



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

**NALEZENÍ MECHANIZMU S FILTRACÍ (4, 7)
ODPOVÍDAJÍCÍ GEOMETRII CEST (PATH GEOMETRY)**

FINDING A MECHANISM WITH (4, 7) FILTRATION CORRESPONDING TO THE PATH GEOMETRY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Eva Rajsiglová

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. Mgr. Jaroslav Hrdina, Ph.D.

BRNO 2017

Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav matematiky
Studentka: **Eva Rajsiglová**
Studijní program: Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor: Matematické inženýrství
Vedoucí práce: **doc. Mgr. Jaroslav Hrdina, Ph.D.**
Akademický rok: 2016/17

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Nalezení mechanismu s filtrací (4, 7) odpovídající geometrii cest (path geometry)

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Každý neholonomní mechanismus určuje lineární (Pffafův) systém jehož řešením jsou vektorová pole, které generují takzvanou algebru říditelnosti. Pokud tyto vektorová pole jsou 4, algebra říditelnosti má dimenzi 7 a generování proběhne v jednom kroku říkáme, že se jedná o mechanismy s filtrací (4,7).

Cíle bakalářské práce:

Nastudování základů neholonomních systémů a počítání s Lieovou závorkou. Nalezení takového planárního mechanismu s filtrací (4,7) který odpovídá geometrii cest.

Seznam doporučené literatury:

SELIG, Jon M. Geometric Fundamentals of Robotics. 2. New York: Springer, 2004. ISBN 978-0-3-7-27274-0.

MURRAY, Richard M., Zexiang, LI and Shankar SASTRY. A mathematical introduction to robotic manipulation. Boca Raton: CRC Press, c1994. ISBN 08-493-7981-4.

JEAN, Frédéric. Control of nonholonomic systems: from sub-Riemannian geometry to motion planning. Cham: Springer, 2014. Briefs in mathematics (Springer). ISBN 978-3-319-08689-7.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2016/17

V Brně, dne

L. S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Tématem této bakalářské práce je teorie řízení robotického mechanismu, tzv. trident snake robota. Z pohledu teorie řízení se jedná o neholonomní systém, jehož říditelnost je určena vektorovými poli. V práci jsou ze soustavy neholonomních rovnic odvozeny vstupní vektorová pole. Na tato vektorová pole je aplikována operace Lieovy závorky. Na základě analýzy výsledků operace Lieovy závorky je provedeno ověření splnění definice zobecněné geometrie cest pro konkrétní modely trident snake robota. Na závěr je v práci vypočítána Hamiltonova funkce a Christoffelovy symboly potřebné pro sestavení rovnic geodetik.

Abstract

The subject of this Bachelor's thesis is control theory of mechanism, the so-called trident snake robot. From a viewpoint of control theory, it is classified as a nonholonomic system whose controllability is determined by vector fields. In this thesis, input vector fields are obtained from the system of nonholonomic equations. The Lie bracket operation is applied on this vector fields. On the basis of an analysis of the results of the Lie bracket operation, the fulfillment of the definition of the generalized path geometry is verified for the particular models of the trident snake robot. Finally, Hamiltonian function and Christoffel symbols, needed to compile equations of geodesics, are calculated.

klíčová slova

neholonomní systém, Lieova závorka, algebra říditelnosti, Hamiltonova funkce, Christoffelovy symboly, zobecněná geometrie cest

keywords

nonholonomic system, Lie bracket, controllability algebra, Hamiltonian function, Christoffel symbols, generalized path geometry

Rajsiglová, E.: *Nalezení mechanismu s filtrací $(4, 7)$ odpovídající geometrii cest*, Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2017. 37s. Vedoucí bakalářské práce doc. Mgr. Jaroslav Hrdina, Ph.D.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Nalezení mechanismu s filtrací (4,7) odpovídající geometrii cest* vypracovala samostatně pod vedením doc. Mgr. Jaroslava Hrdiny, Ph.D. s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Eva Rajsiglová

Na tomto místě bych ráda poděkovala doc. Mgr. Jaroslavu Hrdinovi, Ph.D. za vedení práce, cenné rady a připomínky.

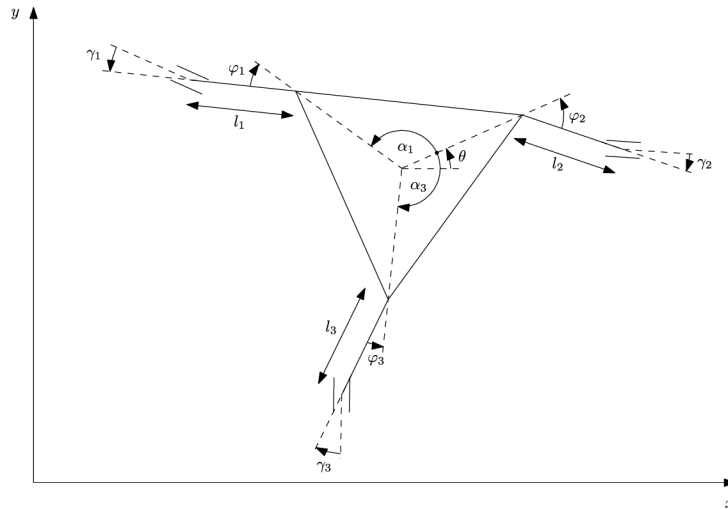
Eva Rajsiglová

Obsah

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Úvod | 12 |
| 2 | Diferenciální geometrie | 13 |
| 2.1 | Hladká varieta | 13 |
| 2.2 | Lieova závorka | 14 |
| 2.3 | Distribuce | 16 |
| 3 | Zobecněný trident snake | 19 |
| 3.1 | Popis trident snake robota | 19 |
| 3.2 | Varianta 1 | 20 |
| 3.3 | Varianta 2 | 24 |
| 3.4 | Varianta 3 | 27 |
| 3.5 | Varianta 4 | 28 |
| 3.6 | Zobecněná planární geometrie cest | 30 |
| 4 | Hamiltonova geometrie | 31 |
| 4.1 | Hamiltonova funkce | 31 |
| 4.2 | Geodetiky | 33 |
| 5 | Závěr | 35 |

1 Úvod

Tato práce se zabývá zkoumáním robotického mechanismu, tzv. trident snake robota. Jedná se neholonomní mechanismus, tedy mechanismus, jehož počet stupňů volnosti se nerovná dimenzi konfiguračního prostoru. Model trident snake robota ilustruje následující obrázek.



Obrázek 1: Obecný model trident snake robota

Robot je tvořen rovnostranným trojúhelníkem s články v jeho vrcholech. Na konci každého článku se nachází kolečko. Spojení trojúhelníku s články a článků s kolečky je provedeno klouby, ve kterých jsou umístěny servomotory. Je tak možné měnit úhly natočení. Dalšími říditelnými parametry jsou délky jednotlivých článků, jež je možné protahovat a zkracovat.

Nejprve se v kapitole 2 seznámíme s pojmy z diferenciální geometrie, které, jak později uvidíme, jsou potřebné pro řešení dané problematiky. Dále budeme definovat pojmy jako Lieova závorka a Lieova algebra říditelnosti. Na konci této kapitoly se seznámíme s pojmem zobecněné geometrie cest. S pomocí tohoto teoretického základu se budeme ve třetí kapitole věnovat konkrétním modelům trident snake robotů. Pro tyto modely určíme neholonomní soustavy rovnic a z jejich řešením získáme vstupní vektorová pole, která následně použijeme pro výpočet Lieových závorek. Vstupních vektorových polí a Lieových závorek určují Lieovu algebru říditelnosti, jejíž vlastnosti využijeme k demonstrování skutečnosti, že dané mechanismy splňují definici zobecněné geometrie cest a jsou lokálně říditelné. Nakonec představíme Hamiltonovu funkci a její vlastnosti a vypočítáme Christoffelovy symboly, pomocí nichž je možné sestavit rovnice normálních geodetik.

2 Diferenciální geometrie

V této kapitole definujeme pojmy, se kterými budeme v dalším textu pracovat. Kapitola vychází především z [4], [5] a částečně z [2], doplňující informace týkající se robotických aplikací lze nalézt v [3] a [6].

2.1 Hladká varieta

Topologická varieta je separabilní měřitelný prostor M , který je lokálně homeomorfní s \mathbb{R}^n . Pro každé $x \in M$ tedy existuje nějaký homeomorfismus $u : U \rightarrow u(U) \subseteq \mathbb{R}^n$, kde U je otevřené okolí bodu $x \in M$ a $u(U)$ je otevřená podmnožina \mathbb{R}^n . Dvojice (U, u) se nazývá *mapa* na M .

Množina map $(U_\alpha, u_\alpha)_\alpha$ na M takových, že U_α tvoří pokrytí množiny M , se nazývá *atlas*. Funkce

$$u_{\alpha\beta} := u_\alpha \circ u_\beta^{-1} : u_\beta(U_{\alpha\beta}) \rightarrow u_\alpha(U_{\alpha\beta})$$

se nazývají transformace mapy pro atlas $(U_\alpha, u_\alpha)_\alpha$, zápis $U_{\alpha\beta}$ označuje $U_{\alpha\beta} := U_\alpha \cap U_\beta$.

Atlas $(U_\alpha, u_\alpha)_\alpha$ variety M se nazývá C^k -*atlas*, jestliže všechny transformace $u_{\alpha\beta} : u_\beta(U_{\alpha\beta}) \rightarrow u_\alpha(U_{\alpha\beta})$ jsou diferencovatelné třídy C^k . Dva C^k -atlas se nazývají C^k -*ekvivalentní*, když jejich sjednocení je opět C^k -atlas M . Třída ekvivalence C^k -atlasů se nazývá C^k -*struktura* na M . Jestliže všechny transformace jsou třídy C^k pro $\forall k \in \mathbb{N}$, atlas $(U_\alpha, u_\alpha)_\alpha$ se nazývá *hladký atlas*. Dvojice $(M, (U_\alpha, u_\alpha)_\alpha)$, kde M je topologická varieta a $(U_\alpha, u_\alpha)_\alpha$ je hladký atlas, se nazývá *hladká varieta*.

Příklad 2.1. Uvažujme prostor \mathbb{R}^{n+1} se standardním skalárním součinem $\langle x, y \rangle = \sum x_i y_i$. Potom n -*sféra* S^n je podmnožina $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle x, x \rangle = 1\}$.

