 | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | 5 |
| 23 | CMX | | | | | | | 1 | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | [3,5] | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{5}$ | $[\frac{1}{5},\frac{1}{3}]$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{5}$ | $[\frac{1}{7},\frac{1}{5}]$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{5}$ | $[\frac{1}{9},\frac{1}{5}]$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | [2,5] | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ |
| 9 | AMY | | | | | | | | 1 | 5 | 7 | $\frac{1}{5}$ | 5 | 5 | 5 | 5 | $\frac{1}{5}$ | 3 | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | 5 | $\frac{1}{5}$ | 5 | 5 | 5 | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | 5 |
| 15 | BLY | | | | | | | | | 1 | 7 | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{3}$ | 5 | 3 | 5 | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $[\frac{1}{9},\frac{1}{5}]$ | $[\frac{1}{5},\frac{1}{3}]$ | $\frac{1}{5}$ | 5 | 5 | 5 | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | [2,3] |
| 26 | CMY | | | | | | | | | | 1 | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{7}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{7}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{7}$ | $[\frac{1}{9},\frac{1}{7}]$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{7}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $[\frac{1}{5},\frac{1}{3}]$ | $\frac{1}{7}$ | $\frac{1}{7}$ | $\frac{1}{7}$ |
| 4 | ALX | | | | | | | | | | | 1 | 5 | 7 | 5 | 5 | $[\frac{1}{3},\frac{1}{2}]$ | 5 | 5 | $\frac{1}{5}$ | 5 | 3 | [5,7] | 5 | 9 | 5 | 5 | 5 |
| 14 | BMX | | | | | | | | | | | | 1 | 5 | 3 | 5 | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $[\frac{1}{9},\frac{1}{5}]$ | $[\frac{1}{5},\frac{1}{3}]$ | $\frac{1}{5}$ | 5 | 5 | 5 | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | 3 |
| 21 | CKY | | | | | | | | | | | | | 1 | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{7}$ | $\frac{1}{5}$ | $[\frac{1}{7},\frac{1}{5}]$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{5}$ | $[\frac{1}{7},\frac{1}{5}]$ | $[\frac{1}{5},\frac{1}{2}]$ | $[\frac{1}{5},\frac{1}{3}]$ | 5 | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ |
| 17 | BMY | | | | | | | | | | | | | | 1 | 5 | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $[\frac{1}{9},\frac{1}{5}]$ | $[\frac{1}{5},\frac{1}{3}]$ | $\frac{1}{5}$ | 5 | 5 | 5 | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{3}$ |
| 18 | BMZ | | | | | | | | | | | | | | | 1 | $\frac{1}{7}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $[\frac{1}{9},\frac{1}{7}]$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | 5 | 5 | 5 | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ |
| 3 | AKZ | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | 5 | 5 | $\frac{1}{5}$ | 5 | 3 | 7 | 7 | 9 | 5 | 5 | 5 |
| 10 | AMZ | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | 5 | $\frac{1}{5}$ | 5 | 5 | 5 | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | 5 |
| 6 | ALY | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | $\frac{1}{5}$ | 5 | $\frac{1}{5}$ | 5 | 5 | 7 | [3,5] | 3 | 5 |
| 1 | AKX | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | 5 | 5 | 9 | 9 | 9 | 5 | 5 | [5,9] |
| 13 | BLX | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | $\frac{1}{5}$ | 5 | 5 | 5 | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | [3,5] |
| 5 | AMX | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | 5 | 5 | [7,9] | 5 | 5 | 5 |
| 20 | CLX | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | $\frac{1}{3}$ | 5 | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ |
| 19 | CKX | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | 5 | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ |
| 24 | CLY | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | $\frac{1}{5}$ | $[\frac{1}{7},\frac{1}{5}]$ | $\frac{1}{5}$ |
| 8 | BKX | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | $\frac{1}{3}$ | 5 |
| 7 | ALZ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | 5 |
| 16 | BLZ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 |

Tab. 5.3: Saatyho matice $\tilde{S}$ před přeuspořádáním kategorií

| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| kategorie | | AKX | AKY | AKZ | ALX | AMX | ALY | ALZ | BKX | AMY | AMZ | BKY | BKZ | BLX | BMX | BLY | BLZ | BMY | BMZ | CKX | CLX | CKY | CKZ | CMX | CLY | CLZ | CMY | CMZ |
| 1 | AKX | 1 | [2,5] | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | [5,9] | [5,9] | [5,9] | [5,9] | [7,9] | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 |
| 2 | AKY | | 1 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | [5,7] | 7 | 7 | 7 | 7 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 |
| 3 | AKZ | | | 1 | [2,3] | 3 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 7 | 7 | 7 | 7 | [7,9] | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 |
| 4 | ALX | | | | 1 | 3 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | [5,7] | 7 | 7 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 |
| 5 | AMX | | | | | 1 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | [5,7] | [5,7] | [5,9] | [7,9] | 9 | 9 | 9 |
| 6 | ALY | | | | | | 1 | 3 | [3,5] | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | [5,7] | [5,7] | [5,7] | 7 | [7,9] | [7,9] | 9 |
| 7 | ALZ | | | | | | | 1 | 3 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | [5,7] | 7 | 7 | 9 |
| 8 | BKX | | | | | | | | 1 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 7 | 7 | [7,9] |
| 9 | AMY | | | | | | | | | 1 | 3 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 7 | 7 | [7,9] |
| 10 | AMZ | | | | | | | | | | 1 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 7 | 7 | [7,9] |
| 11 | BKY | | | | | | | | | | | 1 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 7 | 7 | [7,9] |
| 12 | BKZ | | | | | | | | | | | | 1 | 3 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 7 | 7 | 7 |
| 13 | BLX | | | | | | | | | | | | | 1 | [2,5] | [3,5] | [3,5] | [3,5] | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 7 | 7 | 7 |
| 14 | BMX | | | | | | | | | | | | | | 1 | 3 | 3 | 3 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 7 | 7 | 7 |
| 15 | BLY | | | | | | | | | | | | | | | 1 | [2,3] | 3 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 7 | 7 | 7 |
| 16 | BLZ | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | 3 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 7 | 7 |
| 17 | BMY | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 7 | 7 |
| 18 | BMZ | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | [5,7] |
| 19 | CKX | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | 3 | [3,5] | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | [5,7] |
| 20 | CLX | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | [2,5] | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| 21 | CKY | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | 3 | [3,5] | 5 | 5 | 5 | 5 |
| 22 | CKZ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | 3 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| 23 | CMX | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | [2,5] | [2,5] | [3,5] | 5 |
| 24 | CLY | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | [2,5] | [3,5] | [3,5] |
| 25 | CLZ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | 3 | [3,5] |
| 26 | CMY | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 | 3 |
| 27 | CMZ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 1 |

Tab. 5.4: Saatyho matice $\tilde{S}_U$ po přeuspořádání kategorií

## 5.3. Aplikace navrženého výpočtu hodnocení kategorií

V této kapitole bude na model RUV aplikován způsob výpočtu hodnocení kategorií navržený v kapitole 4.3. Získaná hodnocení kategorií budou opět porovnána s původními výsledky používanými v modelu RUV.

Jak je vidět, samotný model RUV už byl navržen ve verzi pro hodnocení kategorií. Tj. pro každé kritérium byly stanovené jeho příslušné úrovně a jejich kombinací vznikly obecné kategorie uměleckých děl. Ve výsledku se tak v modelu nehodnotí párově přímo jednotlivá umělecká díla, ale jejich zástupné kategorie. Vyprodukovaná umělecká díla jsou potom expertně zařazena do příslušných kategorií a dle nich jsou ohodnocena. Hodnocení v tomto modelu však byla získána přímo z matice porovnávající jednotlivé kategorie vzhledem k celkovému cíli hodnocení. Je to z toho důvodu, že uvažovaná kritéria jsou spolu částečná závislá.

Aby bylo možné reprezentovat využití navrženého výpočtu hodnocení daného vzorcem (4.1) pomocí dílčích hodnocení kategorií (4.4), zkusíme model rozdělit na submodely. Budeme opět pracovat se Saatyho maticemi. Interakce kritéria Rozsah s ostatními dvěma kritérii je významně menší než interakce mezi kritérii Závažnost a význam a Institucionální kontext. Proto budou vytvořeny dvě skupiny kritérií, kde první skupinu kritérií $K_1$ bude představovat *Závažnost a význam tvůrčí umělecké činnosti a institucionální kontext* s úrovněmi $AX$, $AY$, $AZ$, $BX$, $BY$, $BZ$, $CX$, $CY$ a $CZ$. Druhou skupinu kritérií $K_2$ bude představovat *Rozsah tvůrčí umělecké činnosti* s úrovněmi $K$,$L$ a $M$. Při sestavování matic párového porovnání budeme vycházet z informací obsažených v Saatyho matici modelu RUV, která je zobrazena v tabulce 5.1. Tato matice však v sobě nese více informací, proto se budeme snažit odhadnout, jak by experti vyplnili uvažované matice nižší dimenze.

V tabulce 5.5 je vidět Saatyho matice sestavená pro porovnání skupiny kritérií $K_1$ a $K_2$. Tato matice je konzistentní. Váhy $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ byly vypočteny pomocí geometrického průměru řádků (1.8) a znormovány (1.4) a jsou taktéž vidět v tabulce 5.5.

| | $K_1$ | $K_2$ | $\mathbf{v}$ |
|---|---|---|---|
| $K_1$ | 1 | 3 | 0,75 |
| $K_2$ | | 1 | 0,25 |

Tab. 5.5: Párové porovnání kritérií $K_1$ a $K_2$

V tabulce 5.7 je vidět Saatyho matice sestavená pro porovnání úrovní skupiny kritérií označené $K_1$ - Závažnost a význam a institucionální kontext. Abychom zachytili interakce mezi původními kritérii, byla Saatyho matice sestavena ve dvou krocích.

V prvním kroku byla vytvořena Saatyho matice na základě tohoto pravidla: Při porovnávání úrovní $A, B, C$ kritéria Závažnost a význam bylo spočítáno, o kolik úrovní je první porovnávaná úroveň lepší než druhá (tj. např. $A$ je o dvě úrovně lepší než $C$). Každá úroveň byla ztotožněna s posunem o 4 hodnoty na Saatyho škále vůči hodnotě indiference (tj. při srovnání $A$ s $C$ se jedná o intenzitu 9). Stejně tak bylo při porovnávání úrovní $K, L, M$ kritéria Rozsah spočítáno, o kolik úrovní je první porovnávaná úroveň lepší než druhá (tj. např. $M$ je o dvě úrovně horší než $K$, tj. hodnota -2). Každá úroveň byla ztotožněna s posunem o 2 hodnoty na Saatyho škále vůči hodnotě indiference (tj. při porovnání $M$ s $K$ se jedná $-1/5$). Výsledné posuny byly sečeteny a omezeny na maximální hodnotu 9 a minimální hodnotu 1/9. Tj. např. při srovnání $AY$ a $BX$ znamená porovnání $A$ a $B$ posun o 4 hodnoty a porovnání $Y$ a $X$ posun o -2 hodnoty, tj. dohromady jde o posun o 2 hodnoty na Saatyho škále vůči indiferenci. Výsledná intenzita preference bude tedy 3. Takto sestavenou Saatyho matici lze nalézt v tabulce 5.6. Tato matice je dle věty 2.3 slabě konzistentní.

| úrovně $K_1$ | AX | AY | BX | AZ | BY | BZ | CX | CY | CZ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| AX | 1 | 3 | 5 | 5 | 7 | 9 | 9 | 9 | 9 |
| AY | | 1 | 3 | 3 | 5 | 7 | 7 | 9 | 9 |
| BX | | | 1 | 1 | 3 | 5 | 5 | 7 | 9 |
| AZ | | | | 1 | 3 | 5 | 5 | 7 | 9 |
| BY | | | | | 1 | 3 | 3 | 5 | 7 |
| CX | | | | | | 1 | 1 | 3 | 5 |
| BZ | | | | | | | 1 | 3 | 5 |
| CY | | | | | | | | 1 | 3 |
| CZ | | | | | | | | | 1 |

Tab. 5.6: Saatyho matice pro kritérium $K_1$ po kroku 1

Ve druhém kroku byly zohledněny interakce mezi oběma kritérii, ze kterých se tato skupina skládá. Zaměřili jsme se na zvláštní kombinace úrovní kritérií. Intenzity preferencí úrovní $BZ$ a $CX$ vzhledem k ostatním úrovním $K_1$ byly sníženy o 1 hodnotu na Saatyho škále. Výsledná Saatyho matice je zobrazena v tabulce 5.7. Tato matice je dle věty 2.3 slabě konzistentní. Její podílový koeficient nekonzistence je $CR = 0{,}0741 < 0{,}1$. Dle Saatyho je tedy matice dostatečně konzistentní. Hodnocení $\mathbf{u}^1$ úrovní vzhledem ke skupině kritérií $K_1$ bylo z této matice vypočteno pomocí geometrického průměru řádků (1.8) a znormováno (1.4). Následně bylo pomocí vzorce (4.4) vypočteno hodnocení $\mathbf{R}^1$ kategorií vzhledem ke kritériu $K_1$. Obě tato hodnocení lze nalézt taktéž v tabulce 5.7.

V tabulce 5.8 je vidět Saatyho matice sestavená pro porovnání úrovní kritéria $K_2$ Rozsah. Intenzity preferencí zde byly zadány rovnoměrně. Bylo spočteno o kolik úrovní je jedna porovnávaná úroveň lepší než druhá a každá úroveň byla

| úrovně $K_1$ | AX | AY | BX | AZ | BY | BZ | CX | CY | CZ | $\mathbf{u}^1$ | kat. | $\mathbf{R}^1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| AX | 1 | 3 | 5 | 7 | 7 | 9 | 9 | 9 | 9 | 0,3602 | A*X | 0,1201 |
| AY | | 1 | 3 | 5 | 5 | 8 | 8 | 9 | 9 | 0,2410 | A*Y | 0,0803 |
| BX | | | 1 | 3 | 3 | 6 | 6 | 7 | 9 | 0,1453 | B*X | 0,0484 |
| AZ | | | | 1 | 1 | 4 | 4 | 5 | 7 | 0,0785 | A*Z | 0,0262 |
| BY | | | | | 1 | 4 | 4 | 5 | 7 | 0,0785 | B*Y | 0,0262 |
| CX | | | | | | 1 | 1 | 2 | 4 | 0,0307 | C*X | 0,0102 |
| BZ | | | | | | | 1 | 2 | 4 | 0,0307 | B*Z | 0,0102 |
| CY | | | | | | | | 1 | 3 | 0,0218 | C*Y | 0,0073 |
| CZ | | | | | | | | | 1 | 0,0132 | C*Z | 0,0044 |

Tab. 5.7: Hodnocení úrovní a kategorií dle kritéria $K_1$

ztotožněna s posunem o 2 hodnoty na Saatyho škále vůči hodnotě indiference. Matice je dle věty 2.3 slabě konzistentní. Její podílový koeficient nekonzistence je $CR = 0{,}0370 < 0{,}1$. Tedy dle Saatyho je matice dostatečně konzistentní. Hodnocení $\mathbf{u}^2$ úrovní vzhledem ke kritériu $K_2$ bylo vypočteno pomocí geometrického průměru řádků (1.8) a znormováno (1.4). Následně bylo pomocí vzorce (4.4) vypočteno hodnocení $\mathbf{R}^2$ kategorií vzhledem ke kritériu $K_2$. Obě tato hodnocení lze nalézt taktéž v tabulce 5.8.

| úrovně $K_2$ | K | L | M | $\mathbf{u}^2$ | kategorie | $\mathbf{R}^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| K | 1 | 3 | 5 | 0,5661 | *K* | 0,0629 |
| L | | 1 | 3 | 0,2877 | *L* | 0,0320 |
| M | | | 1 | 0,1462 | *M* | 0,0162 |

Tab. 5.8: Hodnocení úrovní a kategorií dle kritéria $K_2$

Rozdělením modelu RUV na několik menších modelů tak, jak to bylo nyní demonstrováno, došlo k razantnímu snížení potřebných párových srovnání. Z původních 351 párových porovnání jsme nově vyplnili jen 40 párových porovnání (cca 11%). Získaná dílčí hodnocení kategorií $\mathbf{R}^1$ a $\mathbf{R}^2$ byla agregována pomocí váženého průměru, tj. dle (4.1). Takto získaná celková hodnocení kategorií $\mathbf{R}$ lze nalézt v tabulce 5.2, kde jsou vidět také hodnocení $\mathbf{R}_{RUV}$ kategorií z původního modelu RUV. Porovnáme-li tato hodnocení, potom je v první řadě vidět, že se změnilo preferenčí pořadí kategorií. V modelu RUV jsou kategorie uspořádány od úrovně $A$ po úroveň $C$. V rámci každé této úrovně jsou ještě kategorie uspořádány od úrovně $K$ po úroveň $L$ a nakonec v rámci dojice úrovně $AK$ až $CM$ jsou kategorie uspořádány od úrovně $X$ po úroveň $Z$. V právě získaném hodnocení se např. kategorie $BMX$ posunula z 16. místa na 11. místo. Je tak brána jako lepší než např. kategorie $ALZ$, která se z 6. místa přesunula na 12. místo. To, jestli by takovéto preferenční uspořádání kategorií vyhovovalo zamýšlenému účelu, by muselo být posouzeno expertně.

Lze také pozorovat, že rozdělením modelu na několik menších modelů, došlo ke snížení podílu hodnocení nejlepší a nejhorší kategorie. V modelu RUV je nejlepší kategorie $AKX$ 36-krát lepší než nejhorší kategorie $CMZ$. V našem modelu také platí, že $AKX$ je nejlepší a $CMZ$ je nejhorší kategorie, ale tentokrát je $AKX$ pouze 14-krát lepší než $CMZ$. Obdobné výsledky vycházely i pro jinak zkonstruované Saatyho matice pro dílčí hodnocení kategorií. Vzhledem k tomu, že model RUV má za účel vyzdvihovat excelentní díla, ukazuje se, že by pro něj takovéto rozdělení problému na dílčí subproblémy nebylo úplně vhodné. V tomto konkrétním případě by tedy pro úpravu modelu RUV v důsledku navýšení počtu kategorií bylo lepší použít algoritmus zavedený v kapitole 3.3.

