Univerzita Palackého v Olomouci
Přírodovědecká fakulta
Katedra experimentální fyziky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Sbírka řešených úloh z mechaniky podle Bloomovy taxonomie I.

Autor:	Bc. Jan Zehnal
Studijní program:	N1701 Fyzika
Studijní obor:	7504T055 Učitelství fyziky pro střední školy
Forma studia:	Prezenční
Vedoucí práce:	RNDr. Čeněk Kodejška, Ph.D.
Termín odevzdání práce:	srpen 2019

Prohlašuji, že jsem předloženou diplomovou práci vypracoval(a) samostatně pod vedením RNDr. Čeňka Kodejšky, Ph.D. a že jsem použil zdrojů, které cituji a uvádím v seznamu použitých pramenů.

V Olomouci dne 8. 8. 2019 ...…………………………......

Bibliografická identifikace:

Jméno a příjmení autora	Bc. Jan Zehnal
Název práce	Sbírka řešených úloh z mechaniky podle Bloomovy taxonomie I.
Typ práce	Diplomová
Pracoviště	Katedra experimentální fyziky
Vedoucí práce	RNDr. Čeněk Kodejška, Ph.D.
Rok obhajoby práce	2019
Abstrakt	Cílem této diplomové práce je vytvořit sbírku řešených úloh z mechaniky podle Bloomovy taxonomie, která svým obsahem odpovídá kapitolám učebnice Fyzika pro gymnázia – Mechanika. Konkrétně sbírka pokrývá kapitoly Kinematika hmotného bodu, dynamika hmotného bodu, mechanické energie a práce, gravitační pole a mechanika tuhého tělesa. Ke zvoleným podkapitolám z těchto pěti kapitol jsou v práci vyhotoveny tři řešené příklady stupňující se úrovně.
Klíčová slova	sbírka řešených příkladů, fyzika, mechanika, kinematika hmotného bodu, dynamika hmotného bodu, mechanická energie a práce, gravitační pole, mechanika tuhého tělesa, Bloomova taxonomie
Počet stran	116
Počet příloh	0
Jazyk	Český

Bibliographical identification:

Autor’s first name and surname	Bc. Jan Zehnal
Title	Collection of solved problems from mechanics according to Bloom's taxonomy I.
Type of thesis	Master
Department	Department of Experimental Physics
Supervisor	RNDr. Čeněk Kodejška, Ph.D.
The year of presentation	2019
Abstract	The aim of this thesis is to create a collection of solved problems in mechanics according to Bloom’s taxonomy, which corresponds to chapters in textbook Physics for high school – Mechanics. Specifically, this collection covers chapters Kinematics of point mass, dynamics of point mass, mechanical energy and work, gravitational field and mechanics of rigid body. There are three solved problems of escalating difficulty for chosen subchapters from these five chapters in this thesis.
Keywords	Collection of solved problems, physics, classical mechanics, kinematics of point mass, dynamics of point mass, mechanical energy and work, mechanics of rigid body, Bloom’s taxonomy
Number of pages	116
Number of appendices	0
Language	Czech

Poděkování:

Děkuji vedoucímu bakalářské práce, RNDr. Čeňku Kodejškovi, PhD. za cenné rady a vedení při zpracovávání této práce.

Obsah

Úvod

Hlavním cílem této diplomové práce bylo vytvoření sbírky řešených úloh odpovídající kapitolám v učebnici Fyzika pro gymnázia – Mechanika (BEDNAŘÍK, 2009) (dále jen *učebnice*) podle Bloomovy taxonomie. Konkrétně se jedná o kapitoly Kinematika hmotného bodu, dynamika hmotného bodu, mechanická energie a práce, gravitační pole a mechanika tuhého tělesa. Témata příkladů by navíc měly propojovat svět 21. století a běžné životní situace s fyzikou.

Teoretickou část práce tvoří krátké shrnutí teorie o Bloomově taxonomii a přehled sbírek řešených i neřešených úloh z mechaniky převážně pro střední školy a gymnázia, ale také sbírek z mechaniky pro základní školy, popř. pro pedagogické fakulty.

Praktickou část práce tvoří vytvořená sbírka příkladů. Z každé z těchto vybraných pěti kapitol byly zvoleny podkapitoly, ke kterým bylo možné vypracovat početní příklady. Jedná se o třicet podkapitol, přičemž ke každé z nich byly vypracovány tři příklady, které mají postupně rostoucí náročností podle Bloomovy taxonomie. Navíc ke každé hlavní kapitole byl vypracován jeden další příklad, který má největší obtížnost a shrnuje poznatky celé kapitoly. Celkem tedy sbírku tvoří 95 řešených úloh.

1 Teoretická část

1.1 Taxonomie výukových cílů a učebních úloh

1.1.1 Bloomova taxonomie kognitivních cílů

Bloomova taxonomie umožňuje formulovat požadavky na žáka v různých myšlenkových úrovních. Za pomoci aktivních sloves jsou formulovány očekávané výstupy a učební úlohy s požadavky na výkon žáka. Taxonomie rozděluje jednotlivé požadavky na žáka od nejnižších kognitivních cílů až po ty nejvyšší, přičemž vyšší úrovně v sobě vždy zahrnují ty nižší. V roce 2001 došlo k revizi původní Bloomovy taxonomie. Kognitivní cíle jsou v ni hierarchicky uspořádány do těchto kategorií:

Kognitivní úroveň I

1. Zapamatování (znovupoznání, vybavování)

- *identifikovat*
- *vyvolávat z paměti*
- *definovat*
- *doplnit*
- *popsat*
- *pojmenovat*
- *přiřadit*
- *reprodukovat*
- *určit*

2. Porozumění (interpretování, dokládání příkladem, klasifikování, srovnávání atd.)

- *interpretovat*
- *vyjádřit vlastními slovy*
- *vysvětlit*
- *vypočítat*
- *zkontrolovat*
- *dokázat*

3. Aplikace *(používání postupů implementování, využívání v nových situacích)*

- *aplikovat*
- *demonstrovat*
- *navrhnout*

- *použít*
- *prokázat*
- *uspořádat*

Kognitivní úroveň II

4. Analýza (rozlišování, strukturování, přisuzování)

- *provést rozbor*
- *analyzovat*
- *rozlišit*
- *rozčlenit*
- *specifikovat*
- *vymezit stanoviska*

5. Hodnotící posouzení (ověřování, posuzování)

- *argumentovat*
- *obhájit*
- *ocenit*
- *oponovat*
- *porovnat*
- *provést kritiku*
- *posoudit*
- *prověřit*
- *srovnat s normou*
- *zdůvodnit*

6. Tvoření (generování, plánování, vytváření)

- *organizovat prvky do nových struktur a modelů*
- *formulování hypotéz*
- *navrhování projektů*
- *konstruování*
- *vytváření originálních děl*
- *navrhování postupů pro řešení problémů*
- *použít*

(Kosíková, 2011)

1.1.2 Taxonomie učebních úloh D. Tollingerové

Adaptací Bloomovy taxonomie v oblasti učebních úloh je taxonomie podle D. Tollingerové. Ta rozdělila a uspořádala učební úlohy do těchto pěti kategorií a jejich podkategorií, které mají opět rostoucí úrovně obtížnosti:

1. Úlohy vyžadující pamětní reprodukci poznatků

1.1 Na znovupoznání

1.2 Na reprodukci jednotlivých faktů, čísel apod.)

1.3 Na reprodukci definic, norem, pravidel

1.4 Na reprodukci velkých celků, básní, textů apod.)

2. Úlohy vyžadující jednoduché myšlenkové operace

2.1 Na zjišťování faktů (měření, jednoduché výpočty)

2.2 Na vyjmenování a popis faktů (výčet, soupis apod.)

2.3 Na vyjmenování a popis procesů a způsobů činností

2.4 Na rozbor a skladbu (analýzu a syntézu)

2.5 Na porovnávání a rozlišování (komparace a diskriminace)

2.6 Na třídění (kategorizace a klasifikace)

2.7 Na zjišťování vztahů mezi fakty (příčina, následek, cíl, prostředek, vliv, funkce, užitek, nástroj, způsob apod.)

2.8 Na abstrakci, konkretizaci a zobecňování

2.9 Na řešení jednoduchých příkladů (s neznámými veličinami)

3. Úlohy vyžadující složité myšlenkové operace s poznatky

3.1 Na překlad (translaci, transformaci)

3.2 Na výklad (interpretaci), vysvětlení smyslu, vysvětlení významu, zdůvodnění apod.

3.3 Na vyvozování (indukci)

3.4 Na odvozování (dedukci)

3.5 Na dokazování a ověřování (verifikaci)

3.6 Na hodnocení

4. Úlohy vyžadující sdělení poznatků

4.1 Na vypracování překladu, výtahu, obsahu apod.

4.2 Na vypracování zprávy, pojednání, referátu apod.

4.3 Na samostatné písemné práce, výkresy, projekty apod.

5. Úlohy vyžadující tvořivé myšlení

5.1 Na praktickou aplikaci

5.2 Na řešení problémových situací

5.3 Na kladení otázek a formulace úloh

5.4 Na objevování na základě vlastního pozorování

5.5 Na objevování na základě vlastních úvah

(KALHOUS, 2002)

1.2 Přehled sbírek úloh z mechaniky

1.2.1 Online sbírky

Počet online sbírek úloh z fyziky v dnešní době a jejich výhodou je bezpochyby bezplatný přístup a pohodlná dostupnost. Mezi ty nejpoužívanější české sbírky patří reseneulohy.cz. Příklady jsou vytvářeny studenty MFF UK pod vedením zaměstnanců KDF MFF. Sbírku tvoří přes tisíc řešených úloh různé úrovně obtížnosti nejen z mechaniky. Příklady z mechaniky jsou rozděleny do kapitol a podkapitol, které vesměs odpovídají podkapitolám v *učebnici* a rovněž mají jakousi rostoucí tendenci obtížnosti. Avšak nejsou uspořádány podle žádné taxonomie. (KÁCOVSKÝ a SNĚTINOVÁ, 2006)

Další online sbírkou je doména priklady.eu. Tuto sbírku vytvořil bývalý učitel fyziky Ing. Roman Hesteric. V této sbírce jsou úlohy z mechaniky jsou rozděleny do kapitol nikoliv však už podkapitol, které by odpovídaly podkapitolám v učebnici Fyzika pro gymnázia – Mechanika. Ani v této sbírce nejsou příklady uspořádány podle žádné taxonomie. (HESTERIC, 2008)

1.2.2 Tištěné sbírky

I v dnešní době je stále většina sbírek z fyziky v knižní formě. Naprostou většinu z nich bohužel tvoří sbírky neřešených úloh nebo sbírky s převážnou většinou neřešených úloh. Příkladem řešených sbírek je *Sbírka řešených úloh z fyziky I* (BARTUŠKA, 1997) a *500 riešených úloh z fyziky* (KALUŽAY, 1973).

Mezi sbírky, ve kterých je většina příkladů neřešených patří *Sbírka úloh pro SŠ* (LEPIL, 1995), *Fyzikální úlohy pro SŠ* (ŽÁK, 2011), *Sbírka úloh pro SOŠ a SOU* (MIKLASOVÁ, 1999), *Sbírka úloh z fyziky pro žáky SŠ* (KRUŽÍK, 1969) a *Sbírka úloh z fyziky pro gymnázia 1. díl* (TOMANOVÁ, 1988).

Příkladem sbírky s pouze neřešenými úlohami je *Sbírka úloh z fyziky kolem nás pro SŠ* (NAHODIL, 2011).

Obecně se dá říci, že novější sbírky svým členěním odpovídají korespondují s *učebnicí,* avšak příklady nebývají většinou seřazeny podle náročnosti a v žádné z těchto sbírek nejsou příklady řazeny a značeny podle taxonomie Blooma resp. Tollingerové. Starší sbírky se strukturou kapitol shodují s učebnicí podstatně méně, úlohy jsou obecně náročnější a taktéž nebývají řazeny podle obtížnosti či přímo taxonomie Blooma resp. Tollingerové.

Mezi sbírky úloh z fyziky pro ZŠ patří například *Úlohy z fyziky pro ZŠ 1. část* (ŠEDIVÝ 1996), *Sbírka úloh z fyziky pro ZŠ 1. díl* (BOHUNĚK, 1992) a *Sbírka úloh z fyziky pro 6. – 9. ročník ZŠ* (JÁCHIM, 2004). Jedná se o neřešené sbírky úloh z mechaniky, které se svým obsahem příliš neliší od obsahů sbírek pro SŠ a rovněž ani svým řazením neodpovídají taxonomii Blooma resp. Tollingerové.

Sbírka úloh z fyziky pro pedagogické fakulty (ZEMAN, 1971) se tematicky shoduje vesměs shoduje s učivem v *učebnici*, avšak vzhledem k tomu, že se jedná o sbírku pro VŠ se i v kapitole mechanika vyskytují poznatky z jiných odvětví fyziky, a navíc se jedná o starší sbírku a příklady jsou tedy obecně náročnější.

Sbírka testových úloh k maturitě z fyziky (LEPIL, 2001) je pravděpodobně jedinou, u které by se dalo hovořit o stupňování úloh podle Bloomovy taxonomie, i když příklady nejsou takto vyloženě značeny. Jedná se však o sbírku neřešených příkladů.

2 Sbírka řešených úloh z mechaniky

Seznam hodnot potřebných k příkladům

Normální tíhové zrychlení	$g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$
Hmotnost Země	$M_Z = 6 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$
Poloměr Země	$R_Z = 6\,378\ \mathrm{km}$
Hmotnost Měsíce	$M_M = 7{,}3 \cdot 10^{22}\ \mathrm{kg}$
Poloměr Měsíce	$R_M = 1\,740\ \mathrm{km}$
Hmotnost Slunce	$M_S = 2 \cdot 10^{30}\ \mathrm{kg}$
Poloměr Slunce	$R_S = 7 \cdot 10^{5}\ \mathrm{km}$
Vzdálenost Země od Slunce	$1\ \mathrm{AU} \doteq 1{,}5 \cdot 10^{11}\ \mathrm{m}$
Vzdálenost Měsíce od Země	$384\,000\ \mathrm{km}$
Gravitační konstanta	$\chi = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}}$
Rychlost světla	$c \doteq 300\,000\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$
Hustota vody	$\rho = 997\ \mathrm{kg} \cdot m^{-3}$

Kinematika hmotného bodu

1.1 Rychlost hmotného bodu a rovnoměrný pohyb

1.1.1

Franta šel na tramvajovou zastávku, aby se dostal včas do školy. Tramvaj mu však ujela přímo před nosem. Franta ví, že další zastávka je 800 m dál a odhadl, že průměrná rychlost tramvaje je 40 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$. Dokáže doběhnout na další zastávku a stihnout nastoupit? (Světový rekord na 800 metrů drží David Lekuta Rudiša a má hodnotu 1 min 40,91 s)

Řešení

$$\boxed{\begin{aligned} &s = 800\ \mathrm{m} \\ &v_p = 40\ \mathrm{km \cdot h^{-1}} \doteq 11{,}1\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \\ &t = ?\ [\mathrm{s}] \end{aligned}}$$

Známe-li průměrnou rychlost a dráhu, spočítáme dobu pohybu jako:

$$t = \frac{s}{v_p}$$

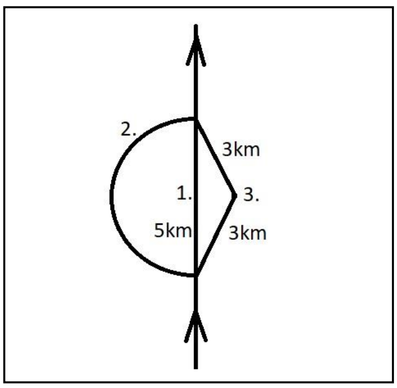
Po dosazení:

$$t = \frac{800}{11{,}1}\ \mathrm{s} \doteq 72\ \mathrm{s}$$

Tramvaj dojede na další zastávku za 1 minutu a 12 vteřin. I světový rekordman by musel doufat, že na něj bude tramvaj na další zastávce čekat 29 sekund. Franta si tedy bude muset počkat na další tramvaj.

1.1.2

Pavel je velký spáč, proto udělá cokoliv proto, aby mohl vstávat co nejpozději. Na mapě si zjistil, že cestou do školy má na jedné z křižovatek tři možné trasy (viz obrázek č. 1).



Obr. č 1

První možností je projet křižovatkou rovně, kde je maximální povolená rychlost 50 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

Druhá možnost je odbočit vlevo na cestu ve tvaru půlkružnice o poloměru 5 km s maximální povolenou rychlostí 80 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

Třetí možností je odbočit vpravo, kde trasu tvoří strany rovnoramenného trojúhelníku s maximální povolenou rychlostí 70 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

Kterou trasu by si měl Pavel vybrat a kolik času může ušetřit (doposud jezdil trasou číslo 2)? Berte na vědomí, že Pavel nechce riskovat, a proto nebude překračovat maximální povolenou rychlost.

Řešení

$$\boxed{\begin{array}{l} Trasa 1 \\ s_1 = 5\ km = 5\,000\ m \\ v_{\max 1} = 50\ \mathrm{km \cdot h^{-1}} \doteq 13{,}89\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \\ t_1 = ?\,[\mathrm{s}] \end{array}}$$

Trasa č. 1 je úsečka, takže dobu pohybu spočítáme jednoduše jako:

$$t_1 = \frac{s_1}{v_{\max 1}}$$

Dosazení:

$$t_1 = \frac{5\,000}{13{,}89}\ \mathrm{s} \doteq 360\ \mathrm{s}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} Trasa 2 \\ r = 5\ \mathrm{km} = 5\,000\ \mathrm{m} \\ v_{\max 2} = 80\ \mathrm{km \cdot h^{-1}} \doteq 22{,}22\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \\ t_2 = ?\,[\mathrm{s}] \end{array}}$$

Obvod půlkruhu spočítáme jako:

$$s_2 = \pi \cdot r$$

Pro dobu pohybu po této trase se potom platí:

$$t_2 = \frac{s_2}{v_{\max 2}} = \frac{\pi \cdot r}{v_{\max 2}}$$

Dosazení:

$$t_2 = \frac{3{,}14 \cdot 5\,000}{22{,}22}\ \mathrm{s} \doteq 707\ \mathrm{s}$$

$Trasa 3$
$l = 6 \text{ km} = 6\,000 \text{ m}$
$v_{\max 3} = 70 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1} \doteq 19,44 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$
$t_3 = ?\,[s]$

Dráha pohybu je dvojnásobku délky ramena, jelikož je trojúhelník rovnoramenný:

$$s_3 = 2l$$

Pro dobu potom platí:

$$t_3 = \frac{s_3}{v_{\max 3}} = \frac{2l}{v_{\max 3}}$$

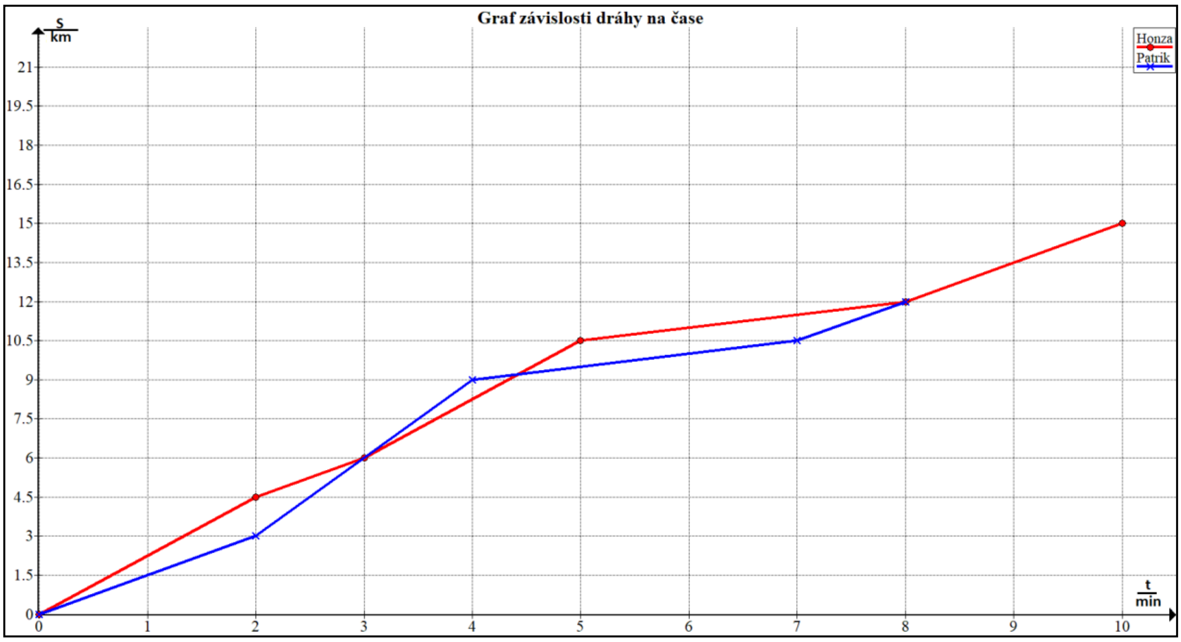
Dosazení:

$$t_3 = \frac{2\cdot 3\,000}{19,44}\text{ s} \doteq 309 \text{ s}$$

Pavel by si měl vybrat trasu č. 3, ušetří tím však pouze 51 s.

1.1.3

Při zkoumání automobilového závodu Patrika a Honzy byly využity grafy drah automobilů v závislosti na čase (viz obrázek). Ze záznamu také víme, že Patrikovi došel po 12 km závodu benzín.



Obr. č. 2

a) Z grafu vyčtěte minimální, průměrnou a maximální rychlosti obou automobilů.

b) Kdyby Patrikovi nedošel benzín, o kolik by se změnila ujetá vzdálenost (dokreslete do grafu), pokud by v závodu pokračoval svou i) minimální,
ii) průměrnou
iii) maximální rychlostí

Řešení

a)

Průměrná rychlost za celý závod je jednoduše:

$$v_p = \frac{s}{t}$$

Jelikož jsou grafy (lomené čáry) tvořeny úsečkami, můžeme pomocí jednoduché úvahy přijít na to, že rychlost bude minimální při nejmenším sklonu úsečky, která je částí grafu a maximální rychlost bude značena úsečkou, která má největší sklon. Jednotlivé rychlosti potom spočítáme jako:

$$v_{\text{min/max}} = \frac{s}{t}$$

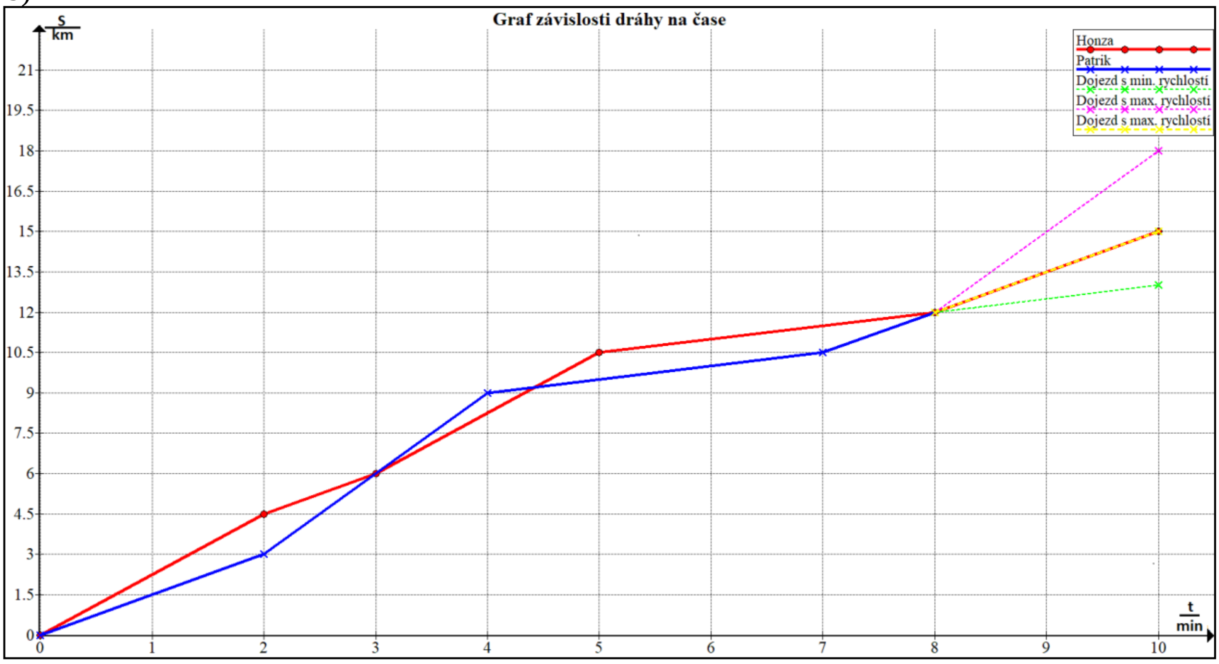
Honza:

$$v_{\min} = 30\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$$
$$v_{\max} = 135\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$$
$$v_p = 90\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$$

Patrik:

$$v_{\min} = 30\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$$
$$v_{\max} = 180\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$$
$$v_p = 90\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1}$$

b)



Obr. č. 3

Prodloužení trasy, kdyby Patrikovi nedošel benzín:

Kdyby dále pokračoval minimální rychlostí: $s_{\mathrm{min}} = 1\ \mathrm{km}$

Kdyby dále pokračoval maximální rychlostí: $s_{\mathrm{max}} = 6\ \mathrm{km}$

Kdyby dále pokračoval průměrnou rychlostí: $s_{\mathrm{p}} = 3\ \mathrm{km}$

1.2.1

Spočítejte, jaké by bylo zrychlení tohoto automobilu Bugatti Veyron, které zrychlí z rychlosti $0\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$ na $100\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$ za 2,2 s, pokud by (zrychlení) bylo konstantní.

