



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

**ANALÝZA DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC SYSTÉMŮ S
ÚZKÝMI MÍSTY**

AN ANALYSIS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS FOR SYSTEMS INVOLVING BOTTLENECKS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Ondřej Borkovec

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. Tomáš Kisela, Ph.D.

BRNO 2017

Zadání bakalářské práce

Ústav:	Ústav matematiky
Student:	Ondřej Borkovec
Studijní program:	Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor:	Matematické inženýrství
Vedoucí práce:	Ing. Tomáš Kisela, Ph.D.
Akademický rok:	2016/17

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Analyza diferenciálních rovnic systémů s úzkými místy

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Úzká místa představují aktuální téma, neboť je s nimi úzce spjata problematika front a zpoždění. Nedostatečná kapacita některé součásti je příčinou problémů mnoha systémů, ať jde o městskou dopravu či výrobní proces.

Oproti tradičněji používaným počítačovým simulacím, může popis pomocí diferenciálních rovnic a s tím spojená diskuze řešení přinést zajímavý pohled na podmínky stability systému.

Cíle bakalářské práce:

Rozšířit model odvozený v knize Diferenciální rovnice systémů s úzkými místy tak, aby pokrýval širší spektrum možných situací (např. nekonstantní koeficienty soustavy rovnic). Pro některé speciální případy analyzovat stabilitu systému, případně další kvalitativní vlastnosti řešení.

Seznam doporučené literatury:

ČERMÁK, J. a A. ŽENÍŠEK. Matematika III. 1. Brno: VUT v Brně, Fakulta strojního inženýrství. Akademické nakladatelství CERM, 2001.

TREIBER, M. and A. KESTING. Traffic flow dynamics: data, models and simulation. New York: Springer, c2013. ISBN 978-364-2324-604.

ŠIMEČKOVÁ, K. Diferenciální rovnice systémů s úzkými místy. Brno: VUT v Brně, Fakulta strojního inženýrství. 2016. 27 s. Vedoucí Ing. Tomáš Kisela, Ph.D.

HARTMAN, P. Ordinary differential equations. 2. Boston: Birkhaeuser, 1982. ISBN 3764330686.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2016/17

V Brně, dne

L. S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Tato práce se zabývá modelováním toku výrobků skrze úzká místa pomocí obyčejných diferenciálních rovnic. Model vychází z hydrodynamické analogie. V práci jsou dále uvedeny podmínky pro udržitelnost systému, tedy požadavky na nepřekročení jeho maximální kapacity, aby tok výrobků mohl neustále procházet daným místem. Pomocí modelu jsou v práci dále spočteny příklady pro různé systémy.

Abstract

This thesis deals with modelling of the flow of products through systems involving bottlenecks using ordinary differential equations. The model is based on a hydrodynamics analogy. Further, the conditions for the sustainability of a system, that is the requirements needed not to exceed the maximal capacity, so that the flow of products can flow continuously through the given spot. A model is used to solve examples for varying systems.

klíčová slova

úzká místa, fronta, obyčejné diferenciální rovnice, hydrodynamický model

keywords

bottlenecks, queue, ordinary differential equation, hydrodynamical model

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci *Analýza diferenciálních rovnic systémů s úzkými místy* vypracoval samostatně pod vedením Ing. Tomáše Kisely, Ph.D. s použitím materiálů uvedených v seznamu literatury.

Ondřej Borkovec

Děkuji vedoucímu mé práce Ing. Tomáši Kiselovi, Ph.D. za jeho trpělivost a za veškeré připomínky a rady.

Ondřej Borkovec

Obsah

1	Úvod	12
2	Matematický aparát	13
2.1	Obyčejné diferenciální rovnice	13
2.2	Hydrodynamický model	14
2.2.1	Pojmy	14
2.2.2	Rovnice pro pracoviště	14
3	Chování pracoviště	15
3.1	Podmínky udržitelnosti	15
3.2	Odvození podmínek	16
3.2.1	1. podmínka udržitelnosti	16
3.2.2	Příklad 1	18
3.2.3	Příklad 2	18
3.2.4	2. podmínka udržitelnosti	19
3.2.5	Příklad 3	21
3.2.6	Příklad 4	22
4	Soustava více pracovišť	23
4.1	1. podmínka udržitelnosti	25
4.2	2. podmínka udržitelnosti	25
4.3	Příklad	26
5	Algoritmizace a výpočty pomocí modelu	26
6	Závěr	29
7	Přílohy	31

1 Úvod

Modelování pomocí diferenciálních rovnic tvoří oblast aplikací matematiky na nejrůznější přírodní, technické, ale i společenskovední odvětví. Práce se zabývá popisem systémů s úzkými místy. Úzké místo je spjato s přetížením systému a vzniká v něm tehdy, pokud jednotka dorazí na určité místo dříve, než ji je systém schopen zpracovat. Tím je dále způsobeno, že se začne na tomto místě tvořit fronta a všechny jednotky procházející tímto místem budou zpožděny. Problémem takového systému je, že mnohdy nemá potřebnou kapacitu v úzkém místě na to, aby se tímto problémem dokázal vypořádat a nepřehltit se. Jako konkrétní příklad si můžeme představit dopravní tok nebo výrobní linku, kde úzké místo představuje například zúžená komunikace nebo nedostatečná rychlost zpracovávání přístroje na lince.

Popis problému lze řešit z několika úhlů pohledu. Makroskopický pohled nahlíží na systém spojitě a na rozdíl od diskrétního mikroskopického se nezabývá chováním jednotlivých jednotek procházejících systémem. Existují i modely mesoskopické, které se zaměřují na popis malých skupin jednotek ne tolik detailními rovnicemi. Této problematice se více věnuje kniha [5]. V naší práci se budeme zabývat modelem makroskopickým, kde uplatňujeme podobnost s hydrodynamickým modelem a zákonem zachování.[2]

Cílem práce je navázat a rozšířit práci [1] zobecněním některých situací, které popisuje. Po částech konstantní tok výrobků lze zobecnit na obecnou funkci času, která může být větší, než maximální možný výkon pracoviště. Dále úzké místo, musí platit podmínky, za kterých je ještě udržitelné. Pracoviště lze zapojit do soustavy, kde vztahy mezi pracovišti mohou být dány pomocí nekonstantních koeficientů. Pro všechny tyto případy je cílem vyslovit podmínky, pro které bude pracoviště ještě plnit svoji funkci a demonstrovat je na příkladech.

2 Matematický aparát

V této kapitole si zavedeme základní pojmy, definice a rovnice, ze kterých budeme v práci vycházet.

2.1 Obyčejné diferenciální rovnice

Abychom mohli s modelem pracovat, musíme si nejdříve definovat pojmy související s obyčejnými diferenciálními rovnicemi. Na toto téma bylo napsáno mnoho učebních textů a jiných publikací. Následující definice jsou citovány z [3] a [4].

Definice 2.1. Buď G podmnožina Euklidovského prostoru \mathbb{R}^2 a f reálná funkce, definovaná na G . Rovnice

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad (2.1)$$

se nazývá *diferenciální rovnice 1. řádu*.

Definice 2.2. Řešením rovnice (2.1) se rozumí funkce y , která je diferencovatelná v nějakém intervalu J a splňuje podmínky

$$[t, y(t)] \in G \quad a \quad \dot{y} = f(t, y) \quad \forall t \in J. \quad (2.2)$$

Definice 2.3. Buď $[t_0, y_0]$ libovolný bod v G . Úloha určit řešení rovnice (2.1), které splňuje počáteční podmínku

$$y(t_0) = y_0, \quad (2.3)$$

se nazývá *počáteční úloha (počáteční problém)*.

Definice 2.4. Soustavu n diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= f_1(t, y_1, \dots, y_n) \\ \dot{y}_2 &= f_2(t, y_1, \dots, y_n) \\ &\vdots \\ \dot{y}_n &= f_n(t, y_1, \dots, y_n), \end{aligned} \quad (2.4)$$

kde funkce $f_k = (k = 1, \dots, n)$ jsou definovány na $(n + 1)$ -rozměrné oblasti $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$, nazýváme *normální soustavou diferenciálních rovnic prvního řádu*.

Definice 2.5. Řešením normální soustavy (2.4) nazýváme každou skupinu n funkcí

$$y_1, y_2, \dots, y_n,$$

které jsou spojitě diferencovatelné na nějakém intervalu J a pro všechny body $t \in J$ vyhovují dané soustavě (2.4).

2.2 Hydrodynamický model

2.2.1 Pojmy

Dále v práci budeme používat i několik pojmů, vycházející z hydrodynamické analogie, kterou si nyní popíšeme. Budeme se zabývat modelem výrobní linky, která je složena z několika pracovišť. Tato pracoviště budou zpracovávat výrobky, podobně jako je tomu v manufaktuře. Každé tedy zpracuje část výrobku a pak ho pošle na jiné pracoviště, na kterém bude zpracována jiná část výrobku. V první části práce se budeme zabývat modelem jednoho pracoviště a ve druhé model zobecníme pro obecnou soustavu.

Představme si pracoviště jako nádobu s otvorem, do které přiléváme tekutinu a ta vlivem svojí tíhy z nádoby vytéká. Obecně platí, že se výtoková rychlost mění s množstvím kapaliny v nádobě. Lze ale odvodit takový tvar nádoby, pro který bude výtoková rychlost konstantní (podrobněji v [1]). Nyní si vysvětlíme pojmy a značení, se kterými budeme v práci později pracovat.

