

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLMOUCI

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Jakub Piše

Aplikace karetních triků v matematických příkladech pro žáky  
základní školy

(Application of card tricks in mathematical problems for primary school  
students)

Prohlášení autora:

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma Aplikace karetních triků v matematických příkladech pro žáky základní školy vypracoval samostatně pod vedením doc. RNDr. Jitky Laitochové, CSc. a použil jsem pouze prameny uvedené v seznamu použité literatury.

V Olomouci dne: .....

.....

Jakub Píše

#### Poděkování:

Rád bych poděkoval paní doc. RNDr. Jitce Laitochové, CSc., za vedení bakalářské práce, cenné odborné rady a připomínky, které mi pomohly při jejím zpracování.

Dále bych chtěl poděkovat své rodině za dlouhodobou podporu a trpělivost během celého studia. Poděkování patří také všem, kteří mě v průběhu let povzbuzovali a věřili, že tuto práci dokončím.

# ANOTACE

**Jméno a příjmení:** Jakub Píše  
**Katedra:** Katedra matematiky  
**Vedoucí práce:** doc. RNDr. Jitka Laitochová, CSc.  
**Rok obhajoby:** 2024

**Název práce:** Aplikace karetních triků v matematických příkladech pro žáky základní školy  
**Název v angličtině:** Application of Card Tricks in Mathematical Problems for Primary School Students  
**Zvolený typ práce:** Aplikační práce

## Anotace práce:

Cílem této práce je motivovat výuku matematiky pomocí karetních triků. Práce podrobně analyzuje a rozpracovává různé matematické karetní triky tak, aby byly snadno použitelné ve výuce. Každý trik je vysvětlen z hlediska matematických principů, jako jsou cyklická čísla, dělitelnost devíti a proměnné. Práce rovněž představuje významné matematiky, kteří se věnovali vytváření karetních triků, a jejich přínos pro vzdělávání.

Matematické karetní triky jsou přiřazeny k tématickým okruhům podle rámcového vzdělávacího programu (RVP) pro základní a střední školy, aby podpořily rozvoj aritmetických dovedností a logického myšlení žáků. Cílem je vytvořit nástroj pro učitele matematiky, který umožní efektivně motivovat žáky a zlepšit jejich matematické dovednosti.

**Klíčová slova:** matematika, matematický karetní trik, výuka matematiky, pracovní listy, základní škola, algebraické myšlení, motivace žáků, badatelsky orientovaná výuka, cyklické číslo, dělitelnost devíti, Josephův problém

---

## Annotation in English:

The aim of this thesis is to motivate the teaching of mathematics through the use of card tricks. The thesis provides a detailed analysis and elaboration of various card tricks to make them easily applicable in education. Each trick is explained in terms of the mathematical principles underlying it, such as cyclic numbers, divisibility by nine, and variables. The thesis also presents significant mathematicians who have developed card tricks and their contributions to education.

The card tricks are assigned to thematic areas according to the Framework Educational Program (FEP) for primary and secondary schools to support the development of arithmetic skills and logical thinking of students. The goal is to create a tool for mathematics teachers that effectively motivates students and improves their mathematical skills.

**Keywords:** mathematics, mathematical card trick, mathematics teaching, worksheets, primary school, algebraic thinking, student motivation, inquiry-based learning, cyclic number, divisibility by nine, Josephus problem

**Přílohy vázané v práci:** Příloha A–E (metodické listy a pracovní listy pro žáky)

**Rozsah práce:** 86 stran

**Jazyk práce:** čeština

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI  
Pedagogická fakulta  
Akademický rok: 2021/2022

Studijní program: Matematika se zaměřením na vzdělávání  
(maior), Technika a praktické činnosti se zaměřením na  
vzdělávání (minor)  
Forma studia: Kombinovaná

## Podklad pro zadání BAKALÁŘSKÉ práce studenta

Jméno a příjmení: **Jakub PÍŠE**  
Osobní číslo: **D200418**  
Adresa: Čelakovského 609/8, Brno – Židenice, 61500 Brno 15, Česká republika  
Téma práce: Aplikace karetních triků v matematických příkladech pro žáky základní školy  
Téma práce anglicky: Application of card tricks in mathematical examples for primary school student  
Jazyk práce: Čeština  
Vedoucí práce: doc. RNDr. Jitka Laitochová, CSc.  
Katedra matematiky (PDF)

Zásady pro vypracování:

1. Úvod
2. Teoretické popsání matematických principů a operací vycházejících z okruhů RVP (Čísla a početní operace; Čísla a proměnná; Závislosti, vztahy a práce s daty; Nestandardní aplikační úlohy a problémy). Aplikování matematických principů a operací v matematických karetních tricích.
3. Přepřacování matematických karetních triků do matematických úloh a jejich zařazení dle okruhů RVP.
4. Praktické vyzkoušení matematických úloh se žáky základní školy. Zaznamenání výsledků praktické části.
5. Závěr
6. Seznam literatury
7. Přílohy

Seznam doporučené literatury:

DIACONIS, Persi a Ron GRAHAM. *Magical mathematics: the mathematical ideas that animate great magic tricks*. Princeton: Princeton University Press, 2012. ISBN 9780691151649.  
GARDNER, Martin. *Fractal music, hypercards and more--: mathematical recreations from Scientific American magazine*. New York: W.H. Freeman, c1992. ISBN 0716721880.  
GARDNER, Martin. *The whys of a philosophical scrivener*. New York: Oxford University Press, 1985, c1983. ISBN 0192860550.  
GARDNER, Martin. *Logic machines and diagrams*. New York: McGraw-Hill, 1958.  
HEJNÝ, M. *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování*. Praha: Portál, 2001. 192 s. ISBN 80-7178-581-4.  
NOVOVESKÝ, Š.; KRIŽALKOVIČ, K.; LEČKO, I.: *777 matematických zábav a her*. Praha: SPN, 1971. 384 s. ISBN 14-382-71

# Obsah

Úvod.....	1
<b>1. TEORETICKÁ VÝCHODISKA.....</b>	<b>3</b>
1.1. Motivace ve výuce matematiky.....	3
1.1.1. Vnitřní a vnější motivace.....	3
1.1.2. Problém motivace v matematickém vzdělávání.....	4
1.1.3. Role překvapení a kognitivního konfliktu.....	5
1.2. Aktivizující a problémové vyučování.....	6
1.2.1. Aktivizující metody ve výuce matematiky.....	6
1.2.2. Samostatná činnost žáků.....	6
1.2.3. Role učitele.....	7
1.2.4. Problémové vyučování.....	7
1.2.5. Otevřené problémy.....	7
1.2.6. Formulace hypotéz.....	8
1.2.7. Ověřování řešení.....	8
1.2.8. Badatelský přístup.....	8
1.2.9. Objevování pravidelností.....	9
1.2.10. Diskuse a argumentace.....	9
1.2.11. Sdílení řešení.....	9
1.3. Přejít od konkrétní situace k matematickému modelu.....	10
1.3.1. Matematický model.....	10
1.3.2. Pojem modelování.....	10
1.3.3. Zjednodušení reality.....	10
1.3.4. Symbolizace.....	11
1.3.5. Proces zobecňování.....	11
1.3.6. Práce s proměnnou.....	12
1.3.7. Hledání invariantů.....	12
1.3.8. Formulace obecného vztahu.....	12
1.3.9. Algebra jako jazyk zobecnění.....	12
1.3.10. Význam symbolického zápisu.....	13
1.3.11. Vztah konkrétní situace a rovnice.....	13
1.4. Matematické principy využitelné v didaktických situacích.....	14
1.4.1. Lineární závislosti.....	14
1.4.2. Invarianty.....	14
1.4.3. Ciferný součet a dělitelnost.....	15
1.4.4. Modulární aritmetika.....	15
1.4.5. Strukturální zdroj překvapení.....	15
1.5. Kurikulární ukotvení.....	16
1.5.1. Matematická gramotnost.....	16

1.5.2. Kompetence k řešení problémů.....	16
1.5.3. Práce s reprezentacemi.....	16
1.5.4. Zařazení do RVP ZV a RVP G.....	16
1.5.5. Shrnutí.....	17
1.6. Závěr teoretické části.....	17
<b>2. METODIKA TVORBY PRACOVNÍCH LISTŮ.....</b>	<b>19</b>
2.1. Kritéria výběru matematických témat.....	19
2.1.1. Soulad s kurikulem.....	19
2.1.2. Přiměřenost věku a náročnosti.....	19
2.1.3. Možnost zobecnění.....	20
2.1.4. Struktura pracovního listu.....	20
2.1.5. Motivační situace.....	20
2.1.6. Analýza.....	20
2.1.7. Převod do matematického modelu.....	20
2.1.8. Zobecnění.....	21
2.1.9. Aplikace.....	21
2.1.10. Reflexe.....	21
2.2. Organizační forma práce.....	21
2.3. Didaktická úskalí.....	21
2.4. Shrnutí.....	22
<b>3. PRAKTICKÁ ČÁST.....</b>	<b>23</b>
3.1. O'Connor's Four–Ace Trick.....	23
3.1.1. Název aktivity.....	24
3.1.2. Zařazení dle RVP ZV.....	24
3.1.3. Doporučený ročník.....	24
3.1.4. Vzdělávací cíle.....	24
3.1.5. Matematické vysvětlení principu.....	24
3.1.6. Didaktická analýza aktivity.....	25
3.1.7. Propojení s metodickými pokyny pro učitele.....	25
3.1.8. Možné obtíže žáků.....	26
3.1.9. Možnosti diferenciacce.....	26
3.1.10. Didaktický přínos aktivity.....	26
3.2. Mathematical Finder.....	27
3.2.1. Název aktivity.....	27
3.2.2. Zařazení dle RVP ZV.....	27
3.2.3. Doporučený ročník.....	27
3.2.4. Vzdělávací cíle.....	28
3.2.5. Matematické vysvětlení principu.....	28

3.2.6. Didaktická analýza aktivity.....	28
3.2.7. Propojení s metodickými pokyny pro učitele.....	29
3.2.8. Možné obtíže žáků.....	29
3.2.9. Možnosti diferenciacce.....	29
3.2.10. Didaktický přínos aktivity.....	29
3.3. Twenty Plus.....	30
3.3.1. Název aktivity.....	30
3.3.2. Zařazení dle RVP ZV.....	30
3.3.3. Doporučený ročník.....	30
3.3.4. Vzdělávací cíle.....	30
3.3.5. Matematické vysvětlení principu.....	31
3.3.6. Didaktická analýza aktivity.....	31
3.3.7. Propojení s metodickými pokyny pro učitele.....	32
3.3.8. Možné obtíže žáků.....	32
3.3.9. Možnosti diferenciacce.....	32
3.3.10. Didaktický přínos aktivity.....	33
3.4. Scarne's Miracle Card-Finder.....	33
3.4.1. Název aktivity.....	33
3.4.2. Zařazení dle RVP ZV.....	33
3.4.3. Doporučený ročník.....	33
3.4.4. Vzdělávací cíle.....	34
3.4.5. Matematické vysvětlení principu.....	34
3.4.6. Didaktická analýza aktivity.....	35
3.4.7. Propojení s metodickými pokyny pro učitele.....	35
3.4.8. Možné obtíže žáků.....	35
3.4.9. Možnosti diferenciacce.....	36
3.4.10. Didaktický přínos aktivity.....	36
3.5. Cyclic Number.....	36
3.5.1. Název aktivity.....	37
3.5.2. Zařazení dle RVP ZV.....	37
3.5.3. Doporučený ročník.....	37
3.5.4. Vzdělávací cíle.....	37
3.5.5. Matematické vysvětlení principu.....	37
3.5.6. Didaktická analýza aktivity.....	38
3.5.7. Propojení s metodickými pokyny pro učitele.....	38
3.5.8. Možné obtíže žáků.....	39
3.5.9. Možnosti diferenciacce.....	39
3.5.10. Didaktický přínos aktivity.....	39

3.6. Shrnutí praktické části.....	39
<b>Závěr.....</b>	<b>40</b>
<b>Seznam použité literatury.....</b>	<b>41</b>
<b>PŘÍLOHY – KARETNÍ AKTIVITY VE VÝUCE MATEMATIKY.....</b>	<b>44</b>
Čtyři esa z balíčku.....	45
Určeno pro.....	45
Zařazení dle RVP ZV.....	45
Matematická oblast.....	45
Vzdělávací cíle.....	45
Pomůcky.....	45
Příprava aktivity.....	46
Postup triku.....	46
Doporučený postup práce ve třídě.....	46
Možné obtíže žáků.....	47
Možnosti diferenciacce.....	47
Didaktický přínos aktivity.....	47
<b>Čtyři esa z balíčku.....</b>	<b>49</b>
1. Pozorování.....	49
2. Vyzkoušej trik.....	49
3. Zapiš výsledky.....	49
4. Hledej pravidelnost.....	49
5. Pokus o vysvětlení.....	50
6. Výzva pro zvědavé.....	50
Mathematical Finder – karetní předpověď.....	51
Určeno pro.....	51
Zařazení dle RVP ZV.....	51
Matematická oblast.....	51
Vzdělávací cíle.....	51
Pomůcky.....	51
Příprava aktivity.....	52
Postup triku.....	52
Odhalení výsledku.....	52
Matematické vysvětlení principu.....	52
Doporučený postup práce ve třídě.....	53
Možné obtíže žáků.....	53
Možnosti diferenciacce.....	53
Didaktický přínos aktivity.....	54
Mathematical Finder – karetní předpověď.....	55
1. Pozorování.....	55
2. Vyzkoušej trik.....	55
3. Zapiš výsledky.....	55

4. Hledej pravidelnost.....	56
5. Pokus o vysvětlení.....	56
6. Výzva pro zvědavé.....	56
Twenty Plus – Najdi zapamatovanou kartu.....	57
Určeno pro.....	57
Zařazení dle RVP ZV.....	57
Matematická oblast.....	57
Vzdělávací cíle.....	57
Pomůcky.....	57
Příprava aktivity.....	58
Postup triku.....	58
Jak najít zapamatovanou kartu.....	58
Matematické vysvětlení principu.....	58
Doporučený postup práce ve třídě.....	59
Možné obtíže žáků.....	59
Možnosti diferenciacce.....	60
Didaktický přínos aktivity.....	60
Twenty Plus – Najdi zapamatovanou kartu.....	61
1. Pozorování.....	61
2. Vyzkoušej trik.....	61
3. Zapiš výsledky.....	61
4. Hledej pravidelnost.....	62
5. Pokus o vysvětlení.....	62
6. Výzva pro zvědavé.....	62
Scarne's Miracle Card-Finder – Najdi předpovězenou kartu.....	63
Určeno pro.....	63
Zařazení dle RVP ZV.....	63
Matematická oblast.....	63
Vzdělávací cíle.....	63
Pomůcky.....	63
Příprava aktivity.....	63
Postup triku.....	64
Matematické vysvětlení principu.....	64
Mocniny čísla dvě.....	64
Obecný vztah.....	65
Příklad.....	65
Doporučený postup práce ve třídě.....	66
Možné obtíže žáků.....	66
Možnosti diferenciacce.....	66
Didaktický přínos aktivity.....	66
Scarne's Miracle Card-Finder – Najdi předpovězenou kartu.....	67

1. Pozorování.....	67
2. Vyzkoušej trik.....	67
3. Zapiš výsledky.....	67
4. Hledej pravidelnost.....	68
5. Pokus o vysvětlení.....	68
6. Výzva pro zvědavé.....	68
Cyklické číslo 142857.....	69
Určeno pro.....	69
Zařazení dle RVP ZV.....	69
Matematická oblast.....	69
Vzdělávací cíle.....	69
Pomůcky.....	69
Příprava aktivity.....	70
Postup triku.....	70
Matematické vysvětlení principu.....	70
Matematický význam.....	71
Doporučený postup práce ve třídě.....	71
Možné obtíže žáků.....	72
Možnosti diferenciacce.....	72
Didaktický přínos aktivity.....	72
Cyklické číslo 142857.....	73
1. Pozorování.....	73
2. Vyzkoušej výpočty.....	73
3. Hledej pravidelnost.....	74
4. Pokus o vysvětlení.....	74
5. Zajímavé pozorování.....	74
6. Výzva pro zvědavé.....	74

# Úvod

Výuka matematiky na základní škole je dlouhodobě spojována s problematikou motivace žáků a s obtížemi při přechodu od konkrétní zkušenosti k abstraktnímu matematickému myšlení. Žáci často vnímají matematiku jako soubor formálních postupů bez zřejmé souvislosti s reálnými podněty nebo bez prvku objevování. Didaktická literatura přitom zdůrazňuje význam aktivizačních metod, práce s problémem a vytváření situací, které vedou k formulaci hypotéz, hledání pravidelností a jejich zobecnění.