Popíšeme explicitně atlas pro S^n , tzv. *stereografický atlas*. Vybereme $a \in S^n$ („jižní pól“). Necht

$$\begin{aligned} U_+ &:= S^n \setminus \{a\}, & u_+ : U_+ &\rightarrow \mathbb{R}^n, & u_+(x) &= \frac{x - \langle x, a \rangle a}{1 - \langle x, a \rangle}, \\ U_- &:= S^n \setminus \{-a\}, & u_- : U_- &\rightarrow \mathbb{R}^n, & u_-(x) &= \frac{x - \langle x, a \rangle a}{1 + \langle x, a \rangle}. \end{aligned}$$

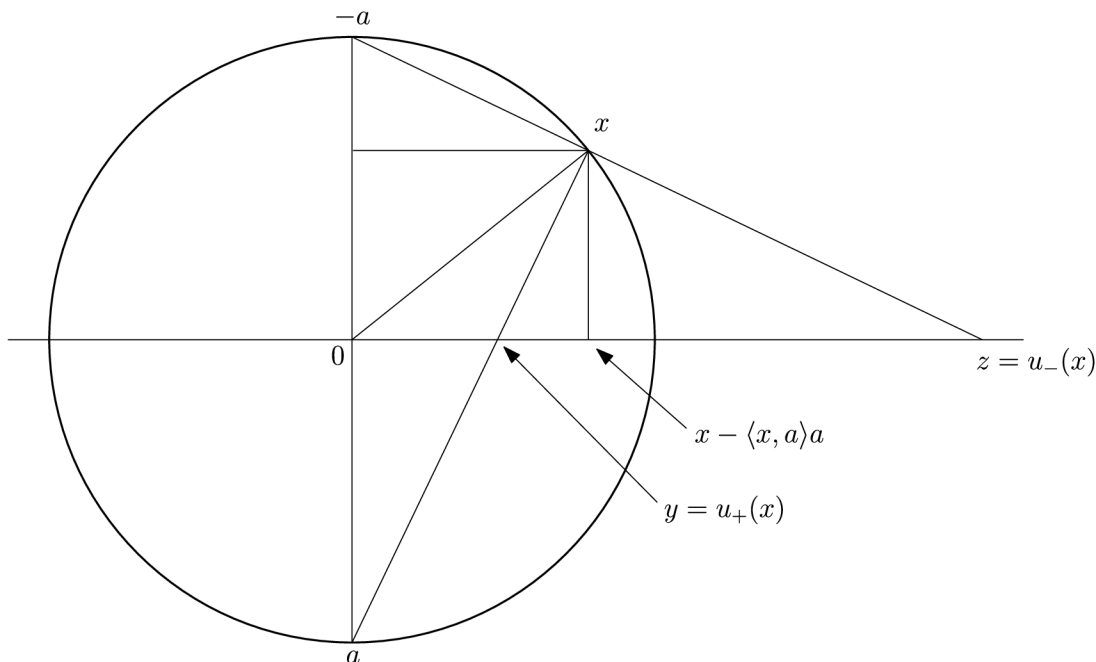
Z obrázku 2 je přes 0, x , a a vidět, že u_+ je klasická stereografická projekce. Dostáváme také

$$u_+^{-1}(y) = \frac{|y|^2 - 1}{|y|^2 + 1} a + \frac{2}{|y|^2 + 1} y \quad \text{pro } y \in \{a\}^\perp \setminus \{0\}$$

a $u_{+-}(y) = (u_- \circ u_+^{-1})(y) = \frac{y}{|y|^2}$. Je vidět, že u_{+-} je diferencovatelné třídy C^k pro $\forall k$.

Dalším příkladem hladké variety je \mathbb{R}^n , kde atlas tvoří jediná mapa, a to identita $id : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Po složkách pak můžeme definovat hladký atlas na varietě $M = \mathbb{R}^n \times (S^m)^k$. Dále uvidíme, že konfiguračním prostorem našich mechanismů je právě $M = \mathbb{R}^n \times (S^1)^k$. Můžeme jej tedy chápat jako hladkou varietu.

Na příkladě \mathbb{R}^n si demonstrujeme další pojmy. Rozlišujeme vektorový prostor a jeho tečný prostor v daném bodě. Tečný prostor k prostoru \mathbb{R}^n v bodě $q \in \mathbb{R}^n$ označujeme $T_q \mathbb{R}^n$. *Vektorové pole* na \mathbb{R}^n je hladké zobrazení, které přiřazuje ke každému bodu $q \in \mathbb{R}^n$



Obrázek 2: Sféra

tečný vektor $f(q) \in T_q\mathbb{R}^n$. V lokálních souřadnicích reprezentujeme f jako sloupcový vektor, jehož složky závisí na q :

$$f(q) = \begin{pmatrix} f_1(q) \\ \vdots \\ f_n(q) \end{pmatrix}.$$

Vektorové pole je hladké, pokud je hladká každá funkce $f_i(q) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Jak uvidíme, o vektorovém poli můžeme přemýšlet jako o pravé straně diferenciální rovnice

$$\dot{q} = f(q). \quad (2.1)$$

Pro reprezentaci řešení diferenciální rovnice (2.1) definujeme *tok* vektorového pole. Speciálně $\phi_t^f(q)$ představuje řešení diferenciální rovnice v čase t s počátkem v q . Tudíž $\phi_t^f(q) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ splňuje:

$$\frac{d}{dt}\phi_t^f(q) = f(\phi_t^f(q)) \quad q \in \mathbb{R}^n.$$

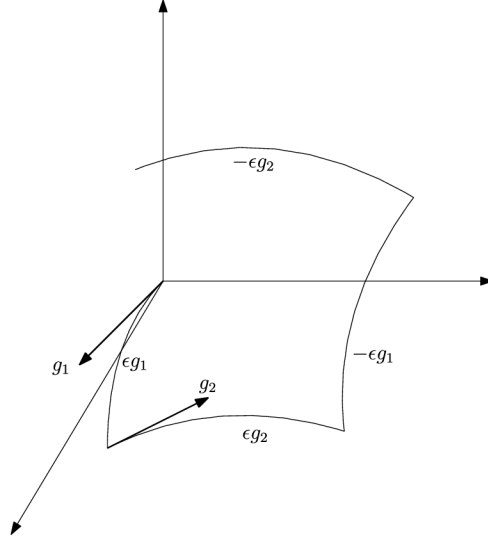
Vektorové pole se nazývá *kompletní*, jestliže je definováno pro všechna t . Podle Picardovi věty o existenci a jednoznačnosti řešení obyčejných diferenciálních rovnic, je ϕ_t^f pro každé pevně dané t lokálním difeomorfismem \mathbb{R}^n samo na sebe. Dále ϕ_t^f splňuje následující vlastnost:

$$\phi_t^f \circ \phi_s^f = \phi_{t+s}^f,$$

pro všechna t a s , \circ značí kompozici dvou toků: $\phi_t^f \circ \phi_s^f = \phi_t^f(\phi_s^f(q))$.

2.2 Lieova závorka

Mějme dvě vektorová pole g_1 a g_2 , zobrazení $\phi_t^{g_1} \circ \phi_s^{g_2}$ představuje kompozici toku g_2 po s sekund s tokem g_1 po t sekund. Obecně se tato kompozice liší od kompozice $\phi_s^{g_1} \circ \phi_t^{g_2}$,



Obrázek 3: Ilustrace operace Lieova závorka

která je kompozicí v opačném pořadí. Pro malé ϵ může vyjádřit Taylorův rozvoj v ϵ jako:

$$\begin{aligned} q(\epsilon) &= \phi_\epsilon^{g_1}(q(0)) \\ &= q(0) + \epsilon \dot{q}(0) + \frac{1}{2} \epsilon^2 \ddot{q}(0) + O(\epsilon^3) \\ &= q_0 + \epsilon g_1(q_0) + \frac{1}{2} \epsilon^2 \frac{\partial g_1}{\partial q} g_1(q_0) + O(\epsilon^3), \end{aligned}$$

zápis $O(\epsilon^k)$ značí výraz řádu ϵ^k a parciální derivace g_1 je v q_0 .

Vyjádřeno v čase 2ϵ ,

$$\begin{aligned} q(2\epsilon) &= \phi_\epsilon^{g_2} \circ \phi_\epsilon^{g_1}(q_0) \\ &= \phi_\epsilon^{g_2}(q_0 + \epsilon g_1(q_0) + \frac{1}{2} \epsilon^2 \frac{\partial g_1}{\partial q} g_1(q_0) + O(\epsilon^3)) \\ &= q_0 + \epsilon g_1(q_0) + \frac{1}{2} \epsilon^2 \frac{\partial g_1}{\partial q} g_1(q_0) + \epsilon g_2(q_0 + \epsilon g_1(q_0)) + \frac{\epsilon^2}{2} \frac{\partial g_2}{\partial q} g_2(q_0) + O(\epsilon^3) \\ &= q_0 + \epsilon(g_1(q_0) + g_2(q_0)) + \frac{1}{2} \epsilon^2 \left(\frac{\partial g_1}{\partial q} g_1(q_0) + \frac{\partial g_2}{\partial q} g_2(q_0) + 2 \frac{\partial g_2}{\partial q} g_1(q_0) \right) + O(\epsilon^3). \end{aligned}$$

Použili jsme Taylorův rozvoj pro $g_2(q_0 + \epsilon g_1(q_0)) = g_2(q_0) + \epsilon \frac{\partial g_2}{\partial q} g_1(q_0) + O(\epsilon^2)$.

V dalším kroku dostáváme:

$$\begin{aligned} q(3\epsilon) &= \phi_\epsilon^{-g_1} \circ \phi_\epsilon^{g_2} \circ \phi_\epsilon^{g_1}(q_0) \\ &= q_0 + \epsilon g_2(q_0) + \frac{1}{2} \epsilon^2 \left(\frac{\partial g_2}{\partial q} g_2(q_0) + 2 \frac{\partial g_2}{\partial q} g_1(q_0) - 2 \frac{\partial g_1}{\partial q} g_2(q_0) \right) + O(\epsilon^3). \end{aligned}$$

A konečně:

$$\begin{aligned} q(4\epsilon) &= \phi_\epsilon^{-g_2} \circ \phi_\epsilon^{-g_1} \circ \phi_\epsilon^{g_2} \circ \phi_\epsilon^{g_1}(q_0) \\ &= q_0 + \epsilon^2 \left(\frac{\partial g_2}{\partial q} g_1(q_0) + \frac{\partial g_1}{\partial q} g_2(q_0) \right) + O(\epsilon^3). \end{aligned}$$

Toto je motivací pro definici Lieovy závorky:

Definice 2.2. Lieovu závorku dvou vektorových polí g_1 a g_2 definujeme jako

$$[g_1, g_2](q) = \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\epsilon^2} q(4\epsilon) = \frac{\partial g_2}{\partial q} g_1(q) - \frac{\partial g_1}{\partial q} g_2(q).$$

Lieova závorka je tedy vektorové pole generované dvěma vektorovými poli g_1 a g_2 . Jestliže $[g_1, g_2] = 0$, řekneme, že g_1 a g_2 komutují.

Příklad 2.3. Uvažujme dvě lineární vektorová pole $f(q) = Aq$ a $g(q) = Bq$. Potom Lieova závorka dvou lineárních vektorových polí je lineární vektorové pole

$$[f, g](q) = (BA - AB)q,$$

tzn. komutátor dvou matic A, B .

Z definice Lieovy závorky vektorových polí plynou následující vlastnosti:

Tvrzení 1. *Mějme vektorová pole g_1, g_2, g_3 na \mathbb{R}^n , potom Lieova závorka splňuje následující vlastnosti:*

1. *Antisymetrie:*

$$[g_1, g_2] = -[g_2, g_1]$$

2. *Jacobiho identita:*

$$[g_1, [g_2, g_3]] + [g_3, [g_1, g_2]] + [g_2, [g_3, g_1]] = 0.$$

2.3 Distribuce

Distribuce na hladké varietě M je zobecnění vektorových polí, tj. zobrazení, které přiřazuje hladkou funkci podprostor tečného prostoru ke každému bodu v M . Speciální případ je distribuce definovaná množinou hladkých vektorových polí g_1, \dots, g_m . V tomto případě definujeme distribuci jako

$$\Delta = \text{span}\{g_1, \dots, g_m\} \subset TM,$$

tj. jako obal množiny hladkých vektorových polí v M . Pro libovolný bod M distribuce definuje lineární podprostor tečného prostoru

$$\Delta_q = \text{span}\{g_1(q), \dots, g_m(q)\} \subset T_q M.$$

Řekneme, že distribuce je *regulární*, jestliže se dimenze podprostoru Δ_q nemění pro různá q . Distribuce je *involutivní*, jestliže je uzavřená vůči Lieově závorce, tzn.

$$\Delta \text{ je involutivní } \iff [f, g] \in \Delta \quad \forall f, g \in \Delta.$$

Involutivní uzávěr distribuce, značený $\overline{\Delta}$, je uzávěrem Δ vzhledem k operaci Lieovy závorky; tzn., $\overline{\Delta}$ je nejmenší distribuce obsahující Δ taková, že když $f, g \in \overline{\Delta}$, pak $[f, g] \in \overline{\Delta}$.

Definice 2.4. Vektorový prostor V (nad \mathbb{R}) je Lieova algebra, jestliže existuje bilineární operace $V \times V \rightarrow V$, značena $[\cdot, \cdot]$, splňující (i) antisymetrii a (ii) Jacobiho identitu.