Veličinu označující přítok kapaliny do dané nádoby označme Q^p a budeme předpokládat, že $Q^p(t)$, tedy přítok je proměnný v čase t . Dále definujeme také v čase proměnnou veličinu $Q^v(t)$, která představuje výtok. Aktuální množství kapaliny v čase t , které se v nádobě nachází při jejím průchodu označíme $V(t)$, a jako poslední dvě veličiny definujeme Q^* a V^* , což jsou maximální možný výtok z nádoby a její celkový objem. Ty jsou na rozdíl od předchozích veličin konstantní. Nádoba se tedy v čase nijak nemění. Faktory jako vnitřní tření nebo energetické ztráty při výtoku zanedbáme. Platí zde zákon zachování hmoty a rovnice kontinuity.

Výše zmíněné veličiny přeformulujeme pro použití v našem modelu. Veličině $Q^p(t)$ budeme říkat *přítkon* a značí množství výrobků, které aktuálně přichází na pracoviště. Analogicky $Q^v(t)$ je jeho *výkon* a říká, jaké množství za jednotku času pracoviště aktuálně zpracovává. Nyní připustíme, že má také svoje úložiště, které má určitou maximální kapacitu. Tu označme V^* . Pokud na pracoviště budou přicházet výrobky rychleji, než je dokáže zpracovávat, budou se na něm hromadit. Je to tedy analogie k celkovému objemu nádoby. Aktuální stav *fronty* výrobků čekajících na zpracování označme $V(t)$. Nakonec definujeme veličinu Q^* , což je maximální možný výkon pracoviště. Stejně jako u nádoby předpokládáme, že se kapacita ani maximální výkon v čase nemění. Dále si také vypůjčíme vlastnost konstantního výtoku, tedy výkon pracoviště se nemění v závislosti na množství výrobků nacházejícího se na úložišti, a nakonec předpokládáme, že se na pracovišti průchodem, podobně jako v nádobě, výrobky nijak neztrácí.

V dalších kapitolách budeme v některých případech používat i pojem *práce*. Tento pojem je hydrodynamickém modelu ekvivalentní pojmu kapalina a v našem modelu bude představovat výrobky, resp. jejich množství, které se pracovištěm zpracovávají. Veškeré hodnoty těchto veličin budeme pro naši potřebu považovat za bezrozměrné

2.2.2 Rovnice pro pracoviště

Pro celý model uvažujeme, že funkce $V(t)$, $Q^p(t)$, $Q^v(t)$ jsou omezené periodické funkce, které jsou definované od nuly s periodou $T \in \mathbb{R}^+$ a platí, že $t \geq 0$.

Pro náš model platí rovnice kontinuity, v diferenciálním tvaru:

$$\dot{V}(t) = Q^p(t) - Q^v(t). \quad (2.5)$$

Je zřejmé, že výkon pracoviště je funkce jejíž hodnoty jsou závislé na jeho aktuálním stavu. Okamžitý výkon pracoviště Q^v je tedy definován následujícím způsobem:

$$Q^v(t) = \begin{cases} Q^p(t) & \iff V(t) = 0 \\ Q^* & \iff V(t) > 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

Pokud na pracovišti není žádná nahromaděná práce V , funguje pak na stejný výkon jaký na něj přichází příkon. Jestliže nebude stíhat práci zpracovávat, začne se tvořit fronta a pracoviště funguje na plný výkon, dokud se její velikost opět nebude rovnat nule. Okamžitý výkon pracoviště tedy nemůže být nikdy větší, než maximální možný výkon a řídí se podle toho, zda-li se v daném okamžiku na pracovišti nachází fronta. Předpokládejme, že v čase $t = 0$ se na pracovišti nenachází žádná počáteční fronta. Pak $V(t)$ lze vyjádřit rovnicí:

$$V(t) = \max(0, \int_{t_j}^t Q_p(\tau) - Q^* d\tau), t \in (t_j, t_{j+1}), j = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.7)$$

kde body t_j jsou takové, že:

$$\begin{aligned} Q^p(t_j) &= Q^*, \\ Q^p(t_j) &> 0, \\ \int_{t_{j-1}}^{t_j} Q^p(\tau) - Q^* &< 0, \end{aligned} \quad (2.8)$$

kde $t_0 = 0$. Předpis (2.7) říká, že fronta na pracovišti je buďto nulová a nebo je rovna $\int_{t_j}^t Q^p - Q^* d\tau$ přičemž t_j jsou takové body, ve kterých začíná fronta od nuly růst. Z předpisu (refpodminky) je vidět, že jsou tedy definovány rekurzí. Tyto body budeme v dalším textu označovat jako *hraniční*, protože ohraničují časové úseky, kde se tvořila fronta, která se později celá zpracovala.

Nyní se budeme věnovat popisu chování tohoto systému z hlediska dynamiky.

3 Chování pracoviště

3.1 Podmínky udržitelnosti

V této kapitole se budeme zabývat modelem pro jedno pracoviště. V první fázi přivedeme na vstup obecnou funkci $Q_0(t)$, vyjadřující příkon $Q^p(t)$ a dále budeme pracoviště sledovat z hlediska udržitelnosti, kterou si ihned definujeme. Podmínky pro udržitelnost systému s periodickým, po částech konstantním zdrojem z [1] se dají zobecnit i pro námi studovaný případ. Dostáváme tedy podobnou definici:

Definice 3.1. Systém považujeme za *udržitelný*, pokud po celou dobu platí podmínka:

$$V(t) \leq V^*, \forall t \geq 0. \quad (3.1)$$

Tedy nahromaděná fronta na pracovišti musí být vždy menší, než je jeho maximální kapacita.

Je dobré si uvědomit, že se na tuto podmínku můžeme dívat z krátkodobého a dlouhodobého časového hlediska. V prvním případě nás zajímá průběh fronty $V(t)$ na intervalu první a několika následujících n period. Budeme tedy zkoumat, zda-li na tomto intervalu fronta nepřekročí povolenou hodnotu. Pokud by byla podmínka splněna, ještě to ale neznamená, že je systém udržitelný. Když se na něj podíváme z dlouhodobého časového hlediska, tak požadujeme, aby tato podmínka platila pro neomezený počet period. To lze zaručit jednoduchým způsobem. Pokud má tedy nerovnost (3.1) platit pro všechna t , tak jejím důsledkem je, že

$$V(kT) \geq V((k+1)T), \forall k \geq n. \quad (3.2)$$

Od n -tého cyklu se tedy nesmí fronta na koncích intervalů periody zvětšovat.

Je otázkou, jakou nejmenší hodnotu může mít n , abychom o systému mohl jistě říci, že je udržitelný. Odpovědi na tuto otázku se budeme věnovat v následujícím textu, spolu s matematickým vyjádřením podmínky udržitelnosti a to z krátkodobého a dlouhodobého časového hlediska. Rozdělíme si tedy tato odvození na dvě části. Platnost rovnice (3.1) pro prvních několik period nazveme v textu jako 1. podmínku udržitelnosti a platnost jejího důsledku (3.2) nazveme jako 2. podmínku udržitelnosti.

3.2 Odvození podmínek

3.2.1 1. podmínka udržitelnosti

První bod definice (3.1) nám říká, že:

$$V(t) \leq V^*, \quad \forall t \in \langle 0, T \rangle. \quad (3.3)$$

Funkci fronty $V(t)$ lze vyjádřit rovnicí (2.7). Protože tam byla ale definována na míru (2.6) pomocí Q^* a má poměrně složitý zápis, pro potřebu odvození první podmínky si ukážeme postup vycházející z rovnice kontinuity (2.5) pro obecný výtok $Q^v(t)$. Integrujeme tedy (2.5) podle času τ mezi body 0 a $t \in \langle 0, T \rangle$:

$$V(t) - V(0) = \int_0^t Q^p(\tau) - Q^v(\tau) d\tau. \quad (3.4)$$

Počáteční podmínku, tedy velikost fronty na počátku, lze zvolit libovolnou a jejímu vlivu na udržitelnost se budeme věnovat v další části práce. Pro naše odvození položíme $V(0) = 0$ a dosadíme do (3.3):

$$\int_0^t Q^p(\tau) - Q^v(\tau) d\tau \leq V^*, \quad \forall t \in \langle 0, T \rangle \quad (3.5)$$

Je zřejmé, že to je námi hledané vyjádření definice první podmínky udržitelnosti (3.1). Dále se však můžeme zabývat specifikováním jednotlivých časů, pro které nás bude tato podmínka zajímat. Lze totiž vyšetřit průběh funkce fronty $V(t)$ a vybrat její maximální hodnoty, pro které bude ještě nerovnice 3.5 platit. Nemusíme tedy procházet všechny body na periodě.

Označme M množinu všech časů $t_i, i = 1, 2, 3 \dots N$, kde dochází k lokálnímu maximu funkce $V(t)$. Pak je zřejmé, že se (3.5) změní na tvar:

$$\max_{t_i \in M} \int_0^{t_i} Q^p(\tau) - Q^v(\tau) d\tau \leq V^* \quad (3.6)$$

Tedy maximální integrál přes všechna t_i , což je nejvyšší okamžitá hodnota $V(t)$, nesmí být větší, než je maximální povolená hodnota V^* . Tím je definovaná první podmínka udržitelnosti. Pro ilustraci nyní okomentujeme několik příkladů vykreslené v softwaru Maple. Algoritmus výpočtu budeme podrobněji rozebírat v další kapitole.

