

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Integrální rovnice v matematickém modelování



Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky
Vedoucí diplomové práce: **prof. RNDr. Irena Rachůnková, DrSc.**
Vypracoval: **Bc. Jan Kalas**
Studijní program: N1101 Matematika
Studijní obor: Matematika a její aplikace
Forma studia: prezenční
Rok odevzdání: 2019

BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKACE

Autor: Bc. Jan Kalas

Název práce: Integrální rovnice v matematickém modelování

Typ práce: Diplomová práce

Pracoviště: Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

Vedoucí práce: prof. RNDr. Irena Rachůnková, DrSc.

Rok obhajoby práce: 2019

Abstrakt: Práce se zabývá několika matematickými modely a prezentuje způsoby, jak odvodit rovnice daných modelů, které se následně řeší za použití teorie lineárních integrálních rovnic. V práci je nejprve vysvětlena teorie lineárních integrálních rovnic, na kterou navazují dané modely, které lze konkrétní metodou vyřešit.

Klíčová slova: integrální rovnice, Bernoulliho problém, Abelův problém, stabilita tyče, populační modely

Počet stran: 50

Počet příloh: 0

Jazyk: Český

BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

Author: Bc. Jan Kalas

Title: Integral Equations in Mathematical Modelling

Type of thesis: Master thesis

Department: Department of Mathematical Analysis and Application of Mathematics

Supervisor: prof. RNDr. Irena Rachůnková, DrSc.

The year of presentation: 2019

Abstract: This master's thesis deals with certain mathematical models. It shows, how to derive equation of these models and then it uses the theory of linear integral equations to solve them. Firstly, the theory of linear integral equations is explained and then the models that can be solved with the particular method.

Key words: Integral equations, Bernoulli's problem, Abel's problem, stability of the rod, population model

Number of pages: 50

Number of appendices: 0

Language: Czech

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval pod vedením vedoucího diplomové práce prof. RNDr. Ireně Rachůnkové, DrSc. samostatně a uvedl jsem všechny použité prameny a literaturu.

V Olomouci dne

Poděkování

Zde bych rád poděkoval prof. RNDr. Ireně Rachůnkové, DrSc. za odborné vedení práce, věcné připomínky, dobré rady, pomoc při některých překladech, průběžnou korekturu, vstřícnost a trpělivost při konzultacích. Dále bych rád poděkoval kamarádce Mgr. Ing. Libuši Horáčkové za pomoc s programem \LaTeX .

Obsah

1	Úvod	8
2	Lineární rovnice	9
2.1	Dělení lineárních rovnic	9
2.1.1	Dělení podle absolutního členu $g(x)$	9
2.1.2	Dělení podle koeficientu $A(x)$	10
2.1.3	Dělení podle jádra $K(x, y)$	10
2.2	Typy Fredholmova jádra	11
2.3	Zobecnění IR	12
2.4	Vlastní čísla a vlastní vektory	12
2.5	Fredholmovy věty	13
2.5.1	1. Fredholmova věta	13
2.5.2	2. Fredholmova věta	13
2.5.3	3. Fredholmova věta	13
2.5.4	4. Fredholmova věta	14
3	Bernoulliho problém	15
3.1	Odvození	15
3.2	Řešení	17
3.2.1	Ilustrativní příklad	17
3.2.2	Obecné řešení	17
3.3	Další příklady	18
3.3.1	Příklad 1	19
3.3.2	Příklad 2	20
3.3.3	Příklad 3	21
4	Greenova funkce	25
5	Vzpěr tyče, stabilita stlačené tyče	27
5.1	Odvození	27
5.2	Tyč válcového tvaru	29
5.2.1	Konkrétní hodnoty	31
5.3	Tyč jako komolý kužel	32
5.3.1	Konkrétní model	35
6	Zatížená struna	36
6.1	Motivace	36
6.2	Volné kmity	36
6.3	Vynucené kmity	38
6.4	Existence řešení	38

7	Laplaceova transformace	39
7.1	Gamma funkce	39
7.2	Laplaceova transformace	39
7.2.1	Ilustrativní příklad	41
7.3	Další transformace	42
8	Abelův problém	44
8.1	Historie problému	44
8.2	Odvození rovnice	45
8.3	Řešení Abelova problému	45
9	Lidská populace	48
9.1	Konkrétní model a řešení	49
	Závěr	51
	Literatura	52

1 Úvod

Tato práce si za cíl klade ukázat aplikaci teorie integrálních rovnic na vybraných matematických modelech. U konkrétního modelu bude odvozen vztah, jak k rovnici člověk dojde a jak ji řešit.

Integrální rovnice (dále jen IR) jsou nástrojem matematické analýzy, díky kterým lze zkoumat některé matematické modely z matematiky, fyziky i biologie. V této práci jsou uvedeny modely vedoucí na skalární integrální rovnice, tedy takové, které souvisí s obyčejnými diferenciálními rovnicemi (dále jen ODR). Na druhou stranu některé fyzikální modely (jako jsou např. potenciály, elektrické náboje) vedou na parciální diferenciální rovnice.

Práce je rozdělena do několika kapitol. Nejprve je stručně vysvětlena klasifikace skalárních integrálních rovnic.

Dále je vysvětlen tzv. *Bernoulliho problém*, což je čistě matematický model. Kromě něj jsou uvedeny i příklady podobající, resp. vedoucí na Bernoulliho problém.

Následuje teorie *Greenovy funkce*, která se použije v modelu *stability stlačovaných tyčí různých tvarů*. Poté je vysvětlena *Zatížená struna*.

Jako poslední 2 modely jsou zde uvedeny *Abelův problém* týkající se speciálního druhu křivek a populační model. Před nimi je uvedena *Laplaceova transformace*, která dokáže vypočítat rovnice těchto modelů.

2 Lineární rovnice

Budeme se zabývat skalárními lineárními IR na intervalu $[a, b] \subset \mathbb{R}$, které mají tvar

$$A(x)f(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)f(y)dy = g(x). \quad (1)$$

- $A(x)$ je koeficient, zadaná reálná funkce, která je spojitá na $[a, b]$
- $f(x)$ je hledaná funkce, řešení
- $K(x, y)$ je jádro, zadaná reálná funkce spojitá na $Q = [a, b] \times [a, b]$, případně nespojitá pro $x = y$
- $g(x)$ je spojitá reálná funkce na intervalu $[a, b]$, absolutní člen
- $\lambda \neq 0$ je reálný parametr

Řešením rovnice (1) je reálná funkce $f(x)$ spojitá na intervalu $[a, b]$, která splňuje (1) pro všechna $x \in [a, b]$.

Rovnice (1) se nazývá **Fredholmova**. Speciálním případem Fredholmovy rovnice (1) je rovnice **Volterrova**, jejíž tvar je

$$A(x)f(x) - \int_a^x K(x, y)f(y)dy = g(x). \quad (2)$$

Tuto rovnici dostaneme z Fredholmovy pokud jádro $K(x, y) = 0$ pro $y > x$.

2.1 Dělení lineárních rovnic

2.1.1 Dělení podle absolutního členu $g(x)$

Rovnice (1) se dělí do dvou typů. Prvním z nich je **homogenní rovnice**, kde g je nulová, tj. $g(x) = 0$ pro všechna $x \in [a, b]$ a **nehomogenní rovnice**, není-li g nulová.

2.1.2 Dělení podle koeficientu $A(x)$

Podle koeficientu $A(x)$ v rovnici (1) existují 3 typy integračních rovnic, a to rovnice **1. druhu**, **2. druhu** a **3. druhu**.