Množina hladkých vektorových polí na \mathbb{R}^n s Lieovou závorkou tvoří Lieovu algebru, značíme $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$. Necht' g_1, \dots, g_m je množina hladkých vektorových polí, Δ je distribuce definovaná g_1, \dots, g_m a $\overline{\Delta}$ je involutivní uzávěr Δ . Pak $\overline{\Delta}$ je Lieova algebra (nejmenší Lieova algebra obsahující g_1, \dots, g_m). Nazývá se Lieova algebra generovaná g_1, \dots, g_m a často se značí $\mathfrak{L}\{g_1, \dots, g_m\}$. Prvky $\mathfrak{L}\{g_1, \dots, g_m\}$ jsou tvořeny všemi lineárními kombinacemi prvků g_1, \dots, g_m , jejich Lieových závorek, lineárními kombinacemi těchto závorek a tak dále. Hodnota $\mathfrak{L}\{g_1, \dots, g_m\}$ v bodě $q \in \mathbb{R}^n$ definujeme jako dimenzi distribuce $\overline{\Delta}_q$.

Necht' $f(q) = \begin{pmatrix} f_1(q) \\ \vdots \\ f_n(q) \end{pmatrix}$ je vektorové pole na hladké varietě M a $x(t) : \mathbb{R} \rightarrow M$ je

hladká křivka. Pak $x(t)$ je integrální křivka f , pokud je řešením následujícího systému obyčejných diferenciálních rovnic

$$\frac{\partial x(t)}{\partial t} = f(x(t)).$$

Obecněji, distribuce Δ konstantní dimenze k na M se nazývá *integrovatelná*, jestliže pro každý bod $q \in M$ existuje podvarietta $N \subset M$, jejíž tečný prostor leží v Δ_q . Jestliže uvažujeme integrální varietu jako hladký povrch v \mathbb{R}^n , pak se distribuce rovná tečnému prostoru tohoto povrchu v bodě q .

Integrální variety spojuje s involutivní distribucí následující věta. Její důkaz může být nalezen v [5].

Věta 2.5. *Frobeniova věta. Regulární distribuce je integrovatelná právě tehdy, když je involutivní.*

Spolu s tečným prostorem $T_q\mathbb{R}^n$ můžeme pracovat s duálním tečným prostorem $T_q^*\mathbb{R}^n$, tj. množinou lineárních funkcí na $T_q\mathbb{R}^n$ s hodnotou v \mathbb{R} . Stejně jako jsme definovali vektorové pole na \mathbb{R}^n , definujeme *1-formu* jako zobrazení, která přiřazuje každému bodu $q \in \mathbb{R}^n$ takzvaný *kovektor* $\omega(q) \in T_q^*\mathbb{R}^n$. V lokálních souřadnicích reprezentujeme hladkou 1-formu jako

$$\omega(q) = (\omega_1(q) \quad \omega_2(q) \quad \dots \quad \omega_n(q)).$$

1-forma vyjádřená na vektorovém poli dává hodnotu v \mathbb{R} , kterou můžeme zapsat v lokálních souřadnicích předpisem

$$\omega \cdot f = \sum_i \omega_i f_i.$$

Pro plánování pohybu neholonomních systémů nejdříve převedeme specifická omezení daná jako 1-formy na ekvivalentní řídicí systém. Problém konstrukce cesty $q(t) \in \mathbb{R}^n$ mezi danými q_0 a q_f převedeme na omezení

$$\omega_i(q)\dot{q} = 0, \quad i = 1, \dots, k. \quad (2.2)$$

ω_i jsou lineární funkce v tečném prostoru \mathbb{R}^n , tzn. 1-formy. Předpokládáme, že ω_i jsou hladké a lineárně nezávislé nad množinou hladkých funkcí.

Alternativně se řídicí systém zapisuje ve tvaru:

$$\Sigma : \quad \dot{q} - g_1(q)u_1 + \dots + g_m(q)u_m \quad q \in \mathbb{R}^n, u \in U \subset \mathbb{R}^m, \quad (2.3)$$

kde $g_i(q)$ jsou řešení rovnice (2.2). Tento systém se nazývá *drift-free*, to znamená, že při řízení nastaveném na nulu se systém nepohybuje. Předpokládáme, že g_j jsou hladká, lineárně nezávislá vektorová pole na \mathbb{R}^n a že jejich tok je definován pro všechny časy (g_j jsou kompletní). Chceme určit podmínky, za kterých můžeme řídit z $q_0 \in \mathbb{R}^n$ do libovolného $q_f \in \mathbb{R}^n$ vhodnou volbou $u(\cdot)$.

Systém Σ je říditelný, jestliže pro libovolné $q_0, q_f \in \mathbb{R}^n$ existuje $T > 0$ a $u : [0, T] \rightarrow U$ takové, že Σ splňuje $q(0) = q_0$ a $q(T) = q_f$.

Nechť $\mathfrak{L}(g_1, \dots, g_m)$ je Lieova algebra generovaná g_1, \dots, g_m , o níž hovoříme jako o *Lieova algebra říditelnosti*. Z konstrukce zahrnuté u definice Lieovy závorky v předcházející části vidíme, že použitím vstupní sekvence

$$\begin{aligned} u_1 &= +1 & u_2 &= 0 & \text{pro } 0 \leq t < \epsilon \\ u_1 &= 0 & u_2 &= +1 & \text{pro } \epsilon \leq t < 2\epsilon \\ u_1 &= -1 & u_2 &= 0 & \text{pro } 2\epsilon \leq t < 3\epsilon \\ u_1 &= 0 & u_2 &= -1 & \text{pro } 3\epsilon \leq t < 4\epsilon, \end{aligned}$$

dostáváme pohyb ve směru Lieovy závorky $[g_1, g_2]$. Kdybychom v této sekvenci pokračovali, mělo by být možné generovat pohyb podél směrů daných všemi ostatními Lieovými součiny spojenými s g_i . Je tedy možné řídit systém podél všech směrů reprezentovaných v $\mathfrak{L}(g_1, \dots, g_m)$. Toto upřesňuje následující věta, důkaz viz. [5].

Věta 2.6. *Chow-Rashevského věta. Control system (2.3) je lokálně říditelný v $q \in \mathbb{R}^n$, jestliže $\overline{\Delta}_q = T_q\mathbb{R}^n$.*

Tento výsledek podmiňuje, že drift-free system Σ je říditelný, jestliže hodnost Lieovy algebry říditelnosti je n .

Na závěr definujeme speciální případ hladké variety vybavené distribucí. Hladká varieta s takovou distribucí se označuje zobecněná geometrie cest a dále budeme ukazovat, že konfigurační prostory našich mechanismů jsou právě tyto geometrie.

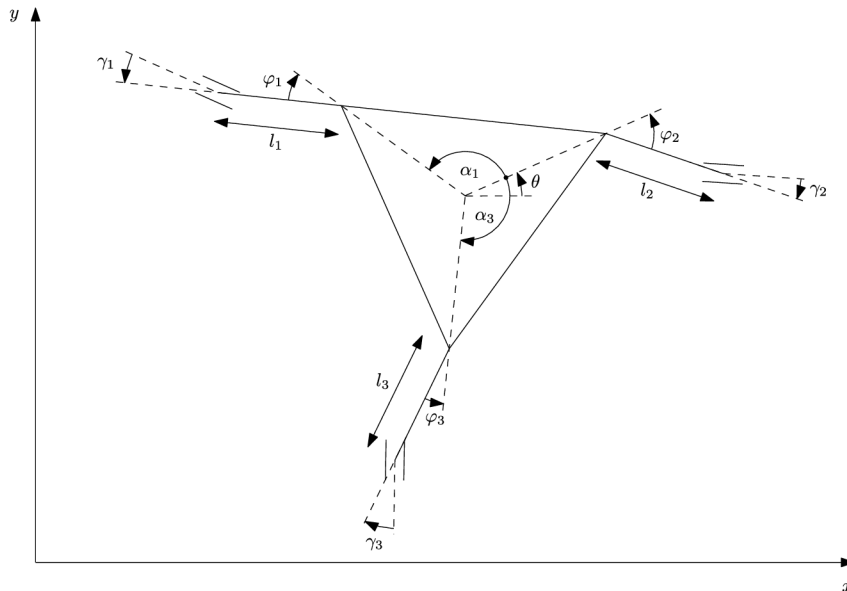
Definice 2.7. Nechť M je hladká varieta dimenze $2n + 1 \geq 5$. Pak *zobecněná geometrie cest* na M je dána dvěma distribucemi $E, V \subset TM$ dimenze 1 a n takovými, že platí:

1. $E \cap V = 0$.
2. Lieova závorka dvou vektorových polí z V je vektorové pole v $E \oplus V$.
3. Pokud $\xi \in \Gamma(E)$ a $\eta \in \Gamma(V)$ a bod $x \in M$, pak $[\xi, \eta](x) \in E_x \oplus V_x$ implikuje $\xi(x) = 0$ nebo $\eta(x) = 0$.

3 Zobecněný trident snake

3.1 Popis trident snake robota

Na obrázku 4 je zobrazen obecný model trident snake robota, jímž se zabývá tato práce. Robot je tvořen rovnostranným trojúhelníkem a třemi nohami - články - ve vrcholech trojúhelníku. V této práci budeme uvažovat, že každá noha má právě jeden článek, v obecném případě jich může mít i více. Na konci každé nohy se nachází kolečko. Spojení trojúhelníku s články a článků s kolečky je provedeno klouby. Klouby robota je možné natáčet, nohy robota je možné protahovat a zkracovat. Robot se nachází v rovině xy . Pozice robota je reprezentována souřadnicemi $[x, y]$ těžiště trojúhelníku. Poloha jednotlivých koleček je vyjádřena souřadnicemi $[x_i, y_i]$. Celkový úhel natočení robota vůči souřadnému systému je označen θ , úhel natočení jednotlivých nohou vůči těžnicím těla robota je označen jako φ_i , natočení kolečka vůči odpovídajícímu článku je γ_i . Délky nohou robota jsou značeny l_i . Úhly mezi těžnicemi těla jsou konstantní, rovny $\frac{2\pi}{3}$. Pro jednoduchost budeme uvažovat vzdálenost od těžiště trojúhelníku k vrcholům rovnu jedné.



Obrázek 4: Model trident snake robota

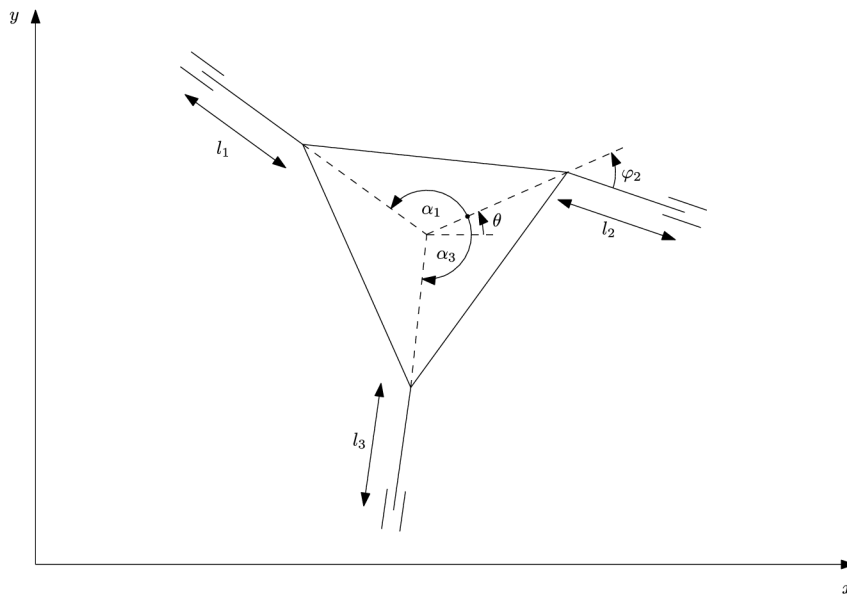
V dalších podkapitolách se budeme postupně zabývat jednotlivými konfiguracemi robota. Každý robot bude mít 4 proměnné parametry, které můžeme řídit. Na obrázcích budou označeny pouze ty úhly natočení a délky nohou, které je možné na daném robotovi ovládat. Články, které nemůžeme protahovat a zkracovat, zvolíme pro zjednodušení délky jedna.