Jednou z možností, jak podpořit aktivní zapojení žáků, je využití prvku překvapení a práce s netradiční úlohou. Situace, která se na první pohled jeví jako „kouzelný efekt“, může být následně analyzována a převedena do podoby matematického modelu. Takový postup umožňuje přirozený přechod od konkrétní manipulativní činnosti k formálnímu zápisu vztahů a podporuje rozvoj schopnosti zobecňování. V tomto kontextu představují principy využívané v karetních tricích vhodný didaktický prostředek, neboť jsou často založeny na jasně definovaných matematických zákonitostech.

Cílem této bakalářské práce je navrhnout, metodicky zdůvodnit a didakticky analyzovat soubor pracovních listů pro výuku matematiky na základní škole, které využívají principy karetních triků jako prostředek k rozvoji matematického myšlení, porozumění vztahům a schopnosti zobecňování.

Pro naplnění tohoto cíle jsou stanoveny následující dílčí cíle:

- vymezit teoretická východiska motivace ve výuce matematiky a popsat roli aktivizačních metod v rozvoji matematického myšlení.
- charakterizovat proces přechodu od konkrétní okolnosti k matematickému modelu.
- stanovit kritéria výběru matematických témat vhodných pro zpracování formou pracovních listů.
- navrhnout jednotnou metodiku tvorby pracovních listů.

- vytvořit soubor pracovních listů pro různé ročníky základní školy v souladu s požadavky rámcového vzdělávacího programu.
- provést didaktickou analýzu přínosů a limitů navržených materiálů.

Práce je rozdělena na teoretickou a praktickou část. Teoretická část se zabývá problematikou motivace, aktivizačních metod a modelování v matematickém vzdělávání. Praktická část představuje metodiku tvorby pracovních listů a jejich konkrétní realizaci pro vybraná témata základní školy. Závěr práce shrnuje dosažené výsledky a hodnotí naplnění stanovených cílů.

# 1. TEORETICKÁ VÝCHODISKA

## 1.1. Motivace ve výuce matematiky

### 1.1.1. Vnitřní a vnější motivace

Motivace je v pedagogické psychologii považována za významný faktor ovlivňující proces učení i zapojení žáka do výukových činností. Školní úspěšnost přitom nelze vysvětlovat pouze kognitivními schopnostmi, ale je nutné zohlednit také motivaci, očekávání a postoje žáků (Mareš, 2013).

V odborné literatuře bývá nejčastěji rozlišována motivace vnitřní a vnější. Toto členění systematicky rozpracovává teorie sebedeterminace (Self-Determination Theory), kterou formulovali Deci a Ryan (2000, s. 54–67). Podle této koncepce je vnitřní motivace charakterizována vykonáváním činnosti pro samotný zájem, radost nebo uspokojení, které z ní plyne. Vnější motivace je naopak podmíněna očekávaným důsledkem jednání (např. odměnou či vyhnutím se trestu), může se však postupně internalizovat a stát se osobně významnou.

Přestože vnější motivace může vést k plnění úkolů, výzkumy ukazují, že dlouhodobě stabilnější a kvalitnější učení je spojeno s motivací vycházející z vlastního zájmu o činnost (Deci a Ryan, 2000, s. 54–67). Takto motivovaní žáci vykazují vyšší míru vytrvalosti, hlubší kognitivní zpracování učiva a větší ochotu řešit náročné problémy.

Tento typ motivace zároveň podporuje autonomii žáka. Autonomie je chápána jako pocit, že jedinec jedná na základě vlastního rozhodnutí a že má kontrolu nad procesem učení. Žák, který vnímá, že rozumí řešenému problému a dokáže jej samostatně vyřešit, získává zkušenost kompetence, která dále posiluje jeho aktivní zapojení do výuky. (Deci a Ryan, 2000)

Postoj žáků k matematice přitom jejich motivaci výrazně ovlivňuje. Schoenfeld (1985) upozorňuje, že například představa, že matematické úlohy mají vždy rychlé a jednoznačné řešení, významně snižuje ochotu vytrvat při řešení problémů. Pokud žák opakovaně zažívá neúspěch, může docházet k postupnému oslabování jeho vnitřní motivace.

Jestliže je výuka redukována na reprodukci postupů a mechanické procvičování algoritmů, může docházet k poklesu zájmu o hlubší porozumění. Naopak situace, které podporují zvědavost, vyžadují aktivní hledání řešení a umožňují objevovat pravidelnosti, vytvářejí podmínky pro rozvoj motivace založené na vlastním poznávání. V tomto smyslu je důležité

vytvářet takové výukové prostředí, v němž žáci nejsou pouze pasivními příjemci postupů, ale aktivními účastníky procesu poznávání.

Pokud má být práce s překvapivou matematickou situací didakticky smysluplná, musí podněcovat samostatnou snahu porozumět vzniklé situaci.

### **1.1.2. Problém motivace v matematickém vzdělávání**

Motivace v matematice není určována pouze individuálními schopnostmi žáků, ale také jejich zkušenostmi, emocemi a představami o povaze samotného předmětu. Právě tyto faktory často rozhodují o tom, zda žák při řešení úlohy vytrvá, nebo rezignuje.

Jedním z významných jevů je matematická úzkost. Ashcraft a Krause (2007, s. 243–245) ji charakterizují jako stav napětí a obav, který se objevuje při práci s matematickými úlohami a negativně ovlivňuje výkon mimo jiné tím, že zatěžuje pracovní paměť. Úzkost bývá spojena s opakovanou zkušeností neúspěchu a se silným důrazem na výkonové hodnocení (Hembree, 1990, s. 33–35). Pokud žák matematiku dlouhodobě spojuje se selháním, jeho ochota pouštět se do náročnějších problémů přirozeně klesá.

Dalším faktorem je stereotypní obraz matematiky jako oblasti určené pouze „talentovaným“ jedincům. Takové přesvědčení podporuje fixní pojetí schopností, které podle Dweckové (2006, s. 6–9) vede k vyhýbání se obtížným úlohám a k obavám ze ztráty statusu „schopného žáka“. Schoenfeld (1985, s. 15–18) zároveň upozorňuje, že pokud je matematika prezentována převážně jako soubor hotových algoritmů s jediným správným výsledkem, žáci si osvojují představu, že cílem je rychlost a bezchybnost, nikoli porozumění. V takovém prostředí se chyba stává selháním, nikoli zdrojem poznání.

Tyto faktory se ve výuce často promítají do pasivity. Žáci čekají na postup předložený učitelem, minimalizují vlastní iniciativu a soustředí se především na správnost výsledku. Z pohledu teorie sebedeterminace (Ryan a Deci, 2017) tím dochází k oslabení pocitu autonomie a kompetence, tedy dvou podmínek rozvoje vnitřní motivace. Nízké zapojení pak může vést k horším výkonům, které dále potvrzují negativní očekávání.

Problém motivace v matematickém vzdělávání proto nelze chápat pouze jako otázku „nechuti k učení“. Jde o souhru emocí, přesvědčení a zkušeností, které se vzájemně posilují. Pokud má být tento kruh narušen, je třeba vytvářet podněty, v nichž matematika nepůsobí jako test schopností, ale jako prostor pro objevování vztahů. V tomto kontextu může mít význam

situace, která naruší stereotypní očekávání a vyvolá otázku „proč to tak je?“. Právě tato otázka může představovat první krok od pasivního přijímání postupů k aktivnímu hledání vysvětlení.

### 1.1.3. Role překvapení a kognitivního konfliktu

Jedním z faktorů, které mohou výrazně ovlivnit zájem o učivo, je překvapení. K překvapení dochází tehdy, když se výsledek nebo průběh určitého děje liší od toho, co člověk očekává. Právě tento rozpor mezi očekáváním a skutečností vede ke zvýšené pozornosti a snaze porozumět tomu, co se stalo.

Z pohledu psychologie je překvapení reakcí na nesoulad mezi tím, co předpokládáme, a tím, co skutečně nastane. Meyer, Reisenzein a Schützwohl (1997, s. 252–255) ukazují, že podobný moment přirozeně přitahuje pozornost. Ve výuce může přerušit stereotypní průběh hodiny a aktivovat žáky, kteří by jinak zůstávali spíše pasivní.

Hidi a Renninger (2006, s. 112–114) popisují, že zájem může vzniknout na základě podnětu, který je neobvyklý nebo vyvolává otázky. Překvapení tak může fungovat jako počáteční impuls, který vede od krátkodobého zaujetí k hlubšímu zapojení. Samo o sobě však nestačí – rozhodující je, zda je spojeno s možností hledat vysvětlení.

S překvapením úzce souvisí pojem kognitivního konfliktu. Piaget (1970, s. 13–16) popisuje učení jako proces, v němž člověk neustále porovnává své dosavadní představy s novou zkušeností. Pokud nová zkušenost do stávajících představ nezapadá, vzniká napětí, které může vést k jejich přehodnocení. Kognitivní konflikt tedy neznamena pouhé zmatení, ale může být podnětem ke změně způsobu uvažování.

Aby byl tento proces přínosný, musí být podnět přiměřeně náročný. Posner a kol. (1982, s. 211–215) upozorňují, že příliš silný rozpor může vést k frustraci, zatímco příliš slabý nepřinese žádnou změnu. V matematice může takové napětí vzniknout například tehdy, když výsledek úlohy odporuje intuici nebo běžně používanému postupu.

Narušení očekávání často vyvolá otázku „proč“. Loewenstein (1994, s. 75–78) vysvětluje zvědavost jako stav, kdy si člověk uvědomí rozdíl mezi tím, co ví, a tím, co by chtěl vědět. Překvapivý moment tento rozdíl zvýrazní a může podnítit snahu doplnit chybějící vysvětlení.

V matematice má tento moment zvláštní význam. Pokud je žák konfrontován s výsledkem, který se zdá být „nelogický“ nebo nečekaný, může to vést buď k rezignaci, nebo k

hledání hlubšího principu. Smyslem práce s překvapením proto není efekt sám o sobě, ale vytvoření podnětu vedoucího k systematickému rozboru a pochopení vztahů.

V tomto pojetí nepředstavuje překvapení pouhé zpestření výuky. Může být prostředkem, jak narušit stereotypní představu matematiky jako souboru hotových postupů a otevřít prostor pro objevování. Pokud je takový podnět didakticky promyšlený, může podpořit aktivní zapojení žáků a proměnit počáteční údiv v motivaci hledat vysvětlení.

## **1.2. Aktivizující a problémové vyučování**

### **1.2.1. Aktivizující metody ve výuce matematiky**

Současná výuka matematiky se postupně vzdaluje modelu, v němž učitel předává hotové poznatky a žák je pouze přijímá. Stále více se prosazuje přístup, který staví na aktivní roli žáka při objevování a porozumění matematickým vztahům. Aktivizující metody směřují k tomu, aby se žák do učení zapojil vlastní činností, řešil problémy a přemýšlel o svém postupu (Maňák a Švec, 2003, s. 23–26).

Základním východiskem je předpoklad, že poznání nevzniká pouhým poslechem výkladu, ale činností. Skalková (2007) zdůrazňuje, že učení je účinnější tehdy, když žák chápe smysl toho, co dělá. V matematice to znamená víc než jen zopakovat předvedený postup. Pokud má úloha vyžadovat vlastní rozhodování a hledání cesty k řešení, vede to k hlubšímu porozumění než mechanické procvičování algoritmů.

### **1.2.2. Samostatná činnost žáků**

Důraz na samostatnou práci neznamena, že žák zůstává bez podpory. Jde spíše o to, aby měl prostor zkoušet různé možnosti, formulovat vlastní postup a uvažovat o tom, proč funguje. Petty (2013, s. 24–27) upozorňuje, že aktivní zapojení vede nejen k lepšímu zapamatování, ale i k větší schopnosti použít poznatky v nové situaci.

V matematice je tento princip obzvláště důležitý. Správný výsledek totiž ještě neznamená porozumění. Žák může dojít ke správnému číslu, aniž by rozuměl vztahům, které k němu vedly. Případy, které vyžadují hledání vlastního řešení, podporují schopnost argumentovat, porovnávat postupy a uvědomovat si souvislosti.

### **1.2.3. Role učitele**

S tím souvisí i proměna role učitele. Učitel již nevystupuje pouze jako zdroj správných odpovědí, ale jako ten, kdo vytváří podmínky pro učení. Jeho úkolem je klást otázky, usměrňovat diskusi a pomáhat žákům zpřesňovat jejich myšlenky. Aktivita žáků však není nahodilá – směřuje k jasně stanovenému cíli (Maňák a Švec, 2003, s. 26–28).

V matematice je tato role zvláště důležitá při práci s úlohami, jejichž řešení není na první pohled zřejmé. Učitel zde pomáhá žákům formulovat hypotézy, zkoumat jejich platnost a hledat souvislosti, místo aby předkládal hotové postupy. Takový přístup podporuje hlubší porozumění a vede žáky k tomu, aby matematiku nevnímali jen jako sled předem daných kroků.

Aktivizující metody představují systematický přístup, který staví na činnosti žáka a promyšlené podpoře učitele. Tento rámec vytváří prostor i pro práci s úlohami, které vyvolávají otázky a vedou k hledání vysvětlení – tedy i pro situace, které budou rozpracovány v další části práce.

### **1.2.4. Problémové vyučování**

Problémové vyučování staví na situaci, v níž žák nemá k dispozici předem daný postup řešení. Nejde pouze o „těžší příklady“, ale o úlohy, které vyžadují hledání vlastní cesty, formulování předpokladů a jejich ověřování. Smyslem není rychle dospět ke správnému výsledku, ale projít procesem uvažování, který vede k porozumění (Maňák a Švec, 2003, s. 74–76).

V matematice je tento přístup přirozený, protože samotná matematika vzniká řešením problémů, hledáním vztahů a zdůvodňováním tvrzení. Pokud je výuka omezena pouze na aplikaci hotových algoritmů, může být správný výsledek dosažen bez skutečného pochopení. Problémová situace naopak nutí žáka analyzovat podmínky, zvažovat různé strategie a porovnávat jejich účinnost.

### **1.2.5. Otevřené problémy**

Zvláštní význam mají otevřené problémy. Ty nemusejí mít jedinou správnou odpověď ani jediný postup řešení. Mohou vést k různým závěrům nebo k různým úrovním zobecnění. Právě tato otevřenost vytváří prostor pro diskusi a porovnávání přístupů.

Skalková (2007) upozorňuje, že práce s otevřenými úlohami podporuje hlubší porozumění, protože žák není veden k napodobování postupu, ale k hledání smyslu řešení. V

matematice může mít otevřený problém podobu hledání pravidelnosti, formulace obecného vztahu nebo analýzy nečekaného výsledku. Nejistota, která je s takovou situací spojena, vede k průběžnému přemýšlení o správnosti vlastního postupu.

#### **1.2.6. Formulace hypotéz**

Součástí řešení problému je vytváření hypotéz – tedy předběžných domněnek o tom, jak by mohl být problém vyřešen. V matematice se s tím setkáváme například při hledání pravidelnosti v číselné řadě nebo při zobecňování konkrétních případů. Domněnka zde předchází důkazu.

Kalhous a Obst (2009, s. 152–154) zdůrazňují, že práce s hypotézami rozvíjí schopnost argumentace. Žák se učí nejen tvrzení vyslovit, ale také je obhájit. Tím se výuka přibližuje skutečné povaze matematické práce, kde je tvrzení vždy třeba zdůvodnit.

#### **1.2.7. Ověřování řešení**

Důležitou součástí problémového vyučování je ověřování výsledků. To může mít podobu kontroly výpočtu, zkoušky na konkrétních případech nebo obecného zdůvodnění. V matematice představuje tento krok přechod od domněnky k prokázanému tvrzení.

Proces ověřování vede žáky k rozlišení mezi tím, co se „zdá být pravdivé“, a tím, co je skutečně doloženo. Reflexe vlastního postupu a diskuse nad různými řešeními jsou přitom klíčové pro upevnění poznatků (Průcha, Walterová a Mareš, 2013).