Rovnice prvního druhu se pozná tím, že $A(x) = 0$ pro všechna $x \in [a, b]$. Tedy rovnice má tvar

$$\lambda \int_a^b K(x, y) f(y) dy = g(x). \quad (3)$$

Rovnice druhého druhu je taková, u níž je $A(x) \neq 0$ pro všechna $x \in [a, b]$, s výjimkou maximálně konečného počtu bodů.

Ve zbývajících případech se jedná o rovnici **třetího druhu**.

2.1.3 Dělení podle jádra $K(x, y)$

IR tvaru (1) se podle jádra dělí na rovnice s **Fredholmovým jádrem**, **rovnice se slabě singulárním jádrem** a **rovnice se singulárním jádrem**.

Jádro $K(x, y)$ rovnice (1) se nazývá **Fredholmovo**, je-li spojitě na Q nebo má nespojitosti prvního druhu pro $x = y$. Podtypy Fredholmových jader se vysvětlují v odstavci 2.2.

Dalším druhem jádra IR (1) je **jádro se slabou singularitou**, kde jádro splňuje podmínku

$$K(x, y) = \frac{H(x, y)}{|x - y|^\alpha}$$

kde $0 < \alpha < 1$. Funkce $H(x, y)$ je spojitá funkce na Q . [4]

V tomto případě pro všechna $x \in [a, b]$ existuje integrál

$$\int_a^b |K(x, y)| dy. \quad (4)$$

Posledním typem jádra IR (1) je **singulární jádro**. Jádro se nazve singulární, pokud integrál (4) neexistuje. V knize [4] se jako příklad singulárního jádra uvádí tvar

$$K(x, y) = \frac{A(x, y)}{x - y},$$

kde funkce $A(x, y)$ je spojitá na Q .

2.2 Typy Fredholmova jádra

Uvedme čtyři speciální typy Fredholmových jader, pro něž jsou odvozeny metody řešení příslušné IR.

Prvním speciálním typem Fredholmova jádra je tzv. **degenerované jádro**. Degenerované jádro lze rozložit na konečný součet součinů funkcí jedné proměnné, tj.

$$K(x, y) = \sum_{i=0}^n P_i(x)Q_i(y).$$

Funkce $P_i(x)$ a $Q_i(y)$ jsou spojitě lineárně nezávislé funkce na $[a, b]$, $i = 1, \dots, n$.

Druhým speciálním druhem Fredholmova jádra je **malé jádro**, které je charakterizováno nerovností

$$(b - a) \max_{(x,y) \in Q} |K(x, y)| < \frac{1}{|\lambda|}.$$

Třetím typem jádra je **konvolutorní jádro**, které má tvar

$$K(x, y) = k(x - y),$$

kde k je spojitá funkce na $[a, b]$.

Čtvrtým druhem Fredholmova jádra je **symetrické jádro**, které splňuje podmínku.

$$K(x, y) = K(y, x).$$

Symetrické jádro může být i slabě singulární či singulární, splňující podmínky slabé singularity, příp. singularity.

2.3 Zobecnění IR

Lineární rovnici (1) lze klasifikovat i obecněji. Stačí aby funkce $A(x)$, $f(x)$, $g(x)$, $K(x, y)$ byly Lebesgueovskými integrovatelnými v jejich kvadrátu a aby rovnost (1) platila skoro všude na intervalu $[a, b]$. Navíc funkce může nabývat komplexních hodnot a parametr λ může být komplexní číslo. Tato a další zobecnění jako je např. *nelineární rovnice*, *integrodiferenciální rovnice* či *soustava integrálních rovnic* se čtenář může dozvědět v [1], [3], [4] a [5].

2.4 Vlastní čísla a vlastní vektory

Nechť je dán operátor A takový, že $A : C(a, b) \rightarrow C(a, b)$ a

$$Af = \int_a^b K(x, y)f(y)dy.$$

Tento operátor je lineární (tedy platí $A(f + g) = Af + Ag$ a $k(Af) = (kA)f$, pro všechna $f, g \in C(a, b)$ a pro všechna $k \in \mathbb{R}$.) [1],[2]

Nechť je dán operátor A (z předchozího odstavce). Číslo $\mu \in \mathbb{C}$ nazveme **vlastním číslem** či **vlastní hodnotou**, pokud rovnice

$$As = \mu s$$

má netriviální (nenulové) řešení $s \in C(a, b)$. Množina vlastních čísel se nazývá **bodové spektrum operátoru A** . [1]

Příslušné řešení s se nazývá **vlastní vektor** (resp. **vlastní prvek**) příslušný vlastnímu číslu μ . Největší počet nezávislých prvků odpovídající μ je **geometrická násobnost vlastního čísla μ** .

Pokud platí, že $\mu \neq 0$, dostaneme $\lambda = \frac{1}{\mu}$ a nazveme jej **charakteristickým číslem operátoru A** . Množina takových čísel se jmenuje **charakteristické spektrum operátoru A** . [1]

2.5 Fredholmovy věty

Nechť jsou dány následující rovnice:

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x, y)f(y)dy + g(y), \quad (5)$$

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x, y)f(y)dy, \quad (6)$$

$$f(x) = \bar{\lambda} \int_a^b \overline{K(y, x)}f(y)dy, \quad (7)$$

$\bar{\lambda}$ je číslo komplexně sdružené k číslu λ a $\overline{K(y, x)}$ je transponované jádro k jádru $K(x, y)$. Všechny uvedené rovnice 2. druhu mají Fredholmovo jádro.

2.5.1 1. Fredholmova věta

Má-li rovnice (6) pouze triviální řešení, pak (5) má jediné řešení pro všechna $g \in C(a, b)$.

Někdy se tato věta též nazývá Fredholmovou alternativou. Popisuje případ, kdy λ není charakteristické číslo. [2]

2.5.2 2. Fredholmova věta

Rovnice (6) a (7) mají stejný nejvýše konečný počet lineárně nezávislých řešení pro dané λ .

Charakteristická čísla λ i $\bar{\lambda}$ mají stejnou **geometrickou násobnost**. [2]

2.5.3 3. Fredholmova věta

Rovnice (5) má řešení, platí-li

$$\int_a^b g(y)\overline{\varphi(y)}dy = 0$$

pro všechna řešení φ rovnice (7). [2]

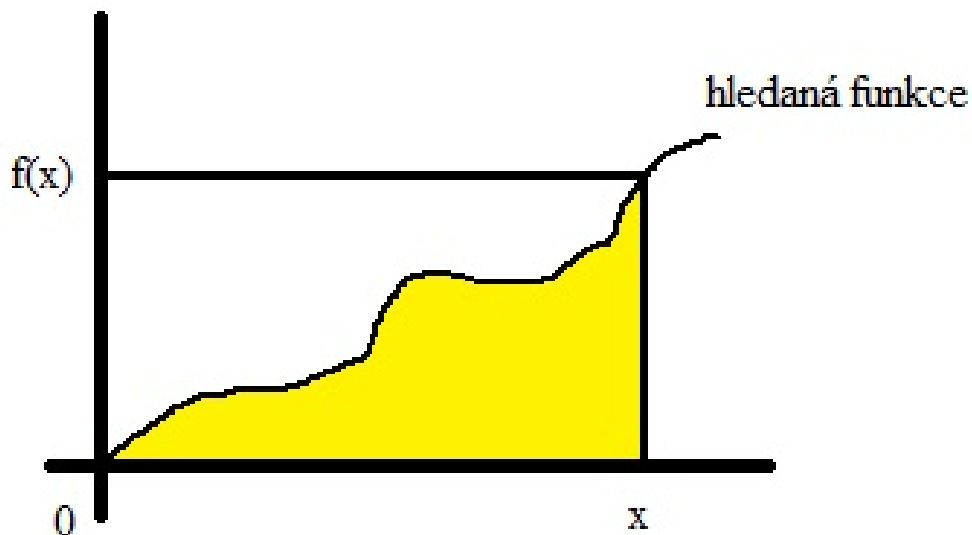
Rovnice (5) nemusí mít jediné řešení. Ve skutečnosti mohou nastat právě dvě možnosti, pokud je λ charakteristické číslo. Pak rovnice (5) nemá řešení vůbec nebo jich má nekonečně mnoho.