Zaměříme se na modely trident snake robotů, jejichž algebra říditelnosti splňuje definici zobecněné geometrie cest. Ukážeme, že námi zdefinované mechanismy mají tu vlastnost, že pro jejich algebru říditelnosti platí $\Delta = E \oplus V$, kde $[V, V] = 0$. To znamená že vektorová pole, která generují podprostor V komutují. Z pohledu vlastního řízení, je to splněno v případě, kdy pohyb nejdříve podle vektorového pole X a poté podle pole Y dává stejný výsledek jako pohyb podle těchto polí v opačném pořadí. Konkrétně je to splněno pokud zvolíme jako tři ze čtyř proměnných parametrů protažení jednotlivých článků robota nebo

natočení jeho koleček. Pokud protáhneme jeden článek, změní se souřadnice polohy tohoto kolečka, ale zbytek robota zůstane ve stejné poloze. Proto pokud natáhneme nejdříve například článek 1 a poté článek 2, dostaneme stejný výsledek jako při natahování v opačném pořadí. V případě změny úhlu natočení koleček se při pootočení kolečka změní pouze směrový vektor tohoto kolečka a zbytek robota opět není ovlivněn. Výsledná poloha robota při natočení například kolečka 1 a následném natočení kolečka 2 je proto stejná jako při natáčení těchto koleček v opačném pořadí. Takto zvolíme tři parametry, které generují podprostor V , čtvrtý zvolený parametr bude generovat podprostor E .

3.2 Varianta 1

V případě tohoto mechanismu řídíme úhel natočení druhého článku a délky všech jeho článků. Výpočty byly provedeny v programu Maple 2016, řešení se nachází v souboru Varianta1.mw.



Obrázek 5: První model trident snake robota

Polohu jednotlivých koleček vyjádříme soustavou rovnic:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= x + c(\theta + \alpha_1) + l_1 c(\theta + \alpha_1) \\
 y_1 &= y + s(\theta + \alpha_1) + l_1 s(\theta + \alpha_1) \\
 x_2 &= x + c(\theta) + l_2 c(\theta + \varphi_2) \\
 y_2 &= y + s(\theta) + l_2 s(\theta + \varphi_2) \\
 x_3 &= x + c(\theta + \alpha_3) + l_3 c(\theta + \alpha_3) \\
 y_3 &= y + s(\theta + \alpha_3) + l_3 s(\theta + \alpha_3)
 \end{aligned}$$

Derivací podle času získáme vektory rychlostí koleček:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= \dot{x} - s(\theta + \alpha_1)\dot{\theta} + \dot{l}_1 c(\theta + \alpha_1) - l_1 s(\theta + \alpha_1)\dot{\theta} \\
 \dot{y}_1 &= \dot{y} + c(\theta + \alpha_1)\dot{\theta} + \dot{l}_1 s(\theta + \alpha_1) + l_1 c(\theta + \alpha_1)\dot{\theta} \\
 \dot{x}_2 &= \dot{x} - s(\theta)\dot{\theta} + \dot{l}_2 c(\theta + \varphi_2) - l_2 s(\theta + \varphi_2)(\dot{\theta} + \dot{\varphi}_2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{y}_2 &= \dot{y} + c(\theta)\dot{\theta} + \dot{l}_2c(\theta + \varphi_2) + l_2c(\theta + \varphi_2)(\dot{\theta} + \dot{\varphi}_2) \\
\dot{x}_3 &= \dot{x} - s(\theta + \alpha_3)\dot{\theta} + \dot{l}_3c(\theta + \alpha_3) - l_3s(\theta + \alpha_3)\dot{\theta} \\
\dot{y}_3 &= \dot{y} + c(\theta + \alpha_3)\dot{\theta} + \dot{l}_3s(\theta + \alpha_3) + l_3c(\theta + \alpha_3)\dot{\theta}
\end{aligned}$$

Předpokládáme, že nedochází ke smýkání koleček. Tzn., že vektor rychlosti a normálový vektor kolečka jsou vzájemně kolmé, což vyjadřuje rovnice:

$$v_i \cdot n_i = 0, \quad (3.1)$$

kde n_i jsou normálové vektory a v_i jsou vektory rychlostí, $v_i = (\dot{x}_i, \dot{y}_i)$.

Směrové vektory koleček vyjádříme rovnicemi:

$$\begin{aligned}
s_1 &= (c(\theta + \alpha_1), s(\theta + \alpha_1)) \\
s_2 &= (c(\theta + \varphi_2), s(\theta + \varphi_2)) \\
s_3 &= (c(\theta + \alpha_3), s(\theta + \alpha_3))
\end{aligned}$$

Normálové vektory tedy jsou:

$$\begin{aligned}
n_1 &= (s(\theta + \alpha_1), -c(\theta + \alpha_1)) \\
n_2 &= (s(\theta + \varphi_2), -c(\theta + \varphi_2)) \\
n_3 &= (s(\theta + \alpha_3), -c(\theta + \alpha_3))
\end{aligned}$$

Po dosazení vektorů rychlostí a normálových vektorů koleček do rovnice (3.1) a roznásobení:

$$\begin{aligned}
0 &= \dot{x}s(\theta + \alpha_1) - s^2(\theta + \alpha_1)\dot{\theta} + \dot{l}_1c(\theta + \alpha_1)s(\theta + \alpha_1) - l_1s^2(\theta + \alpha_1)\dot{\theta} - \dot{y}c(\theta + \alpha_1) - \\
&\quad - c(\theta + \alpha_1) - c^2(\theta + \alpha_1)\dot{\theta} - \dot{l}_1s(\theta + \alpha_1)s(\theta + \alpha_1) - l_1c^2(\theta + \alpha_1)\dot{\theta} \\
0 &= \dot{x}s(\theta + \varphi_2) - s(\theta)s(\theta + \varphi_2)\dot{\theta} + \dot{l}_2c(\theta + \varphi_2)s(\theta + \varphi_2) - l_2s^2(\theta + \varphi_2)(\dot{\theta} + \dot{\varphi}_2) - \\
&\quad - \dot{y}c(\theta + \varphi_2) - c(\theta)c(\theta + \varphi_2)\dot{\theta} - \dot{l}_2c(\theta + \varphi_2)s(\theta + \varphi_2) - l_2c^2(\theta + \varphi_2)(\dot{\theta} + \dot{\varphi}_2) \\
0 &= \dot{x}s(\theta + \alpha_3) - s^2(\theta + \alpha_3)\dot{\theta} + \dot{l}_3c(\theta + \alpha_3)s(\theta + \alpha_3) - l_3s^2(\theta + \alpha_3)\dot{\theta} - \dot{y}c(\theta + \alpha_3) - \\
&\quad - c(\theta + \alpha_3) - c^2(\theta + \alpha_3)\dot{\theta} - \dot{l}_3s(\theta + \alpha_3)s(\theta + \alpha_3) - l_3c^2(\theta + \alpha_3)\dot{\theta}
\end{aligned}$$

Rovnice upravíme s využitím goniometrických vzorců $s^2(x) + c^2(x) = 1$ a $c(x)c(y) + (x)s(y) = c(x - y)$:

$$\begin{aligned}
\dot{x}s(\theta + \alpha_1) - \dot{y}c(\theta + \alpha_1) - \dot{\theta} - l_1\dot{\theta} &= 0 \\
\dot{x}s(\theta + \varphi_2) - \dot{y}c(\theta + \varphi_2) - (c(\varphi_2 + l_2))\dot{\theta} - l_2\dot{\varphi}_2 &= 0 \\
\dot{x}s(\theta + \alpha_3) - \dot{y}c(\theta + \alpha_3) - \dot{\theta} - l_3\dot{\theta} &= 0
\end{aligned}$$

Tuto soustavu můžeme maticově zapsat ve tvaru:

$$\begin{pmatrix}
s(\theta + \alpha_1) & -c(\theta + \alpha_1) & -(1 + l_1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
s(\theta + \varphi_2) & -c(\theta + \varphi_2) & -(c(\varphi_2 + l_2)) & -l_2 & 0 & 0 & 0 \\
s(\theta + \alpha_3) & -c(\theta + \alpha_3) & -(1 + l_3) & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\dot{x} \\
\dot{y} \\
\dot{\theta} \\
\dot{\varphi}_2 \\
\dot{l}_1 \\
\dot{l}_2 \\
\dot{l}_3
\end{pmatrix} = 0 \quad (3.2)$$

Toto je soustava neholonomních rovnic.

Z pohledu diferenciální geometrie můžeme o řádcích první matice soustavy (3.2) přemýšlet jako o koeficientech α_i omezení ω , přičemž $\omega \in T_q^*M$ můžeme vyjádřit v lokální bázi $\{\omega_x, \omega_y, \omega_\theta, \omega_{\varphi_2}, \omega_{l_1}, \omega_{l_2}, \omega_{l_3}\}$ prostoru T^*M jako

$$\omega = \alpha_1\omega_x + \alpha_2\omega_y + \dots + \alpha_3\omega_\theta + \alpha_4\omega_{\varphi_2} + \alpha_5\omega_{l_1} + \alpha_6\omega_{l_2} + \alpha_7\omega_{l_3},$$

kde $\omega \in T^*M$ má tu vlastnost, že v lokální bázi $\{\partial_x, \partial_y, \partial_\theta, \partial_{\varphi_2}, \partial_{l_1}, \partial_{l_2}, \partial_{l_3}\}$ prostoru TM platí

$$\begin{aligned}\omega(\partial_x) &= \alpha_1, \\ \omega(\partial_y) &= \alpha_2, \\ \omega(\partial_\theta) &= \alpha_3, \\ \omega(\partial_{\varphi_2}) &= \alpha_4, \\ \omega(\partial_{l_1}) &= \alpha_5, \\ \omega(\partial_{l_2}) &= \alpha_6, \\ \omega(\partial_{l_3}) &= \alpha_7.\end{aligned}\tag{3.3}$$

Omezení ω pro první řádek první matice (3.2) tedy odpovídá kovektoru

$$\omega = s(\theta + \alpha_1)\omega_x - c(\theta + \alpha_1)\omega_y - (1 + l_1)\omega_\theta + 0\omega_{l_1} + 0\omega_{l_2} + 0\omega_{l_3}.$$

Prvek tečného prostoru zapíšeme ve tvaru

$$X = \dot{x}\partial_x + \dot{y}\partial_y + \dot{\theta}\partial_\theta + \dot{l}_1\partial_{l_1} + \dot{l}_2\partial_{l_2} + \dot{l}_3\partial_{l_3}.$$

Nyní s využitím (3.3) vyjádříme ω na X :

$$\omega(X) = s(\theta + \alpha_1)\dot{x} - c(\theta + \alpha_1)\dot{y} - (1 + l_1)\dot{\theta}.$$

Dostáváme tedy přesně naši první rovnici ze soustavy (3.2).