Problémové vyučování tak není pouze metodou, ale způsobem práce, který staví na intelektuálním napětí a postupném hledání vysvětlení. V kontextu této práce představuje rámec pro tvorbu pracovních listů, jejichž cílem není nabídnout hotový postup, ale vytvořit situaci, která žáky vede k formulaci domněnek, jejich ověřování a porozumění vztahům mezi matematickými pojmy. Navrhované aktivity proto nejsou jen zpestřením výuky, ale odpovídají principům problémově orientované didaktiky.

#### **1.2.8. Badatelský přístup**

Badatelský přístup (inquiry-based learning) vychází z předpokladu, že žáci se učí nejlépe tehdy, když sami kladou otázky, zkoumají situaci a hledají vysvětlení. Neznamená to však, že jsou ponecháni bez vedení. Hmelo–Silver, Duncan a Chinn (2007, s. 100–102) upozorňují, že

účinná badatelsky orientovaná výuka vyžaduje promyšlenou podporu učitele, který pomáhá formulovat otázky, zpřesňovat domněnky a usměrňovat interpretaci výsledků.

V matematice tento přístup znamená, že žáci nejsou seznamováni s hotovými pravidly, ale docházejí k nim postupně prostřednictvím vlastní činnosti. Setkávají se s podnětnou situací, hledají vztahy, formulují předpoklady a ověřují jejich platnost. Tento postup odpovídá tomu, jak matematické poznání vzniká – hledáním struktur a souvislostí.

### **1.2.9. Objevování pravidelností**

Základem badatelského přístupu v matematice je práce s konkrétními příklady, z nichž se postupně vyvozuje obecnější pravidlo. Žáci porovnávají výsledky, hledají společné znaky a snaží se formulovat vztah, který dané případy spojuje.

Takový postup vede k hlubšímu porozumění, protože pravidlo není předloženo zvenčí, ale vzniká jako výsledek vlastního zkoumání. Skalková (2007) upozorňuje, že aktivní utváření poznatků podporuje jejich trvalejší osvojení. V matematice může mít tento proces podobu práce s číselnými řadami, geometrickými příklady nebo kombinatorickými problémy.

### **1.2.10. Diskuse a argumentace**

Badatelský přístup klade důraz nejen na nalezení řešení, ale také na jeho zdůvodnění. Žáci se učí vysvětlit, proč jejich závěr platí, a porovnávat své postupy s ostatními. Tím se výuka přibližuje skutečné matematické práci, kde je tvrzení vždy nutné obhájit.

Kalhous a Obst (2009, s. 155–157) zdůrazňují význam diskuse pro rozvoj argumentačních dovedností. Sdílení různých strategií pomáhá žákům lépe porozumět problému a uvědomit si rozdíl mezi domněnkou a podloženým tvrzením.

### **1.2.11. Sdílení řešení**

Součástí badatelské výuky je i prezentace výsledků. Když žák své řešení vysvětluje ostatním, musí si ujasnit vlastní postup a logiku argumentace. Zároveň má možnost konfrontovat jej s jinými přístupy.

Reflexe a komunikace jsou podle Průchy, Walterové a Mareše (2013, s. 211–214) důležité pro upevnění poznatků. Sdílení řešení tak není jen doplňkem výuky, ale přirozenou součástí procesu učení.

Badatelský přístup proto nepředstavuje jen metodickou variantu výuky, ale způsob práce, který vede žáky k samostatnému hledání vztahů, formulování domněnek a jejich zdůvodňování. V rámci této práce tvoří teoretický základ pro tvorbu pracovních listů, jejichž cílem je vést žáky k aktivnímu zkoumání matematických situací, nikoli pouze k aplikaci předem daných postupů.

### **1.3. Přejít od konkrétní situace k matematickému modelu**

#### **1.3.1. Matematický model**

Jedním z důležitých momentů výuky matematiky je schopnost přejít od konkrétní situace k jejímu matematickému vyjádření. Matematika zde nefunguje jako hra se symboly, ale jako prostředek, který pomáhá situaci uspořádat, zjednodušit a vysvětlit. Právě tato schopnost je považována za podstatnou součást matematické gramotnosti.

#### **1.3.2. Pojem modelování**

Matematické modelování lze chápat jako převod reálné okolnosti do matematické podoby, její řešení a následné vyhodnocení výsledku ve vztahu k původnímu kontextu. Blum a Leiss (2007, s. 223–225) popisují modelování jako proces, v němž se střídá práce s konkrétní situací a s matematickým aparátem. Žák musí situaci nejprve porozumět, vybrat podstatné prvky, vyjádřit je pomocí matematických vztahů a nakonec posoudit, zda výsledek dává smysl.

Modelování tedy není jednorázový krok, ale postupné přecházení mezi konkrétním a abstraktním. Tento pohyb je klíčový pro pochopení toho, že matematika není oddělena od reality, ale umožňuje ji popsat a strukturovat.

Hejného (2014) pojetí výuky zdůrazňuje právě tuto vazbu mezi konkrétní zkušeností a abstraktním myšlením. Pokud žák chápe, odkud matematický vztah vychází, je pravděpodobněji, že mu porozumí i na obecné úrovni.

#### **1.3.3. Zjednodušení reality**

Každý model představuje zjednodušení. Realita je vždy složitější než její matematické vyjádření, proto je nutné vybrat jen ty prvky, které jsou pro daný problém podstatné. Tento výběr není samozřejmý – vyžaduje schopnost rozlišit mezi tím, co je pro řešení důležité, a tím, co lze pominout.

Blum a Leiss (2007, s. 223–226) upozorňují, že právě tato schopnost abstrahovat je jedním z podstatných kroků modelování. Žák se učí nahlížet situaci z určitého hlediska a uvědomovat si, že model není kopií reality, ale nástrojem pro její pochopení.

#### **1.3.4. Symbolizace**

Přechod k matematickému modelu vrcholí symbolizací – tedy vyjádřením vztahů pomocí symbolů, rovnic nebo grafů. Tím dochází k přesunu od konkrétní zkušenosti k obecné rovině.

Skalková (2007) upozorňuje, že práce se symboly je jedním ze základních znaků matematického myšlení. Symbolický zápis umožňuje vyjádřit vztahy přesně a úsporně. Současně však hrozí riziko formálního učení, pokud je symbol používán bez porozumění jeho významu.

Proto je důležité, aby symbolické vyjádření bylo vždy propojeno s konkrétní situací, z níž vychází. Teprve tehdy se může stát prostředkem skutečného porozumění, nikoli pouhého napodobování postupu.

Schopnost přechodu od daného případu k matematickému modelu je pro tuto práci zásadní. Navrhované pracovní listy vycházejí ze situací, které jsou konkrétní a překvapivé. Smyslem však není efekt samotný, ale jejich převod do matematické struktury. Právě v tomto převodu se odhalují vztahy, které by jinak zůstaly skryté.

#### **1.3.5. Proces zobecňování**

Zobecňování je krok, při němž se z jednotlivého případu stává obecné pravidlo. Pokud modelování umožňuje popsat konkrétní situaci, zobecnění ukazuje, že daný vztah neplatí jen v jednom případě, ale v celé třídě situací. Schopnost tento přechod uskutečnit patří k základním znakům matematického myšlení.

Z didaktického hlediska znamená zobecňování rozpoznání opakující se struktury a její vyjádření v obecné podobě. Hejný (2014) zdůrazňuje, že právě tento krok je důležitý pro budování matematických schémat – tedy takových mentálních struktur, které lze použít i v nových situacích.

### 1.3.6. Práce s proměnnou

Zobecnění je úzce spojeno s prací s proměnnou. Proměnná umožňuje vyjádřit vztah nezávisle na konkrétních číslech. Nejde jen o „neznámou“, kterou je třeba dopočítat, ale o prostředek, jak zachytit obecnost.

Například konkrétní rovnost  $3 + 5 = 5 + 3$  lze zobecnit pomocí zápisu:

Takový zápis ukazuje, že nejde o vlastnost dvou konkrétních čísel, ale o obecný vztah. Žák se zde učí rozpoznat, že pravidlo platí bez ohledu na to, jaké hodnoty proměnné zastupují.

### 1.3.7. Hledání invariantů

Dalším krokem zobecňování je hledání toho, co se při změnách nemění. Invariant představuje vlastnost, která zůstává zachována i tehdy, když se ostatní prvky mění.

Polya (2014, s. 103–106) doporučuje při řešení problémů sledovat, co se mění a co zůstává stejné. Právě tato otázka často vede k odhalení obecného pravidla. Ve výuce může mít práce s invarianty podobu zkoušení různých variant zadání a porovnávání výsledků. Postupně se ukáže, že určitý vztah zůstává zachován bez ohledu na konkrétní volbu.

### 1.3.8. Formulace obecného vztahu

Zobecňování vrcholí formulací pravidla. Nejde jen o rozpoznání pravidelnosti, ale o její přesné vyjádření – slovně nebo symbolicky. Skalková (2007, s. 112–114) upozorňuje, že tento krok vyžaduje schopnost abstrahovat od jednotlivých případů a spojit je do jednoho celku.

V kontextu této práce má zobecnění zásadní význam. Konkrétní případ může být pro žáka zajímavá nebo překvapivá, ale teprve ve chvíli, kdy je její princip vyjádřen obecně, dochází k plnému matematickému porozumění. Bez tohoto kroku by zůstala jen izolovaná zkušenost.

Zobecňování tak vytváří most mezi konkrétní činností a abstraktním myšlením. Umožňuje proměnit jednotlivý případ v pravidlo, které lze použít i v jiných souvislostech.

### 1.3.9. Algebra jako jazyk zobecnění

Algebra umožňuje vyjádřit obecné vztahy pomocí symbolů. Zatímco aritmetika pracuje převážně s konkrétními čísly, algebra dává možnost popsat pravidla, která platí pro celé skupiny situací. Právě tato schopnost činí z algebry nástroj zobecňování.

### 1.3.10. Význam symbolického zápisu

Symbolický zápis umožňuje vyjádřit vztahy mezi veličinami přesně a bez ohledu na konkrétní hodnoty. Díky tomu lze zachytit samotnou strukturu problému.

Například lineární vztah mezi dvěma veličinami lze vyjádřit obecně takto:

$$y = ax + b$$

Tento zápis nepopisuje jednu konkrétní možnost, ale všechny možnosti, které mají stejný typ závislosti. Algebra tak umožňuje oddělit obecný princip od jednotlivých číselných případů.

Hejného (2014) pojetí výuky zdůrazňuje, že práce se symboly má smysl pouze tehdy, pokud vyrůstá z porozumění vztahům. Pokud je symbolický zápis zaváděn bez vazby na konkrétní situaci, vede spíše k formálnímu napodobování postupů než k pochopení.

### 1.3.11. Vztah konkrétní situace a rovnice

Rovnice je způsob, jak vyjádřit vztah mezi veličinami. Ve výuce je důležité, aby ji žáci nevnímali jen jako příklad k vyřešení, ale jako model určité situace.

Například zadání „Mysli si číslo, přičti 5 a dostaneš 12“ lze převést do tvaru:

$$x + 5 = 12$$

Rovnice zde není samoúčelný zápis, ale formalizace konkrétního děje. Při jejím vytváření je třeba určit, co je neznámé, jaké vztahy mezi veličinami platí a jak je vyjádřit symbolicky.

Skalková (2007) upozorňuje, že skutečné porozumění vzniká tehdy, když žák dokáže přecházet mezi situací a jejím symbolickým vyjádřením oběma směry. Rovnice tedy není cílem sama o sobě, ale prostředkem, jak situaci zpřehlednit a analyzovat.

V rámci této práce má algebra zásadní roli. Konkrétní, někdy překvapivý okamžik může vzbudit zájem, ale teprve její převedení do rovnice umožní vysvětlit, proč daný jev nastává. Převod „triku“ do algebraické podoby tak není formálním krokem navíc, ale okamžikem, kdy se odhalí obecný princip.

Algebra jako jazyk zobecnění proto umožňuje vyjádřit pravidlo a také jej systematicky rozebrat a zdůvodnit. Bez symbolického vyjádření by konkrétní situace zůstala izolovanou zkušeností; díky algebře se stává součástí širší matematické struktury.

## 1.4. Matematické principy využitelné v didaktických situacích

Následující kapitola záměrně předchází konkrétním didaktickým aplikacím. Jejím cílem není podat úplný přehled všech matematických principů, které mohou vést k jednoznačnému výsledku, ale vybrat ty, které jsou pro tuto práci podstatné. Smyslem je ukázat, že překvapivost situací v praktické části není založena na efektu samotném, ale na vlastnostech matematických struktur, z nichž vycházejí.

Text se proto soustředí na několik principů aritmetického a algebraického charakteru, které vytvářejí okamžiky vyvolávající otázku „proč to tak je“. Překvapení zde není chápáno jako vnější ozvláštnění, ale jako důsledek vztahů, které nejsou na první pohled patrné.

Tyto principy zároveň umožňují převést konkrétní situaci do obecné matematické podoby. V tomto smyslu tvoří teoretické východisko pro interpretaci pracovních listů uvedených v praktické části práce.

### 1.4.1. Lineární závislosti

V některých situacích lze sled operací vyjádřit lineárním vztahem tvaru

$$y = ax + b$$

kde  $x$  představuje původní hodnotu a  $y$  výsledek po provedení určité posloupnosti operací.

Na první pohled může postup působit složitě nebo náhodně, algebraický rozbor však ukáže, že všechny kroky odpovídají jednoduché transformaci původní hodnoty. Tento princip se často objevuje v numerických postupech, které vedou k předvídatelnému výsledku bez ohledu na počáteční volbu.

Didakticky může být tento přístup využit k tomu, aby žáci převáděli konkrétní výpočty do obecného algebraického zápisu a postupně odhalovali skrytou strukturu výpočtu.

### 1.4.2. Invarianty

V některých situacích zůstává určitá vlastnost zachována i přes řadu provedených operací. Takovou neměnnou vlastnost označujeme jako invariant.

Například při transformaci výrazu mohou některé členy postupně zaniknout

$$(x + a) - a = x$$

a výsledná hodnota tak nezávisí na některých mezikrocích výpočtu.

Didaktický význam práce s invarianty spočívá v tom, že vede žáky k systematickému rozboru postupu a k hledání toho, co se během jednotlivých kroků nemění. Překvapení zde nevzniká náhodou, ale z toho, že tato stabilní vlastnost není na první pohled patrná.

### 1.4.3. Ciferný součet a dělitelnost

Zápis přirozeného čísla v desítkové soustavě lze vyjádřit ve tvaru:

$$N = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \dots + a_1 10^1 + a_0$$

Tento rozklad umožňuje vysvětlit některá pravidla dělitelnosti. Například při zkoumání dělitelnosti devíti lze využít vztah

$$10 \equiv 1 \pmod{9}$$

Z toho plyne, že každé číslo je modulo 9 ekvivalentní součtu svých cifer. Postup, který může působit složitě nebo náhodně, je tak ve skutečnosti řízen jednoduchým vztahem.

Didaktický význam spočívá v propojení pozičního zápisu čísla s algebraickým uvažováním. Žáci mohou objevit, že pravidla dělitelnosti nejsou „triky“, ale důsledkem struktury desítkové soustavy.

### 1.4.4. Modulární aritmetika

Modulární aritmetika popisuje vztahy mezi čísly prostřednictvím zbytků po dělení. Základní zápis má tvar

$$a \equiv b \pmod{n}$$

Tento přístup umožňuje zjednodušit složitější výpočty a odhalit cyklické vzorce v posloupnostech čísel. Výsledek pak často nezávisí na konkrétní hodnotě čísla, ale pouze na třídě zbytku, do které patří.

Z didaktického hlediska je tento princip užitečný zejména tehdy, když pomáhá vysvětlit jevy, které by při běžném aritmetickém postupu působily neintuitivně.

### 1.4.5. Strukturální zdroj překvapení

Společným rysem uvedených principů je jejich vnitřní stabilita. Při daných podmínkách vedou k jednoznačnému výsledku, i když postup může působit otevřeně nebo nahodile.

Překvapení zde nevzniká porušením matematických pravidel, ale tím, že jejich působení zůstává skryto. Jakmile je struktura odhalena, původní nejistota se mění v porozumění.