2.5.4 4. Fredholmova věta

Charakteristická čísla rovnice (6) tvoří nejvýše spočetnou množinu. Pokud je nekonečná, pak $\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_n| = \infty$. [2]

3 Bernoulliho problém

Jeden z problémů na hraně teorie a aplikace integrálních rovnic a geometrie je *Bernoulliho problém*.



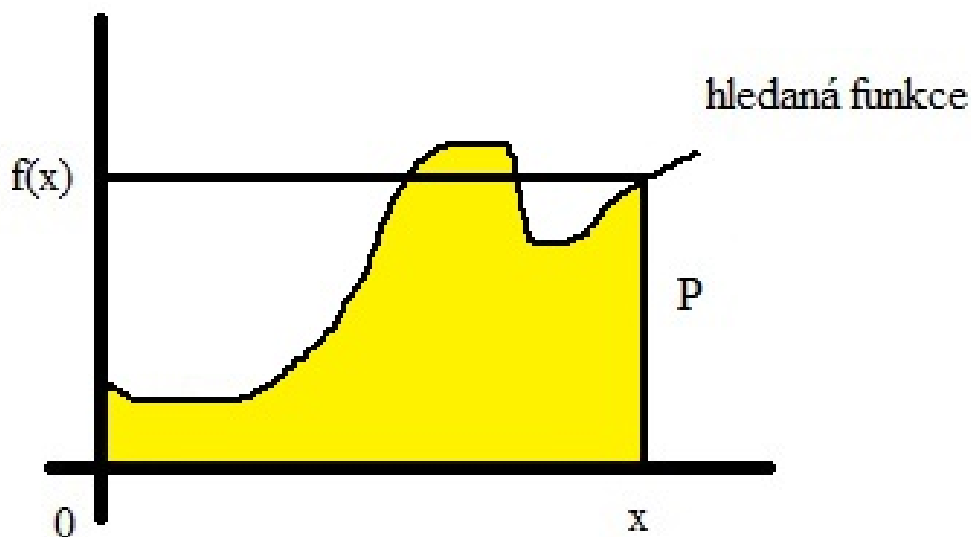
Obr. 1: Vizualizace bernoulliho problému.

Zároveň nastává otázka, zda funkce musí začínat v počátku, tj. v $(0, 0)$, a jestli musí celá ležet v obdélníku či zda může být část grafu mimo daný obdélník P , jak to ukazuje následující obrázek

3.1 Odvození

Problém se zabývá tvarem křivky $y = f(x)$ ležící v obdélníku P , v němž obsah plochy pod křivkou bude k -násobkem, kde $k \in (0, 1)$, obsahu celého tohoto obdélníku.

Protože se strany obdélníka nachází v intervalech $[0, x]$ na x -ové ose a $[0, f(x)]$ na y -ové ose, tedy jeho obsah je $xf(x)$. Zároveň z úvodu do integrálního počtu vyplývá, že obsah plochy pod křivkou na intervalu $[0, x]$ je $\int_0^x f(y)dy$.



Obr. 2: Otázka vlastností hledané funkce.

Z těchto dvou základních rovnic pro obsahy a požadavku zlomku (tj. $k \in (0, 1)$) obsahu obdélníka dostaneme následující rovnici:

$$kx f(x) = \int_0^x f(y) dy, x > 0. \quad (8)$$

Rovnici (8) lze převést do rovnice (1) a má podobu

$$x f(x) - \frac{1}{k} \int_0^x f(y) dy = 0.$$

Tato rovnice je:

- Lineární
- Volterrova
- Homogenní
- Druhého druhu ($A(x) = x$)

- S Fredholmovým jádrem $K(x, y) = \begin{cases} 1, & y \leq x \\ 0, & y > x \end{cases}$

3.2 Řešení

3.2.1 Ilustrativní příklad

V [5] se jako ilustrativní příklad uvádí hodnoty následovně: $k = \frac{1}{3}$, $f(x) = x^2$.
Po dosazení a úpravách rovnice (8) vychází

$$\frac{1}{3}x \cdot x^2 = \frac{1}{3}x^3 = \int_0^x y^2 dy.$$

Samotná hodnota integrálu je pak

$$\int_0^x y^2 dy = \frac{1}{3}[y^3]_0^x = \frac{1}{3}x^3.$$

3.2.2 Obecné řešení

Nechť máme rovnici (8), tedy

$$kxf(x) = \int_0^x f(y)dy, x > 0,$$

kde $0 < k < 1$ je pevně dáno. Hledáme kladnou spojitou funkci f , která splňuje (8) na $[0, x]$. Pak má f derivaci na $(0, \infty)$.

Protože $0 < k$, lze rovnici (8) vydělit číslem k a tedy

$$xf(x) = \frac{1}{k} \int_0^x f(y)dy.$$

Po zderivování rovnice plyne

$$f(x) + xf'(x) = \frac{1}{k}f(x).$$

Převodem $f(x)$ na pravou stranu a drobnou úpravou tohoto výrazu vyjde ODR prvního řádu

$$x \frac{df(x)}{dx} = \left(\frac{1}{k} - 1 \right) f(x).$$

Z toho vidíme, že je-li f řešením, pak f' je spojitá a kladná na $(0, \infty)$. Tato ODR se vyřeší metodou separace proměnných, tj.

$$\frac{df(x)}{f(x)} = \left(\frac{1}{k} - 1\right) \frac{dx}{x}.$$

Integrací obou stran vyjde

$$\ln f(x) = \left(\frac{1}{k} - 1\right) \ln x + \ln C, \text{ pro } C > 0, f > 0, x > 0.$$

Následným výpočtem dostáváme řešení rovnice (8), které má tvar

$$f(x) = Cx^{\left(\frac{1}{k}-1\right)}, x \geq 0. \quad (9)$$

Odtud též plyne, že $f(0) = 0$. Proto situace podle obr. 2 nemůže nastat.

Na závěr se provede zkouška, zda výraz (9) řeší rovnici (8). Dané řešení se dosadí do původní rovnice

$$kx Cx^{\frac{1}{k}-1} = \int_0^x C y^{\frac{1}{k}-1} dy.$$

Pro $C = 0$ platí rovnost $0 = 0$. Nechť $C \neq 0$ a tedy

$$kx^{\frac{1}{k}} = \int_0^x y^{\frac{1}{k}-1} dy,$$

následným výpočtem integrálu dostáváme

$$kx^{\frac{1}{k}} = \left[\frac{y^{1/k}}{1/k} \right]_0^x = kx^{\frac{1}{k}}.$$

Skutečně, funkce (9) je řešení rovnice (8).

3.3 Další příklady

Kromě výše uvedeného motivačního a obecného příkladu, lze různě upravovat tvary jádra $K(x, y)$, jak bude ukázáno na následujících řádcích v příkladech z pera vedoucí práce.

