

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLMOUCI  
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA  
KATEDRA EXPERIMENTÁLNÍ FYZIKY

## BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Deterministický chaos v elektrických  
obvodech



Vypracoval:	<b>Tomáš Lamich</b>
Studijní program:	B1701 Fyzika
Studijní obor:	1701R003 Fyzika se zaměřením na vzdělávání
Forma studia:	Prezenční
Vedoucí diplomové práce:	Doc. RNDr. Roman Kubínek, CSc
Termín odevzdání práce:	květen 2018

### **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem předloženou diplomovou práci vypracoval samostatně pod vedením Doc. RNDr. Romana Kubínka, CSc a že jsem použil zdrojů, které cituji a uvádím v seznamu použitých pramenů.

V Olomouci dne 21. května 2018

.....  
Tomáš Lamich

## **Poděkování**

Tímto bych chtěl poděkovat vedoucímu mé bakalářské práce Doc. RNDr. Romanu Kubínkovi, CSc za přínosné rady a neuvěřitelnou trpělivost v průběhu psaní této práce. Dále bych chtěl poděkovat Mgr. Michalu Dudkovi za skvělé nápady a připomínky, v průběhu měření mé práce.

# Bibliografická identifikace

Jméno a příjmení autora	Tomáš Lamich
Název práce	Deterministický chaos v elektrických obvodech
Typ práce	Bakalářská
Pracoviště	Katedra experimentální fyziky
Vedoucí práce	Doc. RNDr. Roman Kubínek, CSc
Rok obhajoby práce	2018
Abstrakt	Práce se zabývá populárně naučným popisem teorie chaosu a popisem hlavních pojmů, kterými se teorie chaosu zabývá. Dále se práce zabývá návrhem nejjednoduššího chaotického systému, kterým je Chuův obvod. Hlavní část práce představuje matematický model a jeho následné ověření pomocí Chuova obvodu, který jsem postavil. Následně popisuji možnosti využití Chuova obvodu. V závěru práce uvádím možnost zapojení Chuova obvodu do výuky fyziky na střední škole v rámci speciálního semináře.
Klíčová slova	Chaos, atraktor, Chuův obvod, Chuova dioda, double-scroll atraktor, hystereze
Počet stran	51
Počet příloh	0
Jazyk	český

## Bibliographical identification

Autor's first name and surname	Tomáš Lamich
Title	Deterministic chaos in electrical circuits
Type of thesis	Bachelor
Department	Department of Experimental Physics
Supervisor	Doc. RNDr. Roman Kubínek, CSc
The year of presentation	2018
Abstract	<p>My thesis follows up popularly educative description of chaos theory with the description of main concepts of the chaos theory. In addition, the thesis follows up the design of the simplest chaotic system, which is Chua's circuit. The main part of the thesis is a mathematical model and its subsequent verification using Chua's circuit I have built. I then describe the possibilities of Chua's circuit usage. At the end of my thesis I state the possibility of involvement of Chua's circuit in the teaching of physics at high school within a special seminar.</p>
Keywords	Chaos, attractor, Chua's circuit, Chua's diode, double-scroll attractor, hysteresis
Number of pages	51
Number of appendices	0
Language	czech

# Obsah

Úvod	8
<b>1 Deterministický chaos</b>	<b>9</b>
1.1 Předpověditelnost chování chaotických systémů	9
1.2 Definice chaosu	9
1.3 Efekt motýlích křídel	10
1.4 Topologické mísení	10
1.5 Hustota periodických orbit	10
1.6 Atraktory	10
1.6.1 Pevný bod	11
1.6.2 Konečný počet pevných bodů	11
1.6.3 Limitní cyklus	11
1.6.4 Limitní torus	11
1.6.5 Podivný atraktor	11
1.7 Bifurkace	11
<b>2 Popis Chuova obvodu</b>	<b>13</b>
2.1 Návrh Chuova obvodu	14
2.1.1 Určení minimálního počtu prvků obvodu	14
2.1.2 Návrh schématu Chuova obvodu	15
2.2 Matematický popis Chuova obvodu	16
2.2.1 Geometrie double-scroll atraktoru	17
<b>3 Sestavení Chuova obvodu</b>	<b>19</b>
3.1 Chuova dioda	19
3.2 Cívka	20
3.3 Konečný návrh obvodu	21
<b>4 Modelace chování obvodu</b>	<b>22</b>
4.1 Nechaotická fáze	23
4.2 První chaotická fáze	24
4.3 Druhá chaotická fáze	24
<b>5 Volt-ampérová charakteristika Chuovy diody</b>	<b>26</b>
<b>6 Měření chování Chuova obvodu</b>	<b>28</b>
6.1 Nechaotická fáze	28
6.2 První chaotická fáze	29
6.3 Druhá chaotická fáze	30
6.4 Druhá nechaotická fáze	31

6.5	”Nulová” fáze . . . . .	32
6.6	Hystereze chování obvodu . . . . .	32
6.7	Stabilní fáze Chuova obvodu . . . . .	35
<b>7</b>	<b>Využití Chuova obvodu</b>	<b>36</b>
7.1	Zabezpečení komunikace . . . . .	37
7.2	Rozpoznávání gest . . . . .	38
7.3	Rozpoznávání rukou psaného písma . . . . .	39
7.4	Využití Chuova obvodu v hudbě . . . . .	39
7.5	Generování náhodných bitů . . . . .	40
<b>8</b>	<b>Deterministický chaos pro fyziku na střední škole</b>	<b>43</b>
8.1	Matematický problém . . . . .	43
8.2	Zařazení do kapitol . . . . .	44
8.2.1	Mechanické kmitání . . . . .	44
8.2.2	Meteorologie . . . . .	45
8.2.3	Elektromagnetické kmitání . . . . .	46
8.3	Závěrečné poznámky k zařazení deterministického chaosu do středoškolské fyziky . . . . .	46
	<b>Závěr</b>	<b>48</b>
	<b>Literatura</b>	<b>49</b>

# Úvod

Při studiu na gymnáziu jsem se účastnil Turnaje mladých fyziků, v rámci kterého jsem se setkal se zařízením, které se jmenuje Chuův obvod. Tento obvod vykazuje chaotické chování a byl jedním ze zásadních obvodů pro studium deterministického chaosu, o kterém nebylo až do objevu Chuova obvodu jasné, zda se jedná o fyzikální jev, nebo jen o chybu při numerickém řešení diferenciálních rovnic.

V rámci turnaje mladých fyziků jsem se však k práci s Chuovým obvodem nedostal, jelikož mi byly přiděleny jiné úlohy, ale pohled na výsledky mého kolegy Jana Mazáče ve mě probudily zvědavost k čemu je takovýto obvod vůbec využitelný. První odpovědi na sebe nedaly dlouho čekat, jelikož jsem se dočetl o chaotickém chování v atmosféře, které znemožňuje dlouhodobou předpověď počasí. Právě tato informace mě motivovala k dalšímu studiu nejen deterministického chaosu ale konkrétně Chuova obvodu, o kterém jsem se následně rozhodl napsat bakalářskou práci.

Teorie chaosu našla využití v mnohých oborech lidského poznání, které zabírají prakticky celou šíři přírodovědných oborů i některé obory společenskovední, ale v rámci širšího podvědomí společnosti zůstává chaos stále spojován s náhodným chováním, nebo s nepořádkem. Tomuto zažitému omylu bohužel pomáhá současný přístup ke studiu deterministického chaosu, který je velmi výrazně založen na diferenciálních rovnicích, topologii, ergodických systémech a mnoha dalších pojmech, které jsou brány jako základní znalosti, díky čemuž je čtenář velmi snadno odrazen od četby.

Hlavním cílem této práce je popularizační formou osvětlit problematiku nejen deterministického chaosu, ale i Chuova obvodu a jeho využití. Dále chci v této práci přiblížit postup návrhu elektrického obvodu.



# Kapitola 1

## Deterministický chaos

Tato kapitola je založena na [1]. V běžném použití znamená slovo "chaos" zmatek, nebo nepořádek. Avšak v případě deterministického chaosu máme na mysli systémy, které lze popsat pomocí matematické teorie chaosu. Tato teorie se zabývá dynamickými systémy, které jsou vysoce citlivé na počáteční podmínky. Popisuje chování takových systémů, které jsou zdánlivě náhodné, ale při hlubším zkoumání lze v tomto chování nalézt vzory, podobnosti fraktály či samoorganizaci. Edward Lorenz, jeden ze zakladatelů teorie chaosu, definoval chaos takto: "Chaos: Když přítomnost určuje budoucnost, ale přibližná přítomnost přibližně neurčuje budoucnost." [2]

Chaotické chování vykazuje mnoho přírodních systémů, jako je počasí a podnebí, ale může dojít i ke spontánní generaci chaotického chování s umělými komponenty, například u silniční dopravy. Taková chování můžeme studovat pomocí různých matematických modelů, či pomocí analytických technik.

Teorie chaosu je využívána v širokém spektru oborů mezi něž patří například meteorologie, informační technologie, sociologie, ekonomie, biologie, ekologie, nebo filosofie.

### 1.1 Předpověditelnost chování chaotických systémů

Vzhledem k tomu, že lze chování chaotického systému v principu předpovídat, tak musíme nutně dojít k otázce, v jakém časovém horizontu jsme schopni těchto předpovědí?

Odpověď nám dává Laypunovův čas. Jako příklad můžeme vzít například chaotické elektrické obvody, pro které je Laypunovův čas přibližně 1 milisekunda. Dalším zástupcem chaotických systémů je třeba Sluneční soustava, pro kterou je Laypunovův čas 5 miliónů let.

Pokud chceme předpovídat chování systému pro delší dobu, než je jeho Laypunovův čas, pak musíme vzít v úvahu, že nepřesnost takovéto předpovědi bude s časem narůstat exponenciálně. Nemůžeme tedy dělat smysluplné předpovědi pro období delší než dvojnásobek, či trojnásobek Laypunovova času. Další důsledkem je, že pokud nejsme schopni vytvořit významnou předpověď, pak s nám systém jeví jako náhodný.

### 1.2 Definice chaosu

Ačkoliv neexistuje jednotná definice chaosu, běžně užívaná je definice Roberta L. Devaney. Tato definice říká [3]: Aby byl dynamický systém chaotickým, pak musí mít následující vlastnosti:

1. systém musí být citlivý na počáteční podmínky

2. systém musí vykazovat topologické mixování
3. systém musí mít husté periodické orbity.

### 1.3 Efekt motýlích křídel

Efekt motýlích křídel, neboli citlivost na počáteční podmínky, je pojmenován podle článku, Edwarda Lorenze "Predictability: Does the Flap of a Butterfly's Wings in Brazil set off a Tornado in Texas?". Tento pomyslný motýl, mávající křídly, reprezentuje malou změnu počátečních podmínek, která způsobila řetěz událostí, které, v konečném stavu, vedou v výrazné změně výsledku. Jinak řečeno, pokud by onen pomyslný motýl těmi křídly nezamával, pak by výsledný stav systému mohl být výrazně jiný.

Důsledkem je, že pokud máme neúplné informace o systému, tak po určitém čase již není možné předpovídat chování tohoto systému.

Neznámějším příkladem je předpověď počasí. Chování takového systému jsme schopni s dostatečnou přesností předpovídat přibližně týden dopředu. Je zcela očividné, že některé parametry jsme schopni předpovědět i pro delší časový úsek než je týden (například, že teplota neklesne pod  $-130\text{ }^{\circ}\text{C}$ ), ale už nejsme schopni určit nejchladnější den roku.

### 1.4 Topologické mísení

Mísení je abstraktní matematický koncept, který vznikl z fyzikální potřeby popsat termodynamické procesy mísení v každodenním světě, jako je například míchání barviv.

V případě, že mísení definujeme, bez úmyslu měřit, pouze použitím topologie systému, pak dostáváme topologické mísení. Takovéto mísení se projevuje tím, že libovolná oblast daného souboru po určité době přesáhne do libovolné jiné oblasti daného regionu. I toto mísení zcela odpovídá intuitivnímu popisu. Navíc míchání barev je příklad chaotického chování.

### 1.5 Hustota periodických orbit

Aby měl chaotický systém husté periodické orbity, pak musí platit, že jeho orbity jsou libovolně blízko ke každému místu v prostoru.

### 1.6 Atraktory

Tato podkapitola vychází z [4].

Zatímco některé chaotické systémy vykazují chaotické chování v celém prostoru, jiné vykazují chaotické chování pouze v jeho části. V případě druhých systémů můžeme nacházet atraktory.

Atraktor je určitý soubor hodnot, ke kterým se daný systém přibližuje. Zároveň platí, že pokud se systém dostane dostatečně blízko k atraktoru, pak má tendenci v blízkosti atraktoru setrvávat a to i v případě, že jej lehce narušíme.

V případě atraktorů rozlišujeme tyto základní typy:

### 1.6.1 Pevný bod

Takovýto atraktor se vyznačuje, jak název napovídá, jedním pevným bodem, ke kterému míří systém v dané transformaci. Ale pro jednotlivé transformace nemusí být tento bod tím samým bodem. Například, pokud máme miskou v níž se pohybuje kulička, pak střed dna misky je takovýmto atraktorem.

Ovšem pro dynamické systémy, ne všechny takovéto pevné body jsou atraktory. Vratíme-li se k případu s miskou, ale nyní tuto miskou obrátíme, tak bude střed dna misky opět pevným bodem kde je kulička v klidu, ale již není atraktorem.

### 1.6.2 Konečný počet pevných bodů

V případě, že máme diskretní časový systém, pak můžeme pozorovat atraktor, který má formu konečného počtu bodů, ke kterým se systém postupně přibližuje.

### 1.6.3 Limitní cyklus

V kontinuálním dynamickém systému je limitní cyklus periodickou orbitou. Tedy existuje alespoň jedna trajektorie, která se blíží k dané limitní trajektorii v případě, že čas jde do nekonečna.

### 1.6.4 Limitní torus

V případě, že existuje více než jedna frekvence periodické trajektorie systému ve stavu limitního cyklu a pokud dvě z těchto frekvencí tvoří iracionální zlomek, pak tato trajektorie není uzavřená a limitní cyklus přechází v limitní torus.

Příklad takového systému je třeba oběh planety okolo hvězdy, kdy jedna frekvence popisuje oběh planety okolo hvězdy a druhá frekvence popisuje vzdálenost mezi těmito dvěma tělesy.

### 1.6.5 Podivný atraktor

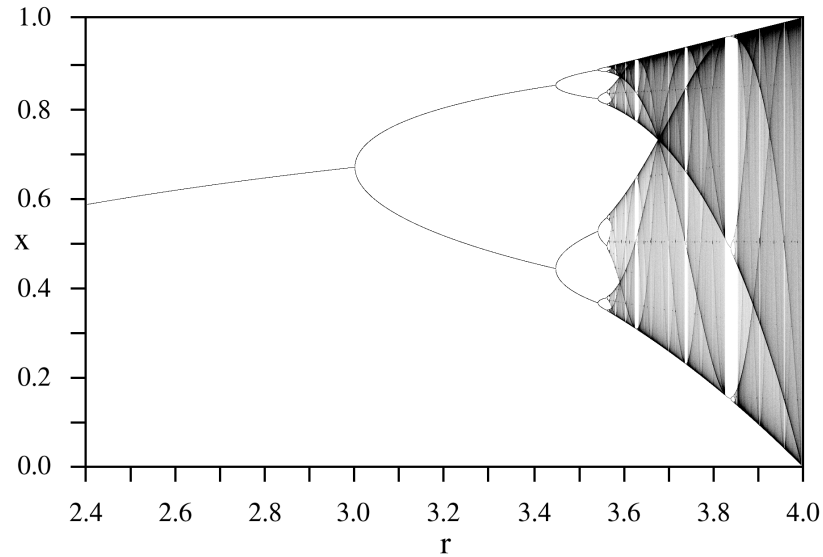
V případě, že má atraktor strukturu fraktálu, pak je nazýván podivný (strange attractor). tyto atraktory se nejčastěji vyskytují právě u chaotických systémů, ale existují i nechaotické podivné atraktory.

V případě že se jedná o chaotický atraktor, pak musí být citlivý na počáteční podmínky, což se projeví tím, že pokud máme dva libovolně blízké počáteční body, pak po nějakém počtu iterací budou tyto body libovolně vzdálené (vzdálenost je omezená atraktorem) a po nějakém jiném počtu iterací budou tyto dva body libovolně blízké. Takovýto systém s chaotickým atraktorem je sice lokálně nestabilní, ale globálně stabilní, tedy jakmile určitá sekvence vstoupí do atraktoru, pak jednotlivé body od sebe divergují, ale neopustí prostor atraktoru.

Mezi tyto atraktory patří double-scroll atraktor, Rösslerův atraktor, nebo Lorenzův atraktor.

## 1.7 Bifurkace

Tato podkapitola je založena na [5].



Obrázek 1.1: Bifurkační diagram, převzato z: [6]

Bifurkace je jev, při kterém dochází ke znásobení počtu řešení diferenciálních rovnic daného systému v závislosti na jeho parametrech. Tuto skutečnost můžeme znázornit pomocí bifurkačního diagramu (Obrázek 1.1).

Na našem diagramu (Obrázek 1.1) můžeme vidět nejprve celočíselné násobky řešení, což nám ukazuje nechaotický atraktor v podobě souboru pevných bodů. Pokud ale zvyšujeme parametr  $r$  pak se dostáváme z  $k$  neceločíselnému počtu řešení, které nám ukazuje, že daný systém, se v tomto bodě chová chaoticky. Chaotické chování však takovýto systém nemusí vykazovat vždy, jelikož v našem diagramu vidíme, že pro některé hodnoty  $r$  (například  $r \approx 3.85$ ) opět dostáváme stabilní, nechaotické chování.

# Kapitola 2

## Popis Chuova obvodu

Tato kapitola je založena na [7], [8] a [9].

Předtím, než se podíváme na schéma Chuova obvodu, bych rád popsal historii jeho stvoření.