# Závěr

V této dizertační práci byly popsány metody hodnocení založené na maticích párového porovnání. Byl vytvořen ucelený text popisující multiplikativní i aditivní preferenční matice a převody mezi těmito přístupy. U multiplikativního modelu se většina autorů zabývá Saatyho metodou pro definování párových preferencí a výpočet hodnocení, často navíc v kontextu AHP. V této práci byl popis proveden pro obecnou hodnotící škálu a Saatyho metoda byla uvedena pouze jako speciální případ multiplikativního modelu.

V oblasti konzistence metod párového srovnávání byly přehledně popsány alternativní ukazatele konzistence, kterými se zabývali ostatní autoři. U multiplikativního přístupu se zavádějí především indexy nekonzistence. U aditivního přístupu se zase často definují slabší podmínky pro určení přijatelné konzistence matice vycházející z požadavku tranzitivity fuzzy preferenční relace. V této práci byla navržena nová koncepce posuzování konzistence preferenčních matic, která navazuje na autory zabývající se aditivním přístupem. Tato podmínka byla definována ve verzi pro multiplikativní i aditivní preference a bylo ukázáno, že takto definované podmínky jsou spolu izomorfní. Bylo demonstrováno, že výhodou slabé konzistence je to, že je v reálných situacích jednoduše dodržitelná a že ji lze snadno kontrolovat již při zadávání preferenční matice. Přitom tato podmínka splňuje základy racionálního chování hodnotitele, které byly zavedeny von Neumannem a Morgensternem.

V oblasti neúplných matic párového porovnání je práce zaměřena na navržení metody k efektivnímu vytvoření neúplné preferenční matice a k výpočtu hodnocení z této matice. Někteří autoři se zaměřují jen na jeden z těchto dvou problémů. Metoda nově navržená v této práci vychází z poznatků jiných autorů a z podmínky slabé konzistence, využívá metodu fuzzy geometrického průměru a přináší komplexní nástroj k hodnocení variant. Výhodou je, že hodnotitel má v celém procesu vždy k dispozici množinu přípustných hodnot, ze které může vybírat tak, aby vytvářená matice byla stále slabě konzistentní, tj. smysluplně zadaná. S využitím podmínky slabé konzistence také dochází k automatickému zadávání hodnot některých prvků, což snižuje náročnost pro hodnotitele. Navržená metoda má tedy dopad na praktické zadávání preferenčních matic. Výsledná neúplná preferenční matice získaná od hodnotitele je slabě konzistentní a nese dostatek informací k výpočtu smysluplných hodnocení s vypovídající hodnotou. Hodnocení jsou v tomto případě dána intervalově a zachovávají neurčitost na vstupu.

V oblasti hodnocení obecných kategorií variant pomocí metod párového srovnávání byly podrobeny kritické analýze dvě řešení navržená Saatym. Bylo demonstrováno, že v prvním případě jsou hodnocení ovlivněna počtem úrovní jednotlivých kritérií. I v případě druhého navrženého řešení jsou stále ještě průměrována dílčí hodnocení prováděná na různých hodnotících škálách a sporné je také Saatyho tvrzení o absolutním charakteru hodnocení. Následně byla popsána nová medoda pro hodnocení kategorií a bylo ukázáno, že se jedná o přímou aplikací metod párového srovnávání na uvažované kategorie a že zachovává vlastnosti běžné v tomto typu metod.

# Seznam tabulek

# Literatura


[1] Alonso, S., Chiclana, F., Herrera, F., Herrera-Viedma, E., Alcalá-Fdez, J., Porcel, C.: *A Consistency-Based Procedure to Estimate Missing Pairwise Preference Values*. International Journal of Intelligent Systems **2/23** (2008), s. 155–175.

[2] Alonso, J. A., Lamata, M. T.: *Consistency in the Analytic Hierarchy Process: A New Approach*. International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems **4/14** (2016), s. 445–459.

[3] Barzilai, J.: *Consistency measures for pairwise comparison matrices*. Journal of Multi-Criteria Decision Analysis **3/7** (1998), s. 123–132.

[4] Basile, L., D'Apuzzo, L.: *Transitive matrices, strict preference order and ordinal evaluation operators*. Soft Computing **10** (2006), s. 933–940.

[5] Bozóki, S., Fülöp, J., Rónyai, L.: *On optimal completion of incomplete pairwise comparison matrices*. Mathematical and Computer Modelling **52** (2010), s. 318–333.

[6] Brunelli, M.: *Introduction to the Analytic Hierarchy Process*. Springer, 2015.

[7] Brunelli, M. *Studying a set of properties of inconsistency indices for pairwise comparisons*. Annals of Operations Research (2016), s. 1–19.

[8] Brunelli, M., Canal, L., Fedrizzi, M.: *Inconsistency indices for pairwise comparison matrices: a numerical study*. Annals of Operations Research **1/211** (2013), s. 493–509.

[9] Brunelli, M., Critch, A., Fedrizzi, M.: *A note on the proportionality between some consistency indices in the AHP*. Applied Mathematics and Computation **219** (2013), s. 7901–7906.

[10] Brunelli, M., Fedrizzi, M., Giove, S.: *Reconstruction methods for incomplete fuzzy preference relations: a numerical comparison*. Lecture Notes in Computer Science **4578** (2007), s. 86–93.

[11] Buckley J.: *Fuzzy hierarchical analysis.* Fuzzy Sets and Systems **17** (1985), s. 233–247.

[12] Budescu, D. V., Zwick, R., Rapoport, A.: *A Comparison of the Eigenvalue Method ant The Geometric Mean Procedure for Ratio Scaling.* Applied psychological measurement **1/10** (1986), s. 69–78.

[13] Černý, D., Glückaufová, D., Toms, M.: *Metody komplexního vyhodnocování variant.* Academia, Praha, 1980.

[14] Crawford, G., Williams C.: *The Analysis of Subjective Judgment Matrices.* The Rand Corporation, California, 1985.

[15] Crawford, G., Williams C.: *A note on the analysis of subjective judgement matrices.* Journal of Mathematical Psychology **4/29** (1985), s. 25–40.

[16] De Baets, B., De Meyer, H., De Schuymer, B., Jenei, S.: *Cyclic evaluation of transitivity of reciprocal relations.* Social Choice and Welfare **2/26** (2006), s. 217–238.

[17] Dong, Y., Xu, Y., Li, H., Dai, M.: *A comparative study of the numerical scales and the prioritization methods in AHP.* European Journal of Operational Research **186** (2008), s. 229–242.

[18] Dubois, D., Prade, H.: *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications.* Mathematics in Science and Engineering, volume 144, Academic Press, 1980.

[19] Dyer, R. F., Forman, E. H.: *Group decision support with the analytic hierarchy process.* Decision Support Systems **2/8** (1992), s. 99–124.

[20] Escobar, M. T., Moreno-Jiménez, J. M.: *Aggregation of Individual Preference Structures in Ahp-Group Decision Making.* Group Decision and Negotiation **4/16** (2007), s. 287–301.

[21] Fan, Z. P., Xiao, S. H., Hu, G. F.: *An optimization method for integrating two kinds of preference information in group decision-making.* Computers & Industrial Engineering **46** (2004), s. 329–335.

[22] Finan, J. S., Hurley, W. J.: *Transitive calibration of the AHP verbal scale.* European Journal of Operational Research **112** (1999), s. 367–372.

[23] Fedrizzi, M.: *On a consensus measure in a group MCDM problem.* Multiperson decision making models using fuzzy sets and possibility theory, J. Kacprzyk and M. Fedrizzi (eds.), Dortrecht: Kluwer Academic Publisher, 1990, s. 231–241.

[24] Fedrizzi, M., Brunelli, M.: *On the normalization of a priority vector associated with a reciprocal relation.* International Journal of General Systems **5/38** (2010), s. 579–586.

[25] Fedrizzi, M., Brunelli, M.: *On the priority vector associated with a reciprocal relation and a pairwise comparison matrix.* Soft Computing **6/14** (2010), s. 639–645.

[26] Fedrizzi, M. Giove, S.: *Incomplete PC and consistency optimization.* European Journal of Operational Research **1/183** (2007), s. 303–313.

[27] Fedrizzi, M., Giove, S.: *Optimal sequencing in incomplete PCs for large-dimensional problems.* International Journal of General Systems **4/44** (2013), s. 366–375.

[28] Gao, S., Zhang, Z., Cao C.: *Calculating Weights Methods in Complete Matrices and Incomplete Matrices.* Journal of Software **3/5** (2010), s. 304–311.

[29] Gong, Z.-W.: *Least-square method to priority of the fuzzy preference relations with incomplete information.* International Journal of Approximate Reasoning **47** (2008), s. 258–264 .

[30] Goodwin P., Wright J.: *Decision Analysis for Management Judgement.* Third edition, John Wiley & Sons, Ltd, Chicester, 2004, s. 413–427.

[31] Guh, Y.-Y., Po, R.-W.: *An Additive Scale Model for the Analytic Hierarchy Process.* International Journal of Information and Management Sciences **20** (2009), s. 71–88.

[32] Harker, P. T.: *Alternative modes of questioning in the analytic hierarchy process.* Mathematical Modelling **3-5/9** (1987a), s. 837–848.

[33] Harker, P. T.: *Incomplete PCs in the analytic hierarcy process.* Mathematical Modelling **11/9** (1987b), s. 837–848.

[34] Harker, P. T., Millet, I.: *Globally effective questioning in the analytic hierarchy process.* European Journal of Operational Research **48** (1990), s. 88–97.

[35] Herrera-Viedma, E., Herrera, F., Chiclana, F., Luque, M.: *Some issues on consistency of fuzzy preference relations.* European journal of operational research **1/154** (2004), 98–109.

[36] Herrera-Viedma, E., Chiclana, F., Herrera, F., Alonso, S.: *Group Decision-Making Model With Incomplete Fuzzy Preference Relations Based on Additive Consistency.* IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics—part B: Cybernetics **1/37** (2007), s. 176–189.

[37] Holder, R.D.: *Response to Holder's Comments on the Analytic Hierarchy Process: Response to the Response*. The Journal of the Operational Research Society **10/42** (1991), 914–918.

[38] Holder, R.D.: *Some Comments on the Analytic Hierarchy Process*. The Journal of the Operational Research Society **11/41** (1990), s. 1073–1076.

[39] Chiclana, F., Herrera, F., Herrera-Viedma, E.: *Integrating multiplicative preference relations in a multipurpose decision-makingmodel based on fuzzy preference relations*. Fuzzy Sets and Systems **122** (2001), s. 277–291.

[40] Chiclana, F., Herrera, F., Herrera-Viedma, E., Martínez, L.: *Anote on the reciprocity in the aggregation of fuzzy preference relations using OWA operators*. Fuzzy Sets and Systems **137** (2003), s. 71–83.

[41] Chiclana, F., Herrera-Viedma, E.: *Consistency Properties for Preference Relations: T-additive and T-multiplicative transitivity*. IPMU 2004 Conference Proceedings, 2004, s. 403–410.

[42] Chiclana, F., Herrera-Viedma, E., Alonso, S., Herrera, F.: *Cardinal Consistency of Reciprocal Preference Relations: A Characterization of Multiplicative Transitivity*. IEEE Transactions on Fuzzy Systems **1/17** (2009), s. 14–23.

[43] Chiclana, F., Herrera-Viedma, E., Alonso, S., Pereira, R. A. M. *Preferences and Consistency Issues in Group Decision Making*. Fuzzy Sets and Their Extensions: Representation, Aggregation and Models, Springer Berlin Heidelberg, 2008. s. 219–237.

[44] Chobot, M., Turnovcová, A.: *Modely rozhodovania v konfliktných situáciách a za neurčitosti*. ALFA, Bratislava, 1980.

[45] Ishizaka, A., Lusti, M.: *How to derive priorities in AHP: a comparative study.* Central European Journal of Operations **4/14** (2006), s. 387–400.

[46] Jandová, V.: *AHP - její silné a slabé stránky*, Diplomová práce, Olomouc, 2012.

[47] Jandová, V. Krejčí, J., Stoklasa, J., Fedrizzi, M.: *Computing interval weights for incomplete pairwise-comparison matrices of large dimension - a weak-consistency based approach.* IEEE Transactions on Fuzzy Systems, DOI: 10.1109/TFUZZ.2016.2633364, přijatý článek.

[48] Jandová, V., Stoklasa, J., Talašová, J.: *Modification of the AHP based model for evaluating artistic production of Czech college.* MME 2014 Conference Proceedings, Olomouc, 2014, ISBN 978-80-244-4209-9, s. 372–378.

[49] Jandová, V., Talašová, J.: *Evaluation of absolute type in the Partial Goals Method*. MME 2015 Conference Proceedings, Plzeň, 2015, ISBN 978-80-261-0539-8, s. 321–326.

[50] Jandová, V., Talašová, J.: *Weak Consistency: A New Approach to Consistency in the Saaty's Analytic Hierarchy Process*. Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica **2/52** (2013), s. 71–83.

[51] Ji, P., Jiang., R.: *Scale Transitivity in the AHP*. The Journal of the Operational Research Society **8/54** (2003), s. 896–905.

[52] Klir, G. J., Yuan, B.: *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Application*. Prentice Hall PTR, New Jersey, 1995.

[53] Koczkodaj, W. W.: *Pairwise Comparisons Rating Scale Paradox*. Transactions on Computational Collective Intelligence XXII, Springer, Berlin Heidelberg, 2016, s. 1–9.

[54] Krejčí, J., Pavlačka, O., Talašová, J.: *A fuzzy extension of Analytic Hierarchy Process based on the constrained fuzzy arithmetic*. Fuzzy Optimization and Decision Making **1/16** (2016), s. 1–22.

[55] Lamata, M. T., Pelaez, J. I.: *A method for improving the consistency of judgements*. Internation Journal of Uncertainty, Fuziness and Knowledge-Based Systems **6/10** (2002), s. 677–686.

[56] Lootsma, F. A.: *Multi-Criteria Decision Analysis via Ratio and Difference Judgement*. Vol. 29. Springer Science & Business Media, 2007.

[57] Lootsma, F. A.: *Scale sensitivity in the multiplicative AHP and SMART*. Journal of Multi-Criteria Decision Analysis **2** (1993), s. 87–110.

[58] Luce, R. D., Suppes, P.: *Preferences, Utility and Subject Probability*. Handbook of Mathematical Psychology, Vol. III, Wiley, New York, 1965, s. 249-–410.

[59] Ma. D., Zheng, X.: *9/9-9/1 Scale method of AHP*. Proceedings of the Second International Symposium on the AHP, University of Pittsburgh, Pittsburgh, 1991, s. 197–202.

[60] Millet, I., Wedley, W. C.: *Modelling risk and uncertainty with the analytic hierarchy process*. Journal of Multi-Criteria Decision Analysis **2/11** (2002), s. 97–107.

[61] Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy: *Pravidla pro poskytování příspěvku a dotací veřejným vysokým školám Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy*, Praha, 2015.

[62] Mustafa, M. A., Al-Bahar, J. F.: *Project risk assessment using the analytic hierarchy process.* IEEE Transactions on Engineering Management **1/38** (1991), s. 46–52.

[63] Olson, D. L., Fliedner, G. a Currie,K.: *Comparison of the REMBRANDT system with analytic hierarchy process.* European Journal of Operational Research **3/82** (1995), s. 522–539.

[64] Orlovsky, S. A.: *Decision-making with a fuzzy preference relation.* Fuzzy Sets and Systems **3/1** (1978), s. 155–167.

[65] Pan Y., Yuan B.: *Bayesian Inference of Fuzzy Probabilities.* Int. J. General Systems **26** (1997), s. 73–90.

[66] Pavlačka, O., Talašová, J.: *The Fuzzy Weighted Average Operation in Decision Making Models.* MME 2006 Proceedins, Plzeň, 2006, ISBN: 80-7043-480-5. s. 419–426.

[67] Ra, J. W.: *Chainwise paired comparisons.* Decision Sciences **2/30** (199), s. 581–599.

[68] Ramík, J.: *Analytický hierarchický proces (AHP) a jeho využití v malém a středním podnikání.* Slezská univerzita, Karviná, 2000.

[69] Ramík, J.: *Measuring transitivity of fuzzy pairwise comparison matrix.* MME 2012 Proceedings, Karviná, 2012, ISBN: 978-80-7248-779-0, s. 751–756.

[70] Ramík, J.: *Incomplete Pairwise Comparison Matrix and Its Application to Ranking of Alternatives.* Multiple Criteria Decision Making **8** (2013), s. 114–128.

[71] Ramík, J., Korviny, P.: *Inconsistency of pair-wise comparison matrix with fuzzy elements based on geometric mean.* Fuzzy Sets and Systems **11/161** (2010), s. 1604–1613.

[72] Saaty, T. L.: *A Scaling Method for Priorities in Hierarchical Structures.* Journal of Mathematical Psychology **3/15** (1977 ), s. 234–281.

[73] Saaty, T. L.: *Axiomatic Foundation of the Analytic Hierarchy Process.* Management Science **7/32** (1986), s. 841–855.

[74] Saaty, T. L.: *Decision making with the analytic hierarchy process.* International Journal of Services Sciences **1** (2008), s. 83–98.

[75] Saaty, T. L.: *How to make a decision: The Analytic Hierarchy Process.* European Journal of Operational Research **48** (1990), s. 9–26.

[76] Saaty, T. L.: *Fundamentals of Decision Making and Priority Theory With the Analytic Hierarchy Process.* RWS Publications, Pittsburgh, 2000.

[77] Saaty, T. L.: *Relative Measurement and Its Generalization in Decision Making, Why Pairwise Comparisons are Central in Mathematics for the Measurement of Intangible Factors - The Analytic Hierarchy/Network Process.* RACSAM **2/102** (2008), s. 251–318.

[78] Saaty, T. L.: *The Analytic Hierarchy and Analytic Network Processes for the Measurement of Intangible Criteria and for Decision-Making.* Multiple criteria decision analysis: state of the art surveys, Springer, New York, 2005, s. 345–407.

[79] Saaty, T. L., Ozdemir, M. S.: *Why the magic number seven plus or minus two.* Mathematical and Computer Modelling **3/38** (2003), s. 233–244.

[80] Saaty, T. L., Sagir, M.: *An essay on rank preservation and reversal.* Mathematical and Computer Modelling **49** (2009), s. 1230–1243.