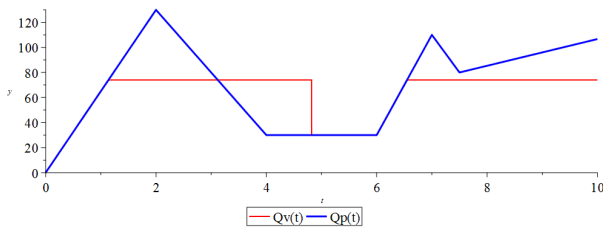
3.2.2 Příklad 1

Na obrázcích 1 a 3 můžeme vidět vykreslené grafy pro funkci příkonu zadaného následujícím způsobem:

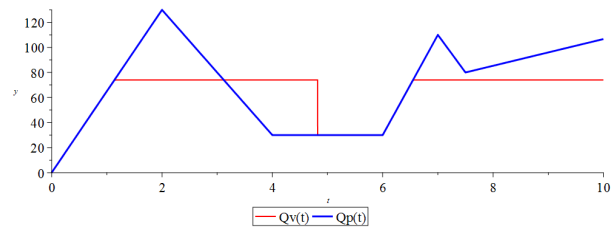
$$Q^p(t) = \begin{cases} 65t & 0 \leq t \leq 2 \\ -50t & 2 < t \leq 4 \\ 80t - 450 & 4 < t \leq 7 \\ -60t + 230 & 7 < t \leq \frac{15}{2} \\ \frac{32}{3}t & \frac{15}{2} < t \leq 10. \end{cases}$$

Tento příkon přivádíme na dvě různá pracoviště, která mají stejný maximální výkon $Q^* = 74$, ale jiné kapacity úložiště. První pracoviště má kapacitu $V_1 = 80$ a $V_2 = 50$. Pomocí definice fronty (2.7) jsme sestrojili funkci $V(t)$, která je vykreslena v obrázku 2 a 4.

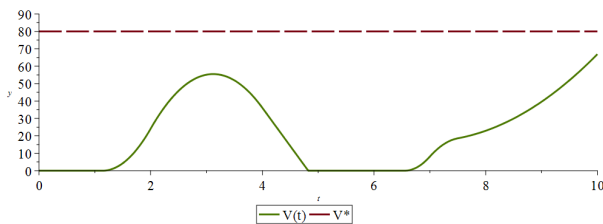
Pro platnost první podmínky musí být zaručeno, že pro všechna t na intervalu $\langle 0, T \rangle$ platí, že je $V(t) \leq V^*$. V případě prvního pracoviště se fronta během první periody drží po celou dobu pod maximální kapacitou svého pracoviště. Při vyšetření hodnoty lokálního maxima během periody u toho druhého bychom zjistili, že je podmínka porušena a to hodnotou fronty na v čase T . V grafu ale vidíme, že přibližně už v čase $t = 2,6$ dojde k prvnímu překročení povolené hodnoty. Nerovnice (3.6) tedy určuje platnost první podmínky, avšak vybraný bod t_i nemusí být bodem prvním, kdy pracoviště přestane být udržitelné. O prvním pracovišti ještě nemůžeme rozhodnout, zda-li tuto vlastnost udržitelnosti má, protože není vyšetřena platnost druhé podmínky. Ta první je ale splněna.



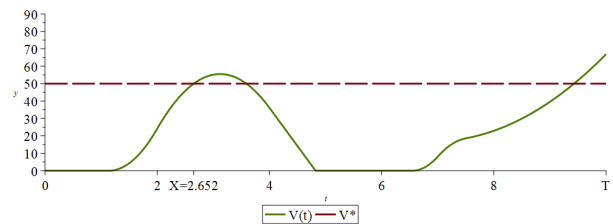
Obr.: 1: Funkce $Q^p(t)$ a $Q^v(t)$ pracoviště 1



Obr.: 3: Funkce $Q^p(t)$ a $Q^v(t)$ pracoviště 2



Obr.: 2: Funkce $V(t)$ a V_1^* pracoviště 1



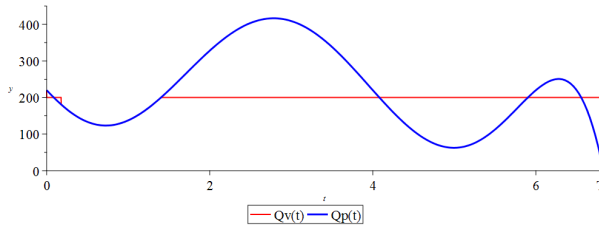
Obr.: 4: Funkce $V(t)$ a V_2^* pracoviště 2

3.2.3 Příklad 2

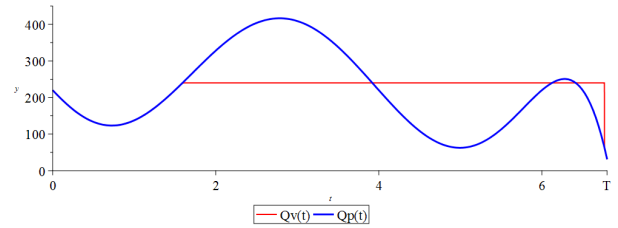
Na další čtveřici obrázků vidíme veličiny dvou pracovišť, na která přivádíme stejné příkony $Q^p(t) = -t^6 + 17 \cdot t^5 - 95,75 \cdot t^4 + 175,75 \cdot t^3 + 55,5 \cdot t^2 - 234 \cdot t + 220$, $t \in \langle 0, T = 10 \rangle$.

Obě pracoviště mají stejnou maximální kapacitu $V^* = 300$. Liší se ale jejich nejvyšší možné výkony. Platí, že $Q_1^* = 200$ a $Q_2^* = 240$. Druhé pracoviště tedy bude přicházející

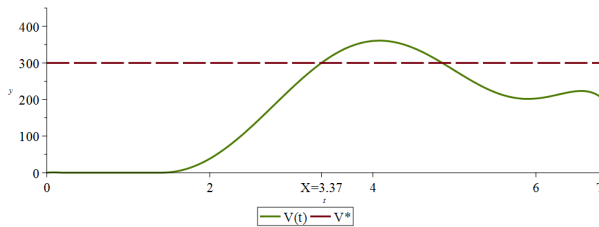
práci zpracovávat bez problému a k porušení podmínky nedojde. V obrázku 6 je vidět, že i relativně malá změna maximálního výkonu, o jednu pětinu, velkým způsobem ovlivní vlastnosti pracoviště. V obrázku 5 a 7 dále můžeme spatřit rozdíl ve výkonech obou pracovišť. Téměř celou periodu prvního pracoviště tvoří výkon Q_1^* zatímco z průběhu funkce fronty druhého pracoviště vidíme, že během periody se fronta ještě stihne celá zpracovat a tedy výkon ještě klesne na hodnotu $Q^p(t)$. Intuitivně bychom tedy mohli říci, že bude pravděpodobně platit i druhá podmínka, protože fronta je na začátku i konci periody nulová a tedy se určitě nebude zvětšovat.



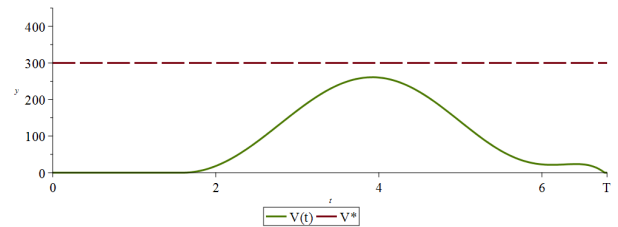
Obr.: 5: Funkce $Q^p(t)$ a $Q^v(t)$ pracoviště 1



Obr.: 7: Funkce $Q^p(t)$ a $Q^v(t)$ pracoviště 2



Obr.: 6: Funkce $V(t)$ a V_1^* pracoviště 1



Obr.: 8: Funkce $V(t)$ a V_2^* pracoviště 2

Software Maple při vykreslování grafu funkce $Q^v(t)$ spojuje jednotlivé funkční hodnoty čarou. V bodech, kde dochází ke změně $Q^v(t)$ z Q^* na $Q^p(t)$ je změna skoková a jsou zde tedy body nespojitosti. Je dobré si uvědomit, že ke skoku dochází vždy z většího Q^* na menší $Q^p(t)$ a nikdy naopak.

Nyní se budeme zabývat časově dlouhodobým průběhem jednotlivých funkcí, tedy druhou podmínkou udržitelnosti.

3.2.4 2. podmínka udržitelnosti

První podmínka hovoří o tom, že se nikdy v průběhu periody nesmí stát, že se systém přehltí. Mohlo by se ale stát, že fronta v čase T , která může být menší než V^* , se během následujícího cyklu nedokáže zpracovat. Z toho plyne, že by se v dalších cyklech první podmínka porušila. Chceme tedy zaručit, aby fronta, která by se v dlouhodobém měřítku vytvářela, nerostla a pokud možno klesala dokud ji pracoviště celou nezpracuje. Jako kontrolní body, ve kterých budeme sledovat toto klesání zvolíme koncové body period.

Na pracoviště přivedeme počáteční frontu a sledujeme ho při práci. Pro splnění druhé podmínky požadujeme aby platilo:

$$V(kT) \geq V((k+1)T), k = 1, 2, \dots \quad (3.7)$$

Předpokládáme tedy, že pracoviště pracovalo po několik cyklů a od k -tého cyklu se již fronta na koncích nebude zvětšovat. Tuto podmínku se pokusíme přeformulovat pomocí

námi známých veličin pro pracoviště tedy $V(0)$, $Q^p(t)$ a Q^* .