Ačkoliv základy teorie chaosu byly položeny již okolo roku 1900, kdy Henri Poincaré, v odpovědi na dotaz Švédské královny zda je Sluneční soustava stabilní, ukázal, že problém tří těles je v principu neřešitelný. Obecně známý Newtonův popis je založen na řešení problému dvou těles (například Slunce a Země). Neřešitelnost problému tří těles (například Slunce, Země a Měsíc) tedy z dlouhodobého hlediska dá vzniknout nepředvídatelnému chování a chaosu.

Sluneční soustava však nebyl jediný systém, jehož popis byl složitějším, než by se původně zdálo. Když se Edward Lorenz pokoušel zlepšit přesnost předpovědi počasí, tak v roce 1963 přišel se souborem Lorentzových rovnic, které popisují proudění atmosféry:

$$\dot{x} = -\alpha(x - y) \tag{2.1a}$$

$$\dot{y} = \beta x - y - xz \tag{2.1b}$$

$$\dot{z} = xy - \gamma z, \tag{2.1c}$$

kde  $\alpha$ ,  $\beta$  a  $\gamma$  jsou parametry. Při počítačové modelaci tohoto systému objevil Lorenz první chaotický atraktor, který je znám jako Lorenzův atraktor. Ovšem tento objev nebyl příliš přesvědčivý a zcela přirozeně vedl k diskuzi, zda se nejedná pouze o chybu přibližného výpočtu způsobenou počítačem.

Před rokem 1983 tedy panoval názor, že chaos je pouze patologickým jevem, který existuje pouze v matematické abstrakci popisu našeho světa. Dalším problémem bylo, že se nepodařilo sestavit fyzikální model, na kterém bychom mohli přímo pozorovat chaotické chování. Když však tým na Wasedské univerzitě vedený profesorem T. Matsumotem sestavil Lorenzův obvod, na kterém měl být pozorován Lorenzův atraktor, tak se zdálo, že se naše poznání v této disciplíně posune kupředu. Lorenzův obvod ale nefungoval. Tato komplikace byla způsobena chybějícím nelineárním integrovaným obvodem. Avšak u této nezdařené demonstrace byl přítomen Leon O. Chua, který následně navrhl jiný obvod. Tento obvod je znám jako Chuův obvod.

Již na podzim roku 1983 byla numericky potvrzena existence chaotických atraktorů v chování tohoto obvodu, v roce 1985 bylo toto chaotické chování pozorováno experimentálně a v roce 1986 bylo dokázáno, že se skutečně jedná o chování chaotické a nikoliv náhodné.

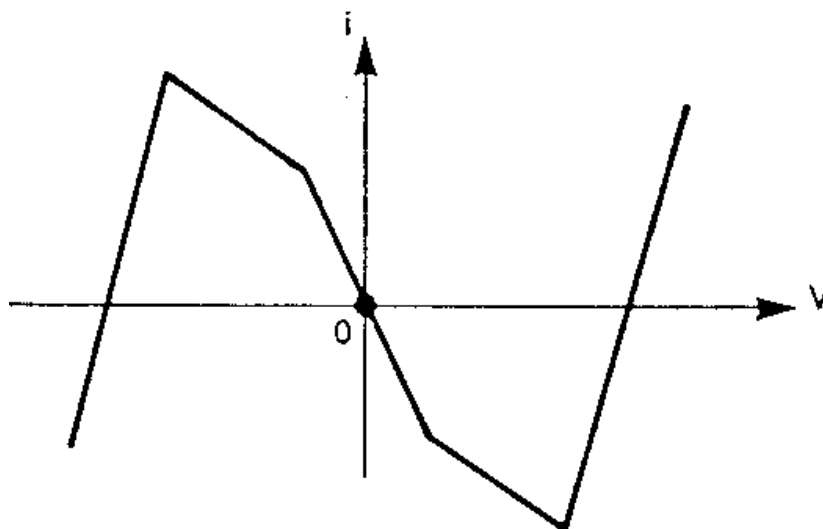
Jen abychom dostali představu o důležitosti tohoto obvodu, tak důkaz, že Lorenzův

atraktor je skutečně chaotický (tento atraktor byl objeven již roku 1963), byl hotov až okolo roku 2000.

## 2.1 Návrh Chuova obvodu

Abychom navrhli samostatný elektrický obvod který vykazuje chaotické chování, pak můžeme formulovat specifikaci obvodu takto [9] "Navrhněme fyzicky realizovatelný samostatný obvod, který má právě dva nebo tři nestabilní rovnovážné body. Obvod by měl obsahovat nejmenší možné množství lineárních pasivních rezistorů, cívek a kondenzátorů a právě jeden nelineární rezistor, který je charakterizován eventuálně pasivní, po částech lineární, napětím kontrolovatelnou volt-ampérovou charakteristikou."

Takovýto nelineární rezistor tedy musí být aktivní (což znamená, že pro obvod musí být zdrojem napětí), aby obvod vykazoval chaotické chování. Jinak řečeno, volt-ampérová charakteristika takového rezistoru musí ležet pouze ve druhém nebo ve čtvrtém kvadrantu. Nicméně takovýto rezistor se musí eventuálně stát pasivním abychom jej byli schopni fyzicky sestrojít. Jinak řečeno, volt-ampérová charakteristika musí ležet pouze v prvním a třetím kvadrantu. Takováto volt-ampérová charakteristika může vypadat, třeba takto (Obrázek 2.1).



Obrázek 2.1: Volt-ampérová charakteristika hledaného nelineárního rezistoru, převzato z [10]

Důvod, proč chceme, aby byla tato voltampérová charakteristika po částech lineární je ten, že jsme schopni takovouto součástku jednoduše sestrojít.

### 2.1.1 Určení minimálního počtu prvků obvodu

Pokud máme soustavu obyčejných diferenciálních rovnic, pak autonomní systém který popisují nemůže být chaotický, pokud má méně než 3 proměnné. Můžeme tedy předpokládat, že obvod se bude chovat chaoticky v případě, že bude obsahovat tři lineární pasivní prvky, které uchovávají energii. Dále nám specifikace obvodu povolují pouze jeden nelineární rezistor, takže všechny ostatní součástky budou lineární pasivní rezistory.

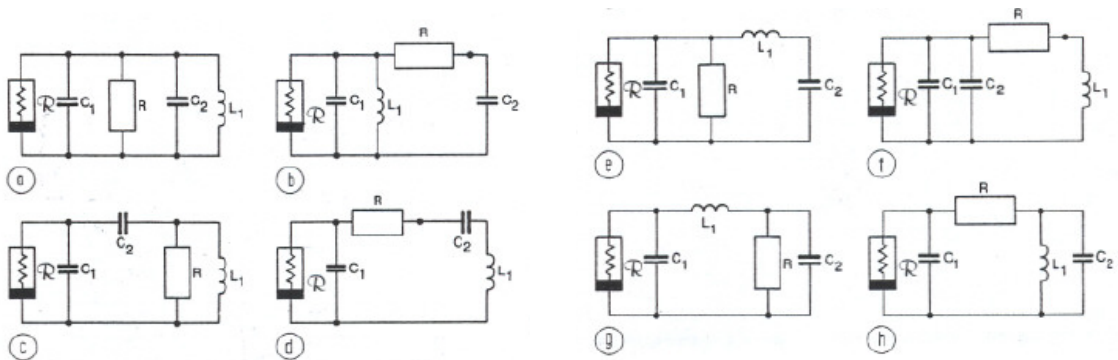
Navíc nebudeme potřebovat externí zdroj napětí, jelikož je v obvodu lokálně aktivní rezistor, který už má zabudovaný vnitřní zdroj napětí.

## 2.1.2 Návrh schématu Chuova obvodu

Poslední krokem je tedy návrh schématu obvodu. Je zcela jasné, že tento obvod musí obsahovat onen lokálně aktivní rezistor, který budeme dále nazývat Chuova dioda, a další tři energii uchovávací prvky, kterými mohou být buď kondenzátory nebo cívky.

Následný postup se sestával pouze z určení vhodné kombinace cívek a kondenzátorů. A to obvody se třemi kondenzátory, třemi cívkami, dvěma kondenzátory a jednou cívkou, nebo dvěma cívkami a jedním kondenzátorem. První dvě možnosti může okamžitě vyloučit, díky tomu, že se nejedná o oscilační obvody, a tedy není možné, aby se chovaly chaoticky. Zbýlé dvě možnosti jsou k sobě duální, můžeme tedy zvolit libovolnou z nich. Výběr padl na obvod, ve kterém budou dva kondenzátory a jedna cívka z důvodu, že cena kvalitních kondenzátorů je nižší než cena kvalitních cívek.

Posledním krokem bylo určení finálního zapojení prvků, kde jsme vytvořili všechny kombinace sériových a paralelních zapojení jednotlivých součástek. Pro předpoklad, že nám v obvodu stačí jeden lineární rezistor, jsme našli osm různých možností (obrázek 2.2).



Obrázek 2.2: Možnosti zapojení, převzato z [9]

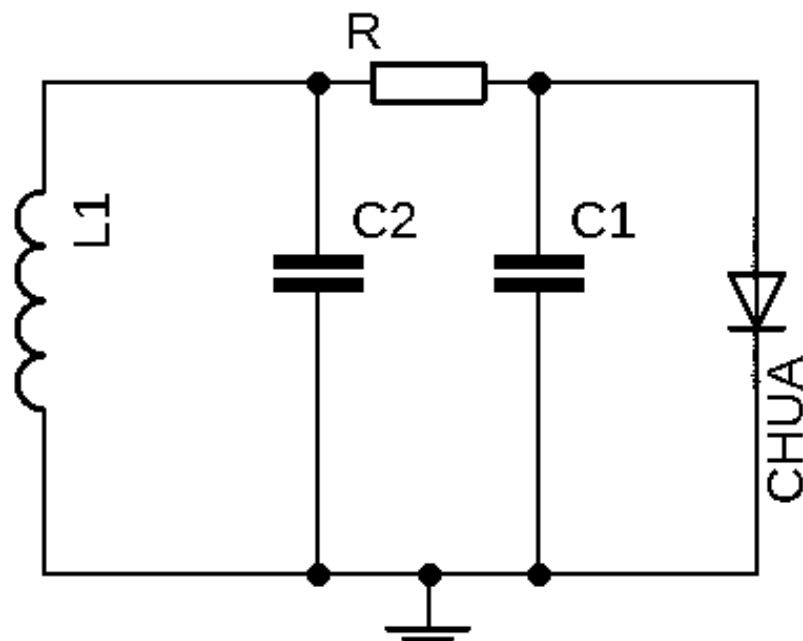
Ze schémat zapojení (obrázek 2.2) vidíme, že v případě zapojení (a) a (b) dostáváme zkratovaný obvod, pro možnosti (c) a (d), jelikož takovýto obvod není uzavřený. V případě zapojení (e) je lineární rezistor  $R$  zapojený paralelně s Chuovou diodou  $R$ , a tedy lineární odpor  $R$  bude "absorbován" Chuovou diodou  $R$ , což vyústí v jinak otevřený obvod, tudíž můžeme vyloučit i tuto možnost. Pro možnost zapojení (f) máme kondenzátory  $C_1$  a  $C_2$  zapojeny paralelně, takže pro chování obvodu se tyto dva kondenzátory chovají jako jeden kondenzátor, což vyústí v obvod druhého řádu, který nemůže být chaotický. Konečně se tedy dostáváme k obvodům (g) a (h), kdy oba splňují všechny dané podmínky a ani jeden není zkratovým, nebo otevřeným obvodem.

V podstatě neexistuje technický důvod abychom preferovali více jedno, nebo druhé zapojení, ale v případě zapojení (h) dostáváme k dispozici oscilační pod obvod tvořený cívkou  $L_1$  a kondenzátorem  $C_2$ , který nám dává výhodu, jelikož oscilace jsou často předchůdcem chaosu.

Dostáváme tedy finální návrh zapojení Chuova obvodu (Obrázek 2.3).

Závěrem tohoto postupu návrhu Chuova obvodu můžeme vyslovit jednoduchá pravidla, která udávají minimální podmínky, aby byl daný obvod chaotický:

1. Obvod musí obsahovat alespoň jeden nelineární prvek.



Obrázek 2.3: Zapojení Chuova obvodu [9]

2. Obvod musí obsahovat alespoň jeden lokálně aktivní rezistor.
3. Obvod musí obsahovat alespoň tři prvky uchovávající energii.

Jak vidíme, tak navržený obvod je nejjednodušším chaotickým obvodem, jelikož obsahuje právě tři prvky uchovávající energii (dva kondenzátory a jedna cívka) a jeden lokálně aktivní rezistor, který je zároveň nelineárním prvkem, kterým je Chuova dioda.

## 2.2 Matematický popis Chuova obvodu

Tato podkapitola je založena na [13].

Jelikož již máme hotový návrh Chuova obvodu (Obrázek 2.3), tak jako první krok k jeho zkoumání potřebujeme tento obvod nějak popsat pomocí matematických rovnic. Z těchto rovnic budeme následně schopni vytvořit počítačový model, který nám ukáže, zda se obvod může chovat chaoticky.

K popisu chování obvodu nám poslouží Kirchhoffovy zákony pro kvazistacionární obvod, které zní [12]:

1. Celkový proud vytékající z libovolného uzlu je v každém okamžiku roven nule.
2. Součet všech úbytků napětí ve smyčce je v každém okamžiku roven celkovému elektromotorickému napětí působícímu ve smyčce.

Ve své podstatě jsou tyto zákony stejné jako pro stacionární obvody, avšak využívá diferenciálních rovnic.

Pokud tedy pojmenujeme  $U_1$  napětí na kondenzátoru  $C_1$  (a Chuově diodě),  $U_2$  napětí na kondenzátoru  $C_2$  (a cívce) a  $I$  proud tekoucí cívkou, pak dostáváme podle



Kirchhoffových zákonů rovnice tvaru [13]:

$$\dot{U}_1 = \frac{U_2 - U_1}{RC_1} - g(U_1) \quad (2.2a)$$

$$\dot{U}_2 = \frac{U_1 - U_2}{RC_2} + I \quad (2.2b)$$

$$\dot{I} = \frac{-R_0 I - U_2}{L}, \quad (2.2c)$$

kde  $C_1$  a  $C_2$  jsou kapacity kondenzátorů  $C_1$  a  $C_2$ ,  $L$  je indukčnost cívky  $L_1$  a  $R$  je odpor lineárního rezistoru  $R$ . Dále  $R_0$  je vnitřní odpor cívky  $L_1$  a  $g(U_1)$  je funkce popisující volt-ampérovou charakteristiku Chuovy diody, která má tvar:

$$g(U) = m_b U + \frac{1}{2}(m_a - m_b) [|U + B| - |U - B|], \quad (2.3)$$

kde  $m_a$  a  $m_b$  jsou směrnice volt-ampérové charakteristiky Chuovy diody a  $\pm B$  jsou zlomové body, které jsou v dané volt-ampérové charakteristice jasně patrné (Obrázek 2.1).

Pokud se podíváme na  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $L$ ,  $R$  a  $R_0$  jako na nějaké kladné konstanty a na funkci  $g$  jako nějakou matematickou funkci, pak můžeme tyto rovnice zobecnit na tvar, který není vázán na popis obvodu, což může zjednodušit modelování. Zobecnění můžeme dosáhnout tak, že vhodně nahradíme jednotlivé parametry obvodu proměnnými následujícím způsobem [13]:

$$\begin{aligned} x &= \frac{U_1}{B}, y = \frac{U_2}{B}, & z &= \frac{R}{B} I, \\ \alpha &= \frac{C_2}{C_1}, \beta = \frac{R^2 C_2}{L}, & a &= R m_a, b = R m_b. \end{aligned}$$

Pak dostáváme obecné rovnice double-scroll atraktoru:

$$\dot{x} = \alpha(y - x - f(x)) \quad (2.4a)$$

$$\dot{y} = x - y + z \quad (2.4b)$$

$$\dot{z} = -\beta y, \quad (2.4c)$$

kde

$$f(x) = bx + \frac{1}{2}(a - b) [|x + 1| - |x - 1|]. \quad (2.5)$$

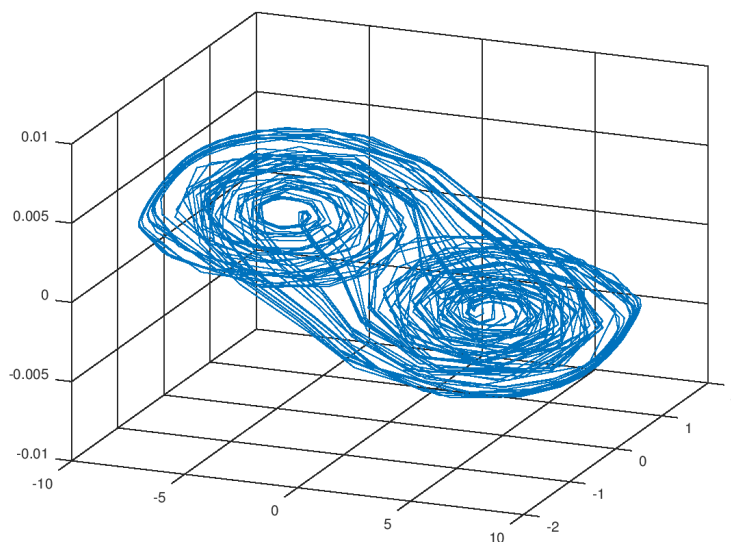
Takovýto popis je pro nás vhodný, jelikož snižuje počet proměnných, které musíme upravovat v případě modelování chování obvodu.

Nyní máme model, který popisuje chování našeho obvodu, můžeme tedy využít programu Octave k tomu, abychom ověřil, zda se takovýto obvod skutečně chová chaoticky (Obrázek 2.4).

Naše simulace nám potvrdila chaotičnost takového systému a já jsem mohl přistoupit k sestavení samotného obvodu.

## 2.2.1 Geometrie double-scroll atraktoru

Podivný atraktor, který byl nalezen právě numerickým řešením Chuových rovnic se jmenuje double-scroll atraktor, podle dvou výrazných oblastí, které tvoří svitkům podobné struktury. Ovšem tato struktura je složitější, než se na první pohled může zdát.