3.3.1 Příklad 1

Nechť $\lambda > 0$ a $A(x)$ je kladná (s výjimkou konečného počtu bodů) spojitá funkce na intervalu $[0, 1]$. Najděte kladnou spojitou funkci $f(x)$, pro níž platí, že hodnota v bodě x je rovna hodnotě $A(x)$ zvětšená o λ -násobek obsahu plochy pod grafem funkce f .

Tedy se bude řešit rovnice

$$f(x) = A(x) + \lambda \int_0^1 f(y) dy. \quad (10)$$

Tato IR je Fredholmova rovnice 2. řádu s jádrem $K(x, y) \equiv 1$. Řešení bude mít tvar

$$f(x) = A(x) + \lambda c.$$

Cílem je najít $c = \int_0^1 f(y) dy$. Pro zjednodušení necht' $A(x) = x$.

Toto řešení se dosadí do původní rovnice (10), tedy

$$x + \lambda c = x + \lambda \int_0^1 (y + \lambda c) dy.$$

Drobnou úpravou dostaneme ekvivalentní rovnici

$$c = \int_0^1 (y + \lambda c) dy.$$

Protože $c \in \mathbb{R}$, platí

$$c = \lambda c + \int_0^1 y dy.$$

Hodnota konstanty c je

$$c = \frac{1}{2(1 - \lambda)}.$$

Pro $\lambda \neq 1$ existuje právě jedno řešení, které má tvar

$$f(x) = x + \frac{\lambda}{2 - 2\lambda},$$

přičemž řešení je kladné, pokud $\lambda \in (0, 1)$. Naopak pro $\lambda = 1$ řešení neexistuje a λ je charakteristické číslo rovnice (10).

Na závěr tohoto příkladu se ověří, zda $f(x) = x + \frac{\lambda}{2-2\lambda}$ je řešení rovnice $f(x) = x + \lambda \int_0^1 f(y)dy$. Po dosazení funkce f do rovnice platí

$$x + \frac{\lambda}{2-2\lambda} = x + \lambda \int_0^1 \left(y + \frac{\lambda}{2-2\lambda} \right) dy.$$

Spočítáme integrál na pravé straně a dostáváme identitu na $[0, 1]$.

3.3.2 Příklad 2

Nechť $\lambda > 0$ a $A(x)$ je kladná (s výjimkou konečného počtu bodů) spojitá funkce na intervalu $[0, 1]$. Najděte nezápornou spojitou funkci $f(x)$, pro níž platí, že hodnota v bodě x je rovna hodnotě $A(x)$ zvětšená o λx -násobek obsahu plochy pod grafem funkce f .

Tedy se bude řešit rovnice

$$f(x) = A(x) + \lambda x \int_0^1 f(y)dy, x \in [0, 1]. \quad (11)$$

Tato IR je Fredholmova rovnice 2. řádu s jádrem $K(x, y) \equiv x$. Její řešení se opět hledá ve tvaru

$$f(x) = A(x) + \lambda xc.$$

Cílem je najít $c = \int_0^1 f(y)dy$. Pro zjednodušení nechť $A(x) = x$. Postup řešení bude analogický předchozímu příkladu.

Nechť je řešení dosazeno do původní rovnice (11), tedy

$$x + \lambda xc = x + \lambda x \int_0^1 (y + \lambda yc)dy.$$

Drobnou úpravou plyne

$$\lambda xc = \lambda x \int_0^1 y(1 + \lambda c)dy.$$

Protože λc je reálné číslo, lze výraz $1 + \lambda c$ vytknout před integrál, tzn.

$$\lambda x c = \lambda x (1 + \lambda c) \int_0^1 y dy.$$

Z tohoto dostáváme

$$\lambda x c = \lambda x \frac{1 + \lambda c}{2}, \quad x \in [0, 1].$$

Pro $x = 0$ lze c volit libovolně. Pro $x \neq 0$ se tento výraz vydělí výrazem λx a plyne

$$2c = 1 + \lambda c,$$

z čehož se získá hodnota

$$c = \frac{1}{2 - \lambda}.$$

Pro $\lambda = 2$ řešení f neexistuje a λ je charakteristickým číslem rovnice (11).

Pro $\lambda \neq 2$ existuje právě jedno řešení rovnice (11) ve tvaru

$$f(x) = x + \frac{\lambda x}{2 - \lambda} = \frac{2}{2 - \lambda} x, \quad x \in [0, 1].$$

Toto řešení je nezáporné pro $\lambda \in (0, 2)$.

Zda $f(x) = x + \frac{\lambda x}{2 - \lambda}$ řeší rovnici $f(x) = x + \lambda x \int_0^1 f(y) dy$ se dokáže ve zkoušce.

Po dosazení plyne

$$x + \frac{\lambda x}{2 - \lambda} = x + \lambda x \int_0^1 \left(x + \frac{\lambda y}{2 - \lambda} \right) dy.$$

Jako v předchozím příkladě po následném výpočtu integrálu na pravé straně dostáváme identitu na $[0, 1]$.

3.3.3 Příklad 3

Najděte zápornou spojitou funkci $f(x)$, pro níž platí, že hodnota v bodě x je rovna hodnotě x zvětšené o x -násobek obsahu plochy nad grafem funkce $f(x)$ a k němu přičtený obsah plochy nad grafem funkce $xf(x)$. Tedy

$$f(x) = x + x \int_0^1 f(y) dy + \int_0^1 y f(y) dy, \quad x \in [0, 1].$$

Tato úloha dává IR

$$f(x) = x + \int_0^1 (x+y)f(y)dy, x \in [0, 1], \quad (12)$$

tedy IR s degenerovaným jádrem $K(x, y) = x + y$, $\lambda = 1$.

Jádro $K(x, y)$ se rozloží na lineárně nezávislé komponenty, tj. $K(x, y) = P_1(x)Q_1(y) + P_2(x)Q_2(y)$,

$$\begin{aligned} P_1(x) &= x, & Q_1(y) &= 1, \\ P_2(x) &= 1, & Q_2(y) &= y. \end{aligned}$$

Vzhledem k rozkladu jádra lze vypočítat koeficienty $a_{ij} = \int_0^1 Q_i(x)P_j(x)dx$; $i, j = 1, 2$. Tedy dostaneme

$$a_{11} = \int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2},$$

$$a_{12} = \int_0^1 1 dx = [x]_0^1 = 1,$$

$$a_{21} = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3},$$

$$a_{22} = \int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Ze zadaných koeficientů a $\lambda = 1$ lze vypočítat matici $I - \lambda A$, kde matice A je dána těmito koeficienty a_{ij} , tzn.:

$$I - \lambda A = I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 1/3 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ -1/3 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Determinant této matice $\det(I - A) = -\frac{1}{12}$, tedy $\lambda = 1$ není charakteristické číslo, a tím existuje právě jedno řešení rovnice (12).