Vyjdeme z rovnice kontinuity (2.5) a jejího tvaru po integrování (3.4). Bude platit, že

$$\int_{(k-1)T}^{kT} \dot{V} dt = V(kT) - V((k-1)T) = \int_{(k-1)T}^{kT} Q^p(t) dt - \int_{(k-1)T}^{kT} Q^v(t) dt \quad (3.8)$$

Z této rovnice si můžeme vyjádřit člen $V(kT)$ a dosadit ho do nerovnice (3.7).

$$V(kT) = \int_{(k-1)T}^{kT} Q^p(t) dt - \int_{(k-1)T}^{kT} Q^v(t) dt + V((k-1)T)$$

Obdobným způsobem zintegrujeme rovnici (2.5) pro k o jedničku vyšší a dosadíme za pravou stranu nerovnice.

$$V((k+1)T) = \int_{kT}^{(k+1)T} Q^p(t) dt - \int_{kT}^{(k+1)T} Q^v(t) dt + V(kT)$$

Dostáváme vztah:

$$\int_{(k-1)T}^{kT} Q^p(t) dt - \int_{(k-1)T}^{kT} Q^v(t) dt + V((k-1)T) \geq \int_{kT}^{(k+1)T} Q^p(t) dt - \int_{kT}^{(k+1)T} Q^v(t) dt + V(kT).$$

Obecně se pro náš systém, na rozdíl od výkonu, příkon nemění a pro všechny periody je stejný, lze tedy členy s příkonem odečíst. Rovnici dále upravíme separací front a výkonů.

$$\int_{kT}^{(k+1)T} Q^v(t) dt - \int_{(k-1)T}^{kT} Q^v(t) dt \geq V(kT) - V((k-1)T)$$

Pravou stranu můžeme opačným způsobem přepsat jako zintegrovanou rovnici kontinuity v mezích od $(k-1)T$ a kT .

$$\int_{kT}^{(k+1)T} Q^v(t) dt - \int_{(k-1)T}^{kT} Q^v(t) dt \geq \int_{(k-1)T}^{kT} Q^p(t) dt - \int_{(k-1)T}^{kT} Q^v(t) dt$$

Odečtením stejných členů dostáváme vztah:

$$\int_{kT}^{(k+1)T} Q^v(t) dt \geq \int_{(k-1)T}^{kT} Q^p(t) dt$$

Tuto rovnici bychom mohli interpretovat tak, že výkon v určité periodě musí být vyšší, než byl příkon v té předchozí.

Důsledkem definice příkonu do pracoviště (2.6) je, že jeho právě odváděná práce nemůže být nikdy větší, než jeho maximální výkon, bude tedy jistě platit, že:

$$\int_{kT}^{(k+1)T} Q^* dt \geq \int_{kT}^{(k+1)T} Q^v(t) dt \geq \int_{(k-1)T}^{kT} Q^p(t) dt$$

Maximální výkon je konstantní, můžeme ho tedy zintegrovat v mezích periody. Pokud tedy požadujeme, aby od k -tého cyklu fronta v dalších cyklech na konci jejich period nerostla, platí podmínka:

$$Q^*T \geq \int_{(k-1)T}^{kT} Q^p(t) dt \quad (3.9)$$

Vlastností našeho pracoviště je to, že příkon je stejný ve všech periodách. Hodnota integrálu přes první periodu je tedy stejná jako pro všechny další. Tím dostaneme tvar druhé podmínky udržitelnosti pro systém jednoho pracoviště:

$$Q^*T \geq \int_0^T Q^p(t)dt. \quad (3.10)$$

Z podmínky jsme dostali vztah, který platí i pro nejmenší k , $k = 1$. Pokud má tedy fronta na pracovišti klesat, musí tedy tak činit již ve druhém cyklu, tedy $V(T) \geq V(2T)$.

3.2.5 Příklad 3

Představme si pracoviště o maximální kapacitě úložiště V^* , které může podávat nejvyšší možný výkon Q^* . Na něj budeme přivádět příkon $Q^p(t)$ a počáteční frontu zvolíme nulovou. Z nerovnosti (3.10) plyne, že mohou nastat tři případy chování pracoviště:

1. **Ostrá nerovnost.** Pokud platí, pak se fronta na koncích periody bude neustále zmenšovat do té doby, než se neustálí na určité hodnotě.
2. **Rovnost.** Při ní se tedy také fronta musí ustálit na stejné hodnotě, avšak průběh $V(t)$ se liší od předchozího případu, protože potenciální množství práce, které je systém schopen zpracovávat se sice nemění, ale množství práce, které se na pracovišti na konci periody vyskytne má přesně takovou hodnotu, že ho systém akorát v jednom okamžiku zpracuje celé a ihned přichází množství nové.
3. Třetím případem je **neplatnost vztahu** (3.10). Na pracoviště tedy přichází takové množství práce, že se na konci každé periody postupně bude hromadit jeho nezpracovaná část.

Důsledkem nerovnice je, že tyto řečené možné vlastnosti systému nejsou závislé na počáteční podmínce. Je ale důležité si uvědomit, že počáteční podmínka může ovlivnit platnost první podmínky udržitelnosti, pokud způsobí, že nechá vzniknout bodu, kde bude $V(t) \geq V^*$. Ukážeme si nyní několik příkladů pro tyto tři možnosti chování systému a pro různé počáteční podmínky.

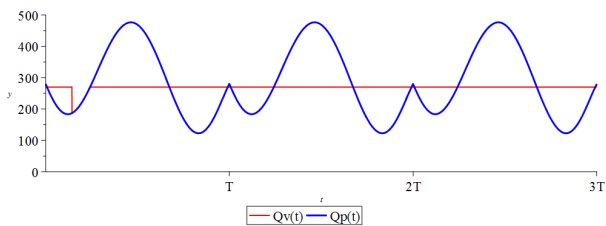
Mějme pracoviště, které má $Q^* = 270$ a $V^* = 400$. Na něj přivádíme příkon

$$Q_1^p(t) = -t^6 + 17 \cdot t^5 - 95,75 \cdot t^4 + 175,75 \cdot t^3 + 55,5 \cdot t^2 - 234 \cdot t + 280, \quad t \in \langle 0, T = 6 \rangle.$$

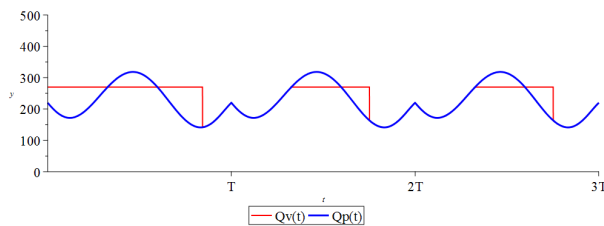
Na obrázcích 9 a 10 jsou vykresleny funkce příkonu, výkonu a fronty pro tuto kombinaci parametrů. Jako počáteční frontu jsme na pracoviště přivedli $V_1(0) = 50$. Z hlediska klasifikace systému se jedná o třetí případ, což snadno zjistíme dosazením hodnot do nerovnice. Můžeme tedy pozorovat, že na konci z každého po sobě jdoucích cyklů se fronta zvedne u stejnou určitou hodnotu. Tvar funkce $Q^p(t)$, způsobí, že se k této hodnotě nepřičte i hodnota počáteční fronty, protože jí pracoviště v prvním cyklu ještě celou zpracuje. Nedomáže si však poradit s pozdějším příchodem práce. Ve druhé periodě tedy hodnota fronty přeroste maximální povolenou hodnotu. Pro tento příkon pracoviště není udržitelné.

Ve vedlejších dvou obrázcích ale můžeme sledovat příkon práce, který už pracoviště velmi dobře dokáže zpracovávat.

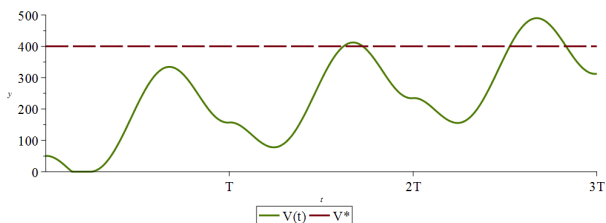
$$Q_2^p(t) = -0.5 \cdot (-t^6 + 17 \cdot t^5 - 95,75 \cdot t^4 + 175,75 \cdot t^3 + 55,5 \cdot t^2 - 234 \cdot t) + 280, \quad t \in \langle 0, T = 6 \rangle.$$



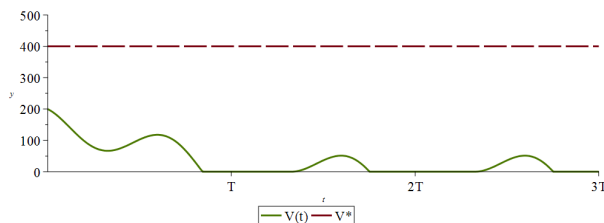
Obr.: 9: Funkce $Q_1^p(t)$ a $Q_1^v(t)$ pracoviště 1



Obr.: 11: Funkce $Q_2^p(t)$ a $Q_2^v(t)$ pracoviště 2



Obr.: 10: Funkce $V(t)$ a V^* pracoviště 1



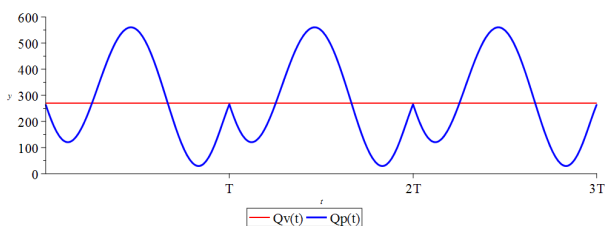
Obr.: 12: Funkce $V(t)$ a V^* pracoviště 2

Počáteční frontu $V_2(0) = 200$, kterou jsme na toto pracoviště přivedli, pracoviště zpracuje už během první periody. Jeho potenciál zpracovávat, tedy poměr mezi stranami nerovnice (3.7), je ale při tomto příkonu značně velký, takže pokud bychom jako počáteční frontu zvolili hodnotu blízkou maximální možné frontě, tak by ji během několika málo period rychle zpracoval. Pro tento příkon je tedy pracoviště udržitelné.