Obrázek 2.4: Počítačová simulace v programu Octave s parametry  $\alpha = 15.6$ ,  $\beta = 28$ ,  $a = -1.143$  a  $b = -0.714$  za využití funkce "ode45", kterou lze řešit soustavu diferenciálních rovnic numericky, podle [11]

Na základě důsledné numerické analýzy double-scroll atraktoru v rámci třírozměrného prostoru bylo zjištěno, že tento atraktor má fraktální strukturu.

Fraktál je na první pohled složitý tvar, který ale vzniká neustálým opakováním daných pravidel. Jeho další vlastností je, že pokud jej pozorujeme v libovolném měřítku, pak vidíme stejný tvar, či motiv.

# Kapitola 3

## Sestavení Chuova obvodu

Tato kapitola je založena na [11].

Jako u každého jiného obvodu i zde jsou na výběr tři možnost prostředí, na kterém tento obvod sestavit. Jedná se o nepájivé pole, pájivé pole a speciálně navržený plošný spoj. Ačkoliv lze Chuův obvod na nepájivém poli sestavit, jednalo by se o zbytečně zdlouhavý proces, jelikož i malá změna v odporu, v podobě přechodového odporu na špatném kontaktu může výrazně změnit chování obvodu a tedy i lehký pohyb obvodu při měření, může výrazně ovlivnit výsledky měření.

V případě návrhu plošného spoje je problém s časovou náročností výroby plošného spoje, zároveň je takovýto obvod obtížnější následně upravovat.

Z těchto důvodů jsem se rozhodl Chuův obvod postavit na univerzální pájivé pole, které nabízí dostatečně odolné spoje a následně jednoduchou opravu daného spoje.

### 3.1 Chuova dioda

Dalším problémem byla Chuova dioda. Jak jsem již dříve popsal, nejedná se o diodu v běžném slova smyslu, jedná se lokálně aktivní rezistor. Tato součástka ovšem není běžně dostupná ke koupi. Proto je potřeba ji vyrobit, či sestavit pro každý obvod zvlášť.

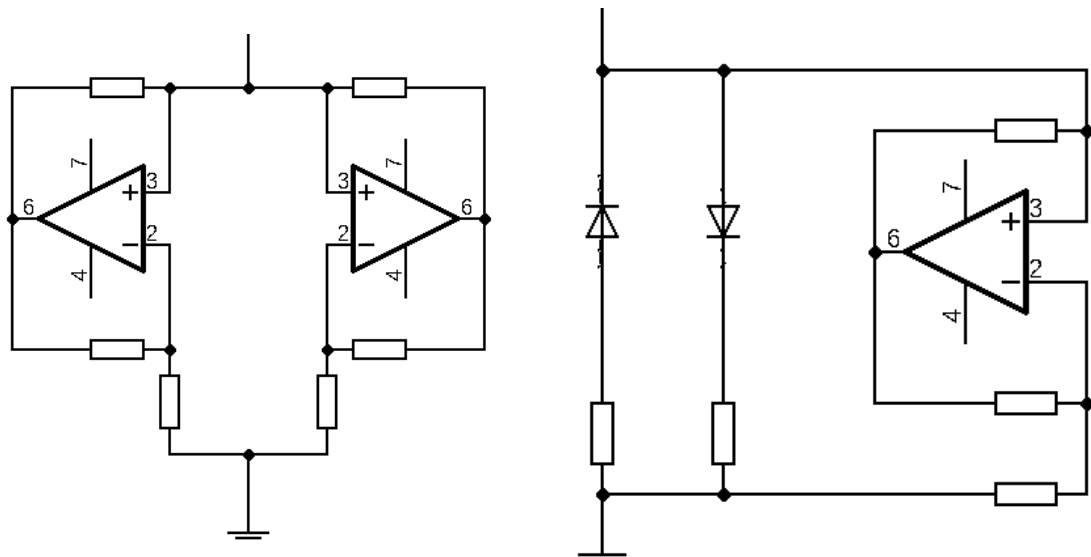
K dispozici jsou dva možné přístupy, jak vyrobit Chuovu diodu. Prvním je výroba specializovaného integrovaného obvodu, druhým je sestavení Chuovy diody z běžně dostupných komponentů.

Nejpřesnější výsledky bychom samozřejmě dosáhli se specializovaným integrovaným obvodem, který je vyroben z velmi čistého monokrystalu křemíku chemickými metodami. Takováto výroba je nejen náročná, ale i vysoce nákladná, jelikož křemík je poměrně drahý materiál.

V případě sestavení Chuovy diody z běžně dostupných komponentů neexistuje jediný správný způsob. Dvěma nejznámějšími způsoby jsou Chuovy diody sestavené následujícími způsoby (Obrázek 3.1).

V případě sestavení napravo je Chuova dioda sestavena pouze z rezistorů a dvou operačních zesilovačů, ve druhém případě je k sestavení Chuovy diody potřeba nejen rezistorů a operačních zesilovačů, ale i dvou běžných diod.

V případě mého obvodu jsem se rozhodl využít Chuovy diody sestavené pouze z rezistorů a operačních zesilovačů, kterou je možné vidět na levém schématu (Obrázek 3.1). Jedná se o nejběžnější způsob sestavení Chuovy diody, které je nejen levné, ale i velmi jednoduché.

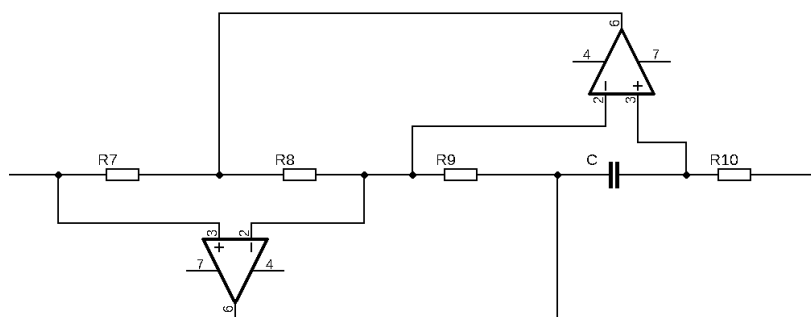


Obrázek 3.1: Schéma sestavení chuovy diody dvěma různými způsoby, podle [11]

## 3.2 Cívka

V případě cívky v obvodu narážíme na další problém, jelikož potřebujeme cívku, jejíž indukčnost je okolo 18 mH a zároveň potřebujeme aby její vnitřní odpor byl nižší, než 30  $\Omega$ . Takovouto cívku není zcela jednoduché koupit. Dalším problémem je, že cívka s indukčností 18 mH nemusí být vhodná pro obvod, který reálně sestavíme. V ideálním případě tedy chceme cívku, jejíž indukčnost můžeme měnit s dostatečnou přesností v určitém rozsahu, který zahrnuje 18 mH, a která má zároveň vnitřní odpor nižší 30  $\Omega$ .

Takovýto problém se může zdát jako nepřekonatelný, ale naštěstí existuje obvod, který se jmenuje gyrátor (Obrázek 3.2).



Obrázek 3.2: Schéma gyrátoru, podle [11]

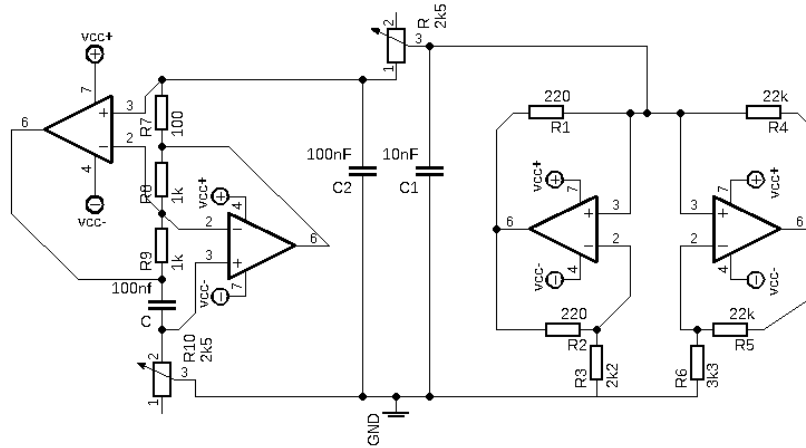
Tento obvod můžeme zapojit způsobem, který simuluje chování cívky. Navíc pokud nahradíme některý z rezistorů potenciometrem, tak dostaneme součástku, jejíž indukčnost můžeme jednoduše měnit. Tuto indukčnost spočítáme ze vztahu [14]:

$$L = \frac{R_7 R_9 R_{10} C}{R_8}, \quad (3.1)$$

kde  $C$  je kapacita zapojeného kondenzátoru, a  $R_7$ ,  $R_8$ ,  $R_9$  a  $R_{10}$  jsou hodnoty odporu jednotlivých rezistorů v gyrátoru. Odvození tohoto vztahu je k dispozici v [14].

### 3.3 Konečný návrh obvodu

Když se podíváme na původní návrh obvodu (Obrázek 2.3) tak vidíme, že potřebujeme toto schéma upravit, jelikož Chuova dioda se skládá z více prvků, a také jsme nahradili cívku gyrátorem. Z tohoto důvodu potřebujeme nové schéma, které tyto změny reflektuje (Obrázek 3.3).



Obrázek 3.3: Schéma Chuova obvodu, podle [11]

Oproti původnímu schématu (Obrázek 2.3) jsme nahradili lineární rezistor potenciometrem, a v gyrátoru (Obrázek 3.2) jsme také nahradili poslední rezistor potenciometrem. Tyto změny nám umožnily jednoduše měnit parametry obvodu, tak abychom mohli pozorovat chování obvodu pro jednotlivá nastavení obvodu.

Posledním krokem bylo určení konkrétních hodnot jednotlivých rezistorů v obvodu (Tabulka 3.1) a kondenzátorů (Tabulka 3.2). Tyto hodnoty jsem převzal z [11].

Rezistor	$R$ [ $\Omega$ ]
R	0 - 2500
R1	220
R2	220
R3	2200
R4	22000
R5	22000
R6	3300
R7	100
R8	1000
R9	1000
R10	0 - 2500

Tabulka 3.1: Hodnoty rezistorů v Chuově obvodu, převzato z [11]

Kondenzátor	$C$ [nF]
C	100
C1	10
C2	100

Tabulka 3.2: Hodnoty kondenzátorů v Chuově obvodu, převzato z [11]

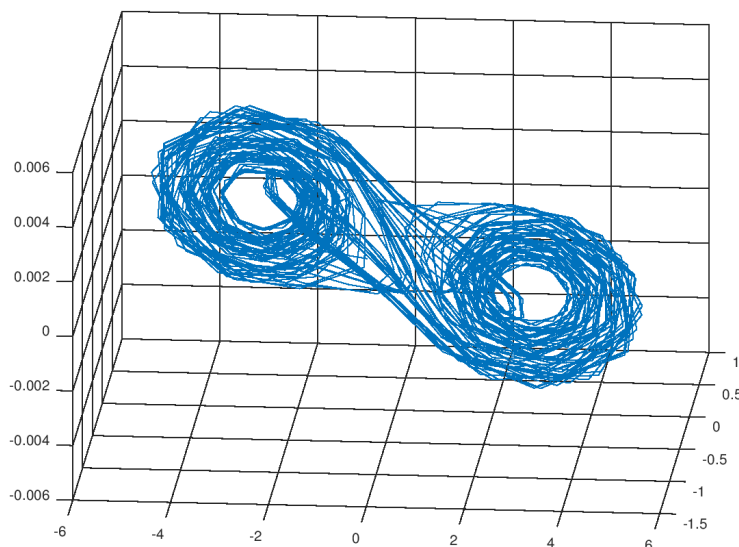
Hodnoty R a R10 uvádím jako interval, jelikož se jedná o potenciometry.

# Kapitola 4

## Modelace chování obvodu

Nyní, když známe hodnoty jednotlivých komponentů obvodu, jsme schopni modelovat chování obvodu, který jsme popsali pomocí Kirchhoffových zákonů (2.2). Jednotlivé rovnice jsem řešil pomocí programu Octave, kde jsem pro numerické řešení rovnic (2.2) použil funkci ode45, pomocí které je možno numericky řešit soustavy diferenciálních rovnic [11].

Pro doporučenou hodnotu [11]  $R_{10} = 1800 \Omega$  dostaneme z (3.1) indukčnost gyrátoru  $L = 18 \text{ mH}$ . Dále pro nastavení  $R = 1800 \Omega$  dostáváme chaotické chování obvodu, kdy můžeme pozorovat double-scroll atraktor (Obrázek 4.1).



Obrázek 4.1: Počítačová simulace chování Chuova obvodu, za využití Kirchhoffových zákonů (2.2)

Problém nastal, když jsem se rozhodl ověřit toto chování na mém obvodu. Při nastavení stejných hodnot se obvod nechoval chaoticky. Nechoval se chaoticky ani pro žádnou jinou hodnotu  $R$  při zachované hodnotě  $R_{10} = 1800 \Omega$ . Rozhodl jsem se proto nejdříve najít hodnotu  $R_{10}$ , pro kterou budu reálně schopen pozorovat chaotické chování v mém obvodu a následně toto chování modelovat.

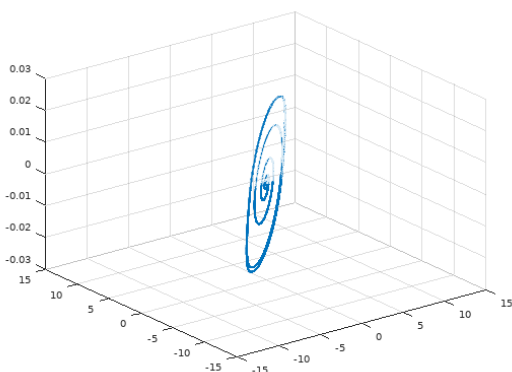
V mém obvodu jsem byl schopen pozorovat chaotické chování nejlépe pro hodnotu  $R_{10} = 2730 \Omega$  a tedy, podle (3.1),  $L = 27.3 \text{ mH}$ . Tento rozdíl v hodnotách  $R_{10}$ , a tedy i  $L$ , byl způsoben jak způsobem sestavení obvodu, pro které jsem byl nucen využít

poměrně velké množství vodičů, tak výrobní nepřesnost součástek, která byla, jak pro kondenzátory, tak pro rezistory 5 %.

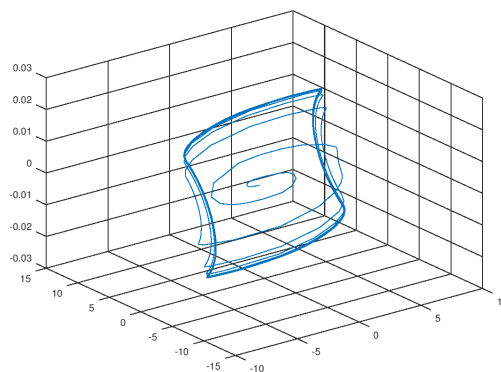
Za pomoci tohoto modelu je možné pozorovat tři rozdílné fáze chování obvodu, jedná se o nechaotickou fázi, první chaotickou fázi, kdy můžeme pozorovat double-scroll atraktor a druhou chaotickou, při které můžeme pozorovat Rösslerův atraktor.

## 4.1 Nechaotická fáze

Pro nízké hodnoty odporu  $R$  mezi 0 a  $1970 \Omega$  můžeme pozorovat nechaotické chování, které nabírá tvar nejprve nedeformovaných Lissajousových obrazců (Obrázek 4.2), v případě, že se přibližujeme k chaotickému chování, dochází k deformaci našeho obrazce. Tato deformace se projevuje tvorbou dvou extrémálních bodů (Obrázek 4.3).

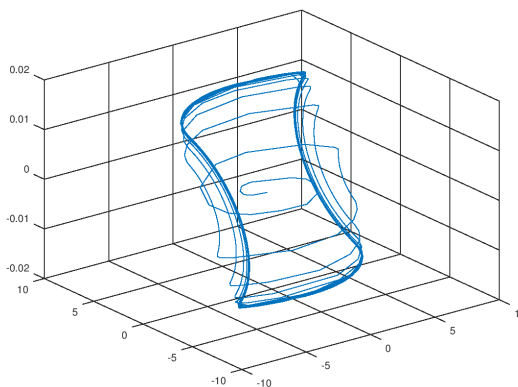


Obrázek 4.2: Model chování Chuova obvodu pro  $R = 0 \Omega$



Obrázek 4.3: Model chování Chuova obvodu pro  $R = 1500 \Omega$

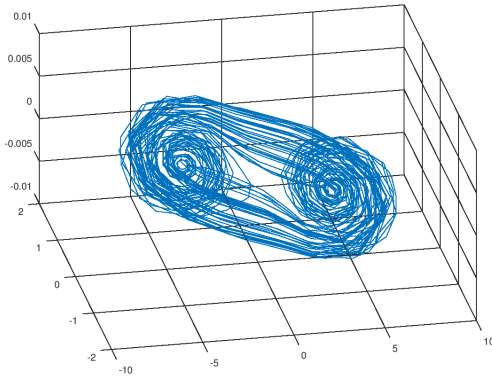
Pokud se dále přibližíme k hodnotě  $R = 1970 \Omega$ , pak můžeme vidět zúžení střední části grafu a počátek dvou svitků, které budou tvořit námi hledaný double-scroll atraktor (Obrázek 4.4).