Řešení

$$\boxed{\begin{array}{l} v = 100\ \mathrm{km \cdot h^{-1}} \doteq 27{,}78\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \\ t = 2{,}2\ \mathrm{s} \\ a = ?\left[\mathrm{m \cdot s^{-2}}\right] \end{array}}$$

Zrychlení spočítáme ze vztahu:

$$a = \frac{v}{t}$$

Pro hodnoty ze zadání:

$$a = \frac{27,78}{2,2}\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} \doteq 12,6\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

Pokud by bylo zrychlení rovnoměrné, mělo by hodnotu 12,6 $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

1.2 Rovnoměrně zrychlený pohyb

1.2.2

Spočítejte, jaké je zrychlení auta z přecházejícího příkladu (1.2.1), jestliže dokáže zrychlit z rychlosti 100 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$ na 200 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$ za 4,5 s. Zrychlení opěr považujte za konstantní.

Řešení

$v = 200\ \mathrm{km \cdot h^{-1}} \doteq 55,56\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$
$v_0 = 100\ \mathrm{km \cdot h^{-1}} \doteq 27,78\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$
$t = 4,5\ \mathrm{s}$
$a = ?\ \left[\mathrm{m \cdot s^{-2}}\right]$

Pro okamžitou rychlost rovnoměrně zrychleného pohybu s nenulovou počáteční rychlostí platí:

$$v = v_0 + a \cdot t$$

Z tohoto vztahu si vyjádříme zrychlení:

$$a = \frac{v - v_0}{t}$$

Pro zadané hodnoty:

$$a = \frac{55,56 - 27,78}{4,5}\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} \doteq 6,2\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

Pokud by bylo zrychlení konstantní, mělo by hodnotu 6,2 $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

1.2.3

Z výsledků dvou předchozích příkladů je zřejmé, že velikost zrychlení u automobilu je závislá na okamžité rychlosti. Zkuste vypočítat dobu za jak dlouho by auto zrychlilo z 0 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$ na 100 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$ a za jak dlouho by zrychlilo ze 100 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$ na 200 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$, pokud bychom věděli pouze to, že z 0 $\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$ zrychlí na 200 $\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$ za 6,7 s (součet obou časů z předcházejících příkladů). Zrychlení berte jako konstantní po celou dobu pohybu.

Řešení

$$\boxed{\begin{array}{l} v_{0_1} = 0\ \mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1} = 0\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1} \\ v_1 = 200\ \mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1} \doteq 55{,}56\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1} \\ t_1 = 6{,}7\ \mathrm{s} \\ v_{0_2} = 0\ \mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1} = 0\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1} \\ v_2 = 100\ \mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1} \doteq 27{,}78\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1} \\ v_{0_3} = 100\ \mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1} \doteq 27{,}78\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1} \\ v_3 = 200\ \mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1} \doteq 55{,}56\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1} \\ t_2 = ?\ [\mathrm{s}] \\ t_3 = ?\ [\mathrm{s}] \end{array}}$$

Pro dané pohyby si sepíšeme následující rovnice:

$v_1 = v_{0_1} + a\cdot t_1$ (popisuje zrychlení z 0 na 200 $\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$ - to co známe)

$v_2 = v_{0_2} + a\cdot t_2$ (popisuje zrychlení z 0 na 100 $\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$)

$v_2 = v_{0_3} + a\cdot t_3$ (popisuje zrychlení ze 100 na 200 $\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$)

Z prvního vztahu si vyjádříme zrychlení:

$$a = \frac{v_1 - v_{0_1}}{t_1}$$

Ze vztahů pro rychlosti $v_2$resp. $v_3$si vyjádřímy doby $t_2$resp t_3a poté dosadíme již vyjádřené zrychlení:

$$t_2 = \frac{v_2 - v_{0_2}}{a} = \frac{(v_2 - v_{0_2})\cdot t_1}{v_1 - v_{0_1}} \qquad \textit{resp.} \qquad t_3 = \frac{v_3 - v_{0_3}}{a} = \frac{(v_3 - v_{0_3})\cdot t_1}{v_1 - v_{0_1}}$$

Pro hodnoty ze zadání:

$$t_2 = \frac{(27{,}78 - 0)\cdot 6{,}7}{55{,}56}\ \mathrm{s} = 3{,}35\ \mathrm{s} \qquad \textit{resp.} \qquad t_2 = \frac{(55{,}56 - 27{,}78)\cdot 6{,}7}{55{,}56}\ \mathrm{s} = 3{,}35\ \mathrm{s}$$

V případě rovnoměrného zrychlení by auto zvládlo zrychlit z 0 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$ na 100 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$ za 3,35 s a ze 100 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$ na 200 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$ rovněž za 3,35 s.

K výsledku ale vede i daleko jednodušší postup. Stačí si uvědomit, že podle zadání je zrychlení po celou dobu konstantní a změna rychlosti je v obou případech stejná (100 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$) tudíž oba časy musí být stejné a zároveň dát v součtu ony 6,7 s.

1.3 Dráha rovnoměrně zrychleného pohybu

1.3.1

Jak už víme, Bugatti Veyron dosáhne rychlosti 200 $\mathrm{km \cdot hod^{-1}}$ za 6,7 s. Jakou dráhu by auto urazilo, než by této rychlosti dosáhlo, za předpokladu, že by zrychlování bylo po celou dobu pohybu konstantní?

Řešení

$$\boxed{\begin{aligned} &v = 200\ \mathrm{km \cdot h^{-1}} \doteq 55{,}56\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \\ &t = 6{,}7\ \mathrm{s} \\ &s = ?\ [\mathrm{m}] \end{aligned}}$$

Pro dráhu rovnoměrně zrychleného pohybu platí:

$$s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2,$$

kde zrychlení rovnoměrně zrychleného pohybu je:

$$a = \frac{v}{t}$$

Dosazením vztahu pro zrychlení do vztahu pro dráhu dostaneme:

$$s = \frac{1}{2} \cdot \frac{v}{t} \cdot t^2 = \frac{v \cdot t}{2}$$

Číselně:

$$s = \frac{55{,}56 \cdot 6{,}7}{2}\ \mathrm{m} \doteq 186\ \mathrm{m}$$

Auto by urazilo dráhu 186 m.

1.3.2

V příkladu 1.3.1 jsme vypočítali dráhu za předpokladu, že zrychlení je po celou dobu rovnoměrné. Nyní spočítejte dráhu s_1 za předpokladu, že auto zrychluje rovnoměrně z 0 na 100 $\mathrm{km \cdot hod^{-1}}$ za 2,2 s, a dráhu s_2, jestliže poté se velikost zrychlení změní a auto opět rovnoměrně zrychluje ze 100 na 200 $\mathrm{km \cdot hod^{-1}}$ za 4,5 s. Nakonec určete dráhu s celého pohybu a porovnejte hodnotu s výsledkem příkladu 1.3.1.

Řešení

$$v_{0_1} = 0\ \mathrm{km \cdot h^{-1}} = 0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$
$$v_1 = 100\ \mathrm{km \cdot h^{-1}} \doteq 27,78\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$
$$v_{0_2} = 100\ \mathrm{km \cdot h^{-1}} \doteq 27,78\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$
$$v_2 = 200\ \mathrm{km \cdot h^{-1}} \doteq 55,56\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$
$$t_1 = 2,2\ \mathrm{s}$$
$$t_1 = 4,5\ \mathrm{s}$$
$$s_1 = ?\,[m]$$
$$s_2 = ?\,[m]$$
$$s = ?\,[m]$$

Jelikož auto začne zrychlovat z klidu, platí pro zrychlení v první části pohybu:

$$a_1 = \frac{v_1}{t_1}$$

Do následujícího vztahu pro první část dráhy rovnoměrně zrychleného pohybu můžeme rovnou dosadit předchozí vztah:

$$s_1 = \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot t_1^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{v_1}{t_1} \cdot t_1^2 = \frac{v_1 \cdot t_1}{2}$$

Analogicky pro druhou část pohybu $($s tím rozdílem, že auto nezačíná zrychlovat z klidu$)$:

$$a_2 = \frac{v_2 - v_{0_2}}{t_2}$$

$$s_2 = v_{0_2} \cdot t_2 + \frac{1}{2} \cdot a_2 \cdot t_2^2 = v_{0_2} \cdot t_2 + \frac{1}{2} \cdot (v_2 - v_{0_2}) \cdot t_2$$

Pro zadané hodnoty dostáváme:

$$s_1 = \frac{27,78 \cdot 2,2}{2}\ \mathrm{m} \doteq 30,6\ \mathrm{m}$$

$$s_2 = 27,78 \cdot 4,5 + \frac{1}{2} \cdot (55,56 - 27,78) \cdot 4,5\ \mathrm{m} \doteq 187,5\ \mathrm{m}$$

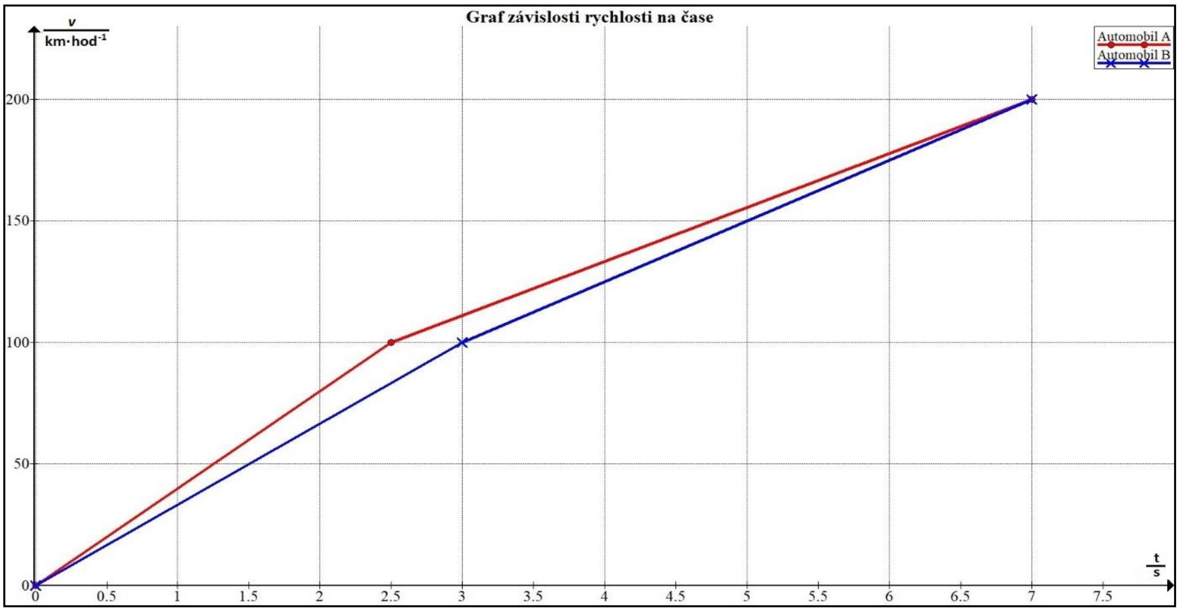
A tedy:

$$s = s_1 + s_2 = 30,6 + 187,5\ \mathrm{m} = 218\ \mathrm{m}$$

Auto nyní při zrychlení z 0 na 200 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$ urazí celkovou dráhu 218 m, což je o 32 m více, než kdyby zrychlení mělo po celou dobu pohybu stejnou hodnotu.

1.3.3

Na obrázku č. 4 máme grafy závislostí rychlostí na čase pro dvě auta, která spolu závodila. Na základě hodnot vyznačených v grafu rozhodněte, které z aut ujede za 7 s větší vzdálenost. Dokážete rozhodnout, které z aut by vyhrálo závod na 150 m?



Obr. č. 4

(Hodnoty týkající se automobilu A označíme indexem A a automobilu B indexem B.)

Řešení

$t_{1_A} = 2,5\ \mathrm{s}$

$t_{2_A} = 4,5\ \mathrm{s}$

$t_{1_B} = 3\ \mathrm{s}$

$t_{2_B} = 4\ \mathrm{s}$

$v_0 = 0\ \mathrm{km \cdot h^{-1}} = 0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$

$v_1 = 100\ \mathrm{km \cdot h^{-1}} \doteq 27,78\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$

$v_2 = 200\ \mathrm{km \cdot h^{-1}} \doteq 55,56\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$

$s_A = ?\,[m]$

$s_B = ?\,[m]$

Obecně pro zrychlení platí:

$$a = \frac{v - v_0}{t}$$

A po dosazení do vztahu pro dráhu dostaneme:

$$s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \frac{v - v_0}{t} \cdot t^2 = \frac{(v + v_0) \cdot t}{2}$$

Konkrétně pohyby A platí:

$$s_{1_A} = \frac{(v_1 + v_0) \cdot t_{1_A}}{2}$$

$$s_{2_A} = \frac{(v_2 + v_1) \cdot t_{2_A}}{2}$$

$$s_A = s_{1_A} + s_{2_A} = \frac{(v_1 + v_0) \cdot t_{1_A} + (v_2 + v_1) \cdot t_{2_A}}{2}$$

Pro pohyb B platí:

$$s_{1_B} = \frac{(v_1 + v_0) \cdot t_{1_B}}{2}$$

$$s_{2_B} = \frac{(v_2 + v_1) \cdot t_{2_B}}{2}$$

$$s_B = s_{1_B} + s_{2_B} = \frac{(v_1 + v_0) \cdot t_{1_B} + (v_2 + v_1) \cdot t_{2_B}}{2}$$

A po dosazení zadaných hodnot:

$$s_A = \frac{(27,78+0)\cdot 2,5 + (55,56+27,78)\cdot 4,5}{2}\ \mathrm{m} \doteq 222,2\ \mathrm{m}$$

$$s_B = \frac{(27,78+0)\cdot 3 + (55,56+27,78)\cdot 4}{2}\ \mathrm{m} \doteq 208,4\ \mathrm{m}$$

Automobil A ujel za 7 s trasu delší o 13,8 m.

(Po jednoduché úvaze můžeme usoudit, že by vyhrál automobil A. Za první 3 s urazil delší vzdálenost a v každém čase byla jeho okamžitá rychlost větší než rychlost automobilu B, což znamená, že automobil B ho nemohl nikdy předjet.)

1.4 Volný pád

1.4.1

Lucka byla pověřena koupit lano k nově vyhloubené studně na chatě. Bohužel ale neví jak je studna hluboká a nemá dostatečně dlouhý metr. Tak ji napadlo, že by mohla do studni hodit kámen a pomocí stopek na mobilu určit, jak dlouho bude padat. Po několika pokusech určila, že kámen padá 2 s. Jak hluboká je studna?

Řešení

$$\boxed{\begin{array}{l} t = 2\ \mathrm{s} \\ h = ?\,[\mathrm{m}] \end{array}}$$

Kámen se pohybuje volným pádem, takže pro hloubku studny platí:

$$h = \frac{1}{2}\cdot a\ \cdot t^2$$

Číselně:

$$h = \frac{1}{2}\cdot 9,81\cdot 2^2\ \mathrm{m} = 19,62\ \mathrm{m}$$

Studna je hluboká necelých 20 m.

1.4.2

Při crashtestech automobilů se měří deformační účinky nárazu automobilů na pevnou překážkou. Na základě těchto měření se auta vybavují bezpečnostními prvky. Pro představu vypočítejte výšku, ze které by muselo auto spadnout, aby velikost nárazu odpovídala nárazu automobilu do pevné překážky při rychlosti 50 $\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$.

Řešení

$$\boxed{\begin{array}{l} v = 50\ \mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1} \doteq 13{,}89\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1} \\ h = ?\,[\mathrm{m}] \end{array}}$$

Pro rychlost při dopadu tělesa padajícího volným pádem platí:

$$v = \sqrt{2\cdot g\cdot h}$$

Z tohoto vztahu si vyjádříme výšku, ze které těleso padá:

$$h = \frac{v^2}{2\cdot g}$$

Pro zadané hodnoty:

$$h = \frac{13{,}89^2}{2\cdot 9{,}81}\ \mathrm{m} \doteq 9{,}83\ \mathrm{m}$$

Velikost nárazu při rychlosti 50 $\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$ odpovídá pádu z výšky 9,83 m.

1.4.3

Aroldis Chapman, baseballový nadhazovač, drží rekord v rychlosti nadhozu 105 mph (mil za hodinu). Vypočtěte, do jaké výšky by Aroldis dohodil, jestliže by se mu podařilo hodit míček stejnou rychlostí svisle vzhůru.

Řešení

$$\boxed{\begin{array}{l} v_0 = 105\ \mathrm{mph} \doteq 169\ \mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1} \doteq 46{,}94\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1} \\ h = ?\,[\mathrm{m}] \end{array}}$$

V okamžiku, kdy se míček nachází v maximální výšce je jeho rychlost nulová, platí tedy:

$$v = v_0 - g\cdot t = 0$$

Výšku při svislém vrhu vzhůru popisuje vztah:

$$h = v_0\cdot t - \frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2$$

Z první rovnice si můžeme vyjádřit vztah pro dobu letu do maximální výšky:

$$v_0 = g \cdot t$$

$$t = \frac{v_0}{g}$$

Dosazením do vztahu pro výšku míčku, dostaneme hledanou maximální výšku:

$$h = s = v_0 \cdot \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{v_0}{g}\right)^2 = \frac{v_0^2}{g} - \frac{v_0^2}{2 \cdot g} = \frac{v_0^2}{2 \cdot g}$$

Pro hodnoty ze zadání:

$$h = \frac{46{,}94^2}{2 \cdot 9{,}81}\,\mathrm{m} \doteq 112{,}3\,\mathrm{m}$$

Kdyby se mu podařilo hodit míč svisle vzhůru, vyhodil by do výšky 112,3 m. Bez problému by tak přehodil například sochu Svobody, která má 93 m.

1.5 Skládání pohybů a rychlostí

1.5.1

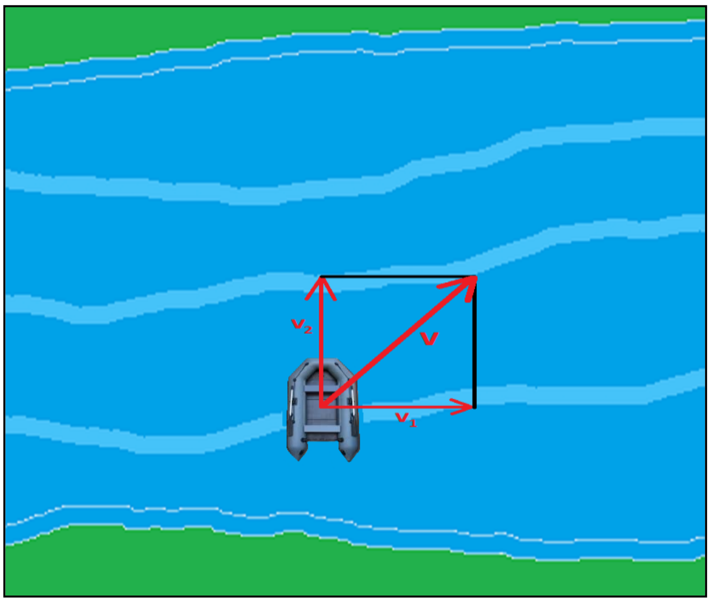
Vít se chtěl dostat se svým člunem na druhou stranu řeky. Vyplul tedy kolmo od jednoho z břehů rychlostí 5 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Po chvíli ale zjistil, že jeho ho unáší proud řeky, který má rychlost 3 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Jaká byla celková rychlost jeho člunu vzhledem k břehu?

Řešení

$$\boxed{\begin{array}{l} v_1 = 3\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} \\ v_2 = 5\,\mathrm{m \cdot s^{-1}} \\ v = ?\,[\mathrm{m \cdot s^{-1}}] \end{array}}$$

Ze zadání (popř. obrázku) je jasné, že rychlosti jsou na sebe navzájem kolmé a výslednou rychlost člunu spočítáme jednoduše pomocí pythagorovy věty:

$$v^2 = v_1^2 + v_2^2$$



Obr. č. 5

Celková rychlost v je tedy:

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

Pro zadané hodnoty dostáváme:

$$v = \sqrt{3^2 + 5^2}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \doteq 5{,}83\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

Rychlost Vítova člunu vzhledem k břehu byla přibližně 5,83 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

1.5.2

Honza a Petr si dali závod ze středu vagónu na jeho konce. Vlak se pohyboval rychlostí 54 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$ vůči zemi. Lidé, kolem kterých vlak zrovna projížděl viděli, že se Petr vůči nim pohyboval dvakrát rychleji než Honza, přitom ale oba doběhli na konce vagónu za stejný čas. Jak rychle běželi oba kluci vzhledem k vagónu?

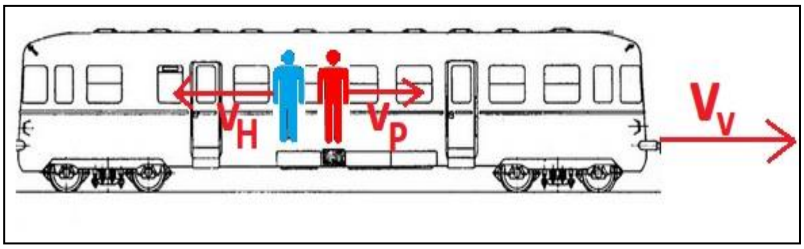
Řešení

$v_v = 54\ \mathrm{km \cdot h^{-1}} \doteq 15\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$

$v'_H = \frac{1}{2} \cdot v'_P$

$v_H = ?\ [\mathrm{m \cdot s^{-1}}]$

$v_P = ?\ [\mathrm{m \cdot s^{-1}}]$



Obr. č. 6

Pohyb obou kluků vzhledem k vagónu budeme značit nečárkovaně a pokyb vzhledem k lidem mimo vlak čárkovaně.

Honza běží proti směru jízdy vlaku a Petr ve směru pohybu vlaku, proto při skládání rychlostí v první rovnici
rychlosti odečítáme a ve druhé sčítáme:

$$v'_H = v_v - v_H$$
$$v'_P = v_v + v_P$$

Ze zadání navíc plynou následující vztahy:

$$v_H = v_P$$
$$v'_H = \frac{1}{2} \cdot v'_P$$

Ty můžeme dosadit do první z předchozích dvou rovnic a dostaneme soustavu dvou rovnic:

$$\frac{1}{2} \cdot v'_P = v_v - v_P$$
$$v'_P = v_v + v_P$$

Jelikož nás zajímá nečárkovaná rychlost, bude nejjednodušším řešením odečíst od druhé rovnice dvojnásobek první rovnice:

$$v'_P - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot v'_P = v_v + v_P - 2 \cdot \left(v_v - v_P\right)$$

A po jednoduché úpravě:

$$v_P = \frac{1}{3} v_v$$

Přičemž $v_P = v_H$.

Číselně tedy dostáváme:

$$v_P = v_H = \frac{15}{3}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

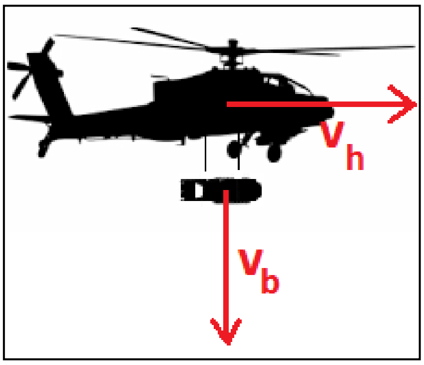
Oba běželi vzhledem k vagónu stejnou rychlostí a sice 5 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

1.5.3

Při vypuštění bomby z helikoptéry, která se nehybně vznáší ve výšce 1 km, by dopadla k zemi rychlostí v_b. Jak rychle by musela helikoptéra letět ve vodorovném směru, aby rychlost bomby při dopadu byla dvakrát větší než v prvním případě?

Řešení

$h = 1\,\text{km} = 1\,000\,\text{m}$
$v_b' = 2 \cdot v_b$
$v_h = 0\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$
$v_h' = ?\,[\text{m}\cdot\text{s}^{-1}]$



Obr. č. 7

Při zápisu použijeme nečárkované veličiny pro první případ, kdy se helikoptéra pouze vznáší nad stejným místem a čárkované pro druhý případ. Hlavní je uvědomit si, že v obou příkladech se bomba ve vodorovném směru pohybuje po celou dobu stejně rychle jako helikoptéra před vypuštěním bomby.