## **1.5. Kurikulární ukotvení**

Navrhované aktivity vycházejí z matematických struktur, jejichž vlastnosti vedou k jednoznačnému výsledku. Tato kapitola ukazuje, že takto pojatá práce odpovídá cílům vymezeným v kurikulárních dokumentech českého vzdělávacího systému a rozvíjí kompetence, které jsou v nich zdůrazňovány.

### **1.5.1. Matematická gramotnost**

Přístup založený na analýze struktury a hledání důvodu, proč výsledek nastává, podporuje především dvě oblasti matematické gramotnosti.

### **1.5.2. Kompetence k řešení problémů**

Navrhované situace nevedou žáky k pouhé aplikaci známého postupu. Vyžadují hledání pravidelnosti, formulaci domněnky, její ověření a následné zdůvodnění. Žák je veden k tomu, aby vysvětlil, proč daný výsledek platí.

Tento způsob práce odpovídá důrazu kurikula na aktivní řešení problémových situací a na schopnost argumentace.

### **1.5.3. Práce s reprezentacemi**

Aktivity předpokládají přechod mezi různými způsoby vyjádření téhož vztahu – od konkrétního číselného příkladu přes symbolický zápis až po slovní formulaci pravidla či grafické znázornění.

Schopnost mezi těmito reprezentacemi přecházet a vzájemně je interpretovat patří k základním prvkům matematické gramotnosti a je rozvíjena napříč stupni vzdělávání.

### **1.5.4. Zařazení do RVP ZV a RVP G**

V Rámcovém vzdělávacím programu pro základní vzdělávání (MŠMT, 2023) se navrhované aktivity opírají zejména o oblast Číslo a početní operace na prvním stupni a Číslo a proměnná na druhém stupni. Práce s vlastnostmi operací, dělitelností, výrazy a rovnicemi vytváří přirozený prostor pro zobecňování a strukturální porozumění.

Významné je také zařazení do oblasti Závislosti, vztahy a práce s daty, kde se žáci seznamují s pojmem funkce, lineární závislosti a grafickým vyjádřením vztahů. Právě zde se uplatňuje přechod od konkrétní situace k obecnému modelu.

Okruh Nestandardní aplikační úlohy a problémy navíc přímo předpokládá řešení úloh, které nejsou založeny na rutinním postupu, ale na odhalení principu či pravidla. Navrhované aktivity tak zapadají do tohoto rámce přirozeným způsobem.

Geometrie může nabízet obdobné příklady práce se strukturou a invarianty, v této práci však nepředstavuje hlavní oblast aplikace.

V RVP pro gymnázia (Výzkumný ústav pedagogický v Praze, 2007) je obdobný přístup opřen zejména o oblasti Číslo a proměnná a Závislosti a funkční vztahy, kde je kladen důraz na obecné vyjádření vztahů a práci s rovnicemi různých typů.

Významná je rovněž oblast Argumentace a ověřování, která rozvíjí schopnost formulovat tvrzení a zdůvodňovat jejich platnost. Na této úrovni se práce s obecnou strukturou stává vědomou součástí matematického uvažování.

#### **1.5.5. Shrnutí**

Navrhovaný přístup nepřináší nové tematické okruhy, ale představuje specifický způsob práce s jádrem kurikula. Opírá se především o oblasti zaměřené na číslo, proměnnou a vztahy mezi veličinami. Směřuje od daného případu k obecnému vyjádření a od intuitivního překvapení k racionálnímu vysvětlení.

### **1.6. Závěr teoretické části**

Teoretická část vymezila matematické principy, na nichž jsou založeny situace analyzované v praktické části práce. Ukázala, že jejich překvapivý charakter nevychází z efektu samotného, ale z vlastností algebraických a aritmetických struktur, které při povrchovém pohledu nemusí být zřejmé.

Byly představeny souvislosti mezi konkrétní situací, jejím matematickým modelem a následným zobecněním prostřednictvím symbolického zápisu. Důraz byl kladen na proces hledání pravidelnosti, formulaci domněnek a jejich ověřování. Tento postup odpovídá cílům kurikulárních dokumentů a rozvíjí klíčové složky matematické gramotnosti.

V praktické části bude tento teoretický rámec využit při tvorbě pracovních listů. Jednotlivé aktivity budou vycházet z konkrétní situace, povedou k jejímu matematickému vyjádření a vyústí v pojmenování obecného principu. Smyslem nebude samotné překvapení, ale porozumění vztahům, které jej vyvolávají.

## **2. METODIKA TVORBY PRACOVNÍCH LISTŮ**

Tato kapitola vymezuje způsob, jakým jsou navrhovány pracovní listy uvedené v praktické části práce. Navazuje na teoretická východiska týkající se motivace, role překvapení, problémového a badatelského vyučování i procesu zobecňování. Cílem není popsat jednotlivé aktivity, ale stanovit jasná kritéria jejich výběru a jednotnou strukturu jejich zpracování. Tím je zajištěno, že pracovní listy nejsou nahodilým souborem úloh, ale systematicky vystavěným didaktickým celkem.

### **2.1. Kritéria výběru matematických témat**

Výběr témat nebyl veden snahou o efektnost, ale o jejich didaktickou nosnost. Každé zařazené téma splňuje tři základní kritéria.

#### **2.1.1. Soulad s kurikulem**

Navrhované aktivity vycházejí z obsahových oblastí vymezených Rámcovým vzdělávacím programem pro základní vzdělávání (MŠMT, 2023). Opírají se zejména o oblasti Číslo a proměnná a Závislosti, vztahy a práce s daty. Právě zde se vytváří prostor pro práci s výrazy, rovnicemi, dělitelností či lineární závislostí.

Současně jsou aktivity blízké okruhu Nestandardní aplikační úlohy a problémy, který předpokládá řešení úloh nevedoucích k pouhé mechanické aplikaci známého postupu. Tento rámec umožňuje pracovat se situacemi, jejichž výsledek je pevně dán matematickou strukturou, avšak na první pohled nemusí být zřejmý.

#### **2.1.2. Přiměřenost věku a náročnosti**

Druhé kritérium představuje přiměřenost věku žáků. Úlohy jsou voleny tak, aby odpovídaly jejich zkušenosti s početními operacemi, výrazy a rovnicemi. Přejít ke zobecnění je postupný a vychází z konkrétní činnosti.

Zohledněna je také míra abstrakce. Symbolický zápis je zaváděn teprve ve chvíli, kdy mu předchází porozumění konkrétní situaci. Jak upozorňuje Skalková (2007), práce se symbolem bez významu vede k formálnímu učení bez hlubšího pochopení.

### **2.1.3. Možnost zobecnění**

Úloha musí umožnit formulaci pravidla, které přesahuje jednotlivý případ. Bez tohoto kroku by zůstala pouze izolovanou zkušeností.

Schopnost zobecňovat je jedním ze základních znaků matematického myšlení (Hejného, 2014). Proto jsou vybírána témata, u nichž lze odhalit invariantní vztah nebo obecnou strukturu vyjádřitelnou pomocí proměnné.

### **2.1.4. Struktura pracovního listu**

Každý pracovní list je vystaven podle jednotného schématu. Tato struktura vychází z principů problémového a badatelského vyučování (Maňák a Švec, 2003; Kalhous a Obst, 2009) a z procesu modelování a zobecňování popsaného v teoretické části.

### **2.1.5. Motivační situace**

Úvodní část představuje konkrétní situaci, která vyvolává zájem a často i překvapení. Smyslem není efekt sám o sobě, ale narušení očekávání, které může vést k otázce „proč“ (Meyer, Reisenzein a Schützwohl, 1997, s. 252–255). Tento moment vytváří podnět k dalšímu zkoumání.

### **2.1.6. Analýza**

Následuje rozbor postupu. Žáci sledují jednotlivé kroky, porovnávají varianty a hledají pravidelnost. Tím dochází k postupnému zpřesňování jejich uvažování a k formulaci prvních domněnek.

### **2.1.7. Převod do matematického modelu**

Ve třetí fázi je situace převedena do matematického zápisu. Dochází k vyjádření vztahů pomocí proměnné nebo rovnice. Tento krok odpovídá přechodu od konkrétní zkušenosti k modelu, který umožňuje další práci (Blum a Leiss, 2007, s. 223–225).

Symbolický zápis zde neplní roli samoučelného formálního kroku, ale nástroje ke zpřehlednění struktury vztahů.

### **2.1.8. Zobecnění**

Po vytvoření modelu je formulováno obecné pravidlo. Žáci si uvědomují, že výsledek nezávisí na konkrétním čísle, ale na samotné struktuře postupu. Tento krok představuje přechod od jednotlivého příkladu k obecně platnému vztahu (Hejného, 2014).

### **2.1.9. Aplikace**

Zobecněný vztah je následně ověřen na dalších případech nebo mírně pozměněném zadání. Ověřování pomáhá rozlišit mezi domněnkou a doloženým tvrzením (Polya, 2014).

### **2.1.10. Reflexe**

Závěrečná část směřuje k pojmenování principu, který byl odhalen. Reflexe umožňuje žákům uvědomit si, jakým způsobem k řešení dospěli, a upevnit nově získané poznatky (Průcha, Walterová a Mareš, 2013).

## **2.2. Organizační forma práce**

Pracovní listy jsou koncipovány tak, aby bylo možné jejich využití v různých organizačních formách výuky.

Individuální práce podporuje soustředěné uvažování a osobní odpovědnost za řešení. Skupinová práce vytváří prostor pro porovnávání postupů a argumentaci. Diskuse řízená učitelem umožňuje zpřesňovat formulace a vyjasňovat nedorozumění. Role učitele spočívá především v kladení otázek a usměrňování procesu, nikoli v předkládání hotového řešení (Maňák a Švec, 2003).

## **2.3. Didaktická úskalí**

Při práci s problémy založenými na překvapivém výsledku je třeba počítat s určitými riziky.

Prvním je dominance efektu nad matematickým obsahem. Pokud by zůstalo pouze u samotného „triku“, nedošlo by k hlubšímu porozumění.

Druhým úskalím je formální práce se symbolem bez porozumění jeho významu. Proto je důležité, aby symbolický zápis vždy vycházel z předchozí analýzy v daném případě.

Třetím faktorem je časová náročnost. Diskuse a zobecnění vyžadují dostatek prostoru, jinak hrozí, že bude potlačena právě ta část, která je z hlediska porozumění nejdůležitější.

## **2.4. Shrnutí**

Metodika tvorby pracovních listů je založena na propojení konkrétní zkušenosti s postupným zobecňováním. Každá úloha je konstruována tak, aby vedla od motivující situace přes její rozbor a matematické vyjádření k formulaci obecného principu.

Pracovní listy tak nejsou pouhou sbírkou zajímavých úloh, ale prostředkem k rozvoji matematického myšlení. Překvapení zde slouží jako podnět k hledání vysvětlení, nikoli jako cíl samo o sobě. Tento rámec tvoří základ pro praktickou část práce, v níž budou jednotlivé listy konkrétně představeny a analyzovány.

### 3. PRAKTICKÁ ČÁST

Praktická část práce představuje soubor didaktických aktivit založených na matematických principech využívaných v některých karetních tricích. Smyslem těchto aktivit není pouze předvést zajímavý efekt, ale využít překvapivou situaci jako podnět k matematickému uvažování. Matematický karetní trik zde slouží především jako motivace, která vyvolává přirozenou zvědavost a vede žáky k otázce, proč daný postup funguje.

Navržené aktivity jsou postaveny na jednoduchém principu. Žáci se nejprve setkají s konkrétní situací, která na první pohled působí překvapivě nebo dokonce nevysvětlitelně. Následně mají možnost postup analyzovat, hledat v něm pravidelnosti a formulovat vlastní vysvětlení. Teprve poté dochází k systematickému matematickému rozboru, který ukáže, že výsledek je ve skutečnosti dán přesnými aritmetickými nebo algebraickými vztahy.

Tento postup odpovídá konstruktivisticky orientovanému pojetí výuky, které zdůrazňuje aktivní roli žáků při utváření poznání a význam vlastní zkušenosti při učení (Maňák a Švec, 2003; Skalková, 2007).

Jednotlivé pracovní listy jsou seřazeny tak, aby jejich matematická náročnost postupně rostla. První aktivita pracuje především s jednoduchými aritmetickými vlastnostmi přirozených čísel. Další úlohy již vyžadují hlubší analýzu postupů a využívají algebraický zápis. Závěrečná úloha se zaměřuje na vlastnosti tzv. cyklického čísla 142857, které vzniká jako perioda desetinného rozvoje zlomku  $1/7$  a představuje zajímavý příklad pravidelnosti v teorii čísel.

#### 3.1. O'Connor's Four–Ace Trick

Tento trik spočívá v postupném nalezení es v balíčku karet. Kouzelník požádá diváka, aby si zvolil číslo mezi 10 a 20. Následně z balíčku odpočítá odpovídající počet karet a položí je na stůl.

Poté sečte cifry zvoleného čísla a z vrchu hromádky na stole odebere počet karet odpovídající tomuto součtu. Tyto karty položí zpět na vrch balíčku v ruce. Následně vezme vrchní kartu z hromádky na stole a odloží ji stranou lícem dolů. Zbylé karty z hromádky na stole vrátí zpět na vrch balíčku.

Tento postup se opakuje, dokud nejsou postupně vybrány čtyři karty. Po otočení těchto karet se ukáže, že se jedná o čtyři esa (Gardner, 1956, s. 20).

### 3.1.1. Název aktivity

Čtyři esa z balíčku

### 3.1.2. Zařazení dle RVP ZV

Vzdělávací oblast: Matematika a její aplikace

Tematické okruhy: – Číslo a početní operace – Číslo a proměnná – Nestandardní aplikační úlohy a problémy (MŠMT, 2023)

### 3.1.3. Doporučený ročník

5.–7. ročník základní školy

### 3.1.4. Vzdělávací cíle

Žák: provádí výpočty s přirozenými čísly, určuje ciferný součet čísla, rozpoznává pravidelnosti v číselných vztazích, vysvětluje princip dělitelnosti devíti.

### 3.1.5. Matematické vysvětlení principu

Princip aktivity vychází z vlastnosti přirozených čísel, podle níž je rozdíl mezi číslem a součtem jeho cifer vždy dělitelný devíti.

Uvažujme dvouciferné číslo. Každé dvouciferné číslo lze zapsat ve tvaru

$$10a + b$$

kde  $a$  označuje desítky a  $b$  jednotky. Součet cifer tohoto čísla je

$$a + b$$

Pokud od čísla odečteme součet jeho cifer, dostaneme

$$10a + b - (a + b) = 9a$$

Výsledkem je tedy vždy násobek devíti. Rozdíl mezi číslem a součtem jeho cifer je proto vždy dělitelný devíti.

V aktivitě je výběr omezen na čísla mezi 10 a 19. U těchto čísel je hodnota  $a = 1$ , takže výsledek výrazu je vždy

$$9a = 9$$

Například pro číslo 12 platí

$$12 - (1 + 2) = 9$$

To znamená, že po odečtení součtu cifer vždy získáme hodnotu 9.

Představme si například, že divák zvolí číslo 12. Kouzelník odpočítá dvanáct karet na stůl. Poté sečte cifry zvoleného čísla ( $1 + 2 = 3$ ) a tři karty z balíčku vrátí zpět na jeho vrch. Karty je přitom nutné vykládat i vracet po jedné, aby zůstalo zachováno jejich pořadí.

Následně se vezme vrchní karta z hromádky na stole a odloží se stranou. Na pořadí zbylých karet na stole již nezáleží. Po vrácení těchto karet zpět na balíček se připravená karta nachází na deváté pozici.

Pokud jsou čtyři esa předem umístěna na pozicích 9 až 12 v balíčku, budou při opakování tohoto postupu postupně odhalena (Gardner, 1956, s. 20).

### **3.1.6. Didaktická analýza aktivity**

Aktivita využívá princip překvapení, který může u žáků vyvolat kognitivní konflikt mezi očekávaným a skutečným výsledkem. Žáci často předpokládají, že výsledek je náhodný nebo souvisí s manipulací s kartami. Ve skutečnosti je však celý postup založen na matematické vlastnosti dvouciferných čísel.