[81] Salo, A. A., Hämäläinen, R. P.: *On the measurement of preferences in the analytic hierarchy process.* Journal of Multi-Criteria Decision Analysis **6** (1997),s. 309–319.

[82] Salo, A. A., Hämäläinen, R. P.: *Preference programming through approximate ratio comparisons.* European Journal of Operational Research **82** (1995), s. 458–475.

[83] Sanchez, P. P., Soyer, R.: *Information concepts and pairwise comparison matrices.* Information Processing Letters **68** (1998), s. 185–188.

[84] Shen, Y., Hoerl, A. E., McConnell, W.: *An incomplete design in the analytic hierarchy process.* Mathematical and Computer Modelling **5/16** (1992), s. 121–129.

[85] Shiraishi, S., Obata, T.: *On a maximization problem arising from a positive reciprocal matrix in the AHP.* Bulletin of Informatics and Cybernetics **2/34** (2002), s. 91–96.

[86] Shiraishi, S., Obata, T., Daigo, M., Nakajima, N.: *Assessment for an incomplete comparison matrix and improvement of an inconsistent comparison: computational experiments* ISAHP, 1999.

[87] Srdjevic, B., Srdjevic, Z., Blagojevic, B.: *First-Level Transitivity Rule Method for Filling in Incomplete Pair-Wise Comparison Matrices in the Analytic Hierarchy Process.* Applied Mathematics & Information Sciences **2/8** (2014), s. 459–467.

[88] Stein, W. E., Mizzi,P. J.: *The harmonic consistency index for the analytic hierarchy process.* European Journal of Operational Research **1/177** (2007), s. 488–497.

[89] Stoklasa J., Jandová V., Talašová J.: *Weak consistency in Saaty's AHP - evaluating creative work outcomes of Czech Art Colleges.* Neural Network World **1/23** (2013), s. 61–77.

[90] Stoklasa J., Talášek, T., Talašová J.: *AHP and weak consistency in the evaluation of works of art - a case study for large problem.* International Journal of Business Innovation and Research **1/11** (2016), s. 60–75.

[91] Świtalski, Z.: *General transitivity conditions for fuzzy reciprocal preference matrices.* Fuzzy Sets and Systems **137** (2003), s. 85–100.

[92] Talašová, J.: *Fuzzy metody vícekriteriálního hodnocení a rozhodování.* Univerzita Palackého v Olomouci, Olomouc, 2003.

[93] Talašová, J., Stoklasa, J.: *A model for evaluating creative work outcomes at Czech Art Colleges.* MME 2011 Proceedings, Professional Publishing , Praha, 2011, ISBN 978-80-7431-058-4, s. 698–703.

[94] Tanino, T.: *Fuzzy preference orderings in group decision making.* Fuzzy Sets and Systems **12** (1984), s. 117–131.

[95] Tanino, T.: *Preference Relations in Group Decision Making.* Non-Conventional Preference Relations in Decision Making. Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[96] Triantaphyllou, E., Lootsma, F. A., Pardalos, P. M., Mann, S. H.: *On the Evaluation and Application of Different Scales For Quantifying Pairwise Comparisons in Fuzzy Sets* . Journal of Multi-Criteria Decision Analysis **3/3** (1994), s. 133–155.

[97] Vaidya, O. S., Kumar, S. *Analytic hierarchy process: An overview of applications.* European Journal of operational research **1/169** (2006), s. 1–29.

[98] van Laarhoven, P. J. M., Pedrycz, W.: *A fuzzy extension of Saaty's priority theory.* Fuzzy Sets and Systems **11** (1983), s. 229–241.

[99] Wang, Y.-M., Fan, Z.-P.: *Fuzzy preference relations: Aggregation and weight determination.* Computers & Industrial Engineering **53** (2007), s. 163–172.

[100] Wang, Y.-M., Parkan, C.: *Multiple attribute decision making based on fuzzy preference information on alternatives: Ranking and weighting.* Fuzzy Sets and Systems **3/153** (2005), s. 331–346.

[101] Wedley, W. C., Schoner, B., Tang, T. S.: *Starting rules for incomplete comparisons in the analytic hierarchy process* Mathematical and Computer Modelling **4–5/17** (1993), s. 93–100.

[102] Xu, Y., Da, Q., Liu, L.: *Normalizing rank aggregation method for priority of a fuzzy preference relation and its effectiveness.* International Journal of Approximate Reasoning **50** (2009), s. 1287–1297.

[103] Xu., Y. J., Wang, Q. Q., Wang, H. M.: *A Quadratic Programming Method for Ranking Alternatives based on Multiplicative and Fuzzy Preference Relations.* Iranian Journal of Fuzzy Systems **3/13** (2016), s. 83–94.

[104] Xu, Z. S.: *A procedure for decision making based on incomplete fuzzy preference relation.* Fuzzy Optimization and Decision Making **2/4** (2005), s. 175–189.

[105] Xu, Z. S.: *Goal programming models for obtaining the priority vector of incomplete fuzzy preference relation.* International Journal of Approximate Reasoning **36** (2004), s. 261–270.

[106] Zadeh, L. A.: *Fuzzy sets.* Information and Control **8/3** (1965), s. 338–353.

[107] Zelinský, M. a kol.: *Registr uměleckých výstupů.* PBtisk Příbram, Praha, 2012.

[108] Zimmermann, H.-J.: *Fuzzy Set Theory and Its Applications.* Kluwer, Dordrecht, 1991.

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

# AUTOREFERÁT DIZERTAČNÍ PRÁCE

## Metody hodnocení založené na maticích párových porovnání

Vedoucí dizertační práce: **doc. RNDr. Jana Talašová, CSc.**
Vypracovala: **Mgr. Věra Jandová**
Studijní program: P1104 Aplikovaná matematika
Studijní obor 1103V004 Aplikovaná matematika
Forma studia: prezenční
Rok odevzdání: 2017

Výsledky obsažené v dizertační práci byly získány během doktorského studia oboru Aplikovaná matematika na Katedře matematické analýzy a aplikací matematiky Přírodovědecké fakulty Univerzity Palackého v Olomouci.


Uchazeč: **Mgr. Věra Jandová**
Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky
Přírodovědecká fakulta
Univerzita Palackého v Olomouci

Školitel: **doc. RNDr. Jana Talašová, CSc.**
Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky
Přírodovědecká fakulta
Univerzita Palackého v Olomouci

Oponenti: **prof. RNDr. Jaroslav Ramík, CSc.**
Katedra informatiky a matematiky
Obchodně podnikatelská fakulta
Slezská univerzita v Opavě

**prof. RNDr. Karel Zimmermann, DrSc.**
Katedra aplikované matematiky
Matematicko–fyzikální fakulta
Univerzita Karlova


Autoreferát byl rozeslán dne .........................

Obhajoba dizertační práce se koná dne ......................... v ........... hod. před komisí pro obhajobu dizertační práce doktorského studijního oboru Aplikovaná matematika v učebně ............ v budově PřF UP na třídě 17. listopadu v Olomouci.

S dizertační prací je možno se seznámit na studijním oddělení Přírodovědecké fakulty UP v Olomouci.

# Obsah



# Přílohy

# Abstrakt

Předložená dizertační práce se zabývá metodami hodnocení založenými na maticích párových porovnání. Je popsán aditivní a multiplikativní přístup k zadávání preferencí mezi dvěma objekty. Práce se zaměřuje na konzistenci matic párových porovnání a shrnuje hlavní přístupy, které je možno použít k posouzení míry konzistence těchto matic. Následně je zaveden nový přístup ke konzistenci - podmínka slabé konzistence, která je chápána jako podmínka pro určení přijatelné konzistence matice. Je ukázáno, že podmínka slabé konzistence se dá využít pro snížení počtu intenzit preferencí zadávaných hodnotitelem, což má význam především u matic párového porovnání velké dimenze. Je navržen algoritmus pro efektivní zadávání prvků takové preferenční matice a pro výpočet intervalových hodnocení prvků z takové matice. Dále je popsáno využití metod párového srovnávání v modelech, kde varianty nejsou předem známy a kde proto předmětem porovnávání jsou obecné kategorie. Je popsáno několik přístupů k výpočtu hodnocení kategorií a jsou ukázány jejich výhody a nevýhody. Nakonec je navržena nová metoda.



**Klíčová slova:** Matice párového porovnání, konzistence, slabá konzistence, neúplné matice párových porovnání, porovnávání obecných kategorií.

# Abstract in English

Doctoral Thesis is focused on evaluation metods based on pairwise comparisons matrices. Additive and multiplicative approaches to express preferences between two objects are described. Next, the consistency of pairwise comparison matrices is discussed. Various approaches to establish acceptable level of consistency are presented. Furthemore, different approach to consistency is introduced. The weak-consistency condition is proposed as a minimal requirement to preserve reasonable consistency of judgements. It is demonstrated that weak-consistency condition can be employed for lowering number of preference intensities required by the decision maker. This is an advantage when the large dimensional problem has to be solved. In this context, the algorithm for effective construction of pairwise comparison matrix and for deriving interval evaluations is proposed. Further, utilization of the pairwise comparison methods for ranking categories of alternatives is described. Several approaches to scoring categories by the pairwise comparison methods are described and their advantages and disadvangtages are highlighted. Afterwards, different solution is proposed and discussed.

**Key words:** Pairwise comparison matrices, consistency, weak consistency, incomplete pairwise comparison matrices, rating categories.

# 1. Úvod

Předložená dizertační práce se zabývá metodami hodnocení založenými na maticích párových porovnání.

V práci je nejprve představena metoda hodnocení variant využívající incidenční matice preferenční relace; provádí se porovnání dvojic prvků, ale nezadává se zde intenzita preference. Následně jsou vysvětleny složitější metody pracující s intenzitami prefencí. Párová srovnání mají multiplikativní nebo aditivní charakter. Oba tyto přístupy jsou detailně popsány a jsou uvedeny funkce, pomocí nichž lze přecházet mezi multiplikativně a aditivně definovanými preferencemi. Dále je shrnuto, jak se s metodami párového srovnávání pracuje ve vícekriteriálním případě. Přestože jsou tyto metody v dnešní době jedny z nejpoužívanějších, potýkají se také s různými problémy.

Prvním problémem je požadovaná podmínka konzistence, která je příliš silná a nedá se u omezených hodnotících škal dodržet. Určitá konzistence zadávaných vstupů je však nutná pro to, aby bylo vypočtené hodnocení relevantní. Proto se konstruují různé alternativní ukazatele konzistence.

Druhým problémem je počet požadovaných párových srovnání. Čím více kritérií a variant se v modelu vyskytuje, tím tento počet narůstá. Je-li matice velké dimenze, potom může být velmi problematické od expertů získat všechny hodnoty. Často tyto hodnoty také díky únavě nejsou úplně odpovídající. Proto se v některých případech přistupuje k sestavení neúplné preferenční matice a z ní se odvozuje hodnocení variant.

Dalším problémem je, jak s tímto typem metod pracovat v případě, že je třeba vytvořit model, který bude dále využíván pro hodnocení postupně přicházejících variant. Potom se přistupuje k zavedení modelu pro obecné kategorie variant, na které je aplikována metoda párového porovnání. Konkrétní varianty potom dostanou přiřazeno hodnocení dle kategorie, do které spadají. K hodnocení kategorií bylo navrženo několik způsobů.

Dizertační práce se postupně zabývá výše jmenovanými problémy. Proto i v následujících kapitolách bude respektováno členění dle těchto oblastí.

# 2. Teoretická východiska práce

Dizertační práce je postavena zejména na poznatcích o multiplikativních a aditivních maticích párového porovnání. Nejdůležitější teoretické základy jsou shrnuty níže.

### Multiplikativní přístup

Níže uvedené poznatky vychází z [11, 13, 16, 33, 38, 41, 42]. Uvažujme konečnou množinu variant $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, kterým je třeba přiřadit multiplikativní hodnocení $h_1, h_2, \ldots, h_n$ vzhledem ke kritériu $K$. To se provede pomocí matice párového porovnání $M$ zavedené v následující definici.

**Definice 2.1.** Nechť $M = \{m_{ij}\}_{i,j=1}^n$ je matice, kde $m_{ij} \in \langle \frac{1}{\sigma}, \sigma \rangle$, $\sigma > 1$, pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Dále nechť je $M$ reciproká, tj. $m_{ji} = \frac{1}{m_{ij}}$ pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Potom řekneme, že $M$ je *multiplikativní preferenční matice.*

Význam elementů matice $M$, která reprezentuje srovnání variant $A_1, A_2, \ldots, A_n$ na multiplikativní škále $\langle \frac{1}{\sigma}, \sigma \rangle$, $\sigma > 1$, je popsán v tabulce 1. Prvek $m_{ij}$ vyjadřuje odhad intenzity preference mezi variantami $A_i$ a $A_j$ ve smyslu kolikrát je varianta $A_i$ lepší než varianta $A_j$, tj. $m_{ij} \approx \frac{h_i}{h_j}$ pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

| multiplikativní preference | aditivní preference | význam (slovní popis) |
|---|---|---|
| $m_{ij} = \sigma$ | $a_{ij} = 1$ | $A_i$ je **extrémně** lepší než $A_j$ |
| $m_{ij} \in (1, \sigma)$ | $a_{ij} \in (0{,}5, 1)$ | $A_i$ je lepší než $A_j$ |
| $m_{ij} = 1$ | $a_{ij} = 0{,}5$ | $A_i$ je **stejně** dobrá jako $A_j$ |
| $m_{ij} \in \left(\frac{1}{\sigma}, 1\right)$ | $a_{ij} \in (0, 0{,}5)$ | $A_j$ lepší než $A_i$ |
| $m_{ij} = \frac{1}{\sigma}$ | $a_{ij} = 0$ | $A_j$ je **extrémně** lepší než $A_i$ |

Tab. 1: Multiplikativní a aditivní škála

Aby informace v matici $M$ byly zadány zcela racionálně a určovaly přesně hodnocení $h_1, h_2, \ldots, h_n$, je třeba, aby matice $M$ byla *konzistentní*, tj.

$$m_{ij} m_{jk} = m_{ik} \tag{1}$$

pro každé $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$, viz [42]. Tento požadavek je ale v reálných situacích obtížně dosažitelný. Budeme-li např. uvažovat, že $m_{ij} = \sigma$ a $m_{jk} = \sigma$, potom by mělo platit $m_{ik} = \sigma^2 > \sigma$.

K výpočtu hodnocení $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$, kde $h_i \geq 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$, variant $A_1, A_2, \ldots, A_n$ lze použít následující metody. Crawford a Williams [13] ukázali, že hodnocení variant lze hledat jako geometrický průměr řádků $M$, tj. pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$ platí

$$h_i = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} m_{ij}}. \tag{2}$$

Saaty [42] ukázal, že vektor hodnocení je možné hledat jako vlastní vektor matice $M$ příslušný jejímu maximálnímu vlastnímu číslu $\lambda_{max}$, tj.

$$M\mathbf{h} = \lambda_{max}\mathbf{h}. \tag{3}$$

Je-li matice $M$ konzistentní, potom je vektor hodnocení vypočtený geometrickým průměrem řádků a metodou vlastního vektoru stejný. Obecně se však jedná o různé vektory. Hodnocení vypočtená pomocí (2) a (3) vyjdou ve většině případů nenormovaná, proto je třeba je následně znormovat. Tj. pokud $h'_1, h'_2, \ldots, h'_n$ jsou nenormovaná hodnocení, potom pro normovaná hodnocení $h_1, h_2, \ldots, h_n$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$ platí

$$h_i = \frac{h'i}{\sum\limits_{j=1}^{n} h'_j}. \tag{4}$$

**Aditivní přístup**

Níže uvedené poznatky vychází z [15, 19, 20, 36, 52, 53]. Uvažujme konečnou množinu variant $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, kterým je třeba přiřadit aditivní hodnocení $h_1^A, h_2^A, \ldots, h_n^A$ vzhledem ke kritériu $K$. To se provede pomocí matice párového porovnávání $A$ zavedené v následující definici.

**Definice 2.2.** Nechť $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ je čtvercová matice, kde $a_{ij} \in \langle 0, 1\rangle$ pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Dále nechť je $A$ aditivně reciproká, tj. $a_{ij} = 1 - a_{ji}$ pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Potom řekneme, že $A$ je *aditivní preferenční matice.*

Význam elementů matice $A$, která reprezentuje srovnání variant $A_1, A_2, \ldots, A_n$ na aditivní škále $\langle 0, 1\rangle$, je popsán v tabulce 1. Při stanovování hodnoty $a_{ij}$ je postup následující: Při porovnávání variant $A_i$ a $A_j$ se rozdělí 100% preference mezi tyto dvě varianty. Hodnotitel tedy přiřadí uspořádané dvojici variant $(A_i, A_j)$ hodnotu $a_{ij} \in \langle 0, 1\rangle$ vyjadřující míru preference $A_i$ před $A_j$ a analogicky uspořádané dvojici variant $(A_j, A_i)$ hodnotu $a_{ji} \in \langle 0, 1\rangle$ vyjadřující míru preference $A_j$ před $A_i$ tak, že $a_{ij} + a_{ji} = 1$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Aby informace v matici $A$ byly zadány zcela racionálně a určovaly přesně hodnocení $h_1^A, h_2^A, \ldots, h_n^A$, je třeba, aby matice $A$ byla *aditivně konzistentní*, tj. aby pro každé $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$ platilo

$$(a_{ij} - 0{,}5) + (a_{jk} - 0{,}5) = (a_{ik} - 0{,}5), \tag{5}$$

viz [52, 53]. Požadavek aditivní konzistence je ale na uvažované hodnotící škále v reálných situacích obtížně dosažitelný. Pokud např. $a_{ij} = 0{,}8$ a $a_{jk} = 0{,}9$, potom by muselo platit $a_{ik} = 1{,}2 > 1$.

Tanino [52] ukázal, že pokud je matice $A$ aditivně konzistentní, potom existuje nezáporný vektor $\mathbf{h}^A = (h_1^A, h_2^A, \ldots, h_n^A)$ takový, že $a_{ij} - a_{ji} = h_i^A - h_j^A$ pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Tedy rozdíl $a_{ij} - a_{ji}$ obecně reprezentuje odhad intenzity preference mezi variantami $A_i$ a $A_j$ ve smyslu o kolik je varianta $A_i$ lepší než $A_j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

V [20] je ukázáno, že aditivní hodnocení $h_1^A, h_2^A, \ldots, h_n^A$ můžou být pro každé

$i, j = 1, 2, \ldots, n$ vypočtena pomocí vzorce

$$h_i^A = \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}. \tag{6}$$

Vektor hodnocení $\mathbf{h}^A$ je dán jednoznačně až na přičtení libobolné reálné konstanty $k$.