V prvním případě platí:

$$v_b = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

Ve druhém má platit:

$$v_b' = 2 \cdot v_b \quad ,$$

kde v_b' dostaneme jako složení rychlostí ve vodorovném směru v_h' a ve svislém směru v_b :

$$v_b' = \sqrt{v_h'^2 + v_b^2}$$

Vyjádřením a následným dosazením za v_b' a poté za v_b dostaneme:

$$v_h'^2 = v_b'^2 - v_b^2 = (2 \cdot v_b)^2 - v_b^2 = 3 \cdot v_b^2 = 3 \cdot \left(\sqrt{2 \cdot g \cdot h}\right)^2$$

Po odmocnění:

$$v_h' = \sqrt{6 \cdot g \cdot h}$$

A číselně:

$$v_h' = \sqrt{6 \cdot 9{,}81 \cdot 1\,000}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} \doteq 243\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1} \doteq 873\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$$

Vrtulník by musel letět rychlostí přibližně 873 $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$.

1.6 Rovnoměrný pohyb po kružnici

1.6.1

Jakou úhlovou rychlostí se pohybuje minutová a hodinová ručička?
Indexem 1 budeme značit minutovou ručičku a indexem 2, hodinovou ručičku.

Řešení

$$\boxed{\begin{aligned} &\varphi_1 = \varphi_2 = 360° = 2\pi \text{ rad} \\ &t_1 = 3\,600 \text{ s} \\ &t_2 = 12 \text{ h} = 43\,200 \text{ s} \\ &\omega_1 = ?\,[\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}] \\ &\omega_2 = ?\,[\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}] \end{aligned}}$$

Úhlová rychlost je definována jako:

$$\omega = \frac{\varphi}{t}$$

Pro minutovou resp hodinovou ručičku tedy platí:

$$\omega_1 = \frac{\varphi_1}{t_1}$$

$$\omega_2 = \frac{\varphi_2}{t_2}$$

Číselně:

$$\omega_1 = \frac{2\cdot 3{,}14}{3\,600}\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1} = 0{,}001\,74\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$\omega_2 = \frac{2\cdot 3{,}14}{43\,200}\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1} = 0{,}000\,145\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

Minutová ručička má úhlovou rychlost 0,00175 $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ a hodinová ručička má úhlovou rychlost 0,000145 $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

1.6.2

Určete periodu, s jakou se člověk stojící na rovníku otočí (společně se Zemí) kolem Zemské osy. Z toho určete jeho obvodovou rychlost.

Řešení

$t_R = 1\,\text{den}$
$\text{T} = ?\,[\text{s}]$
$r = R_Z \doteq 6\,378\,\text{km} = 6{,}378 \cdot 10^6\ \text{m}$

Doba otočení Země je 1 den což, je i perioda otočení člověka kolem zemské osy:

$$T = t_R = 1\,\text{den} = 24 \cdot 3\,600\,\text{s} = 86\,400\,\text{s}$$

Vztah pro úhlovou frekvenci dosadíme do vztahu pro obvodovou rychlost a dostaneme:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}$$

$$v_R = \omega \cdot r = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T} = \frac{2 \cdot \pi \cdot R_Z}{t_R}$$

Číselně:

$$v_R = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 6{,}378 \cdot 10^6}{86\,400}\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1} \doteq 463{,}6\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1} (\doteq 1\,670\ \text{km} \cdot \text{h}^{-1})$$

Perioda otočení člověka stojícího na rovníku kolem zemské osy je 86 400 sekund. Jeho obvodová rychlost je přibližně 1 670 $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$.

1.6.3

Kolo automobilu o průměru 60 cm se otáčí s frekvencí 5,3 Hz. Určete dráhu, kterou auto urazí za 1 min.

Řešení

$d = 60\,\text{cm} = 0{,}6\,\text{m}$
$f = 10{,}6\,\text{Hz}$
$t = 1\,\text{min} = 60\,\text{s}$
$s = ?\,[\text{m}]$

Dráha, kterou auto urazí je rovna délce oblouhu:

$$s = \varphi \cdot r$$

Kde pro φ a r platí:

$$\varphi = \omega \cdot t$$

$$r = \frac{d}{2}$$

A úhlová frekvence je:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$$

Po dosazení:

$$s = \omega \cdot t \cdot r = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t \cdot r = \pi \cdot f \cdot d \cdot t$$

Pro zadané hodnoty:

$$s = 3{,}14 \cdot 10{,}6 \cdot 0{,}6 \cdot 60 \text{ m} \doteq 1198{,}2 \text{ m} \doteq 1{,}2 \text{ km}$$

Auto za 1 min ujede dráhu přibližně 1,2 km.

1.7 Zrychlení při rovnoměrném pohybu po kružnici

1.7.1

Pavel se vydal na svojí oblíbenou pouťovou atrakci, největší řetízkový kolotoč na světě ve Vídeňském Prátru. Poloměr kolotoče při nejvyšší rychlosti odhadl Pavel na 12,5 m a pomocí GPS v mobilu si změřil svojí okamžitou rychlost: $50 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Jak velké dostředivé zrychlení na něj v tu chvíli působilo?

Řešení

$$\boxed{\begin{array}{l} v = 40 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} \doteq 11{,}11 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \\ r = 12{,}5 \text{ m} \\ a_d = ? [\text{m} \cdot \text{s}^{-2}] \end{array}}$$

Dostředivé zrychlení spočítáme ze vztahu:

$$a_d = \frac{v^2}{r}$$

Číselně:

$$a_d = \frac{2 \cdot 11{,}11^2}{25}\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} \doteq 9{,}88\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

Působilo na něj dostředivé zrychlení o velikosti přibližně 9,88 $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

1.7.2

Traktor Zetor má rozdílné velikosti kol na přední a zadní nápravě. Obvod zadního kola je 3x větší než obvod předního. Vypočtěte velikost dostředivého zrychlení na obvodu předního kola, jestliže traktor jede po cestě rychlostí *v* a při této rychlosti je dostředivé zrychlení na obvodu zadního kola 100 $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

Řešení

$$\boxed{\begin{aligned} O_Z &= 3 \cdot O_P \\ a_{d_Z} &= 100\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} \\ a_{d_P} &= ?\ [\mathrm{m \cdot s^{-2}}] \end{aligned}}$$

Pro obvod kruhu a dostředivé zrychlení obecně platí vztahy:

$$O = 2 \cdot \pi \cdot r_Z$$

$$a_d = \frac{v^2}{r}$$

Důležité je uvědomit si, že rychlost celého traktoru *v* je zároveň rovna obvodové rychlosti předního i za

$$v = v_Z = v_P$$

Z poměru obvodů jednoduše jednoduše plyne poměr poloměrů:

$$\frac{O_Z}{O_P} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r_Z}{2 \cdot \pi \cdot r_P} = \frac{r_Z}{r_P} = 3$$

Pro dostředivé zrychlení na obvodu předního kola tedy po dosazení platí:

$$a_{d_P} = \frac{v_P^2}{r_P} = \frac{3 \cdot v_Z^2}{r_Z} = 3 \cdot a_{d_Z}$$

Číselně:

$a_{d_P} = 3 \cdot 100\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} = 300\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$

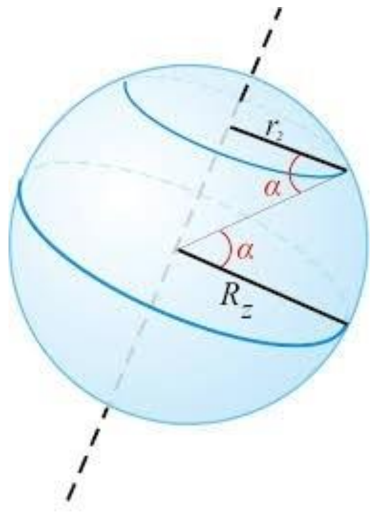
Dostředivé zrychlení na obvodu předního kola je třikrát větší než na zadním kole, tedy 300 $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

1.7.3

Jak velké je dostředivé zrychlení Země na rovníku a jaké je v České republice? Počítejte, že ČR leží přibližně na 50° severní zeměpisné šířky.

Řešení

$r_1 = R_Z \doteq 6\,378\ \mathrm{km} = 6{,}378 \cdot 10^6\ \mathrm{m}$
$\alpha = 50°$
$T = 86\,400\ \mathrm{s}$
$a_{d_1} = ?\,[\mathrm{m \cdot s^{-2}}]$
$a_{d_2} = ?\,[\mathrm{m \cdot s^{-2}}]$



Obecně platí pro dostředivé zrychlení a obvodovou rychlost:

$$a_d = \frac{v^2}{r} \qquad \text{a} \qquad v = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{T}$$

V případě rovníku dostaneme po jednoduchém dosazení:

Obr. č. 8

$$a_{d_1} = \frac{v_1^2}{r_1} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r_1^2}{r_1 \cdot T^2} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot R_Z}{T^2}$$

Pro výpočet na území ČR použijeme definici kosinu v pravoúhlém trojúhelníku:

$r_2 = R_Z \cdot \cos\alpha$

Poté dosadíme:

$$a_{d_2} = \frac{v_2^2}{r_2} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r_2^2}{r_2 \cdot T^2} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot R_Z \cdot \cos\alpha}{T^2} = a_{d_1} \cdot \cos\alpha$$

Pro zadané hodnoty:

$$a_{d_1} = \frac{4 \cdot 3{,}14^2 \cdot 6{,}378 \cdot 10^6}{86\,400^2}\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} \doteq 0{,}034\mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

$$a_{d_2} = \frac{4 \cdot 3{,}14^2 \cdot 6{,}378 \cdot 10^6 \cdot \cos(50°)}{86\,400^2}\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} \doteq 0{,}022\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

Na rovníku má dostředivé zrychlení velikost přibližně 0,034 $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$, v České republice 0,022 $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

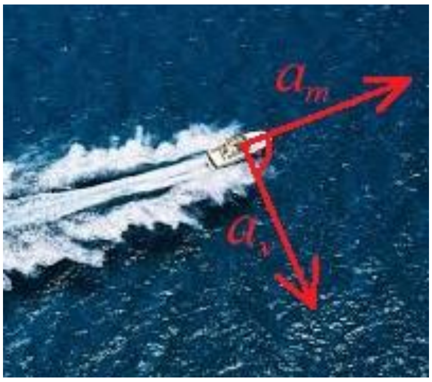
1.8 Zrychlení při nerovnoměrném křivočarém pohybu

1.8.1

Petra se plaví na člunu po moři. Zrovna když se začal zvedat vítr a moře se rozbouřilo, Petra šlápla na plyn, aby se rychle dostala ke břehu, a člun začal zrychlovat. Celkové zrychlení má však dvě složky, jednu způsobuje motor člunu a druhou větrem a vlnami. Zrychlení způsobené motorem má velikost 2 $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$ a zrychlení způsobené větrem a vlnami 1,5 $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$. Jaké bude celkové zrychlení člunu, jestliže moře urychlovalo člun ve směru kolmém na směr pohybu člunu způsobeného motorem?

Řešení

$a_m = 2\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$
$a_v = 1{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$
$a = ?\ [\mathrm{m \cdot s^{-2}}]$



Obr. č. 9

Obě zrychlení jsou na sebe kolmá a proto můžeme celkové zrychlení spočítat jednoduše pomocí Pythagorovy věty:

$$a = \sqrt{a_v^2 + a_m^2}$$

Číselně:

$$a = \sqrt{1{,}5^2 + 2^2}\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} = 2{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

Člun zrychluje se zrychlením o velikosti 2,5 $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

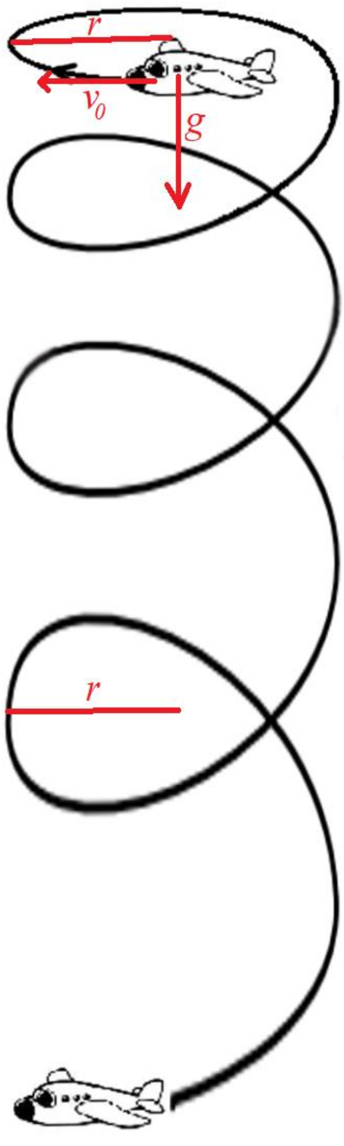
1.8.2

Letadlo, které začalo padat k zemi po prodlužující se šroubovici koná dva nezávislé pohyby. Jeden ve směru svislém způsobený tíhovým zrychlením. Druhý ve vodorovné rovině, kde se jedná o rovnoměrný pohyb po kružnici. Určete velikost celkového zrychlení letadla, jestliže šroubovice má poloměr 200 m a rychlost ve vodorovném směru má velikost 300 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

Řešení

$v_0 = 300\ \mathrm{km \cdot h^{-1}} \doteq 83{,}33\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$
$r = 200\ \mathrm{m}$
$a = ?\ [\mathrm{m \cdot s^{-2}}]$

Letadlo má během letu zrychlení ve dvou směrech. Tíhové zrychlení směrem svisle dolů a dostředivé zrychlení směrem do středu kružnice.Celkové zrychlení určíme složením vektorů těchto dvou zrychlení. Stačí si uvědomit, že obě složky zrychlení jsou na sebe v každém okamžiku letu kolmé a proto nám pro výpočet velikosti celkového zrychlení postačí Pythagorova věta:



Obr. č. 10

$$a = \sqrt{g^2 + a_d^2},$$

kde a_d spočítáme jako:

$$a_d = \frac{v_0^2}{r}$$

Po dosazení:

$$a = \sqrt{g^2 + \left(\frac{v_0^2}{r}\right)^2}$$

Číselně pro zadané hodnoty:

$$a = \sqrt{9{,}81^2 + \left(\frac{83{,}33^2}{200}\right)^2}\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} \doteq 36\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

Celkové zrychlení letadla má hodnotu 36 $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

1.8.3

K určení celkového zrychlení bodů na obvodu pneumatiky nám stačí zaznamenat změnu rychlosti za čas a změřit si výšku pneumatiky. Z pozorování jsme si zapsali, že se auto rozjíždělo s konstantním zrychlením a zrychlování z 10 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$ na 20 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$ trvalo 5 s. Poloměr pneumatiky je 30 cm. Určete celkové zrychlení na obvodu pneumatiky pro tyto dvě rychlosti.

Řešení

$$\boxed{\begin{array}{l} v_1 = 10\ \mathrm{km \cdot h^{-1}} \doteq 2{,}78\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \\ v_2 = 20\ \mathrm{km \cdot h^{-1}} \doteq 5{,}56\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \\ t = 5\ \mathrm{s} \\ r = 30\ \mathrm{cm} = 0{,}3\ \mathrm{m} \\ a_1 = ?\ [\mathrm{m \cdot s^{-2}}] \\ a_2 = ?\ [\mathrm{m \cdot s^{-2}}] \end{array}}$$

Obě složky zrychlení jsou na sebe v každém okamžiku kolmé, proto celkové zrychlení spočteme pomocí Pythagorovy věty.

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

Zároveň platí, že tečná složka zrychlení je stejná jako zrychlení auta (promyslete si), je tedy konstantní a můžeme ji spočítat jako:

$$a_t = a_{auta} = \frac{v_2 - v_1}{t}$$

Normálová složka zrychlení je rovna dostředivému zrychlení:

$$a_n = \frac{v^2}{r}$$

Očividně toto zrychlení závisí na okamžité rychlosti a tudíž musíme výpočet rozepsat pro obě rychlosti:

$$a_{n_1} = \frac{v_1^2}{r}$$

$$a_{n_2} = \frac{v_2^2}{r}$$

Po dosazení do Pythagorovy věty (pro celkové zrychlení) za tečné a normálové zryhclení pro obě rychlosti:

$$a_1 = \sqrt{a_t^2 + a_{n_1}^2} = \sqrt{\left(\frac{v_2 - v_1}{t}\right)^2 + \left(\frac{v_1^2}{r}\right)^2}$$

$$a_2 = \sqrt{a_t^2 + a_{n_2}^2} = \sqrt{\left(\frac{v_2 - v_1}{t}\right)^2 + \left(\frac{v_2^2}{r}\right)^2}$$

Pro hodnoty ze zadání:

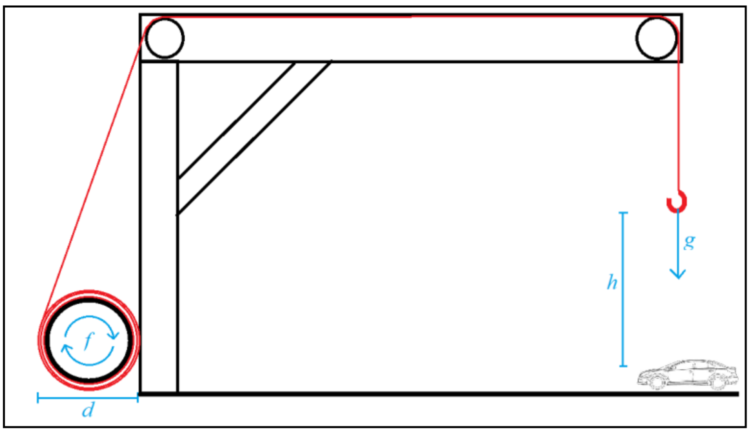
$$a_1 = \sqrt{\left(\frac{5,56 - 2,78}{5}\right)^2 + \left(\frac{2,78^2}{0,3}\right)^2}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}} \doteq 25,8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

$$a_2 = \sqrt{\left(\frac{5,56 - 2,78}{5}\right)^2 + \left(\frac{5,56^2}{0,3}\right)^2}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}} \doteq 103,0\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

Celkové zrychlení v okamžiku, kdy auto jelo rychlostí 10 $\mathrm{km\cdot h^{-1}}$, bylo 25,8 $\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. V okamžiku, kdy auto jelo rychlostí 20 $\mathrm{km\cdot h^{-1}}$, bylo celkové zrychlení 103 $\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

1.0.4

Na staveništi se během noci stala nehoda, při které se uvolnilo lano jeřábu a hák po chvíli spadl na zaparkované auto. Pád háku způsobil, že se lano na jeho opačném konci odvíjelo z cívky o průměru 1,41 m a tím tuto cívku roztáčelo. Výška, ve které se hák má vždy na konci směny ponechat je 16 m. Pro vyřešení případu nakreslete graf závislosti frekvence otáčení cívky na počáteční výšce, ze které by hák padal volným pádem.
Z palubního počítače jeřábu plyne, že v okamžiku dopadu háku byla frekvence otáčení cívky 240 $\text{otáček}\cdot\mathrm{min}^{-1}$.
Souhlasí tato hodnota s grafem?



Obr. č. 11

Řešení

$d = 1{,}41\,\mathrm{m}$

$f = 240\ \text{otáček} \cdot \mathrm{min}^{-1} = 4\ \mathrm{Hz}$

$h = 16\ \mathrm{m}$

$f_{graf} = ?\,[\mathrm{Hz}]$

Pro sestrojení grafu je zapotřebí najít vztah (závislost) mezi počáteční výškou h a frekvencí otáčení cívky. Nejdůležitější je uvědomit si, že rychlost pádu háku v_1 na jedné straně jeřábu musí být stejná jako rychlost v_2, se kterou se na druhé straně jeřábu odmotává lano z cívky. Jelikož se jedná o volný pád, platí pro rychlost v_1:

$$v_1 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$$

Při odmotávání lana platí pro rychlost v_2:

$$v_2 = \omega \cdot r = \frac{\omega \cdot d}{2}$$ kde za úhlovou rychlost dosadíme $$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$$

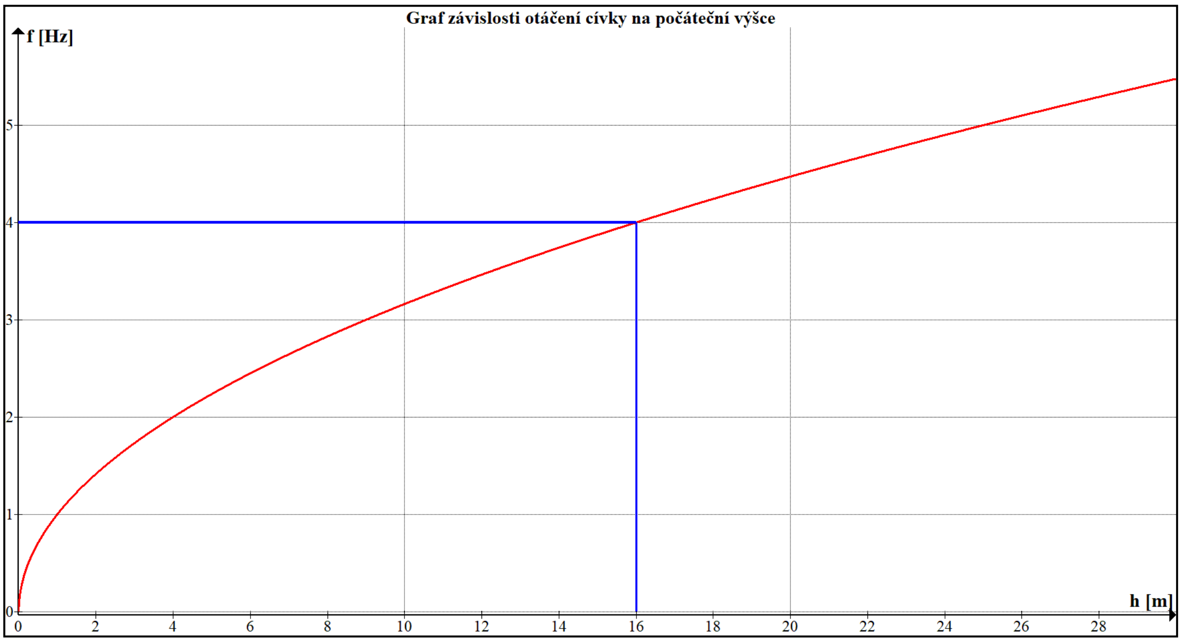
Z rovnosti $v_1 = v_2$ dostaneme dosazením:

$$\sqrt{2 \cdot g \cdot h} = \pi \cdot d \cdot f$$

Abychom mohli nakreslit graf závislosti frekvence na počáteční výšce, stačí získanou rovnost upravit a dosadit známé hodnoty:

$$f = \frac{\sqrt{2 \cdot g \cdot h}}{\pi \cdot d} = \frac{\sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot h}}{3{,}14 \cdot 1{,}41} \doteq \sqrt{h}$$

Při kreslení grafu nesmíme zapomenout na správné jednotky!



Obr. č. 12

Z grafu (i výpočtu) plyne, že pokud by hák padal z výšky 16 m, byla by frekvence otáčení v okamžiku dopadu opravdu 4 Hz neboli 240 $\text{otáček} \cdot \text{min}^{-1}$.

Dynamika hmotného bodu

2.1 Druhý Newtonův pohybový zákon

2.1.1

Jaká tíhová síla působí na člověka o hmotnosti 70 kg?

Řešení

$m = 70\ \mathrm{kg}$
$F_G = ?\ [\mathrm{N}]$

Tíhovou sílu spočítame jednoduše ze vztahu:

$$F_G = m \cdot g$$

Pro zadanou hodnotu:

$$F_G = 70 \cdot 9{,}81\ \mathrm{N} \doteq 687\ \mathrm{N}$$

Na člověka o hmotnosti 70 kg působí tíhová síla o velikosti 687 N.

2.1.2

Když Tomáš cestoval vlakem z Ostravy do Prahy, začal přemýšlet, jak velkou silou musí působit lokomotiva na celou soupravu. Nejprve si vygooglil, že hmotnost jednoho obsazeného vagónu je asi 50 t, přičemž za lokomotivou jich bylo hned 10. Dále musel počkat, až se bude vlak rozjíždět ze stanice a díky informačnímu displeji si zjistil, že vlak dosáhl rychlosti 100 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$ zhruba za 70 s. Jaká hodnota síly Tomášovi vyšla?

Řešení

$m_v = 50\ \mathrm{t} = 5 \cdot 10^4\ \mathrm{kg}$
$n = 10$
$t = 70\ \mathrm{s}$
$v = 100\ \mathrm{km \cdot h^{-1}} \doteq 27{,}78\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$
$F = ?\ [\mathrm{N}]$

Nejprve musíme určit hmotnost všech vagónů dohromady:

$$m = n \cdot m_v$$

Dále je zapotřebí vztah pro rychlost pohybu při konstantním zrychlení:

$$v = a \cdot t$$

Nyní oba vztahy dosadíme do Newtonova zákona síly:

$$F = m \cdot a = n \cdot m_v \cdot \frac{v}{t}$$

Pro zadané hodnoty:

$$F = (10 \cdot 5 \cdot 10^4) \cdot \frac{27,78}{70}\ \mathrm{N} \doteq 198\,429\ \mathrm{N} \doteq 198\ \mathrm{kN}$$

Lokomotiva působila na celou soupravu silou 198 kN.