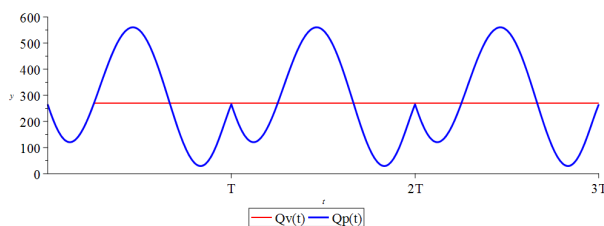
3.2.6 Příklad 4

Na tomto příkladu si ilustrujeme, jak pro pracoviště, stejných parametrů jako v předchozím případě, bude mít vliv počáteční fronta. Funkce příkonu pro toto pracoviště je:

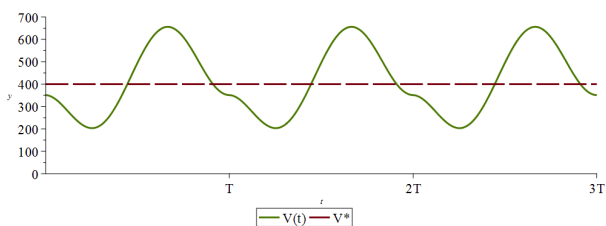
$$Q^p(t) = -1.5 \cdot (-t^6 + 17 \cdot t^5 - 95,75 \cdot t^4 + 175,75 \cdot t^3 + 55,5 \cdot t^2 - 265,5 \cdot t) + 280, \quad t \in \langle 0, T = 6 \rangle.$$



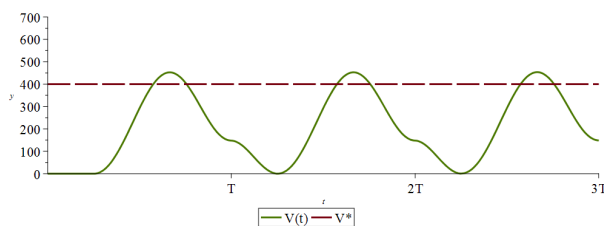
Obr.: 13: Funkce $Q_1^p(t)$ a $Q_1^v(t)$ pracoviště 1



Obr.: 15: Funkce $Q_2^p(t)$ a $Q_2^v(t)$ pracoviště 2



Obr.: 14: Funkce $V(t)$ a V^* pracoviště 1



Obr.: 16: Funkce $V(t)$ a V^* pracoviště 2

V prvním případě na pracoviště přivádíme frontu $V_1(0) = 350$ a ve druhém necháváme pracoviště v čase nula prázdné. Z hlediska platnosti nerovnosti se jedná o druhý případ. Příkon má tedy takový průběh, že by ho pracoviště akorát zvládalo zpracovávat. Neplatí však první podmínka udržitelnosti, protože již během první periody, i pro nejmenší možnou počáteční podmínku, fronta na pracovišti přesáhne kapacitu úložiště.

Pokud bychom se nezaměřili na vliv počáteční podmínky na tento systém, tak můžeme vidět že v prvním případě je $V_1(0)$ tak velká, že k nesplnění podmínky dojde dříve, v tom druhém. Fronta, která se v prvním případě na konci periody vytvoří je součet fronty, která by tam se vytvořila, kdyby žádná počáteční fronta nebyla, a zbylé počáteční fronty, která se zpracovat nedokázala. Systém není udržitelný.

4 Soustava více pracovišť

V předchozí kapitole jsme popsali, jak se při chodu pracoviště chová. Nyní tento model rozšíříme a vytvoříme systém několika takovýchto pracovišť a budeme se zabývat podmínkami pro udržitelnost systému podle předchozí kapitoly. Odvození bude vycházet ze zobecnění modelu v [1]. Nejprve si uvedeme značení, které budeme používat.

Rovnice kontinuity, která platila pro jedno pracoviště, musí platit pro každé ze systému samostatně. Očíslujeme je tedy indexy $i, i = 1, 2, \dots, N$, kde N je počet pracovišť v soustavě, a rovnici kontinuity, která pro ně platí přepíšeme na tvar:

$$\dot{V}_i(t) = Q_i^p(t) - Q_i^v(t) \quad (4.1)$$

Tímto způsobem označíme i všechny veličiny z předchozí části, tedy na i -tém pracovišti bude fronta $V_i(t)$, maximální výkon, co dokáže zpracovat, bude Q^* a maximální kapacitu budeme značit V^* .

Nyní se budeme zabývat jejich propojením. V obecném případě se může ze kteréhokoliv pracoviště na jiné přesouvat libovolné množství práce včetně sebe sama. To, jaká část se z jednoho j -tého pracoviště do druhého i -tého právě přesouvá, budeme značit pomocí koeficientů $\alpha_{ji}(t) \in \langle 0, 1 \rangle$. Dále můžeme uvažovat, že umístění vstupu práce, resp. místa, kam výrobky poprvé přidáme do soustavy, může být na kterémkoliv pracovišti a to dokonce tak, že na libovolném z nich může být přidávána určitá část a tu můžeme čase měnit. Označme tedy koeficientem $\beta_i(t)$ poměrné množství práce, které budeme přivádět ze zdroje na i -té pracoviště. Označme $Q_0(t)$ jako vstupní příkon do soustavy. Je zřejmé, že pokud bude z j -tého pracoviště vycházet výkon $Q_j^v(t)$ a bude přecházet na i -té pracoviště, tak platí že $Q_j^v(t) = Q_i^p(t)$. Například pro první pracoviště v soustavě pro $N = 3$ platí rovnice kontinuity:

$$\dot{V}_1(t) = \beta_1(t) \cdot Q_0(t) + \alpha_{11}(t) \cdot Q_1^v(t) + \alpha_{21}(t) \cdot Q_2^v(t) + \alpha_{31}(t) \cdot Q_3^v(t) - Q_1^v(t)$$

Lze tedy přepsat příkon do pracovišť pomocí výkonů $Q_j^v(t)$, tedy výkonů pracovišť spojených s i -tými, a pomocí $Q_0(t)$, vstupního příkonu. Pak pro i -té pracoviště platí následující rovnice pro velikost fronty, vycházející z (4.1):

$$\dot{V}_i(t) = \beta_i(t) \cdot Q_0(t) + \sum_{j=1}^N \alpha_{ji}(t) \cdot Q_j^v(t) - Q_i^v(t), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (4.2)$$

Pokud budou spojena jen některá pracoviště a příkon ze zdroje bude vstupovat také jen na určitých místech, je zřejmé, že odpovídající koeficienty α a β budou nulové. Pro větší názornost si (4.2) přepíšeme do maticového tvaru:

$$\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{B}\mathbf{Q}_0 + \mathbf{A}\mathbf{Q} - \mathbf{Q} = \mathbf{B}\mathbf{Q}_0 + (\mathbf{A} - \mathbb{E})\mathbf{Q}, \quad (4.3)$$

$$\dot{\mathbf{V}} = \begin{pmatrix} \dot{V}_1(t) \\ \dot{V}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{V}_N(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \beta_1(t) \\ \beta_2(t) \\ \vdots \\ \beta_N(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} Q_1^v(t) \\ Q_2^v(t) \\ \vdots \\ Q_N^v(t) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A} - \mathbb{E} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}(t) - 1 & \alpha_{21}(t) & \cdots & \alpha_{N1}(t) \\ \alpha_{12}(t) & \alpha_{22}(t) - 1 & & \alpha_{N2}(t) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1N}(t) & \alpha_{2N}(t) & \cdots & \alpha_{NN}(t) - 1 \end{pmatrix},$$

kde \mathbf{A} je matice koeficientů $\alpha_{ji}(t)$, \mathbf{B} vektor koeficientů β_i , vektor výkonů pracovišť je \mathbf{Q} a vektor derivací front je $\dot{\mathbf{V}}$.

Popišme si nyní jednotlivé členy. V rádcích matic vidíme, že první dva členy vyjadřují aktuální příkon do pracoviště a třetí člen jeho okamžitý výkon. Aby platily zákon zachování hmoty a rovnice kontinuity je zřejmé, že:

$$\sum_{j=1}^N \alpha_{ji} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

tedy pro všechna pracoviště musí platit, že se na nich práce nesmí ztrácet a dále že:

$$\sum_{i=1}^N \beta_i = 1,$$

tedy nemůžeme v soustavě mít větší ani menší příkon, než je celé $Q_0(t)$. Jak už bylo řečeno, výkony pracovišť jsou závislé na jednotlivých parametrech soustavy $Q_0(t)$, $\alpha_{ij}(t)$, $\beta_i(t)$, což jsou periodické funkce. Obecně nemusí mít stejnou periodu, avšak pokud je dosadíme do rovnice (4.2), pak bude mít fronta periodu rovnou nejmenšímu společnému násobku period těchto parametrů. Dále jsou tedy výkony závislé i na parametrech pracovišť Q_i^* , protože tato hodnota spolu s Q_i^p řídí velikost $V_i(t)$. Pro další analýzu je tedy potřeba zjistit průběhy jednotlivých výkonů pracovišť. Způsob jejich určení se liší v závislosti na tvaru matice s koeficienty $\alpha_{ji}(t)$.