**Multiplikativní vs. aditivní přístup**

Multiplikativní přístup a aditivní přístup jsou ekvivalentní v tom smyslu, že oba modely jsou izomorfní, jak je ukázáno v [18, 39]. Multiplikativní preferenční matici $M = \{m_{ij}\}_{i,j=1}^n$ lze převést na aditivní preferenční matici $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ pomocí vzorce $a_{ij} = \frac{1}{2}(1 + \log_\sigma m_{ij})$ pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Tato funkce převádí multiplikativní reciprocitu na aditivní reciprocitu a multiplikativní konzistenci na aditivní konzistenci. Multiplikativní hodnocení $h_i$ vypočtená pomocí metody geometrického průměru řádků (2) lze převést na aditivní hodnocení $h_i^A$ daná vztahem (6) takto: $h_i^A = 1 + \log_\sigma h_i$.

Analogicky lze aditivní preferenční matici $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ převést na multiplikativní preferenční matici $M = \{m_{ij}\}_{i,j=1}^n$ pomocí vzorce $m_{ij} = \sigma^{2a_{ij}-1}$pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Tato funkce převádí aditivní reciprocitu na multiplikativní reciprocitu a aditivní konzistenci na multiplikativní konzistenci. Aditivní hodnocení $h_i^A$ dané vzorcem (6) lze převést na multiplikativní hodnocení $h_i$ odpovídající metodě geometrického průměru řádků (2), platí $h_i = \sigma^{h_i^A - 1}$.

# 3. Přehled aktuálního stavu problematiky

**Konzistence matic párového porovnání**

Podmínka konzistence i podmínka aditivní konzistence jsou zavedeny tak, že jich na omezených škálách nelze v reálných situacích dosáhnout. Proto byly navrženy následující alternativní ukazatele míry konzistence.

*Konzistence multiplikativní preferenční matice*

Nejznámější ukazatel nekonzistence je Saatyho *index nekonzistence* [42], který se pro matici $M$ vypočte dle vzorce $CI = \frac{\lambda_{max} - n}{n-1}$, kde $\lambda_{max}$ je maximální vlastní číslo matice $M$ řádu $n$. Pro určení dostatečné konzistence potom slouží *podílový koeficient nekonzistence* $CR = \frac{CI}{RI(n)}$, kde $RI(n)$ průměrný index nekonzistence náhodně vygenerovaných multiplikativních preferenčních matic řádu $n$. Pro $CR \leq 0{,}1$ je $M$ považována za dostatečně konzistentní. Alonso a Lamata [7] navázali na Saatyho a modifikovali podílový index nekonzistence tak, že $RI(n)$ vyjádřili pomocí průměrného vlastního čísla náhodně vygenerovaných preferenčních matic a stanovali vzorec pro jeho odhad.

Lamata a Pelaez [35] ukázali, že determinant konzistentní preferenční matice řádu 3 je roven nule. Na základě toho potom zkonstruovali *index nekonzistence* *determinantů*, který představuje aritmetický průměr determinantů všech reciprokých submatic řádu 3, které lze vytvořit z uvažované matice $M$. Crawford a Williams [14] navrhli *geometrický index nekonzistence*, který založili na poznatku, že pro prvky konzistentní matice $M$ platí $m_{ij} = \frac{h_i}{h_j}$. Koeficient potom definovali pomocí logaritmické čtvercové chyby těchto prvků. Salo a Hämäläinen [46] pro každý element matice $M$ určili interval hodnot, jakých by měl nabývat, aby naplnil podmínku konzistence. *Index nejednoznačnosti* potom postavili na myšlence, že čím širší jsou tyto intervaly, tím nekonzistentnější je matice $M$.

Stein a Mizzi [51] vycházeli z toho, že matice $M$ je konzistentní právě tehdy, když její hodnost je rovna 1. Z řádkových součtů potom sestavili tzv. *harmonický průměr matice*. Ten následně znormovali, aby jeho chování bylo srovnatelné se Saatyho indexem nekonzistence $CI$ a nazvali jej *harmonický index nekonzistence*. Shiraishi a Obata [48] definovali index nekonzistence na základě koeficientu $c_3$ charakteristického polynomu matice $M$, který přísluší $\lambda^{n-3}$. Tento koeficient vyjádřili pomocí prvků matice $M$ a ukázali, že pro nekonzistentní matice je záporný. Barzilai [8] zavedl *index relativní chyby*, který vyžaduje konstrukci pomocné matice získané z matice $M$ zlogaritmováním jejích prvků a také konstrukci vektoru hodnocení pomocí aritmetického průměru řádků z takto vytvořené matice.

Basile a D'Apuzzo [9] k ověřování konzistence přistoupili jinak než výše zmínění autoři. Pro přijatelnou konzistenci matice $M$ definovali slabší podmínku než je konzistence, *oslabenou konzistenci*: $m_{ij} > 1 \wedge m_{jk} > 1 \Rightarrow m_{ik} > 1$. Tato podmínka je definována racionálně a dá se v reálných případech dodržet lépe než samotná konzistence. Není však definována pro soubor prvků, kde jsou alespoň dva různé prvky indiferentní. Navíc pokud jedna z intenzit preferencí na levé straně uvažovaného výrazu znamená extrémní preferenci $\sigma > 1$, potom tuto podmínku není možné na škále $\langle \frac{1}{\sigma}, \sigma \rangle$ splnit.

Chiclana a kol. [30] definovali *T-multiplikativní tranzitivitu*, pro niž zavedli i aditivní verzi, která bude popsána níže.

*Konzistence aditivní preferenční matice*

Tanino [53] považuje za minimální podmínku, kterou by měly zadané preference splňovat, aby byly zadány logicky, *slabou tranzitivitu* $a_{ij} \geq 0{,}5 \wedge a_{jk} \geq 0{,}5 \Rightarrow a_{ik} \geq 0{,}5$. Dále se v literatuře [17] objevují podmínky jako *max-min tranzitivita* $a_{ik} \geq \min\{a_{ij}, a_{jk}\}$ a *max-max tranzitivita* $a_{ik} \geq \max\{a_{ij}, a_{jk}\}$, které jsou ale pro aditivně reciproké matice příliš silné. Proto Tanino [53] definoval slabší podmínky vhodnější pro tyto matice. První z nich je *restriktivní max-min tranzitivita* $a_{ij} \geq 0{,}5 \wedge a_{jk} \geq 0{,}5 \Rightarrow a_{ik} \geq \min\{a_{ij}, a_{jk}\}$. Druhou z nich je *restriktivní max-max tranzitivita* $a_{ij} \geq 0{,}5 \wedge a_{jk} \geq 0{,}5 \Rightarrow a_{ik} \geq \max\{a_{ij}, a_{jk}\}$. Přičemž druhá podmínka je silnější než první. Obě tyto podmínky jsou pro reciproké matice definovány smysluplně a v reálných situacích jsou dodržitelné. Mohly by být tudíž považovany za lepší podmínku pro přijatelnou konzistenci aditivní preferenční matice než slabá tranzitivita.

Chiclana a kol. [30] definovali pro přijatelnou konzistenci matice *T-aditivní tranzitivitu*. Provedli to pomocí trojice podmínek, která vyžaduje dodržet aditivní konzistenci pouze pro dvojice prvků z různé strany aditivní škály vzhledem k hodnotě indiference. Pro dvojice ze stejné strany škály vyžadovali restriktivní max-max tranzitivitu a její reciprokou podobu. Nicméně, jak bylo v dizertační práci ukázáno, aby tato trojice podmínek byla splněna, musela by skoro ve všech případech být dodržena přímo podmínka konzistence. Jedinou výjimkou by byla pouze dvojice, kde jeden prvek představuje indiferenci. Zde je zrovna ale konzistence jednoduše dodržitelná a smysluplná.

Chiclana a kol. [31] definovali skupinu vlastností, které požadují po aditivní prefenční matici, aby ji mohli považovat za přijatelně konzistentní. Na základě toho potom zavedli tzv. *U-konzistenci*. Herrera-Viedma a kol [29] definovali index nekonzistence aditivní preferenční matice na základě podmínky aditivní konzistence.

**Neúplné matice párového porovnání**

Pokud se v hodnotícím modelu vyskytuje velký počet porovnávaných prvků a model nejde rozdělit na submodely, potom je nutno sestrojit matici párového porovnání velkého řádu. V takovém případě je možno snížit počet vyžadovaných párových srovnání od hodnotitele tak, že se vyplní jen část z potřebných $n(n-1)/2$ elementů matice a hodnocení prvků se určí na základě této neúplné preferenční matice.

*Metody zadávání neúplné matice párových porovnání*

Pro zadání neúplné matice párového porovnání, které by snížilo počet párových porovnání potřebných od hodnotitele, bylo navrženo několik metod. Touto problematikou se zabývali např. Herrera-Viedma a kol. [28], Harker a Millet [27], Fedrizzi a Giove [22], Sanchez a Sayer [47] nebo Ra [37].

Minimální počet párových srovnání pro $n$ variant tak, abychom z těchto párových srovnání mohli odvodit vztahy pro celou množinu variant, je $n-1$. Metodou pracující na tomto principu se zabývali např. Herrera-Viedma a kol. [28]. Wedley, Schoner a Tang [54] se zaměřili na různé způsoby, jak těchto $n-1$ párových srovnání vybrat. Takováto metoda odpovídá požadavku maximálně zredukovat počet vstupů požadovaných od hodnotitele. Na druhou stranu ale tato metoda nepracuje s důležitou vlastností metod párového srovnávání - nevyužívá redundanci informací zadaných v preferenční matici, díky níž lze odhalit, pokud hodnotitel provádí iracionální úsudky.

Harker [26, 25] a později také Harker a Millet [27] navrhli iterativní metodu pro výběr následující dvojice prvků, pro které má hodnotitel zadat párové srovnání. V této metodě uvažovali chybějící párová srovnání v multiplikativní preferenční matici $M = \{m_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ ve tvaru $m_{ij} = \frac{h_i}{h_j}$, kde $h_i \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, jsou hodnocení příslušných variant. V každém kroku metody se vypočte gradient vektoru hodnocení a hodnotiteli je předloženo k vyplnění párové srovnání, pro nějž příslušná složka vektoru hodnocení nabývá největší změny. Proces je zastaven, když se vektor hodnocení vypočtený v posledních dvou krocích metody liší méně, než je zadaná hranice.

Fedrizzi a Giove [22] předkládají hodnotiteli k vyplnění párové srovnání pro dvojici prvků $(i, j) := (A_i, A_j)$, která maximalizuje hodnotící funkci

$$f(i, j) = \lambda z_{ij} + (1 - \lambda)p_{ij}, \tag{7}$$

založenou na dvou kritériích. Prvním kritériem je $z_{ij}$, které udává, jak moc informací už o daném párovém srovnání máme. Tj. jak moc nepřímých párových srovnání už bylo pro uvažované párové srovnání provedeno. Platí

$$z_{ij} = 1 - \frac{Card(Q_i) + Card(Q_j)}{2(n-2)}, \tag{8}$$

kde $Q_i = \{k; (i, k) \in Q\}$ a $Q$ je množina těch dvojic prvků, pro které již bylo hodnotitelem zadáno párové srovnání. Kritérium $z_{ij}$ tedy představuje normovaný počet párových srovnání provedených párových srovnání s prvky $A_i$ a $A_j$, upravený tak, aby kritérium bylo rostoucí.

Druhým kritériem je $p_{ij}$, které značí, jak kvalitní informaci pro toto párové srovnání máme. Tj. jak moc nekonzistentní vychází uvažované párové srovnání pomocí již zadaných nepřímých párových srovnání. Platí

$$p_{ij} = \frac{3\varphi_{ij}}{Card(Q_i \cap Q_j) + 1}, \tag{9}$$

kde $\varphi_{ij}$ je střední hodnota nekonzistence nepřímých srovnání provedených s prvky $A_i$ a $A_j$. Platí

$$\varphi_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{jestliže } Q_i \cap Q_j = \emptyset, \\ \sum\limits_{k \in Q_i \cap Q_j} \frac{(a_{ik} + a_{kj} - 0{,}5 - \mu_{ij})^2}{Card(Q_i \cap Q_j)}, & \text{jestliže } Q_i \cap Q_j \neq \emptyset, \end{cases} \tag{10}$$

kde $\mu_{ij}$ představuje střední hodnotu nepřímých srovnání s prvky $A_i$ a $A_j$. Tj.

$$\mu_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{jestliže } Q_i \cap Q_j = \emptyset, \\ \sum\limits_{k \in Q_i \cap Q_j} \frac{a_{ik} + a_{kj} - 0{,}5}{Card(Q_i \cap Q_j)}, & \text{jestliže } Q_i \cap Q_j \neq \emptyset. \end{cases} \tag{11}$$

Kritérium $p_{ij}$ definované v (9) potom představuje normovanou hodnotu maximální možné redukce nekonzistence, která může být dosažena zadáním přímého srovnání pro dvojici $(i, j)$.

K určení významnosti mezi kritérii $z_{ij}$ a $p_{ij}$ slouží parametr $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$. Čím větší je hodnota funkce $f$, tím je nutnější provést srovnání $A_i$ s $A_j$,

$i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Proto v každém kroku algoritmu hodnotitel vyplnění $a_{ij}$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, pro které platí

$$(i, j) = \arg \max_{(k,l) \in \Omega \setminus Q} f(k, l), \tag{12}$$

kde $Q$ je opět množina těch dvojic prvků, pro které již bylo hodnotitelem zadáno párové srovnání, a $\Omega = \{(i, j); i, j = 1, 2, \ldots, n, i < j\}$ je množina všech dvojic mezi uvažovanými $n$ prvky, které jsou třeba k úplnému vyplnění matice $A$.

*Metody výpočtu hodnocení vycházející z neúplné matice párových porovnání*

Hodnocení porovnávaných variant lze z neúplné matice párových porovnání získat dvěma způsoby. První možnost je doplnit chybějící hodnoty matice párových porovnání a následně vypočtítat hodnocení variant dle běžně používaných metod pro úplné matice párových porovnání. V tomto případě jsou chybějící párová srovnání odhadnuta na základě párových srovnání provedených hodnotitelem. Tyto dopočtené hodnoty jsou různými způsoby odvozené z podmínky konzistence. Vychází se přitom z myšlenky, že doplněná matice by měla být co nejvíce v souladu s preferencemi zadanými hodnotitelem. Tímto způsobem výpočtu hodnocení variant z neúplné preferenční matice se zabývali např. Alonso a kol. [6], Fedrizzi a Giove [21], Herrera-Viedma a kol.[28], Shiraishi a kol. [49] nebo Srdjevic a kol. [50]. Brunelli a kol. [12] publikovali simulační studii porovnávající 7 metod výpočtu hodnocení pomocí rekonstrukce neúplné matice párového porovnání.

Druhá možnost je vypočítat hodnocení variant přímo z neúplné matice párových porovnání. V tomto případě se vychází z toho, že párová srovnání představují odhad výrazu, který reprezentuje vztah mezi hodnoceními uvažovaných prvků. Hodnocení variant se potom počítají různými způsoby pomocí minimalizace chyby takového odhadu. Z vypočteného hodnocení je potom možné rekonstruovat chybějící hodnoty v uvažované matici párových porovnání. Metodami tohoto typu, kdy je možné odvodit hodnocení variant přímo z neúplné preferenční matice, se zabývali např. Bozóki a kol. [10], Gao a kol. [23], Gong [24], Ramík [40] nebo Xu [55, 56].

**Hodnocení obecných kategorií pomocí párového srovnávání**

Model hodnocení pomocí párového srovnávání v případě, že varianty nejsou předem známy, zavedl Saaty [43, 44, 45]: Pro každé kritérium $K_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$, je vytvořena množina *úrovní* $U_1^j, U_2^j, \ldots, U_{n_j}^j$ tohoto kritéria, která pro něj bude představovat úplnou hodnotící škálu (např. úrovně *nadprůměrný, průměrný* a *podprůměrný*). Tyto úrovně jsou spolu vzhledem k danému kritériu párově porovnány a je získáno jejich hodnocení $u_1^j, u_2^j, \ldots, u_m^j$. Tato hodnocení jsou vypočtena buď z multiplikativní preferenční matice $M$ nebo z aditivní preferenční matice $A$. V případě $M$ je použit geometrický průměr řádků (2) nebo metoda vlastního vektoru (3) a následně normování (4). V případě $A$ je použit vzorec (6), následně převod na multiplikativní hodnocení dle vztahu $u_i = \sigma^{u_i^A - 1}$ pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$ a nakonec je opět použito normování (4).

Následně budeme uvažovat obecné varianty, tzv. *kategorie* tvořené kombinacemi $(U_{i_1}, U_{i_2}, \ldots, U_{i_m})$ úrovní jednotlivých kritérií. Kategorie dle konkrétního kritéria $K_j$ potom dostane hodnocení $R^j_{i_1,i_2,\ldots,i_m}$ určitým způsobem dle úrovně $U_{i_j}$. *Celkové hodnocení (rating) kategorie* se potom vypočte

$$R_{i_1,i_2,\ldots,i_m} = \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} \cdots \sum_{i_m=1}^{n_m} v_j R^j_{i_1,i_2,\ldots,i_m}, \tag{13}$$

kde $v_1, v_2, \ldots, v_m$ jsou normované váhy kritérií. Jakmile do modelu vstoupí varianta, je ztotožněna s jednou z definovaných kategorií a dle této kategorie je jí přiřazeno hodnocení.

Saaty [44] nejrpve definoval hodnocení kategorie $(U_{i_1}, U_{i_2}, \ldots, U_{i_m})$ vzhledem ke kritériu $K_j$, kde $j = 1, 2, \ldots, m$, takto: $R^j_{i_1,i_2,\ldots,i_m} = u^j_{i_j}$. V dizertační práci je ukázáno, že v takovém případě ale dílčí hodnocení kategorií nedává v součtu 1, jak je v metodách tohoto typu obvyklé. Takto vypočtená hodnocení kategorií jsou potom ovlivněna počtem úrovní definovaných pro jednotlivá kritéria. Díky tomu potom může kritérium, které má nejméně úrovní, mít větší vliv na celkové hodnocení kategorií než by mělo mít dle přiřazených vah.