2.1.3

Dominik si četl časopis o nejrychlejších autech na světě a tentokrát ho zaujala jiná věc než obvykle. V jednom článku se dočetl že Bugatti Veyron, vážící 1 888 kg, potřebuje k zastavení z rychlosti 407 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$ brzdnou dráhu alespoň 561 m a zajímalo ho jakou účinnost mají jeho brzdy. K tomu ale nejprve potřebuje odpověď na otázku: Jakou sílu brzdy při tomto zpomalování vyvíjejí? Předpokládejte, že auto zpomaluje rovnoměrně.

Řešení

$v_0 = 407\ \mathrm{km \cdot h^{-1}} \doteq 113,06\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$
$v = 0\ \mathrm{km \cdot h^{-1}} = 0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$
$s = 561\ \mathrm{m}$
$m = 1\,888\ \mathrm{kg}$
$F = ?\ [\mathrm{N}]$

K výpočtu budeme potřebovat vztahy pro dráhu a rychlost zpomaleného pohybu:

$$s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$
$$v = v_0 - a \cdot t$$

Z druhého vztahu si vyjádříme zrychlení a to dosadíme do prvního vztahu:

$$a = \frac{v_0 - v_1}{t}$$

$$s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot \frac{v_0 - v_1}{t} \cdot t^2 = v_0 \cdot t - \frac{v_0 - v_1}{2} \cdot t = \frac{v_0 + v_1}{2} \cdot t$$

Ze získané rovnice se nyní můžeme vyjádřit dobu, kterou zpomalování trvalo:

$$t = \frac{2 \cdot s}{v_0 + v_1}$$

Teď už stačí jen dosadit získané vztahy pro zrychlení a dobu pohybu do Newtonova zákona síly a provést úpravy:

$$F = m \cdot a = m \cdot \frac{v_0 - v_1}{t} = m \cdot \frac{v_0 - v_1}{\frac{2 \cdot s}{v_0 + v_1}} = m \cdot \frac{(v_0 - v_1)(v_0 + v_1)}{2 \cdot s} = m \cdot \frac{v_0^2 - v_1^2}{2 \cdot s}$$

Po dosazení zadaných hodnot:

$$F = 1\,888 \cdot \frac{113{,}06^2 - 0^2}{2 \cdot 561}\ \mathrm{N} \doteq 21\,508\ \mathrm{N} \doteq 21{,}5\ \mathrm{kN}$$

Brzdy působí silou 21,5 kN.

2.2 Hybnost hmotného bodu

2.2.1

V následující tabulce jsou sestupně seřazeny rychlostní rekordy náčiní (míče, puku, košíčku…) v několika sportech. Ve druhém sloupci tabulky jsou vypsány hmotnosti náčiní. Spočítejte u každého objektu jeho hybnost (v $\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}}$) a tabulku přeuspořádejte podle hybnosti opět sestupně.

Sport:	Rychlostní rekord:	Hmotnost náčiní:	Hybnost:
Badminton	493 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$	5,5 g	?
Golf	328 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$	45,93 g	?
Tenis	263 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$	58,5 g	?
Baseball	187 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$	149 g	?
Hokej	175 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$	170 g	?

Tab. č. 1

Řešení

$\boxed{p = ?\ [\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}}]}$

Jediné, co k výpočtu potřebujeme, je definiční vztah hybnosti a při výpočtu dosadit v základních jednotkách:

$$p = m \cdot v$$

Pro hodnoty ze zadané tabulky pak dostaneme:

$$p_1 = 0,005\,5 \cdot 136,94\ \mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}} \doteq 0,75\ \mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}}$$
$$p_2 = 0,045\,93 \cdot 91,11\ \mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}} \doteq 4,18\ \mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}}$$
$$p_3 = 0,058\,5 \cdot 73,06\ \mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}} \doteq 4,27\ \mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}}$$
$$p_4 = 0,149\,0 \cdot 51,94\ \mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}} \doteq 7,74\ \mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}}$$
$$p_5 = 0,170\,0 \cdot 48,61\ \mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}} \doteq 8,26\ \mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}}$$

Nově uspořádaná tabulka podle hybnosti:

Sport:	Rychlostní rekord:	Hmotnost náčiní:	Hybnost:
Hokej	175 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$	170 g	**8,26** $\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}}$
Baseball	187 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$	149 g	**7,74** $\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}}$
Tenis	263 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$	58,5 g	**4,27** $\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}}$
Golf	328 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$	45,93 g	**4,18** $\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}}$
Badminton	493 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$	5,5 g	**0,75** $\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}}$

Tab. č. 2

2.2.2

Kolikrát rychleji než zvuk, by musel letět badmintonový míček z předchozího příkladu (2.2.1), aby měl stejnou hybnost jako hokejový puk rovněž z předchozího příkladu?

Řešení

$$\boxed{\begin{array}{l} m_1 = 5,5\ \mathrm{g} = 0,0055\ \mathrm{kg} \\ p_2 = 8,26\ \mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}} \\ v_{zvuk} = 340\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \\ \dfrac{v_1'}{v_{zvuk}} = ? \end{array}}$$

Aby měl badmintonový míček stejnou hybnost jako puk, tedy:

$$p_1' = m_1 \cdot v_1' = p_2,$$

muselo by pro ,,novou" rychlost platit:

$$v_1' = \frac{p_2}{m_1}$$

Poměr této rychlosti a rychlosti zvuku pak dostaneme jednoduše jako:

$$\frac{v_1'}{v_{zvuk}} = \frac{p_2}{m_1 \cdot v_{zvuk}}$$

Číselně:

$$\frac{v_1'}{v_{zvuk}} = \frac{8,26}{0,0055 \cdot 340} \doteq 4,42$$

Badmintonový míček by se musel pohybovat více než čtyřnásobkem rychlosti zvuku.

2.2.3

Rychlosti a tím pádem i hybnosti satelitů obíhajících zemi musí být obrovské, aby vyvážily zemskou přitažlivost a mohly se pohybovat po kruhových drahách. Vypočítejte hybnost družice systému GPS, pro kterou jste si na wikipedii zjistili, že má hmotnost 1,8 t, Zemi oběhne dokola za polovinu dne a pohybuje se ve výšce přibližně 20 350 km nad zemským povrchem.

Řešení

$$\boxed{\begin{aligned}&m = 1,8\ \mathrm{t} = 1800\ \mathrm{kg}\\ &h = 20\,350\ \mathrm{km} = 2,035 \cdot 10^7\ \mathrm{m}\\ &R_Z = 6\,378\ \mathrm{km} = 6,378 \cdot 10^6\ \mathrm{m}\\ &T = \frac{1}{2}\ \mathrm{dne} = 43\,200\ \mathrm{s}\\ &p = ?\,[\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}]\end{aligned}}$$

Pro výpočet hybnosti nejprve musíme spočítat rychlost:

$$v = \omega \cdot r,$$

Úhlovou rychlost vyjádříme pomocí periody oběhu:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}$$

Poloměr kružnice je dán poloměrem Země a výškou nad povrchem:

$$r = R_Z + h$$

Teď už stačí dosadit do vztahu pro hybnost:

$$p = m \cdot v = m \cdot \omega \cdot r = \frac{2 \cdot \pi \cdot (R_Z + h) \cdot m}{T}$$

Číselně:

$$p = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot (6{,}378 \cdot 10^6 + 2{,}035 \cdot 10^7) \cdot 1800}{43\,200}\ \mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}} \doteq 6\,993\,827\ \mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}} \doteq 7 \cdot 10^6\, kg \cdot m \cdot s^{-1}$$

Hybnost družice systému GPS je přibližně $7 \cdot 10^6\ \mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1}}$.

2.3 Změna hybnosti

2.3.1

Při světovém rekordu ve vrhu koulí, která má hmotnost 7,26 kg, měla koule při odhodu rychlost 21,5 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Jaká síla byla zapotřebí k tomuto vrhu, jestliže koule při odhodu zrychluje pouhých 0,07 s?

Řešení

$$\boxed{\begin{array}{l} \Delta v = 21{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \\ \Delta t = 0{,}07\ \mathrm{s} \\ m = 7{,}26\ \mathrm{kg} \\ F = ?\,[\mathrm{N}] \end{array}}$$

K výpočtu stačí pouze zvolit vhodný tvar Newtonova zákona síly:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Pro konkrétní hodnoty:

$$F = 7{,}26 \cdot \frac{21{,}5}{0{,}07}\ \mathrm{N} \doteq 2\,230\ \mathrm{N}$$

Je potřeba síla o velikosti 2 230 N.

2.3.2

Dnešní vysokorychlostní kamery jsou schopny zaznamenat až milion snímků za sekundu. Díky tomu můžeme velice přesně změřit například dobu nárazu míčku do baseballové pálky, i přesto, že trvá pouze přibližně 1 ms. Zkusme pro zajímavost při tomto procesu počítat s rekordní rychlostí nadhozu i odpalu, které jsme už měli v minulých příkladech, tedy: nadhoz – $168\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$ a odpal – $187\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$. Jakou silou by na míček při tomto odpalu pálka působila?

Řešení

$$\boxed{\begin{aligned} &v_1 = 168\ \mathrm{km \cdot h^{-1}} \doteq 46{,}67\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \\ &v_2 = 187\ \mathrm{km \cdot h^{-1}} \doteq 51{,}94\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \\ &\Delta t = 1\ \mathrm{ms} = 0{,}001\ \mathrm{s} \\ &m = 149\ \mathrm{g} \doteq 0{,}149\ \mathrm{kg} \\ &F = ?\ [\mathrm{N}] \end{aligned}}$$

Abychom mohli dosadit do Newtonova zákona síly, musíme nejprve určit změnu rychlosti míčku při odpalu. Těsně před odpalem se míček k pálce přibližuje, těsně po odpalu se míček naopak vzdaluje a proto změnu rychlosti určíme jako součet rychlostí v_1 *a* v_2:

$$\Delta v = v_1 + v_2$$

Teď už opět stačí vhodně upravit zákon síly:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t} = m \cdot \frac{v_1 + v_2}{\Delta t}$$

Pro zadané hodnoty:

$$F = 0{,}149 \cdot \frac{46{,}67 + 51{,}94}{0{,}001}\ \mathrm{N} \doteq 14\,693 N \doteq 14{,}7\ \mathrm{kN}$$

Pálka by působila na míček silou 14,7 kN.

2.3.3

Odvoďte, jak závisí hybnost jakéhokoliv tělesa těsně před dopadem na zem po volném pádu na výšce h_0, ze které toto těleso padalo.

Řešení

Pro změnu hybnosti tohoto tělesa během letu platí:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{p - p_0}{t - t_0}$$

Jelikož v našem případě platí:

$$p_0 = 0$$
$$t_0 = 0$$

Můžeme původní rovnici přepsat do tvaru:

$$F = \frac{p}{t},$$

kde p je hybnost tělesa při dopadu, t je doba letu a F je:

$$F = F_G = mg,$$

potom platí:

$$\frac{p}{t} = mg$$

a tedyhybnost při dopadu je rovna:

$$p = mgt$$

Nyní si musíme vyjádřit $t,$ kde využijeme vztahu pro výšku během volného pádu :

$$h = h_0 - \frac{1}{2} g t^2$$

Vzhledem k tomu, že při dopadu platí $h = 0$ dostáváme :

$$h_0 = \frac{1}{2} g t^2$$

Odkud dostaneme hledaný vztah pro t:

$$t = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$$

Po dosazení za t do vztahu pro hybnost při dopadu tělesa:

$$p = mgt = mg\sqrt{\frac{2h_0}{g}} = m\sqrt{2g} \cdot \sqrt{h_0}$$

Hybnost libovolného tělesa při dopadu závisí na odmocnině výšky, ze které padá.

2.4 Zákon zachování hybnosti

2.4.1

Během kulečníku se při slabém šťouchu poměrně často stává, že se po přímém nárazu jedné koule do druhé koule obě přitisknou a dále pokračují v pohybu spolu. Jakou rychlostí se budou obě koule spolu pohybovat po nárazu, jestliže před nárazem druhá koule byla v klidu? Při výpočtu použijte rychlost první koule 1 $\mathrm{m} \cdot s^{-1}$ a to, že všechny koule váží stejně.

Řešení

$$\boxed{\begin{aligned} &v_0 = 1\,\mathrm{m} \cdot s^{-1} \\ &m_0 = m_1 \\ &m_2 = 2 \cdot m_1 \\ &v_1 = 0\,\mathrm{m} \cdot s^{-1} \\ &v_2 = ?\,[\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}] \end{aligned}}$$

Použijeme zákon zachování hybnosti, přičemž před srážkou budeme počítat se dvěma hybnostmi dvou izolovaných těles a po srážce se tělesa pohybují spolu jako jedno těleso:

$$p_0 + p_1 = p_2$$

Hybnosti spočítáme z definice $p = mv$ a vzhledem k tomu, že $v_1 = 0\,\mathrm{m} \cdot s^{-1}$ dostaneme:

$$m_0 \cdot v_0 + m_1 \cdot v_1 = m_2 \cdot v_2$$
$$m_0 \cdot v_0 = m_2 \cdot v_2$$

Dosazením za m_2 ze zadání a úpravou:

$$m_0 \cdot v_0 = 2 \cdot m_2 \cdot v_2$$
$$v_2 = \frac{v_0}{2}$$

Číselně:

$$v_2 = \frac{1}{2}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 0{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

Rychlost obou koulí po nárazu je přibližně 0,5 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

2.4.2

Strojvedoucí, který měl za úkol připojit lokomotivu o hmotnosti 84 t k soupravě vagónů se k nim s lokomotivou přibližoval rychlostí 1 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Těsně po nárazu a spojení lokomotivy s vagóny se celý vlak pohyboval rychlostí 0,1 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Kolik vagónů souprava měla, jestliže každý z nich vážil přibližně 63 t?

Řešení

$m_1 = 84\ \mathrm{t} = 84\,000\ \mathrm{kg}$
$v_1 = 1\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$
$v_2 = 0{,}1\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$
$m_v = 63\ \mathrm{t} = 63\,000\ \mathrm{kg}$
$n = ?\ [\,]$

Základem je opět zákon zachování hybnosti:

$$p_1 = p_2, \qquad \text{kde} \qquad p = mv$$

Důležité je především, že hmotnost soustavy po srážce je:

$$m_2 = m_1 + n \cdot m_v$$

Po dosazení do zákonu zachování dostaneme:

$$m_1 \cdot v_1 = m_2 \cdot v_2$$
$$m_1 \cdot v_1 = (m_1 + n \cdot m_v) \cdot v_2$$

Nyní stačí vyjádřit neznámou n a upravit :

$$n = \frac{\frac{m_1 \cdot v_1}{v_2} - m_1}{m_v} = \frac{m_1 \cdot v_1 - m_1 \cdot v_2}{v_2 \cdot m_v} = \frac{m_1}{m_v} \cdot \frac{v_1 - v_2}{v_2}$$

Po dosazení zadaných hodnot:

$$n = \frac{84\,000}{63\,000} \cdot \frac{1 - 0{,}1}{0{,}1} = 12$$

Souprava měla 12 vágónů.

2.4.3

Udržet hasičskou hadici při hašení požáru je velice obtížné. Jediné co hasiči pomáhá vydržet tento „zpětný tlak“ vody je tření mezi podlahou a jeho botami. Spočítejte, jakou rychlost by hasič o hmotnosti 80 kg získal po pouhé minutě hašení, kdyby toto tření zmizelo (např. by seděl na kancelářské židli). Při výpočtu počítejte s tím, že za minutu vyteče z hadice 820 l vody a proudí rychlostí 30 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Řešení

$t = 60\ \mathrm{s}$
$m_1 = 80\ \mathrm{kg}$
$V_2 = 820\ \mathrm{l} = 0{,}82\ \mathrm{m^3}$
$v_2 = 30\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$
$v_1 = ?\ [\mathrm{m \cdot s^{-1}}]$

Obr. č. 13

Je jasné, že voda by proudila z hadice po celou dobu a rychlost hasiče by tedy rostla postupně. To by bylo na výpočet velice komplikované! Po úvaze však můžeme dojít k tomu, že rychlost hasiče nezávisí na tom, jestli voda z hadice vytéká danou rychlostí postupně a nebo by hasič daný objem vody stejnou rychlostí „vypustil" v jeden okamžik. Promyslete si!

Pro výpočet hasičovy rychlosti nám tedy postačí jednoduchý zákon zachování hybnosti:

$$p_1 = p_2$$
$$m_1 \cdot v_1 = m_2 \cdot v_2$$

Pouze musíme, ze znalosti vztahu pro hustotu, upravit tuto rovnici na tvar:

$$m_1 \cdot v_1 = \rho_2 \cdot V_2 \cdot v_2$$

Z čehož vyjádříme rychlost hasiče:

$$v_1 = \frac{\rho_2 \cdot V_2 \cdot v_2}{m_1}$$

Číselně:

$$v_2 = \frac{997 \cdot 0,82 \cdot 30}{80}\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \doteq 409\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

Hasič by měl po jedné minutě hašení rychlost 409 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$!

2.5 Smykové tření a valivý odpor

2.5.1

Při stavbě pyramid ve starověkém Egyptě se používaly kamenné bloky o hmotnosti kolem 2,5 t. Jakou silou by museli otroci tahat ve vodorovném směru za lana, aby překonali třecí sílu mezi kamenným blokem a kamennou zemí a posouvali bloky po vodorovné rovině, kdyby si svou práci nijak neulehčovali? Koeficient tření je přibližně 0,7.

Řešení

$$\boxed{\begin{aligned} &m = 2,5\ \mathrm{t} = 2500\ \mathrm{kg} \\ &f = 0,7 \\ &F = ?\ [\mathrm{N}] \end{aligned}}$$

Pro překonání tření by museli za lano tahat alespoň silou rovnou právě třecí síle, tedy:

$$F = F_t = f \cdot g \cdot m$$

Po dosazení hodnot ze zadání:

$$F = 0,7 \cdot 9,81 \cdot 2500\ \mathrm{N} \doteq 17\,168\ \mathrm{N} \doteq 17,2\ \mathrm{kN}$$

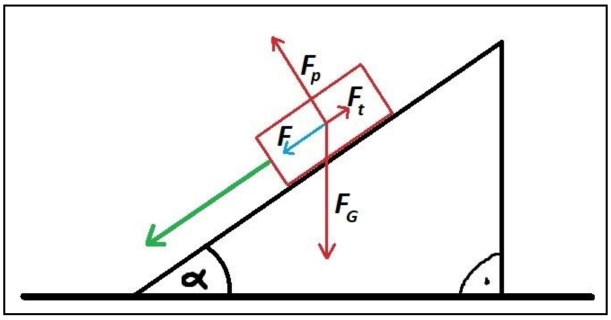
Otroci museli tahat dohromady silou nejméně 17,2 kN.

2.5.2

Spočítejte, jaké je celkové zrychlení kamenného bloku o hmotnosti 3,8 t, jestliže se nachází na nakloněné rovině se sklonem 40°. Koeficient tření je 0,7.

Řešení

$m = 3{,}8\ \text{t} = 3\,800\ \text{kg}$
$f = 0{,}7$
$\alpha = 40°$
$a = ?\ [\text{m}\cdot\text{s}^{-2}]$



Obr. č. 14

Celkové zrychlení určíme složením všech sil působících na blok a použitím vztahu:

$$a = \frac{F}{m}$$

Celková síla působící na blok je dána vektorovým součtem síly tíhové, tlakové síly podložky a třecí síly:

$$\vec{F} = \vec{F}_G + \vec{F}_p + \vec{F}_t$$

Když si uvědomíme, že blok se může pohybovat pouze ve směru rovnoběžném k nakloněné rovině (zelená šipka), výsledná síla je tedy rovna pouze součtu kolmých průmětů sil do tohoto směru. Vzhledem k tomu, že tlaková síla podložky je k tomuto směru kolmá, s ní nemusíme dále počítat.
Pro velikost výsledné síly tedy platí:

$$F = m \cdot g \cdot \sin\alpha - f \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha = m \cdot g \cdot (\sin\alpha - f \cdot \cos\alpha)$$

A potom je celkové zrychlení:

$$a = \frac{F}{m} = g \cdot (\sin\alpha - f \cdot \cos\alpha)$$

Číselně:

$$a = 9{,}81 \cdot (\sin(40°) - 0{,}7 \cdot \cos(40°))\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2} \doteq 1{,}05\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

Blok by měl zrychlení 1,05 $\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

2.5.3

Vypočítejte, jaké budou brzdné dráhy automobilu jedoucího 50 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$, jestliže porovnáme brzdění na suché vozovce a na zasněžené vozovce, kde se tvoří náledí. Koeficient tření na suché vozovce je 0,6 a na náledí přibližně 0,3. O kolik se brzdná dráha prodlouží?

Řešení

$$\boxed{\begin{array}{l} v_0 = 50\ \mathrm{km \cdot h^{-1}} \doteq 13{,}89\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \\ f_1 = 0{,}6 \\ f_2 = 0{,}2 \\ v = 0\ \mathrm{km \cdot h^{-1}} = 0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} \\ \Delta s = ?\ [\mathrm{m}] \end{array}}$$

Nejprve potřebujeme obecně spočítat velikost zrychlení, se kterým automobil při brzdění zpomaluje:

$$a = \frac{F_t}{m}, \qquad \text{kde} \qquad F_t = f \cdot m \cdot g$$

Zrychlení auta je tedy:

$$a = \frac{f \cdot m \cdot g}{m} = f \cdot g$$

Dále potřebujeme vzorce pro okamžitou rychlost a dráhu zpomaleného pohybu:

$$v = v_0 - a \cdot t = 0$$

$$s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

Z prvního vzorce po úpravě a dosazením dříve odvozeného vztahu pro zrychlení dostaneme vztah pro dobu, po kterou bude brzdění probíhat:

$$t = \frac{v_0}{a} = \frac{v_0}{f \cdot g}$$

Tu stačí dosadit do vztahu pro dráhu zpomaleného pohybu a získáme brzdnou dráhu:

$$s = v_0 \cdot \frac{v_0}{f \cdot g} - \frac{1}{2} \cdot f \cdot g \cdot \left(\frac{v_0}{f \cdot g} \right)^2 = \frac{v_0^2}{2 \cdot f \cdot g}$$

Pro jednotlivé případy dostaneme tyto brzdné dráhy:

$$s_1 = \frac{v_0^2}{2 \cdot f_1 \cdot g}$$
$$s_2 = \frac{v_0^2}{2 \cdot f_2 \cdot g}$$

A rozdíl brzdných drah je tedy:

$$\Delta s = s_2 - s_1$$

Což pro zadané hodnoty vychází číselně:

$$s_1 = \frac{13,9^2}{2 \cdot 0,6 \cdot 10}\,\mathrm{m} \doteq 16,1\,\mathrm{m}$$
$$s_2 = \frac{13,9^2}{2 \cdot 0,2 \cdot 10}\,\mathrm{m} \doteq 48,3\,\mathrm{m}$$
$$\Delta s = 48,3 - 16,1\,\mathrm{m} = 32,2\,\mathrm{m}$$

Brzdná dráha automobilu na suché vozovce je 16,1 m na náledí pak 48,3 m, což znamená, že při náledí se brzdná dráha prodlouží o 32,2 m.

2.6 Neinerciální vztažné soustavy a setrvačné síly

2.6.1

Jaké zrychlení by musel mít výtah rozjíždějící se směrem dolů, aby člověk uvnitř měl pocit, jako by se nacházel na Měsíci? Tíhové zrychlení na Měsíci je přibližně 1,62 $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

Řešení

$$\boxed{\begin{aligned} a_M &= 1,62\,\mathrm{m \cdot s^{-2}} \\ a &= ?\,[\mathrm{m \cdot s^{-2}}] \end{aligned}}$$

Vzhledem k tomu, že tíhové zrychlení na Měsíci je menší, musel by se výtah rozjíždět směrem dolů, nebo naopak zpomalovat při pohybu směrem nahorů. Aby celkové zrychlení bylo stejné jako to tíhové na Měsíci muselo by tedy platit:

$$a_M = g - a$$

Z čehož plyne, že zrychlení výtahu je:

$$a = g - a_M$$

Číselně:

$$a = 9{,}81 - 1{,}62\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} = 8{,}19\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

Výtah by se musel rozjíždět se zrychlením 8,19 $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

2.6.2

Jarda se cestou vlakem nudil, a tak si chtěl jednoduchým experimentem určit jaké zrychlení má vlak při rozjíždění. Měl s sebou svoji skákací kuličku, která váži 100 g. Na karoserii vlaku si před nástupem přečetl, že jeden vagón měří přibližně 15 m. Potom mu už jenom stačilo kuličku položit na jedné straně vagónu, počkat až se vlak začne rozjíždět a pomocí stopek změřit, že kulička přejede díky setrvačné síle celou délku vagónu za 10 s. Jaká hodnota zrychlení mu vyšla, jestliže nezapočítal tření.