Didaktický potenciál aktivity spočívá v přechodu od konkrétní manipulační činnosti k matematickému zobecnění. Žáci nejprve pozorují konkrétní případy, zapisují výsledky a hledají společné znaky. Následně je zaveden matematický vztah, který pozorovanou pravidelnost vysvětluje.

Aktivita rozvíjí zejména: – rozpoznávání pravidelností, – formulaci hypotéz, – ověřování hypotéz, – zobecňování matematického vztahu.

Z hlediska výuky může být demonstrace využita jako motivační úloha při zavádění tématu dělitelnosti devíti nebo jako problémová úloha vedoucí k matematickému zobecnění.

### **3.1.7. Propojení s metodickými pokyny pro učitele**

Metodické listy doporučují začít aktivitu samotným předvedením triku bez okamžitého matematického vysvětlení. Žáci tak nejprve pozorují výsledek a mohou formulovat vlastní hypotézy o tom, proč postup vede k nalezení es v balíčku.

V další fázi mohou žáci experiment opakovat s různými čísly mezi 10 a 19 a zapisovat jednotlivé kroky postupu. V tabulce mohou zaznamenávat zvolené číslo, součet jeho cifer a výslednou hodnotu získanou odečtením součtu cifer od původního čísla. Na základě těchto pozorování mohou postupně odhalit pravidelnost, že rozdíl mezi číslem a součtem jeho cifer je vždy dělitelný devíti.

Následně lze přejít k matematickému zobecnění. Učitel může společně se žáky zapsat dvouciferné číslo ve tvaru

$$10a + b$$

a ukázat, že

$$(10a + b) - (a + b) = 9a$$

Tím se konkrétní manipulativní situace převádí do obecného matematického vztahu. Aktivita tak podporuje přechod od experimentování s konkrétní situací k formulaci obecného matematického pravidla.

### **3.1.8. Možné obtíže žáků**

Nejasné porozumění cifernému součtu – někteří žáci mohou mít potíže se správným určením součtu cifer.

Vnímání výsledku jako náhody – žáci mohou předpokládat, že výsledek je způsoben manipulací s kartami. Pomáhá opakování experimentu s různými čísly.

Obtíže při zobecnění – přechod od konkrétních čísel k algebraickému zápisu může být pro některé žáky náročný.

### **3.1.9. Možnosti diferenciac**

Jednodušší varianta: Žáci pracují pouze s konkrétními čísly mezi 10 a 19 a zapisují výsledky do tabulky. Společně hledají společnou vlastnost výsledků.

Náročnější varianta: Dvouciferné číslo lze zapsat ve tvaru

$$10a + b$$

kde  $a$  představuje desítky a  $b$  jednotky.

Poté platí:

$$(10a + b) - (a + b) = 9a$$

Žáci tak mohou vysvětlit, proč je výsledek vždy násobkem devíti.

### **3.1.10. Didaktický přínos aktivity**

Aktivita propojuje manipulativní činnost s matematickou analýzou. Překvapivý výsledek zvyšuje pozornost žáků a vytváří situaci, která vede k formulaci otázky „proč“. Tento moment může být výchozím bodem pro hlubší analýzu matematického principu.

Úloha podporuje experimentování, hledání pravidelností a formulaci matematického vysvětlení. Přispívá tak k rozvoji matematického myšlení a přechodu od konkrétní zkušenosti k abstraktnímu matematickému modelu.

## **3.2. Mathematical Finder**

Kouzelník zahájí trik tím, že na papír napíše předpověď karty, která bude na konci triku odhalena.

Použije balíček 52 karet a začne obracet karty lícem nahoru na stůl. Při tom nahlas odpočítává od deseti k nule. Pokud číselná hodnota otočené karty odpovídá právě vyslovenému číslu, přestane na danou hromádku pokládat další karty a začne vytvářet novou hromádku.

Pokud se během odpočítávání žádná karta neshoduje s vysloveným číslem, položí se při vyslovení čísla nula na hromádku karta rubem vzhůru.

Postup se opakuje, dokud nevzniknou čtyři hromádky.

Na závěr se sečtou hodnoty karet na vrchu jednotlivých hromádek. Kouzelník následně odebere z nevyužité části balíčku počet karet odpovídající tomuto součtu. Karta na vrchu zbývajících balíčku je vždy shodná s kartou uvedenou v předpovědi.

Karty s figurami (J, Q, K) mohou být při počítání ignorovány, mohou mít přiřazenu hodnotu 10 nebo si diváci mohou před začátkem triku zvolit vlastní číselné hodnoty. (Scarne, 2013, s. 55–56)

### **3.2.1. Název aktivity**

Mathematical Finder – karetní předpověď

### **3.2.2. Zařazení dle RVP ZV**

Vzdělávací oblast: Matematika a její aplikace

Tematické okruhy: – Číslo a proměnná – Závislosti, vztahy a práce s daty – Nestandardní aplikační úlohy (MŠMT, 2023)

### **3.2.3. Doporučený ročník**

7.–9. ročník základní školy

### 3.2.4. Vzdělávací cíle

Žák: analyzuje vztahy mezi veličinami, využívá algebraický zápis k popisu situace, vysvětluje matematickou strukturu postupu.

### 3.2.5. Matematické vysvětlení principu

Princip triku vychází ze vztahu mezi počtem karet v jednotlivé hromádce a hodnotou karty, která se nachází na jejím vrchu. Pro každou hromádku platí vztah

$$x + y = 11$$

kde  $x$  označuje počet karet v hromádce a  $y$  označuje hodnotu vrchní karty.

Součet počtu karet v hromádce a hodnoty vrchní karty je tedy vždy konstantní. Například pokud je na vrchu hromádky karta s hodnotou 6, znamená to, že v hromádce je 5 karet. Pokud je na vrchu karta s hodnotou 3, obsahuje hromádka 8 karet.

Protože se při triku vytvoří čtyři hromádky, obsahují dohromady vždy  $4 \times 11 = 44$  karet. Při použití standardního balíčku o 52 kartách tak po vytvoření hromádek zbývá  $52 - 44 = 8$  karet. Po sečtení hodnot vrchních karet hromádek kouzelník odebere z těchto zbývajících karet odpovídající počet karet. Na vrchu balíčku tak vždy zůstane karta, která byla na 45. místě.

Matematický princip triku je založen na zachování konstantního součtu  $x + y = 11$ , který určuje celkový počet karet použitých při vytváření hromádek. (Scarne, 2013).

### 3.2.6. Didaktická analýza aktivity

Žáci pozorují postupné vytváření hromádek a mohou mít dojem, že jejich velikost závisí pouze na náhodném pořadí karet. Ve skutečnosti je však průběh aktivity determinován jednoduchým matematickým vztahem.

Didaktický potenciál aktivity spočívá v tom, že umožňuje postupný přechod od konkrétní manipulace s kartami k abstraktnímu matematickému modelu. Žáci mohou analyzovat jednotlivé hromádky, zapisovat počet karet a hodnotu vrchní karty a hledat mezi nimi pravidelnost.

Aktivita podporuje zejména: – rozpoznávání matematických vztahů mezi veličinami, – formulaci hypotéz na základě pozorovaných výsledků, – ověřování těchto hypotéz na dalších případech, – vytvoření algebraického modelu popisujícího danou situaci.

Z hlediska výuky může být úloha využita jako motivační úloha při zavádění práce s proměnnou nebo při výuce lineárních vztahů.

### 3.2.7. Propojení s metodickými pokyny pro učitele

Metodické listy doporučují začít aktivitu samotným předvedením postupu bez vysvětlení matematického principu. Žáci tak nejprve pozorují výsledek a mohou formulovat vlastní hypotézy o tom, proč aktivita funguje.

Následně mohou analyzovat jednotlivé hromádky a zapisovat jejich vlastnosti do tabulky. Postupně lze zavést proměnné  $x$  (počet karet v hromádce) a  $y$  (hodnota vrchní karty) a společně se třídou odvodit vztah  $x + y = 11$ . Tím se konkrétní manipulativní situace převádí do matematického modelu.

Tento postup odpovídá principům badatelsky orientované výuky, kdy žáci nejprve experimentují s konkrétní situací a teprve následně formulují obecný matematický vztah.

### 3.2.8. Možné obtíže žáků

Žáci mohou mít potíže s pochopením vztahu mezi počtem karet v hromádce a hodnotou vrchní karty. Na první pohled se může zdát, že velikost hromádky je náhodná.

Další obtíží může být přechod od konkrétní manipulace s kartami k algebraickému zápisu vztahu  $x + y = 11$ . Někteří žáci mohou tento vztah vnímat pouze jako výsledek výpočtu, nikoli jako obecné pravidlo popisující strukturu aktivity.

### 3.2.9. Možnosti diferenciac

Jednodušší varianta: Žáci pracují s konkrétními hromádkami a zapisují počet karet a hodnotu vrchní karty do tabulky. Společně hledají pravidelnost mezi těmito hodnotami.

Náročnější varianta: Žáci mohou zkoumat, jak by se postup změnil při jiném počátečním čísle, například při počítání od 12 nebo od 8. Mohou také analyzovat, jak by se změnila pozice předpovězené karty při jiném počtu vytvořených hromádek nebo navrhnout obdobný trik pro balíček 32 karet.

### 3.2.10. Didaktický přínos aktivity

Aktivita propojuje manipulativní činnost s matematickou analýzou. Překvapivý výsledek může zvýšit motivaci žáků a vést je k hledání vysvětlení.

Žáci mají možnost pozorovat konkrétní situaci, formulovat hypotézy a následně vytvořit matematický model popisující průběh aktivity. Tento postup podporuje rozvoj algebraického myšlení a schopnost popisovat vztahy mezi veličinami pomocí symbolického zápisu.

### **3.3. Twenty Plus**

Na začátku si divák z balíčku 52 karet tajně vezme libovolný počet karet, maximálně však dvacet.

Kouzelník následně začne z balíčku pokládat karty lícem vzhůru na stůl a postupně je počítá. Divák si přitom zapamatuje kartu odpovídající pořadí počtu karet, které si na začátku vzal. Například pokud si divák vzal pět karet, zapamatuje si pátou kartu, kterou kouzelník vyloží na stůl.

Jakmile je na stole vyloženo dvacet karet, kouzelník požádá diváka, aby řekl libovolné číslo do deseti. Na základě tohoto čísla přidá na hromádku na stole odpovídající počet dalších karet z balíčku.

Poté kouzelník vezme hromádku karet na stole a obrátí ji rubem nahoru. Zbývající karty z balíčku položí na tuto hromádku.

Kouzelník následně vezme celý balíček, drží jej rubem vzhůru a začne jej postupně prolisťovat. Jakmile narazí na kartu, kterou si divák zapamatoval, otočí ji a ukáže divákovi. (Longe, 2004, s. 62–64)

#### **3.3.1. Název aktivity**

Najdi zapamatovanou kartu

#### **3.3.2. Zařazení dle RVP ZV**

Vzdělávací oblast: Matematika a její aplikace

Tematické okruhy: – Číslo a proměnná – Nestandardní aplikační úlohy

(MŠMT, 2023)

#### **3.3.3. Doporučený ročník**

7.–9. ročník základní školy

#### **3.3.4. Vzdělávací cíle**

Žák: – analyzuje matematickou strukturu postupů, – používá algebraický zápis k vysvětlení situace.

### 3.3.5. Matematické vysvětlení principu

Označme  $x$  počet karet, které si divák na začátku odebral z balíčku. Karta, kterou si divák zapamatuje, se nachází na  $x$ -té pozici mezi dvaceti kartami vyloženými na stole.

Po vyložení dvaceti karet zůstává v balíčku

$$32 - x$$

karet.

Divák poté zvolí číslo  $y$  (nejvýše 10) a kouzelník přidá na hromádku na stole odpovídající počet karet. V balíčku mu tedy zůstává

$$32 - x - y$$

karet.

Následně kouzelník obrátí hromádku karet na stole rubem nahoru a položí na ni zbytek balíčku. Tím se změní pořadí karet. Zapamatovaná karta se nyní nachází na pozici

$$32 - x + x - y$$

což se zjednoduší na

$$32 - y$$

Pozice zapamatované karty tedy nezávisí na počtu původně odebraných karet  $x$ , ale pouze na čísle  $y$ , které divák zvolil.

Kouzelník proto může jednoduše vypočítat novou pozici karty odečtením čísla  $y$  od 32. Pokud například divák zvolí číslo 7, nachází se zapamatovaná karta na pozici

$$32 - 7 = 25$$

Kouzelník poté prolistuje balíček rubem vzhůru a otočí kartu na této pozici.

### 3.3.6. Didaktická analýza aktivity

Aktivita využívá postup, který na první pohled působí složitě a náhodně. Ve skutečnosti je však možné celý proces popsat jednoduchým algebraickým vztahem. Tento kontrast mezi zdánlivou složitostí postupu a jednoduchostí matematického vysvětlení může u žáků vyvolat zájem a motivaci hledat princip fungování.

Didaktický potenciál aktivity spočívá v postupném převodu konkrétní manipulace s kartami do matematického modelu. Žáci mohou sledovat jednotlivé kroky postupu, analyzovat změny v pořadí karet a hledat vztah mezi provedenými operacemi a výslednou pozicí zapamatované karty.

Aktivita podporuje zejména: – schopnost analyzovat postup krok za krokem, – formulaci matematického modelu situace, – práci s proměnnými při popisu vztahů mezi veličinami, – uvědomění si, že některé veličiny nemají na výsledek vliv.

Z hlediska výuky může být úloha využita při zavádění algebraického modelování nebo při diskusi o tom, jak lze složitý postup popsat jednoduchým matematickým vztahem.

### **3.3.7. Propojení s metodickými pokyny pro učitele**

Metodický postup doporučuje nejprve aktivitu předvést bez matematického vysvětlení. Žáci tak mohou sledovat jednotlivé kroky a pokusit se formulovat vlastní hypotézy o tom, jak by mohl být výsledek určen.

V další fázi mohou žáci analyzovat jednotlivé kroky postupu a pokusit se určit, jak se mění pozice zapamatované karty. Postupně lze zavést proměnné  $x$  (počet odebraných karet) a  $y$  (zvolené číslo) a společně se třídou odvodit vztah určující konečnou pozici karty.

Tento postup vede od konkrétní manipulativní zkušenosti k algebraickému modelu a odpovídá principům badatelsky orientované výuky.

### **3.3.8. Možné obtíže žáků**

Žáci mohou mít obtíže se sledováním změn v pořadí karet během jednotlivých kroků postupu. Pro některé může být náročné představit si, jak se karta přesouvá v balíčku.

Další obtíží může být pochopení toho, že konečná pozice karty nezávisí na počtu odebraných karet  $x$ . Tento fakt může být pro žáky překvapivý a vyžaduje pečlivé vysvětlení pomocí konkrétních příkladů.

### **3.3.9. Možnosti diferenciac**

Jednodušší varianta: Žáci mohou trik vyzkoušet bez hodnoty  $y$ , kdy divák vybírá další číslo od 1 do 10. Tento prvek může být matoucí a pokud se vynechá, tak vybraná karta bude vždy na 32. pozici.

Náročnější varianta: Žáci mohou vytvořit vlastní algebraický model celé situace a ověřit jej na konkrétních příkladech. Mohou také diskutovat, proč konečná pozice karty nezávisí na počtu odebraných karet.

### **3.3.10. Didaktický přínos aktivity**

Aktivita ukazuje, že i zdánlivě složitý postup může být vysvětlen pomocí jednoduchého matematického modelu. Žáci mají možnost sledovat konkrétní manipulativní situaci a následně ji převést do algebraického zápisu.

Takový postup podporuje rozvoj algebraického myšlení a schopnost analyzovat matematickou strukturu postupů. Zároveň vede žáky k uvědomění, že matematika může vysvětlit i situace, které se na první pohled zdají být náhodné nebo „kouzelné“.

## **3.4. Scarne's Miracle Card-Finder**

Trik Scarne's Miracle Card-Finder spočívá v tom, že divák nakonec sám nalezne kartu, kterou kouzelník před začátkem triku tajně určil a zapsal na papír.

Divák nejprve zamíchá balíček karet a vybere z něj libovolný počet karet, se kterými bude trik provádět. Tyto karty jsou odděleny od zbytku balíčku. Kouzelník si jednu z nich napíše jako předpověď.

Následně divák začne s vybranými kartami provádět jednoduchý postup. Postupně bere karty z vrchu malé hromádky, jednu kartu položí na stůl a následující kartu přesune na spodek hromádky v ruce.