V pozdějších pracích Saaty [43, 45] předefinoval dílčí hodnocení kategorií takto: $R^j_{i_1,i_2,\ldots,i_m} = u^j_{i_j} / \max\limits_{k=1,2,\ldots,n_j} u^j_k$. Saaty takto vypočtená hodnocení kategorií označuje jako absolutní hodnocení, viz [43]. Více o absolutném hodnocení lze nalézt v [2]. Přitom zde ale je pro každé kritérium hodnocení nejhorší úrovně jiné, tj. každá dílčí hodnotící škála je jiná. Celková hodnocení jsou potom počítána jako vážený průměr z hodnocení definovaných na různých škálách.

# 4. Cíle dizertační práce

Prvním cílem předložené práce bylo popsat metody hodnocení založené na maticích párového porovnání a vytvořit tak dostatečný teoretický podklad pro jejich detailnější zkoumání. Cílem bylo podat shrnutí teorie multiplikativního a aditivního přístupu k zadanání párových preferencí.

Druhým cílem bylo navrhnout slabší podmínku konzistence, která bude zajišťovat základní racionalitu hodnotitele ve smyslu von Neumanna a Morgensterna, bude dodržitelná v reálných situacích a kontrolovatelná v průběhu zadávání preferenční matice. V rámci tohoto cíle byly ukázány vlastnosti navržené slabé konzistence a tato podmínka byla porovná s některými jinými používanými ukazateli přijatelné konzistence tam, kde to bylo smysluplné.

Další část práce souvisí s problémem velkého počtu párových srovnání u matic velkých řádů. Zde byl stanoven cíl navrhnout metodu, která hodnotiteli usnadní proces hodnocení. V této metodě byly využity neúplné preferenční matice jako nástroj, jak snížit počet párových porovnání vyžadovaných od hodnotitele. S pomocí slabé konzistence bylo popsáno, jak hodnotitele při zadávání preferenční matice vést, aby udržel určitou konzistenci. Dále bylo ukázáno, jak z výsledné neúplné preferenční matice vypočítat hodnocení variant. V literatuře se často autoři zabývají buď způsobem konstrukce neúplné matice, nebo výpočtem hodnocení z neúplné matice. Naším cílem bylo na základě získaných poznatků vytvořit komplexní metodu, která zajistí obojí a která navíc povede hodnotitele tak, aby jeho úsudky byly přijatelně konzistentní.

Nakonec jsme se soustředili na problém vytvoření modelu hodnocení založeného na maticích párového porovnání, jenž slouží k hodnocení variant, které do něj budou v budoucnu postupně vstupovat. Pro tuto situaci navrhl Saaty hodnocení pomocí obecných kategorií. Naším cílem bylo podrobit jeho způsoby výpočtu hodnocení kategorií kritické analýze a navrhnout jiný způsob výpočtu dílčích hodnocení.

# 5. Popis vlastního řešení a původní výsledky

## 5.1. Slabá konzistence

V této části je představen popis vlastního řešení ověření přijatelné konzistence matice párového porovnání a s tím související původní výsledky, jejichž podstatná část byla publikována v [1,4,5].

**Multiplikativní slabá konzistence**

Nyní bude zavedena slabá konzistence pro multiplikativní preference. Tato podmínka vychází z restriktivní max-max tranzitivity, je však silnější. Pokud bude tato podmínka pro multiplikativní preferenční matici splněna, potom bude považována za přijatelně konzistentní.

**Definice 5.1.** Nechť $M = \{m_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ je multiplikativní preferenční matice. Potom řekneme, že $M$ je *slabě konzistentní*, jestliže pro každé $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$ platí

$$m_{ij} > 1 \wedge m_{jk} > 1 \quad \Longrightarrow \quad m_{ik} \geq \max\{m_{ij}, m_{jk}\}; \tag{14}$$

$$(m_{ij} = 1 \wedge m_{jk} \geq 1) \vee (m_{ij} \geq 1 \wedge m_{jk} = 1) \quad \Longrightarrow \quad m_{ik} = \max\{m_{ij}, m_{jk}\}. \tag{15}$$

Slabá konzitence představuje oslabení podmínky konzistence. Je-li preferenční matice konzistentní, pak je také slabě konzistentní, jak vyjadřuje následující věta.

**Věta 5.1.** *Nechť $M = \{m_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ je multiplikativní preferenční matice, která je konzistentní, tj. $m_{ik} = m_{ij} m_{jk}$ pro každé $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$. Pak je $M$ také slabě konzistentní.*

Z multiplikativní preferenční matice $M$, významy jejíchž prvků jsou definované v tabulce 1, lze získat incidenční matice binárních relací preference $\succ$ a indiference $\sim$. Pokud je multiplikativní preferenční matice $M$ slabě konzistentní, pak tyto klasické relace $\succ$ a $\sim$ splňují axiomy von Neumanna a Morgensterna pro racionální choválni hodnotitele. Tedy binární relace $\succeq$, která je sjednodením relací $\succ$ a $\sim$, představuje kvaziuspořádání.

**Věta 5.2.** *Nechť $M = \{m_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ je slabě konzistentní multiplikativní preferenční matice, která slouží k párovému srovnání variant $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Označme $A_i \succ A_j$ právě tehdy, když $m_{ij} > 1$, a $A_i \sim A_j$ právě tehdy, když $m_{ij} = 1$, pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Potom preferenční uspořádání prvků $A_1, A_2 \ldots, A_n$ určené binární relací $\succeq$, která je sjednocením binárních relací $\succ$ a $\sim$, tvoří kvaziuspořádání.*

Vzhledem k tomu, že preferenční matice $M$ je reciproká, zadává se většinou pouze horní trojúhelník matice $M$ a dolní trojúhelník se dopočte dle podmínky reciprocity. Výhodné tedy je, když v horním trojúhelníku matice $M$ jsou pouze hodnoty větší nebo rovny 1. Uspořádají-li se nejprve porovnávané prvky od nejpreferovanějšího po nejméně preferovaný, potom bude matice $M$ v horním trojúhelníku obsahovat pouze hodnoty větší nebo rovny 1, tj. $m_{ij} \geq 1$ pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $i < j$. V tomto případě je navíc velmi jednoduché v průběhu zadávání intenzit preferencí ověřovat slabou konzistenci. Slabá konzistence je pak totiž ekvivalentní s tím, že každý řádek horního trojúhelníku matice musí představovat neklesající posloupnost čísel a každý sloupec horního trojúhelníku zase nerostoucí posloupnost. Navíc ještě musí platit, že pokud $m_{ij} = 1$, $i \neq j$, pak se řádky $i$ a $j$ musí rovnat a stejně tak i sloupce $i$ a $j$. Pokud nejsou porovnávané varianty předem takto uspořádané, potom je možné zkusit přeuspořádat řádky a sloupce matice $M$. Pokud bude existovat takové přeuspořádání, že pro nově vzniklou matici budou splněny výše zmíněné vlastnosti, potom je matice $M$ slabě konzistentní. Tato vlastnost je popsána v následující větě.

**Věta 5.3.** *Nechť $M = \{m_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ je multiplikativní preferenční matice. Potom $M$ je slabě konzistentní právě tehdy, když existuje permutace $\pi : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ taková, že platí následující:*

1. *posloupnost $\{m_{\pi(i)\pi(j)}\}_{\pi(j)=\pi(i)}^{n}$ je neklesající pro každé $i = 1, 2 \ldots, n$;*
2. *posloupnost $\{m_{\pi(i)\pi(j)}\}_{\pi(i)=1}^{\pi(j)}$ je nerostoucí pro každé $j = 1, 2, \ldots, n$;*
3. *jestliže $m_{\pi(i)\pi(j)} = 1$ pro nějaké $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, kde $\pi(i) < \pi(j)$, potom $m_{\pi(l)\pi(i)} = m_{\pi(l)\pi(j)}$ pro každé $l = 1, 2, \ldots, n$, kde $\pi(l) \leq \pi(i) < \pi(j)$;*
4. *jestliže $m_{\pi(i)\pi(j)} = 1$ pro nějaké $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, kde $\pi(i) < \pi(j)$, potom $m_{\pi(i)\pi(k)} = m_{\pi(j)\pi(k)}$ pro každé $k = 1, 2, \ldots, n$, kde $\pi(i) < \pi(j) \leq \pi(k)$.*

Pro slabě konzistentní multiplikativní preferenční matici $M$ platí, že preferenční pořadí porovnávaných prvků, které je jim přiřazeno dle příslušných hodnocení získaných z $M$ geometrickým průměrem řádků nebo metodou vlastního vektoru, je stejné jako preferenční pořadí, které pro tyto prvky lze odvodit z $M$ pomocí incidenčních matic binárních relací preference $\succ$ a indiference $\sim$. Tuto vlastnost sumarizuje následující věta.

**Věta 5.4.** *Nechť $M = \{m_{ij}\}_{i,j=1}^n$ je slabě konzistentní multiplikativní preferenční matice, která slouží k párovému srovnání variant $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Nechť je variantám $A_1, A_2, \ldots, A_n$ přiřazen vektor hodnocení $\mathbf{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$, který je vypočten z matice $M$ pomocí geometrického průměru řádků (2) nebo pomocí metody vlastního vektoru (3). Označme $A_i \succ A_j$ právě tehdy, když $m_{ij} > 1$, a $A_i \sim A_j$ právě tehdy, když $m_{ij} = 1$, pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Nechť $\succeq$ je sjednocení binárních relací $\succ$ a $\sim$ definovaných na dané množině variant. Potom platí, že $h_{\pi(1)} \geq h_{\pi(2)} \geq \cdots \geq h_{\pi(n)}$, kde $\pi : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ je permutace taková, že $A_{\pi(1)} \succeq A_{\pi(2)} \succeq \cdots \succeq A_{\pi(n)}$.*

Analogicky by bylo možné slabou konzisteci zadefinovat pomocí prvků menších nebo rovných 1 a pomocí minima, což vyjadřuje následující věta.

**Věta 5.5.** *Nechť $M = \{m_{ij}\}_{i,j=1}^n$ je multiplikativní preferenční matice. Potom $M$ je slabě kozistentní právě tehdy, když pro každé $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$ platí*

$$m_{ij} < 1 \wedge m_{jk} < 1 \quad \Longrightarrow \quad m_{ik} \leq \min\{m_{ij}, m_{jk}\}; \tag{16}$$

$$(m_{ij} = 1 \wedge m_{jk} \leq 1) \vee (m_{ij} \leq 1 \wedge m_{jk} = 1) \quad \Longrightarrow \quad m_{ik} = \min\{m_{ij}, m_{jk}\}. \tag{17}$$

Vztah mezi elementy matice $M$ menšími než jedna a většími než jedna vyjadřují následující věta a její důsledek. Jedná se o nutné a zároveň postačující podmínky pro to, aby preferenční matice $M$ byla slabě konzistentní.

**Věta 5.6.** *Nechť $M = \{m_{ij}\}_{i,j=1}^n$ je multiplikativní preferenční matice. Potom $M$ je slabě kozistentní právě tehdy, když pro každé $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$ takové, že $m_{ij} > 1 \wedge m_{jk} < 1$, platí pro $m_{ik}$ následující pro každé $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$:*

$$m_{ij} > m_{kj} \quad \Longrightarrow \quad 1 < m_{ik} \leq m_{ij}; \tag{18}$$

$$m_{ij} < m_{kj} \quad \Longrightarrow \quad m_{jk} \leq m_{ik} < 1; \tag{19}$$

$$m_{ij} = m_{kj} \quad \Longrightarrow \quad m_{ji} \leq m_{ik} \leq m_{ij}. \tag{20}$$

**Důsledek 5.1.** *Nechť $M = \{m_{ij}\}_{i,j=1}^n$ je multiplikativní preferenční matice. Potom $M$ je slabě kozistentní právě tehdy, když pro každé $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$ takové, že $m_{ij} < 1 \wedge m_{jk} > 1$, platí pro $m_{ik}$ následující pro každé $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$:*

$$m_{jk} > m_{ji} \quad \Longrightarrow \quad 1 < m_{ik} \leq m_{jk}; \tag{21}$$

$$m_{jk} < m_{ji} \quad \Longrightarrow \quad m_{ij} \leq m_{ik} < 1; \tag{22}$$

$$m_{jk} = m_{ji} \quad \Longrightarrow \quad m_{kj} \leq m_{ik} \leq m_{jk}. \tag{23}$$

**Aditivní slabá konzistence**

Nyní bude zavedena slabá konzistenci pro aditivní preference. Tato podmnínka opět vychází z restriktivní max-max tranzitivity, ale je silnější. Pokud bude tato podmínka pro aditivní preferenční matici splněna, potom bude považována za přijatelně konzistentní.

**Definice 5.2.** Nechť $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ je aditivní preferenční matice. Potom řekneme, že $A$ je *aditivně slabě konzistentní*, jestliže pro každé $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$ platí

$$a_{ij} > 0{,}5 \wedge a_{jk} > 0{,}5 \quad \Longrightarrow \quad a_{ik} \geq \max\{a_{ij}, a_{jk}\}; \tag{24}$$

$$(a_{ij} = 0{,}5 \wedge a_{jk} \geq 0{,}5) \vee (a_{ij} \geq 0{,}5 \wedge a_{jk} = 0{,}5) \Longrightarrow a_{ik} = \max\{a_{ij}, a_{jk}\}. \tag{25}$$

Aditivní slabá konzitence představuje oslabení podmínky aditivní konzistence. Je-li preferenční matice aditivně konzistentní, pak je také aditivně slabě konzistentní, jak vyjadřuje následující věta.

**Věta 5.7.** *Nechť $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ je aditivní preferenční matice, která je aditivně konzistentní, tj. $a_{ik} = a_{ij} + a_{jk} - 0{,}5$ pro každé $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$. Pak je $A$ také aditivně slabě konzistentní.*

Z aditivní preferenční matice $A$, významy jejíchž prvků jsou definované v tabulce 1, lze získat incidenční matice binárních relací preference $\succ$ a indiference $\sim$. Pokud je aditivní preferenční matice $A$ aditivně slabě konzistentní, pak tyto klasické relace $\succ$ a $\sim$ splňují axiomy von Neumanna a Morgensterna pro racionální chování hodnotitele. Tedy binární relace $\succeq$, která je sjednodením relací $\succ$ a $\sim$, představuje kvaziuspořádání.

**Věta 5.8.** *Nechť $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ je aditivní preferenční matice, která slouží k párovému srovnání variant $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Dále nechť $A$ je aditivně slabě konzistentní. Označme $A_i \succ A_j$ právě tehdy, když $a_{ij} > 0{,}5$, a $A_i \sim A_j$ právě tehdy, když $a_{ij} = 0{,}5$, pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Potom preferenční uspořádání prvků $A_1, A_2 \ldots, A_n$ určené binární relací $\succeq$, která je sjednocením binárních relací $\succ$ a $\sim$, tvoří kvaziuspořádání.*

Při zadávání aditivní preferenční matice $A$ se většinou pracuje pouze s horním trojúhelníkem této matice. Zbylé hodnoty se doplní z vlastnosti aditivní reciprocity. V tomto případě je výhodné, aby horní trojúhelník obsahoval pouze hodnoty větší nebo rovny 0,5. Toho se docílí tím, že porovnávané prvky se uspořádají od nejpreferovanějšího po nejméně preferovaný. Je-li matice v tomto tvaru, potom je navíc velmi jednoduché aditivní slabou konzistenci kontrolovat již při zadávání preferenční matice. Aditivní slabá konzistence je v tomto případě totiž ekvivalentní s tím, že každý řádek horního trojúhelníku matice představuje neklesající posloupnost čísel a každý jeho sloupec nerostoucí posloupnost. Navíc ještě musí platit, že pokud se jinde než na hlavní diagonále vyskytuje hodnota představující indiferenci mezi dvěma prvky, potom srovnání každého prvku s libovolným z těchto dvou prvků musí být přiřazena stejná hodnota preference. Pokud nejsou porovnávané varianty předem takto uspořádané, potom je možné zkusit přeuspořádat řádky a sloupce matice $A$. Pokud bude existovat takové přeuspořádání, že pro nově vzniklou matici budou splněny výše zmíněné vlastnosti, potom je matice $A$ aditivně slabě konzistentní. Tato vlastnost je popsána v následující větě.

**Věta 5.9.** *Nechť $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ je aditivní preferenční matice. Potom $A$ je aditivně slabě konzistentní právě tehdy, když existuje permutace $\pi : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ taková, že platí následující:*

1. *posloupnost $\{a_{\pi(i)\pi(j)}\}_{\pi(j)=\pi(i)}^n$ je neklesající pro každé $i = 1, 2 \ldots, n$;*
2. *posloupnost $\{a_{\pi(i)\pi(j)}\}_{\pi(i)=1}^{\pi(j)}$ je nerostoucí pro každé $j = 1, 2, \ldots, n$;*
3. *jestliže $a_{\pi(i)\pi(j)} = 0{,}5$ pro nějaké $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, kde $\pi(i) < \pi(j)$, potom $a_{\pi(l)\pi(i)} = a_{\pi(l)\pi(j)}$ pro každé $l = 1, 2, \ldots, n$ takové, že $\pi(l) \leq \pi(i) < \pi(j)$;*
4. *jestliže $a_{\pi(i)\pi(j)} = 0{,}5$ pro nějaké $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, kde $\pi(i) < \pi(j)$, potom $a_{\pi(i)\pi(k)} = a_{\pi(j)\pi(k)}$ pro každé $k = 1, 2, \ldots, n$ takové, že $\pi(i) < \pi(j) \leq \pi(k)$.*

Pro aditivně slabě konzistentní aditivní preferenční matici $A$ platí, že preferenční pořadí porovnávaných prvků, které je jim přiřazeno dle příslušných aditivních hodnocení získaných z $A$ pomocí vzorce (6), je stejné jako preferenční pořadí, které pro tyto prvky lze odvodit z $A$ pomocí incidenčních matic binárních relací preference $\succ$ a indiference $\sim$. Tuto vlastnost sumarizuje následující věta.