Řešení

$$\boxed{\begin{aligned} &m = 100\ \mathrm{g} = 0{,}1\ \mathrm{kg}\\ &l = 15\ \mathrm{m}\\ &t = 10\ \mathrm{s}\\ &a = ?\ [\mathrm{m \cdot s^{-2}}] \end{aligned}}$$

Kulička se pohybovala rovnoměrně zrychleným pohybem a pro její dráhu tedy platí:

$$l = \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot t^2$$

Z čehož jednoduše vyjádříme zrychlení kuličky resp. vlaku:

$$a = \frac{2 \cdot l}{t^2}$$

Pro zadané hodnoty:

$$a = \frac{2 \cdot 15}{10^2}\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} = 0{,}3\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

Bez za počítání tření by zrychlování vlaku mělo hodnotu 0,3 $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

2.6.3

Martina se ve škole doslechla, že váha neměří přímo hmotnost, ale tlakovou sílu vydělenou tíhovým zrychlením $M = \frac{F}{g}$. Jednou odpoledne si řekla, že si tuto informaci ověří.

Nejprve si zjistila na internetu, že výtah v jejich domě se rozjíždí a zastavuje se zrychlením $3\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$. Poté už stačilo zvážit se ve výtahu při rozjíždění směrem dolů a při brzdění, když kabina pohybovala směrem dolů. Jaké hodnoty naměřila v pohybujícím se výtahu, jestliže v klidu jí váha ukázala 50 kg.

Řešení

$$\boxed{\begin{array}{l} M = m = 50\ \mathrm{kg} \\ a = 3\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} \\ M_1 = ?\ [\mathrm{kg}] \\ M_2 = ?\ [\mathrm{kg}] \end{array}}$$

Hodnota uvedená na displeji váhy je rovna tlakové síle dělené tíhovým zrychlením:

$$M = \frac{F}{g}$$

Při rozjíždění a brzdění výtahu se z výtahu stává neinerciální vztažná soustava a proto tlaková síla, kterou Martina působí na váhu je dána součtem vektorů tíhové síly a setrvačné síly:

$$\vec{F} = \vec{F}_G + \vec{F}_S,$$

kde tíhová resp. setrvačná síla je:

$$\vec{F}_G = m \cdot \vec{g} \qquad \text{resp.} \qquad \vec{F}_S = m \cdot \vec{a}$$

Při rozjíždění směrem dolů mají síly opačný směr a tudíž se odečítají.
Po dosazení do vztahu pro M:

$$M_1 = \frac{F_G - F_S}{g} = \frac{m \cdot g - m \cdot a}{g} = m \cdot \left(1 - \frac{a}{g}\right)$$

Při brzdění při pohybu směrem dolů mají síly stejný směr a tudíž se sčítají.
Po dosazení do vztahu pro M:

$$M_2 = \frac{F_G + F_S}{g} = \frac{m \cdot g + m \cdot a}{g} = m \cdot \left(1 + \frac{a}{g}\right)$$

Číselně pak dostaneme:

$$M_1 = 50 \cdot \left(1 - \frac{3}{10}\right) \text{kg} = 35 \text{ kg}$$

$$M_2 = 50 \cdot \left(1 + \frac{3}{10}\right) \text{kg} = 65 \text{ kg}$$

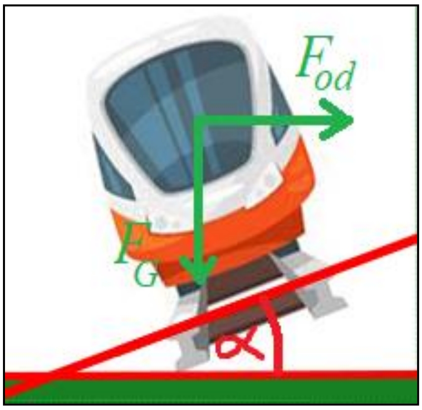
Při rozjíždění směrem dolů váha ukazovala hodnotu 35 kg a když potom v přízemí výtah brzdil ukazovala váha hodnotu 65 kg.

2.0.4

Pro zpříjemnění cesty vlakem jsou některé zatáčky tzv. klopené. To znamená, že spojnice kolejí není vodorovná, ale nakloněná pod určitým úhlem α. Důsledkem je to, výsledná síla, složená z tíhové a odstředivé síly, působí stále kolmo k podlaze vlaku. Jaký úhel α by musely koleje svírat s vodorovnou rovinou, aby při průjezdu zatáčkou tvaru kružnice o poloměru 400 m tento jev nastal? Za rychlost vlaku použijte maximální možnou rychlost v ČR, tedy 160 $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$.

Řešení

$v = 160 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} \doteq 44{,}4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
$r = 400 \text{ m}$
$\alpha = ?\,[°]$



Obr. č. 15

Aby výsledná síla směřovala kolmo k podlaze vlaku, musí se složky obou sil, které jsou s podlahou vlaku rovnoběžné vyrušit neboli jejich velikosti se musí rovnat:

$$F_G \cdot \sin\alpha = F_{od} \cdot \cos\alpha$$

Z čehož plyne, že pro $\text{tg}\alpha$ platí:

$$\text{tg}\alpha = \frac{F_{od}}{F_G},$$

kde tíhová síla resp. odstředivá síla jsou:

$$F_G = m \cdot g \qquad resp. \qquad F_{od} = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

Po dosazení:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{m \cdot \frac{v^2}{r}}{m \cdot g} = \frac{v^2}{g \cdot r}$$

Pro hodnoty ze zadání:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{44,4^2}{9,81 \cdot 400} \doteq 0,5024 \Rightarrow \alpha \doteq 26,4\,°$$

Koleje by musely s vodorovnou rovinou svírat úhel přibližně 26,4 °.

Mechanická energie a mechanická práce

3.1 Kinetická energie

3.1.1

Spočítejte kinetickou energii Bugatti Veyron při maximální rychlosti, tedy 407 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$. Hmotnost tohoto auta je 1 888 kg.

Řešení

$m = 1888\ \mathrm{kg}$

$v_{\max} = 407\ \mathrm{km \cdot h^{-1}} = 113{,}1\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$

$E_{k_{\max}} = ?\ [\mathrm{J}]$

Kinetickou energii spočítáme ze vztahu:

$$E_{k_{\max}} = \frac{1}{2} m v_{\max}^2$$

Číselně:

$$E_{k_{\max}} = \frac{1}{2} \cdot 1888 \cdot 113{,}1^2\ \mathrm{J} \doteq 12\,075\,280\ \mathrm{J} \doteq 12{,}08\ \mathrm{MJ}$$

Kinetická energie auta je přibližně 12,08 MJ.

3.1.2

Jakou rychlostí by automobil z příkladu 3.1.1 musel jet, aby jeho kinetická energie byla čtyřikrát menší?

Řešení

$m = 1888\ \mathrm{kg}$

$E_{k_{\max}} = 12{,}08\ \mathrm{MJ} = 12{,}08 \cdot 10^6\ \mathrm{J}$

$E_k = \dfrac{E_{k_{\max}}}{4}$

$v = ?\ [\mathrm{km \cdot h^{-1}}]$

Pro určení rychlosti stačí dát do rovnosti obecný vztah pro kinetickou energii a zadaný poměr kinetických energií:

$$E_k = \frac{E_{k_{\max}}}{4} \qquad \text{a} \qquad E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

Dostaneme rovnici:

$$\frac{E_{k_{\max}}}{4} = \frac{1}{2} m v^2$$

Z čehož vyjádříme hledanou rychlost:

$$v = \sqrt{\frac{2E_k}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot \frac{E_{k_{\max}}}{4}}{m}} = \sqrt{\frac{2E_{k_{\max}}}{4m}} = \sqrt{\frac{E_{k_{\max}}}{2m}}$$

Po dosazení zadaných hodnot:

$$v = \frac{407}{2}\ \mathrm{km \cdot hod^{-1}} = 203{,}5\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$$

Rychlost by musela být přibližně 203,5 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

3.1.3

Tereza si chtěla vyzkoušet bungee jumping z nejvyššího mostu v ČR. Ten je ve výšce 62 m nad hladinou řeky pod ním. Jakou kinetickou rychlost bude Tereza mít po 2 vteřinách od skoku? Počítejte s tím, že Tereza váží 55 kg.

Řešení

$$\boxed{\begin{aligned} &m = 55\ \mathrm{kg} \\ &t = 2\ \mathrm{s} \\ &E_k = ?\ [\mathrm{kJ}] \end{aligned}}$$

Abychom mohli spočítat kinetickou energii pomocí vztahu:

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2,$$

potřebujeme nejprve vyjádřit rychlost při volném pádu:

$$v = gt$$

Nyní už stačí dosadit:

$$E_k = \frac{1}{2}m(gt)^2 = \frac{1}{2}mg^2t^2$$

Pro zadané hodnoty:

$$E_k = 0,5 \cdot 75 \cdot 9,81^2 \cdot 2^2 \text{ J} \doteq 10\,586 \text{ J} \doteq 10,6 \text{ kJ}$$

Tereza bude mít kinetickou energii 10,6 kJ.

3.2 Potenciální energie

3.2.1

Maximální dosažitelná výška Boeingu 747 je asi 13,5 km, a to při hmotnosti kolem 200 t. Spočítejte jeho potenciální energii v tomto případě.

Řešení

$m = 200 \text{ t} = 2 \cdot 10^5 \text{ kg}$

$h = 13,5 \text{ km} = 1,35 \cdot 10^4 \text{ m}$

$E_p = ? \, [\text{GJ}]$

Potenciální energii vypočítáme přímo ze vztahu:

$$E_p = mgh$$

Pro zadané hodnoty:

$$E_p = 2 \cdot 10^5 \cdot 9,81 \cdot 1,35 \cdot 10^4 \text{ J} \doteq 26,49 \cdot 10^9 \text{ J} = 26,49 \text{ GJ}$$

Jeho potenciální energie je 26,49 GJ.

3.2.2

V jaké výšce by plně naložený Boeing 747 o hmotnosti 350 t musel letět, aby jeho potenciální energie byla stejná jako v příkladu 3.2.1?

Řešení

$m = 350\ \text{t} = 3{,}5 \cdot 10^5\ \text{kg}$
$E_p = 26{,}49\ \text{GJ} = 26{,}49 \cdot 10^9\ \text{J}$
$h = ?\ [\text{m}]$

Ze vztahu pro potenciální energii:

$$E_p = mgh$$

si vyjádříme hledanou výšku:

$$h = \frac{E_p}{mg}$$

Číselně:

$$h = \frac{26{,}49 \cdot 10^9}{3{,}5 \cdot 10^5 \cdot 9{,}81}\ \text{m} = 7\,715\ \text{m}$$

Musel by letět ve výšce 7 715 m.

3.2.3

Světový rekord ve skoku do výšky drží Javier Sotomayor a má hodnotu 245 cm. Předpokládejme, že těsně před výskokem bylo jeho těžiště ve výšce 1 m nad zemí a v nejvyšším bodě bylo alespoň ve výšce laťky, kterou přeskočil – tedy 245 cm. Jak se změnila jeho potenciální energie při výskoku? Počítejte s hmotností 82 kg.

Řešení

$m = 82\ \text{kg}$
$h_1 = 100\ \text{cm} = 1\ \text{m}$
$h_2 = 245\ \text{cm} = 2{,}45\ \text{m}$
$\Delta E_p = ?\ [\text{J}]$

Změnu potenciální energie spočteme jako rozdíl energií před výskokem a v maximální výšce:

$$\Delta E_p = E_{p_2} - E_{p_1}$$

Pro jednotlivé výšky platí:

$$E_{p_2} = mgh_2$$
$$E_{p_1} = mgh_1$$

Dosazením dostaneme:

$$\Delta E_p = mgh_2 - mgh_1 = mg(h_2 - h_1)$$

Pro konkrétní hodnoty:

$$\Delta E_p = 82 \cdot 9{,}81 \cdot (2{,}45 - 1)\,\mathrm{J} \doteq 1166\,\mathrm{J}$$

Jeho potenciální energie se při skoku zvětšila o 1 166 J.

3.3 Mechanická energie a zákon zachování energie

3.3.1

Jaká je celková mechanická energie Boeingu 747 z příkladu 3.3.1, jestliže v této výšce letěl rychlostí 970 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$?

Řešení

$m = 200\ \mathrm{t} = 2 \cdot 10^5\ \mathrm{kg}$
$E_p = 26{,}49\ \mathrm{GJ} = 26{,}49 \cdot 10^9\ \mathrm{J}$
$v = 970\ \mathrm{km \cdot h^{-1}} \doteq 269{,}4\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$
$E = ?\ [\mathrm{GJ}]$

Celkovou mechanickou energii spočítáme jako součet kinetické a potenciální:

$$E = E_p + E_k,$$

kde kinetická energie je:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

Tedy celková energie je rovna:

$$E = E_p + \frac{1}{2}mv^2$$

Číselně:

$$E = 26{,}49 \cdot 10^9 + 0{,}5 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 269{,}4^2 \text{ J} \doteq 33{,}75 \cdot 10^9 \text{ J} = 33{,}75 \text{ GJ}$$

Celková mechanická energie Boeingu je přibližně 33,75 GJ.

3.3.2

Karla si házela o zem skákací kuličkou. Během pozorování dokázala zjistit, že v jednom okamžiku, když kulička letěla směrem dolů, měla rychlost 5 m·s^{-1} a byla ve výšce 1 metr. Jaká byla maximální výška, do které kulička během skákání vyskočila?

Řešení

$$\boxed{\begin{aligned} v_1 &= 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \\ h_1 &= 1 \text{ m} \\ v_2 &= 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \\ \text{h}_{\text{max}} &= ?\,[\text{m}] \end{aligned}}$$

K řešení příkladu využijeme zákon zachování mechanické energie a toho, že v maximální výšce je rychlost kuličky a tedy i kinetická energie nulová:

$$E_1 = E_{k_1} + E_{p_1} = E_{k_2} + E_{p_2} = E_2,$$

kde E_k resp. E_p obecně spočítáme jako:

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 \qquad \textit{resp.} \qquad E_p = mgh$$

Po dosazení předchozích vztahů do zákonu zachování energie:

$$\frac{1}{2} m v_1^2 + mgh_1 = \frac{1}{2} m v_2^2 + mgh_2$$

Nyní stačí vyjádřit maximální výšku $h_{\text{max}} = h_2$:

$$h_{\text{max}} = \frac{\frac{1}{2} m v_1^2 + mgh_1 - \frac{1}{2} m v_2^2}{mg} = \frac{v_1^2 + 2gh_1 - v_2^2}{2g}$$

Po dosazení číselných hodnot ze zadání:

$$h_{max} = \frac{5^2 + 2 \cdot 9{,}81 \cdot 1 - 0^2}{2 \cdot 9{,}81}\ \mathrm{m} = 2{,}27\ \mathrm{m}$$

Maximální výška byla 2,27 m.

3.3.3

Určete závislosti kinetické, potenciální a celkové energie na čase pro volný pád tělesa o hmotnosti 1 kg z výšky 20 m. Vytvořte tabulku, do které spočítáte konkrétní hodnoty těchto veličin pro časy $t \in (0;2)\ s$. Časový krok zvolte alespoň 0,2 s.

Řešení

$$\boxed{\begin{aligned} m &= 1\ \mathrm{kg} \\ h_0 &= 20\ \mathrm{m} \end{aligned}}$$

Celková mechanická energie se zachovává a tudíž musí být po celou dobu rovna počáteční potenciální energii:

$$E = mgh_{max}$$

Abychom určili kinetickou energii, musíme nejprve vyjádřit rychlost ze vztahu:

$$v = gt$$

a poté dosadit:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(gt\right)^2 = \frac{1}{2}mg^2t^2$$

Pro určení potenciální energie můžeme využít toho, že už známe průběh celkové energie a kinetické energie:

$$E = E_k + E_p$$

$$E_p = E - E_k = mgh_{max} - \frac{1}{2}mg^2t^2$$

Pro výpočet číselných hodnot dosadíme hodnoty ze zadání:

$$[\mathrm{E}] = 1 \cdot 10 \cdot 20 = 200$$

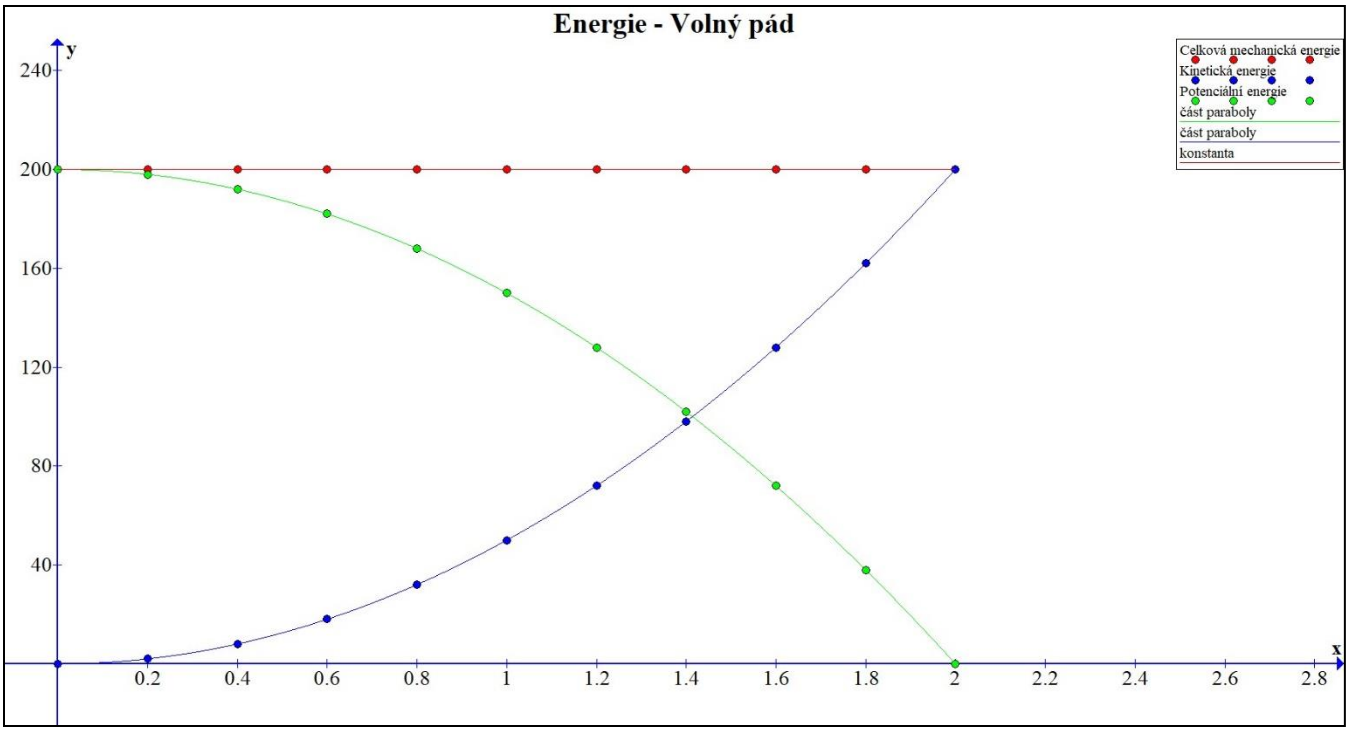
$$[\mathrm{E}_k] = 0,5 \cdot 1 \cdot 10^2 \cdot t^2 = 50 \cdot t^2$$

$$[\mathrm{E}_p] = 200 - 50 \cdot t^2$$

Tabulka vypočtených hodnot:

t [s]	E [J]	E_k [J]	E_p [J]
0	200	0	200
0,2	200	2	198
0,4	200	8	192
0,6	200	18	182
0,8	200	32	168
1,0	200	50	150
1,2	200	72	128
1,4	200	98	102
1,6	200	128	72
1,8	200	162	38
2,0	200	200	0

Tab. č. 3



Obr. č. 16

3.4 Mechanická práce

3.4.1

Největším vodopádem světa je Salto Ángel ve Venezuele, který měří 979 m. Jakou práci vykoná tíhová síla, během volného pádu až k hladině, na kapku vody, která má hmotnost 0,1 g?

Řešení

$$\boxed{\begin{aligned}&m = 0{,}1\,\text{g} = 10^{-4}\,\text{kg}\\&s = 979\,\text{m}\\&W = ?\,[\text{J}]\end{aligned}}$$

Práci tíhové síly spočítáme ze vztahu:

$$W = F_G \cdot s,$$

kde tíhovou sílu vyjádříme jako:

$$F_G = mg$$

Dosadíme:

$$W = mgs$$

Pro dané hodnoty:

$$W = 10^{-4} \cdot 9{,}81 \cdot 979\ \text{J} \doteq 0{,}96\ \text{J}$$

Tíhová síla vykoná na kapku práci 0,96 J.

3.4.2

Jakou práci musel vykonat 75 kg vážící cyklista (dohromady s kolem) při uražení vzdálenosti 2 km, jestliže během trasy překonal 50 m nadmořské výšky. Jeho rychlost na konci úseku byla o $5\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ větší.

Řešení

$$\boxed{\begin{aligned}&m = 75\,\text{kg}\\&\Delta h = 50\,\text{m}\\&\Delta v = 5\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}\\&W = ?\,[\text{kJ}]\end{aligned}}$$

Celková práce je rovna celkové změně mechanické energie:

$$W = \Delta E_p + \Delta E_k,$$

kde změny kinetické resp. potenciální energie jsou:

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \Delta v^2 \qquad \textit{resp.} \qquad E_p = m \cdot g \cdot \Delta h$$

Po dosazení dostaneme celkovou práci:

$$W = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \Delta v^2 + m \cdot g \cdot \Delta h$$

Číselně:

$$W = 0,5 \cdot 75 \cdot 5^2 + 75 \cdot 9,81 \cdot 50 \text{ J} = 37\,725 \text{ J} \doteq 37,7 \text{ kJ}$$

Cyklista musel vykonat práci 37,7 kJ.

3.4.3

Parašutista vážící 80 kg (i s veškerým vybavením) vyskočil z letadla a letěl volným pádem až k hraniční výšce, kde musel otevřít padák. Jakou práci vykonaly odporové síly působící na padák během zbytku letu, jestliže před otevřením padáku letěl parašutista rychlostí 200 $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ a padák otevřel ve výšce 1 km nad zemí. Rychlost při přistání byla 2 $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Řešení

$m = 80 \text{ kg}$
$h_1 = 1 \text{ km} = 10^3 \text{ m}$
$h_2 = 0 \text{ m}$
$v_1 = 200 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 55,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
$v_2 = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
$W = ?\,[\text{MJ}]$

Práci odporových sil spočítáme opět jako rozdíl celkových energií v daných dvou okamžicích, přičemž v obou má celková energie nenulovou kinetickou i potenciální složku:

$$W = E_2 - E_1,$$

kde:

$$E_1 = E_{k_1} + E_{p_1}$$
$$E_2 = E_{k_2} + E_{p_2}$$

Obě složky obecně spočítáme jednoduše pomocí vztahů:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$
$$E_p = mgh$$

Dosazením do vztahu pro práci a poté za jednotlivé složky energie poúpravě dostaneme:

$$W = E_{k_2} + E_{p_2} - E_{k_1} - E_{p_1} = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2 - \frac{1}{2}mv_1^2 - mgh_1 = m\left[\left(\frac{v_2^2 - v_1^2}{2}\right) + g\left(h_2 - h_1\right)\right]$$

Pro číselné hodnoty ze zadání:

$$W = 80 \cdot \left[\left(\frac{2^2 - 55{,}6^2}{2}\right) + 9{,}81 \cdot \left(0 - 1\,000\right)\right] \mathrm{J} \doteq 908\,294\ \mathrm{J} \doteq 0{,}91\,\mathrm{MJ}$$

Odporové síly vykonaly práci 0,91 MJ.

3.5 Výkon a účinnost

3.5.1

Vypočítejte průměrný výkon cyklisty z příkladu 3.4.2 jestliže ony 2 km ujel za 5 min.

Řešení

$$\boxed{\begin{aligned} &W = 87\,281\,\mathrm{J} \\ &t = 5\ \mathrm{min} = 300\ \mathrm{s} \\ &P_P = ?\,[\mathrm{W}] \end{aligned}}$$

Průměrný výkon spočítáme jako celkovou práci za čas:

$$P_P = \frac{W}{t}$$

Pro konkrétní hodnoty:

$$P_P = \frac{87\,281}{300}\,\mathrm{W} \doteq 291\,\mathrm{W}$$

Průměrný výkon cyklisty byl 291 W.

3.5.2

Jaká je účinnost motoru Bugatti Veyron, jestliže při maximální rychlosti 407 $\mathrm{km \cdot h^{-1}}$ mají odporové síly velikost 6 600 N a příkon vzniklý spalováním paliva je 2,4 MJ?