K určení řešení rovnice (12) se použije metoda *rezolventy*. Výsledné řešení nabyde tvaru

$$f(x) = x + \int_0^1 \Gamma(x, y; 1) y dy,$$

kde $\Gamma(x, y; 1)$ je rezolventa příslušná k číslu $\lambda = 1$. Pro výpočet této rezolventy potřebujeme hodnoty determinantů

$$|I - A| = -\frac{1}{12}$$

a

$$\Delta(x, y; 1) = - \begin{vmatrix} 0 & x & 1 \\ 1 & 1/2 & -1 \\ y & -1/3 & 1/2 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} + \frac{x}{2} + xy + \frac{y}{2}.$$

Rezolventa se rovná podílu těchto determinantů, tzn.

$$\Gamma(x, y; 1) = \frac{\Delta(x, y; 1)}{\det(I - A)} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{x}{2} + xy + \frac{y}{2}}{-\frac{1}{12}} = -12xy - 6x - 6y - 4.$$

Řešení $f(x)$ rovnice (12) má tvar

$$f(x) = x + \int_0^1 \Gamma(x, y; 1) y dy = x - \int_0^1 (12xy + 6x + 6y + 4) y dy = -6x - 4, x \in [0, 1].$$

Druhý způsob řešení, je soustavou rovnic. Matice A je známa z předchozího postupu. Stačí tedy vypočítat koeficienty $b_i(x) = \int_0^1 Q_i(x) x dx$, $i = 1, 2$ tedy

$$b_1 = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2},$$

$$b_2 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

Řešení bude mít tvar

$$f(x) = x + c_1 P_1(x) + c_2 P_2(x) = x + c_1 x + c_2,$$

kde se hodnoty čísel c_1, c_2 dostanou ze soustavy rovnic $(I - A)\mathbf{c} = \mathbf{b}$, resp.

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ -1/3 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

Řešením této maticové soustavy plynou koeficienty dostáváme $c_1 = -7, c_2 = -4$. Tyto hodnoty se dosadí do tvaru řešení a platí

$$f(x) = x - 7x - 4 = -6x - 4, x \in [0, 1].$$

Pokud by byl požadavek na hledání kladné funkce, jako v příkladech 3.3.1 a 3.3.2, úloha by nedávala řešení.

Na závěr se provede zkouška, zda se rovnice (12) vyřešila správně. Tedy do rovnice

$$f(x) = x + \int_0^1 (x + y)f(y)dy$$

se dosadí řešení

$$f(x) = -6x - 4.$$

Po dosazení se získá rovnice

$$-6x - 4 = x + \int_0^1 (x + y)(-6y - 4)dy,$$

a po výpočtu integrálu na pravé straně rovnice dostáváme identitu na intervalu $[0, 1]$.

4 Greenova funkce

Než se přejde na další model, je potřeba vysvětlit metodu Greenovy funkce, která se používá v modelu v následující kapitole.

Uvažujme nehomogenní diferenciální rovnici

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{df(x)}{dx} \right] + q(x)f(x) = -h(x), \quad (13)$$

spolu s okrajovými podmínkami

$$c_1 f(a) + c_2 f'(a) = 0, \quad c_3 f(b) + c_4 f'(b) = 0, \quad (14)$$

kde $x \in [a, b]$, $c_i \in \mathbb{R}$ splňující podmínky $|c_1| + |c_2| > 0$ a $|c_3| + |c_4| > 0$, funkce $f(x) \in C^2[a, b]$, $p(x) \in C^1[a, b]$ a funkce $q(x), h(x) \in C[a, b]$. [1] [4]

Pro zjištění existence Greenovy funkce je třeba zjistit řešení homogenní diferenciální rovnice

$$\frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{df(x)}{dx} \right] + q(x)f(x) = 0 \quad (15)$$

společně s okrajovými podmínkami (14). Pokud má (15), (14) pouze triviální řešení, poté existuje jediná Greenova funkce $G(x, y)$. Ta má vlastnosti:

1. $G(x, y)$ je spojitá pro $(x, y) \in [a, b] \times [a, b]$.
2. Pro každé $y \in (a, b)$ je $\frac{\partial G(x, y)}{\partial x}$ spojitá pro $x \in [a, b]$.
3. Pro $x \neq y$ platí $\lim_{x \rightarrow y^+} \frac{\partial G(x, y)}{\partial x} - \lim_{x \rightarrow y^-} \frac{\partial G(x, y)}{\partial x} = -\frac{1}{p(y)}$.
4. Pro každé $y \in (a, b)$ splňuje $G(x, y)$ jako funkce proměnné x rovnici (15) pro $x \in (a, y)$ a $x \in (y, b)$ a podmínky (14).

Jsou-li funkce $u(x)$ a $v(x)$ lineárně nezávislá řešení (15), přičemž $u(x)$ splňuje první podmínku v (14) a pro $v(x)$ platí druhá podmínka z (14), pak pro $x \in [a, b]$ Wronskián (Wronského determinant)

$$W(x) = \begin{vmatrix} u(x) & v(x) \\ u'(x) & v'(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

a pro nenulovou konstantu c platí, $c = -p(x)W(x)$.

Greenova funkce pak bude mít tvar

$$G(x, y) = \begin{cases} \frac{u(x)v(y)}{c}, & a \leq x \leq y \leq b \\ \frac{u(y)v(x)}{c}, & a \leq y \leq x \leq b. \end{cases} \quad (16)$$

Pro každou funkci $h(x)$ existuje jediné řešení $f(x)$ úlohy (13), (14), které je ve tvaru

$$f(x) = \int_a^b G(x, y)h(y)dy, \quad x \in [a, b]. \quad (17)$$

5 Vzpěr tyče, stabilita stlačené tyče

V tomto fyzikálním problému budeme vyšetřovat 2 modely. Prvním z nich je tyč, která má tvar válce ($q = 0$). Ve druhém pak bude tyč nabývat tvaru komolého kužele (pro $q \neq 0$, podle obr. 4). V [4] je vyřešen druhý z nich, nicméně zde se nejprve vyřeší obecný případ a následně se dořeší každý zvlášť.

5.1 Odvození

Rovnice určující tvar ohybové křivky pružné tyče délky $l > 0$ má tvar

$$\frac{d}{dx} \left[EI(x) \frac{df(x)}{dx} \right] = M(x) \quad (18)$$

- $f(x)$ je funkce určující tvar zakřivení tyče pro $x \in [0, l]$,
- $M(x)$ je působící moment (moment síly) ve směru osy x pro $x \in [0, l]$,
- $I(x)$ je moment setrvačnosti¹ přičemž $I(x) > 0$ pro $x \in [0, l]$,
- $E \in \mathbb{R}$ je Youngův modul (modul pružnost v tahu)².

Tlak $P \in \mathbb{R}$ působí na koncích tyče, tj. $M(x) = -Pf(x)$ a po dosazení do (18) dostáváme

$$\frac{d}{dx} \left[EI(x) \frac{df(x)}{dx} \right] + Pf(x) = 0. \quad (19)$$

Protože se tyč nehýbe ve svislém směru (pouze se stlačuje), dostaneme okrajové podmínky

$$f(0) = f(l) = 0. \quad (20)$$

V rovnici (19) uděláme substituci $\lambda = \frac{P}{E}$, tedy

$$\frac{d}{dx} \left[I(x) \frac{df(x)}{dx} \right] + \lambda f(x) = 0, \quad x \in [0, l] \quad (21)$$

¹Moment setrvačnosti vyjadřuje míru setrvačnosti a závisí na rozložení látky, hmoty. [7]

²Youngův modul je poměr normálového napětí (σ) k relativnímu prodloužení (ε) při deformaci tahem (natažení objektu) či deformaci tlakem (stlačování), vztahem $E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$ [7]

Pro sestavení Greenovy funkce uvažujme homogenní rovnici (21), tedy

$$\frac{d}{dx} \left[I(x) \frac{df(x)}{dx} \right] = 0, \quad x \in [0, l]. \quad (22)$$

Nyní ukážeme, že rovnice (22) spolu s podmínkami (20) má pouze triviální řešení. Předpokládejme, že $f(x)$ je řešením této úlohy. Tedy podle (20) existuje $\xi \in (0, l)$ takové, že $f'(\xi) = 0$.