Tento postup se opakuje, dokud divákovi v ruce nezůstane pouze jedna karta.

Na závěr kouzelník odhalí kartu, kterou měl předem napsanou na papíře. Ukáže se, že tato karta je shodná s kartou, která divákovi zůstala v ruce. (Scarne, 2013, s. 237–239)

### **3.4.1. Název aktivity**

Najdi předpovězenou kartu

### **3.4.2. Zařazení dle RVP ZV**

Vzdělávací oblast: Matematika a její aplikace

Tematické okruhy: – Číslo a proměnná – Nestandardní aplikační úlohy (MŠMT, 2023)

### **3.4.3. Doporučený ročník**

8.–9. ročník základní školy

#### 3.4.4. Vzdělávací cíle

Žák: – analyzuje opakující se postup, – vysvětluje matematickou strukturu algoritmu.

#### 3.4.5. Matematické vysvětlení principu

Postup aktivity odpovídá známému problému postupného vyřazování každého druhého prvku, který je v matematice označován jako Josephův problém.

Při provádění triku se vždy jedna karta odloží na stůl a následující karta se přesune na spodek hromádky. Z hlediska pořadí karet to znamená, že postupně „přežívají“ pouze karty na sudých pozicích. Po jednom průchodu tedy zůstane přibližně polovina původního počtu karet.

Pokud by byl počet karet přesně mocninou dvojky (například 8, 16 nebo 32), postupným vyřazováním každé druhé karty by vždy nakonec zůstala karta na poslední pozici této mocniny dvojky.

V praxi však počet karet často není přesně mocninou dvojky. Označme počet karet  $n$ . Nejprve určíme nejbližší nižší mocninu dvojky

$$2^k$$

Rozdíl

$$(n - 2^k)$$

představuje počet „nadbytečných“ karet, které přesahují tuto mocninu dvojky. Tyto karty způsobují posunutí pořadí při postupném vyřazování.

Každá z těchto nadbytečných karet posune výslednou pozici o dvě místa, protože při postupu je vždy jedna karta odložena a následující karta přesunuta na spodek balíčku. Proto se tento rozdíl násobí dvěma. V našem případě to znamená, že poslední z nadbytečných karet je při postupu vyřazena a karta, která po ní následuje, je přesunuta na spodek balíčku. Tím se ocitne na pozici, která odpovídá poslednímu místu nejbližší nižší mocniny čísla dvě.

Pozice výsledné karty je tedy dána vztahem

$$2(n - 2^k)$$

Například pokud divák zvolí  $n = 23$  karet, nejbližší nižší mocnina dvojky je

$$2^4 = 16$$

Poté platí

$$23 - 16 = 7$$

a

$$2 \times 7 = 14$$

Karta, která na konci zůstane divákovi v ruce, byla tedy původně na čtrnácté pozici v balíčku

### **3.4.6. Didaktická analýza aktivity**

Aktivita je založena na opakujícím se algoritmickém postupu, při němž se systematicky vyřazuje každý druhý prvek. Na první pohled může proces působit jako náhodný, avšak ve skutečnosti má přesně definovanou matematickou strukturu.

Didaktický potenciál aktivity spočívá v analýze opakujících se kroků a v hledání pravidelnosti v průběhu procesu. Žáci mohou sledovat, jak se postupně mění počet karet a která karta zůstává v jednotlivých fázích poslední.

Úloha podporuje zejména: – schopnost analyzovat algoritmický postup, – hledání pravidelností v opakujících se procesech, – práci s mocninami čísla dvě, – vytváření matematického modelu popisujícího celý proces.

Z hlediska výuky lze aktivitu využít jako úvod do tématu algoritmického myšlení nebo jako příklad matematického modelování opakujícího se procesu.

### **3.4.7. Propojení s metodickými pokyny pro učitele**

Metodický postup doporučuje nejprve provést aktivitu prakticky s menším počtem karet. Žáci mohou sledovat průběh procesu a zapisovat, která karta zůstává jako poslední.

V další fázi lze výsledky jednotlivých pokusů porovnat a hledat pravidelnost. Učitel může žáky vést k tomu, aby si všimli souvislosti mezi počtem karet a mocninami čísla dvě.

Teprve poté je možné zavést obecný matematický vztah určující pozici poslední karty. Tím se konkrétní manipulativní situace převádí do matematického modelu.

### **3.4.8. Možné obtíže žáků**

Žáci mohou mít obtíže se sledováním jednotlivých kroků procesu, zejména pokud je počet karet větší. Pro některé může být náročné představit si průběh algoritmu bez konkrétní manipulace s kartami.

Další obtíží může být pochopení vztahu mezi výsledkem a mocninami čísla dvě. Tento vztah je vhodné nejprve ukázat na konkrétních příkladech.

### 3.4.9. Možnosti diferenciacie

Jednodušší varianta: Žáci mohou karty vyložit a všimnout si počtů karet, pro které je snadné určit výsledek.

Náročnější varianta: Žáci mohou zkoumat, zda existuje obecné pravidlo, které umožňuje určit pozici poslední karty bez provedení celého postupu. Mohou například analyzovat výsledky pro různé počty karet a pokusit se formulovat vztah mezi počtem karet a pozicí poslední karty.

Další možností je navrhnout jiný algoritmus výběru karet (například vyřazování každé třetí karty nebo změnu způsobu přesouvání karet) a zkoumat, jak se při těchto změnách mění výsledná pozice poslední karty.

### 3.4.10. Didaktický přínos aktivity

Aktivita propojuje manipulativní činnost s analýzou algoritmu. Žáci mají možnost sledovat konkrétní proces a následně jej popsat pomocí matematického modelu.

Takový postup podporuje rozvoj logického a algoritmického myšlení. Zároveň ukazuje, že matematika může vysvětlit strukturu opakujících se procesů a umožňuje předpovědět jejich výsledek.

## 3.5. Cyclic Number

Kouzelník má šest černých karet s hodnotami A, 4, 2, 8, 5, 7. V tomto pořadí je vyloží na stůl. Divák si hodí kostkou a dejme tomu, že mu padne číslo 4. Poté dostane papír a tužku a má za úkol vynásobit číslo 142857 (A představuje číslici 1) číslem, které mu padlo na kostce. V uvedeném příkladu tedy počítá  $142857 \times 4$ .

Výsledek výpočtu je

$$142857 \times 4 = 571428$$

Zatímco divák provádí výpočet, kouzelník vezme šest černých karet, jednou je snímne (rozdělí balíček a zamění pořadí obou částí) a položí je na stůl lícem dolů.

Po dokončení výpočtu kouzelník postupně otočí jednotlivé černé karty. Ukáže se, že vytvářejí číslo odpovídající výsledku divákova výpočtu. V uvedeném příkladu karty vytvoří číslo 571428. Tedy jsou vyloženy po jedné přesně v pořadí 5, 7, A, 4, 2 a 8. (Gardner, 1956)

### 3.5.1. Název aktivity

Cyklické číslo 142857

### 3.5.2. Zařazení dle RVP ZV

Vzdělávací oblast: Matematika a její aplikace

Tematické okruhy: – Číslo a proměnná – Nestandardní aplikační úlohy (MŠMT, 2023)

### 3.5.3. Doporučený ročník

8.–9. ročník základní školy

### 3.5.4. Vzdělávací cíle

Žák: – rozpoznává pravidelnosti v číselných strukturách, – vysvětluje vlastnosti periodických desetinných rozvoju.

### 3.5.5. Matematické vysvětlení principu

Trik je založen na vlastnostech tzv. cyklického čísla 142857. Toto číslo vzniká jako perioda desetinného rozvoje zlomku

$$1/7 = 0,142857142857\dots$$

Perioda tohoto desetinného rozvoje obsahuje šest číslic. Číslo 142857 má zvláštní vlastnost: při násobení čísly od 1 do 6 vznikají vždy pouze cyklické posuny jeho cifer. Číslice se tedy nemění, pouze se posouvají v pořadí.

Například:

$$142857 \times 1 = 142857$$

$$142857 \times 2 = 285714$$

$$142857 \times 3 = 428571$$

$$142857 \times 4 = 571428$$

$$142857 \times 5 = 714285$$

$$142857 \times 6 = 857142$$

Ve všech případech vzniká stejné uspořádání číslic, pouze začínající na jiném místě v cyklu.

Tato vlastnost souvisí s periodickým desetinným rozvojem zlomku  $\frac{1}{7}$  a s vlastnostmi cyklických čísel v desítkové soustavě. V karetním triku jsou jednotlivé číslice reprezentovány

kartami. Přesunutím části balíčku (snímnutím) dojde k cyklickému posunu pořadí karet, který odpovídá cyklickému posunu číslic ve výsledku násobení.

Trik tak využívá vlastnost cyklických čísel k vytvoření zdánlivě překvapivého výsledku, který je ve skutečnosti určen matematickou strukturou čísla 142857

### 3.5.6. Didaktická analýza aktivity

Aktivita představuje příklad zajímavé číselné struktury, která může u žáků vyvolat překvapení a motivovat je k hledání vysvětlení. Na první pohled se může zdát, že vznikající čísla jsou náhodná, avšak při bližším zkoumání je patrná pravidelnost v jejich uspořádání.

Didaktický potenciál aktivity spočívá v tom, že žáci mohou postupně objevovat cyklický charakter vznikajících čísel. Porovnáváním jednotlivých výsledků si mohou všimnout, že všechny obsahují stejné číslice, pouze v jiném pořadí.

Úloha podporuje zejména: – rozpoznávání pravidelností v číselných strukturách, – formulaci hypotéz o příčinách pozorovaného jevu, – hledání matematického vysvětlení pravidelnosti, – propojení aritmetiky s prvky teorie čísel.

Z hlediska výuky může být demonstrace využita jako motivační nebo závěrečná úloha, která ukazuje, že i v běžných číslech mohou existovat překvapivé matematické vlastnosti.

### 3.5.7. Propojení s metodickými pokyny pro učitele

Metodický postup doporučuje začít aktivitu bez předchozího vysvětlení matematického principu. Žáci nejprve pozorují výsledek triku a mohou se pokusit formulovat vlastní vysvětlení toho, proč výsledek násobení odpovídá pořadí karet.

Pokud se žákům nepodaří pravidelnost odhalit, může učitel navrhnout systematictější postup. Žáci mohou vypočítat několik násobků čísla 142857 a zapisovat výsledky do tabulky. Následně mohou jednotlivé výsledky porovnávat a hledat jejich společné vlastnosti.

V další fázi může učitel diskusi směřovat k otázce, proč všechny výsledky obsahují stejné číslice v různém pořadí. Aktivitu lze následně propojit s desetinným rozvojem zlomku  $\frac{1}{7}$  a ukázat, že číslo 142857 tvoří periodu tohoto rozvoje.

Tím se původně překvapivý výsledek postupně vysvětlí pomocí matematického principu.

### **3.5.8. Možné obtíže žáků**

Žáci mohou mít potíže s rozpoznáním cyklické struktury vznikajících čísel. Pro některé může být obtížné všimnout si, že se jedná o stejné číslice pouze v jiném pořadí.

Další obtíží může být pochopení souvislosti mezi číslem 142857 a desetinným rozvojem zlomku  $1/7$ . Tento vztah je vhodné vysvětlit pomocí konkrétních výpočtů.

### **3.5.9. Možnosti diferenciac**

Jednodušší varianta: Žáci pracují pouze s násobky čísla 142857 a hledají pravidelnosti ve vznikajících číslech.

Náročnější varianta: Žáci mohou zkoumat vlastnosti dalších periodických desetinných rozvojų a porovnávat jejich strukturu. Mohou například analyzovat periodu zlomku  $1/13$  nebo jiných zlomků.

### **3.5.10. Didaktický přínos aktivity**

Aktivita ukazuje, že matematika může odhalovat zajímavé a překvapivé vlastnosti čísel. Žáci mají možnost objevovat pravidelnosti a hledat jejich vysvětlení.

Takový postup podporuje rozvoj matematické zvědavosti a schopnost analyzovat číselné struktury. Úloha zároveň propojuje aritmetiku s hlubšími matematickými souvislostmi, které se objevují v teorii čísel.

## **3.6. Shrnutí praktické části**

Praktická část práce představila soubor didaktických aktivit založených na matematických principech, které se objevují v některých karetních tricích. Jednotlivé úlohy ukazují, že zdánlivě překvapivé výsledky jsou ve skutečnosti důsledkem přesně definovaných matematických vztahů.

Didaktický význam těchto aktivit spočívá především v tom, že vytvářejí situace, které přirozeně vedou k matematickému zkoumání. Překvapivý efekt zde funguje jako motivace k hledání pravidelností a k formulaci matematického vysvětlení pozorovaných jevů.

Navržené pracovní listy tak představují jeden z možných způsobů, jak propojit matematické poznatky s aktivní činností žáků a podpořit rozvoj matematického myšlení v souladu s cíli současného matematického vzdělávání (MŠMT, 2023).

## Závěr

Tato bakalářská práce se zabývala možnostmi využití matematických principů objevujících se v karetních tricích ve výuce matematiky na základní škole. Hlavním cílem práce bylo navrhnout soubor pracovních listů a didaktických aktivit, které využívají překvapivý efekt karetního triku jako motivaci k matematickému uvažování, a zároveň tyto aktivity didakticky zdůvodnit.

V teoretické části práce byla nejprve představena východiska související s motivací ve výuce matematiky, aktivizujícími metodami a problémově orientovaným vyučováním. Pozornost byla věnována také procesu přechodu od konkrétní situace k matematickému modelu a významu zobecnování při utváření matematického porozumění. Tyto teoretické přístupy vytvářejí rámec pro využití překvapivých situací ve výuce jako podnětu k matematickému zkoumání.

Praktická část práce představila soubor pěti didaktických aktivit založených na matematických principech využívaných v karetních tricích. Jednotlivé úlohy byly navrženy tak, aby umožňovaly postupný přechod od konkrétní manipulativní situace k matematickému vysvětlení založenému na aritmetických nebo algebraických vztazích. Aktivity jsou zpracovány ve formě pracovních listů doplněných metodickými poznámkami pro učitele, didaktickou analýzou a návrhy diferenciací výuky.

Navržené aktivity ukazují, že matematické principy mohou být žákům představovány prostřednictvím situací, které jsou zároveň překvapivé i didakticky podnětné. Překvapivý efekt zde neplní pouze roli motivace, ale vytváří situaci, která přirozeně vede k formulaci otázky po matematickém vysvětlení daného jevu.

Přínos práce spočívá především v návrhu konkrétních výukových materiálů, které mohou učitelé využít při výuce matematiky na druhém stupni základní školy. Tyto materiály ukazují jeden z možných způsobů, jak propojit matematické poznatky s aktivní činností žáků a podpořit rozvoj matematického myšlení v souladu s cíli současného matematického vzdělávání.

Úlohy představují pouze jeden z možných způsobů využití matematických principů karetních triků ve výuce. Další rozvoj tohoto přístupu by mohl spočívat například v jeho experimentálním ověření ve školní praxi nebo v rozšíření souboru aktivit o další matematická témata.

## Seznam použité literatury

ASHCRAFT, Mark H. a Jeremy A. KRAUSE. *Working memory, math performance, and math anxiety*. *Psychonomic Bulletin & Review*. 2007, roč. 14, č. 2, s. 243–248. DOI: <https://doi.org/10.3758/BF03194059>

BLUM, Werner a Dominik LEISS. *How do students and teachers deal with modelling problems?* In: HAINES, Chris; GALBRAITH, Peter; BLUM, Werner a KHAN, Sanowar (eds.). *Mathematical Modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics*. Chichester: Horwood Publishing, 2007, s. 222–231. DOI: <https://doi.org/10.1533/9780857099419.5.221>

DECI, Edward L. a Richard M. RYAN. *Intrinsic and extrinsic motivations: Classic definitions and new directions*. *Contemporary Educational Psychology*. 2000, roč. 25, č. 1, s. 54–67. DOI: <https://doi.org/10.1006/ceps.1999.1020>

DWECK, Carol S. *Mindset: The New Psychology of Success*. New York: Random House, 2006. ISBN 978–1–4000–6275–1.

GARDNER, Martin. *Mathematics, Magic and Mystery*. New York: Dover Publications, 1956. ISBN 978–0–486–20335–5.