Soustava (3.2) je soustava tří rovnic o sedmi neznámých, která má nekonečně mnoho řešení závislých na čtyřech parametrech. Parametry zvolíme následovně:

$$\dot{l}_3 = t_1, \quad \dot{l}_2 = t_2, \quad \dot{l}_1 = t_3, \quad \dot{\varphi}_2 = t_4.$$

Řešení soustavy pak vyjádříme jako:

$$t_1g_1 + t_2g_2 + t_3g_3 + t_4g_4,$$

tedy

$$t_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_4 \begin{pmatrix} g_4^1 \\ g_4^2 \\ g_4^3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{l}_1 \\ \dot{l}_2 \\ \dot{l}_3 \end{pmatrix},$$

kde

$$g_4^1 = \frac{-2c(\theta + \pi/3)l_1l_2 + 2s(\theta + \pi/6)l_2l_3 - 2c(\theta + \pi/3)l_2 + 2s(\theta + \pi/6)l_2}{2l_1c(\pi/6 + \varphi_2) + l_2\sqrt{3} + 2l_3s(\varphi_2 + \pi/3) + 3c(\pi/6 + \varphi_2) + 3s(\varphi_2 + \pi/3)}$$

$$g_4^2 = \frac{-2s(\theta + \frac{\pi}{3})l_1l_2 - 2c(\theta + \pi/6)l_2l_3 - 2s(\theta + \pi/3)l_2 - 2c(\theta + \pi/6)l_2}{2l_1c(\pi/6 + \varphi_2) + l_2\sqrt{3} + 2l_3s(\varphi + \pi/3) + 3c(\pi/6 + \varphi) + 3s(\varphi_2 + \pi/3)}$$

$$g_4^3 = \frac{l_2\sqrt{3}}{2l_1c(\pi/6 + \varphi_2) + l_2\sqrt{3} + 2l_3s(\varphi_2 + \pi/3) + 3c(\pi/6 + \varphi_2) + 3s(\varphi_2 + \pi/3)}.$$

Podle definice 2.2 spočteme Lieovy závorky vektorových polí $[g_i, g_j]$, $i = 1, \dots, 4$, $j = 1, \dots, 4$.

$$g_{14} = [g_1, g_4] = (g_{14}^1, g_{14}^2, g_{14}^3, 0, 0, 0, 0)^T,$$

kde

$$g_{14}^1 = \frac{s(\theta + \pi/6)l_2}{2l_1c(\pi/6 + \varphi_2) + l_2\sqrt{3} + 2l_3s(\varphi_2 + \pi/3) + 3c(\pi/6 + \varphi_2) + 3s(\varphi_2 + \pi/3)} - \frac{(4c(\theta + \pi/3)l_1l_2 + 4s(\theta + \pi/6)l_2l_3 - 4c(\theta + \pi/3)l_2 + 4s(\theta + \pi/6)l_2)s(\varphi_2 + \pi/3)}{(2l_1c(\pi/6 + \varphi_2) + l_2\sqrt{3} + 2l_3s(\varphi_2 + \pi/3) + 3c(\pi/6 + \varphi_2) + 3s(\varphi_2 + \pi/3))^2}$$

$$g_{14}^2 = -\frac{2c(\theta + \pi/6)l_2}{2l_1c(\pi/6 + \varphi_2) + l_2\sqrt{3} + 2l_3s(\varphi_2 + \pi/3) + 3c(\pi/6 + \varphi_2) + 3s(\varphi_2 + \pi/3)} - \frac{((-4s(\theta + \pi/3)l_1l_2 - 4c(\theta + \pi/6)l_3 - 4s(\theta + \pi/3)l_2 - 4c(\theta + \pi/6)l_2)s(\varphi_2 + \pi/3))}{(2l_1c(\pi/6 + \varphi_2) + l_2\sqrt{3} + 2l_3s(\varphi_2 + \pi/3) + 3c(\pi/6 + \varphi_2) + 3s(\varphi_2 + \pi/3))^2}$$

$$g_{14}^3 = 2\frac{l_2\sqrt{3}s(\varphi_2 + \pi/3)}{(2l_1c(\pi/6 + \varphi_2) + l_2\sqrt{3} + 2l_3s(\varphi_2 + \pi/3) + 3c(\pi/6 + \varphi_2) + 3s(\varphi_2 + \pi/3))^2}.$$

$$g_{24} = [g_2, g_4] = (g_{24}^1, g_{24}^2, g_{24}^3, 0, 0, 0, 0)^T,$$

kde

$$g_{24}^1 = \frac{-2c(\theta + \pi/3)l_1 + 2s(\theta + \pi/6)l_3 - 2c(\theta + \pi/3) + 2s(\theta + \pi/6)}{2l_1c(\pi/6 + \varphi_2) + \sqrt{3}l_2 + 2l_3s(\varphi_2 + \pi/3) + 3c(\pi/6 + \varphi_2) + 3s(\varphi_2 + \pi/3)} - \frac{(-2c(\theta + \pi/3)l_1l_2 + 2s(\theta + \pi/6)l_2l_3 - 2c(\theta + \pi/3)l_2 + 2s(\theta + \pi/6)l_2)\sqrt{3}}{(2l_1c(\pi/6 + \varphi_2) + \sqrt{3}l_2 + 2l_3s(\varphi_2 + \pi/3) + 3c(\pi/6 + \varphi_2) + 3s(\varphi_2 + \pi/3))^2}$$

$$g_{24}^2 = \frac{-2s(\theta + \pi/3)l_1 - 2c(\theta + \pi/6)l_3 - 2s(\theta + \pi/3) - 2c(\theta + \pi/6)}{2l_1c(\pi/6 + \varphi_2) + \sqrt{3}l_2 + 2l_3s(\varphi_2 + \pi/3) + 3c(\pi/6 + \varphi_2) + 3s(\varphi_2 + \pi/3)} - \frac{(-2s(\theta + \pi/3)l_1l_2 - 2c(\theta + \pi/6)l_2l_3 - 2s(\theta + \pi/3)l_2 - 2c(\theta + \pi/6)l_2)\sqrt{3}}{(2l_1c(\pi/6 + \varphi_2) + \sqrt{3}l_2 + 2l_3s(\varphi_2 + \pi/3) + 3c(\pi/6 + \varphi_2) + 3s(\varphi_2 + \pi/3))^2}$$

$$g_{24}^3 = -\frac{\sqrt{3}}{2l_1c(\pi/6 + \varphi_2) + \sqrt{3}l_2 + 2l_3s(\varphi_2 + \pi/3) + 3c(\pi/6 + \varphi_2) + 3s(\varphi_2 + \pi/3)} - \frac{3l_2}{(2l_1c(\pi/6 + \varphi_2) + \sqrt{3}l_2 + 2l_3s(\varphi_2 + \pi/3) + 3c(\pi/6 + \varphi_2) + 3s(\varphi_2 + \pi/3))^2}.$$

$$g_{34} = [g_3, g_4] = (g_{34}^1, g_{34}^2, g_{34}^3, 0, 0, 0, 0)^T,$$

kde

$$g_{34}^1 = -2\frac{c(\theta + \pi/3)l_2}{2l_1c(\pi/6 + \varphi_2) + \sqrt{3}l_2 + 2l_3s(\varphi_2 + \pi/3) + 3c(\pi/6 + \varphi_2) + 3s(\varphi_2 + \pi/3)}$$

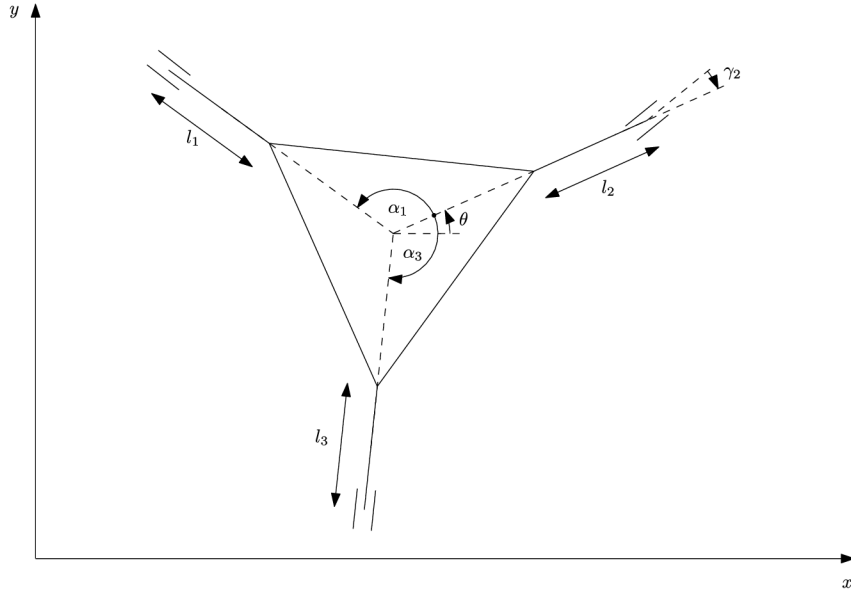
$$\begin{aligned}
& -2 \frac{(-2c(\theta + \pi/3)l_1l_2 + 2s(\theta + \pi/6)l_2l_3 - 2c(\theta + \pi/3)l_2 + 2s(\theta + \pi/6)l_2)c(\pi/6 + \varphi_2)}{2l_1c(\pi/6 + \varphi_2) + \sqrt{3}l_2 + 2l_3s(\varphi_2 + \pi/3) + 3c(\pi/6 + \varphi_2) + 3s(\varphi_2 + \pi/3))^2} \\
g_{34}^2 &= -2 \frac{s(\theta + \pi/3)l_2}{2l_1c(\pi/6 + \varphi_2) + \sqrt{3}l_2 + 2l_3s(\varphi_2 + \pi/3) + 3c(\pi/6 + \varphi_2) + 3s(\varphi_2 + \pi/3)} - \\
& -2 \frac{(-2s(\theta + \pi/3)l_1l_2 - 2c(\theta + \pi/6)l_2l_3 - 2s(\theta + \pi/3)l_2 - 2c(\theta + \pi/6)l_2)c(\pi/6 + \varphi_2)}{(2l_1c(\pi/6 + \varphi_2) + \sqrt{3}l_2 + 2l_3s(\varphi_2 + \pi/3) + 3c(\pi/6 + \varphi_2) + 3s(b + \pi/3))^2} \\
g_{34}^3 &= 2 \frac{\sqrt{3}l_2c(\pi/6 + \varphi_2)}{(2l_1c(\pi/6 + \varphi_2) + \sqrt{3}l_2 + 2l_3s(\varphi_2 + \pi/3) + 3c(\pi/6 + \varphi_2) + 3s(\varphi_2 + \pi/3))^2}.
\end{aligned}$$

Dimenze algebry říditelnosti $\bar{\Delta}_q$ je 7, tedy $\bar{\Delta} = T_qM$ a podle věty 2.6 je systém lokálně říditelný. Podle tvrzení 1 platí, že $g_{41} = -g_{14}$, $g_{42} = -g_{24}$, $g_{43} = -g_{34}$. Zbylé Lieovy závorky, tedy g_{12} , g_{13} , g_{23} , g_{21} , g_{31} , g_{32} , g_{11} , g_{22} , g_{33} , g_{44} , se rovnají 0. Nenulové závorky dostáváme vždy, pokud se v nich vyskytuje vektorové pole g_4 .

Tento výsledek rozebereme s ohledem na definici 2.7. Hladká varieta $M = (x, y, \theta, \varphi_2, l_1, l_2, l_3)$ je dimenze 7, tj. pro $n = 3 \cdot 7 = 2 \cdot 3 + 1 \geq 5$. Vektorové pole g_4 tvoří distribuci E dimenze 1, vektorová pole g_1 , g_2 , g_3 tvoří distribuci V dimenze 3. Zřejmě platí, že $E \cap V = 0$. Zároveň platí $[\alpha_1g_1 + \alpha_2g_2 + \alpha_3g_3, \beta_1g_1 + \beta_2g_2 + \beta_3g_3] = 0 \in E \oplus V$.