Řešení

$F = 6\,600\ \mathrm{N}$

$v = 407\ \mathrm{km \cdot h^{-1}} = 113{,}1\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$

$P_0 = 2{,}4\mathrm{MJ} = 2{,}4 \cdot 10^6\ \mathrm{J}$

$\eta = ?\,[\%]$

Účinnost je dána podílem výkonu a přikonu:

$$\eta = \frac{P}{P_0},$$

kde pro vyjádření výkonu použijeme vztah:

$$P = Fv$$

Dosazením dostaneme:

$$\eta = \frac{Fv}{P_0}$$

Pro zadané hodnoty:

$$\eta = \frac{6600 \cdot 113{,}1}{2{,}4 \cdot 10^6} \doteq 0{,}31 \Rightarrow 31\,\%$$

Účinnost motoru je přibližně 31 %.

3.5.3

Jeřáb ve skladišti přemísťoval kontejnery o výšce 3 m a hmotnosti 50 t. Všechny kontejnery, které ležely na zemi začal skládat do sloupců po pěti kontejnerech. Během hodiny dokázal jeřábník poskládat 3 sloupce. Spočítejte průměrný výkon jeřábu.

Řešení

$m = 50\text{ t} = 5 \cdot 10^4\text{ kg}$
$h = 3\text{ m}$
$t = 1\text{ h} = 3\,600\text{ s}$
$P_p = ?\,[\text{kW}]$

Průměrný výkon opět spočteme jako podíl celkové práce a času:

$$P_p = \frac{W}{t}$$

Práci si tentokrát vyjádříme obecně jako změnu potenciální energie:

$$W = \Delta E_p = m \cdot g \cdot \Delta h$$

Nejdůležitější je uvědomit si, že při stavbě sloupců se výška prvního (nejnižšího) kontejneru nezmění. Výška druhého se zvětší o 3 metry (tedy o výšku předchozího kontejneru), výška třetího o 6 metrů atd.
Pro každý ze tří sloupců tedy bude platit:

1. kontejner:

$$\Delta E_{p_1} = 0\text{ J}$$

2. kontejner:

$$\Delta E_{p_1} = m \cdot g \cdot \Delta h = mgh$$

3. kontejner:

$$E_{p_2} = \ldots = mg \cdot (2h)$$

4. kontejner:

$$E_{p_3} = \ldots = mg \cdot (3h)$$

5. kontejner:

$$E_{p_4} = \ldots = mg \cdot (4h)$$

Práce pro postavení jednoho sloupce je tedy:

$$W_{sloupec} = mgh + mg\cdot(2h) + mg\cdot(3h) + mg\cdot(4h) = mgh\cdot(1+2+3+4) = 10\cdot mgh$$

Jelikož zvládl postavit tři sloupce dostáváme celkovou práci:

$$W_{celk.} = W_{sloupec} = 30\cdot mgh$$

A pro průměrný výkon tedy platí:

$$P_p = \frac{30\cdot mgh}{t}$$

Číselně:

$$P_p = \frac{30\cdot 5\cdot 10^4\cdot 9{,}81\cdot 3}{3\,600}\ \mathrm{W} = 12\,262{,}5\ \mathrm{W} \doteq 12{,}3\ \mathrm{kW}$$

Průměrný výkon jeřábu byl přibližně 12,3 kW.

3.0.4

V roce 1969 raketa Saturn V vynesla za pouhých 12 min kosmickou loď Apollo 11, která později dopravila první astronauty na Měsíc, na oběžnou dráhu ve výšce přibližně 185 km nad místem startu, kde měla raketa rychlost přibližně 7,7 $\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$. Jakou při stoupání vykonaly motory raketoplánu práci a jaký byl jejich průměrný výkon? Gravitační zrychlení na oběžně dráze má hodnotu přibližně 9,3 m. s^{-2}. To, že raketa při výstupu, ztrácela vlivem spalování paliva na hmotnosti zanedbejte a počítejte s konstantní hmotností 3 000 t, rovněž zanedbejte počáteční rychlost rakety v důsledku otáčení Země.
(Ověřte si výsledný výkon s informacemi, které naleznete např. na internetu.)

Řešení

$t = 12\ \mathrm{min} = 720\ \mathrm{s}$
$h = 185\ \mathrm{km} = 1{,}85\cdot 10^5\ \mathrm{m}$
$v = 7{,}7\ \mathrm{km}\cdot\mathrm{s}^{-1} = 7{,}7\cdot 10^3\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$
$g' = 9{,}3\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$
$m = 3\,000\ \mathrm{t} = 3\cdot 10^6\ \mathrm{kg}$
$W = ?\ [\mathrm{J}]$
$\mathrm{P} = ?\ [\mathrm{W}]$

Při výpočtu práce můžeme použít změnu mechanické energie, kterou si rozepíšeme na kinetickou a potenciální složku:

$$W = \Delta E$$
$$\Delta E = \Delta E_p + \Delta E_k$$
$$\Delta E_p = E_{p_2} - E_{p_1}$$
$$\Delta E_k = E_{k_2} - E_{k_1}$$

Rotaci Země zanedbáváme a proto pro kinetickou energii před startem resp. na oběžné dráze platí:

$$E_{k_1} = 0 \qquad \text{resp.} \qquad E_{k_2} = \frac{1}{2}mv^2$$

Potenciální energie na povrchu Země bude nulová, avšak při výpočtu potenciální energie na oběžné dráze nesmíme zapomenout, že gravitační zrychlení na oběžné dráze se je jiné než u povrchu:

$$E_{p_1} = 0$$
$$E_{p_2} = mg'h$$

Celková práce tedy bude po dosazení a zahrnutí nulových energií E_{p_1} a E_{k_1}:

$$W = \Delta E_p + \Delta E_k = E_{p_2} - E_{p_1} + E_{k_2} - E_{k_1} = E_{p_2} + E_{k_2} = mg'h + \frac{1}{2}mv^2$$

Dosazením zadaných hodnot dostaneme:

$$W = 3\cdot 10^6 \cdot 9{,}3 \cdot 1{,}85\cdot 10^5 + 0{,}5\cdot 3\cdot 10^6 \cdot \left(7{,}7\cdot 10^3\right)^2 \text{ J} \doteq 941\cdot 10^{11}\text{ J}$$

Pro vypočtení průměrného výkonu už stačí dosadit do vztahu:

$$P = \frac{W}{t}$$

a dostaneme:

$$P = \frac{941 \cdot 10^{11}}{720}\,\mathrm{W} \doteq 1{,}31 \cdot 10^{11}\,\mathrm{W} = 131\,\mathrm{GW}$$

Motory rakety při výstupu na oběžnou dráhu vykonaly práci 941 · 10^{11} J a jejich výkon byl přibližně 131 GW.
(Tento výpočet je samozřejmě značným zjednodušením, avšak dává alespoň řádově dobrou představu o obrovském výkonu, který mají rakety používané pro lety do vesmíru.)

Gravitační pole

4.1 Newtonův gravitační zákon

4.1.1

Jakou gravitační silou působí Země na psa o hmotnosti 35 kg?

Řešení

$M_Z = 6 \cdot 10^{24}$ kg
$m = 35$ kg
$R_Z = 6\,378 \text{ km} = 6,378 \cdot 10^6$ m
$F = ?\,[\text{N}]$

Gravitační sílu spočítáme z Newtonova gravitačního zákonu:

$$F = \chi \frac{M_Z m}{R_Z^2}$$

Číselně:

$$F = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{6 \cdot 10^{24} \cdot 35}{\left(6,378 \cdot 10^6\right)^2} \text{ N} = 344,4 \text{ N}$$

Země působí na psa gravitační silou o velikosti 688,7 N.

4.1.2

Jakou hmotnost mají dvě stejné koule vzdálené 20 cm, které na sebe vzájemně působí gravitační silou o velikosti $1,668 \cdot 10^{-9}$ N?

Řešení

$m_1 = m_2$
$r = 20 \text{ cm} = 0,2$ m
$F = 1,668 \cdot 10^{-9}$ N
$m_1 = ?\,[\text{kg}]$

K určení hmotnosti opět výjdeme z Newtonova gravitačního zákonu:

$$F = \chi \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Vzhledem k tomu, že obě koule mají stejnou hmotnost můžeme z předchozího vztahu jednoduše vyjádřit:

$$m_1 m_2 = m_1^2 = \frac{F \cdot r^2}{\chi}$$

Z čehož po odmocnění dostaneme hledané hmotnosti:

$$m_1 = \sqrt{\frac{F \cdot r^2}{\chi}} = \sqrt{\frac{F}{\chi}} \cdot r$$

Pro zadané hodnoty dostaneme:

$$m_1 = \sqrt{\frac{1{,}668 \cdot 10^{-9}}{6{,}67 \cdot 10^{-11}}} \cdot 0{,}2 \text{ kg} \doteq 1 \text{ kg}$$

Každá z koulí váží přibližně 1 kg.

4.1.3

Jakou gravitační silou působí dohromady Země a Měsíc na přistávací modul Apolla 11 vážící 15 t stojícího a) na odvrácené straně Měsíce, b) na přivrácené straně Měsíce? Nezapomeňte, že v obou případech bude různá vzdálenost modulu od Země!

Řešení

$M_M = 7{,}3 \cdot 10^{22}$ kg
$R_M = 1\,740$ km $= 1{,}74 \cdot 10^6$ m
$M_Z = 6 \cdot 10^{24}$ kg
$R_Z = 6\,378$ km $= 6{,}378 \cdot 10^6$ m
$r = 384\,000$ km $= 3{,}844 \cdot 10^8$ m
$m = 15$ t $= 1{,}5 \cdot 10^4$ kg
$F_a = ?$ [N]
$F_b = ?$ [N]

Na odvrácené straně Měsíce budou Měsíc i Země na modul působit gravitačními silami stejného směru, tudíž pro získání výslednice můžeme tyto síly sečíst, naopak tomu bude na přivrácené straně. Navíc musíme brát v potaz, že na přivrácené straně je modul blíže k Zemi:

$$F_a = F_M + F_{Z_1} \qquad \text{resp.} \qquad F_b = F_M - F_{Z_2}$$

Sílu, kterou na modul působí Měsíc v obou případech spočítáme jednoduše jako:

$$F_M = \chi \frac{M_M m}{R_M^2}$$

Jak už bylo řečeno, pro gravitační sílu, kterou působí Země, musíme vypočítat pro oba případy zvlášť:

$$F_{Z_1} = \chi \frac{M_Z m}{\left(R_Z + r\right)^2}$$

$$F_{Z_2} = \chi \frac{M_Z m}{\left(R_Z + R_M + r\right)^2}$$

Nyní už stačí dosadit do vztahů pro výslednice:

$$F_a = \chi \frac{M_M m}{R_M^2} + \chi \frac{M_Z m}{\left(R_Z + r\right)^2}$$

$$F_b = \chi \frac{M_M m}{R_M^2} - \chi \frac{M_Z m}{\left(R_Z + R_M + r\right)^2}$$

A pro hodnoty ze zadání dostáváme:

$$F_a = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{7{,}3 \cdot 10^{22} \cdot 15\,095}{\left(1{,}74 \cdot 10^6\right)^2} + 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{6 \cdot 10^{24} \cdot 15\,095}{\left(6{,}378 \cdot 10^6 + 3{,}84 \cdot 10^8\right)^2}\ \mathrm{N} \doteq 24\,316\,\mathrm{N} = 24{,}316\ \mathrm{kN}$$

$$F_b = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{7{,}3 \cdot 10^{22} \cdot 15\,095}{\left(1{,}74 \cdot 10^6\right)^2} - 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{6 \cdot 10^{24} \cdot 15\,095}{\left(6{,}378 \cdot 10^6 + 1{,}74 \cdot 10^6 + 3{,}84 \cdot 10^8\right)^2} \doteq 24{,}237\ \mathrm{kN}$$

Na odvrácené straně Měsíce působí na přistávací modul gravitační síla 24,316 kN a na přivrácené straně síla o velikosti 24,237 kN.

4.2 Gravitační zrychlení

4.2.1

Spočítejte gravitační zrychlení na povrchu nejmenší (Merkur) a největší (Jupiter) planety Sluneční soustavy. (R_M = 4 880 km, M_M = 3,3 · 10^{23} kg, R_J = 143 000 km , M_J = 1,9 · 10^{27} kg)

Řešení

$M_M = 3,3 \cdot 10^{23}$ kg
$R_M = 2\,440 \text{ km} = 2,44 \cdot 10^6$ m
$M_J = 1,9 \cdot 10^{27}$ kg
$R_J = 71\,000 \text{ km} = 7,1 \cdot 10^7$ m
$a_{g_M} = ?\,[\text{m} \cdot \text{s}^{-2}]$
$a_{g_J} = ?\,[\text{m} \cdot \text{s}^{-2}]$

Pro obě planety můžeme použít přímo vzorec pro výpočet gravitačního zrychlení:

$$a_{g_M} = \frac{\chi M_M}{R_M^2}$$

$$a_{g_J} = \frac{\chi M_J}{R_J^2}$$

Číselně:

$$a_{g_M} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 3,3 \cdot 10^{23}}{\left(2,44 \cdot 10^6\right)^2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \doteq 3,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$a_{g_M} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,9 \cdot 10^{27}}{\left(7,1 \cdot 10^7\right)^2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \doteq 25,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Gravitační zrychlení na Merkuru je 3,7 $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$. Na Jupiteru je gravitační zrychlení 25,1 $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

4.2.2

I přesto, že astronauti na ISS zažívají beztížný stav, neznamená to, že na ně nepůsobí gravitační zrychlení Země. Spočítejte, jakou má hodnotu. Výška oběžné dráhy ISS je 412 km.

Řešení

$M_Z = 6 \cdot 10^{24}$ kg
$R_Z = 6\,378 \text{ km} = 6,378 \cdot 10^6$ m
$h = 412 \text{ km} = 4,12 \cdot 10^5$ m
$a_g = ?\,[\text{m} \cdot \text{s}^{-2}]$

Opět můžeme použít jednoduchý vztah pro výpočet gravitačního zrychlení, ale nesmíme zapomenout, že v tomto případě je jiná vzdálenost středů obou těles:

$$a_g = \frac{\chi M_Z}{\left(R_Z + h\right)^2}$$

Číselně:

$$a_g = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{\left(6{,}378 \cdot 10^6 + 4{,}12 \cdot 10^5\right)^2}\,\mathrm{m \cdot s^{-2}} \doteq 8{,}68\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

Na astronauty na ISS působí gravitační zrychlení Země o velikosti 8,68 $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

4.2.3

Ověřte výpočtem hmotnost Měsíce pouze na základě informací, že gravitační zrychlení na Měsíci je 6x menší než na Zemi, poloměr Měsíce je přibližně 3,7x menší než poloměr Země a hmotnost Země je 6 · 10^{24} kg.

Řešení

$$\boxed{\begin{aligned} a_{g_Z} &= 6 \cdot a_{g_M} \\ R_Z &= 3{,}7 \cdot R_M \\ M_Z &= 6 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg} \\ M_M &= ?\,[\mathrm{kg}] \end{aligned}}$$

Díky tomu že známe poměr gravitačních zrychlení na Zemi resp. Měsíci nám k výpočtu postačí vztahy a známý poměr:

$$a_{g_Z} = \frac{\chi M_Z}{R_Z^2} \qquad \text{resp.} \qquad a_{g_M} = \frac{\chi M_M}{R_M^2}$$

$$a_{g_Z} = 6 \cdot a_{g_M}$$

První dvě rovnice můžeme dosadit do známého poměru a dostaneme rovnici:

$$\frac{\chi M_Z}{R_Z^2} = 6 \cdot \frac{\chi M_M}{R_M^2}$$

Vydělíme obě strany strany rovnice gravitační konstantou χ a na jedné straně (libovolné) dosadíme ze zadání za poloměr jednoho z těles ($R_Z = 3,7 \cdot R_M$) a dostaneme rovnici:

$$\frac{M_Z}{\left(3,7 \cdot R_M\right)^2} = 6 \cdot \frac{M_M}{R_M^2}$$

Nyní stačí vydělit obě strany R_M a jednoduše vyjádřit hledanou neznámou:

$$M_M = \frac{M_Z}{6 \cdot 3,7^2}$$

Pro zadané hodnoty pak dostaneme:

$$M_M = \frac{6 \cdot 10^{24}}{6 \cdot 3,7^2}\,\mathrm{kg} = 7,3 \cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}$$

Hmotnost Měsíce je $7,3 \cdot 10^{22}$ kg.

4.3 Tíhové zrychlení při povrchu Země, Tíhová síla a tíha tělesa

4.3.1

Spočítejte tíhu, kterou působí člověk na severním pólu (g_p = 9,83 $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$) a na rovníku (g_r = 9,78 $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$) na Zemi.

Řešení

$$\boxed{\begin{aligned} &m = 62\,\mathrm{kg} \\ &g_p = 9,83\,\mathrm{m \cdot s^{-2}} \\ &g_r = 9,78\,\mathrm{m \cdot s^{-2}} \\ &G_p = ?\,[\mathrm{N}] \\ &G_r = ?\,[\mathrm{N}] \end{aligned}}$$

Pro oba případy stačí použít jednoduchý vztah pro výpočet tíhy:

$$G_p = m \cdot g_p$$
$$G_r = m \cdot g_r$$

Číselně:

$$G_p = 62 \cdot 9{,}83\ \mathrm{N} = 609{,}5\ \mathrm{N}$$
$$G_r = 62 \cdot 9{,}78\ \mathrm{N} = 606{,}4\ \mathrm{N}$$

Na severním pólu působí člověk na Zemi tíhou 609,5 N a na rovníku tíhou 606,4 N.

4.3.2

Jaká tíhová síla působí na člověka o hmotnosti 80 kg ve výtahu, který se a) pohybuje konstantní rychlostí b) zrychluje směrem nahoru se zrychlením 2 $\mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

Řešení

$$\boxed{\begin{array}{l} m = 80\ \mathrm{kg} \\ g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}} \\ F_{G_a} = ?\ [\mathrm{N}] \\ F_{G_a} = ?\ [\mathrm{N}] \end{array}}$$

Nejdůležitější je uvědomit si, že nehledě na tom, jestli je člověk v klidu, pohybu rovnoměrném nebo dokonce i zrychleném, bude na něj (u povrchu Země) působit vždy stejná tíhová síla:

$$F_{G_a} = F_{G_b} = m \cdot g$$

Po dosazení zadaných hodnot:

$$F_{G_a} = F_{G_b} = 80 \cdot 9{,}81\ \mathrm{N} = 784{,}8\ \mathrm{N}$$

V obou případech na člověka působí stejná tíhová síla o velikosti 784,8 N, jelikož zrychlení výtahu nijak neovlivňuje velikost ani směr této síly.

4.3.3

Jakou tíhou působí člověk z příkladu 4.3.2 na podlahu výtahu? Spočítejte pro a) i b).

Řešení

$m = 80$ kg
$g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$
$a = 2\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$
$G_a = ?\ [\mathrm{N}]$
$G_b = ?\ [\mathrm{N}]$

Tento výpočet už není stejně triviální jako v předchozím příkladu. Pokud je výtah v klidu, působí člověk na podlahu tíhou rovnou tíhové síle:

$$G_a = F_G = m \cdot g$$

Avšak pokud se výtah pohybuje se zrychlením, působí na člověka kromě tíhové síly také setrvačná síla. Tíha pak bude rovna vektorovému součtu těchto dvou sil. Vzheldem k tomu, že obě síly mají stejný směr, můžeme tíhové a setrvačné zrychlení jednoduše sečíst:

$$G_b = m \cdot (g + a)$$

Číselně pro oba případy:

$$G_a = 80 \cdot 9{,}81\ \mathrm{N} = 784{,}8\ \mathrm{N}$$
$$G_b = 80 \cdot (9{,}81 + 2)\ \mathrm{N} = 944{,}8\ \mathrm{N}$$

V prvním případě působí člověk na podlahu výtahu tíhou 784,8 N. Ve druhém případě tíhou 944,8 N.

4.4 Pohyby těles v homogenním tíhovém poli Země

4.4.1

Zdeněk vyhodil míč svisle vzhůru počáteční rychlostí 25 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Spočítejte výšku, ve které se míček nachází po 1 s, 2 s, 3 s a 4 s. Pro zjednodušení počítejte, že v okamžiku, kdy míček opustil jeho ruku, byl ve výšce 0 m.

Řešení

$v_0 = 25\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$
$t_1 = 1$ s
$t_2 = 2$ s
$t_3 = 3$ s
$h_1 = ?\ [\mathrm{s}]$
$h_2 = ?\ [\mathrm{s}]$
$h_3 = ?\ [\mathrm{s}]$

Pro výpočet nám stačí vztah popisující pohyb míčku ve svislém směru (dráha rovnoměrně zpomaleného pohybu):

$$h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

Po dosazení jednotlivých časů:

$$h_1 = 25 \cdot 1 - 0,5 \cdot 9,81 \cdot 1^2 \text{ m} = 20,1 \text{ m}$$
$$h_2 = 25 \cdot 2 - 0,5 \cdot 9,81 \cdot 2^2 \text{ m} = 30,4 \text{ m}$$
$$h_3 = 25 \cdot 3 - 0,5 \cdot 9,81 \cdot 3^2 \text{ m} = 30,9 \text{ m}$$

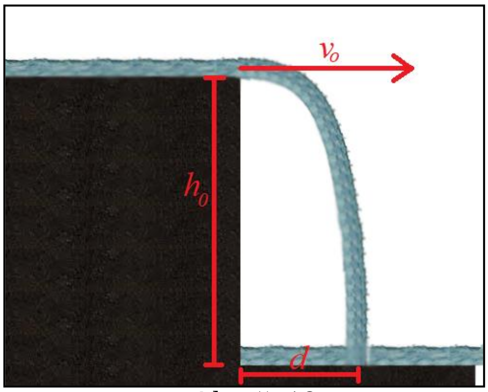
V časech 1 s, 2 s, 3 s se míček nachází ve výškách 20,1 m, 30,4 m, 30,9 m.

4.4.2

Do jaké (horizontální) vzdálenosti by doletěla voda z Niagarských vodopádů vysokých 52 m, která před vodopádem proudí rychlostí 2 $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, kdyby na ní nepůsobil odpor vzduchu?

Řešení

$$\boxed{\begin{aligned} h_0 &= 52 \text{ m} \\ v_0 &= 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \\ d &= ? [\text{m}] \end{aligned}}$$



Obr. č. 18

Abychom vypočetli vzdálenost d musíme nejprve zjistit dobu, kterou voda letí než dopadne na zem. Tu určíme ze vztahu pro pohyb ve svislém směru:

$$h = h_0 - \frac{1}{2} g t^2$$

Dosadíme $h = 0$ což odpovídá dopadu na zem a dostaneme:

$$t_d = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$$

Nyní stačí dosadit do vztahu pro vodorovnou složku pohybu:

$$x = v_0 t$$

a dostaneme:

$$d = v_0 \cdot t_d = v_0 \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$$

Číselně:

$$d = 2 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 52}{9,81}} \text{ m} = 6,5 \text{ m}$$

Voda by doletěla do vzdálenosti 6,5 m.

4.4.3

Jak dlouho by trval celý let míčku z příkladu 4.4.1, pokud bychom počítali s tím, že míček opustil Zdeňkovu ruku ve výšce 2 m?

Řešení

$h_0 = 2 \text{ m}$
$v_0 = 25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
$t_{\max} = ?\,[\text{m}]$

Vyjdeme opět ze vztahu:

$$h = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

Při dopadu je výška nulová, takže do po dosazení $h = 0$ do předchozího vztahu dostaneme kvadratickou rovnici pro neznámou t:

$$\frac{1}{2} g t^2 - v_0 t - h_0 = 0$$

Jejímž řešením je:

$$t_{1,2} = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot g \cdot h_0}}{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot g} = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2 \cdot g \cdot h_0}}{g}$$

Po dosazení zadaných hodnot dostáváme dvě řešení, avšak pouze jedno kladné:

$$t_{\max} = \frac{25 + \sqrt{25^2 + 2 \cdot 9{,}81 \cdot 2}}{9{,}81}\ \mathrm{s} = 5{,}18\ \mathrm{s}$$

Celková doba letu by byla 5,18 s.

4.5 Pohyby těles v centrálním gravitačním poli Země

4.5.1

Spočítejte číselnou hodnotu první kosmické rychlosti pro Zemi.

Řešení

$$\boxed{\begin{aligned} &M_Z = 6 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg} \\ &R_Z = 6\,378\ \mathrm{km} = 6{,}378 \cdot 10^6\ \mathrm{m} \\ &v_k = ?\,[\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}] \end{aligned}}$$

Pro spočtení stačí dosadit do vztahu:

$$v_k = \sqrt{\frac{\chi \cdot M_Z}{R_Z}}$$

Což dává číselnou hodnotu:

$$v_k = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{6{,}378 \cdot 10^6}}\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1} = 7\,921\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1} = 7{,}9\ \mathrm{km} \cdot \mathrm{s}^{-1}$$

První kosmická rychlost pro Zemi je 7,9 $\mathrm{km} \cdot \mathrm{s}^{-1}$.