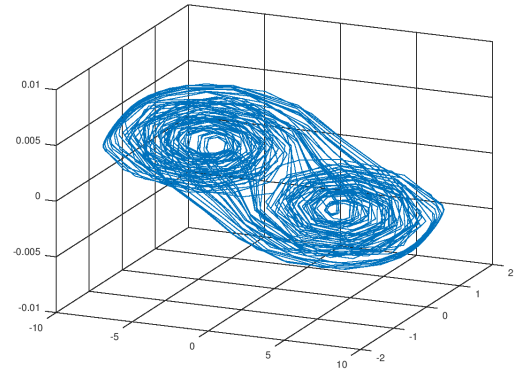
Obrázek 4.4: Model chování Chuova obvodu pro  $R = 1900 \Omega$

## 4.2 První chaotická fáze

Při překročení hodnoty  $R = 1970 \Omega$  se dostáváme do první chaotické fáze chování Chuova obvodu. Pokud se pohybujeme v oblasti hodnot  $R$  blízkých  $R = 1970 \Omega$  (Obrázek 4.5 a 4.6), pak můžeme pozorovat double-scroll atraktor, který vykazuje velmi časté přechody mezi dvěma svitky, kterými je tvořen. V tomto případě je chování obvodu velice blízké chování našeho matematického modelu, který využívá obecného popisu double-scroll atraktoru (Obrázek 2.4), který je popsán rovnicemi (2.4).

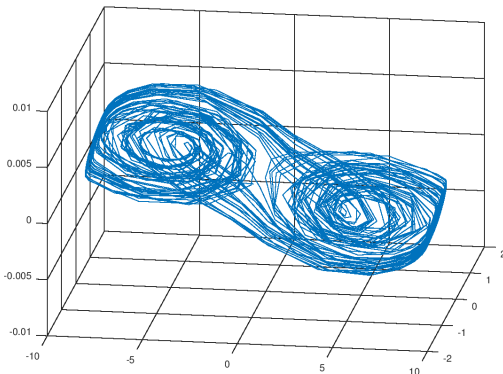


Obrázek 4.5: Model chování Chuova obvodu pro  $R = 1970 \Omega$

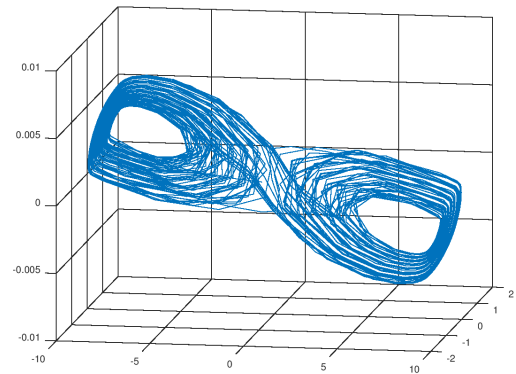


Obrázek 4.6: Model chování Chuova obvodu pro  $R = 2010 \Omega$

Pokud dále zvyšujeme odpor  $R$  až do hodnot  $R = 2190 \Omega$ , pak můžeme pozorovat oddalování jednotlivých svitků, včetně snížení počtu přechodů mezi jednotlivými svitky. Zároveň si můžeme všimnout deformace v oblasti vnější hranice double-scroll atraktoru, kde dochází ke zplošťování obou svitků (Obrázek 4.7 a 4.8).



Obrázek 4.7: Model chování Chuova obvodu pro  $R = 2080 \Omega$



Obrázek 4.8: Model chování Chuova obvodu pro  $R = 2120 \Omega$

## 4.3 Druhá chaotická fáze

Pokud se dostaneme na hodnotu  $R = 2190 \Omega$ , pak, ačkoliv již nemůžeme pozorovat double-scroll atraktor, se obvod chová nadále chaoticky (Obrázek 4.9). Pro  $R = 2190 \Omega$  pozorujeme jiné chaotické chování, které je podobné chování jiného chaotického



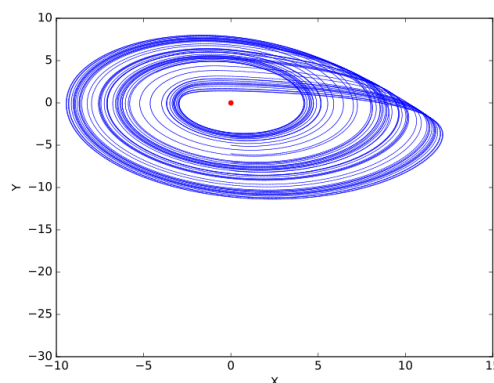
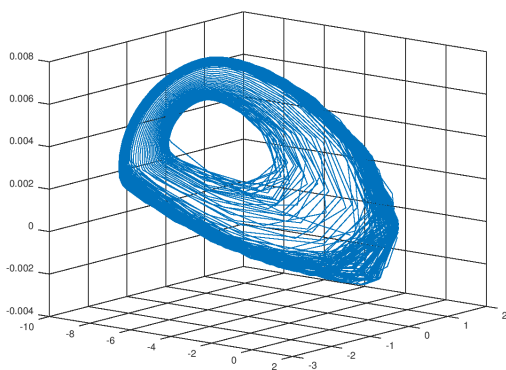
atraktoru, tento atraktor je nazývá Rösslerův (Obrázek 4.10). Rösslerův atraktor lze popsat pomocí obyčejných diferenciálních rovnic tvaru [9]:

$$\dot{x} = -y - z \quad (4.1a)$$

$$\dot{y} = x + \alpha y \quad (4.1b)$$

$$\dot{z} = \beta + z(x - \gamma), \quad (4.1c)$$

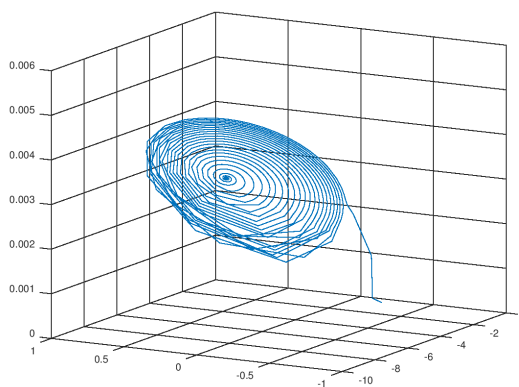
kde  $\alpha$ ,  $\beta$  a  $\gamma$  jsou parametry.



Obrázek 4.9: Model chování Chuova obvodu pro  $R = 2190 \Omega$

Obrázek 4.10: Rösslerův atraktor, převzato z [15]

Zvýšíme-li odpor  $R$  na  $R = 2200 \Omega$ , pak vidíme deformovanou spirálu (Obrázek 4.11). Můžeme předpokládat, že jsme narazili na místo, kde Chuova dioda přestává být aktivním prvkem, a začíná se chovat jako běžný rezistor. Dále můžeme předpokládat, že jsme narazili na omezení našeho modelu, jelikož ten je stavěn pro popis chování Chuova obvodu v rozmezí, kde se Chuova dioda chová jako aktivní prvek.

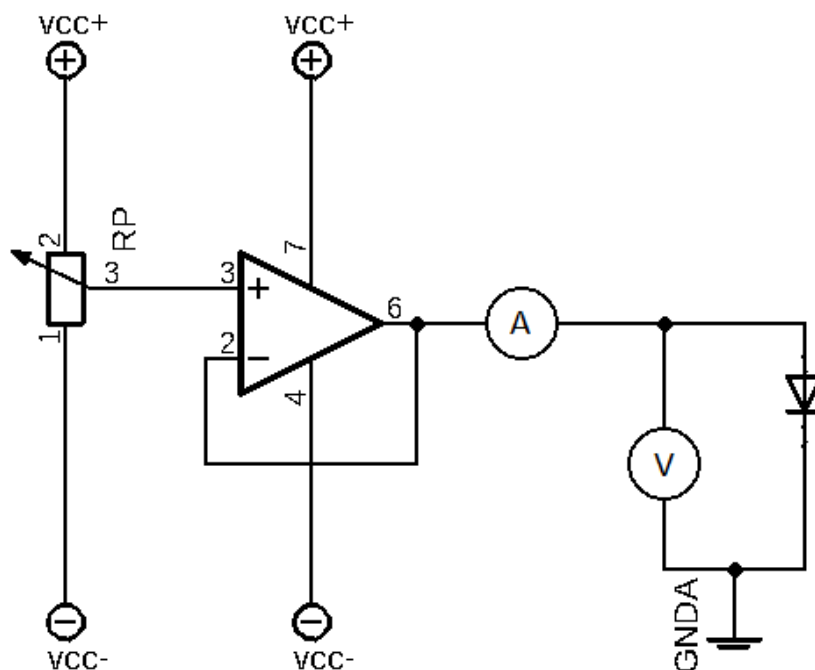


Obrázek 4.11: Model chování Chuova obvodu pro  $R = 2200 \Omega$

## Kapitola 5

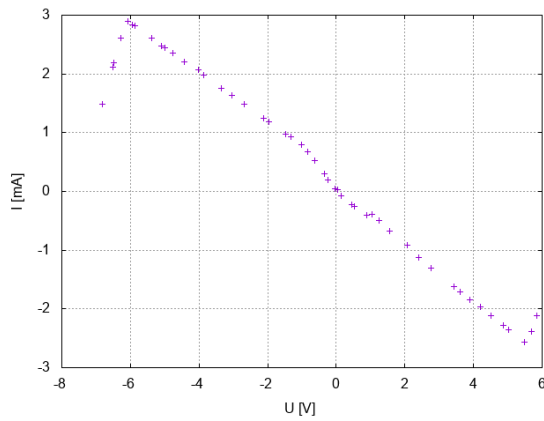
# Volt-ampérová charakteristika Chuovy diody

Dříve, než jsem mohl začít měřit chování Chuova obvodu, jsem potřeboval ověřit, zda je mnou sestavená Chuova dioda skutečně lokálně aktivní. Abych takovéto měření mohl provést, tak jsem nejprve potřeboval způsob, jak přivádět napětí na Chuovu diodu (v kompletním Chuově obvodu se Chuova dioda chová aktivně). Tento problém jsem vyřešil za pomoci děliče napětí (Obrázek 5.1) a jako zdroj jsem použil laboratorní zdroj napětí, který umožňuje sériové zapojení dvou zdrojů (konkrétně se jednalo o zdroj Twintex TP-4503N).

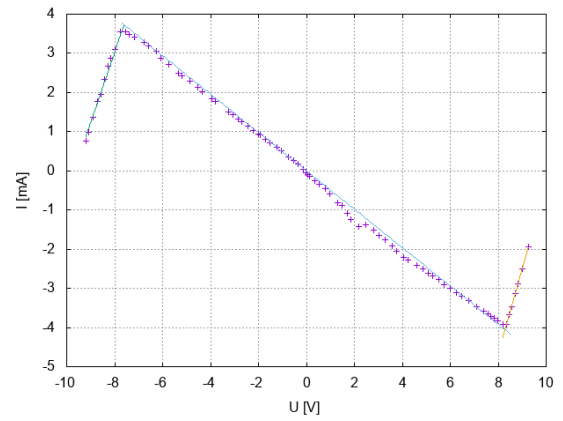


Obrázek 5.1: Schéma děliče napětí

V takovémto zapojení, jsme za pomoci dvou multimetrů, kdy jeden zapojíme jako voltmetr a druhý jako ampérmetr, schopni změřit volt-ampérovou charakteristiku. Nastavil jsem tedy na zdroji doporučené napětí 9 V [11], a postupnou změnou odporu  $RP$  jsem byl schopen měřit napětí na Chuově diodě a proud, který jí procházel, v rozsahu od -7 V do 7 V (Obrázek 5.2). Toto snížení rozsahu je z důvodu omezení operačních zesilovačů.



Obrázek 5.2: Volt-ampérová charakteristika chuovy diody pro napájení 9 V



Obrázek 5.3: Volt-ampérová charakteristika chuovy diody pro napájení 12 V, včetně lineárního fitu, provedeného po částech

Zde jsem narazil na problém, jelikož části voltampérové charakteristiky, které měly kladnou směrnici se nacházely v extrémních pozicích pro operační zesilovače. Rozhodl jsem se tedy zvýšit napětí zdroje na 12 V, čímž jsem dosáhl většího rozsahu napětí, pro které jsem mohl bezpečně měřit.

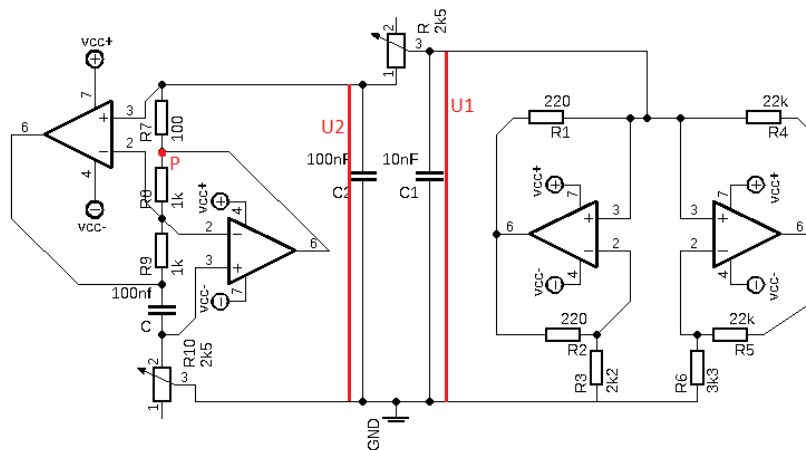
Při zdrojovém napětí 12 V jsem získal dostatečně přesnou volt-ampérovou charakteristiku Chuovy diody (Obrázek 5.3). V tomto případě již máme dostatečně výrazné části s kladnou směrnicí. Zároveň jsem provedl lineární fitaci v programu gnuplot, kdy nejistota fitu byla nižší než 5 %.

Dále můžeme vidět asymetrii u bodů zlomu v rozsahu přibližně 0.2 V. Stejně tak si můžeme všimnout výrazného poklesu proudu u napětí okolo 2 V. Tyto nepřesnosti Chuovy diody však byly způsobeny konstrukční nepřesností, a velkým počtem vodičů v mém obvodu.

# Kapitola 6

## Měření chování Chuova obvodu

Chování Chuova obvodu jsem pozoroval na osciloskopu, kde jsem měřil postupně napětí na kondenzátoru  $C1$  ( $U1$ ), napětí na kondenzátoru  $C2$  ( $U2$ ) a napětí na části gyrátoru ( $UG$ ). Napětí  $UG$  jsme měřil mezi zemí a bodem P (Obrázek 6.1). Mnou zvolený parametr, který mění chování obvodu je odpor  $R$ .



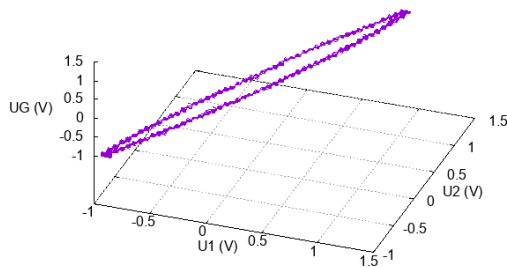
Obrázek 6.1: Schéma Chuova obvodu včetně vyznačených měřených signálů, podle [11]

Dále jsem nastavil hodnotu  $R10 = 2730 \Omega$ , kterou jsem zjistil empiricky, čímž jsem dostal z (3.1) indukčnost gyrátoru  $L = 27,3 \text{ mH}$ . Doporučovaná hodnota je okolo  $18 \text{ mH}$  [1]. Mnou nastavená hodnota je přibližně 1,5 krát vyšší než doporučená. Je pravda, že indukčnost gyrátoru je dalším parametrem, na kterém závisí chování obvodu, ale pro jednodušší a přesnější měření jsem se rozhodl měřit pouze pro změny odporu  $R$  s konstantní indukčností  $L$ .

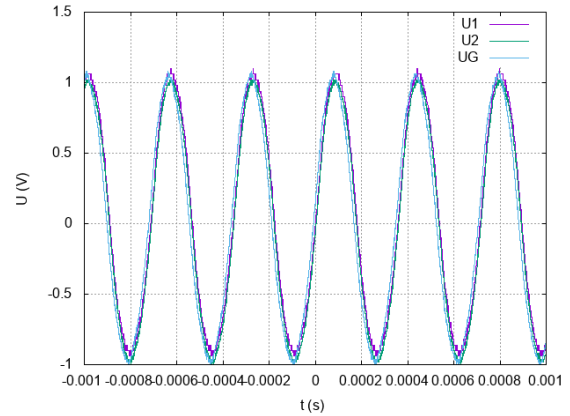
### 6.1 Nechaotická fáze

Tato fáze nastává pro hodnoty  $R = 0 - 2013\Omega$ . Zde můžeme pozorovat všechny tři napětí ve fázi, které přechází ze sinusového průběhu (Obrázek 6.3) do průběhu ve tvaru deformovaných sinusoid (Obrázek 6.5). Pokud vyneseme jednotlivá napětí na osy tři osy, tak můžeme pozorovat Lissajousovy obrazce, pro napětí ve fázi (Obrázek 6.2). V

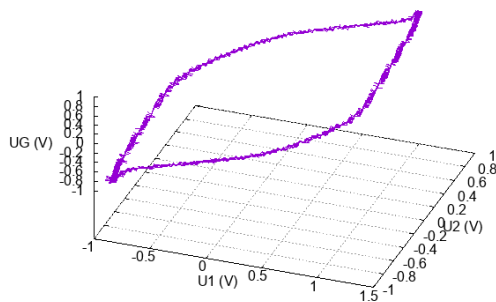
případě vyššího odporu se projevuje deformace sinusového průběhu v podobě tvorby dvou píků v opačných koncích obrazce (Obrázek 6.4).