3.3 Varianta 2

V případě tohoto trident snake robota řídíme délky všech jeho článků a úhel natočení kolečka na článku 2. Výpočty se nachází na v souboru Varianta2.mw



Obrázek 6: Druhý model trident snake robota

Polohu jednotlivých koleček vyjádříme soustavou rovnic:

$$\begin{aligned}
x_1 &= x + c(\theta + \alpha_1) + l_1c(\theta + \alpha_1) \\
y_1 &= y + s(\theta + \alpha_1) + l_1s(\theta + \alpha_1) \\
x_2 &= x + c(\theta) + l_2c(\theta) \\
y_2 &= y + s(\theta) + l_2s(\theta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_3 &= x + c(\theta + \alpha_3) + l_3 c(\theta + \alpha_3) \\y_3 &= y + s(\theta + \alpha_3) + l_3 s(\theta + \alpha_3)\end{aligned}$$

Normálové vektory:

$$\begin{aligned}n_1 &= (s(\theta + \alpha_1), -c(\theta + \alpha_1)) \\n_2 &= (s(\theta + \gamma_2), -c(\theta + \gamma_2)) \\n_3 &= (s(\theta + \alpha_3), -c(\theta + \alpha_3))\end{aligned}$$

Postupujeme obdobně jako v přechozím případě a dostáváme soustavu rovnic:

$$\begin{aligned}\dot{x}s(\theta + \alpha_1) - \dot{y}c(\theta + \alpha_1) - \dot{\theta}(1 + l_1) &= 0 \\ \dot{x}s(\theta + \gamma_2) - \dot{y}c(\theta + \gamma_2) - c(\gamma_2)(1 + l_2)\dot{\theta} - s(\gamma_2)\dot{l}_2 &= 0 \\ \dot{x}s(\theta + \alpha_3) - \dot{y}c(\theta + \alpha_3) - \dot{\theta} - l_3\dot{\theta} &= 0\end{aligned}$$

Tuto soustavu můžeme maticově zapsat ve tvaru:

$$\begin{pmatrix} s(\theta + \alpha_1) & -c(\theta + \alpha_1) & -(1 + l_1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s(\theta + \gamma_2) & -c(\theta + \gamma_2) & -c(\gamma_2) \cdot (1 + l_2) & 0 & 0 & s(\gamma_2) & 0 \\ s(\theta + \alpha_3) & -c(\theta + \alpha_3) & -(1 + l_3) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\gamma}_2 \\ \dot{l}_1 \\ \dot{l}_2 \\ \dot{l}_3 \end{pmatrix} = 0$$

Opět se jedná o soustavu tří neholonomních rovnic o sedmi neznámých, která má nekonečně mnoho řešení závislých na čtyřech parametrech. Parametry zvolíme následovně:

$$\dot{l}_3 = t_1, \quad \dot{l}_2 = t_2, \quad \dot{l}_1 = t_3, \quad \dot{\gamma}_2 = t_4.$$

Řešení soustavy opět vyjádříme jako:

$$t_1 g_1 + t_2 g_2 + t_3 g_3 + t_4 g_4,$$

řešení má v tomto případě tvar

$$t_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} g_2^1 \\ g_2^2 \\ g_2^3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\gamma}_2 \\ \dot{l}_1 \\ \dot{l}_2 \\ \dot{l}_3 \end{pmatrix},$$

kde

$$\begin{aligned}g_2^1 &= \left(c(\gamma_2 + \theta + \pi/6)l_3 + s(\pi/3 + \gamma_2 + \theta)l_1 - \sin(-\gamma_2 + \pi/3 + \theta)l_1 - c(-\gamma_2 + \theta + \right. \\ &\quad \left. + \pi/6)l_3 + c(\gamma_2 + \theta + \pi/6) + s(\pi/3 + \gamma_2 + \theta) - s(-\gamma_2 + \pi/3 + \theta) - c(-\gamma_2 + \theta + \right.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \pi/6) \Big) / \left(2l_1c(\pi/6 + \gamma_2) + c(\gamma_2)(1 + l_2)\sqrt{3} + 2l_3s(\pi/3 + \gamma_2) + 2c(\pi/6 + \gamma_2) + \right. \\
& \left. + 2s(\pi/3 + \gamma_2) \right) \\
g_2^2 = & \left(s(\gamma_2 + \theta + \pi/6)l_3 - s(-\gamma_2 + \theta + \pi/6)l_3 + c(-\gamma_2 + \pi/3 + \theta)l_1 - l_1c(\pi/3 + \gamma_2 + \theta) \right. \\
& \left. + s(\gamma_2 + \theta + \pi/6) - s(-\gamma_2 + \theta + \pi/6) + c(-\gamma_2 + \pi/3 + \theta) - c(\pi/3 + \gamma_2 + \theta) \right) / \\
& \left(2l_1c(\pi/6 + \gamma_2) + c(\gamma_2)(1 + l_2)\sqrt{3} + 2l_3s(\pi/3 + \gamma_2) + 2c(\pi/6 + \gamma_2) + 2s(\pi/3 + \gamma_2) \right) \\
g_2^3 = & \frac{\sqrt{3}s(\gamma_2)}{2l_1c(\pi/6 + \gamma_2) + c(\gamma_2)(1 + l_2)\sqrt{3} + 2l_3s(\pi/3 + \gamma_2) + 2c(\pi/6 + \gamma_2) + 2s(\pi/3 + \gamma_2)}.
\end{aligned}$$

Provedeme výpočet Lieových závorek vektorových polí $[g_i, g_j]$, $i = 1, \dots, 4$, $j = 1, \dots, 4$. Zde uvedeme alespoň část výsledků, které jsme získali s pomocí Maple.

$$g_{12} = -g_{21} = [g_1, g_2] = (g_{12}^1, g_{12}^2, g_{12}^3, 0, 0, 0, 0)^T,$$

kde

$$\begin{aligned}
g_{12}^1 = & \frac{c(\gamma_2 + \theta + \pi/6) - c(-\gamma_2 + \theta + \pi/6)}{2l_1c(\pi/6 + \gamma_2) + c(\gamma_2)(1 + l_2)\sqrt{3} + 2l_3s(\pi/3 + \gamma_2) + 2c(\pi/6 + \gamma_2) + 2s(\pi/3 + \gamma_2)} - \\
& - 2 \left((\cos(\gamma_2 + \theta + \pi/6)l_3 + s(\pi/3 + \gamma_2 + \theta)l_1 - s(-\gamma_2 + \pi/3 + \theta)l_1 - c(-\gamma_2 + \theta + \right. \\
& \left. + \pi/6)l_3 + c(\gamma_2 + \theta + \pi/6) + s(\pi/3 + \gamma_2 + \theta) - s(-\gamma_2 + \pi/3 + \theta) - c(-\gamma_2 + \theta + \right. \\
& \left. + \pi/6))s(\pi/3 + \gamma_2) \right) / \left(2l_1c(\pi/6 + \gamma_2) + c(\gamma_2)(1 + l_2)\sqrt{3} + 2l_3s(\pi/3 + \gamma_2) + 2c(\pi/6 + \right. \\
& \left. + \gamma_2) + 2s(\pi/3 + \gamma_2) \right)^2 \\
g_{12}^2 = & \frac{s(\gamma_2 + \theta + \pi/6) - s(-\gamma_2 + \theta + \pi/6)}{2l_1c(\pi/6 + \gamma_2) + c(\gamma_2)(1 + l_2)\sqrt{3} + 2l_3s(\pi/3 + \gamma_2) + 2c(\pi/6 + \gamma_2) + 2s(\pi/3 + \gamma_2)} - \\
& - 2 \left((s(\gamma_2 + \theta + \pi/6)l_3 - s(-\gamma_2 + \theta + \pi/6)l_3 + c(-\gamma_2 + \pi/3 + \theta)l_1 - l_1c(\pi/3 + \gamma_2 + \right. \\
& \left. + \theta) + s(\gamma_2 + \theta + \pi/6) - s(-\gamma_2 + \theta + \pi/6) + \cos(-\gamma_2 + \pi/3 + \theta) - c(\pi/3 + \gamma_2 + \right. \\
& \left. + \theta))s(\pi/3 + \gamma_2) \right) / \left(2l_1c(\pi/6 + \gamma_2) + c(\gamma_2)(1 + l_2)\sqrt{3} + 2l_3s(\pi/3 + \gamma_2) + \right. \\
& \left. + 2c(\pi/6 + \gamma_2) + 2s(\pi/3 + \gamma_2) \right)^2 \\
g_{12}^3 = & - 2 \left(\sqrt{3}s(\gamma_2)s(\pi/3 + \gamma_2) \right) / \left(2l_1c(\pi/6 + \gamma_2) + c(\gamma_2)(1 + l_2)\sqrt{3} + 2l_3s(\pi/3 + \gamma_2) + \right. \\
& \left. + 2c(\pi/6 + \gamma_2) + 2s(\pi/3 + \gamma_2) \right)^2.
\end{aligned}$$

Další vypočtená Lieova závorka je

$$g_{24} = -g_{42} = [g_2, g_4] = (g_{24}^1, g_{24}^2, g_{24}^3, 0, 0, 0, 0)^T,$$

Lieova závorka

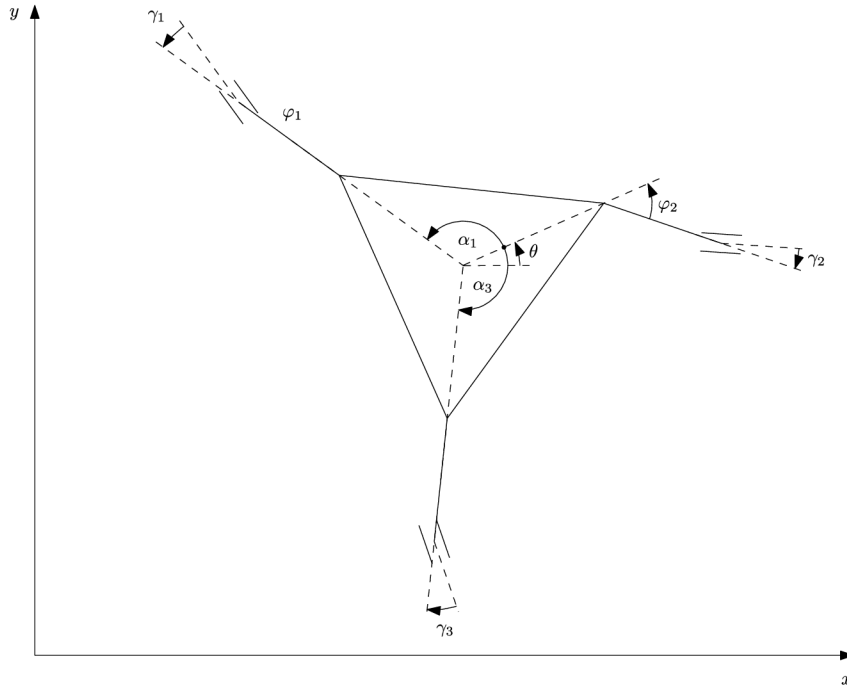
$$g_{23} = -g_{32} = [g_2, g_3] = (g_{23}^1, g_{23}^2, g_{23}^3, 0, 0, 0, 0)^T,$$

je poslední nenulovou závorkou, pro zbylé závorky platí $g_{13} = g_{14} = g_{31} = g_{34} = g_{41} = g_{43} = g_{11} = g_{22} = g_{33} = g_{44} = 0$.

Znovu vidíme, že nenulové závorky dostáváme pokud se v nich vyskytuje jedno konkrétní vstupní vektorové pole g_i , v tomto případě g_2 . Toto vektorové pole tvoří podprostor E , zbylá pole g_1, g_3, g_4 tvoří podprostor V . Zároveň platí, že $E \cap V = 0$ a $[\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \alpha_3 g_3, \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2 + \beta_3 g_3] = 0 \in E \oplus V$. Dimenze algebry říditelnosti $\overline{\Delta}_q$ je opět 7, tedy $\overline{\Delta} = T_q M$ a podle věty 2.6 je systém lokálně říditelný.

3.4 Varianta 3

V případě tohoto robota řídíme úhel natočení všech koleček a natočení článku 2, výsledky získané softwarem Maple se nachází v příloženém souboru Varianta3.mw.