4.5.2

Z gravitačního zákona plyne, že pokud by se poloměr Země menšil (při stejné hmotnosti), zvětšila by se úniková rychlost z povrchu Země. Kdyby byl tento poloměr natolik malý, že by úniková rychlost vzrostla až na rychlost světla, ze Země by se stala černá díra. Spočítejte, jaký poloměr by musela Země mít, aby toto nastalo.

(Tato hodnota se nazývá Schwarzschildův poloměr, zkuste si porovnat svůj výsledek například s tímto videem: https://www.youtube.com/watch?v=TZ56fsTQ1QQ)

Řešení

$M_Z = 6 \cdot 10^{24}$ kg
$v_p = c \doteq 3 \cdot 10^8$ m·s^{-1}
$R'_Z = ?\,[\mathrm{m}]$
$R'_S = ?\,[\mathrm{m}]$

K nalezení poloměru využijeme jednoduchý vztah pro únikovou rychlost:

$$v_p = \sqrt{\frac{2\chi M_Z}{R'_Z}}$$

Z čehož jednoduchou úpravou dostaneme:

$$R'_Z = \frac{2\kappa M_Z}{v_p^2}$$

Po dosazení zadaných hodnot:

$$R'_Z = \frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{\left(3 \cdot 10^8\right)^2}\ \mathrm{m} \doteq 0,008\,9\ \mathrm{m} = 8,9\ \mathrm{mm}$$

Schwarzschildův poloměr pro Zemi je pouhých 8,9 mm.

4.5.3

Spočítejte výšku nad povrchem Země, ve které by ISS obletovala planetu, aby rychlost oběhu zůstala stejná jako je teď (7,7 km·s^{-1}), kdyby se hmotnost Země 2x zvětšila a její poloměr 2x zmenšil.

Řešení

$R'_Z = \frac{1}{2} R_Z$
$M'_Z = 2 \cdot M_Z$
$v_k = 7,70$ km·s^{-1} = 7 700 m·s^{-1}
$h = ?\,[\mathrm{km}]$

Vyjdeme ze vztahu pro kruhovou rychlost pro změněné hodnoty hmotnosti a poloměru:

$$v_k = \sqrt{\frac{\chi \cdot M'_Z}{\left(R'_Z + h\right)}}$$

Dále si vyjádříme neznámou výšku *h*:

$$h = \frac{\chi \cdot M'_Z}{v_k^2} - R'_Z$$

A dosadíme změněné hodnoty podle zadání $R'_Z = \frac{1}{2} R_Z$ a $M'_Z = 2 \cdot M_Z$:

$$h = \frac{\chi \cdot 2 \cdot M_Z}{v_k^2} - \frac{1}{2} \cdot R_Z$$

Číselně:

$$h = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 6 \cdot 10^{24}}{7\,700^2} - \frac{1}{2} \cdot 6,378 \cdot 10^6 \text{ m} \doteq 10,310 \cdot 10^6 \text{ m} = 10\,310 \text{ km}$$

ISS by obletovala Zemi ve výšce 10 310 km.

4.6 Pohyby těles v gravitačním poli Slunce

4.6.1

Vypočítejte vzdálenost Marsu (v AU), jestliže doba jeho oběhu kolem Slunce je 687 dní. (Využijte např. známé hodnoty pro Zemi.)

Řešení

$$\boxed{\begin{aligned} T_Z &= 365 \text{ dní} \\ r_Z &= 1 \text{ AU} \\ T_M &= 687 \text{ dní} \\ r_M &= ?\,[\text{AU}] \end{aligned}}$$

Vyjdeme ze třetího Keplerova zákona s využitím znalostí o době oběhu Země a vzdálenosti od Slunce:

$$\frac{T_Z^2}{T_M^2} = \frac{r_Z^3}{r_M^3}$$

Vyjádříme hledaný poloměr:

$$r_M = r_Z \sqrt[3]{\frac{T_M^2}{T_Z^2}}$$

Po dosazení zadaných hodnot:

$$r_M = 1 \cdot \sqrt[3]{\frac{687^2}{365^2}}\ \text{AU} = 1,52\ \text{AU}$$

Vzdálenost Marsu od Slunce je 1,52 AU.

4.6.2

Poměr oběžných dob Venuše a Merkuru je přibližně 10,23:1. Jaký je poměr jejich středních vzdáleností?

Řešení

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{T_V}{T_M} = 10,23 \\ \dfrac{r_V}{r_M} = ? \end{array}}$$

Opět si napíšeme třetí Keplerův zákon pro zadané dvě planety:

$$\frac{T_V^2}{T_M^2} = \frac{r_V^3}{r_M^3}$$

A jednoduše vyjádříme hledaný poměr:

$$\frac{r_V}{r_M} = \left(\frac{T_V}{T_M}\right)^{\frac{2}{3}}$$

Po dosazení zadaného poměru dostáváme:

$$\frac{r_V}{r_M} = (10,23)^{\frac{2}{3}} = 4,71$$

Poměr středních vzdáleností Venuše a Merkuru je přibližně 4,71:1.

4.6.3

Určete vzdálenost Měsíce, víte-li že jeden oběh trvá 27,3 dne. ISS obletuje Zemi rychlostí 7 700 $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ve výšce 412 km.

Řešení

$$\boxed{\begin{aligned} &T_M = 27,3\ \text{dní} = 2,36\cdot 10^6\ \text{s} \\ &h = 412\ \text{km} = 4,12\cdot 10^5\ \text{m} \\ &v_{ISS} = 7\,700\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} \\ &R_Z = 6\,378\ \text{km} = 6,378\cdot 10^6\ \text{m} \\ &r_M = ?\ [\text{km}] \end{aligned}}$$

Hlavním vztahem bude opět třetí Keplerův zákon, tentokrát pro soustavu Země - ISS a Měsíc:

$$\frac{T_M^2}{T_{ISS}^2} = \frac{r_M^3}{r_{ISS}^3}$$

Nejprve však potřebujeme vyjádřit poloměr kružnice r_{ISS}, po které stanice Zemi obletuje:

$$r_{ISS} = R_Z + h$$

Navíc si musíme vyjádřit i dobu oběhu. Jelikož ISS oběhne kružnici o poloměru r_{ISS} právě za dobu T_{ISS} musí platit:

$$\frac{2\pi r_{ISS}}{T_{ISS}} = v_{ISS}$$

Z čehož plyne vztah pro periodu oběhu:

$$T_{ISS} = \frac{2\pi\left(R_Z + h\right)}{v_{ISS}}$$

Teď už stačí dosadit do Keplerova zákona a vyjádřit hledaný poloměr r_M :

$$r_M = r_{ISS}\cdot\left(\frac{T_M}{T_{ISS}}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(R_Z + h\right)\cdot\left(\frac{T_M}{T_{ISS}}\right)^{\frac{2}{3}}$$

Pro zadané hodnoty dostaneme:

$$r_M = \left(6,378\cdot 10^6 + 4,12\cdot 10^5\right)\cdot\left(\frac{2,36\cdot 10^6\cdot 7\,700}{2\cdot 3,14\cdot\left(6,378\cdot 10^6 + 4,12\cdot 10^5\right)}\right)^{\frac{2}{3}}\ \text{m} \doteq 384\,000\ \text{km}$$

Vzdálenost Měsíce od Země je 384 000 km.

4.0.4

Pod jakým úhlem musíme vrhnout libovolné těleso, aby maximální výška během letu byla stejná jako vzdálenost, do které těleso doletí?

Řešení

$$\boxed{\begin{array}{l} h_{\max} = d \\ \alpha = ?\,[°] \end{array}}$$

Abychom výpočet zkrátili, nebudeme odvozovat známé vztahy pro dobu letu a vzdálenost, do které těleso doletí:

$$t_d = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} \qquad \text{a} \qquad d = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Maximální výšky těleso dosáhne přesně v polovině doby letu, tedy $t = t_d$ což můžeme dosadit do rovnice popisující svislý pohyb tělesa:

$$h_{\max} = v_0 \frac{t_d}{2} \sin\alpha - \frac{1}{2} g \left(\frac{t_d}{2}\right)^2$$

Do této rovnice můžeme dříve vyjádřený čas t_d dosadit a vztah zjednodušit:

$$h_{\max} = v_0 \frac{\frac{2v_0 \sin\alpha}{g}}{2} \sin\alpha - \frac{1}{2} g \left(\frac{\frac{2v_0 \sin\alpha}{g}}{2}\right)^2 = \frac{v_0^2}{g} \sin^2\alpha - \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g} \sin^2\alpha = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$$

Nyní už stačí pouze dosadit zadané rovnosti $h_{\max} = d$:

$$\frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$$

Z čehož jednoduchými úpravami a užitím goniometrických vztahů dostaneme:

$$tg\alpha = 4 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha \doteq 76°$$

Těleso musíme vrhnout pod úhlem 76°.

Mechanika tuhého tělesa

5.1 Moment síly vzhledem k ose otáčení

5.1.1

K otevření vchodových dveří do školy je kvůli tření v pantech potřeba vyvinout na dveře moment síly o velikosti 54 N.m. Jakou silou musíme tahat za kliku ve vzdálenosti 90 cm od osy otáčení, abychom překonali tření a otevřeli dveře?

Řešení

$$\boxed{\begin{array}{l} M = 54\ \mathrm{N \cdot m} \\ d = 90\ \mathrm{cm} = 0{,}9\ \mathrm{m} \\ F = ?\ [\mathrm{N}] \end{array}}$$

Definiční vztah pro moment síly:

$$M = Fd$$

Z něj si vyjádříme sílu:

$$F = \frac{M}{d}$$

Číselně:

$$F = \frac{54}{0{,}9}\ \mathrm{N} = 60\ \mathrm{N}$$

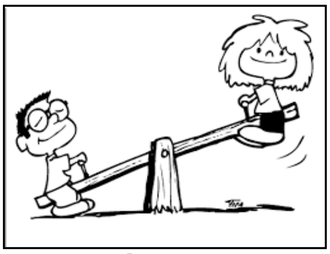
Je potřeba tahat silou o velikosti 60 N.

5.1.2

Matyáš šel s mamkou na houpačky a nedohodli se kdo se začne jako první odrážet, a tak se ve stejný okamžik, zatím co seděli na sedátku houpačky, přestali opírat nohama o zem. Jaký byl výsledný moment sil? Matyáš má 36 kg, mamka má 54 kg. Celková délka houpačky je 3 m a obě sedátka jsou od osy otáčení stejně daleko.

Řešení

$$\boxed{\begin{array}{l} m_1 = 36\ \mathrm{kg} \\ m_2 = 54\ \mathrm{kg} \\ l = 3\ \mathrm{m} \\ M = ?\ [\mathrm{N \cdot m}] \end{array}}$$



Obr. č. 19

Protože každý z nich sedí na opačné straně houpačky a tím pádem momenty, kterými na houpačku působí, mají opačný směr, bude výsledný moment sil:

$$M = M_1 - M_2,$$

kde M_1 resp. M_2 je:

$$M_1 = F_1 d_1 \qquad \text{resp.} \qquad M_2 = F_2 d_2$$

Síly F_1 a F_2, kterými na houpačku působí jsou rovny tíhovým silám, tedy:

$$F_1 = m_1 g \qquad \text{a} \qquad F_2 = m_2 g$$

Vzheldem k tomu, že jsou oba stejně daleko od osy otáčení, musí platit:

$$d_1 = d_2 = \frac{l}{2}$$

Výsledný moment je po dosazení:

$$M = M_1 - M_2 = F_1 d_1 - F_2 d_2 = m_1 g d_1 - m_2 g d_2 = \frac{m_1 g l}{2} - \frac{m_2 g l}{2} = \frac{gl}{2}(m_1 - m_2)$$

Pro zadané hodnoty:

$$M = \frac{9{,}81 \cdot 3}{2}(36 - 54)\ \mathrm{N \cdot m} = -117{,}72\ \mathrm{N \cdot m}$$

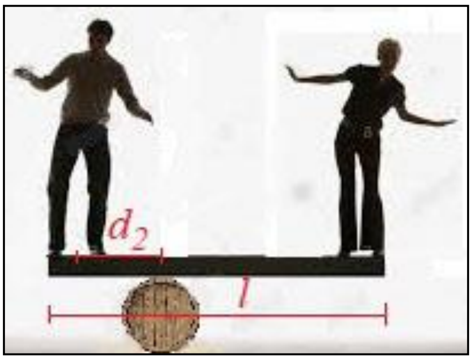
Výsledný moment sil byl 117,72 $\mathrm{N \cdot m}$.

5.1.3

Petra a Karel se snaží balancovat na prkně podepřené sudem, který se může volně kutálet. Prkno má délku 2,8 m, Petra váži 62 kg a Karel váži 89 kg. V jaké vzdálenosti od Karla se musí prkno opírat o barel, aby byli v rovnováze a barel se nekutálel?

Řešení

$m_1 = 62\ \text{kg}$
$m_2 = 89\ \text{kg}$
$l = 2{,}8\ \text{m}$
$M = 0\ \text{N} \cdot \text{m}$
$d_2 = ?\ [\text{m}]$



Obr. č. 20

Celkový moment sil musí být nulový, což znamená, že momenty, kterými Petra a Karel na prkno působí vzhledem k ose otáčení, se musí rovnat:

$$M_1 = M_2$$

Momenty spočítáme jako:

$$M_1 = F_1 d_1$$
$$M_2 = F_2 d_2$$

Kde síly F_1 resp. F_2 jsou:

$$F_1 = m_1 g$$
$$F_2 = m_2 g$$

Z obrázku navíc plyne:

$$l = d_1 + d_2$$

Rovnost momentů tedy můžeme dosazením upravit na rovnici:

$$\begin{aligned} F_1 d_1 &= F_2 d_2 \\ m_1 g d_1 &= m_2 g d_2 \\ m_1 \left(l - d_2\right) &= m_2 d_2 \\ m_1 l &= m_2 d_2 + m_1 d_2 \\ m_1 l &= d_2 \left(m_2 + m_1\right), \end{aligned}$$

ze které vyjádříme vzdálenost d_2 :

$$d_2 = \frac{m_1 l}{m_2 + m_1}$$

Pro zadané hodnoty dostáváme:

$$d_2 = \frac{62 \cdot 2,8}{89+62}\ \text{m} \doteq 1,15\ \text{m}$$

Prkno se musí opírat o barel ve vzdálenosti 1,15 m od Karla.

5.2 Skládání sil

5.2.1

Nosič vody na obrázku pod zadáním má na dřevěném klacku pověšené dvě vědra s vodou, které na tyč působí tahovou silou. V jaké vzdálenosti od těžšího z obou věder se nachází působiště výslednice těchto sil? Jedno z věder působí silou 40 N, druhé 60 N a tyč je dlouhá 1,2.

Řešení

$$\boxed{\begin{array}{l} F_1 = 40\ \text{N} \\ F_2 = 60\ \text{N} \\ l = 1,2\ \text{m} \\ d_2 = ?\ [\text{m}] \end{array}}$$

Obr. č. 21

Působiště výslednice dělí velikosti ramen sil v obráceném poměru velikostí skládaných sil:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{d_2}{d_1}$$

Síly F_1 a F_2 jsou očividně v poměru 2:3, tudíž pro vyřešení nám stačí rozdělit tyč o délce $l = 1,2$ m v poměru 3:2. Neboli hledané rameno d_2 tvoří $\frac{2}{5}$ z celkové délky tyče:

$$d_2 = \frac{2}{5} \cdot 1,2\ \text{m} = 0,48\ \text{m}$$

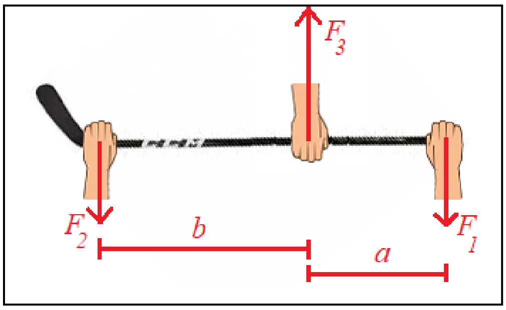
Výslednice působí ve vzdálenosti 0,48 m od těžšího vědra.

5.2.2

Dva kluci se na hřišti přetahují o hokejku. Patrik tahal za hokejku na jejich okrajích silami $F_1 = F_2 = 100$ N. Robin tahal za hokejku v bodě ve vzdálenosti 60 cm od pravého okraje (neboli 90 cm od levého okraje) silou o velikosti $F_3 = 160$ N. V jaké vzdálenosti od levého kraje hokejky se nachází působiště výslednice sil a jakou má velikost?

Řešení

$F_1 = F_2 = 100\ \text{N}$
$F_3 = 160\ \text{N}$
$a = 60\ \text{cm} = 0,6\ \text{m}$
$b = 90\ \text{cm} = 0,9\ \text{m}$
$d = ?\ [\text{m}]$
$F = ?\ [\text{N}]$



Obr. č. 22

Při výpočtu využijeme toho, že celkový moment síly vzhledem ke zvolené ose otáčení (např. pravý okraj hokejky) je roven vektorovému součtu jednotlivých momentů sil. Vzhledem ke směrům jednotlivých sil tedy platí:

$$M = M_1 + M_2 - M_3$$

Momenty na pravé straně rovnice jsou:

$$M_1 = 0 \cdot F_1$$
$$M_2 = (a + b) \cdot F_2$$
$$M_3 = a \cdot F_3$$

Moment M na pravé straně rovnice je:

$$M = F \cdot d,$$

kde d je právě hledaná vzdálenost působiště a F je výslednice sil:

$$F = F_1 + F_2 - F_3$$

Po dosazení to první rovnice dostaneme:

$$F \cdot d = 0 \cdot F_1 + (a + b) \cdot F_2 - a \cdot F_3$$

Nyní stačí vyjádřit neznámou d:

$$d = \frac{(a + b) \cdot F_2 - a \cdot F_3}{F}$$

A dosadit hodnoty ze zadání:

$$d = \frac{(0,6+0,9)\cdot 100 - 0,6\cdot 160}{40}\ \mathrm{m} = 1,35\ \mathrm{m}$$

$$F = 100 + 100 - 160\ N = 40\ N$$

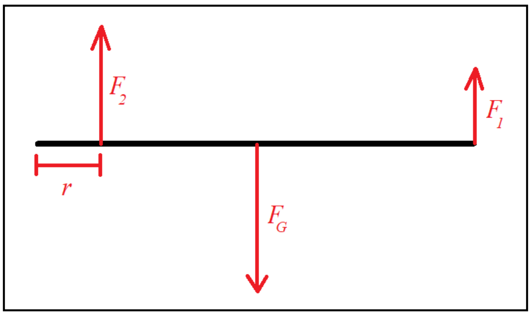
Výslednice sil má působiště ve vzdálenosti 1,35 m od pravého okraje hokejky.

5.2.3

Marek s taťkou musí kvůli malovaní bytu přesunout část gauče, vážicí 50 kg a dlouhou 2 m, z obývacího pokoje do chodby. Marek ještě nemá tolik síly a dokáže vyvinou sílu maximálně 200 N. Z toho důvodu bude nejlepší, aby zvedal gauč co nejvíce na jednom z krajů. V jaké vzdálenosti od druhého okraje musí jeho taťka zvedat gauč, aby se jim nijak neotáčel a mohli jej bez problému přenést? Pro zjednodušení vypočtu si představte pohovku jako nehmotnou tyč, na kterou v jejím středu působí síla (která představuje tíhovou sílu působící na skutečnou pohovku viz obrázek). Zkuste vyřešit i graficky.

Řešení

$m = 50\ \mathrm{kg}$
$F_1 = 200\ \mathrm{N}$
$l = 2\ \mathrm{m}$
$M = 0\ \mathrm{N\cdot m}$
$F = 0\ \mathrm{N}$
$r = ?\ [\mathrm{m}]$



Obr. č. 23

Aby dokázali gauč zvednout, je jasné, že musí dohromady působit silou, která je rovna tíhové síle působící na gauč:

$$mg = F_1 + F_2$$

Aby se jim gauč navíc nijak neotáčel, musí být výsledný moment působící na gauč nulový:

$$M_1 = M_2$$

Pro zjednodušení výpočtu si umístíme osu otáčení např. do těžiště gauče. Potom tedy platí:

$$F_1 d_1 = F_2 d_2,$$

kde: $d_1 = \frac{l}{2}$, $d_2 = \frac{l}{2} - r$, $F_2 = mg - F_1$

Po dosazení do předchozí rovnice dostaneme:

$$F_1 d_1 = (mg - m_1 g) \cdot \left(\frac{l}{2} - r \right)$$

Z čehož po úpravě plyne vztah pro hledanou vzdálenost r:

$$r = \frac{l}{2} - \frac{F_1 d_1}{g \cdot (m - m_1)}$$

Číselně:

$$r = \frac{2}{2} - \frac{200 \cdot 1}{9{,}81 \cdot (50 - 20)} \text{ m} \doteq 0{,}32 \text{ m}$$

Taťka musí při přenášení držet gauč 32 cm od druhého okraje.

5.3 Rozkládání sil

5.3.1

Rozložte (spočítejte) síly, kterými působí koule o hmotnosti 1 kg , ve směrech, které jsou zakresleny na obrázku. Podpěrný trám svírá se svislým trámem úhel 60 °.

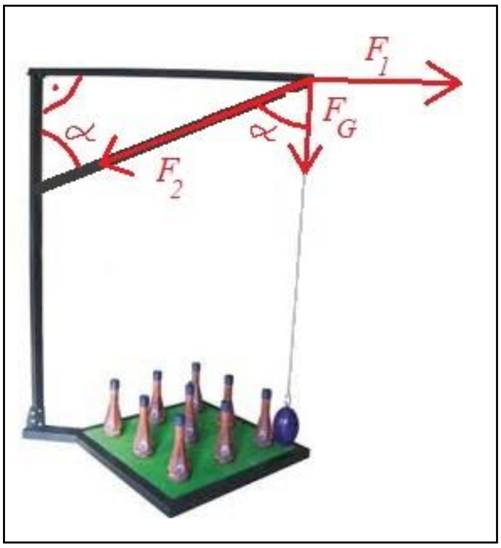
Řešení

$m = 1\,\text{kg}$
$\alpha = 60\,°$
$F_1 = ?\,[\text{N}]$
$F_2 = ?\,[\text{N}]$

Jelikož síly F_1 a F_2 tvoří dvě strany rovnoběžníku, kde síla F_G je jednou z úhlopříček, platí:

$$\cos\alpha = \frac{F_G}{F_2} = \frac{mg}{F_2}$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{F_1}{F_G} = \frac{F_1}{mg}$$



Obr. č. 24

Z čehož po úpravě dostaneme velikosti sil F_1 a F_2 :

$$F_2 = \frac{mg}{\cos \alpha_2}$$
$$F_1 = mg \cdot \mathrm{tg}\alpha$$

Pro hodnoty ze zadání:

$$F_2 = \frac{1 \cdot 9,81}{\cos 60°}\ \mathrm{N} = 19,62\ \mathrm{N}$$
$$F_1 = 1 \cdot 9,81 \cdot \mathrm{tg}\ (60°)\ \mathrm{N} \doteq 17\ \mathrm{N}$$

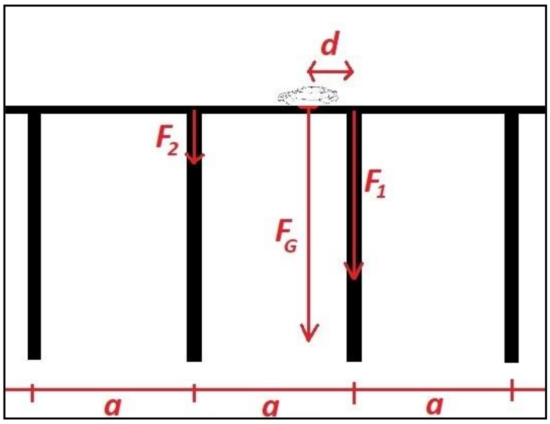
Síly mají velikosti 19,62 N a 17 N.

5.3.2

Auto o hmotnosti 1 400 kg jede přes most, který má mezi každými dvěma podpůrnými pilíři rozestupy 300 m. Pro zjednodušení si můžeme představit, že auto díky své tíze působí silou vždy pouze na dva nejbližší pilíře, mezi kterými se nachází. Jak daleko je od auta nejbližší pilíř, jestliže v daný okamžik působí auto na tento pilíř 2x vetší silou než na druhý nejbližší pilíř.