HEJNÝ, Milan. *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně*. 1. vyd. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2014. ISBN 978-80-7290-776-2.

HEMBREE, Ray. *The nature, effects, and relief of mathematics anxiety*. *Journal for Research in Mathematics Education*. 1990, roč. 21, č. 1, s. 33–46. DOI: <https://doi.org/10.2307/749455>

HIDI, Suzanne a K. Ann RENNINGER. *The four-phase model of interest development*. *Educational Psychologist*. 2006, roč. 41, č. 2, s. 111–127. DOI: [https://doi.org/10.1207/s15326985ep4102\\_4](https://doi.org/10.1207/s15326985ep4102_4)

HMELO–SILVER, Cindy E.; DUNCAN, R. G. a CHINN, Clark A. *Scaffolding and achievement in problem-based and inquiry learning*. *Educational Psychologist*. 2007, roč. 42, č. 2, s. 99–107. DOI: <https://doi.org/10.1080/00461520701263368>

KALHOUS, Zdeněk a Otto OBST. Školní didaktika. 2., přepracované vyd. Praha: Portál, 2009. ISBN 978–80–7367–571–4.

LOEWENSTEIN, George. *The psychology of curiosity: A review and reinterpretation*. Psychological Bulletin. 1994, roč. 116, č. 1, s. 75–98. DOI: <https://doi.org/10.1037/0033-2909.116.1.75>

LONGE, Bob. *Karetní kouzla*. Praha: Knižní klub, 2004. ISBN 80–242–1269–2.

MAŇÁK, Josef a Vlastimil ŠVEC. *Výukové metody*. Brno: Paido, 2003. ISBN 80–7315–039–5.

MAREŠ, Jiří. *Pedagogická psychologie*. Praha: Portál, 2013. ISBN 978–80–262–0174–8.

MEYER, Wulf-Uwe; REISENZEIN, Rainer a SCHÜTZWOHL, Achim. *Toward a process analysis of emotions: The case of surprise*. Motivation and Emotion. 1997, roč. 21, č. 3, s. 251–274. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1024422330338>.

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY. *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání*. Online. Praha: MŠMT, 2023. Dostupné z: <https://www.edu.cz/rvp-2023/> [citováno 2026-03-16].

PETTY, Geoff. *Moderní vyučování*. 5. vyd. Praha: Portál, 2013. ISBN 978–80–262–0367–4.

PIAGET, Jean. *Psychology and Epistemology: Towards a Theory of Knowledge*. New York: Viking Press, 1970.

POLYA, George. *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*. Princeton: Princeton University Press, 2014. ISBN 978–0–691–16407–6.

POSNER, George J.; STRIKE, Kenneth A.; HEWSON, Peter W. a GERTZOG, William A. *Accommodation of a scientific conception: Toward a theory of conceptual change*. Science Education. 1982, roč. 66, č. 2, s. 211–227. DOI: <https://doi.org/10.1002/sce.3730660207>

PRŮCHA, Jan; WALTEROVÁ, Eliška a MAREŠ, Jiří. *Pedagogický slovník*. 7., aktualizované a rozšířené vyd. Praha: Portál, 2013. ISBN 978–80–262–0403–9.

RYAN, Richard M. a DECI, Edward L. *Self-determination theory: Basic psychological needs in motivation, development, and wellness*. New York: Guilford Press, 2017. ISBN 978-1-4625-2876-9.

SCARNE, John. *Scarne on Card Tricks*. Mineola: Dover Publications, 2013. ISBN 978-0-486-31715-1.

SCHOENFELD, Alan H. *Mathematical Problem Solving*. Orlando: Academic Press, 1985. ISBN 0-12-628870-9.

SKALKOVÁ, Jarmila. *Obecná didaktika. 2., rozšířené a aktualizované vyd.* Praha: Grada, 2007. ISBN 978-80-247-1821-7.

VÝZKUMNÝ ÚSTAV PEDAGOGICKÝ V PRAZE. *Rámcový vzdělávací program pro gymnázia*. Praha: VÚP, 2007.

## **PŘÍLOHY – KARETNÍ AKTIVITY VE VÝUCE MATEMATIKY**

Tato příloha obsahuje metodické listy pro učitele a pracovní listy pro žáky, které využívají principy karetní magie k objevování matematických pravidelností. Aktivity jsou určeny především pro výuku matematiky na druhém stupni základní školy a na nižším stupni gymnázia.

Navržené aktivity jsou koncipovány jako výukové situace, které žáky nejprve uvádějí do překvapivé nebo zdánlivě náhodné situace. Tento moment překvapení vytváří kognitivní konflikt, jenž podněcuje žáky k formulaci hypotéz, experimentování s různými případy a k hledání vysvětlení pozorovaného jevu.

Aktivity vycházejí z principů problémově a badatelsky orientované výuky. Prostřednictvím práce s konkrétní situací vedou žáky k postupnému odhalování matematických vztahů a k přechodu od empirického pozorování k formulaci obecného matematického pravidla.

# Příloha A – Metodický list pro učitele

---

## Čtyři esa z balíčku

### Určeno pro

5.–7. ročník základní školy

### Zařazení dle RVP ZV

Vzdělávací oblast: Matematika a její aplikace

Tematické okruhy:

- Číslo a početní operace
- Číslo a proměnná
- Nestandardní aplikační úlohy a problémy

### Matematická oblast

- součet cifer
- dělitelnost devíti
- rozpoznávání pravidelností v číslech

### Vzdělávací cíle

Žák:

- určuje součet cifer přirozeného čísla
- objevuje pravidelnosti v číslech
- analyzuje matematický princip zdánlivě náhodné situace
- formuluje vlastní hypotézy
- vysvětluje matematický princip pomocí jednoduchého algebraického zápisu

### Pomůcky

- balíček 52 karet
- pracovní list pro žáky
- tužka

Doporučeno: jeden balíček karet pro každou dvojici nebo skupinu.

## Příprava aktivity

Před zahájením aktivity učitel připraví balíček karet.

Čtyři esa musí být umístěna na 9., 10., 11. a 12. pozici od vrchu balíčku.

Zbytek balíčku může být v libovolném pořadí.

Balíček je vhodné připravit ještě před hodinou, aby si žáci nevšimli umístění es.

## Postup triku

1. Požádejte žáka, aby si zvolil libovolné číslo mezi 10 a 19.
2. Z balíčku odpočítejte odpovídající počet karet a položte je na stůl lícem dolů.
3. Spočítejte součet cifer zvoleného čísla.
4. Z vrchu hromádky na stole odeberte tolik karet, kolik je součet cifer.
5. Tyto karty po jedné položte zpět na vrch balíčku v ruce.
6. Vezměte vrchní kartu z hromádky na stole a odložte ji stranou lícem dolů.
7. Zbytek karet z hromádky vraťte zpět na balíček.
8. Postup opakujte čtyřikrát.
9. Po otočení odložených karet se objeví čtyři esa.

## Doporučený postup práce ve třídě

### 1. Motivace

Učitel nejprve trik předvede bez vysvětlení. Žáci formulují vlastní hypotézy.

### 2. Experimentování

Žáci pracují ve dvojicích nebo skupinách a postup opakují s různými čísly.

Výsledky zapisují do tabulky.

### 3. Hledání pravidelnosti

Žáci zjistí, že vždy platí:

číslo – součet cifer = 9.

#### 4. Matematické vysvětlení

Dvouciferné číslo lze zapsat ve tvaru:

$$10a + b$$

Součet cifer:

$$a + b$$

Rozdíl:

$$(10a + b) - (a + b) = 9a$$

Výsledek je tedy vždy násobkem devíti.

U čísel mezi 10 a 19 je  $a = 1$ , proto je výsledek vždy 9.

#### Možné obtíže žáků

- obtíže se správným určením součtu cifer
- vnímání výsledku jako náhody
- obtíže při přechodu k algebraickému zobecnění

#### Možnosti diferenciac

Zjednodušení:

- pracovat pouze s několika konkrétními čísly
- zaměřit se pouze na pozorování výsledků

Náročnější varianta:

- odvodit obecný vztah  $(10a + b) - (a + b) = 9a$
- zkoumat další dvouciferná čísla
- propojit aktivitu s pravidlem dělitelnosti devíti

#### Didaktický přínos aktivity

Aktivita propojuje manipulativní činnost s matematickou analýzou.

Překvapivý výsledek vede žáky k otázce „proč“. Následná diskuse podporuje formulaci hypotéz, jejich ověřování a matematické zobecnění.

Aktivita rozvíjí:

- experimentování
- hledání pravidelností
- matematickou argumentaci
- přechod od konkrétní situace k abstraktnímu modelu.

# Pracovní list pro žáky

---

## Čtyři esa z balíčku

### 1. Pozorování

Učitel předvede karetní trik.

Po jeho provedení odpověz na otázky:

Co se podle tebe stalo?

.....

Proč se podle tebe objevila právě esa?

.....

Myslíš si, že je výsledek náhoda? Proč?

.....

### 2. Vyzkoušej trik

Pracujte ve dvojicích. Použijte balíček karet.

1. Jeden z vás si zvolí číslo mezi 10 a 19.
2. Druhý provede postup s kartami.
3. Sledujte, jaký výsledek vyjde.

### 3. Zapiš výsledky

Zvolené číslo

Součet cifer

Rozdíl (číslo – součet cifer)

### 4. Hledej pravidelnost

Jaké číslo vychází ve sloupci rozdíl?

.....

Platí to pro všechna čísla mezi 10 a 19?

.....

### **5. Pokus o vysvětlení**

Zkus vlastními slovy vysvětlit, proč trik funguje.

.....

.....

### **6. Výzva pro zvědavé**

Každé dvouciferné číslo můžeme zapsat ve tvaru  $10a + b$ .

Součet jeho cifer je  $a + b$ .

Co vyjde, když tyto výrazy odečteme?

.....

# Příloha B – Metodický list pro učitele

---

## Mathematical Finder – karetní předpověď

### Určeno pro

7.–9. ročník základní školy

### Zařazení dle RVP ZV

Vzdělávací oblast: Matematika a její aplikace

Tematické okruhy:

- Číslo a proměnná
- Závislosti, vztahy a práce s daty
- Nestandardní aplikační úlohy a problémy

### Matematická oblast

- lineární vztahy
- algebraické modelování
- matematická invarianta

### Vzdělávací cíle

Žák:

- analyzuje matematickou strukturu zdánlivě náhodné situace
- používá proměnné k popisu vztahů mezi veličinami
- formuluje hypotézy a ověřuje jejich platnost
- vysvětluje matematický princip pozorovaného jevu
- přechází od konkrétní situace k matematickému modelu

### Pomůcky

- standardní balíček 52 karet
- pracovní list pro žáky
- papír a tužka

Doporučeno: jeden balíček karet pro každou dvojici nebo skupinu.

## Příprava aktivity

Před zahájením aktivity učitel vezme balíček karet a zjistí osmou kartu odspodu balíčku.

Tuto kartu zapíše na papír jako předpověď výsledku a papír položí viditelně na stůl.

Balíček není nutné nijak míchat ani upravovat.

## Postup triku

1. Učitel začne obracet karty z vrchu balíčku na stůl lícem nahoru.
2. Při obracení karet nahlas počítá od 10 do 0.
3. Pokud se otočená karta shoduje s právě vysloveným číslem, hromádka končí.
4. Učitel začne vytvářet novou hromádku.
5. Pokud se během počítání žádná karta neshoduje, při vyslovení čísla 0 se položí poslední karta hromádky rubem vzhůru.
6. Postup se opakuje, dokud nevzniknou čtyři hromádky.

## Odhalení výsledku

1. Učitel sečte hodnoty vrchních karet všech hromádek.
2. Ze zbytku balíčku odebere odpovídající počet karet.
3. Otočí následující kartu.

Tato karta se vždy shoduje s kartou uvedenou v předpovědi.

## Matematické vysvětlení principu

Označme:

$x$  – počet karet v hromádce

$y$  – hodnota vrchní karty

Platí vztah:

$$x + y = 11$$

Součet počtu karet v hromádce a hodnoty vrchní karty je tedy vždy konstantní.

Protože vzniknou čtyři hromádky:

$$4 \times 11 = 44$$

Balíček obsahuje 52 karet, takže zbývá:

$$52 - 44 = 8 \text{ karet}$$

Předpovězená karta je tedy vždy osmá karta odspodu balíčku.

## Doporučený postup práce ve třídě

### 1. Motivace

Učitel nejprve trik předvede bez matematického vysvětlení.

### 2. Experimentování

Žáci pracují ve dvojicích nebo skupinách a postup opakují.

### 3. Hledání pravidelnosti

Žáci analyzují vztah mezi počtem karet v hromádce a hodnotou vrchní karty.

### 4. Matematické zobecnění

Učitel zavede proměnné  $x$  a  $y$  a společně se třídou odvodí vztah  $x + y = 11$ .

## Možné obtíže žáků

- velikost hromádek může působit náhodně
- obtíže při přechodu od konkrétní manipulace k algebraickému zápisu
- obtíže sledovat průběh počítání při práci s kartami

## Možnosti diferenciacce

Zjednodušení:

- pracovat pouze s konkrétními hromádkami
- zapisovat výsledky do tabulky

Náročnější varianta:

- odvodit vztah  $x + y = 11$
- zkoumat počítání od jiného čísla
- analyzovat jiný počet hromádek
- navrhnout obdobný trik pro balíček 32 karet

### **Didaktický přínos aktivity**

Aktivita propojuje manipulativní činnost s matematickou analýzou.

Zdánlivě náhodná situace vede žáky k formulaci hypotéz a jejich ověřování.

Žáci postupně přecházejí od konkrétní situace k matematickému modelu,

čímž se rozvíjí jejich algebraické myšlení.

# Pracovní list pro žáky

---

## Mathematical Finder – karetní předpověď

### 1. Pozorování

Učitel předvede karetní trik.

Po jeho předvedení se pokus odpovědět na otázky:

Co se podle tebe stalo?

.....

Proč si myslíš, že kouzelník dokázal předpovědět kartu?

.....

Myslíš si, že jde o náhodu? Proč?

.....

### 2. Vyzkoušej trik

Pracujte ve dvojicích nebo malých skupinách.

Jeden z vás bude provádět postup s kartami, druhý bude zapisovat výsledky.

Postup:

1. Vezmi balíček karet.
2. Začni obracet karty z vrchu balíčku na stůl.
3. Přitom nahlas počítej od 10 do 0.
4. Pokud se otočená karta shoduje s právě vysloveným číslem, hromádka končí.
5. Pokud ne, tak s vyslovením 0 polož na balíček jednu kartu rubem vzhůru.
6. Začni vytvářet novou hromádku.
7. Pokračuj, dokud nevzniknou čtyři hromádky.

### 3. Zapiš výsledky

Hromádka

Počet karet

Hodnota vrchní karty

#### 4. Hledej pravidelnost

Hromádka                      x (počet karet)                      y (hodnota karty)                      x + y

Jaký výsledek vychází ve sloupci x + y?

.....

Je součet vždy stejný?

.....

#### 5. Pokus o vysvětlení

Zkus vlastními slovy vysvětlit, proč trik funguje.

.....

.....

#### 6. Výzva pro zvědavé

Označme:

x – počet karet v hromádce

y – hodnotu vrchní karty

Jaký vztah mezi nimi platí?

.....

# Příloha C – Metodický list pro učitele

---

## Twenty Plus – Najdi zapamatovanou kartu

### Určeno pro

7.–9. ročník základní školy

### Zařazení dle RVP ZV

Vzdělávací oblast: Matematika a její aplikace

Tematické okruhy:

- Číslo a proměnná
- Závislosti, vztahy a práce s daty
- Nestandardní aplikační úlohy a problémy

### Matematická oblast

- algebraické modelování
- práce s proměnnou
- analýza matematické struktury postupů

### Vzdělávací cíle

Žák:

- používá proměnné k popisu matematické situace
- analyzuje vztahy mezi veličinami
- formuluje matematický model konkrétní situace
- vysvětluje, proč zdánlivě náhodný výsledek není náhodný
- používá algebraický zápis při řešení problému

### Pomůcky

- standardní balíček 52 karet
- pracovní list pro žáky
- tužka

Doporučeno: jeden balíček karet pro každou dvojici nebo skupinu.