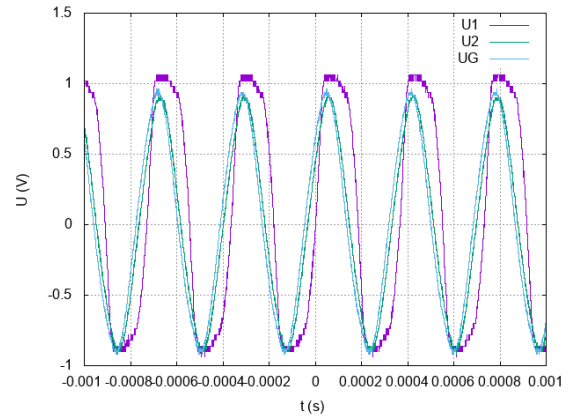
Obrázek 6.2: Graf závislosti napětí  $U_1$ ,  $U_2$  a  $U_G$  pro  $R = 2\Omega$



Obrázek 6.3: Graf závislosti napětí  $U_1$ ,  $U_2$  a  $U_G$  na čase pro  $R = 2\Omega$



Obrázek 6.4: Graf závislosti napětí  $U_1$ ,  $U_2$  a  $U_G$  pro  $R = 1528\Omega$



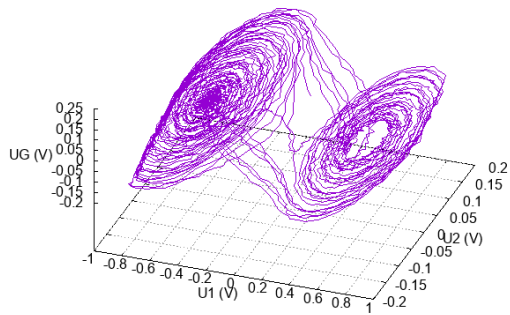
Obrázek 6.5: Graf závislosti napětí  $U_1$ ,  $U_2$  a  $U_G$  na čase pro  $R = 1528\Omega$

Pokud porovnáme chování reálného Chuova obvodu (Obrázek 6.2 a 6.4) s chováním matematického modelu (Obrázek 4.2 a 4.4) pak vidíme, že pro oblast, v níž se obvod chová nechaoticky, není tento model úplně vhodný. Zatímco reálný obvod tvoří jednu uzavřenou smyčku, v modelu pozorujeme neuzavřenou spirálu. Dále můžeme pozorovat, že deformace probíhá smyčky probíhá v reálném obvodu trochu jiným způsobem, než v případě matematického modelu.

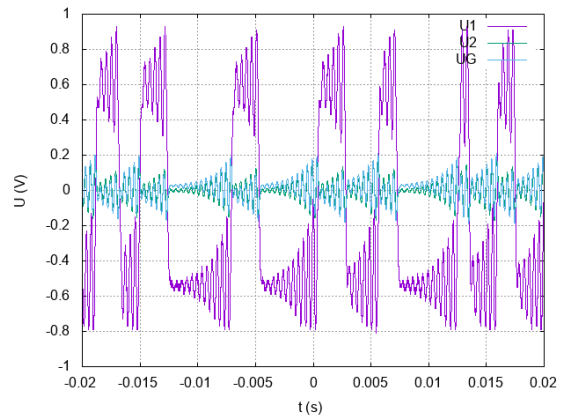
## 6.2 První chaotická fáze

Pro  $R = 2013 - 2105\Omega$ , vykazuje můj Chuův obvod chaotické chování, se kterým je nejčastěji spojován, jelikož zde můžeme pozorovat takzvaný double-scroll atraktor (Obrázek 6.6). Podíváme-li se na vývoj jednotlivých napětí v čase, pak vidíme, jednotlivé přechody mezi oběma svitky atraktoru (Obrázek 6.7).

Porovnáme-li pozorované chování Chuova obvodu (Obrázek 6.6) s matematickým model (Obrázek 4.5 a 4.6), pak vidíme že v této fázi je pozorované chování obvodu

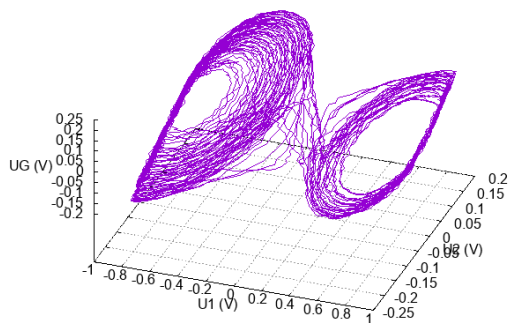


Obrázek 6.6: Graf závislosti napětí  $U_1$ ,  $U_2$  a  $UG$  pro  $R = 2013\Omega$

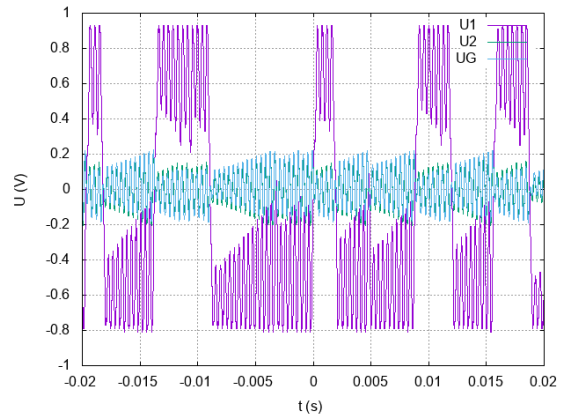


Obrázek 6.7: Průběh jednotlivých napětí  $U_1$ ,  $U_2$  a  $UG$  v čase  $t$  pro  $R = 2013\Omega$

shodné, což nám ukazuje, že se obvod skutečně chová chaoticky (chaotičnost double-scroll atraktoru již byla dokázána v roce 1986). Jediným výrazným rozdílem je rozsah odporu  $R$ , při kterém dochází ke generaci double-scroll atraktoru, který je v případě matematického modelu 1970  $\Omega$  až 2190  $\Omega$  a pro reálný obvod 2013  $\Omega$  až 2105  $\Omega$ . V matematickém modelu jsme ještě pozorovali diskretizaci jednotlivých svitků a jejich deformaci na vnějším okraji (Obrázek 4.7 a 4.8), což je možné pozorovat i v případě reálného obvodu (Obrázek 6.8). Pokud se podíváme na průběh jednotlivých napětí v čase, pak vidíme že dochází k prodlužování času, kdy je  $U_1$  kladné, nebo záporné (Obrázek 6.9).



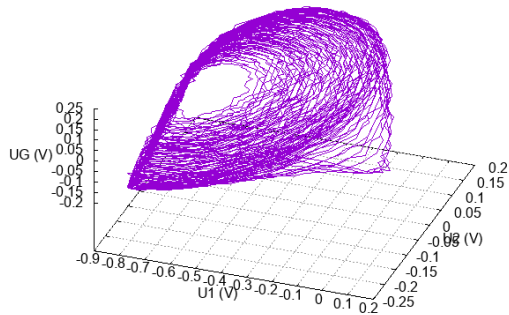
Obrázek 6.8: Graf závislosti napětí  $U_1$ ,  $U_2$  a  $UG$  pro  $R = 2100\Omega$



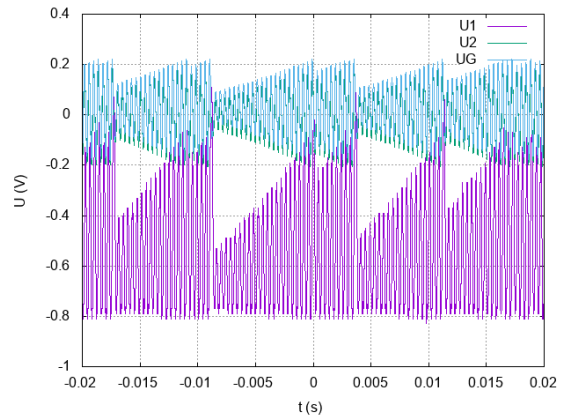
Obrázek 6.9: Průběh jednotlivých napětí  $U_1$ ,  $U_2$  a  $UG$  v čase  $t$  pro  $R = 2100\Omega$

### 6.3 Druhá chaotická fáze

V případě  $R = 2105 - 2118\Omega$ , se obvod nachází v druhé chaotické fázi (Obrázek 6.10), ve které můžeme pozorovat chování podobné Rösslerovu atraktoru (Obrázek 4.10). Pokud se podíváme průběh jednotlivých napětí v čase (Obrázek 6.11), pak vidíme, že průběh všech napětí je podobný jako v případě předchozího grafu (Obrázek 6.9), s tím rozdílem, že nyní již nedochází k přechodům mezi kladným a záporným směrem napětí  $U_1$ , ale napětí  $U_1$  zůstává až na výjimky v záporné.

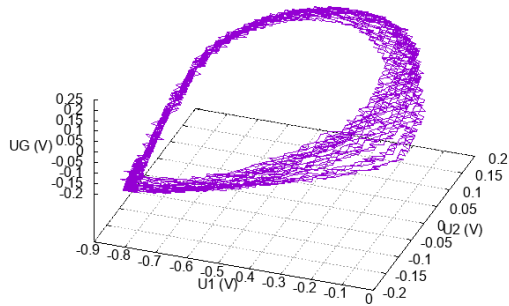


Obrázek 6.10: Graf závislosti napětí  $U_1$ ,  $U_2$  a  $UG$  pro  $R = 2105\Omega$

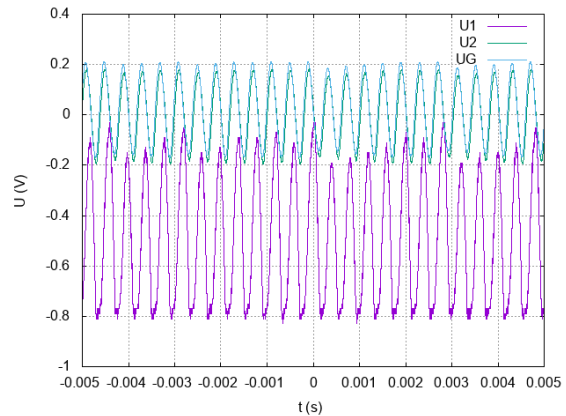


Obrázek 6.11: Průběh jednotlivých napětí  $U_1$ ,  $U_2$  a  $UG$  v čase  $t$  pro  $R = 2105\Omega$

Při srovnání, mezi matematickým modelem (Obrázek 4.9) a pozorovaným chováním, tak si můžeme všimnout několika rozdílů. Prvním je velký rozdíl mezi hodnotami měřeného odporu  $R$  od  $2105\ \Omega$  do  $2118\ \Omega$ , a předpovězenými hodnotami kde minimální hodnotou bylo  $2190\ \Omega$ . Druhým výrazným rozdílem, je tvar, který můžeme pozorovat. V reálném případě je pozorované chování obvodu je mnohem podobnější Rösslerovu atraktoru, než matematický model. Posledním výrazným rozdílem je, že v případě zvyšování odporu  $R$  nepozorujeme deformovanou spirálu, ale přechod směrem k další nechaotické fázi (Obrázek 6.12). Je vhodné se podívat i na chování jednotlivých napětí v čase, kde stále můžeme pozorovat podobné chování napětí  $U_1$ , jako v případě druhé chaotické fáze, avšak s pomalejším časovým průběhem (Obrázek 6.13).



Obrázek 6.12: Graf závislosti napětí  $U_1$ ,  $U_2$  a  $UG$  pro  $R = 2105\Omega$

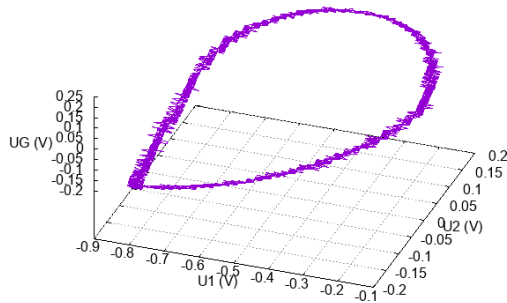


Obrázek 6.13: Průběh jednotlivých napětí  $U_1$ ,  $U_2$  a  $UG$  v čase  $t$  pro  $R = 2105\Omega$

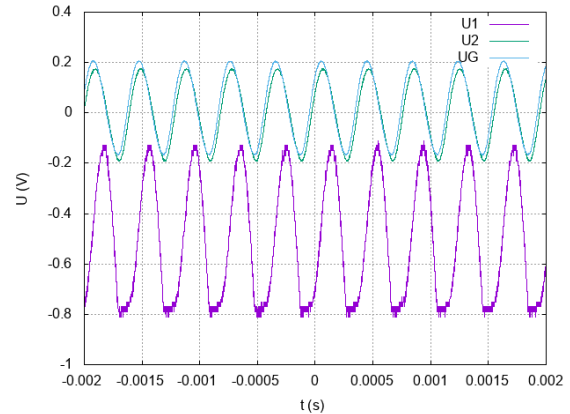
## 6.4 Druhá nechaotická fáze

Když jsme dále zvýšili odpor  $R$ , pak pro  $R = 2118 - 2154\Omega$  se chování obvodu opět vrátilo do nechaotické fáze. V této fázi je možné pozorovat jednoduchou smyčku (Obrázek 6.14), která tvarem připomíná vnější ohraničení dříve pozorované chaotické fáze (Obrázek 6.10). Pozorovaný tvar (Obrázek 6.14) můžeme opět interpretovat jako deformovaný Lissajousův obrazec, ovšem na rozdíl od deformace v první nechaotické

fázi (Obrázek 6.4) je zde deformace asymetrická. Důvod této asymetrie můžeme najít při pohledu na vývoj jednotlivých napětí v čase (Obrázek 6.15), kde vidíme že sinusový průběh napětí  $U_1$  je deformován pouze při minimálních hodnotách.



Obrázek 6.14: Graf závislosti napětí  $U_1$ ,  $U_2$  a  $UG$  pro  $R = 2105\Omega$



Obrázek 6.15: Průběh jednotlivých napětí  $U_1$ ,  $U_2$  a  $UG$  v čase  $t$  pro  $R = 2105\Omega$

Ačkoliv v případě teoretického modelu nebylo možné tuto fázi pozorovat, je vidět, že reálný obvod přestal vykazovat chaotické chování dříve, než teoretický model přešel do druhé chaotické fáze. Avšak i tato fáze je pro pozorovatele zajímavá, jelikož ukazuje, že chaotické chování Chuova obvodu je nejen zdola ale i shora ohraničeno nechaotickými fázemi, jak předpovídá volt-ampérová charakteristika Chuovy diody (Obrázek 5.3), na které vidíme dva zlomové body.

## 6.5 ”Nulová” fáze

Při hodnotách  $R > 2154 \Omega$  lze pozorovat poslední, a to ”nulovou” fázi. Tato fáze se vyznačuje tím, že všechna měřená napětí jsou konstantní a mimo  $U_1$  také velice blízká 0 V (Obrázek 6.16).

## 6.6 Hystereze chování obvodu

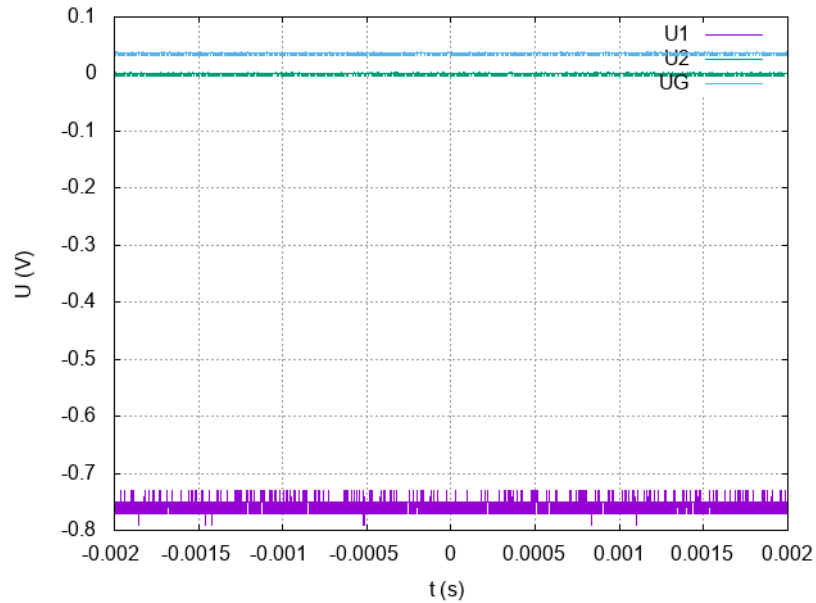
Dále se nabízí otázka, co se bude dít, pokud se rozhodneme odpor  $R$  snižovat namísto zvyšování?

V předchozí podkapitole jsem popsal chování obvodu v případě že zvyšujeme odpor  $R$  z minimální hodnoty. Tímto postupem jsem zjistil pro jaké hodnoty vykazuje obvod chaotické chování. Avšak otázkou je, zda dojde k nějaké změně chování obvodu v případě, že využijeme opačný směr, tedy budeme odpor  $R$  z maximální hodnoty po nulu (nulou rozumějme minimální hodnotu  $R \approx 2\Omega$ ).

Pokud tedy budeme odpor  $R$  snižovat, pak můžeme opět pozorovat všechny fáze chování obvodu, ale přechod mezi double-scroll atraktorem a nechaotickou fází nastává při výrazně nižším odporu  $R$  (Tabulka 6.1).

Podíváme-li se na chování obvodu v oblasti přechodu od první chaotické fáze do první nechaotické fáze, pak můžeme vidět přibližování obou svitek (Obrázek 6.17 a 6.19). Podíváme-li se na průběh jednotlivých napětí v čase, pak můžeme vidět již zmíněné zvýšení četnosti přechodů mezi jednotlivými svitky zcela jasně v chování napětí  $U_1$  (Obrázek 6.18 a 6.20).





Obrázek 6.16: Průběh jednotlivých napětí  $U_1$ ,  $U_2$  a  $U_G$  v čase  $t$  pro  $R = 2154\Omega$

fáze	$R[\Omega]$ zvyšování	$R[\Omega]$ snižování
první nechaotická fáze	0 - 2013	1889 - 0
double-scroll	2013 - 2105	2100 - 1889
single-scroll	2105 - 2118	2110 - 2100
druhá nechaotická fáze	2118 - 2154	2130 - 2110
"nulová" fáze	>2154	>2130

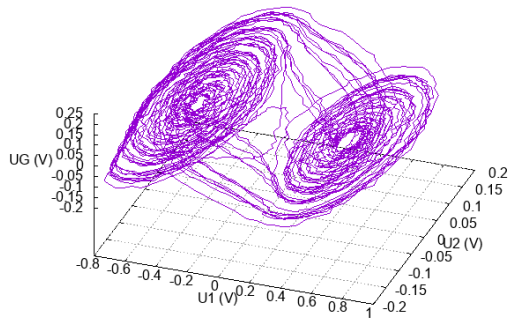
Tabulka 6.1: Hodnoty  $R$  pro dané fáze obvodu

Hysterezi v Chuově obvodu se hlouběji zabývali v článku "FURTHER INVESTIGATION OF HYSTERESIS IN CHUA'S CIRCUIT" [16], kde se jim povedlo pozorovat dvě stabilní řešení pro stejný soubor parametrů v závislosti na směru změny jednoho z parametrů. Toto dokázali za pomoci numerických řešení bezrozměrných Chuových rovnic (2.4) do kterého zahrnuli řešení pro předchozí soubor parametrů. Z hlediska matematického popisu tedy v určitém rozmezí parametrů dochází ke změně chování obvodu v závislosti na historii jeho chování.