**Věta 5.10.** *Nechť $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ je aditivní preferenční matice, která slouží k párovému srovnání variant $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Nechť je variantám $A_1, A_2, \ldots, A_n$ přiřazen vektor hodnocení $\mathbf{h}^A = (h_1^A, h_2^A, \ldots, h_n^A)$, který je z matice $A$ vypočten pomocí vzorce (6). Označme $A_i \succ A_j$ právě tehdy, když $a_{ij} > 0{,}5$, a $A_i \sim A_j$ právě tehdy, když $a_{ij} = 0{,}5$, pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Nechť $\succeq$ je sjednocení binárních relací $\succ$ a $\sim$ na dané množině variant. Potom platí, že $h_{\pi(1)}^A \geq h_{\pi(2)}^A \geq \cdots \geq h_{\pi(n)}^A$, kde $\pi : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ je permutace taková, že $A_{\pi(1)} \succeq A_{\pi(2)} \succeq \cdots \succeq A_{\pi(n)}$.*

Aditivní slabá konzistence je definována jen pro hodnoty z intervalu $\langle 0{,}5, 1\rangle$. Analogicky by bylo možné aditivní slabou konzisteci zadefinovat pro prvky z intervalu $\langle 0, 0{,}5\rangle$, což vyjadřuje následující věta.

**Věta 5.11.** *Nechť $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ je aditivní preferenční matice. Potom $A$ je aditivně slabě kozistentní právě tehdy, když pro každé $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$ platí*

$$a_{ij} < 0{,}5 \wedge a_{jk} < 0{,}5 \quad \Longrightarrow \quad a_{ik} \leq \min\{a_{ij}, a_{jk}\}; \tag{26}$$

$$(a_{ij} = 0{,}5 \wedge a_{jk} \leq 0{,}5) \vee (a_{ij} \leq 0{,}5 \wedge a_{jk} = 0{,}5) \Longrightarrow a_{ik} = \min\{a_{ij}, a_{jk}\}. \tag{27}$$

Jak vypadá nepřímé srovnání dvou prvků u slabě konzistentní matice $A$, pokud přímá srovnání dvou prvků nabývají hodnot z intervalů $\langle 0, 0{,}5)$ a $(0{,}5, 1\rangle$, vyjadřuje následující věta a její důsledek. Popisují další nutné a zároveň postačující podmínky pro to, aby matice $A$ byla aditivně slabě konzistentní.

**Věta 5.12.** *Nechť $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ je aditivní preferenční matice. Potom $A$ je aditivně slabě kozistentní právě tehdy, když pro každé $i, j, k = 1, 2, \dots, n$ takové, že $a_{ij} > 0{,}5 \wedge a_{jk} < 0{,}5$, platí pro $a_{ik}$ následující pro každé $i, j, k = 1, 2, \dots, n$:*

$$a_{ij} > a_{kj} \implies 0{,}5 < a_{ik} \leq a_{ij}; \tag{28}$$

$$a_{ij} < a_{kj} \implies a_{jk} \leq a_{ik} < 0{,}5; \tag{29}$$

$$a_{ij} = a_{kj} \implies a_{ji} \leq a_{ik} \leq a_{ij}. \tag{30}$$

**Věta 5.13.** *Nechť $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ je aditivní preferenční matice. Potom $A$ je aditivně slabě kozistentní právě tehdy, když pro každé $i, j, k = 1, 2, \dots, n$ takové, že $a_{ij} < 0{,}5 \wedge a_{jk} > 0{,}5$, platí pro $a_{ik}$ následující pro každé $i, j, k = 1, 2, \dots, n$:*

$$a_{jk} > a_{ji} \implies 0{,}5 < a_{ik} \leq a_{jk}; \tag{31}$$

$$a_{jk} < a_{ji} \implies a_{ij} \leq a_{ik} < 0{,}5; \tag{32}$$

$$a_{jk} = a_{ji} \implies a_{kj} \leq a_{ik} \leq a_{jk}. \tag{33}$$

**Multiplikativní vs. aditivní slabá konzistence**

Slabá konzistence byla pro multiplikativní i pro aditivní preferenční matici nadefinována tak, aby na zadané preference byly kladeny stejné požadavky. Podmínky multplikativní a aditivní slabé konzistence jsou tudíž ekvivalentní.

**Věta 5.14.** *Nechť $M = \{m_{ij}\}_{i,j=1}^n$ je multiplikativní preferenční matice, kde $m_{ij} \in \langle \frac{1}{\sigma}, \sigma \rangle$, $\sigma > 1$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ a nechť $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ je aditivní preferenční matice, kde $a_{ij} \in \langle 0, 1 \rangle$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. Nechť pro prvky těchto matic platí $m_{ij} = \sigma^{2a_{ij}-1}$, resp. $a_{ij} = \frac{1}{2}(1 + \log_\sigma m_{ij})$, pro každé $i, j = 1, 2, \dots, n$. Potom matice $M$ je slabě konzistentní právě tehdy, když matice $A$ je aditivně slabě konzistentní.*

Vypočte-li se hodnocení ze slabě konzistentní matice $M$ nebo z aditivně slabě konzistentní matice $A$, ponesou tato hodnocení stejnou informaci o uspořádání porovnávaných prvků.

**Věta 5.15.** *Nechť $M = \{m_{ij}\}_{i,j=1}^n$ je slabě konzistentní multiplikativní preferenční matice, která slouží k párovému srovnání variant $A_1, A_2, \dots, A_n$. Nechť je variantám $A_1, A_2, \dots, A_n$ přiřazeno hodnocení $h_1, h_2, \dots, h_n$, které je vypočteno z matice $M$ pomocí geometrického průměru řádku (2) nebo pomocí metody vlastního vektoru (3). Nechť $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ je aditivně slabě konzistentní aditivní preferenční matice, pro kterou platí $a_{ij} = \frac{1}{2}(1 + \log_\sigma m_{ij})$ pro každé $i, j = 1, 2, \dots, n$. Nechť $h_1^A, h_2^A, \dots, h_n^A$ jsou aditivní hodnocení variant $A_1, A_2, \dots, A_n$*

*vypočtená z matice $A$ dle vzorce (6). Označme $A_i \succ A_j$ právě tehdy, když $m_{ij} > 1$, a $A_i \sim A_j$ právě tehdy, když $m_{ij} = 1$, pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Nechť $\succeq$ je sjednocení binárních relací $\succ$ a $\sim$ definovaných na dané množině variant. Potom pro uspořádání hodnocení dle velikosti platí:*

$$h_{\pi(1)} \geq h_{\pi(2)} \geq \cdots \geq h_{\pi(n)} \quad \Longleftrightarrow \quad h^A_{\pi(1)} \geq h^A_{\pi(2)} \geq \cdots \geq h^A_{\pi(n)},$$

*kde $\pi : \{1, 2, \ldots, \} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ je permutace taková, že $A_{\pi(1)} \succeq A_{\pi(2)} \succeq \cdots \succeq A_{\pi(n)}$.*

## 5.2. Neúplné matice párových porovnání

V této části je představen popis vlastní metody pro efektivní získávání párových srovnání variant od hodnotitele tak, aby získaná data byla přijatelně konzistentní a aby vzniklá preferenční matice nesla dostatek informací k výpočtu hodnocení porovnávaných variant. Původní výsledky uvedené v této části byly publikovány v [1].

**Předpoklady**

Algoritmus je možno definovat jak pro multiplikativní preferenční matici $M$, tak pro aditivní preferenční matici $A$. Vzhledem k tomu, že tyto dva přístupy jsou dle kapitoly 2 ekvivalentní, je algoritmus popsán pouze pro případ, kdy hodnotitel zadává multiplikativní preference. Uvažujeme diskrétní škálu. Intenzity preferencí se tedy budou zadávat na multiplikativní škále $I \subset \langle \frac{1}{\sigma}, \sigma \rangle$, $\sigma > 1$, kde $I = L \cup \{1\} \cup P$, $P = \{c_2, c_3, \ldots, c_N\}$, $L = \{\frac{1}{c_N}, \frac{1}{c_{N-1}}, \ldots, \frac{1}{c_2}\}$, $c_2, c_3 \ldots, c_N > 1$, $c_N = \sigma$.

Uvažujme varianty $A_1, A_2, \ldots, A_n$, kterým je třeba přiřadit hodnocení vůči kritériu $K$. Dále uvažujme slabě konzistentní multiplikativní preferenční matici $M = \{m_{ij}\}_{i,j=1}^n$, kde $m_{ij} \in I$ pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Jedná se o preferenční matici, která by vznikla v případě, že by hodnotitel zadal všechna párová srovnání. Tedy $M$ by představovala *úplnou preferenční matici* párového porovnání variant $A_1, A_2, \ldots, A_n$, tj. takovou preferenční matici, kde jsou všechna párová srovnání jednoznačně zadána. Dále uvažujme hodnocení $h_1, h_2, \ldots, h_n$ variant $A_1, A_2, \ldots, A_n$, která by v tomto případě byla z matice $M$ vypočtena pomocí geometrického průměru řádků (2).

Nyní uvažujme multiplikativní preferenční matici příslušnou variantám $A_1, A_2, \ldots, A_n$, kterou bude hodnotitel v průběhu algoritmu vyplňovat. Požadujeme opět, aby tato matice byla zadávána tak, aby byla slabě konzistnetní. Bude-li hodnotitel zadávat párové srovnání variant $A_i$ a $A_j$, bude jeho volba tedy opět $m_{ij}$, kde $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Pro chybějící hodnoty budou odvozeny množiny přípustných hodnot takových, pro které nebude porušena slabá konzistence zadávané preferenční matice. Toto lze společně zapsat do jedné matice, kde zadané hodnoty budou reálné a nezadané budou specifikované množinou přípustných hodnot. Reálná čísla je možno přepsat na jednoprvkové množiny. Obecně tedy můžeme říct, že v této metodě pracujeme s neurčitou maticí $\tilde{M} = \{\tilde{m}_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$, kde $\tilde{m}_{ij} = [m_{ij}^L, m_{ij}^U]$ představuje uspořádanou množinu hodnot od $m_{ij}^L$ do $m_{ij}^U$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. Pro jednoduchost a přehlednost potom v případě, že pro nějaké $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ platí $m_{ij}^L = m_{ij}^U$, což je také rovno $m_{ij}$, bude použito jednoduše značení $\tilde{m}_{ij} = m_{ij}$. *Neúplnou preferenční maticí* tedy budeme rozumět takovou matici $\tilde{M} = \{\tilde{m}_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$, kde některé elementy jsou zadané konkrétně reálnými čísly a jiné jsou zadané neurčitě, množinou přípustných hodnot splňujících podmínku slabé konzistence.

Protože preferenční matice $\tilde{M}$ musí být reciproká, zadává hodnotitel pouze párová srovnání v horním trojúhelníku matice a ostatní hodnoty jsou dopočteny dle podmínky reciprocity. Uspořádanou dvojici prvků $A_i$ a $A_j$ budeme pro potřeby algoritmu pro jednoduchost značit $(i, j)$, kde $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Množinu všech dvojic prvků, pro něž by muselo být zadáno přesné párové srovnání, aby z matice $\tilde{M}$ vznikla úplná matice $M$, označíme $\Omega = \{(i, j); i, j = 1, 2, \dots, n, i < j\}$. Počet takových dvojic je $n(n-1)/2$. Množina dvojic prvků, pro něž již bylo provedeno párové srovnání, tj. je zadána konkrétní reálná hodnota, bude označena $Q$. Tudíž $\Omega \setminus Q$ značí ty dvojice prvků, pro které zatím v horním trojúhelníku matice nebylo párové srovnání konkrétně zadáno, tj. je známá pouze množina přípustných hodnot.

Nyní je možno pro tyto množiny zavést zjednodušený tvar matice $\tilde{M} = \{\tilde{m}_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$. Pro každé $i, j = 1, 2, \dots, n$, $i < j$ platí

$$\tilde{m}_{ij} = \begin{cases} [m_{ij}^L, m_{ij}^U], & \text{jestliže } (i,j) \in \Omega \setminus Q, \\ m_{ij}, & \text{jestliže } (i,j) \in Q, \end{cases} \tag{34}$$

kde $[m_{ij}^L, m_{ij}^U] \subseteq I$ značí uspořádanou množinu hodnot ze škály $I$ od $m_{ij}^L$ do $m_{ij}^U$, které vyhovují vlastnosti slabé konzistence matice. Je zřejmé, že pro $(i, j) \in \Omega \setminus Q$ platí $m_{ij} \in [m_{ij}^L, m_{ij}^U]$. Dále jak bylo řečeno výše, pro $(i, j) \in Q$ by bylo možno psát také $\tilde{m}_{ij} = [m_{ij}^L, m_{ij}^U]$, kde $m_{ij}^L = m_{ij}^U = m_{ij}$. Dále platí $\tilde{m}_{ii} = 1$ pro každé $i = 1, 2, \dots, n$. Pro reciproké hodnoty pod hlavní diagonálou pro každé $i, j = 1, 2, \dots, n$, $i < j$ platí

$$\tilde{m}_{ji} = \begin{cases} [m_{ji}^L, m_{ji}^U] = \left[\frac{1}{m_{ij}^U}, \frac{1}{m_{ij}^L}\right], & \text{jestliže } (i,j) \in \Omega \setminus Q, \\ m_{ji} = \frac{1}{m_{ij}}, & \text{jestliže } (i,j) \in Q. \end{cases} \tag{35}$$

Konstrukce množin $[m_{ij}^L, m_{ij}^U]$ probíhá následujcím způsobem: Pro každé $(i, j) \in \Omega \setminus Q$ je definována množina $PH_{ij} \subseteq I$, která bude představovat *množinu přípustných hodnot* škály $I$ takových, pro které dané párové srovnání dodrží slabou konzistenci matice. Protože slabá konzistence vždy pro uvažovaný element matice omezuje jen jeho maximální nebo minimální uvažovanou hodnotu, je množina $PH_{ij} \subseteq I$ jednoznačně určena svými hodnotami $\min PH_{ij}$ a $\max PH_{ij}$. Pro $(i, j) \in \Omega \setminus Q$ je tedy možno množinu přípustných hodnot označit

$[\min PH_{ij}, \max PH_{ij}]$. Tímto zápisem rozumíme množinu hodnot z $I$ od $\min PH_{ij}$ po $\max PH_{ij}$. Pro reciproká párová srovnání $(j,i)$, kde $(i,j) \in \Omega \setminus Q$, budou tyto množiny zavedeny následovně: Pro $(j,i)$ takové, že $(i,j) \in \Omega \setminus Q$, bude platit $PH_{ji} = [\min PH_{ji}, \max PH_{ji}] = [\frac{1}{\max PH_{ij}}, \frac{1}{\min PH_{ij}}]$. Je zřejmé, že pro každé $i,j = 1,2,\ldots,n$ platí $[m_{ij}^L, m_{ij}^U] = [\min PH_{ij}, \max PH_{ij}]$.

Získávání množin $PH_{ij}$ probíhá pomocí slabé konzistence zavedené pro úplnou preferenční matici $M$. Na základě ní je potom množno definovat slabou konzistenci i pro preferenční matici $\tilde{M}$, jejíž prvky jsou dány vztahy (34) a (35). S přihlédnutím k tomu, že pro $(i,j) \in Q$ je místo $\tilde{m}_{ij} = m_{ij}$ možno psát $\tilde{m}_{ij} = [m_{ij}^L, m_{ij}^U] = [m_{ij}, m_{ij}]$ a místo $\tilde{m}_{ji} = m_{ji}$ je možno psát $\tilde{m}_{ji} = [m_{ji}^L, m_{ji}^U] = [m_{ji}, m_{ji}]$, zavedeme *slabou konzistenci pro preferenční matici* $\tilde{M} = \{\tilde{m}_{ij}\}_{i,j=1}^n$ pro každé $i,j,k = 1,2,\ldots,n$ následovně:

$$\tilde{m}_{ij} \subseteq [c_2, \sigma] \land \tilde{m}_{jk} \subseteq [c_2, \sigma] \implies \tilde{m}_{ik} = [\max\{m_{ij}^L, m_{jk}^L\}, \sigma], \tag{36}$$

$$\tilde{m}_{ij} = 1 \land \tilde{m}_{jk} \subseteq [1, \sigma] \implies \tilde{m}_{ik} = \tilde{m}_{jk}, \tag{37}$$

$$\tilde{m}_{ij} \subseteq [1, \sigma] \land \tilde{m}_{jk} = 1 \implies \tilde{m}_{ik} = \tilde{m}_{ij}. \tag{38}$$

**Popis kroků algoritmu**

Nyní bude popsán algoritmus pro získání neúplné preferenční matice a pro výpočet intervalových hodnocení variant, který kombinuje algoritmus Fedrizziho a Gioveho [22], podmínku slabé konzistence a výpočet hodnocení pomocí fuzzifikovaného geometrického průměru [34].

*Kroky navrženého algoritmu*:

1. Nejprve se provedou počáteční nastavení. Pro matici $\tilde{M} = \{\tilde{m}_{ij}\}_{i,j=1}^n$ jsou vyplněny diagonální prvky, tj. $\tilde{m}_{ij} = 1$ pro každé $i = 1,2,\ldots,n$. Stanoví se množina přípustných řešení $PH_{ij}$ pro každé $(i,j) \in \Omega \setminus Q$. Na začátku je $Q = \emptyset$, tj. $PH_{ij} = [\frac{1}{\sigma}, \sigma]$ pro každé $i,j = 1,2,\ldots,n$, $i < j$. Je stanoven parametr $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$ pro výběrovou funkci (7).
2. Hodnotitel zadá počáteční párová srovnání, tj. vyplní intenzity preference $\tilde{m}_{2i-1,2i} = m_{2i-1,2i}$ pro $i = 1,2,\ldots,\lfloor n/2 \rfloor$.
3. Nyní bude provedena interaktivní část algoritmu:
   (a) Hodnotitel provede zadání intenzity preference, tj. vyplní $\tilde{m}_{ij}$, kde $(i,j) \in \Omega \setminus Q$ takové, které vyhovuje (12), tj. dvojice prvků, která maximalizuje hodnotící funkci (7). Pokud by takových dvojic prvků bylo více, bude vybrána dvojice s nejmenším součtem indexů, popř. s nejmenším indexem. Zadávané párové srovnání musí splňovat slabou konzistenci, hodnotitel tedy volí $\tilde{m}_{ij} \in PH_{ij}$. Zde tedy $\tilde{m}_{ij} = m_{ij}$. Po vyplnění párového srovnání hodnotitelem je předefinováno $\Omega$ a $Q$.

   Je použita výběrová funkce a výběrové pravidlo navržené v algoritmu autorů Fedrizzi a Giove, který je popsán v kapitole 3.