Obrázek 7: Druhý model trident snake robota

Polohu jednotlivých koleček vyjádříme soustavou rovnic:

$$\begin{aligned}x_1 &= x + 2c(\theta + \alpha_1) \\y_1 &= y + 2s(\theta + \alpha_1) \\x_2 &= x + c(\theta) + c(\theta + \varphi_2) \\y_2 &= y + s(\theta) + s(\theta + \varphi_2) \\x_3 &= x + 2c(\theta + \alpha_3) \\y_3 &= y + 2s(\theta + \alpha_3)\end{aligned}$$

Normálové vektory jsou:

$$\begin{aligned}n_1 &= (s(\theta + \alpha_1 + \gamma_1), -c(\theta + \alpha_1 + \gamma_1)) \\n_2 &= (s(\theta + \varphi_2 + \gamma_2), -c(\theta + \varphi_2 + \gamma_2)) \\n_3 &= (s(\theta + \alpha_3 + \gamma_3), -c(\theta + \alpha_3 + \gamma_3))\end{aligned}$$

Postupuje obdobně jako v předchozích případech. Derivací polohy koleček podle času získáme vektory rychlostí. Rychlosti a normálové vektory dále dosadíme do rovnice (3.1), roznásobíme a upravíme.

Získáme soustavu tří neholonomních rovnic o sedmi neznámých a zvolíme 4 parametry pro její vyřešení. Soustava:

$$\begin{pmatrix} s(\theta + \alpha_1 + \gamma_1) - c(\theta + \alpha_1 + \gamma_1) & -2c(\gamma_1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s(\theta + \varphi_2 + \gamma_2) - c(\theta + \varphi_2 + \gamma_2) & -(c(\varphi_2 + \gamma_2) + c(\gamma_2)) & -c(\gamma_2) & 0 & 0 & 0 \\ s(\theta + \alpha_3 + \gamma_3) - c(\theta + \alpha_3 + \gamma_3) & -2c(\gamma_3) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi}_2 \\ \dot{\gamma}_1 \\ \dot{\gamma}_2 \\ \dot{\gamma}_3 \end{pmatrix} = 0$$

Volba parametrů:

$$\dot{\gamma}_3 = t_1, \quad \dot{\gamma}_2 = t_2, \quad \dot{\gamma}_1 = t_3, \quad \dot{\varphi}_2 = t_4.$$

Řešení soustavy opět vyjádříme jako

$$t_1 g_1 + t_2 g_2 + t_3 g_3 + t_4 g_4,$$

tedy ve tvaru

$$t_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_4 \begin{pmatrix} g_4^1 \\ g_4^2 \\ g_4^3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\gamma}_2 \\ \dot{l}_1 \\ \dot{l}_2 \\ \dot{l}_3 \end{pmatrix},$$

Při výpočtu Lieových závorek se ukazuje, že tyto závorky jsou nenulové, jen pokud je v nich vektorové pole g_4 (nenulové závorky jsou $g_{41} = -g_{14}$, $g_{42} = -g_{24}$, $g_{43} = -g_{34}$), zatímco ostatní (g_{12} , g_{13} , g_{23} , g_{21} , g_{31} , g_{32} , g_{11} , g_{22} , g_{33} , g_{44}) se rovnají nule.

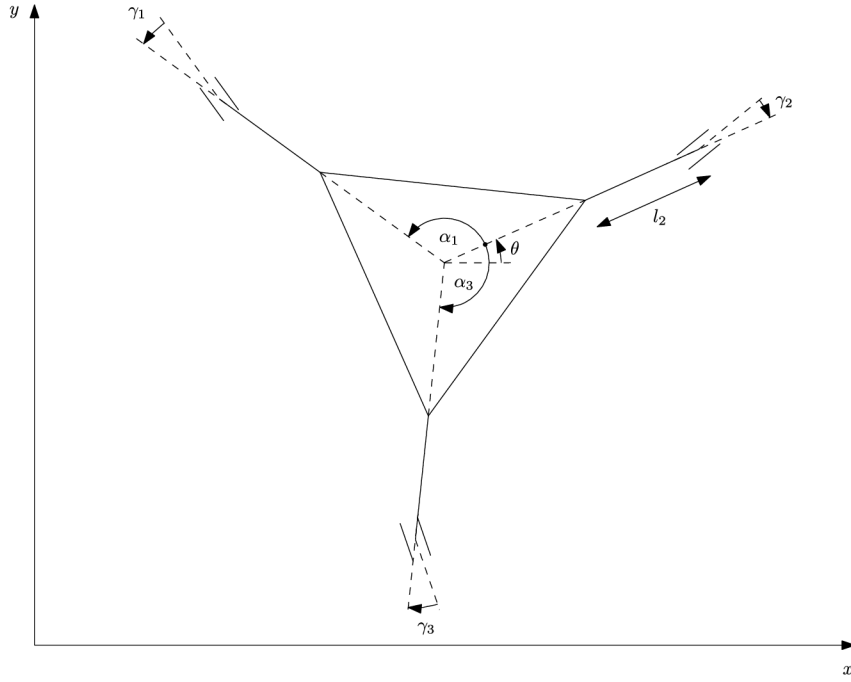
Můžeme tedy říci, že vektorové pole g_4 generuje podprostor E , pole g_1 , g_2 , g_3 generují podprostor V . Zároveň platí, že $E \cap V = 0$ a $[\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \alpha_3 g_3, \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2 + \beta_3 g_3] = 0 \in E \oplus V$. Dimenze algebry říditelnosti $\overline{\Delta}_q$ je opět 7, $\overline{\Delta} = T_q M$ a podle věty 2.6 je systém lokálně říditelný.

3.5 Varianta 4

U tohoto robota řídíme úhel natočení všech jeho koleček a délku článku 2. Výpočty provedené softwarem Maple se nachází v souboru Varianta4.mw.

Postup je stejný dříve, polohu koleček vyjádříme soustavou rovnic:

$$\begin{aligned} x_1 &= x + 2c(\theta + \alpha_1) \\ y_1 &= y + 2s(\theta + \alpha_1) \\ x_2 &= x + c(\theta) + l_2 c(\theta) \\ y_2 &= y + s(\theta) + l_2 s(\theta) \end{aligned}$$



Obrázek 8: Čtvrtý model trident snake robota

$$x_3 = x + 2c(\theta + \alpha_3)$$

$$y_3 = y + 2s(\theta + \alpha_3)$$

Normálové vektory jsou:

$$n_1 = (s(\theta + \alpha_1 + \gamma_1), -c(\theta + \alpha_1 + \gamma_1))$$

$$n_2 = (s(\theta + \gamma_2), -c(\theta + \gamma_2))$$

$$n_3 = (s(\theta + \alpha_3 + \gamma_3), -c(\theta + \alpha_3 + \gamma_3))$$

Získáme soustavu

$$\begin{pmatrix} s(\theta + \alpha_1 + \gamma_1) & -c(\theta + \alpha_1 + \gamma_1) & -2c(\gamma_1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s(\theta + \gamma_2) & -c(\theta + \gamma_2) & -c(\gamma_2)(1 + l_2) & s(\gamma_2) & 0 & 0 & 0 \\ s(\theta + \alpha_3 + \gamma_3) & -c(\theta + \alpha_3 + \gamma_3) & -2c(\gamma_3) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{l}_2 \\ \dot{\gamma}_1 \\ \dot{\gamma}_2 \\ \dot{\gamma}_3 \end{pmatrix} = 0,$$

parametry volíme

$$\dot{\gamma}_3 = t_1, \quad \dot{\gamma}_2 = t_2, \quad \dot{\gamma}_1 = t_3, \quad \dot{l}_2 = t_4.$$

a dostáváme čtyři vstupní vektorová pole

$$g_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_4 = \begin{pmatrix} g_4^1 \\ g_4^2 \\ g_4^3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Po výpočtu Lieových závor vidíme, že vektorové pole g_4 generuje podprostor E a Lieovy závorky s jeho pomocí získané jsou nenulové. Zbylá pole g_1, g_2, g_3 generují podprostor V . Platí $E \cap V = 0$ a $[\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \alpha_3 g_3, \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2 + \beta_3 g_3] = 0 \in E \oplus V$. Dimenze algebry říditelnosti $\overline{\Delta}_q$ je opět 7, tedy $\overline{\Delta} = T_q M$ a podle věty 2.6 je systém lokálně říditelný.

3.6 Zobecněná planární geometrie cest

Výsledky této kapitoly nás vedou k definování speciální podtřídy zobecněné geometrie cest, a to zobecněné planární geometrie cest.

Definice 3.1. Nechť M je hladká varieta dimenze $2n + 1 \geq 5$. Pak *planární geometrie cest* na M je dána dvěma distribucemi $E, V \subset TM$ dimenze 1 a n takovými, že platí:

1. $E \cap V = 0$.
2. Lieova závorka dvou vektorových polí z V se rovná 0.
3. Pokud $\xi \in \Gamma(E)$ a $\eta \in \Gamma(V)$ a bod $x \in M$, pak $[\xi, \eta](x) \in E_x \oplus V_x$ implikuje $\xi(x) = 0$ nebo $\eta(x) = 0$.

Modely trident snake robotů uvedené v této kapitole splňují definici planární geometrie cest.

4 Hamiltonova geometrie

V této kapitole představíme Hamiltonovu funkci a její vlastnosti, dále popíšeme geodetiky z pohledu Hamiltoniánu. Geodetiky získané tímto postupem se nazývají *normální*. Ukážeme, že geodetiky definované Hamiltonovským formalismem jsou vždy lokálně horizontální křivky minimální délky. Výpočty v této kapitole budou provedeny pro první variantu trident snake robota z kapitoly 3. Tato kapitola čerpá z [1].

4.1 Hamiltonova funkce

Nechť $\Delta = \text{span}\{X_1, \dots, X_k\}$ je distribuce dimenze k , $k < n$, na n -rozměrné varietě M . Pak Hamiltonova funkce $H : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$ je definována jako

$$H(x, p) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \langle X_j(x), p \rangle^2, \quad x \in M, p \in T_x^*M.$$

Hamiltonova funkce může být také zapsána ve tvaru

$$H(x, p) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n h^{ij}(x) p_i p_j,$$

kde $h^{ij}(x)$ jsou hladké funkce.

Důkaz. viz. [1]. □

Dále uvedeme předpis pro výpočet koeficientů h^{ij} Hamiltonovy funkce horizontálních vektorových polí X_1, \dots, X_k , která generují distribuci Δ . Nechť

$$X_j = \sum_{i=1}^n a_j^i(x) \partial_{x_i}, \quad j = 1, \dots, k,$$

je reprezentace vektorových polí X_j . Protože vektorová pole X_j jsou lineárně nezávislá, hodnost matice $(a_j^i(x))$ je rovna k , $\forall x \in M$.