V obecném případě jsou $\alpha_{ji}(t)$ splňující $j > i$ nenulové. Pak by platilo, že by příkony do pracoviště byly závislé všechny navzájem a popisovala by je soustava integrálních rovnic, které bychom pro určení vektoru \mathbf{Q} museli vyřešit. V této práci se touto variantou zabývat nebudeme a zaměříme se na následující případ.

Předpokládáme, že pracoviště budou umístěna pod sebou a nebude docházet k tomu, že se práce bude ze spodního přesouvat do horního, takže matice \mathbf{A} bude dolní trojúhelníková, protože členy $\alpha_{ji}(t) = 0, \forall j > i$. Koeficienty musí být také kladné na intervalu periody,

protože požadujeme tok jenom jedním směrem. Díky tomu lze výkon i -tého pracoviště vyjádřit přes definici (2.6) pomocí výkonů pracovišť s ním spojených. Můžeme tedy jednoduše spočítat vektor výkonů \mathbf{Q} .

Výkon, který určuje diagonální člen, lze vyjádřit z rovnice kontinuity toho samého i -tého pracoviště tím, že tento diagonální člen ho nebudeme v sumě (4.2) sčítat, ale přičteme ho ke členu výkonu, který následovně můžeme vytknout. Například pro přímé spojení dvou nádob pod sebou pak bude rovnice vypadat takto:

$$\dot{V}_2(t) = \beta_2(t) \cdot Q_0(t) + \alpha_{12}(t) \cdot Q_1^v(t) - [1 - \alpha_{22}(t)] \cdot Q_2^v(t)$$

Diagonální člen tedy zdánlivě zmenšuje výkon pracoviště. Nyní budeme dále analyzovat soustavu pracovišť z hlediska udržitelnosti.

4.1 1. podmínka udržitelnosti

Pro určité vlastnosti jednotlivých pracovišť jako je jejich maximální výkon Q_i^* nebo množství příkonu na ně přicházející, což určují koeficienty $Q_i^v \cdot \alpha_{ji}$, by se mohlo stát, že povolená fronta na některém z nich přesáhne povolenou hranici. Obecně tedy každé pracoviště musí splňovat podmínku (3.2.1). Její zápis z této kapitoly akorát upravíme pro soustavu.

Pro i -té pracoviště musí podmínka nepřekročení fronty nad maximální povolenou hodnotu na intervalu periody:

$$V_i^* \geq \max_{t_k \in M_i} \int_0^{t_k} Q_i^p(\tau) - Q_i^v d\tau \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (4.4)$$

kde V_i^* je maximální povolená délka fronty i -tého pracoviště a $t_k \in M_i$ značí časy, ve kterých dochází k lokálnímu maximu fronty daného pracoviště a které patří do jednotlivých množin náležící každému pracovišti, obdobně jako v (3.2.1). Po dosazení do (4.2) dostáváme finální vztah:

$$V_i^* \geq \max_{t_k \in M_i} \int_0^{t_k} \beta_i(t) \cdot Q_0(t) + \sum_{j=1}^N \alpha_{ji}(t) \cdot Q_j^v(t) - Q_i^v(t), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (4.5)$$

Je dobré si uvědomit, že součin koeficientů a výkonů pracovišť je funkce, která musí být integrovatelná. Vzhledem k tomu, že je podmínka (3.6) definovaná pro libovolnou omezenou funkci vstupního příkonu $Q_0(t)$, tedy $Q_i^p(t) = f(Q_0(t))$ a $Q_i^v(t) = f(Q_0(t))$, tak se po vynásobení výkonů a příkonů jednotlivými koeficienty díky tomu podstata problému nezmění. Součiny budou stále funkcí vstupního příkonu $Q_0(t)$.

4.2 2. podmínka udržitelnosti

Obdobně jako v předchozím odstavci, aby byl systém dlouhodobě udržitelný, tedy aby první podmínka platila i po několika dalších cyklech, tak musí být druhá podmínka udržitelnosti 3.2.4 splněna v celé soustavě. Pro i -té pracoviště pak tedy platí podmínka v tomto tvaru:

$$\int_{(k-1)T}^{kT} Q_i^p(t) dt \leq Q_i^* T \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (4.6)$$

kde $Q_i^p(t)$ je příkon do i -tého pracoviště. Jak již bylo řečeno dříve, pokud je \mathbf{A} dolní trojúhelníková, pak lze tyto výkony postupně vyjádřit pomocí výkonů pracovišť s indexem o jednu nižší. Z hlediska potenciálu zpracovat frontu pro určitý příkon, se bude soustava chovat stejně jako v (3.2.4).

Věnujme ještě pozornost obecnému zápisu (4.6). V obecném případě pro každé pracoviště jistě musí existovat takové k , od kterého se, pro splnění podmínky, musí fronty na koncích period zmenšovat, až se ustálí na určité hodnotě. Vzhledem k tomu, že dopředu nevíme jaký průběh budou jednotlivé příkony resp. výkony pracovišť mít, nelze ihned udělat závěr, že toto k bude pro všechny pracoviště stejné. Může nastat případ, kdy koeficienty α_{ji} způsobí, se na pracovišti vytvoří takový průběh fronty, který začne vykazovat periodické chování až po nějaké době, která může být zcela odlišná mezi pracovišti. Proto musíme definovat druhou podmínku v takto obecném tvaru a ne pro interval $\langle 0, T \rangle$ tak, jako ve třetí kapitole.

Ukážeme si nyní na příkladu chování soustavy pro $N = 3$, kde \mathbf{A} je dolní trojúhelníková matice.

4.3 Příklad

Mějme soustavu pracovišť zadanou těmito parametry:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{t}{6} + \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{t}{4} + \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{t}{12} + \frac{1}{4} & 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{t}{10} + \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{t}{10} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}, V^* = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, Q_0(t) = t, t \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Pomocí těchto parametrů si můžeme vypsát rovnice kontinuity, která platí pro jednotlivá pracoviště.

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= Q_0(t) \cdot \beta_1 - (1 - \alpha_{11})Q_1^v(t) \\ \dot{V}_2 &= \alpha_{12} \cdot Q_1^v(t) - Q_2^v(t) \\ \dot{V}_3 &= Q_0(t) \cdot \beta_3 \alpha_{13} \cdot Q_1^v(t) + \alpha_{23} \cdot Q_2^v(t) - Q_3^v(t) \end{aligned}$$

Postup pro řešení výtoků soustavy je stejný jako pro výtok jednoho pracoviště. Stejným postupem, jako při výpočtu pro jedno pracoviště, vyjádříme pomocí maximálních možných výkonů funkci fronty $V_1(t)$. Poté již není problém vykreslit graf fronty, výkonu a výtoku pro první nádobu. Tímto postupem pokračujeme dále, abychom vyjádřili všechny výkony všech pracovišť. Poté můžeme dosadit do podmínek pro udržitelnost systému.

V tomto případě však z technických důvodů nelze příklad dořešit. Software Maple totiž nedokáže provádět operace s proměnnými, které se vyskytují v našem algoritmu a při počítání hraničních bodů druhého pracoviště se zastaví. Výkon prvního pracoviště se totiž v Maplu vyjádří jako funkce, která je definovaná po tolika částech, že už ji není možné zintegrovat a zjistit, kdy je tento integrál záporný.

5 Algoritmizace a výpočty pomocí modelu

V této kapitole se budeme věnovat algoritmům, pomocí kterých řešíme průběhy funkcí výkonu, příkonu a fronty.

Definování $V(t)$ Jak již bylo řečeno v (2.5), pro definování $V(t)$ pomocí maximálního možného výkonu pracoviště je potřeba tuto funkci definovat po částech, které budou mezi hraničními body.

Pro hraniční body platí (2.8). Pokud však budeme chtít vzít v úvahu $V(0) \neq 0$, je potřeba tuto počáteční frontu ve výpočtu zohlednit.

Pomocí prvních dvou rovnic v (2.8) bychom spočetli takové body, ve kterých fronta roste, protože se $Q^p(t)$ mění na Q^* . Tím ale není zaručeno, že v nich fronta roste od nuly. To zaručí právě třetí rovnice, protože pokud nastala situace, že fronta dosáhla nuly, tak od tohoto okamžiku jde integrál $\int_{t_{j-1}}^t Q^p(\tau) - Q^*$ do záporu.

Pokud chceme vyšetřit vliv počáteční podmínky na růst fronty mezi t_0 a prvním hraničním bodem, zintegrujeme rovnici kontinuity pro $Q^p(t) = Q^*$,

$$\bar{V}(t) - V(0) = \int_0^t Q^p(\tau) - Q^* d\tau \quad (5.1)$$

kde $t \in \langle 0, t_1 \rangle$ a $\bar{V}(t)$ je funkce, která pro některé speciální případy odpovídá frontě, avšak obecně nemusí, značíme ji proto jako s pruhem. Pokud tedy požadujeme zápornost integrálu, tedy $V(t) < 0$ pak z (5.1) plyne, že první hraniční bod najdeme z podmínek:

$$\begin{aligned} Q^p(t_j) &= Q^*, \\ Q^p(t_j) &> 0, \\ \int_{t_{j-1}}^{t_j} Q^p(\tau) - Q^* + V(0) &< 0. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Počáteční fronta tedy může způsobit, že bod, který by bez ní byl první hraničí, už tuto vlastnost mít nebude. Je zřejmé, že výpočtem prvního hraničního bodu s počáteční podmínkou dojde k tomu, že v tomto bodě už bude veškerá počáteční fronta zpracovaná. Další body lze tedy spočítat již z (2.8).