Řešení

$$\boxed{\begin{array}{l} m = 1\,400\ \mathrm{kg} \\ a = 300\ \mathrm{m} \\ F_1 = 2 \cdot F_2 \\ d = ?\,[\mathrm{m}] \end{array}}$$



Obr. č. 25

Pro nalezení polohy auta můžeme využít to, že působiště výslednice dělí velikosti ramen sil v obráceném poměru velikostí skládaných sil:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{d_2}{d_1}$$

Výslednice je v tomto případě tíha auta a poměr sil F_1 a F_2 známe ze zadání:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{2}{1}$$

Ramena sil tudíž dělí vzdálenost dvou nejbližších pilířů v poměru 1:2.
Nejbližší pilíř je tedy ve vzdálenosti:

$$d = \frac{1}{3} \cdot a$$

Tedy po dosazení:

$$d = 100 \text{ m}$$

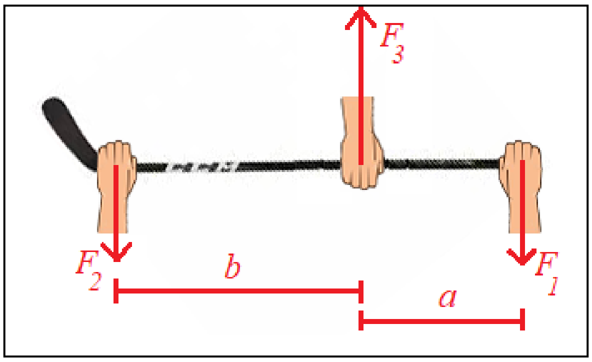
Nejbližší pilíř se nachází ve vzdálenosti 100 m od auta.

5.3.3

Jak by se musely změnit velikosti sil F_1 a F_2, kterými Robin z příkladu 5.2.2 tahal za hokejku, jestliže přetahovanou nikdo nevyhrával a hokejka se přitom ani neotáčela.

Řešení

$F_3 = 160 \text{ N}$
$a = 60 \text{ cm} = 0{,}6 \text{ m}$
$b = 90 \text{ cm} = 0{,}9 \text{ m}$
$F = 0 \text{ N}$
$M = 0 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$
$F_1 = ?\,[\text{N}]$
$F_2 = ?\,[\text{N}]$



Obr. č. 26

To, že nikdo přetahování nevyhrával znamená, že výslednice sil byla nulová, neboli:

$$F_3 = F_1' + F_2'$$

Hokejka se ani neotáčela, což znamená, že i celkový moment sil (např. vzhledem k pravému konci hokejky) byl nulový:

$$M_3 = M_1' + M_2',$$

kde jednotlivé momenty jsou:

$$M_1' = 0 \cdot F_1'$$
$$M_2' = (a+b) \cdot F_2'$$
$$M_3 = a \cdot F_3$$

Po dosazení jednotlivých momentů do předchozí rovnice dostáváme:

$$a \cdot F_3 = (a+b) \cdot F_2'$$

Z čehož plyne

$$F_2' = \frac{a \cdot F_3}{(a+b)}$$

A jelikož musí platit $F_3 = F_1' + F_2'$ dostaneme F_1' jako:

$$F_1' = F_3 - F_2' = F_3 - \frac{a \cdot F_3}{(a+b)} = \frac{b \cdot F_3}{(a+b)}$$

Číselně:

$$F_2' = \frac{0,6 \cdot 160}{(0,6+0,9)}\ \mathrm{N} = 64\ \mathrm{N}$$
$$F_1' = \frac{0,9 \cdot 160}{(0,6+0,9)}\ \mathrm{N} = 96\ \mathrm{N}$$

Síla F_1 by musela mít velikost 96 N a síla F_2 velikost 64 N.

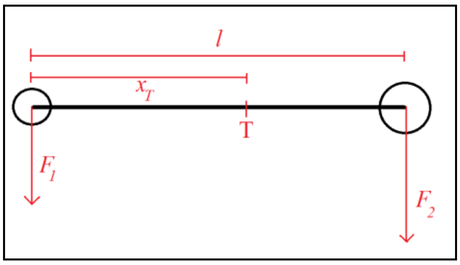
5.4 Těžiště tuhého tělesa

5.4.1

Nehmotná tyč délky 0,5 m má na jednom z konců kouli o hmotnosti 2 kg a na druhém kouli o hmotnosti 3 kg. Najděte vzdálenost těžiště od lehčí z obou koulí.

Řešení

$$\boxed{\begin{aligned} l &= 0{,}5\ \mathrm{m} \\ m_1 &= 2\ \mathrm{kg} \\ m_2 &= 3\ \mathrm{kg} \\ x_T &= ?\ [\mathrm{m}] \end{aligned}}$$



Obr. č. 27

Polohu těžiště můžeme v tomto případě určit například stejně jako polohu působiště výslednice sil. Využijeme tedy toho, že působiště výslednice dělí velikosti ramen sil v obráceném poměru velikostí skládaných sil:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{d_2}{d_1}$$

Jelikož síly F_1 a F_2 jsou :

$$F_1 = m_1 g \qquad \text{a} \qquad F_2 = m_2 g$$

platí pro poměr ramen sil:

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{F_1}{F_2} = \frac{m_1 g}{m_2 g} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{2}{3}$$

což znamená, že rameno d_1 a tedy i vzdálenost těžiště x_T je:

$$x_T = \frac{2}{5} l$$

Číselně:

$$x_T = \frac{2}{5} \cdot 0{,}5\ \mathrm{m} = 0{,}2\ \mathrm{m}$$

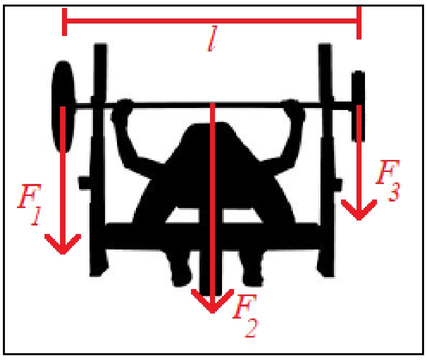
Těžiště je od lehčí koule vzdáleno 0,2 m.

5.4.2

Petr si v posilovně připravoval činku na cvičení, ale omylem dal na jednu strany tyče 10 kg závaží a na druhou 15 kg závaží. Určete polohu těžiště (např. vzdálenost od těžšího závaží). Samotná tyč má hmotnost 20 kg, délku 2 m a její těžiště je přesně uprostřed. Předpokládejme, že závaží byly upevněny na samotném konci, tedy 1 m od středu.

Řešení

$l = 2\ \text{m}$
$m_1 = 15\ \text{kg}$
$m_2 = 20\ \text{kg}$
$m_3 = 10\ \text{kg}$
$x_T = ?\ [\text{m}]$



Obr. č. 28

V tomto případě využijeme momentovou větu:

$$M = M_1 + M_2 + M_3$$

Osu otáčení si umístíme do těžšího z obou závaží. Potom jednotlivé momenty jsou:

$$M = F \cdot x_T$$
$$M_1 = 0 \cdot F_1$$
$$M_2 = \frac{l}{2} \cdot F_2$$
$$M_3 = l \cdot F_3$$

kde síly F_1 až F_3 jsou tíhové síly odpovídající hmotnostem m_1 až m_3. Síla F je výslednicí:

$$F = F_1 + F_2 + F_3$$

Po dosazení do momentové věty dostáváme:

$$F_G \cdot x_T = F_{G_1} \cdot 0 + F_{G_2} \cdot \frac{l}{2} + F_{G_3} \cdot l$$
$$(m_1 + m_2 + m_3) \cdot g \cdot x_T = m_2 \cdot g \cdot \frac{l}{2} + m_3 \cdot g \cdot l$$

Z čehož vyjádříme polohu těžiště:

$$x_T = \frac{m_2 \cdot \frac{l}{2} + m_3 \cdot l}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{l}{2} \cdot \frac{m_2 + 2 \cdot m_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

Po dosazení zadaných hodnot:

$$x_T = \frac{2}{2} \cdot \frac{20 + 2 \cdot 10}{15 + 20 + 10} \text{ m} \doteq 0{,}89 \text{ m}$$

Těžiště bylo od těžšího závaží vzdáleno od těžšího závaží 89 cm.

5.4.3

Dokaž, že těžiště soustavy Slunce – Země leží uvnitř Slunce.

Najděte polohu těžiště dřevěného koštěte (vzdálenost od konce bez ,,kartáče“). Délka násady je 135 cm a poloměr 1 cm. Kartáč si můžeme zjednodušit jako dřevěný kvádr o rozměrech 40 x 10 x 2 cm (připevněnou podle obrázku). Jak ovlivňuje hustota materiálu polohu těžiště?

Řešení

$$\boxed{\begin{aligned} &M_Z = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg} \\ &M_S = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg} \\ &R_S = 7 \cdot 10^5 \text{ km} = 7 \cdot 10^8 \text{ m} \\ &d = 1 \text{ AU} = 1{,}5 \cdot 10^{11} \text{ m} \end{aligned}}$$

K nalezení těžiště této soustavy si můžeme na okamžik představit, že Slunce a Země se nacházejí v myšleném tíhovém poli, které má směr kolmý k rovině oběhu Země kolem Slunce. Potom můžeme postupovat obdobně jako v příkladu 5.4.1. Víme, že těžiště této soustavy by odpovídalo působiště výslednice oné myšlené tíhové síly působící na tuto soustavu. Toto působiště stejně jako v 5.4.1 musí dělit vzdálenosti středů Slunce a Země v obráceném poměru tíhových sil, které by působily na Zemi a Slunce:

$$\frac{F_S'}{F_Z'} = \frac{M_S \cdot g'}{M_Z \cdot g'} = \frac{d_Z}{d_S}$$

kde g' je velikost onoho myšleného tíhového zrychlení. Po úpravě dostaneme:

$$\frac{M_S}{M_Z} = \frac{d_Z}{d_S}$$

Abychom dokázali, že těžiště je uvnitř Slunce, musí platit $d_S < R_S$. Proto si vyjádříme vzdálenost těžiště od středu Země d_Z z toho, že součet délek ramen sil musí dát v součtu vzdálenost Země - Slunce:

$$d_Z = d - d_S$$

Po dosazení do předchozí rovnice dostaneme:

$$\frac{M_S}{M_Z} = \frac{d - d_S}{d_S} = \frac{d}{d_S} - 1$$

Vyjádříme si hledanou délku ramena:

$$d_S = \frac{d \cdot M_Z}{M_S + M_Z}$$

Po dosazení zadaných hodnot:

$$d_S = \frac{1{,}5 \cdot 10^{11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{2 \cdot 10^{30} + 6 \cdot 10^{24}}\ \text{m} = 4{,}5 \cdot 10^{5}\ \text{m} < R_S$$

Těžiště soustavy Země – Slunce se nachází ve vzdálenosti $4{,}5 \cdot 10^{5}\ \text{m}$ od středu Slunce, tedy hluboko pod jeho povrchem.

5.5 Kinetická energie tuhého tělesa

5.5.1

Jaká je kinetická energie Země tvořená rotací kolem své osy?

Řešení

$R_Z = 6\,378\ \text{km} = 6{,}378 \cdot 10^{6}\ \text{m}$
$M_Z = 6 \cdot 10^{24}\ \text{kg}$
$T = 1\ \text{den} = 86\,400\ \text{s}$
$E_k = ?\ [\text{J}]$

Kinetická energie rotujícího tělesa je:

$$E_k = \frac{1}{2} J \omega^2$$

Úhlovou rychlost jednoduše vyjádříme pomocí frekvence:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

A moment setrvačnosti koule je:

$$J = \frac{2}{5} M_Z R_Z{}^2$$

Dosazením a po úpravě dostáváme:

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} M_Z R_Z^2 \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 = \frac{4\pi^2 M_Z R_Z^2}{5T^2}$$

Číselně:

$$E_k = \frac{4 \cdot 3{,}14^2 \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot \left(6{,}378 \cdot 10^6\right)^2}{5 \cdot 86\,400^2} \text{ J} \doteq 2{,}58 \cdot 10^{29} \text{ J}$$

Rotační kinetická energie má hodnotu $2{,}58 \cdot 10^{29}$ J.

5.5.2

Jak rychle by musela obíhat Země kolem slunce (kolik dní by trval jeden oběh), aby energie tohoto pohybu byla stejná jako energie tvořená rotací Země kolem své osy (viz hodnota energie z minulého příkladu)?

Řešení

$r = 1 \text{ AU} = 1{,}5 \cdot 10^{11}$ m
$M_Z = 6 \cdot 10^{24}$ kg
$E_k = 2{,}58 \cdot 10^{29}$ J
$T = ?$ [dní]

Vzhledem k malým rozměrům Země oproti vzdálenosti od Slunce, můžeme v tomto případě považovat Zemi za hmotný bod o hmotnosti M_Z ve vzdálenosti r od osy otáčení. Moment setrvačnosti potom bude:

$$J = M_Z r^2$$

Nyní si vyjádříme úhlovou rychlost ze vztahu pro rotační energii a pomocí periody oběhu:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad \text{a} \qquad \omega = \sqrt{\frac{2E_k}{J}}$$

Dáme-li tyto vztahy pro úhlovou frekvenci do rovnosti dostaneme:

$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{2E_k}{J}}$$

Z čehož po vyjádření a dosazení za moment setrvačnosti je perioda oběhu:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2E_k}{J}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2E_k}{M_Z r^2}}} = 2\pi r\sqrt{\frac{M_Z}{2E_k}}$$

Číselně:

$$T = 2\cdot 3{,}14\cdot 1{,}5\cdot 10^{11}\sqrt{\frac{6\cdot 10^{24}}{2\cdot 2{,}58\cdot 10^{29}}} \doteq 3\,212\,193\,338\ \mathrm{s} \doteq 37\,178\ \text{dní}$$

Jeden oblet (a tedy i jeden „rok“) by trval 37 178 dní.

5.5.3

Jestliže se koule válí po povrchu bez prokluzování, je poměr kinetické energie posuvného (translačního) pohybu jejího těžiště a kinetické energie rotačního pohybu konstantní. Určete tento poměr.

Řešení

$m = 5{,}45\ \mathrm{kg}$
$d = 216\ \mathrm{mm} = 0{,}216\ \mathrm{m}$
$E_{trans} = 2{,}5\cdot E_{rot}$
$v = ?\,[\mathrm{m\cdot s^{-1}}]$

Pro kinetickou energii posuvného resp. rotačního pohybu platí:

$$E_{trans} = \frac{1}{2}mv^2 \qquad \text{resp.} \qquad E_{rot} = \frac{1}{2}J\omega^2$$

Jejich poměr je tedy:

$$\frac{E_{trans}}{E_{rot}} = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{\frac{1}{2}J\omega^2} = \frac{mv^2}{J\omega^2}$$

Rychlost pohybu těžiště je stejná jako obvodová rychlost bodů na obvodu koule. Proto si vyjádříme úhlovou rychlost pomocí obvodové rychlosti a dále moment setrvačnosti:

$$\omega = \frac{v}{r} \qquad \text{a} \qquad J = \frac{2}{5}mr^2$$

Dosazením do poměru kinetických rychlostí dostáváme:

$$\frac{E_{trans}}{E_{rot}} = \frac{mv^2}{J\omega^2} = \frac{mv^2}{\frac{2}{5}mr^2\left(\frac{v}{r}\right)^2}$$

Po jednoduché úpravě získáme hledaný poměr:

$$\frac{E_{trans}}{E_{rot}} = \frac{5}{2}$$

V případě, že se libovolně velká a těžká koule „kutálí“ po nějakém povrchu bez prokluzování, je její „translační“ kinetická energie 2,5x větší, než rotační.

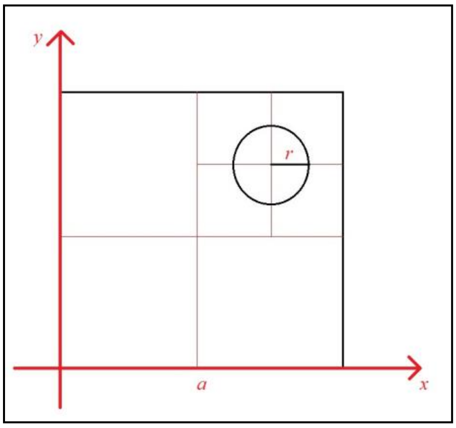
5.0.4

Konferenční stolek vznikl vyřezáním kruhového otvoru do čtvercové desky. Hrana desky měří 2 m a průměr vzniklé kruhové díry je 0,5 m a její střed je přesně ve středu pravé horní čtvrtiny celé desky (viz obrázek). Najděte obě souřadnice (x a y) těžiště tohoto stolku.

Řešení

$$\boxed{\begin{aligned} a &= 2\ \text{m} \\ d &= 0{,}5\ \text{m} \\ x_T &= ?\ [\text{m}] \\ y_T &= ?\ [\text{m}] \end{aligned}}$$

Řešení si podobně jako u kinematiky můžeme rozložit na X - ovou a Y - složku a řešit je zvlášť. Nejprve tedy budeme hledat např. X - ovou souřadnici. Jedním ze způsobů jak řešit, že se v desce stolu nachází díra je, že si celkovou tíhovou sílu působící na desku s dírou „rozložíme" na dvě složky. Složka F_{G_1} značí tíhovou sílu, která by působila na desku, kdyby v ní díra nebyla. Od ní potom odečteme sílu F_{G_2}, která by působila na dřevěný kruh. Ten však ve skutečnosti chybí, a proto tuto složku od složky F_{G_1} odečteme. Síla F_{G_1} má působiště ve středu stolu. Síla F_{G_2} má působiště ve středu kruhu. Zapíšeme si tedy celkovou tíhovou sílu působící na stůl:



Obr. č. 29

$$F_G = F_{G_1} - F_{G_2}$$

a celkový moment sil:

$$M = M_1 - M_2,$$

kde celkový moment sil je zároveň dán působením výslednice F_G, která působí ve skutečném těžišti celého stolu:

$$M = F_G \cdot x_T$$

Hmotnosti čtvercové desky a vyřezaného kruhu vyjádříme jako:

$$m = \rho \cdot S \cdot h,$$

kde ρ resp. h je hustota resp. tloušťka stolu (na kterých samozřejmě nezáleží a proto se později v rovnicívh vyruší) a S je plocha dané části. Tu si vyjádříme pro obě části zvlášť:

$S_1 = a^2$ (čtvercová deska)

$S_2 = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2$ (vyříznutý kruh)

Nyní můžeme postupně dosadit do momentové věty $M = M_1 - M_2$, přičemž si osu otáčení umístíme do X - ové osy:

$$F_G \cdot x_T = F_{G_1} \cdot \frac{a}{2} - F_{G_2} \cdot \frac{3}{4} \cdot a$$

$$(m_1 - m_2) \cdot g \cdot x_T = m_1 \cdot g \cdot \frac{a}{2} - m_2 \cdot g \cdot \frac{3}{4} \cdot a$$

$$(\rho \cdot S_1 \cdot h - \rho \cdot S_2 \cdot h) \cdot g \cdot x_T = \rho \cdot S_1 \cdot h \cdot g \cdot \frac{a}{2} - \rho \cdot S_2 \cdot h \cdot g \cdot \frac{3}{4} \cdot a$$

Zde se nám vykrátí tloušťka h, hustota ρ a tíhové zrychlení g a dostáváme:

$$\left(S_1 - S_2\right) \cdot x_T = S_1 \cdot \frac{a}{2} - S_2 \cdot \frac{3}{4} \cdot a$$

Z této rovnice už pouze vyjádříme polohu těžiště x_T, dosadíme za obsahy ploch S_1 a S_2 a upravíme:

$$x_T = \frac{a^2 \cdot \frac{a}{2} - \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot \frac{3}{4} \cdot a}{a^2 - \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \frac{a}{4} \cdot \frac{2a^2 - 3\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2}{a^2 - \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2}$$

Po dosazení známých hodnot dostáváme:

$$x_T = \frac{2}{4} \cdot \frac{2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 3{,}14 \cdot \left(\frac{0{,}5}{2}\right)^2}{2^2 - 3{,}14 \cdot \left(\frac{0{,}5}{2}\right)^2} \text{ m} \doteq 0{,}97 \text{ m} = 97 \text{ cm}$$

Stůl je symetrický podle úhlopříčky čtverce tudíž je druhá souřadnice stejná, tedy:

$$y_T \doteq 97 \text{ cm}$$

Díky symetrii podle úhlopříčky čtverce, která prochází středem vyříznutého kruhu, mají obě souřadnice stejnou hodnotu 97 cm od spodního levého okraje.

Závěr

Cílem této práce bylo vytvořit sbírku řešených příkladů, která svým obsahem odpovídá kapitolám a obecně struktuře učiva v učebnici Fyzika pro gymnázia – Mechanika (BEDNAŘÍK, 2009), která se svým členěním navíc shoduje s Bloomovou taxonomií.

Ke každé z vybraných třiceti podkapitol jsem vytvořil tři příklady, které mají postupně rostoucí obtížnost podle Bloomovy taxonomie, resp. taxonomie D. Tollingerové. Navíc ke každé hlavní kapitole jsem vypracoval jeden bonusový příklad, který shrnuje poznatky celé kapitoly. Celkem tedy sbírku tvoří 95 řešených úloh.

U některých úloh je náročné posoudit, zda přesně zapadají do dané úrovně Bloomovy taxonomie. Zadání příkladů jsem se snažil formulovat tak, aby byly z běžného života nebo naopak se týkaly zajímavých nevšedních situací, ale hlavně aby zapadaly do moderní doby 21. století, což se mi bohužel nepodařilo splnit u všech. Náročné na tvoření zadání bylo také to, aby se témata příkladů příliš často neopakovala. U některých úloh jsem se navíc snažil o jakési oživení formou zajímavé informace z různých oblastí mimo fyziku např. sportu, geografie apod.

Některé z příkladů jsem měl možnost vyzkoušet během vyučování fyziky na Gymnáziu Ostrava-Zábřeh. Převážně se však jednalo o hodiny fyzikálního semináře ve třetím ročníku vyššího gymnázia, kde byly příklady pro žáky příliš snadné. Hodnoceny však byly jako srozumitelně zadané, s jasným řešením a často i zábavné.

Vzniklá sbírka by mohla být používána jako zdroj příkladů a návodů pro jejich řešení jak pro učitele, tak i pro žáky na úrovni SŠ, ZŠ nebo gymnázia.

Seznam použitých pramenů

Knižní zdroje:

BARTUŠKA, Karel. *Sbírka řešených úloh z fyziky pro střední školy*. Praha: Prometheus, 1997. ISBN 8071960330.

BEDNAŘÍK, Milan a Miroslava ŠIROKÁ. *Fyzika pro gymnázia*. 4. vydání. Praha: Prometheus, 2009. ISBN 9788071963820.

BOHUNĚK, Jiří. *Sbírka úloh z fyziky pro žáky základních škol*. Praha: Prometheus, 1994. Učebnice pro základní školy. ISBN 8085849062.

JÁCHIM, František a Jiří TESAŘ. *Sbírka úloh z fyziky: pro 6.-9. ročník základní školy*. Praha: SPN – pedagogické nakladatelství, 2004. ISBN 80-7235-256-3.

KALHOUS, Zdeněk a Otto OBST. *Školní didaktika*. Vyd. 2. Praha: Portál, 2009. ISBN 9788073675714 (str. 331-332).

KALUŽAY, Jozef a Michal ZEMAN. *500 riešených úloh z fyziky*. Bratislava: ALFA, 1973. ALFA 5245.

KOSÍKOVÁ, Věra. *Psychologie ve vzdělávání a její psychodidaktické aspekty*. Praha: Grada, 2011. Pedagogika (Grada). ISBN 9788024724331.

KRUŽÍK, Miroslav. *Sbírka úloh z fyziky pro žáky středních škol.* Praha: SPN, 1969. SPN 940912.

LEPIL, Oldřich. *Fyzika: sbírka úloh pro střední školy*. 4. vydání. Praha: Prometheus, 2018dotisk. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 9788071964636.

LEPIL, Oldřich a Miroslava ŠIROKÁ. *Sbírka testových úloh k maturitě z fyziky*. Praha: Prometheus, 2001. ISBN 8071962228.

MIKLASOVÁ, Věra. *Sbírka úloh z fyziky pro SOŠ a SOU*. Praha: Prometheus, 1999. ISBN 8071961353.

NAHODIL, Josef. *Sbírka úloh z fyziky kolem nás: pro střední školy*. Praha: Prometheus, 2011. ISBN 9788071964094.

ŠEDIVÝ, Jan a Jan PURKAR, *Úlohy z fyziky pro základní školy 1. část.* Praha: Fortuna, 1996. INSB 8071683159.

TOMANOVÁ, Eva a kol. *Sbírka úloh z fyziky pro gymnázia 1. díl*. Praha: SPN, 1988. SPN 940025.

ZEMAN, Václav a kol. *Sbírka řešených úloh z fyziky pro pedagogické fakulty*. Praha: SPN 1971. SPN 950702.

ŽÁK, Vojtěch. *Fyzikální úlohy pro střední školy: sbírka úloh pro přípravu k nové maturitě*. Praha: Prometheus, 2011. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 9788071964117.

Internetové zdroje:

Sbírka řešených úloh. [online]. [ČR]: KÁCOVSKÝ Petr a Marie SNĚTINOVÁ, 2006. [Citováno 20. 7. 2019] Dostupné z: http://reseneulohy.cz/cs

Priklady.eu. [online]. [ČR]: Ing. Roman HESTERIC; © 2008-2019. [Citováno 20. 7. 2019] Dostupné z: https://www.priklady.eu