Koeficienty kvadratické formy, která definuje Hamiltonovu funkci H , jsou dány jako

$$h^{\alpha\beta} = \sum_{j=1}^k a_j^\alpha a_j^\beta. \tag{4.1}$$

Důkaz. Hamiltonova funkce může být napsána jako

$$H(x, p) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \langle X_j(x), p \rangle^2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=1}^n a_j^i(x) p_i \right)^2.$$

Protože $H(x, p) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} h^{ij} p_i p_j$, koeficienty jsou

$$\begin{aligned} h^{\alpha\beta} &= \frac{\partial^2 H}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} \left(\sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=1}^n a_j^i p_i \right)^2 \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial p_\alpha} \left(\sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=1}^n a_j^i p_i \right) a_j^\beta \right) = \sum_{j=1}^k a_j^\alpha a_j^\beta. \end{aligned}$$

□

Podle vzorce (4.1) spočítáme koeficienty

$$(h^{ij}) = \begin{pmatrix} h^{11} & h^{12} & \dots & h^{17} \\ h^{21} & h^{22} & \dots & h^{27} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h^{71} & h^{72} & \dots & h^{77} \end{pmatrix}$$

Hamiltonovy funkce. Naše vektorová pole jsou tvaru

$$\begin{aligned} g_1 &= \partial l_3 \\ g_2 &= \partial l_2 \\ g_3 &= \partial l_1 \\ g_4 &= \frac{-2c(\theta + \pi/3)l_1l_2 + 2s(\theta + \pi/6)l_2l_3 - 2c(\theta + \pi/3)l_2 + 2s(\theta + \pi/6)l_2}{2l_1c(\pi/6 + \varphi_2) + l_2\sqrt{3} + 2l_3s(\varphi_2 + \pi/3) + 3c(\pi/6 + \varphi_2) + 3s(\varphi_2 + \pi/3)} \partial_x + \\ &+ \frac{-2s(\theta + \frac{\pi}{3})l_1l_2 - 2c(\theta + \pi/6)l_2l_3 - 2s(\theta + \pi/3)l_2 - 2c(\theta + \pi/6)l_2}{2l_1c(\pi/6 + \varphi_2) + l_2\sqrt{3} + 2l_3s(\varphi_2 + \pi/3) + 3c(\pi/6 + \varphi_2) + 3s(\varphi_2 + \pi/3)} \partial_y + \\ &+ \frac{l_2\sqrt{3}}{2l_1c(\pi/6 + \varphi_2) + l_2\sqrt{3} + 2l_3s(\varphi_2 + \pi/3) + 3c(\pi/6 + \varphi_2) + 3s(\varphi_2 + \pi/3)} \partial_\theta + \\ &+ \partial_{\varphi_2}. \end{aligned}$$

Výsledná matice koeficientů je

$$(h^{ij}) = \begin{pmatrix} h^{11} & h^{12} & h^{13} & h^{14} & 0 & 0 & 0 \\ h^{21} & h^{22} & h^{23} & h^{24} & 0 & 0 & 0 \\ h^{31} & h^{32} & h^{33} & h^{34} & 0 & 0 & 0 \\ h^{41} & h^{42} & h^{43} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

kde

$$\begin{aligned} h^{14} = h^{41} &= \frac{2l_2((l_3 + 1)s(\theta + \pi/6) - (l_1 + 1)c(\theta + \pi/3))}{(2l_1 + 3)c(\pi/6 + \varphi_2) + (2l_3 + 3)s(\varphi_2 + \pi/3) + l_2\sqrt{3}} \\ h^{24} = h^{42} &= \frac{-2l_2((l_1 + 1)s(\theta + \pi/3) + (l_3 + 1)c(\theta + \pi/6))}{(2l_1 + 3)c(\pi/6 + \varphi_2) + (2l_3 + 3)s(\varphi_2 + \pi/3) + l_2\sqrt{3}} \\ h^{34} = h^{43} &= -\frac{\sqrt{3}l_2}{2l_1c(\pi/6 + \varphi_2) + l_2\sqrt{3} + 2l_3s(\varphi_2 + \pi/3) + 3c(\pi/6 + \varphi_2) + 3s(\varphi_2 + \pi/3)}. \end{aligned}$$

Pokud spočítáme matici koeficientů pro distribuci V generovanou vstupním vektorovým polem g_4 , dostáváme ji ve tvaru:

$$(h^{ij}) = \begin{pmatrix} h^{11} & h^{12} & h^{13} & h^{14} & 0 & 0 & 0 \\ h^{21} & h^{22} & h^{23} & h^{24} & 0 & 0 & 0 \\ h^{31} & h^{32} & h^{33} & h^{34} & 0 & 0 & 0 \\ h^{41} & h^{42} & h^{43} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matice koeficientů vypočítaná pro distribuci E tvořenou poli g_1, g_2 a g_3 je jednotková matice tvaru:

$$(h^{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pro představu jsou zde uvedeny pouze některé koeficienty h^{ij} . Koeficienty byly spočítány pomocí programu Maple 2016 a všechny mohou být nalezeny v příloženém souboru Varianta1.mw.

Tvrzení 2. *Nechť \cdot je distribuce hodnosti k , $k < n$, na n -rozměrné varietě M . Pak matice $h^{\alpha\beta}(x)$ koeficientů Hamiltonovy funkce spojená s distribucí \mathcal{D} je singulární $\forall x \in M$.*

Důkaz. viz. [1]. □

V našem případě je $k=4$ a $n=7$. Je vidět, že $\det(h^{ij}) = \det \begin{pmatrix} h^{11} & h^{12} & h^{13} & h^{14} \\ h^{21} & h^{22} & h^{23} & h^{24} \\ h^{31} & h^{32} & h^{33} & h^{34} \\ h^{41} & h^{42} & h^{43} & 1 \end{pmatrix}$ a rovná

se 0. Výpočet je možné nalézt v souboru Varianta1.mw.

4.2 Geodetiky

Definice 4.1. Normální geodetika mezi body A a B je řešením Hamiltonova systému

$$\begin{aligned} \dot{x}(s) &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i(s) &= -\frac{\partial H}{\partial x^i}, \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

s okrajovými podmínkami $x(0) = A$ a $x(\tau) = B$.

Dále popíšeme rovnice normálních geodetik jako obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu. Využijeme k tomu Christoffelovy symboly

$$\Gamma^{iab}(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial h^{ia}(x)}{\partial x^r} h^{rb}(x) + \frac{\partial h^{ib}(x)}{\partial x^r} h^{ra}(x) - \frac{\partial h^{ab}(x)}{\partial x^r} h^{ri}(x) \right).$$

Pro každé dva kovektory p a ξ označíme $\Gamma^i(p, \xi) = \Gamma^{iab} p_a \xi_b$. Použita je zde Einsteinova sumační konvence, tedy $x^i y_i = \sum_i x^i y_i$.

Důkazy následujících dvou tvrzení mohou být nalezeny v [1].

Tvrzení 3. *Rovnice normálních geodetik jsou dány*

$$\ddot{x}^i(s) = \Gamma^i(x)(p(s), p(s)), \quad i = 1, \dots, n,$$

kde $(x(s), p(s))$ je řešení Hamiltonova systému.

Tvrzení 4. *Podél normálních geodetik je Hamiltonova funkce konstantní.*

Pro náš příklad mají rovnice pro výpočet Christoffelových symbolů tvar

$$\begin{aligned} \Gamma^{iab}(x) = & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial h^{ia}(t)}{\partial x} h^{1b}(t) + \frac{\partial h^{ib}(t)}{\partial x} h^{1a}(t) - \frac{\partial h^{ab}(t)}{\partial x} h^{1i}(t) + \right. \\ & + \frac{\partial h^{ia}(t)}{\partial y} h^{2b}(t) + \frac{\partial h^{ib}(t)}{\partial y} h^{2a}(t) - \frac{\partial h^{ab}(t)}{\partial y} h^{2i}(t) + \\ & + \frac{\partial h^{ia}(t)}{\partial \theta} h^{3b}(t) + \frac{\partial h^{ib}(t)}{\partial \theta} h^{3a}(t) - \frac{\partial h^{ab}(t)}{\partial \theta} h^{3i}(t) + \\ & + \frac{\partial h^{ia}(t)}{\partial \varphi_2} h^{4b}(t) + \frac{\partial h^{ib}(t)}{\partial \varphi_2} h^{4a}(t) - \frac{\partial h^{ab}(t)}{\partial \varphi_2} h^{4i}(t) + \\ & + \frac{\partial h^{ia}(t)}{\partial l_1} h^{5b}(t) + \frac{\partial h^{ib}(t)}{\partial l_1} h^{5a}(t) - \frac{\partial h^{ab}(t)}{\partial l_1} h^{5i}(t) + \\ & + \frac{\partial h^{ia}(t)}{\partial l_2} h^{6b}(t) + \frac{\partial h^{ib}(t)}{\partial l_2} h^{6a}(t) - \frac{\partial h^{ab}(t)}{\partial l_2} h^{6i}(t) + \\ & \left. + \frac{\partial h^{ia}(t)}{\partial l_3} h^{7b}(t) + \frac{\partial h^{ib}(t)}{\partial l_3} h^{7a}(t) - \frac{\partial h^{ab}(t)}{\partial l_3} h^{7i}(t) \right). \end{aligned}$$

Uvedeme alespoň příklad některého Christoffelova symbolu, např.

$$\begin{aligned} \Gamma^{714} = & - \frac{s(d + \pi/6)l_2}{2l_1c(\pi/6 + b) + l_2\sqrt{3} + 2l_3s(b + \pi/3) + 3c(\pi/6 + b) + 3s(b + \pi/3)} + \\ & + \frac{(-2c(d + \pi/3)l_1l_2 + 2s(d + \pi/6)l_2l_3 - 2c(d + \pi/3)l_2 + 2s(d + \pi/6)l_2)s(b + \pi/3)}{(2l_1c(\pi/6 + b) + l_2\sqrt{3} + 2l_3s(b + \pi/3) + 3c(\pi/6 + b) + 3s(b + \pi/3))^2}. \end{aligned}$$

Výpočty všech Christoffelových symbolů byly spočítány v Maple 2016, soubor Varianta1.mw. Pomocí těchto symbolů je možné sestavit rovnice geodetik a tak určit pohyb mechanismu, který je optimální.

5 Závěr

Prvním cílem této bakalářské práce bylo nastudování základů diferenciální geometrie a neholonomních systémů a osvojení se počítání s Lieovou závorkou. V první kapitole jsme se seznámili s potřebnou teorií, od vektorových polí, přes variety až po Lieovu závorku, Lieovu algebru říditelnosti a zobecněnou geometrii cest.

Ve kapitole 2 jsme zkoumali čtyři konkrétní modely trident snake robota. Po vyřešení neholonomních soustav rovnic sestavených pro dané modely a získání vstupních vektorových polí, jsme vypočítali Lieovy závorky, dopočítali algebru říditelnosti a pomocí Chow-Rashevského věty dokázali, že mechanismy jsou lokálně říditelné. Dále jsme zkoumali distribuce dané vstupními vektorovými poli. Tečný prostor našeho konfiguračního prostoru měl ve všech případech dvě distribuce E a V , které měly takové vlastnosti, že splňovaly definici zobecněné geometrie cest. Tím jsme splnili druhý cíl této bakalářské práce a sice nalezení takového planárního mechanismu s filtrací (4,7), který odpovídá geometrii cest. Toto vyhodnocení a fakt, že pro každý mechanismus byla splněna dodatečná podmínka nulovosti Lieových závorek dvou podmnožin z podprostoru V , nás vedlo k definování zobecněné planární geometrie cest.

V poslední kapitole jsme vypočítali Hamiltonovu funkci, Christoffelovy symboly a sestavili rovnice normálních geodetik. Tyto rovnice jsou pro nás zajímavé, neboť jejich vyřešením je možné získat optimální pohyb daného mechanismu.

Reference

- [1] CALIN, Ovidiu. *Sub-Riemannian geometry: general theory and examples.*, New York: Cambridge University Press, 2009. Encyclopedia of mathematics and its applications. ISBN 978-0-521-89730-3.
- [2] ČAP, Andreas a Jan Slovák. *Parabolic geometries.*, Providence, R.I.: American Mathematical Society, c2009. Mathematical surveys and monographs, v. 154. ISBN 978-0-8218-2681-2.
- [3] JEAN, Frédéric. *Control of nonholonomic systems: from sub-Riemannian geometry to motion planning.* Cham: Springer, 2014. Briefs in mathematics (Springer). ISBN 978-3-319-08689-7.
- [4] MICHOR, Peter W. *Topics in differential geometry.* Providence, R.I.: American Mathematical Society, c2008. ISBN 978-0-8218-2003-2.
- [5] MURRAY, Richard M., Zexiang LI a Shankar. SASTRY. *A mathematical introduction to robotic manipulation.*, Boca Raton: CRC Press, c1994. ISBN 08-493-7981-4.
- [6] SELIG, Jon M. *Geometric Fundamentals of Robotics. 2.* New York: Springer, 2004. ISBN 978-0-3-7-27274-0.

Seznam použitých znaků a zkratek

| | |
|------------------------|---|
| \mathbb{R} | množina reálných čísel |
| $c(\varphi)$ | $\cos(\varphi)$ |
| $s(\varphi)$ | $\sin(\varphi)$ |
| \dot{x} | časová derivace x |
| $u \cdot v$ | skalární součin vektorů u a v |
| $\langle u, v \rangle$ | skalární součin vektorů u a v |
| $[f, g]$ | Lieova závorka vektorových polí f a g |