(b) Jsou přepočteny množiny přípustných hodnot a pro jednoprvkové množiny je provedeno jejich dosazení do matice. Tj. pomocí vztahů (14)–(23) jsou přepočteny množiny přípustných hodnot $PH_{ij}$ pro všechny chybějící $(i,j) \in \Omega \setminus Q$ tak, aby nadále odpovídaly slabé konzistenci. Pokud pro nějaké $(i,j) \in \Omega \setminus Q$ platí $PH_{ij} = \{\alpha_{ij}\}$, kde $\alpha_{ij} \in \langle \frac{1}{\sigma}, \sigma \rangle$, potom je doplněna tato hodnota do preferenční matice $\tilde{M}$ automaticky bez zásahu hodnotitele, tj. $\tilde{m}_{ij} = \alpha_{ij}$. Je zřejmé, že $\alpha_{ij} = m_{ij}$. Následně jsou upraveny množiny $\Omega$ a $Q$. Došlo-li ke zúžení nějaké množiny $PH_{ij}$, zopakuje se tento krok 3b. Jinak se pokračuje na krok 3c.

(c) *Zastavovací kritérium*: Je požadováno, aby pro každý nevyplněný prvek existovala dvojice nepřímých srovnání s vyplněnou intenzitou preference, tj. zkontroluje se, jestli pro každé $(i,j) \in \Omega \setminus Q$ existuje $k$ takové, že $k \neq i,j$ a $(i,k),(k,j) \in Q$. Pokud je toto kritéirum splněno, pokračuje se na krok 4. Jinak se vracíme zpět na krok 3a.

4. Nyní jsou eliminovány množiny $PH_{ij}$, dle kterých nelze rozlišit, který ze dvou porovnávaných prvků je preferovanější.

   (a) Je identifikováno, jestli v matici $\tilde{M}$ existují tzv. *nejednoznačné množiny přípustných hodnot*, tj. jestli existuje množina $PH_{ij}$, $(i,j) \in V \subseteq \Omega \setminus Q$, taková, že $1 \in PH_{ij}$ nebo že $\{c_k, \frac{1}{c_k}\} \subseteq PH_{ij}$, kde $c_k \in P$, $k \in \{2,3,\ldots,N\}$. Pokud $V \neq \emptyset$, pokračuje se na krok 4b. V opačném případě se pokračuje na krok 5.

   (b) Hodnotitel provede zadání intenzity preference, tj. zadá párové srovnání pro dvojici prvků $(k,l) \in V$ takovou, že $(k,l) = \arg\max_{(i,j)\in V} Card(PH_{ij})$. Pokud je takových dvojic více, vybere se jedna z nich náhodně. Následně dojde k úpravě množin $\Omega$ a $Q$.

   (c) Dojde k přepočtení množin přípustných hodnot $PH_{ij}$, kde $(i,j) \in \Omega \setminus Q$ a pro jednoprvkové množiny se provede jejich dosazení do matice, tj. provádí se postup uvedený v kroku 3b, dokud dochází ke zužování množin přípustných hodnot. Následně je upravena množina $V$ a vracíme se zpět na krok 4a.

   Je-li $PH_{ij}$ nejednoznačná, potom z ní není možné jednoznačně určit, jestli je $A_i$ preferováno před $A_j$ nebo $A_j$ před $A_i$, popř. jestli jsou indiferentní. Proto jsou takovéto dvojice prvků postupně předkládány hodnotiteli k vyplnění, dokud pro každou takovou dvojici není hodnotitelem zadáno párové srovnání nebo dokud k ní příslušná množina přípustných hodnot není zúžena na jednoznačnou množinu. Aby od hodnotitele nebylo třeba moc dodatečných informací, předkládají se mu k vyplnění tyto nejednoznačné množiny od nejpočetnější. Výsledkem tohoto kroku je finální preferenční matice $\tilde{M}$, ze které je možno určit preferenční uspořádání variant a vypočítat jejich hodnocení.

5. Nyní je určeno preferenční uspořádání variant. Pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$ vypočte se $s_i = \sum_{j \in O_j} 1$, kde $O_j = \{j; j = 1, 2, \ldots, n : \tilde{m}_{ij} \in [1, \sigma] \vee \tilde{m}_{ij} \subseteq [1, \sigma]\}$. Potom uspořádání variant $A_{\pi(1)}, A_{\pi(2)}, \ldots, A_{\pi(n)}$ určuje permutace $\pi : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ taková, že $s_{\pi(1)} \geq s_{\pi(2)} \geq \cdots \geq s_{\pi(n)}$. Neúplnou preferenční matici příslušnou přečíslovaným variantám$A_{\pi(1)}, A_{\pi(2)}, \ldots, A_{\pi(n)}$ budeme značit $\tilde{M}_U$. Tato přeuspořádaná matice $\tilde{M}_U = \{\tilde{m}_{Uij}\}_{i,j=1}^{n}$ není nutná pro výpočet hodnocení variant, je však pro hodnotitele přehlednější.

6. Na závěr je vypočteno hodnocení variant. Pro potřeby výpočtu hodnocení se s $PH_{ij}$, kde $(i, j) \in \Omega \setminus Q$, pracuje jako s intervaly, díky čemuž i výsledná hodnocení budou intervalová. Pro jejich výpočet je použit fuzzifikovaný geometrický průměr uvedený v [34]. Jedná se o vzorce pro výpočet krajních hodnot trojúhelníkového fuzzy hodnocení. Intervalové hodnocení $\tilde{h}_i = \langle h_i^l, h_i^U \rangle$ varianty $A_i$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$ se vypočte

$$h_i^L = \frac{\sqrt[n]{\prod\limits_{j=1}^{n} m_{ij}^L}}{\sqrt[n]{\prod\limits_{j=1}^{n} m_{ij}^L} + \max\left\{ \sum\limits_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \sqrt[n]{m_{ki}^U \prod\limits_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{k-1} \frac{1}{m_{lk}^*} \prod\limits_{\substack{l=k+1 \\ l \neq i}}^{n} m_{kl}^*} ;\ \begin{array}{l} m_{kl}^* \in \langle m_{kl}^L, m_{kl}^U \rangle, \\ k, l = 1, 2, \ldots, n, \\ k, l \neq i, k < l \end{array} \right\}}, \tag{39}$$

$$h_i^U = \frac{\sqrt[n]{\prod\limits_{j=1}^{n} m_{ij}^U}}{\sqrt[n]{\prod\limits_{j=1}^{n} m_{ij}^U} + \min\left\{ \sum\limits_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \sqrt[n]{m_{ki}^L \prod\limits_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{k-1} \frac{1}{m_{lk}^*} \prod\limits_{\substack{l=k+1 \\ l \neq i}}^{n} m_{kl}^*} ;\ \begin{array}{l} m_{kl}^* \in \langle m_{kl}^L, m_{kl}^U \rangle, \\ k, l = 1, 2, \ldots, n, \\ k, l \neq i, k < l \end{array} \right\}}. \tag{40}$$

Použité vzorce pro fuzzifikovaný geometrický průměr byly zavedeny v [34] původně pro metodu fuzzy AHP. Tyto vzorce slouží k výpočtu fuzzy hodnocení z fuzzy preferenční matice, kde intenzity preferencí jsou zadané trojúhelníkovými fuzzy čísly, pomocí nichž je postihnuta neurčitost na vstupu. Tento způsob by tedy měl adekvátně zpracovat a zachovat neurčitost v matici $\tilde{M}$. Protože je matice $\tilde{M}$ slabě konzistentní, tak permutace $\pi$ získaná v kroku 5. určuje také uspořádání hodnocení variant dle velikosti, tj. platí $\tilde{h}_{\pi(1)} \geq \tilde{h}_{\pi(2)} \geq \cdots \geq \tilde{h}_{\pi(n)}$, kde pro každé $i, j = 1, 2, \ldots, n$ označení $\tilde{h}_{\pi(i)} \geq \tilde{h}_{\pi(j)}$ znamená $h_i^L \geq h_j^L$ a zároveň $h_i^U \geq h_j^U$.

**Způsoby použití**

Navržený algoritmus nemusí být použit v celé své podobě, ve které zde byl prezentován. Na základě potřeb hodnotite může být zkrácen a použit v několika verzích k několika různým účelům:

Verze 1. Získání intervalových hodnocení porovnávaných prvků z neúplné preferenční matice. V tomto případě bude použit celý algoritmus, tj. kroky 1–6.

Verze 2. Získání preferenčního uspořádání porovnávaných prvků z neúplné preferenční matice. V tomto případě budou použity jen kroky 1–5.

Verze 3. Získání reálných hodnocení porovnávaných prvků z úplné preferenční matice. V tomto případě budou použity jen kroky 1–3, přičemž jako zastavovací kritérium v bodě 3c se použije to, že v matici už není žádné chybějící párové srovnání. I pro tuto variantu metody zůstávají pro hodnotitele zachovány její výhody: V každém kroku zadávání intenzit preferencí hodnotitel ví, z jakých hodnot může vybírat, aby jeho rozhodnutí byla racionální. Dále díky automaticky doplněným hodnotám dojde ke zmenšení počtu párových srovnání vyžadovaných od hodnotitele.

## 5.3. Hodnocení obecných kategorií pomocí párového srovnávání

V této části je popsáno vlastní řešení k výpočtu hodnocení obecných kategorií variant. Původní výsledky zde uvedené byly z větší části publikovány v [2].

Nyní bude popsán nový způsob získání dílčích hodnocení kategorií, který je přímou aplikací metod párového srovnávání, kde místo variant budou jako porovnávané prvky vystupovat kategorie definované pomocí úrovní kritéria. To tedy znamená, že pro každé kritérium by měla být vytvořena matice porovnávající společně všechny kategorie. Řád takové matice by byl $n = \prod_{j=1}^{n} n_j$. Následně by z této matice bylo přímo vypočeteno hodnocení kategorií. Takto by bylo nutné vytvořit hodnotící model v případě, že mezi uvažovanými kategoriemi by byly nějaké interakce. Nicméně v případě, kdy se mezi kategoriemi interakce nevyskytují, je možno hodnocení kategorií definovat přímo pomocí jednotlivých úrovní kritéria, stejně jako tomu bylo u obou Saatyho modelů. Při normalizaci hodnocení je však nutno si uvědomit, že vždy $\prod_{k=1,k\neq j}^{n} n_k$ kategorií dosahuje stejné úrovně kritéria $K_j$ pro každé $j = 1, 2, \ldots, m$.

Na základě této úvahy bude hodnocení kategorie $C_{i_1,i_2,\ldots,i_m}$ vzhledem ke kritériu $K_j$, kde $j = 1, 2, \ldots, m$, definováno pro každé $i_j = 1, 2, \ldots, n_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$ takto:

$$R^j_{i_1,i_2,\ldots,i_m} = \frac{u^j_{i_j}}{\prod\limits_{k=1,k\neq j}^{m} n_k}, \tag{41}$$

kde $u^j_{i_j}$ jsou normovaná hodnocení úrovní $U^j_{i_j}$ kritéria $K_j$, jejichž odvození pomocí metod párového porovnání je popsáno v kapitole 3

Je zřejmé, že takto definovaná hodnocení kategorií jsou nezáporná. Navíc dávají v součtu 1, jak je v metodách párového srovnávání běžné.

**Věta 5.16.** *Nechť pro hodnocení kategorií* $C_{i_1,i_2,\ldots,i_m}$, $i_j = 1,2,\ldots,n_j$, $j = 1,2,\ldots,m$ *vzhledem ke kritériím* $K_1, K_2, \ldots, K_m$ *platí vztah* (41). *Potom pro každé* $j = 1,2,\ldots,m$ *platí* $\sum_{i_1=1}^{n_1}\sum_{i_2=1}^{n_2}\cdots\sum_{i_m=1}^{n_m} R^j_{i_1,i_2,\ldots,i_m} = 1$.

**Důsledek 5.2.** *Nechť pro hodnocení kategorií* $C_{i_1,i_2,\ldots,i_m}$, $i_j = 1,2,\ldots,n_j$, $j = 1,2,\ldots,m$ *vzhledem ke kritériím* $K_1, K_2, \ldots, K_m$ *platí vztah* (41). *Potom pro celkové hodnocení vypočtené* (13) *platí* $\sum_{i_1=1}^{n_1}\sum_{i_2=1}^{n_2}\cdots\sum_{i_m=1}^{n_m} R_{i_1,i_2,\ldots,i_m} = 1$.

Dílčí hodnocení kategorií definovaná dle (41) jsou stejná jako hodnocení vypočtená přímo z preferenční matice porovnávající všechny kategorie vzhledem k uvažovanému kritériu a následně znormovaná. Toto platí jak pro hodnocení vypočtená metodou vlastního vektoru, tak pro geometrický průměr řádků.

**Věta 5.17.** *Nechť pro každé* $j = 1,2,\ldots,m$ *je* $M^j = \{m^j_{ik}\}_{i,k=1}^{n_j}$ *multiplikativní preferenční matice pro srovnání úrovní* $U^j_1, U^j_2, \ldots, U^j_{n_j}$ *vzhledem ke kritériu* $K_j$. *Nechť pro každé* $j = 1,2,\ldots,m$ *jsou* $u^j_1, u^j_2, \ldots, u^j_{n_j}$ *normovaná hodnocení úrovní* $U^j_1, U^j_2, \ldots, U^j_{n_j}$ *vzhledem ke* $K_j$ *získaná z* $M^j$ *pomocí geometrického průměru řádků* (2) *(resp. metody vlastního vektoru* (3)*) a následně pomocí normování* (4). *Nechť pro každé* $j = 1,2,\ldots,m$ *je* $C^j = \{c^j_{ik}\}_{i,k=1}^{n}$ *multiplikativní preferenční matice pro srovnání kategorií* $C_{i_1,i_2,\ldots,i_m}$, *kde* $i_j = 1,2,\ldots,n_j$, *vzhledem ke kritériu* $K_j$. *Nechť pro každé* $j = 1,2,\ldots,m$ *jsou* $R^j_{i_1,i_2,\ldots,i_m}$ *normovaná hodnocení kategorií* $C_{i_1,i_2,\ldots,i_m}$, $i_j = 1,2,\ldots,n_j$, *vzhledem ke* $K_j$ *získaná z* $C^j$ *pomocí geometrického průměru řádků* (2) *(resp. metody vlastního vektoru* (3)*) a následně pomocí normování* (4). *Potom platí vztah* (41), *tj.* $R^j_{i_1,i_2,\ldots,i_m} = u^j_{i_j} / \prod_{k=1,k\neq j}^{m} n_k$ *pro každé* $i_j = 1,2,\ldots,n_j$, $j = 1,2,\ldots,m$.

Analogicky jako tomu bylo u multiplikativních hodnocení, platí obdobný vztah mezi aditivními hodnoceními úrovní kritéria a aditivními hodnoceními kategorií vypočtenými přímo z aditivní preferenční matice porovnávající všechny kategorie vzhledem k uvažovanému kritériu. Zde je však ještě před normováním požadován převod na multiplikativní preference.

**Věta 5.18.** *Nechť pro každé* $j = 1,2,\ldots,m$ *je* $D^j = \{d^j_{ik}\}_{i,k=1}^{n_j}$ *aditivní preferenční matice pro srovnání úrovní* $U^j_1, U^j_2, \ldots, U^j_{n_j}$ *vzhledem ke kritériu* $K_j$. *Nechť pro každé* $j = 1,2,\ldots,m$ *jsou* $u^{Aj}_1, u^{Aj}_2, \ldots, u^{Aj}_{n_j}$ *aditivní hodnocení úrovní* $U^j_1, U^j_2, \ldots, U^j_{n_j}$ *vzhledem ke* $K_j$ *získaná z* $D^j$ *pomocí* (6). *Nechť pro každé* $j = 1,2,\ldots,m$ *je* $B^j = \{b_{ik}\}_{i,k=1}^{n}$ *aditivní preferenční matice pro srovnání kategorií* $C_{i_1,i_2,\ldots,i_m}$, *kde* $i_j = 1,2,\ldots,n_j$, *vzhledem ke kritériu* $K_j$. *Nechť pro každé* $j = 1,2,\ldots,m$ *jsou* $R^{Aj}_{i_1,i_2,\ldots,i_m}$ *aditivní hodnocení kategorií* $C_{i_1,i_2,\ldots,i_m}$, $i_j = 1,2,\ldots,n_j$, *vzhledem ke* $K_j$ *získaná z* $B^j$ *pomocí* (6). *Potom pro tato aditivní hodnocení platí* $R^{Aj}_{i_1,i_2,\ldots,i_m} = u^{Aj}_{i_j}$ *a po jejich převodu na multiplikativní tvar*

*$R'^{j}_{i_1,i_2,\ldots,i_m} = \sigma^{R^{Aj}_{i_1,i_2,\ldots,i_m}-1}$ a $u'^{j}_{i_j} = \sigma^{u^{Aj}_{i_j}-1}$ a po následném znormování na $R^{j}_{i_1,i_2,\ldots,i_m}$ a $u^{j}_{i_j}$ pomocí vzorce (4) platí vztah (41), tj. $R^{j}_{i_1,i_2,\ldots,i_m} = u^{j}_{i_j} / \prod_{k=1,k\neq j}^{m} n_k$ pro každé $i_j = 1, 2, \ldots, n_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$.*

# 6. Přínosy navržených postupů

V oblasti konzistence metod párového srovnávání byla navržena nová koncepce posuzování konzistence preferenčních matic, která navazuje na autory zabývající se aditivním přístupem. Tato podmínka byla definována ve verzi pro multiplikativní i aditivní preference a bylo ukázáno, že takto definované podmínky jsou spolu izomorfní. Bylo ukázáno, že výhodou slabé konzistence je to, že je v reálných situacích jednoduše dodržitelná a že ji lze snadno kontrolovat již při zadávání preferenční matice. Přitom tato podmínka splňuje základy racionálního chování hodnotitele, které byly zavedeny von Neumannem a Morgensternem.