## Příprava aktivity

Balíček karet není nutné nijak upravovat. Aktivitu lze provést s libovolně zamíchaným balíčkem.

Trik je založen pouze na matematické struktuře postupu, nikoli na předem připraveném pořadí karet.

## Postup triku

1. Žák si tajně vezme z balíčku libovolný počet karet (maximálně 20).
2. Učitel začne z balíčku vykládat karty lícem nahoru na stůl a počítá do 20.
3. Žák si zapamatuje kartu, která odpovídá počtu karet, které si vzal.
4. Jakmile je na stole 20 karet, žák řekne libovolné číslo od 1 do 10.
5. Učitel přidá na hromádku odpovídající počet karet z balíčku.
6. Hromádku karet na stole otočí rubem nahoru.
7. Zbytek balíčku položí na vrch této hromádky.
8. Učitel prolistuje balíček rubem nahoru a na vypočítané pozici otočí kartu.

## Jak najít zapamatovanou kartu

Učitel vypočítá hodnotu:

$$32 - y$$

kde  $y$  je číslo, které žák řekl.

Například:

$$y = 7$$

$$32 - 7 = 25$$

Zapamatovaná karta se nachází na 25. pozici v balíčku.

## Matematické vysvětlení principu

Označme:

$x$  – počet karet, které si žák na začátku vzal

$y$  – číslo, které žák řekl

Zapamatovaná karta je na  $x$ -té pozici mezi 20 vyloženými kartami.

Po vyložení 20 karet zůstává v balíčku:

$$52 - 20 - x = 32 - x$$

Po přidání  $y$  karet:

$$32 - x - y$$

Po otočení hromádky se zapamatovaná karta dostane na pozici:

$$32 - x + x - y$$

což se zjednoduší na:

$$32 - y$$

Konečná pozice tedy nezávisí na hodnotě  $x$ .

### **Doporučený postup práce ve třídě**

1. Učitel nejprve trik předvede bez vysvětlení.
2. Žáci formulují vlastní hypotézy.
3. Žáci experimentují s různými hodnotami  $x$  a  $y$ .
4. Společně analyzují změny v pozici karty.
5. Učitel zavede proměnné  $x$  a  $y$  a společně odvodí vztah  $32 - y$ .

### **Možné obtíže žáků**

- sledování změn pořadí karet
- pochopení, že proměnná  $x$  nemá vliv na výsledek
- práce s algebraickým zápisem vztahu

## Možnosti diferenciacce

Zjednodušení:

- pracovat pouze s konkrétními hodnotami
- sledovat změny pozice karty při různých hodnotách  $y$

Náročnější varianta:

- odvodit celý algebraický vztah

$$32 - x + x - y = 32 - y$$

- vysvětlit, proč výsledek nezávisí na hodnotě  $x$

## Didaktický přínos aktivity

Aktivita propojuje manipulativní práci s kartami s algebraickým modelováním.

Žáci sledují konkrétní situaci a postupně ji převádějí do matematického vztahu.

Tím se rozvíjí schopnost analyzovat matematickou strukturu postupů a vytvářet matematické modely.

# Pracovní list pro žáky

---

## Twenty Plus – Najdi zapamatovanou kartu

### 1. Pozorování

Učitel předvede karetní trik.

Po jeho předvedení se pokus odpovědět na otázky:

Co se podle tebe stalo?

.....

Jak mohl kouzelník najít kartu, kterou si divák zapamatoval?

.....

Myslíš si, že jde o náhodu? Proč?

.....

### 2. Vyzkoušej trik

Pracujte ve dvojicích nebo malých skupinách.

Postup:

1. Jeden z vás si z balíčku tajně vezme určitý počet karet (maximálně 20).
2. Druhý vykládá z balíčku karty na stůl a počítá do dvaceti.
3. Zapamatuj si kartu, která odpovídá počtu karet, které sis vzal.  
Například pokud sis vzal 5 karet, zapamatuj si 5. vyloženou kartu.
4. Jakmile je na stole 20 karet, řekni libovolné číslo od 1 do 10.
5. Přidej na hromádku odpovídající počet karet z balíčku.
6. Hromádku otoč rubem nahoru a polož na ni zbytek balíčku.

### 3. Zapiš výsledky

Počet odebraných karet (x)	Zvolené číslo (y)	Vypočtená pozice 32 – y	Skutečná pozice karty
----------------------------	-------------------	-------------------------	-----------------------

#### 4. Hledej pravidelnost

Porovnej vypočtenou a skutečnou pozici karty.

Co pozoruješ?

.....

Závisí pozice karty na počtu odebraných karet  $x$ ?

.....

#### 5. Pokus o vysvětlení

Označme:

$x$  – počet karet, které si divák vzal

$y$  – číslo, které divák řekl

Zkus popsat, jak se mění pozice zapamatované karty během jednotlivých kroků.

.....

.....

#### 6. Výzva pro zvědavé

Odvoď obecný vztah pro pozici zapamatované karty.

.....

Proč výsledek nezávisí na počtu karet  $x$ ?

.....

# Příloha D – Metodický list pro učitele

---

## Scarne's Miracle Card-Finder – Najdi předpovězenou kartu

### Určeno pro

8.–9. ročník základní školy

### Zařazení dle RVP ZV

Vzdělávací oblast: Matematika a její aplikace

Tematické okruhy:

- Číslo a proměnná
- Nestandardní aplikační úlohy a problémy

### Matematická oblast

- algoritmické myšlení
- opakující se procesy
- práce s mocninami čísla dvě
- matematické modelování algoritmu

### Vzdělávací cíle

Žák:

- analyzuje opakující se algoritmický postup
- rozpoznává pravidelnosti v průběhu procesu
- vysvětluje matematickou strukturu algoritmu
- hledá vztah mezi počtem prvků a výsledkem procesu
- používá matematický model k předpovědi výsledku

### Pomůcky

- balíček 52 karet
- papír a tužka

Doporučeno: jeden balíček karet pro každou dvojici nebo skupinu.

### Příprava aktivity

Divák zamíchá balíček a vybere z něj libovolný počet karet.

Tyto karty oddělí od zbytku balíčku.

Kouzelník si jednu z těchto karet tajně zapíše na papír jako předpověď.

Tato karta bude na konci triku kartou, která divákovi zůstane v ruce.

### Postup triku

1. Divák drží vybranou hromádku karet v ruce.
2. Postupně provádí následující kroky:
  - první kartu položí na stůl
  - další kartu přesune na spodek hromádky
3. Postup se stále opakuje:
  - jednu kartu odložit
  - další přesunout dospodu hromádky
4. Postup pokračuje, dokud divákovi v ruce nezůstane pouze jedna karta.
5. Kouzelník poté ukáže předem napsanou kartu.

Ukáže se, že je shodná s kartou, která divákovi zůstala.

### Matematické vysvětlení principu

Postup odpovídá známému matematickému problému nazývanému Josephusův problém.

Při něm se postupně vyřazuje každý druhý prvek v kruhovém uspořádání.

V našem případě:

- jedna karta je odložena
- další karta je přesunuta na spodek hromádky

Tím se postupně vyřazuje každá druhá karta.

### Mocniny čísla dvě

Pokud by počet karet byl přesně mocninou dvojky (například 8, 16 nebo 32), zůstala by nakonec karta na poslední pozici této mocniny.

Například:

- při 8 kartách zůstane 8. karta
- při 16 kartách zůstane 16. karta

### Obecný vztah

Označme:

$n$  – počet karet

Nejprve určíme nejbližší nižší mocninu dvojky:

$$2^k$$

Rozdíl:

$$n - 2^k$$

Výsledná pozice poslední karty je:

$$2(n - 2^k)$$

### Příklad

Pokud je počet karet  $n = 23$ :

nejbližší nižší mocnina dvojky je

$$2^4 = 16$$

Poté:

$$23 - 16 = 7$$

$$2 \times 7 = 14$$

Poslední karta byla tedy původně na 14. pozici v balíčku.

## Doporučený postup práce ve třídě

1. Učitel nejprve trik předvede bez vysvětlení.
2. Žáci formulují vlastní hypotézy.
3. Žáci experimentují s různými počty karet.
4. Společně zapisují výsledky.
5. Učitel vysvětlí souvislost s mocninami čísla dvě a Josephusovým problémem.

## Možné obtíže žáků

- sledování průběhu algoritmu při větším počtu karet
- pochopení souvislosti s mocninami čísla dvě
- představivost při sledování změn pořadí karet

## Možnosti diferenciac

Zjednodušení:

- pracovat s menším počtem karet
- sledovat pouze průběh procesu

Náročnější varianta:

- hledat obecné pravidlo pro libovolný počet karet
- analyzovat Josephusův problém obecně
- zkoumat variantu vyřazování každé třetí karty

## Didaktický přínos aktivity

Aktivita propojuje manipulativní práci s kartami s analýzou algoritmu.

Žáci sledují opakující se proces a hledají v něm pravidelnosti.

Následně převádějí konkrétní situaci do matematického modelu,

čímž se rozvíjí jejich logické a algoritmické myšlení.

# Pracovní list pro žáky

---

## Scarne's Miracle Card-Finder – Najdi předpovězenou kartu

### 1. Pozorování

Učitel předvede karetní trik.

Po jeho předvedení se pokus odpovědět na otázky:

Co se podle tebe během triku dělo?

.....

Jak je možné, že nakonec zůstala právě tato karta?

.....

Myslíš si, že je výsledek náhodný? Proč?

.....

### 2. Vyzkoušej trik

Pracujte ve dvojicích nebo malých skupinách.

Postup:

1. Zamíchejte balíček karet.
2. Jeden z vás vezme libovolný počet karet.
3. S těmito kartami provádějte následující postup:
  - první kartu polož na stůl
  - další kartu přesuň na spodek hromádky
4. Tento postup stále opakuj:
  - jednu kartu odlož
  - další přesuň dospodu
5. Pokračuj, dokud ti v ruce nezůstane jen jedna karta.

### 3. Zapiš výsledky

Počet karet na začátku

kolikátá karta z původního uspořádání zůstala  
jako poslední

#### 4. Hledej pravidelnost

Porovnej výsledky pro různé počty karet.

Všimneš si nějakého pravidla?

.....

Zkus experiment zopakovat s počty karet: 8, 10, 16, 20.

Co pozoruješ?

.....

#### 5. Pokus o vysvětlení

Zkus popsat, jak postup funguje.

Jak se mění počet karet během jednotlivých kroků?

.....

.....

#### 6. Výzva pro zvědavé

Zkus odhadnout, která karta zůstane poslední bez provedení celého postupu.

Existuje podle tebe pravidlo, které určuje poslední kartu podle počtu karet?

.....

.....

# Příloha E – Metodický list pro učitele

---

## Cyklické číslo 142857

### Určeno pro

8.–9. ročník základní školy / nižší ročníky gymnázia

### Zařazení dle RVP ZV

Vzdělávací oblast: Matematika a její aplikace

Tematické okruhy:

- Číslo a proměnná
- Nestandardní aplikační úlohy a problémy
- Závislosti, vztahy a práce s daty

### Matematická oblast

- periodické desetinné rozvoje
- cyklická čísla
- násobení přirozených čísel
- rozpoznávání číselných struktur

### Vzdělávací cíle

Žák:

- rozpoznává pravidelnosti v násobení čísel
- analyzuje strukturu cyklického čísla
- vysvětluje vztah mezi zlomkem  $1/7$  a číslem 142857
- rozpoznává cyklické vzory v matematických operacích
- formuluje matematické vysvětlení pozorovaného jevu

### Pomůcky

- šest černých karet označených čísly: 1, 4, 2, 8, 5, 7
- pět červených karet označených čísly: 2, 3, 4, 5, 6
- hrací kostka

- papír a tužka pro žáky

### Příprava aktivity

Učitel připraví šest černých karet v pořadí:

1 – 4 – 2 – 8 – 5 – 7

Tyto karty reprezentují číslo 142857.

Karty jsou připraveny na stole v tomto pořadí.

### Postup triku

1. Učitel vyloží šest černých karet v pořadí 1 – 4 – 2 – 8 – 5 – 7.
2. Žák hodí kostkou (nebo si vybere číslo 2–6).
3. Toto číslo označíme jako  $n$ .
4. Žák dostane papír a vypočítá součin:

$$142857 \times n$$

Například:

$$142857 \times 4 = 571428$$

5. Zatímco žák provádí výpočet, učitel vezme šest karet a jednou je snímne (rozdělí balíček na dvě části a zamění jejich pořadí).
6. Karty položí na stůl lícem dolů.
7. Po dokončení výpočtu učitel postupně karty otočí.
8. Karty vytvoří číslo odpovídající výsledku násobení.

### Matematické vysvětlení principu

Číslo 142857 je tzv. cyklické číslo.

Vzniká jako perioda desetinného rozvoje zlomku:

$$1 / 7 = 0,142857142857\dots$$

Perioda tohoto desetinného rozvoje obsahuje šest číslic:

142857

Při násobení čísly 1 až 6 vznikají vždy čísla obsahující stejné číslice, pouze v jiném pořadí – dochází k cyklickému posunu číslic.

$$142857 \times 1 = 142857$$

$$142857 \times 2 = 285714$$

$$142857 \times 3 = 428571$$

$$142857 \times 4 = 571428$$

$$142857 \times 5 = 714285$$

$$142857 \times 6 = 857142$$

### **Matematický význam**

Cyklická čísla souvisejí s periodickými desetinnými rozvoji zlomků.

V případě čísla 142857 jde o periodu desetinného rozvoje zlomku  $1/7$ .

Při násobení čísly 1–6 se pouze cyklicky posouvá začátek této periody.

V karetním triku jsou jednotlivé číslice reprezentovány kartami.

Snímnutím balíčku dojde k cyklickému posunu jejich pořadí.

### **Doporučený postup práce ve třídě**

1. Učitel nejprve předvede trik bez matematického vysvětlení.
2. Žáci sledují výsledek a snaží se vysvětlit, jak mohl vzniknout.
3. Žáci vypočítají několik násobků čísla 142857.
4. Výsledky zapíší do tabulky.

5. Společně hledají pravidelnost ve vzniklých číslech.
6. Učitel následně vysvětlí souvislost s desetinným rozvojem zlomku  $1/7$ .

### Možné obtíže žáků

- rozpoznání, že výsledky obsahují stejné číslice
- pochopení cyklického posunu číslic
- pochopení vztahu mezi číslem 142857 a zlomkem  $1/7$

### Možnosti diferenciacce

Jednodušší varianta:

- zaměřit se pouze na výpočty násobků čísla 142857
- hledat podobnosti ve výsledcích

Náročnější varianta:

- analyzovat další periodické desetinné rozvoje
- porovnat například zlomek  $1/13$  nebo jiné zlomky
- zkoumat vlastnosti cyklických čísel obecně

### Didaktický přínos aktivity

Aktivita ukazuje zajímavé vlastnosti číselných struktur.

Žáci mají možnost objevovat pravidelnosti a hledat jejich matematické vysvětlení.

Aktivita propojuje aritmetiku s prvky teorie čísel a podporuje matematickou

zvědavost i schopnost analyzovat číselné vzory.

# Pracovní list pro žáky

---

## Cyklické číslo 142857

### 1. Pozorování

Učitel předvede karetní trik s číslem vytvořeným z karet:

142857

Pokus se odpovědět na otázky:

Co se podle tebe během triku stalo?

.....

Jak je možné, že karty vytvořily správný výsledek násobení?

.....

### 2. Vyzkoušej výpočty

Vypočítej několik násobků čísla 142857.

$$142857 \times 2 =$$

.....

$$142857 \times 3 =$$

.....

$$142857 \times 4 =$$

.....

$$142857 \times 5 =$$

.....

$$142857 \times 6 =$$

.....

### 3. Hledej pravidelnost

Co mají všechny výsledky společného?

.....

Jak se změnilo pořadí číslic ve výsledcích?

.....

### 4. Pokus o vysvětlení

Zkus vysvětlit, proč se číslice ve výsledcích pouze cyklicky posouvají.

.....

.....

### 5. Zajímavé pozorování

Vypočítej desetinný rozvoj zlomku:

$$1 \div 7 =$$

.....

Co pozoruješ v číslech za desetinnou čárkou?

.....

### 6. Výzva pro zvědavé

Jak souvisí číslo 142857 s desetinným rozvojem zlomku  $1/7$ ?

.....