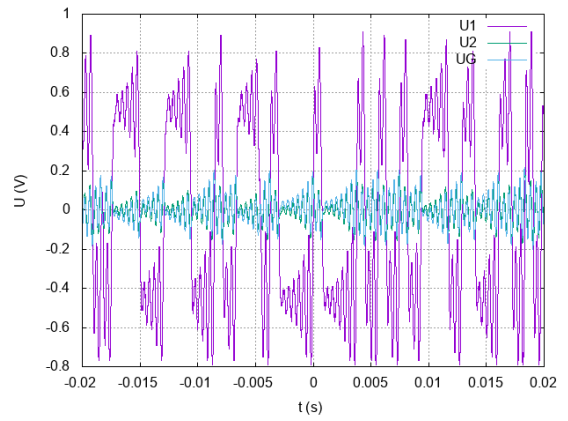
Vzhledem k tomu, že Chuův obvod je dynamickým systémem, pak je hystereze zcela očekávaným jevem, a to z důvodu takzvaného paměťového efektu systému, tedy závislosti na historii chování systému. Můžeme tedy bezpečně předpokládat že hystereze nastává jen v případě chaotického chování, ale i v případě chování nechaotického. Vzhledem k tomu, že v našem matematickém modelu jsme mohli pozorovat chaotické chování pro minimální hodnotu odporu  $R = 1970 \Omega$ , můžeme předpokládat správnost tohoto tvrzení, avšak potvrzení této hypotézy by vyžadovalo další datový sběr, tudíž ji nejsem schopen potvrdit ani vyvrátit.

V přechodu mezi první chaotickou fází a druhou chaotickou fází pozorujeme minimální hysterezi. Avšak nejsem schopen říct, zda se skutečně jedná o hysterezi, protože mohlo dojít k nedokonalému propojení rezistoru  $R$  se zbytkem obvodu, čímž mohl vzniknout přechodový odpor mezi rezistorem  $R$  a patičí, do které jsme jej připojovali.

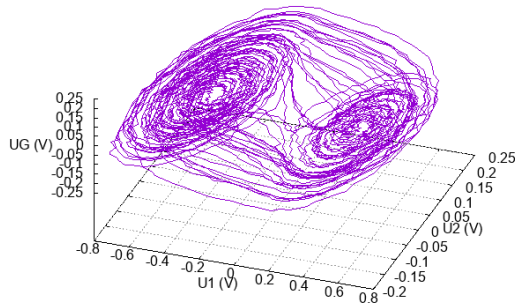
V případě přechodu mezi druhou nechaotickou fází a druhou chaotickou fází je opět rozdíl hodnot  $R$  příliš malý, než abychom mohli s jistotou tvrdit, že dochází k



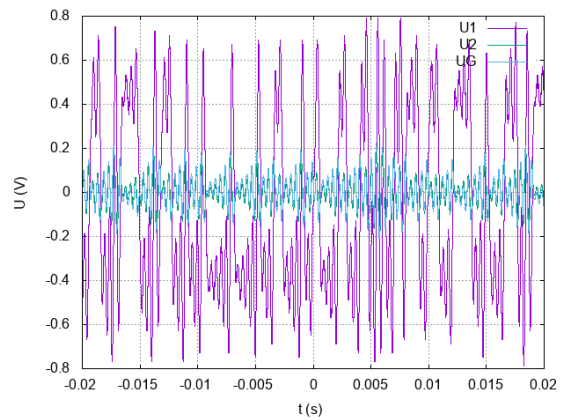
Obrázek 6.17: Graf závislosti napětí  $U_1$ ,  $U_2$  a  $UG$  pro  $R = 1962\Omega$



Obrázek 6.18: Průběh jednotlivých napětí  $U_1$ ,  $U_2$  a  $UG$  v čase  $t$  pro  $R = 1962\Omega$



Obrázek 6.19: Graf závislosti napětí  $U_1$ ,  $U_2$  a  $UG$  pro  $R = 1901\Omega$



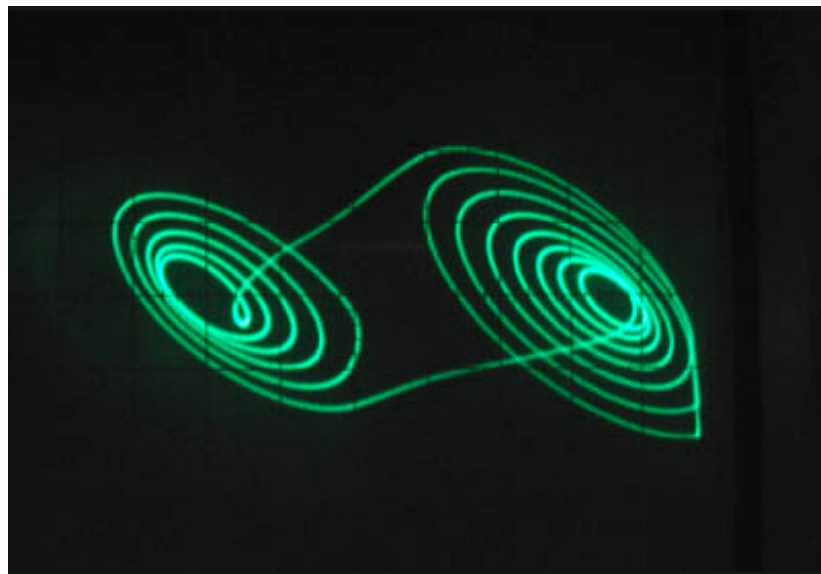
Obrázek 6.20: Průběh jednotlivých napětí  $U_1$ ,  $U_2$  a  $UG$  v čase  $t$  pro  $R = 1901\Omega$

hysterezi. Ovšem při přechodu mezi "nulovou" fází a druhou chaotickou fází můžeme opět pozorovat hysterezní přechod, podobného charakteru, jako v případě přechodu mezi první nechaotickou fází a první chaotickou fází.

## 6.7 Stabilní fáze Chuova obvodu

Pokud se podíváme na bifurkační diagram (Obrázek 1.1), pak vidíme, že pro některé hodnoty parametru  $r$  dochází ke celočíselnému počtu řešení, tudíž chování dynamického systému není chaotické. Takovéto chování bychom mohli předpokládat i u Chuova obvodu. Ve článku "FURTHER INVESTIGATION OF HYSTERESIS IN CHUA'S CIRCUIT"[16] ukázali, že skutečně existují stabilní orbity i v chaotickém režimu Chuova obvodu.

V případě mnou sestaveného obvodu tyto stabilní orbity bohužel nelze pozorovat, a to z důvodu, nedostatečně přesného sestavení obvodu. V případě, Chuova obvodu sestaveného na předem navržený tištěný spoj, za pomoci precizních součástek bychom měli být schopni pozorovat i tyto stabilní orbity, které mohou vypadat například takto (Obrázek 6.21).



Obrázek 6.21: Stabilní orbita Chuova obvodu, převzato z [17]

# Kapitola 7

## Využití Chuova obvodu

Tato kapitola je založena na [18].

Předtím, než vůbec přistoupíme k využití Chuova obvodu v různých oborech, tak v mnoha případech potřebujeme synchronizovat vícero Chuových obvodů. Ovšem zde nastává první problém, jelikož není možné změřit stejný průběh všech tří signálů v žádném časovém momentu, pokud libovolné dva Chuovy obvody necháme nezávisle na sobě. Tento jev je důsledkem efektu motýlích křídel.

V případě nutnosti synchronizace dvou Chuových obvodů tak musíme využít takzvaného spojovacího obvodu. Spojovacích obvodů existuje celá řada, avšak nejčastěji používanými jsou obvody obousměrné, a obvody jednosměrné. Jedsměrný spojovací obvod vytváří takzvaný Master/slave systém.

Master/Slave systém je model, ve kterém jedno zařízení má jednosměrnou kontrolu nad jedním, nebo více jinými zařízeními. Takovýto systém se využívá například u satelitem řízených hodin, kde satelitní hodiny jsou Masterem, který udává jednotný čas, a všechny ostatní hodiny (například hodiny v televizi) jsou takzvaně Slaves, a pouze přebírají čas, který je jim udáván. Tato komunikace samozřejmě nemusí probíhat neustále, ale Slave systémy mohou být částečně autonomní, a komunikovat s Mastrem pouze v případě nutnosti dalších instrukcí, které mohou v našem hodinovém systému být například změna času, či jednou denně seřízení času na přesný čas.

Spolu se synchronizací potřebujeme být také schopni kontrolovat chaotické chování a v případě potřeby jej transformovat do potřebného módu, jako třeba double-scroll atraktor, nebo periodickou orbitu. Již bylo vyvinuto mnoho technik, jak dosáhnout takovéto kontroly jako je třeba změna parametrů obvodu, stabilizace nestabilních orbit v podivném atraktoru, nebo absorpce chaotického chování řídicím obvodem. Jednu takovouto techniku jsem již v této práci demonstroval, a to variací parametrů obvodu, ačkoliv ve zjednodušené formě, jelikož jsem měnil pouze odpor  $R$  rezistoru  $R$ . Dalšími parametry, které můžeme v obvodu měnit jsou ještě indukčnost cívky  $L$  a kapacity kondenzátorů  $C_1$  a  $C_2$ .

Asi není nutné zdůrazňovat, že rozdílné techniky kontroly chování Chuova obvodu mají svá pro i proti, a proto není možné říct, že jedna technika je lepší než druhá. Musíme zohledňovat k čemu chceme Chuov obvod použít a podle něj vybrat způsob kontroly chování Chuova obvodu.

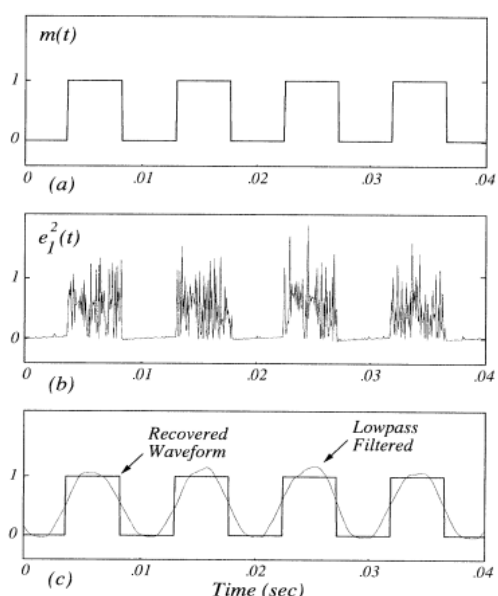
## 7.1 Zabezpečení komunikace

Tato podkapitola je založena na [19].

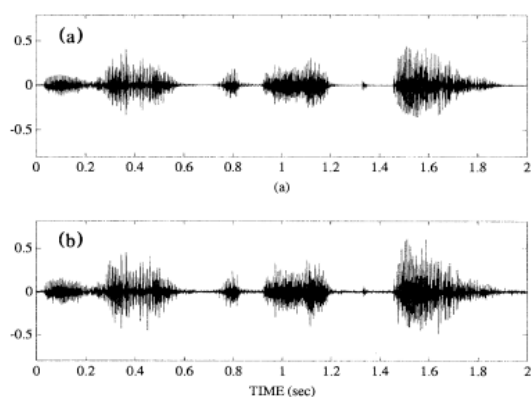
Jedna z nejzajímavějších možností využití je "schování" malého množství informace uvnitř mnohem většího chaotického signálu. Takovýto signál není možné přijmout, bez využití přijímače, který je přesně nastaven na parametry vysílajícího Chuoova obvodu. Tyto parametry obvodu jsou v případě tohoto využití dekodovacím klíčem.

Byly navrženy dvě metody zabezpečení. První z nich se zabývá maskováním binární informace, zatímco druhá je navržena pro komunikaci hlasovou. Binární komunikací rozumějme komunikace založenou na sekvencích jedniček a nul.

Systém na kódování binární informace je založen na dvou synchronizovaných chaotických systémech a jednom vysíláči bitových sekvencí. Maskování odeslané informace zde probíhá tak, že s vyslanou informací je zároveň vyslán chaotický signál, díky kterému je skutečná podstata informace ukrytá. Když tuto informaci dostane přijímač, tak zaznamená chybu mezi přijatým signálem a signálem vlastního chaotického, který je synchronizovaný s vysíláčem. Využitím této synchronizační chyby je možné detekovat signál, který nese vyslanou informaci. Následně je potřeba signál "vyhladit" tak, ať opět dostaneme přesně definované "jedničky a nuly" (Obrázek 7.1).



Obrázek 7.1: Binární komunikace: (a) vyslaný binární signál, (b) chyba mezi přijatým signálem a synchronizovaným chaotickým signálem, (c) získaný signál po "vyhlazení", převzato z [19]



Obrázek 7.2: Hlasová komunikace: (a) původní signál, (b) získaný signál, převzato z [19]

V případě hlasové komunikace byl princip maskování informace podobný, chaotický vysíláč přidal k signálu nosící informaci svou vlastní frekvenci, která v tomto případě, ale fungoval jako šum. Když přijímač dostal takovouto informaci, tak na rozdíl od předchozí metody, nehledal chyby v přijatém signálu, ale na základě přijatého signálu, replikoval signál chaotického vysíláče a následně tento signál přímo odstraňoval, čímž získal zpět vyslanou informaci (Obrázek 7.2). Tento přístup je možný pouze v případě, že synchronizace vysíláče a přijímače je dostatečně odolná k rušení v průvodním signálu, a tedy přidáním signálu nosící informaci nedojde k jejímu narušení. Při neformálním

testu, zároveň potvrdili, že takto maskovaný signál, je při jeho demaskování dostatečně kvalitní.

Ačkoli pro oba výše zmíněné způsoby bylo využito Lorenzova obvodu, který je výrazně složitější než obvod Chuův, tak oba přístupy je možné použít i při použití Chuova obvodu.

Takto maskovaná komunikace by měla vykazovat vyšší bezpečnost, než běžně používané přístupy, a to ze dvou důvodů. Tím prvním je potřeba maskovacích vysílačů, tudíž je takovouto informací nemožné odposlouchávat pouze za použití softwaru. Druhým důvodem je obtížná synchronizace nejen konkrétně Chuova obvodu, ale chaotických systémů obecně, a tedy i za předpokladu, že by třetí strana měla k dispozici správný chaotický obvod, který by užívala jako přijímač, synchronizace takového přijímače s neznámým vysílačem by byla téměř nemožná.

Bohužel tyto metody s sebou nesou zcela očividné nevýhody. První takovou nevýhodou je právě nutnost specializovaného hardwaru, v podobě chaotického obvodu, který není standardním vybavením spotřební elektroniky. Druhou nevýhodou je téměř nemožné využití v masové komunikaci, jako je třeba sms, nebo různé portály, které umožňují posílat zprávy přes internetové spojení, jelikož pak by bylo potřeba speciálně párovat každou dvojici zařízení.

Ovšem tento způsob kódování by byl velmi dobře využitelný v případě uzavřených komunikačních linek, které vyžadují utajení odesílané informace.

## 7.2 Rozpoznávání gest

Tato podkapitola je založena na [20].

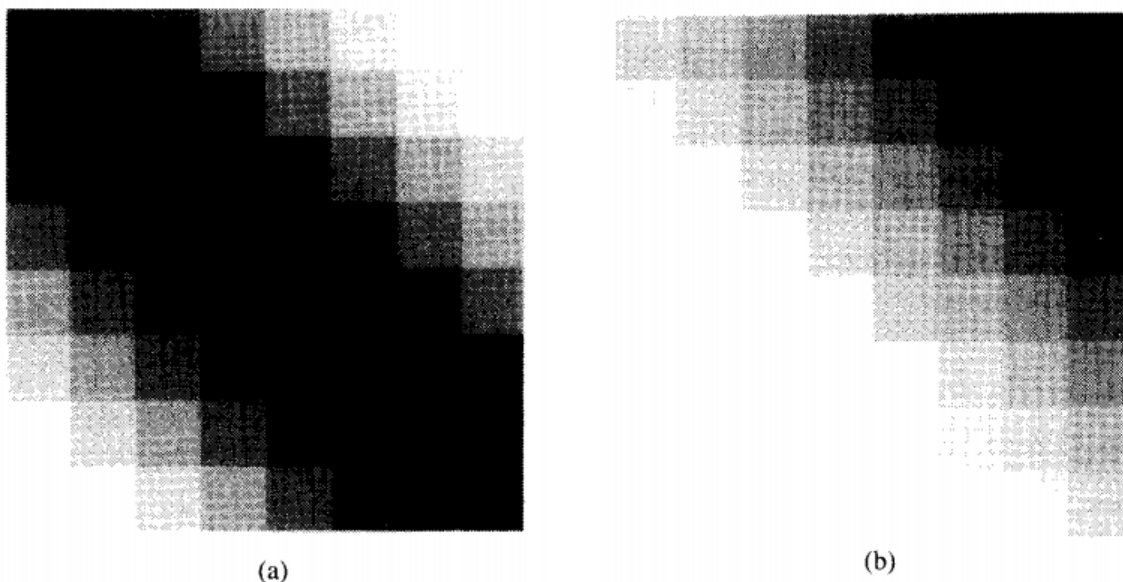
Dnes není obtížné najít systémy, které využívají pouze gesta k ovládní některých funkcí, či videohry, které lze ovládat pohybem. Běžným postupem k rozpoznávání gest je využití analýzy obrazu snímků po snímku a následné porovnání s několika přednastavenými gesty. Takovéto rozpoznávání je dále komplikováno rychlostí jednotlivých gest a nutností rozdělení pohybů do tříd, které patří k jednotlivým gestům.