Nyní přejdeme k definování funkce pomocné funkce $V'(t)$. Tu definujeme zvlášť pro první úsek mezi body t_0 a t_1 a zvlášť pro všechny následující úseky.

$$\begin{aligned} V_1'(t) &= \int Q^p(t) - Q^* dt, t \in \langle t_0, t_1 \rangle, V_1'(t_1) = q_0 \\ q_0 &= \int_{t_0}^{t_1} Q^p(t) - Q^* dt + V(0) \end{aligned}$$

Okrajovou podmínkou vyjadřujeme náš požadavek, že fronta má v hraničním bodě t_1 růst od nuly a bereme při tom v úvahu i počáteční frontu. Okrajová podmínka nám tedy říká, o kolik musíme $V'(t)$ na každém úseku posunout tak, aby měla konec v hraničním bodě.

Pro další úseky bude platit:

$$\begin{aligned} V_i'(t) &= \int Q^p(t) - Q^* dt, t \in \langle t_{i-1}, t_i \rangle, V_i'(t_i) = q_i \\ q_i &= \int_{t_{i-1}}^{t_i} Q^p(t) - Q^* dt. \end{aligned}$$

Nyní máme téměř vše, co potřebujeme pro definování funkce fronty $V(t)$. Je zřejmé, že funkce $V'(t)$ obsahuje záporné hodnoty. To není žádný problém, protože lze funkci fronty definovat tímto způsobem:

$$V(t) = \begin{cases} V'(t) & \forall t \geq 0 : V'(t) > 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \quad (5.3)$$

Definovali jsme tedy $V(t)$ při uvažování nenulové počáteční fronty a to pomocí hraničních bodů a maximálního výkonu Q^* . Na základě tohoto výpočtu lze dále definovat výkon a zobrazit průběhy jednotlivých parametrů pracoviště. V příloze jsou uvedeny skripty, pomocí kterých jsou vypočteny jednotlivé příklady, které jsme si v této práci uváděli.

6 Závěr

Cílem této práce bylo rozšířit model [1] pro širší spektrum možných situací. V prvních kapitolách jsme uvedli základní rovnice a pojmy, ze kterých jsme dále čerpali při zobecňování modelu.

Nejdříve jsme se zaměřili na model jednoho pracoviště. Připustili jsme proměnný příkon v čase a vyslovili jsme podmínku udržitelnosti, tedy že fronta, která se na pracovišti během jeho cyklu vytvoří, nesmí přesáhnout maximální povolenou hodnotu. Dále jsme tuto podmínku zkoumali z krátkodobého a dlouhodobého hlediska.

V první fázi jsme odvodili vztah, který musí platit, pokud má být podmínka zaručena pro první periodu. Na příkladech jsme si ukázali vliv parametrů příkonu a maximálního výkonu na funkci vyjadřující frontu, která se na pracovišti tvoří. Porovnali jsme průběhy front s maximální povolenou kapacitou a vyhodnotili platnost podmínky. Ukázali jsme, že vztah, který ji ověřuje, má pouze informativní charakter, protože nám neříká nic o času, kdy k porušení dojde nejdříve.

Druhá fáze spočívala v určování podmínky pro dlouhodobou platnost podmínky udržitelnosti pracoviště. Na základě našeho požadavku, že pro neporušení podmínky se musí na koncích period zmenšovat nahromaděná fronta až do ustáleného stavu, jsme odvodili vztah. Poté jsme s jeho pomocí určili, jaký bude mít pracoviště charakter, pokud na něj přivádíme různé funkce příkonů, což jsme demonstrovali na příkladech. Vysvětlili jsme také, jaký význam má počáteční fronta na chod pracoviště.

V další kapitole jsme zobecnili model na soustavu pracovišť a formulovali jsme obecnou podmínku udržitelnosti. Model soustavy v [1] jsme zobecnili uvažováním časově proměnných koeficientů α_{ji} a β . Prověřili jsme případ, kdy matice koeficientů A bude dolní trojúhelníková, díky čemž jsme mohli zjednodušit vyjádření výkonů, které jednotlivá pracoviště podávají. Pro naši volbu parametrů jsme se pokusili vyšetřit udržitelnost soustavy, avšak z technických důvodů jsme neuspěli.

Na tuto práci lze navázat například uvažováním proměnného maximálního výkonu či přidáním podmínky, že se fronta může po určitý čas pohybovat nad maximální povolenou hodnotou. Dalším směrem jak práci rozšířit, může být vyjádření výkonů soustavy pracovišť pro plný tvar matice koeficientů A . Pro všechna tato zobecnění lze zkoumat podmínky pro udržitelnost systému.

Reference

- [1] ŠIMEČKOVÁ, K. Diferenciální rovnice systémů s úzkými místy. Brno: VUT v Brně, Fakulta strojního inženýrství. 2016. 27 s. Vedoucí Ing. Tomáš Kisela, Ph.D.
- [2] ZEMANOVÁ, H. Modelování dopravního toku. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2012. 32 s. Vedoucí prof. RNDr. Jan Franců, CSc.
- [3] KALAS, Josef a Miloš RÁB. Obyčejné diferenciální rovnice. Brno: Vydavatelství Masarykovy univerzity, 1995. ISBN 80-210-1130-0.
- [4] ČERMÁK, Jan a Luděk NECHVÁTAL. Matematika III. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2016. ISBN 978-80-214-5400-2.
- [5] TREIBER, M. and A. KESTING. Traffic flow dynamics: data, models and simulation. New York: Springer, c2013. ISBN 978-364-2324-604.

7 Přílohy

Skript pro ověření první podmínky:

```
NULL; \\  
restart;  
perioda := 6.8;  
Qp_t := -(t+1)*t*(t-3/2)*(t-4)*(t-6)*(t-6.5)+220;  
Qmax := 240;  
Vmax := 300;  
plot({Qmax, Qp_t}, t = 0 .. perioda);  
Qp_x := subs(t = x, Qp_t);  
f := diff(Qp_t, t);  
Ti := 0;  
T[0] := 0;  
for i from 0 to 100 do  
rovnice := {f>0,t>Ti,Qp_t=Qmax,t<= perioda,int(Qp_x-Qmax, x = Ti .. t)<0};  
Ti := solve(rovnice);  
if Ti = NULL then T[i+1] := perioda; maxI := i+1; break else  
Ti := eval(t, Ti[1]); T[i+1] := Ti end if end do;  
for i to maxI do  
V_help[i] := int(Qp_t-Qmax, t);  
c[i] := int(Qp_t-Qmax, t = T[i-1] .. T[i])-(eval(V_help[i], t = T[i]));  
V_help[i] := V_help[i]+c[i] end do;  
V := 0;  
for i to maxI do  
V := piecewise(t >= T[i-1] and t <= T[i], V_help[i], V) end do;  
V_graf := piecewise(V >= 0, V, 0);  
Qv_t := piecewise(V <= 0, Qp_t, V > 0, Qmax);  
  
plot([Qv_t, Qp_t], t = 0 .. perioda, y = 0 .. 450, legend = ["Qv(t)", "Qp(t)"],  
legendstyle = [font = ["Times New Roman", 18]],  
titlefont = ["Times New Roman", 18, bold], linestyle = [solid, solid],  
color = [red, blue], thickness = [2, 3], font = [label, "Times New Roman", 18],  
size = [1000, 400], tickmarks = [[0 = 0, 2 = 2, 4 = 4,  
6 = 6, 8 = 8, perioda = "T"], default]);  
  
plot([V_graf, Vmax], t = 0 .. perioda, y = 0 .. 450,  
legend = ["V(t)", "V*"], legendstyle = [font = ["Times New Roman", 18]],  
linestyle = [solid, longdash],  
color = ["Niagara LeafGreen", "Niagara Burgundy"], thickness = [3, 3],  
font = [label, "Times New Roman", 18], size = [1000, 400],  
tickmarks = [[0 = 0, 2 = 2, 4 = 4, 6 = 6, 8 = 8, perioda = "T"], default])  
  
if maximize(V, t = 0 .. perioda) <= Vmax then  
writeline(default, "Fronta neprekroci hranici") else  
writeline(default, "Fronta prekroci hranici") end if
```