V oblasti neúplných matic párového porovnání byla práce zaměřena na navržení metody pro snížení počtu párových srovnání zadaných hodnotitelem pomocí neúplné preferenční matice tak, aby bylo možno následně vypočítat hodnocení porovnávaných prvků. Někteří autoři se zaměřují jen na jeden z těchto dvou problémů, na vytvoření neúplné preferenční matice nebo výpočet hodnocení na základě takové matice. Metoda nově navržená v předložené práci vychází z poznatků jiných autorů a z podmínky slabé konzistence a přináší komplexní nástroj k hodnocení variant. Výhodou je, že hodnotitel má v celém procesu vždy k dispozici množinu přípustných hodnot, ze které může vybírat tak, aby matice byla slabě konzistentní, tj. smysluplně zadaná. Díky podmínce slabé konzistence také dochází k automatickému doplňování hodnot některých prvků, což snižuje náročnost pro hodnotitele. Navržená metoda má tehdy dopad na praktické zadávání preferenčních matic. Výsledná neúplná preferenční matice získaná od hodnotitele je slabě konzistentní a nese dostatek informací k výpočtu smysluplných hodnocení s vypovídající hodnotou. Hodnocení jsou v tomto případě dána intervalově a zachovávají neurčitost na vstupu.

V oblasti hodnocení obecných kategorií variant pomocí metod párového srovnávání byly podrobeny kritické analýze přístupy zavedené Saatym. Bylo demonstrováno, že v jednom případě jsou hodnocení ovlivněna počtem úrovní jednotlivých kritérií. Ve druhém případě je zase prováděno hodnocení na škále, která je považována za absolutní. Zde bylo ukázáno, že pro každé kritérium je ale hodnocení prováděno na jiné škále a že interpretace takových hodnocení je diskutabilní. Následně byla popsána nová medoda pro hodnocení kategorií a bylo ukázáno, že se jedná o přímou aplikací metod párového srovnávání na uvažované kategorie a že zachovává vlastnosti běžné v tomto typu metod.

# Seznam publikací

[1] Jandová, V. Krejčí, J., Stoklasa, J., Fedrizzi, M.: *Computing interval weights for incomplete pairwise-comparison matrices of large dimension - a weak-consistency based approach.* IEEE Transactions on Fuzzy Systems, DOI: 10.1109/TFUZZ.2016.2633364, přijatý článek.

[2] Jandová, V., Stoklasa, J., Talašová, J.: *Modification of the AHP based model for evaluating artistic production of Czech college.* MME 2014 Conference Proceedings, Olomouc, 2014, ISBN 978-80-244-4209-9, s. 372–378.

[3] Jandová, V., Talašová, J.: *Evaluation of absolute type in the Partial Goals Method.* MME 2015 Conference Proceedings, Plzeň, 2015, ISBN 978-80-261-0539-8, s. 321–326.

[4] Jandová, V., Talašová, J.: *Weak Consistency: A New Approach to Consistency in the Saaty's Analytic Hierarchy Process.* Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica **2/52** (2013), s. 71–83.

[5] Stoklasa J., Jandová V., Talašová J.: *Weak consistency in Saaty's AHP - evaluating creative work outcomes of Czech Art Colleges.* Neural Network World **1/23** (2013), s. 61–77.

# Použitá literatura

[6] Alonso, S., Chiclana, F., Herrera, F., Herrera-Viedma, E., Alcalá-Fdez, J., Porcel, C.: *A Consistency-Based Procedure to Estimate Missing Pairwise Preference Values.* International Journal of Intelligent Systems **2/23** (2008), s. 155–175.

[7] Alonso, J. A., Lamata, M. T.: *Consistency in the Analytic Hierarchy Process: A New Approach.* International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems **4/14** (2016), s. 445–459.

[8] Barzilai, J.: *Consistency measures for pairwise comparison matrices.* Journal of Multi-Criteria Decision Analysis **3/7** (1998), s. 123–132.

[9] Basile, L., D'Apuzzo, L.: *Transitive matrices, strict preference order and ordinal evaluation operators.* Soft Computing **10** (2006), s. 933–940.

[10] Bozóki, S., Fülöp, J., Rónyai, L.: *On optimal completion of incomplete pairwise comparison matrices.* Mathematical and Computer Modelling **52** (2010), s. 318–333.

[11] Brunelli, M.: *Introduction to the Analytic Hierarchy Process.* Springer, 2015.

[12] Brunelli, M., Fedrizzi, M., Giove, S.: *Reconstruction methods for incomplete fuzzy preference relations: a numerical comparison.* Lecture Notes in Computer Science **4578** (2007), s. 86–93.

[13] Crawford, G., Williams C.: *The Analysis of Subjective Judgment Matrices.* The Rand Corporation, California, 1985.

[14] Crawford, G., Williams C.: *A note on the analysis of subjective judgement matrices.* Journal of Mathematical Psychology **4/29** (1985), s. 25–40.

[15] De Baets, B., De Meyer, H., De Schuymer, B., Jenei, S.: *Cyclic evaluation of transitivity of reciprocal relations.* Social Choice and Welfare **2/26** (2006), s. 217–238.

[16] Dong, Y., Xu, Y., Li, H., Dai, M.: *A comparative study of the numerical scales and the prioritization methods in AHP.* European Journal of Operational Research **186** (2008), s. 229–242.

[17] Dubois, D., Prade, H.: *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications.* Mathematics in Science and Engineering, volume 144, Academic Press, 1980.

[18] Fedrizzi, M.: *On a consensus measure in a group MCDM problem.* Multiperson decision making models using fuzzy sets and possibility theory, J. Kacprzyk and M. Fedrizzi (eds.), Dortrecht: Kluwer Academic Publisher, 1990, s. 231–241.

[19] Fedrizzi, M., Brunelli, M.: *On the normalization of a priority vector associated with a reciprocal relation.* International Journal of General Systems **5/38** (2010), s. 579–586.

[20] Fedrizzi, M., Brunelli, M.: *On the priority vector associated with a reciprocal relation and a pairwise comparison matrix.* Soft Computing **6/14** (2010), s. 639–645.

[21] Fedrizzi, M. Giove, S.: *Incomplete PC and consistency optimization.* European Journal of Operational Research **1/183** (2007), s. 303–313.

[22] Fedrizzi, M., Giove, S.: *Optimal sequencing in incomplete PCs for large-dimensional problems.* International Journal of General Systems **4/44** (2013), s. 366–375.

[23] Gao, S., Zhang, Z., Cao C.: *Calculating Weights Methods in Complete Matrices and Incomplete Matrices.* Journal of Software **3/5** (2010), s. 304–311.

[24] Gong, Z.-W.: *Least-square method to priority of the fuzzy preference relations with incomplete information*. International Journal of Approximate Reasoning **47** (2008), s. 258–264 .

[25] Harker, P. T.: *Alternative modes of questioning in the analytic hierarchy process*. Mathematical Modelling **3-5/9** (1987a), s. 837–848.

[26] Harker, P. T.: *Incomplete PCs in the analytic hierarcy process*. Mathematical Modelling **11/9** (1987b), s. 837–848.

[27] Harker, P. T., Millet, I.: *Globally effective questioning in the analytic hierarchy process*. European Journal of Operational Research **48** (1990), s. 88–97.

[28] Herrera-Viedma, E., Herrera, F., Chiclana, F., Luque, M.: *Some issues on consistency of fuzzy preference relations*. European journal of operational research **1/154** (2004), s. 98–109.

[29] Herrera-Viedma, E., Chiclana, F., Herrera, F., Alonso, S.: *Group Decision-Making Model With Incomplete Fuzzy Preference Relations Based on Additive Consistency*. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics—part B: Cybernetics **1/37** (2007), s. 176–189.

[30] Chiclana, F., Herrera-Viedma, E.: *Consistency Properties for Preference Relations: T-additive and T-multiplicative transitivity*. IPMU 2004 Conference Proceedings, 2004, s. 403–410.

[31] Chiclana, F., Herrera-Viedma, E., Alonso, S., Herrera, F.: *Cardinal Consistency of Reciprocal Preference Relations: A Characterization of Multiplicative Transitivity*. IEEE Transactions on Fuzzy Systems **1/17** (2009), s. 14–23.

[32] Chobot, M., Turnovcová, A.: *Modely rozhodovania v konfliktných situáciách a za neurčitosti*. ALFA, Bratislava, 1980.

[33] Ji, P., Jiang., R.: *Scale Transitivity in the AHP*. The Journal of the Operational Research Society **8/54** (2003), s. 896–905.

[34] Krejčí, J., Pavlačka, O., Talašová, J.: *A fuzzy extension of Analytic Hierarchy Process based on the constrained fuzzy arithmetic*. Fuzzy Optimization and Decision Making **1/16** (2016), s. 1–22.

[35] Lamata, M. T., Pelaez, J. I.: *A method for improving the consistency of judgements*. Internation Journal of Uncertainty, Fuziness and Knowledge-Based Systems **6/10** (2002), s. 677–686.

[36] Orlovsky, S. A.: *Decision-making with a fuzzy preference relation*. Fuzzy Sets and Systems **3/1** (1978), s. 155–167.

[37] Ra, J. W.: *Chainwise paired comparisons.* Decision Sciences **2/30** (199), s. 581–599.

[38] Ramík, J.: *Analytický hierarchický proces (AHP) a jeho využití v malém a středním podnikání.* Slezská univerzita, Karviná, 2000.

[39] Ramík, J.: *Measuring transitivity of fuzzy pairwise comparison matrix.* MME 2012 Proceedings, Karviná, 2012, ISBN: 978-80-7248-779-0, s. 751–756.

[40] Ramík, J.: *Incomplete Pairwise Comparison Matrix and Its Application to Ranking of Alternatives.* Multiple Criteria Decision Making **8** (2013), s. 114–128.

[41] Saaty, T. L.: *A Scaling Method for Priorities in Hierarchical Structures.* Journal of Mathematical Psychology **3/15** (1977 ), s. 234–281.

[42] Saaty, T. L.: *Axiomatic Foundation of the Analytic Hierarchy Process.* Management Science **7/32** (1986), s. 841–855.

[43] Saaty, T. L.: *Decision making with the analytic hierarchy process.* International Journal of Services Sciences **1** (2008), s. 83–98.

[44] Saaty, T. L.: *How to make a decision: The Analytic Hierarchy Process.* European Journal of Operational Research **48** (1990), s. 9–26.

[45] Saaty, T. L.: *Fundamentals of Decision Making and Priority Theory With the Analytic Hierarchy Process.* RWS Publications, Pittsburgh, 2000.

[46] Salo, A. A., Hämäläinen, R.P.: *Preference programming through approximate ratio comparisons.* European Journal of Operational Research **82** (1995), s. 458–475.

[47] Sanchez, P. P., Soyer, R.: *Information concepts and pairwise comparison matrices.* Information Processing Letters **68** (1998), s. 185–188.

[48] Shiraishi, S., Obata, T.: *On a maximization problem arising from a positive reciprocal matrix in the AHP.* Bulletin of Informatics and Cybernetics **2/34** (2002), s. 91–96.

[49] Shiraishi, S., Obata, T., Daigo, M., Nakajima, N.: *Assessment for an incomplete comparison matrix and improvement of an inconsistent comparison: computational experiments* ISAHP, 1999.

[50] Srdjevic, B., Srdjevic, Z., Blagojevic, B.: *First-Level Transitivity Rule Method for Filling in Incomplete Pair-Wise Comparison Matrices in the Analytic Hierarchy Process.* Applied Mathematics & Information Sciences **2/8** (2014), s. 459–467.

[51] Stein, W. E., Mizzi,P. J.: *The harmonic consistency index for the analytic hierarchy process*. European Journal of Operational Research **1/177** (2007), s. 488–497.

[52] Tanino, T.: *Fuzzy preference orderings in group decision making*. Fuzzy Sets and Systems **12** (1984), s. 117–131.

[53] Tanino, T.: *Preference Relations in Group Decision Making*. Non-Conventional Preference Relations in Decision Making. Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[54] Wedley, W. C., Schoner, B., Tang, T. S.: *Starting rules for incomplete comparisons in the analytic hierarchy process* Mathematical and Computer Modelling **4–5/17** (1993), s. 93–100.

[55] Xu, Z. S.: *A procedure for decision making based on incomplete fuzzy preference relation*. Fuzzy Optimization and Decision Making **2/4** (2005), s. 175–189.

[56] Xu, Z. S.: *Goal programming models for obtaining the priority vector of incomplete fuzzy preference relation*. International Journal of Approximate Reasoning **36** (2004), s. 261–270.

# Životopis

## Osobní údaje

| | |
|---|---|
| Jméno a příjmení | **Mgr. Věra Jandová** |
| Adresa | Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky<br>Přírodovědecká fakulta, Univerzita Palackého v Olomouci<br>tř. 17. Listopadu 12, 771 46 Olomouc, Česká republika |
| E-mail | jandova-vera@seznam.cz |

## Vzdělání

| | |
|---|---|
| 2012 - 2017 | Doktorský obor Aplikovaná matematika<br>Disertační práce Metody hodnocení založené na maticích párového porovnání<br>Přírodovědecká fakulta, Univerzita Palackého v Olomouci |
| 2010 - 2012 | Magisterský obor Aplikace matematiky v ekonomii<br>Diplomová práce AHP – Její silné a slabé stránky<br>Přírodovědecká fakulta, Univerzita Palackého v Olomouci |
| 2007 - 2010 | Bakalářský obor Matematika a její aplikace<br>Bakalářská práce Konvergence číselných řad<br>Přírodovědecká fakulta, Univerzita Palackého v Olomouci |

## Výzkumné pobyty a stáže

| | |
|---|---|
| 03/2014 | Výzkumná stáž zaměřená na fuzzy míry a fuzzy integrály<br>Ústav pro výzkum a aplikace fuzzy modelování, Ostravská univerzita v Ostravě |
| 01/2013 – 06/2013 | Výzkumný pobyt zaměřený na metody vícekriteriálního hodnocení<br>Katedra ekonomie a managementu, Universita degli Studi di Trento, Trento, Italy |

## Zaměření výzkumu

| | |
|---|---|
| Oblast | Metody vícekriteriálního rozhodování a hodnocení<br>Konzistence matic párových srovnávání<br>Analytický hierarchický proces (AHP)<br>Hodnocení na absolutní škále: Metoda dílčích cílů založená na normované míře |

## Publikace

| | |
|---|---|
| přijato | Jandová, V., Krejčí, J., Stoklasa, J., Fedrizzi, M.: Computing interval weights for incomplete pairwise-comparison matrices of large dimension - a weak-consistency based approach, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, DOI 10.1109/TFUZZ.2016.2633364, přijatý článek. Impakt faktor 7,671, průměrný journal impakt factor percentil 97,050. |
| 2015 | Jandová, V., Talašová, J.: Evaluation of absolute type in the Partial Goals Method, MME 2015 Conference Proceedings, University of West Bohemia, Plzeň, 2015, ISBN 978-80-261-0539-8, s. 321-326. Dostupné na WOS. |
| 2014 | Jandová, V., Stoklasa, J., Talašová, J.: Modification of the AHP based model for evaluating artistic production of Czech college, MME 2014 Conference Proceedings, Olomouc, 2014, ISBN 978-80-244-4209-9, s. 372-378. Dostupné na WOS. |
| 2013 | Jandová, V., Talašová, J.: Weak Consistency: A New Approach to Consistency in *the Saaty's Analytic Hierarchy Process*, Acta Universitatis Palackianae Olomucensis. Facultas Rerum Naturalium. Mathematica, Vol. 52, No. 2, 2013, s. 71-83. |
| 2013 | Stoklasa J., Jandová V., Talašová J.: Weak consistency in Saaty's AHP - evaluating creative work outcomes of Czech Art Colleges, Neural Network World, Vol. 23, No. 1, 2013, s. 6-77. Impakt faktor 0,50. |
| 2012 | Krejčí, J., Jandová, V., Stoklasa, J. & Talašová, J.: *Bodové hodnocení knih*, výzkumná zpráva, Univerzita Palackého v Olomouci, Olomouc, 2012. |

## Mezinárodní konference

| | |
|---|---|
| MME 2015 | Jandová, V., Talašová, J.: Evaluation of absolute type in the Partial Goals Method, Mathematical Methods in Economics MME, Cheb, Czech Republic, 9.-11.9.2015. |
| EURO-INFORMS 2015 | Talašová, J., Jandová, V..: Evaluation of absolute type in the models of multiple criteria decision making, European Conference on Operational Research EURO-INFORMS, Glasgow, Scotland, 12.-15.7.2015. |
| ODAM 2015 | Jandová, V., Talašová, J.: The Partial Goals Method based on the measure of fulfillment of the goals. Olomoucian Days of Applied Mathematics ODAM, Olomouc, Czech Republic, 20.-22.5.2015. |

| | |
|---|---|
| ISCAMI 2015 | Jandová, V., Talašová, J.: Registry Evaluation as the degrese of fulfillment of the goal. International Student Conference on Applied Mathematics and Informatics ISCAMI, Kočovce, Slovak Republic, 23.-26.4.2015. |
| MME 2014 | Jandová, V., Stoklasa, J., Talašová, J.: Modification of the AHP based model for evaluating artistic production of Czech college. Mathematical Methods in Economics MME, Olomouc, Czech Republic, 10.-12.9.2014. |
| EURO-INFORMS 2014 | Talašová, J., Jandová, V., Stoklasa, J.: AHP model for the evaluation of creative work outcomes of art colleges. European Conference on Operational Research EURO-INFORMS, Barcelona, Spain, 13.-18.7.2014. |
| ISCAMI 2014 | Jandová, V., Stoklasa, J., Talašová, J.: Registry of Artistic Performances - AHP based evaluation model. International Student Conference on Applied Mathematics and Informatics ISCAMI, Malenovice, 27.-30.3.2014. |
| EURO-INFORMS 2013 | Talašová, J., Jandová, V., Stoklasa, J.: Achieving sufficient consistency of preferences in Saaty's matrix: model for evaluation of artistic production of art college. European Conference on Operational Research EURO-INFORMS, Rome, Italy, 1.-4.7.2013. |
| ODAM 2013 | Jandová, V., Talašová, J.: Weak Consistency: A New Approach to Consistency in the Saaty's Analytic Hierarchy Process. Olomoucian Days of Applied Mathematics ODAM, Olomouc, 12.-16.6.2013. |

## Worshopy a semináře

| | |
|---|---|
| 2012 | Seminář Fuzzy modely a jejich aplikace, PřF UP, 23.11.2012<br>příspěvek Metody vícekriteriálního rozhodování založené na párovém srovnání |
| 2012 | Workshop Matematické modely a struktury, Malá Morávka 13.10.2012<br>příspěvek Metody vícekriteriálního rozhodování založené na párovém srovnání |