Alternativní přístup využívá topologického popisu prostoru, které lze realizovat pomocí pole nelineárních oscilátorů, jako jsou třeba chaotické obvody. Pomocí vhodného mapování pak můžeme pozorovat změny v chování jednotlivých podsystémů a tím i trajektorii gesta.

Aby bylo možné dosáhnout takového mapování, pak potřebujeme pole Chuových obvodů, které reaguje na pohyb rukou v jeho blízkosti. Chuův obvod je pro tuto aplikaci vhodným, protože je citlivý na jemné změny parametrů a zároveň vykazuje široké spektrum druhů chování od lineárního oscilátoru po jasně definované chaotické chování. Při průchodu ruky v blízkosti pole Chuových obvodů můžeme na jednotlivých obvodech pozorovat změny v jejich chování, které následně můžeme vyjádřit změnou parametrů v bezrozměrných rovnicích. Výsledkem takovéto analýzy pak dostaneme dvourozměrnou mapu pohybu podle které můžeme určit trajektorii pohybu gesta (Obrázek 7.3).

Výhodou takto navrženého systému je, že zjednodušuje princip rozpoznávání gest a redukuje jej na rozpoznávání statických vzorů na poli. Zároveň takovýto systém je velice citlivý s krátkou reakční dobou a výraznou změnou signálu, což velmi zjednodušuje užívání takového systému. A konečně citlivost tohoto systému může pomoci se zaznamenáním, kdy dochází k přechodu od jedné trajektorie k jiné při analýze plynulých gest znakového jazyka.

Nevýhodou tohoto systému je, že není schopen rozpoznávat tvar ruky, která gesto provádí, k čemuž je potřeba využít jiného systému.



Obrázek 7.3: 2D mapa pohybu ruky, kde tmavá barva ukazuje trajektorii a jednotlivé čtverečky jsou jednotlivými Chuovými obvody: (a) trakejtorie gesta byla v blízkosti střední diagonály, (b) trajektorie gesta se nachází v blízkosti pravého horního rohu pole, převzato z [20]

### 7.3 Rozpoznávání rukou psaného písma

Tato podkapitola je založena na [21].

V některých případech k aplikaci poznatků, které nám poskytl Chuův obvod, není Chuova obvodu zapotřebí. V rámci zefektivnění strojového učení využili vědci chaotického chování Chuova obvodu namísto Lorenzova atraktoru, čímž dosáhli lepších výsledků v rámci rozpoznávání rukou psaných číslic.

Strojové učení, je podoblast umělé inteligence, která se stará o zefektivnění systému v reakci na okolní podmínky, čímž pádem říkáme, že se daný systém "učí".

### 7.4 Využití Chuova obvodu v hudbě

Tato podkapitola je založena na [17], [22] a [23].

Pokud naprogramujeme zvuk o frekvenci 110 Hz, což je frekvence tónu A na kytarě, a porovnáme tón kytary s čistou frekvencí 110 Hz, pak zjistíme, že tyto dva zvuky se značně liší, ačkoliv nosná nosná frekvence zůstává stejnou. Tento rozdíl je způsoben tím, že při hře na kytaru vznikají vyšší harmonické frekvence, jejichž frekvence je nějakým celočíselným násobkem nosné frekvence, jejichž intenzita určuje barvu zvuku, díky níž jsme schopni rozlišit, zda byla stejný tón zahráný na klavír, flétnu, nebo kytaru.

Abychom dosáhli podobné barvy zvuku, jako má nástroj, jehož zvuk chceme získat, pak potřebujeme naprogramovat každou z těchto vyšších harmonických frekvencí zvlášť. Ovšem takovýto proces je velmi zdlouhavý a pracný.

Chuův obvod svým chováním, jehož příklad můžeme vidět například na obrázku 6.7, samovolně dokáže generovat oscilace, které jsou složené z vícero frekvencí. Avšak problémem je, že v případě chaotického chování nemůžeme určit frekvenci, jelikož se jedná o nelineární oscilátor. Tento problém můžeme odstranit buď velmi přesným laděním chování obvodu, čímž dosáhneme stabilních frekvencí, které již obsahují vyšší harmonické frekvence, nebo sekundárním obvodem, či digitálně. Zde je důležité si uvědomit, že v případě hudebních tónů není rušení vždy špatné, v [22] je ukázáno, že podobně jako v případě Chuova obvodu se šum nachází i v hudbě akustických nástrojů.

Xavieru Rodetovi se následně podařilo za pomoci Chuova obvodu generovat zvuky nástrojů podobných klarinetu. Avšak dokázali generovat nejen zvuky podobné známým nástrojům, ale i zcela nové hudební zvuky, které byly jak periodické, tak chaotické. V tomto obvodu použili upravenou Chuovu diodu, tak, že její volt-ampérová charakteristika nebyla po částech lineární, ale hladkou křivkou třetího řádu, čehož dosáhli časovým zpožděním Chuovy diody. Díky takovému modelu je možné následně napsat program, který již dopočítá hledané vyšší harmonické frekvence pro daný nástroj, čímž značně ulehčí tvorbu elektronické hudby. Zároveň byl nalezen nový způsob tvorby elektronické hudby, který je možné využít pro výrobu syntezátorů.

Tato předpověď je dnes již vyplněná, například v případě doprovodné hudby ke hře Marisol, napsané José Riverou, v režii Williama Grivny v dubnu roku 2001. Chuův obvod zde byl použit ke generaci chaotických zvuků, které byly přehrávány ze separátního ozvučení, zavěšeného nad publikem, čímž bylo dosaženo surrealistického hudebního podkresu [24].

Výzkum využití chaosu v, nejen hudebním, umění je stále aktivní, avšak nejedná se již o zaměření fyzikální, ale o zaměření umělecké a estetické, jako například využití v improvizací kompozici [25].

## 7.5 Generování náhodných bitů

Tato podkapitola je založena na [26].

Bit je základní jednotka s níž jsou počítače schopny pracovat, může nabývat pouze hodnot 0 a 1. Na základě smlouveného kódování (například UTF8, nebo Unicode) pak na monitoru vidíme jednotlivé znaky. Když jsme tedy schopni generovat náhodné bity, pak jsme schopni generovat jakékoliv náhodné čísla, znaky, úseky textů, apod.

Další využití generátorů náhodných čísel najdeme například u zabezpečení e-mailů, nebo internetového bankovníctví, kde jsou takto generovány ověřovací klíče pro přihlášení, nebo schválení platby. Takovýto generátor může být tvořen buď zařízením, nebo algoritmem, jehož výstup sekvence statisticky nezávislých a nezaujatých binárních čísel. Zároveň, abychom byli schopni zajistit bezpečnost takového systému, pak výstup musí být statisticky nerozlišitelný od skutečně náhodné sekvence a zároveň musí být nemožné jej předpovědět.

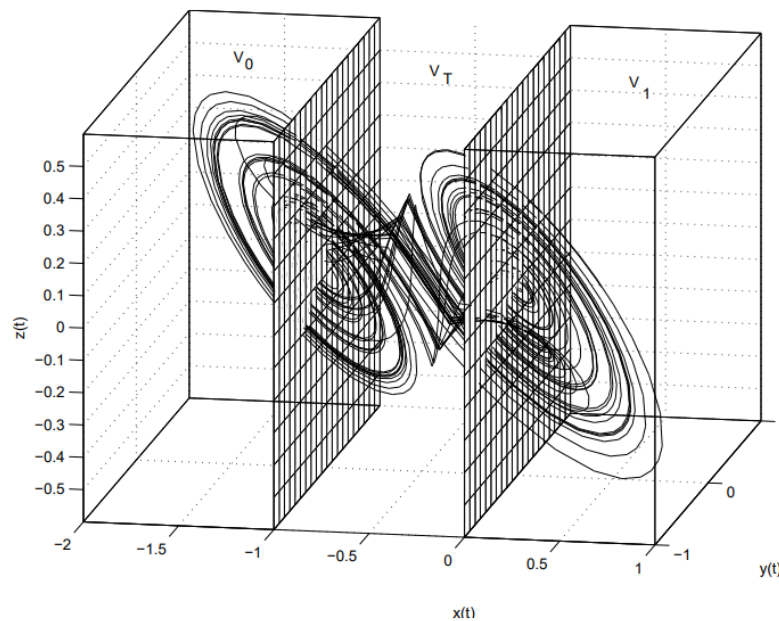
Generátory náhodných čísel se dělí na pseudonáhodné generátory náhodných čísel, pravé generátory náhodných čísel a hybridní generátory náhodných čísel. Pravé generátory náhodných čísel fungují na fyzikálně založeném procesu, který je nepředpovědatelný, proto se jim také říká hardwarové generátory náhodných čísel. Pseudonáhodné generátory využívají deterministických procesů, na jejichž základě generují náhodná čísla. Takovýto generátory jsou mnohem více rentabilní, než hardwarové generátory a také výrazně rychlejší, ale jejich náhodnost je omezená náhodností vstupního deterministického procesu. Hybridní náhodné generátory spojují dva předchozí typy, kde hard-



warový generátor udává vstupní proces, na základě kterého jsou následně generována náhodná čísla.

Chaotické systémy se tedy přímo nabízí k využití pro generování náhodných čísel, jelikož rozeznat chaotické a náhodné chování podle získaného signálu je velmi obtížné. Nevýhodou je předpověditelnost chování chaotického systému z přesné znalosti jeho počátečních podmínek vzhledem ke krátkému časovému horizontu. Tato vlastnost je obecně vnímaná jako nevýhoda pro náhodné generátory, které jsou navrženy pro kryptografické použití. Avšak je možné využít kontinuálního chaotického systému ke generování pravých náhodných bitů.

Tento generátor byl realizován pomocí Chuova obvodu, naladěného do módu, kdy je generován double-scroll atraktor. Následně rozdělili prostor double-scroll atraktoru na tři části (Obrázek 7.4) a na základě přechodu z části  $V_0$  do  $V_1$  přes část  $V_T$  pomocí vhodně zdefinované funkce již dostali hodnoty 0 a 1 v závislosti na směru přechodu.

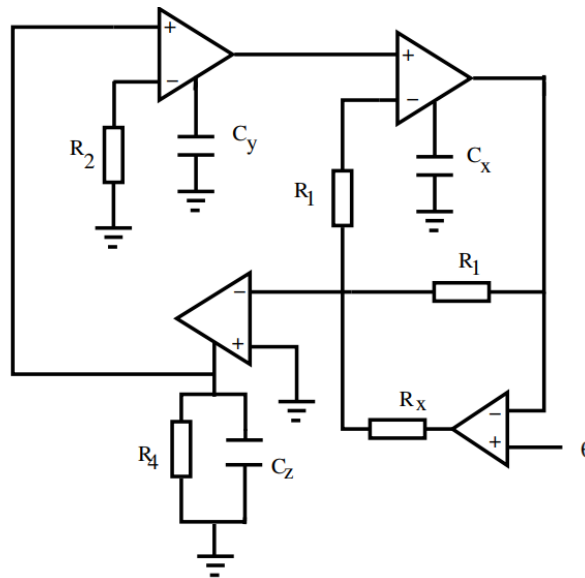


Obrázek 7.4: Rozdělení prostoru pro generaci náhodných bitů za pomoci double-scroll atraktoru, převzato z [26]

Takto navržený generátor náhodných čísel prošel statistickými testy FIPS-140-1 a Diehard, které jsou navrženy tak, aby odhalily předpověditelnost generátorů náhodných čísel. V [26] zároveň navrhli obvod, který může být plně integrován, díky čemuž se může stát standardní součástí hardwaru (Obrázek 7.5).

V tomto článku, však nebyla diskutována rychlost, takto navrženého generátoru náhodných bitů, ale lze předpokládat, že jeho funkčnost se nezmění pokud pouze zvýšíme jeho frekvenci. Dále nebyla zkoumána nepředpověditelnosti takového systému, která může být dále vylepšena generací multi-scroll atraktoru, na místo double-scroll atraktoru.

Jedna z možných slabin prolomení tohoto systému oponentem je synchronizace chaotického systému a následně úspěšně předpovídat bitovou sekvenci a krok napřed, za použití stejného chaotického systému, který je poháněn binárním signálem z navrhovaného generátoru náhodných čísel. Nicméně, jak jsem již popsal ve využití chaotického signálu v komunikaci, synchronizace dvou chaotických systémů je velmi obtížná i v případě, že známe celou trajektorii chaotického signálu. Synchronizace dvou chaotických systémů při znalosti pouze binární informace, která je takovýto chaotickým signálem jen generovaná bude ještě obtížnější.



Obrázek 7.5: Rozdělení prostoru pro generaci náhodných bitů za pomocí double-scroll atraktoru, převzato z [26]

# Kapitola 8

## Deterministický chaos pro fyziku na střední škole

V této kapitole vycházím z mých zkušeností se středoškolskou fyzikou a z rozsahu učiva fyziky v učebnicích pro střední školy.

Během studia na střední škole se žáci dostanou do kontaktu s téměř všemi tradičními obory fyziky, jako jsou elektřina a magnetismus, mechanika, nebo optika. Ale je velice častým jevem, že již není řečeno, proč se mají všechny tyto informace učit. K čemu jim v životě bude ona známá formule

$$F = ma, \tag{8.1}$$

kde  $F$  je působící síla,  $m$  je hmotnost tělesa a  $a$  je zrychlení?

V tradičním pojetí výuky fyziky je jen velmi malý přesah do světa za branami školy, a je to pochopitelné, jelikož fyzika reálného světa je výrazně složitější, než ta, která se učí na středních školách. Je tedy vůbec možné zařadit alespoň zmínku o chaotických systémech do středoškolské fyziky?

### 8.1 Matematický problém

Prvním problémem, na který narazíme je matematika, která se na střední škole probírá. V současnosti již není standardem vyučovat v rámci běžných hodin matematiky ani limity, natož derivace či integrály. S tímto problémem se středoškolská fyzika vypořádala tím, že středoškolská fyzika nevyužívá diferenciálních rovnic, které jsou základem k dalšímu studiu fyziky. Ovšem v případě teorie chaosu a chaotických systémů není možné jejich rovnice zapsat v analyticky vyjádřeném tvaru, protože tento tvar nejsme schopni spočítat.

Dalším problémem, je potřeba řešení těchto rovnic numericky, díky čemuž bude docházet k odcizení výpočtu od skutečnosti, jelikož výpočet je nutné provádět za pomocí počítače, což je jakýsi uzavřený systém. Jednoduše řečeno, počítač by v tomto případě působil jako takzvaná černá skříňka, které dáme nějaký vstup a dostaneme výstup aniž bychom rozuměli co se děje uvnitř. A pokud nerozumíme, jak dochází k výpočtu uvnitř oné černé skřínky, pak nemůžeme ani pochopit podstatu problému.

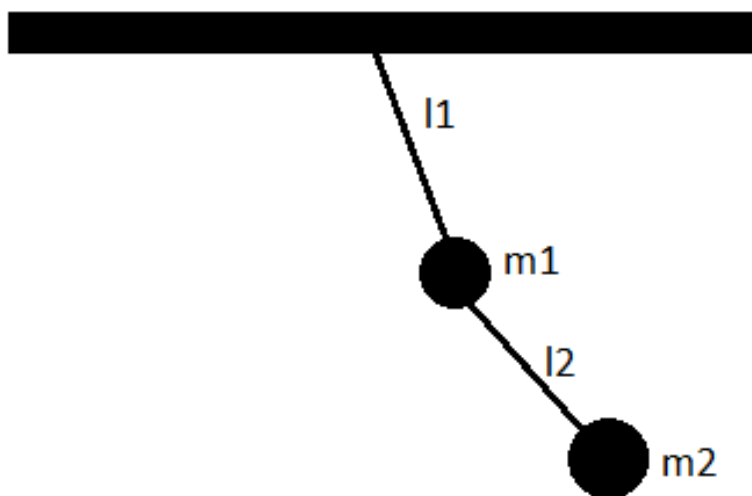
Nabízí se ale ještě jedna možnost, a to teorie chaosu bez matematiky, což může u matematické teorie znít jako oxymoron. Ale v případě fyzikálních chaotických systémů můžeme pozorovat jejich chování i bez jasného porozumění matematických zákonitostí.

## 8.2 Zařazení do kapitol

Jak jsem již popsal výše, teorie chaosu našla mimo fyziku využití i v širokém spektru oborů, včetně antropologie, sociologie, nebo ekonomie. Ovšem oborem, kterým se zabývám v této práci je fyzika a proto se budu zabývat čistě fyzikálními aplikacemi teorie chaosu a čistě fyzikálními chaotickými systémy.

### 8.2.1 Mechanické kmitání

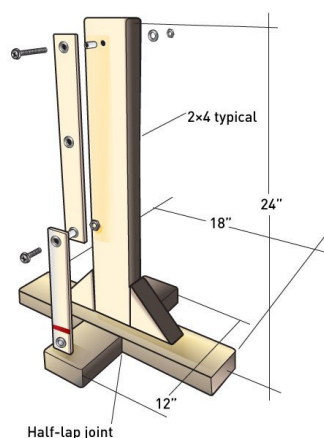
Prvním chaotickým systémem, kterému by bylo záhodno udělit prostor v rámci hodin fyziky je dvojitě kyvadlo, které je možné realizovat za pomoci dvou závaží, která jsou vzájemně spojena pevnou tyčí (ideálně nehmotnou), tak aby bylo možné kmitání obou těchto závaží (Obrázek 8.1).



Obrázek 8.1: Dvojitě kyvadlo, skládající se ze dvou závaží  $m_1$  a  $m_2$  se závěsy délek  $l_1$  a  $l_2$

V rámci pokusu by bylo možné ukázat změnu chování takového dvojitě kyvadla v závislosti na poměru délek  $l_1$  a  $l_2$ , kde pro určitý rozsah tohoto poměru by se dvojitě kyvadlo chovalo chaoticky, což by bylo pozorovatelné v zdánlivě náhodnými pohyby závaží  $m_2$ . Problémem je, že je velmi náročné takovéto dvojitě kyvadlo sestavit, aby bylo možné měnit délky  $l_1$  a  $l_2$ , ale sestavit toto kyvadlo pro pevný poměr délek  $l_1$  a  $l_2$  je poměrně snadné. Takové kyvadlo lze sestavit třeba za použití dřevěných tyčí a kuličkových ložisek (Obrázek 8.2). Takto sestavené kyvadlo je možné doplnit například LED pro efektnější podívanou.