Pro libovolné $x \in [0, l]$ rovnici (22) integrujeme od x do ξ . Z toho dostaneme

$$I(x) \frac{df(x)}{dx} = 0.$$

Protože $I(x) > 0$ pro libovolné $x \in [0, l]$, dostáváme

$$\frac{df(x)}{dx} = 0$$

pro libovolné $x \in [0, l]$. Tedy $f(x)$ je konstantní na intervalu $[0, l]$ a spolu s (20), dostáváme $f(x) \equiv 0$, a úloha (22), (20) má Greenovu funkci.

Nyní zvolme funkci $h(x)$, která bude spojitá na intervalu $[0, l]$ a nehomogenní diferenciální rovnici

$$\frac{d}{dx} \left[I(x) \frac{df(x)}{dx} \right] = -h(x), \quad x \in [0, l]. \quad (23)$$

Potom

$$f(x) = \int_0^l G(x, y) h(y) dy, \quad x \in [0, l] \quad (24)$$

je jediné řešení úlohy (23), (20). Pro $h(y) = \lambda f(y)$ rovnice (24) přejde do integrální rovnice

$$f(x) - \lambda \int_0^l G(x, y) f(y) dy = 0, \quad x \in [0, l], \quad (25)$$

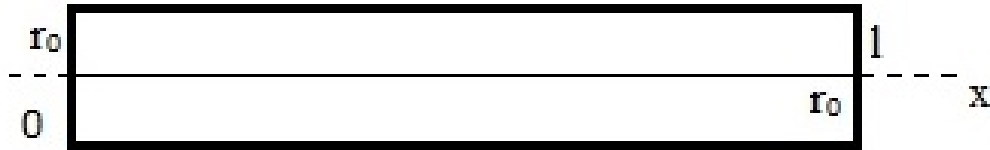
která je ekvivalentní s úlohou (21), (20).

Má-li (25) netriviální řešení $f(x)$, znamená to, že tyč se zkříví. To nastane v případě, že $P = \lambda_n E$, kde λ_n je charakteristické číslo rovnice (25). Podle [4] je nejmenší (kritická) hodnota síly, při níž tyč ztrácí stabilitu přibližně

$$\lambda_1 \approx \frac{1}{\sqrt{\int_0^l \int_0^l G^2(x, y) dx dy}} = \frac{1}{\|G(x, y)\|_{L^2(0, l)^2}}.$$

5.2 Tyč válcového tvaru

Nyní vyřešme případy uvedené v úvodu této kapitoly, tedy když tyč bude válec a v další podkapitole bude tyč mít tvar komolého kužele. Otázka je jediná - jaká je kritická hodnota, kdy tyč daných tvarů ztrácí stabilitu.



Obr. 3: Tyč válcového tvaru.

Tyč má tvar válce s poloměrem r_0 po celé délce l , moment setrvačnosti $I(x) = \frac{\gamma r_0^2}{2}$ je díky tvaru tyče konstantní. Symbol γ vyjadřuje hustotu materiálu, z něhož je tyč. [4]

Mějme rovnici (21). Necht' $\mu = \frac{\lambda}{I} = \frac{\lambda}{\frac{\gamma r_0^4}{2}} = \frac{2\lambda}{\gamma r_0^4}$. Pak rovnice (21) přejde do tvaru

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \mu f(x) = 0. \quad (26)$$

Z homogenní rovnice

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = 0$$

a okrajových podmínek

$$\begin{aligned}u(0) &= 0, & u(l) &\neq 0, \\v(0) &\neq 0, & v(l) &= 0.\end{aligned}$$

se získá Greenova funkce.

Obecné řešení rovnice

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = 0$$

má tvar

$$f(x) = C_1 x + C_2,$$

kde C_1, C_2 jsou libovolná reálná čísla. Konkrétní hodnoty se získají díky okrajovým podmínkám. Tím se získají i konkrétní funkce $u(x), v(x)$.

Nejprve se použije první podmínka, tedy $u(0) = 0$. Poté

$$C_1 \cdot 0 + C_2 = 0,$$

tedy

$$C_2 = 0$$

a C_1 je libovolné, např.

$$C_1 = 1.$$

Tedy po dosazení konkrétních hodnot se získává

$$u(x) = x.$$

Nyní se použije druhá podmínka, tedy $v(l) = 0$. Poté

$$C_1 l + C_2 = 0.$$

Nechť $C_2 = 1$ a tím $C_1 = -\frac{1}{l}$. Dostáváme $v(x)$ tedy je

$$v(x) = -\frac{x}{l} + 1.$$

Nezávislost funkcí $u(x), v(x)$ můžeme zjistit výpočtem Wronskiánu. Derivace zjištěných funkcí jsou $u'(x) = 1$ a $v'(x) = -\frac{1}{l}$. Po dosazení do Wronského determinantu máme

$$W(x) = \begin{vmatrix} u(x) & v(x) \\ u'(x) & v'(x) \end{vmatrix} = u(x)v'(x) - u'(x)v(x),$$

po dosazení a následné úpravě

$$W(x) = x \left(-\frac{1}{l} \right) - 1 \left(-\frac{x}{l} + 1 \right) = -\frac{x}{l} + \frac{x}{l} - 1 = -1 \neq 0,$$

plyne, že funkce $u(x), v(x)$ jsou lineárně nezávislé.

Pro získání Greenovy funkce a následně IR, je ještě potřeba vypočítat koeficient c .

$$c = -p(x)W(x) = -1(-1) = 1.$$

Tedy integrální rovnice ekvivalentní s úlohou (26), (20) bude mít tvar

$$f(x) - \mu \int_0^l G(x, y) f(y) dy = 0,$$

$$\text{kde } G(x, y) = \begin{cases} x \left(-\frac{y}{l} + 1 \right), & 0 \leq x \leq y \leq l, \\ y \left(-\frac{x}{l} + 1 \right), & 0 \leq y \leq x \leq l. \end{cases}$$

5.2.1 Konkrétní hodnoty

Nechť máme tyč válcového tvaru, jejíž délka $l = 1$. Greenovu funkci pak máme

$$\text{ve tvaru } G(x, y) = \begin{cases} x(-y + 1), & x \leq y, \\ y(-x + 1), & y \leq x. \end{cases}$$

Jak je psáno v závěru kapitoly 5.1, tyč bude ztrácet stabilitu, pokud

$$\lambda_1 \approx \frac{1}{\|G(x, y)\|_{L^2(0,1)^2}}.$$

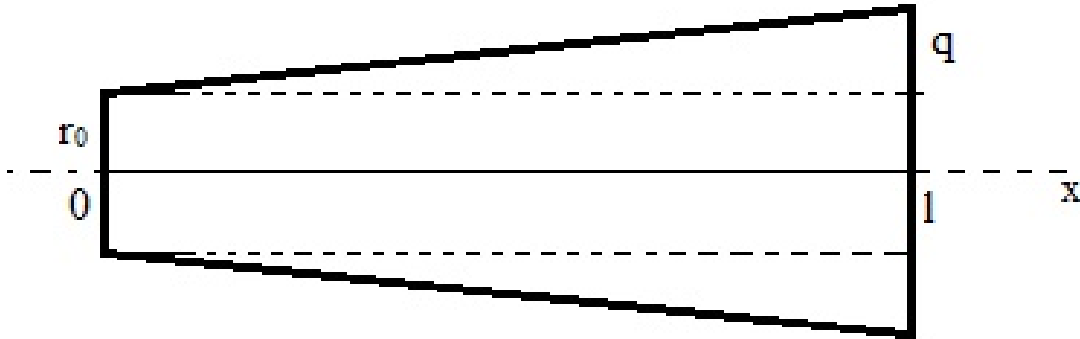
Nyní zjistíme kritickou hodnotu přes výpočet normy $\|G(x, y)\|_{L^2(0,1)^2}$. Vezměme si pouze první tvar Greenovy funkce

$$\|G(x, y)\|_{L^2(0,1)^2}^2 = \int_0^1 \int_0^1 (x-xy)^2 dx dy = \int_0^1 \left[\int_0^1 (x^2 - 2x^2y + x^2y^2) dx \right] dy = \frac{1}{9}.$$