Skript pro ověření druhé podmínky

```
restart;
perioda := 6;
Qp_t := piecewise
(t >= 0 and t <= perioda,
-(.5*(t+1))*t*(t-3/2)*(t-4)*(t-6)*(t-6.5)+220,
t >= perioda and t <= 2*perioda,
-(.5*(t+1-perioda))*(t-perioda)*(t-3/2-perioda)*(t-4-perioda)*
*(t-6-perioda)*(t-6.5-perioda)+220,
t >= 2*perioda and t <= 3*perioda, -(.5*(t+1-2*perioda))*
(t-2*perioda)*(t-3/2-2*perioda)*
*(t-4-2*perioda)*(t-6-2*perioda)*(t-6.5-2*perioda)+220);
Qmax := 270;
V0 := 200;
Vmax := 400;
Qp_x := subs(t = x, Qp_t);
f := diff(Qp_t, t);
Ti := 0;
T[0] := 0;
maxI := 0;
for i from 0 to 0 do
rovnice := {f>0,t>Ti,Qp_t=Qmax,t<=3*perioda,int(Qp_x-Qmax,x=Ti .. t)+V0 <0};
Ti := solve(rovnice);
if Ti = NULL then T[i+1] := 3*perioda; maxI := i+1; break
else Ti := eval(t, Ti[1]); T[i+1] := Ti end if end do;

for i to 10 do rovnice :=
{f > 0, t > Ti, Qp_t = Qmax, t <= 3*perioda,
int(Qp_x-Qmax, x = Ti .. t) < 0};
Ti := solve(rovnice);
"pozn. osetreni chyby programu, jinak bude neustale
pocitat tu samou hodnotu Ti"
if eval(t, Ti[1])=T[i] then Ti := eval(t, Ti[1])+0.1e-1;
i := i-1; next end if;
if Ti = NULL then T[i+1] := 3*perioda;
maxI := i+1; break else
Ti := eval(t, Ti[1]); T[i+1] := Ti end if end do;

if maxI = 0 then maxI := i+1; T[i+1] := 3*perioda end if;

for i to 1 do
V_help[i] := int(Qp_t-Qmax, t);
c[i] := int(Qp_t-Qmax,
t = T[i-1] .. T[i])-(eval(V_help[i], t = T[i]));
V_help[i] := V_help[i]+c[i]+V0 end do;

for i from 2 to maxI
```



```

do V_help[i] := int(Qp_t-Qmax, t);
c[i] := int(Qp_t-Qmax, t = T[i-1] .. T[i])-(eval(V_help[i], t = T[i]));
V_help[i] := V_help[i]+c[i] end do;

V := 0;

for i to maxI do
V := piecewise(t >= T[i-1] and t <= T[i], V_help[i], V) end do;
V_graf := piecewise(V >= 0, V, 0);
Qv_t := piecewise(V <= 0, Qp_t, V > 0, Qmax);
K := 0;
plot([Qv_t, Qp_t], t = 0 .. 3*perioda,
y = 0 .. 500, legend = ["Qv(t)", "Qp(t)"],
legendstyle = [font = ["Times New Roman", 18]],
linestyle = [solid, solid],
color = [red, blue], thickness = [2, 3],
font = [label, "Times New Roman", 10],
font = [axes, "Times New Roman", 18],
size = [1000, 400],
tickmarks =
[[perioda = "T", 2*perioda = "2T", 3*perioda = "3T"], default]);

plot([V_graf, Vmax], t = 0 .. 3*perioda, y = 0 .. 500,
legend = ["V(t)", "V*"],
legendstyle = [font = ["Times New Roman", 18]],
linestyle = [solid, longdash],
color = ["Niagara LeafGreen", "Niagara Burgundy"],
thickness = [3, 3],
font = [label, "Times New Roman", 10],
font = [axes, "Times New Roman", 18],
size = [1000, 400],
tickmarks = [[perioda = "T", 2*perioda =
"2T", 3*perioda = "3T"], default]);

if evalf(maximize(V, t = 0 .. perioda)) <= Vmax then
writeline(default, "Fronta neprekroci hranici") else K := 1;
writeline(default, "Fronta prekroci hranici") end if;

if Qmax*perioda > int(Qp_t, t = 0 .. perioda) then
writeline(default, "Pocatecni fronta pujde k nule")
else if Qmax*perioda = int(Qp_t, t = 0 .. perioda) then
writeline(default,
"Pocatecni fronta se nikdy nezpracuje ale ani nebude narustat")
else K := 1;
writeline(default, "Fronta se bude neustale hromadit ") end if end if;

if K = 1 then writeline(default, "System neni udrzitelny,
je porusena jedna nebo obe z podminek") else

```

```
writeline(default, "System je udržitelný") end if;
```

Skript pro řešení fronty soustavy:

```
restart;
perioda := 5;
beta1 := (1/10)*t+1/2;
Qp_t := -(t+1/2)^2+6*(t+1/2)-1;
Qmax := 4;
Qp_x := subs(t = x, Qp_t);
f := diff(Qp_t, t);
Ti := 0;
T[0] := 0;
V_help := 0;
for i from 0 to 100 do
rovnice := {f > 0, t > Ti, Qp_t = Qmax,
t <= perioda, int(Qp_x-Qmax, x = Ti .. t) < 0};
Ti := solve(rovnice); if Ti = NULL then T[i+1] := perioda;
V_help[i+1] := piecewise(t >= T[i] and t <= T[i+1],
int(Qp_x-Qmax, x = T[i] .. t)); maxI := i+1; break else
Ti := eval(t, Ti[1]); T[i+1] := Ti end if;
V_help[i+1] := piecewise(t >= T[i] and t <= T[i+1],
int(Qp_x-Qmax, x = T[i] .. t)) end do;
%;
2

V_help := simplify(V_help);
plot({Qmax, Qp_t}, t = 0 .. 6);
for i to maxI do Qvhelp_t[i] :=
'assuming'([simplify(piecewise(V_help[i]
<= 0, Qp_t, V_help[i] > 0, Qmax))], [t >= T[i-1] and t <= T[i]]) end do;
Qv_t := 0;
V := 0;
for i to maxI do Qv_t := simplify(piecewise(t >= T[i-1] and
t <= T[i], Qvhelp_t[i], Qv_t)); V := simplify(piecewise(t >= T[i-1]
and t <= T[i], V_help[i], V)) end do;
V := simplify(piecewise(V < 0, 0, V >= 0, V));

plot({Qp_t, Qv_t, V}, t = 0 .. perioda);
NULL;

Qp2_t := Qv_t;
Qmax2 := 9/2;

Qp2_x := subs(t = x, Qp2_t);
```

```

f2 := diff(Qp2_t, t);
Ti2 := 0;
T2[0] := 0;
V_help2 := 0;

for i from 0 to 100 do rovnice2 := {f2 > 0, t > Ti2, Qp2_t = Qmax2,
t <= perioda, int(Qp2_x-Qmax2, x = Ti2 .. t) < 0};
Ti2 := solve(rovnice2); if Ti2 = NULL
then T2[i+1] := perioda;
V_help2[i+1] := piecewise(t >= T2[i] and
t <= T2[i+1], int(Qp2_x-Qmax2,
x = T2[i] .. t)); maxI2 := i+1; break else Ti2 := eval(t, Ti2[1]);
T2[i+1] := Ti2 end if; V_help2[i+1] :=
piecewise(t >= T2[i] and t <= T2[i+1],
int(Qp2_x-Qmax2, x = T2[i] .. t)) end do;
%;
1

V_help2 := simplify(V_help2);
plot(Qp2_t, t = 0 .. 6);
for i to maxI2 do Qvhelp2_t[i] := 'assuming'
([simplify(piecewise(V_help2[i]
<= 0, Qp2_t, V_help2[i] > 0, Qmax2))],
[t >= T2[i-1] and t <= T2[i]]) end do;
Qv2_t := 0;
V2 := 0;
for i to maxI2 do Qv2_t :=
simplify(piecewise(t >= T2[i-1] and t <= T2[i],
Qvhelp2_t[i], Qv2_t)); V2 :=
simplify(piecewise(t >= T2[i-1] and t <= T2[i],
V_help2[i], V2)) end do;
V2 := simplify(piecewise(V2 < 0, 0, V2 >= 0, V2));
plot({Qp2_t, Qv2_t, V2}, t = 0 .. perioda);
NULL;

Qp3_t := Qv2_t;
Qmax3 := 5/2;

Qp3_x := subs(t = x, Qp3_t);
f3 := diff(Qp3_t, t);
Ti3 := 0;
T3[0] := 0;
V_help3 := 0;
rovnice3 := {f2 > 0, t > Ti3, Qp3_t = Qmax3,
t <= perioda,
int(Qp3_x-Qmax3, x = Ti3 .. t) < 0};
Ti3 := solve(rovnice3);
T3[i+1] := perioda; V_help3[i+1] := piecewise(t >= T3[i] and

```

```
t <= T3[i+1], int(Qp3_x-Qmax3, x = T3[i] .. t)); maxI3 := i+1;
```

```
for i from 0 to 100 do rovnice3 := {f2 > 0,  
t > Ti3, Qp3_t = Qmax3,  
t <= perioda, int(Qp3_x-Qmax3, x = Ti3 .. t)  
< 0};  
Ti3 := solve(rovnice3); if Ti3 = NULL then  
T3[i+1] := perioda;  
V_help3[i+1] := piecewise(t >= T3[i] and t <= T3[i+1],  
int(Qp3_x-Qmax3, x = T3[i] .. t)); maxI3 := i+1;  
break else Ti3 := eval(t, Ti3[1]); T3[i+1] := Ti3 end if;  
V_help3[i+1] := piecewise(t >= T3[i] and t <= T3[i+1],  
int(Qp3_x-Qmax3, x = T3[i] .. t)) end do;
```

Error, (in int) wrong number (or type) of arguments:
invalid options or option values passed to definite integration.

```
for i to maxI3 do Qvhelp3_t[i] := 'assuming'([simplify  
(piecewise(V_help3[i] <= 0,  
Qp3_t, V_help3[i] > 0, Qmax3))], [t >= T3[i-1] and t <= T3[i]]) end do;  
Qv3_t := 0;  
V3 := 0;  
for i to maxI3 do Qv3_t :=  
simplify(piecewise(t >= T3[i-1] and t <= T3[i],  
Qvhelp3_t[i], Qv3_t)); V3 :=  
simplify(piecewise(t >= T3[i-1] and t <= T3[i],  
V_help3[i], V3)) end do;  
V3 := simplify(piecewise(V3 < 0, 0, V3 >= 0, V3));  
plot({Qp3_t, Qv3_t, V3}, t = 0 .. perioda);
```