Další možností je využít appletu, který je k nalezení například na [28]. Tento applet umožňuje měnit jak hmotnosti jednotlivých závaží, tak délky jejich závěsů, čímž můžeme ukázat vliv vzájemných poloh na výsledné chování dvojitě kyvadla. Dále můžeme sledovat vývoj jednotlivých parametrů kyvadla v čase, díky čemuž můžeme ukázat efekt motýlích křídel, jako rozdíl v trajektorii kyvadla vzhledem k malým změnám vstupních parametrů.



Obrázek 8.2: Návod k sestavení dvojitého kyvadla, převzato z [27]

## 8.2.2 Meteorologie

V rámci středoškolské fyziky je součástí základního rozsahu učiva také laminární proudění, které můžeme pozorovat třeba při proudění kapalin potrubím, ale v běžném životě se mnohem více setkáváme s prouděním turbulentním. A ačkoliv je součástí učiva odpor prostředí, velice často chybí zmínka o reakci prostředí na průchod tělesa, čímž se opět dostáváme k proudění turbulentnímu (Obrázek 8.3). Turbulentní proudění však ovlivňuje naše životy i v naprosto běžných situacích, a to jeho vlivem na předpověď počasí, jelikož pohyb atmosféry je téměř výhradně turbulentní.

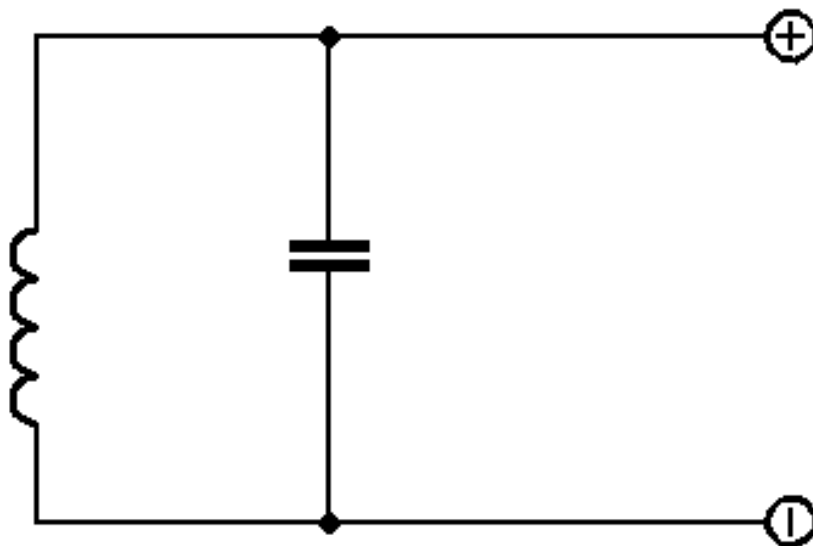
Bohužel v takovémto systému případě není prakticky možné přímo pozorovat chaos, který vede ke změnám počasí. Ale bylo by vhodné se ve výuce zmínit o turbulentním proudění trochu více, než jen uvést jeho existenci. A to z důvodu, že úspěšnost předpovědi počasí má výjimečně velký vliv na náš každodenní život. Zároveň by bylo vhodné připomenout, že nemožnost přesně předpovídat počasí na dobu delší než je pár dní, je způsobena chaotičností atmosférického proudění.



Obrázek 8.3: Příklad turbulentního proudění, převzato z [29]

### 8.2.3 Elektromagnetické kmitání

V rámci studia kmitání nezůstává středoškolská fyzika jen u kmitání mechanického, ale zabývá se i kmitáním v elektrických obvodech, které je způsobené elektromagnetickými interakcemi. Nejjednodušší takovýto elektromagnetický oscilátor je možno sestavit za použití cívky a kondenzátoru (Obrázek 8.4).



Obrázek 8.4: Schéma elektromagnetického kondenzátoru

V této kapitole by bylo možné v návaznosti na chaotičnost předpovědi počasí ukázat právě Chuův obvod (Obrázek 2.3), který je velmi podobný základnímu elektromagnetickému oscilátoru (Obrázek 8.4). Následně by bylo možné pozorovat rozdíl mezi chováním elektromagnetického a Chuova obvodu na osciloskopu. Tímto způsobem by byl jasně vidět rozdíl mezi chováním periodickým a chováním chaotickým. Zároveň lze takto demonstrovat obtížnost předpovědi chování, jakéhokoliv chaotického systému (včetně předpovědi počasí), kdy lehkou změnou parametrů Chuova obvodu můžeme dostat zcela jiné chování.

## 8.3 Závěrečné poznámky k zařazení deterministického chaosu do středoškolské fyziky

Největším problémem pro zařazení deterministického chaosu do výuky fyziky je časová náročnost přípravy jednotlivých experimentů a seznámení se s jejich provedením. Jelikož je potřeba většinu takovýchto pomůcek vyrobit svépomocí, což je díky vysokému pracovnímu vytížení učitelů komplikované. Dalším problémem je, financování podobných projektů. Možným řešením tohoto problému je motivovat žáky, k výrobě potřebných pomůcek.

Nejjednodušším chaotickým systémem, na kterém můžeme snadno ukázat chaotické chování a zároveň jsme schopni jednoduše měnit jeho parametry, čímž jsme schopni ukázat citlivost na počáteční podmínky je právě Chuův obvod. K pozorování Chuova obvodu je zapotřebí osciloskop, který nemusí být na konkrétní škole dostupný. Pokud ovšem je osciloskop k dispozici, pak je zapotřebí ještě učitel, který s daným osciloskopem umí zacházet, což se může projevit jako těžce překonatelná překážka.

Některé chaotické atraktory mají fraktální strukturu, ale v rámci středoškolského vzdělání není běžné zmiňovat se o existenci fraktálů a fraktální geometrie ani v případě specializovaného semináře matematiky. Naštěstí vysvětlení principu tvorby fraktálu není složité. K vysvětlení základního principu fraktálů můžeme využít příkladu Kochovy vločky, která je jedním z nejznámějších fraktálů. Dalším takovým fraktálem, který je poměrně jednoduchý je dělení rovnostranného trojúhelníku přes těžiště, Kdy neustálým opakováním tohoto pravidla stvoříme fraktál.

Závěrem této kapitoly bych chtěl pouze říci, že zařazení teorie chaos a chaotických systémů uvažuji do seminářů fyziky, nikoliv běžných hodin, protože v těchto seminářích je více času na praktické ukázky. Zároveň může Chuův obvod posloužit jako motivační příklad pro uvědomění si jak fyzikální zákonitosti ovlivňují běžný život každého z nás.

# Závěr

Mým cílem v této práci bylo popularizační formou vysvětlit teorii chaosu, což jsem v rámci první kapitoly provedl, kde jsem zadefinoval pojem chaos, osvětlil jsme pojmy jako je efekt motýlích křídel, atraktor, nebo bifurkace a uvedl jsem hlavní problém všech chaotických systémů, kterým je jejich předpověditelnost pro různé časové úseky.

V úvodu druhé kapitoly jsem popsal motivaci k sestavení Chuova obvodu, který byl prvním chaotickým systémem, pomocí kterého bylo možné pozorovat chaotické chování. Dále jsem ve druhé kapitole popsal postup návrhu Chuova obvodu, kde jsem ukázal jak postupovat v rámci návrhu nového obvodu. Následně jsem se zabýval matematickým popisem Chuova pomocí Kirchhoffových zákonů, který jsem následně zobecnil do bezrozměrného tvaru a pomocí programu Octave jsem byl schopen pozorovat double-scroll atraktor. V závěru kapitoly jsem popsal geometrii double-scroll atraktoru, který vykazuje fraktální strukturu.

Ve třetí kapitole jsem se zabýval konstrukcí Chuova obvodu, který jsem později využil k pozorování chaotického chování. V této kapitole jsem diskutoval dva různé návrhy Chuovy diody (Obrázek 3.1), ze kterých jsem vybral vhodný návrh. Poté jsem řešil problém cívky v obvodu, jelikož je obtížné koupit cívku s proměnnou indukčností, a proto jsem ji nahradil gyrátorem (Obrázek 3.2). Poté jsem v rámci konečného návrhu nakreslil kompletní schéma obvodu (Obrázek 3.3), a určily hodnoty jednotlivých komponentů obvodu (Tabulka 3.1 a 3.2).

Ve čtvrté kapitole jsem se zabýval modelací chování takto sestaveného obvodu v programu Octave, v rámci čehož jsem odhadl chování obvodu pro nastavení jednotlivých parametrů.

V páté kapitole jsem popsal měření volt-ampérové charakteristiky za pomoci děliče napětí (Obrázek 5.1), čímž jsem ověřil, že mnou sestavená Chuova dioda má vhodnou volt-ampérovou charakteristiku, která je po částech lineární (Obrázek 5.3). Dále jsem zjistil, že mnou sestavená Chuova dioda není zcela ideální, jelikož její volt-ampérová charakteristika není symetrická.

V šesté kapitole jsem se zabýval chováním mého Chuova obvodu, a pozoroval jsem dvě nechaotické fáze, a dvě chaotické fáze, kdy v jedné je možné pozorovat double-scroll atraktor a ve druhé je možné pozorovat chaotické chování, které tvarem připomíná Rösslerův atraktor. Dále jsem se zabýval hysterezním chováním Chuova obvodu, která je způsobena historií chování tohoto obvodu. Nakonec jsem diskutoval, zda je možné pozorovat i stabilní nechaotické fáze v rámci chaotického rozsahu chování obvodu. V mém obvodu toto chování bohužel není pozorovatelné, ale obecně jej lze předpokládat.

V rámci sedmé kapitoly jsem se zabýval aplikací Chuova obvodu v různých oborech, od zabezpečení komunikace, přes rozpoznávání gest a generování náhodných bitů až po využití Chuova obvodu v hudbě. V této kapitole by bylo vhodné vycházet z novějších článků, které bohužel nebyly dostupné, nebo vhodné pro zvolenou formu práce.

V poslední kapitole jsem navrhl možnost zařazení teorie chaosu a konkrétně Chuova obvodu do výuky fyzika na střední škole v rámci semináře zaměřeného na fyziku.



# Literatura

- [1] *Chaos theory*. In: Wikipedia: the free encyclopedia [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2018 [cit. 2018-05-09]. Dostupné z: [https://en.wikipedia.org/wiki/Chaos\\_theory](https://en.wikipedia.org/wiki/Chaos_theory)
- [2] Danforth, Christopher M. (April 2013). *Chaos in an Atmosphere Hanging on a Wall*. Mathematics of Planet Earth 2013. [cit. 2018-05-09].
- [3] HASSELBLATT, Boris. a A. B. KATOK. *A first course in dynamics: with a panorama of recent developments*. New York: Cambridge University Press, 2003. ISBN 0-521-58750-6.
- [4] *Attractor*. In: Wikipedia: the free encyclopedia [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2018 [cit. 2018-05-09]. Dostupné z: <https://en.wikipedia.org/wiki/Attractor>
- [5] John Guckenheimer *Bifurcation*. Scholarpedia, 2007 [cit. 2018-05-09]. Dostupné z: <http://www.scholarpedia.org/article/Bifurcation>
- [6] *File:LogisticMap BifurcationDiagram.png*. In: Wikipedia: the free encyclopedia [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2018 [cit. 2018-05-09]. Dostupné z: [https://en.wikipedia.org/wiki/File:LogisticMap\\_BifurcationDiagram.png#filelinks](https://en.wikipedia.org/wiki/File:LogisticMap_BifurcationDiagram.png#filelinks)
- [7] NIKOLIĆ, Branislav K. *Introduction to Deterministic Chaos* [online]. Department of Physics and Astronomy, University of Delaware, U.S.A., 49 [cit. 2018-05-09]. Dostupné z: [http://www.physics.udel.edu/~bnikolic/teaching/phys660/lectures/deterministic\\_chaos.pdf](http://www.physics.udel.edu/~bnikolic/teaching/phys660/lectures/deterministic_chaos.pdf)
- [8] CHUA, Leon O. *Chua circuit*. Scholarpedia, [cit. 2018-05-09]. Dostupné z: [http://www.scholarpedia.org/article/Chua\\_circuit](http://www.scholarpedia.org/article/Chua_circuit)
- [9] CHUA, Leon O. *The Genesis of Chua's Circuit*. Archiv für Elektronik und Übertragungstechnik, 46 : 250-257, 1992 [cit. 2018-05-09].
- [10] BOUGHABA, Soraya a LOZI, René. *Fitting trapping Regions for Chua's Attractor - a Novel Method Based on isochronic Lines*. International Journal of Bifurcation and Chaos [online]. 2000, 10(01), 205-225 [cit. 2018-05-09]. DOI: 10.1142/S0218127400000128. ISSN 0218-1274. Dostupné z: <http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0218127400000128>
- [11] SIDERSKIY, Valentin. *Chuacircuits.com* [online]. [cit. 2018-05-15]. Dostupné z: <http://www.chuacircuits.com/>

- [12] SEDLÁK, Bedřich a Ivan ŠTOLL. *Elektrina a magnetismus*. Vyd. 3., V nakl. Karolinum 2. Praha: Karolinum, 2012, 180 - 181, 266 - 270. ISBN 978-80-246-2198-2 [cit. 2018-05-15].
- [13] WEILAND, Siep. *Chaos in the Chua circuit*. The Netherlands, 2005. Project for the Course on Dynamical Systems. Eindhoven University of Technology [cit. 2018-05-15].
- [14] VALENTIN, Siderskiy. *The Antoniou Inductance-Simulation Circuit Derivation* [online]. , 10 [cit. 2018-05-09]. Dostupné z: <http://www.chuacircuits.com/PDFs/Antoniou%20Inductance-Simulation%20Circuit.pdf>
- [15] *Rössler attractor*. In: Wikipedia: the free encyclopedia [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2018 [cit. 2018-05-09]. Dostupné z: [https://en.wikipedia.org/wiki/R%C3%B6ssler\\_attractor](https://en.wikipedia.org/wiki/R%C3%B6ssler_attractor)
- [16] BORRESEN, J. a S. LYNCH. *FURTHER INVESTIGATION OF HYSTERESIS IN CHUA'S CIRCUIT*. International Journal of Bifurcation and Chaos. 2002, 1(12), 129-134 [cit. 2018-05-09].
- [17] SEARS, James N. *Chua's Oscillator in Musical Applications: Using the sounds of chaos in music and sound design* [online]. [cit. 2018-05-09]. Dostupné z: <http://jamesnsears.com/archive/ecechua.htm>
- [18] CHUA, Leon O. *Chua's Circuit: Ten Years Later*. IEICE TRANS. FUNDAMENTALS. 1994, 11(E77-A), 1811-1822.
- [19] CUOMO, Kevin M. a Alan V. OPPENHEIM. *Circuit Implementaion of Synchronized Chaos with Applications to Communications*. Physical Review Letters. 1993, 71(1), 65-68.
- [20] ALTMAN, E.J. *Normal form analysis of Chua's circuit with applications for trajectory recognition*. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing [online]. 40(10), 675-682 [cit. 2018-05-18]. DOI: 10.1109/82.246170. ISSN 10577130. Dostupné z: <http://ieeexplore.ieee.org/document/246170/>
- [21] BAIRD, B., M.W. HIRSCH a F. EECKMAN. *A neural network associative memory for handwritten character recognition using multiple Chua characters*. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing [online]. 40(10), 667-674 [cit. 2018-05-18]. DOI: 10.1109/82.246169. ISSN 10577130. Dostupné z: <http://ieeexplore.ieee.org/document/246169/>
- [22] MAYER-KRESS, G., I. CHOI, N. WEBER, R. BARGER a A. HUBLER. *Musical signals from Chua's circuit*. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing [online]. 40(10), 688-695 [cit. 2018-05-18]. DOI: 10.1109/82.246172. ISSN 10577130. Dostupné z: <http://ieeexplore.ieee.org/document/246172/>
- [23] RODET, X. *Models of musical instruments from Chua's circuit with time delay*. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing [online]. 40(10), 696-701 [cit. 2018-05-19]. DOI: 10.1109/82.246173. ISSN 10577130. Dostupné z: <http://ieeexplore.ieee.org/document/246173/>

- [24] SEARS, James N. *marisol* [online]. [cit. 2018-05-19]. Dostupné z: <http://jamesnsears.com/archive/musicmarisol.htm>
- [25] Havryliv, M. *Composing for improvisation with chaotic oscillators*. Proceedings of the 2010 Conference on New Interfaces for Musical Expression (NIME2010). Ed. K. Beilharz, A. Johnston, S. Ferguson a A. Yi-Chun Chen. 2010. 94-99 [cit. 2018-05-19].
- [26] YALCIN, M.E., J.A.K. SUYKENS a J. VANDEWALLE. *True Random Bit Generation From a Double-Scroll Attractor*. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers [online]. 2004, 51(7), 1395-1404 [cit. 2018-05-18]. DOI: 10.1109/TCSI.2004.830683. ISSN 1057-7122. Dostupné z: <http://ieeexplore.ieee.org/document/1310510/>
- [27] BOWIE, Phil a Larry COTTON. *Explore Chaos Theory with an LED Double Pendulum* [online]. 2016 [cit. 2018-05-20]. Dostupné z: <https://makezine.com/projects/double-pendulum-2/>
- [28] NEUMANN, Erik. *Double Pendulum* [online]. 2002 [cit. 2018-05-18]. Dostupné z: <https://www.myphysicslab.com/pendulum/double-pendulum-en.html>
- [29] *Turbulence*. In: Wikipedia: the free encyclopedia [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001 [cit. 2018-05-20]. Dostupné z: <https://en.wikipedia.org/wiki/Turbulence>