Pro druhý tvar ($G(x, y) = y - xy$) vyjde stejná norma. To znamená, že nejmenší kritická hodnota, při níž tyč ztrácí stabilitu má hodnotu

$$\lambda_1 \approx \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{9}}} = 3.$$

5.3 Tyč jako komolý kužel



Obr. 4: Tyč ve tvaru komolého kužele

Tyč, která má tvar komolého kužele má v koncových bodech poloměry r_0 a $r_0 + q$. Poloměr v libovolném bodě po celé délce tyče je $r_0 \left(1 + \frac{qx}{l}\right)$, kde q je rozdíl v poloměrech, l je délka tyče, r_0 je původní, menší poloměr. Moment setrvačnosti $I(x) = \frac{\gamma r_0^4}{2} (1 + \alpha x)^4$. Symbol γ značí hustotu materiálu, z něhož je tyč; $\alpha = \frac{q}{l}$. [4]

Po dosazení těchto výrazů do rovnice (21) vyplývá

$$\frac{d}{dx} \left[(1 + \alpha x)^4 \frac{df(x)}{dx} \right] + \mu f(x) = 0, \quad x \in [0, l],$$

kde $\mu = \frac{2\lambda}{\gamma r_0^4}$.

Nyní se sestaví Greenova funkce $G(x, y)$ z homogenní úlohy

$$\frac{d}{dx} \left[(1 + \alpha x)^4 \frac{df(x)}{dx} \right] = 0, \quad f(0) = f(l) = 0.$$

Po integraci dostáváme

$$(1 + \alpha x)^4 \frac{df(x)}{dx} = C_0.$$

Drobnou úpravou získáme

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{C_0}{(1 + \alpha x)^4}.$$

Následnou integrací máme obecné řešení, které má tvar

$$f(x) = \frac{C_1}{(1 + \alpha x)^3} + C_2,$$

kde C_1, C_2 jsou libovolné reálné koeficienty. Následně zjistíme konkrétní tvary funkcí výpočtem $u(x)$ a $v(x)$ z okrajových podmínek $f(0) = f(l) = 0$.

Nejprve se použije první okrajová podmínka, tedy $u(0) = 0$. Tedy

$$C_1 + \frac{C_2}{(1 + 0)^3} = 0.$$

Po zjednodušení platí

$$C_1 + C_2 = 0,$$

tedy

$$C_1 = -C_2.$$

Nechť například $C_1 = 1$ a tedy $C_2 = -1$. Tyto koeficienty dosadíme do původního tvaru a tedy

$$u(x) = 1 - \frac{1}{(1 + \alpha x)^3}.$$

Nyní použijeme druhou okrajovou podmínku, tedy $v(l) = 0$. Tedy

$$C_1 + \frac{C_2}{(1 + \alpha l)^3} = 0.$$

Nechť například $C_2 = 1$, tedy $C_1 = -\frac{1}{(1 + \alpha l)^3}$. Po dosazení do původního tvaru získáme

$$v(x) = -\frac{1}{(1 + \alpha l)^3} + \frac{1}{(1 + \alpha x)^3}.$$

Pro vytvoření Greenovy funkce, je třeba zjistit, zda $W(x) \neq 0$ a tím pádem lineární nezávislost funkcí $u(x)$ a $v(x)$.

Funkce $u(x) = 1 - (1 + \alpha x)^{-3}$, její derivace $u'(x) = 3\alpha(1 + \alpha x)^{-4}$, $v(x) = (1 + \alpha x)^{-3} - (1 - \alpha l)^{-3}$ a její derivace $v'(x) = -3\alpha(1 + \alpha x)^{-4}$ se dosadí do Wronskiánu.

$$W(x) = \begin{vmatrix} u(x) & v(x) \\ u'(x) & v'(x) \end{vmatrix} = u(x)v'(x) - u'(x)v(x)$$

Po dosazení daných funkcí plyne

$$W(x) = \left(1 - \frac{1}{(1 + \alpha x)^3}\right) \frac{-3\alpha}{(1 + \alpha x)^4} - \frac{3\alpha}{(1 + \alpha x)^4} \left(-\frac{1}{(1 + \alpha l)^3} + \frac{1}{(1 + \alpha x)^3}\right).$$

Algebraickými úpravami získáme

$$W(x) = \frac{3\alpha}{(1 + \alpha x)^4} \left(\frac{1}{(1 + \alpha l)^3} - 1\right).$$

Protože $l > 0$, $q > 0$ a tedy i $\alpha = \frac{q}{l} > 0$, $W(x) \neq 0$ pro $x \in [0, l]$ a tedy funkce $u(x)$, $v(x)$ jsou lineárně nezávislé na $[0, l]$.

Dále zjistíme hodnotu konstanty c . Ta je dána obecným vztahem

$$c = -p(x)(u(x)v'(x) - u'(x)v(x)) = -p(x)W(x).$$

Pro tento příklad je

$$c = -(1 + \alpha x)^4 \frac{3\alpha}{(1 + \alpha x)^4} \left(\frac{1}{(1 + \alpha l)^3} - 1\right)$$

Tedy

$$c = 3\alpha \left(1 - \frac{1}{(1 + \alpha l)^3}\right).$$

$$\text{Greenova funkce má tvar } G(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{c} \left[1 - \frac{1}{(1 - \alpha x)^3}\right] \left[\frac{1}{(1 + \alpha y)^3} - \frac{1}{(1 + \alpha l)^3}\right], & 0 \leq x \leq y \leq l, \\ \frac{1}{c} \left[1 - \frac{1}{(1 - \alpha y)^3}\right] \left[\frac{1}{(1 + \alpha x)^3} - \frac{1}{(1 + \alpha l)^3}\right], & 0 \leq y \leq x \leq l. \end{cases}$$

[4]

5.3.1 Konkrétní model

Jako i u příkladu s tyčí ve tvaru válce uvažujme délku tyče $l = 1$. Ale zde uvažujme, že rozdíl v poloměrech je též $q = 1$. Následně $\alpha = \frac{q}{l} = 1$.

Zde koeficient c má hodnotu $\frac{21}{8}$ a tedy Greenova funkce má tvar $G(x, y) =$

$$\begin{cases} \frac{8}{21} \left[1 - \frac{1}{(1-x)^3}\right] \left[\frac{1}{(1+y)^3} - \frac{1}{8}\right], & 0 \leq x \leq y \leq 1, \\ \frac{8}{21} \left[1 - \frac{1}{(1-y)^3}\right] \left[\frac{1}{(1+x)^3} - \frac{1}{8}\right], & 0 \leq y \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Kritická hodnota, při které tyč ztratí stabilitu má hodnotu

$$\lambda_1 \approx \frac{1}{\|G(x, y)\|_{L^2(0,1)^2}},$$

kde

$$\|G(x, y)\|_{L^2(0,1)^2}^2 = \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{8}{21} \left[1 - \frac{1}{(1-x)^3}\right] \left[\frac{1}{(1+y)^3} - \frac{1}{8}\right] \right]^2 dx dy = \frac{37}{1225}.$$

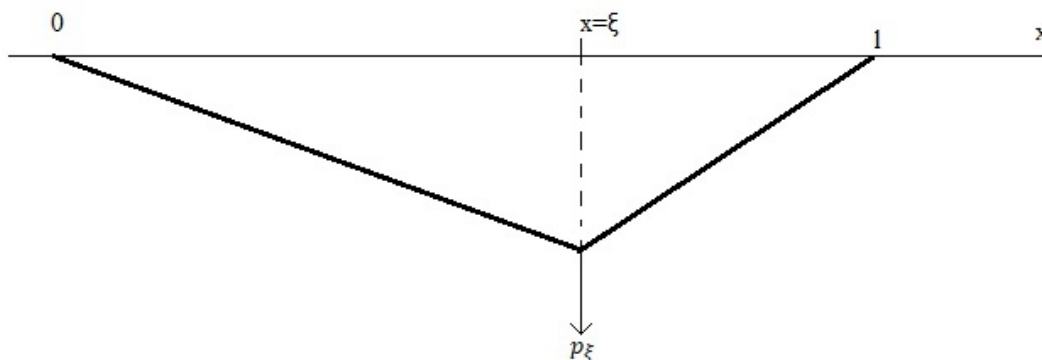
Tudíž nejmenší kritická hodnota stability činí

$$\lambda_1 \approx \sqrt{\frac{1225}{37}} \doteq 5,75.$$

6 Zatížená struna

6.1 Motivace

Nechť máme strunu o délce l , ta se může ohýbat, ale na prodloužení je potřeba použít sílu úměrnou danému prodloužení. To je napětí zatížené struny, p_ξ je síla působící na strunu v bodě $\xi \in (0, l)$. Struna je upevněna na obou svých koncích (tj. v $x = 0$ a $x = l$) a $f(x)$ je funkce popisující tvar struny.



Obr. 5: Zatížená struna.

6.2 Volné kmity

Nejprve uvažujme, že struna kmitá bez vnější setrvačné síly. Funkce $f(x)$ je hladká a splňuje homogenní Fredholmovu integrální rovnici 2. druhu, která má tvar

$$f(x) - \frac{1}{T_0} \int_0^l K(x, y) f(y) dy = 0, \quad (27)$$

$$K(x, y) = \begin{cases} \frac{x(l-y)}{l}, & 0 \leq x \leq y \leq l, \\ \frac{y(l-x)}{l}, & 0 \leq y \leq x \leq l. \end{cases} \quad (28)$$

Aby rovnice (27) měla netriviální řešení a tedy měla volné kmity, musí být $\frac{1}{T_0}$ jejím charakteristickým číslem. Ta určíme následovně.

Rovnici (27),(28) můžeme přepsat do tvaru

$$f(x) = \frac{1}{T_0} \int_0^x \frac{y(l-x)}{l} f(y) dy + \frac{1}{T_0} \int_x^l \frac{x(l-y)}{l} f(y) dy. \quad (29)$$

Po dvou derivacích této rovnice dostaneme ODR 2. řádu s okrajovými podmínkami

$$f''(x) + \frac{1}{T_0} f(x) = 0, \quad (30)$$

$$f(0) = f(l) = 0. \quad (31)$$

Fundamentální systém této rovnice pro $\frac{1}{T_0} > 0$ má tvar $\sin\left(x\sqrt{\frac{1}{T_0}}\right), \cos\left(x\sqrt{\frac{1}{T_0}}\right)$.

Obecné řešení bude lineární kombinací fundamentálního systému, tedy

$$f(x) = m_1 \sin\left(x\sqrt{\frac{1}{T_0}}\right) + m_2 \cos\left(x\sqrt{\frac{1}{T_0}}\right)$$

pro reálná čísla m_1, m_2 . Chceme najít netriviální řešení úlohy (30),(31). Po dosazení okrajové podmínky $f(0) = 0$ dostaneme

$$f(0) = m_1 \sin\left(0\sqrt{\frac{1}{T_0}}\right) + m_2 \cos\left(0\sqrt{\frac{1}{T_0}}\right) = 0,$$

z toho plyne $m_2 = 0$.

Pro výpočet druhého koeficientu m_1 dosadíme druhou okrajovou podmínku a hodnotu m_2 . Zároveň musí být $m_1 \neq 0$, jinak by řešení bylo pouze triviální.

$$f(l) = m_1 \sin\left(l\sqrt{\frac{1}{T_0}}\right) = 0,$$

$$\sin\left(l\sqrt{\frac{1}{T_0}}\right) = 0$$

a to nastane, pokud

$$\sqrt{\frac{1}{T_0}} = \frac{k\pi}{l}, k \in \mathbb{N}.$$

Maximální systém charakteristických čísel jádra $K(x, y)$ tedy je $\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$ pro $k \in \mathbb{N}$. Pokud pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ platí $\lambda_k = \frac{1}{T_0}$, pak existuje netriviální řešení rovnice (29) ve tvaru

$$f_k(x) = m_1 \sin\left(x\sqrt{\lambda_k}\right) = m_1 \sin\left(x\frac{k\pi}{l}\right), k \in \mathbb{N}, m_1 \neq 0.$$

Zároveň funkce f_k je vlastní funkce příslušná k λ_k a je též netriviálním řešením rovnice (29).

6.3 Vynucené kmity

Nyní na strunu necháme působit vnější sílu $F_0(x)$. Ta je spojitě rozložena podél celé délky struny.

Pokud funkce $f(x)$ splňuje nehomogenní Fredholmovu rovnici 2. druhu, která má tvar

$$f(x) - \frac{1}{T_0} \int_0^l K(x, y)f(y)dy = F_0(x) \quad (32)$$

s jádrem (28), potom má struna vynucené kmity.

6.4 Existence řešení

Nyní provedeme diskuzi existence řešení integrální rovnice (32) podle T_0 .

Pokud $\frac{1}{T_0} = \lambda_k$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ je charakteristickým číslem jádra K , pak má podle 3. Fredholmovy věty řešení, pokud

$$\int_0^l F_0(y)f_k(y)dy = 0,$$

kde $f_k(x) = \sin(x\sqrt{\lambda_k})$.

Pokud ovšem $\frac{1}{T_0} \neq \lambda_k$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, tedy $\frac{1}{T_0}$ není charakteristickým číslem jádra K , pak podle 1. Fredholmovy věty má úloha (32) jediné řešení pro všechna $F_0(x)$.

7 Laplaceova transformace

7.1 Gamma funkce

S Laplaceovou transformací se pojí pojem *Gamma funkce*. Ta je definována vztahem

$$\Gamma(\xi) = \int_0^{\infty} y^{\xi-1} e^{-y} dy, \quad \xi \neq 0, -1, -2, \dots$$

Některé vlastnosti Gamma funkce[5]:

$$\Gamma(\xi + 1) = \xi\Gamma(\xi),$$

$$\Gamma(n + 1) = n!, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\Gamma(1) = 0! = 1,$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

7.2 Laplaceova transformace

Než přejdeme na další modely, vysvětlíme si metodu *Laplaceovy transformace*.

Laplaceova transformace převede spojitou funkci $f(x)$ na jinou funkci proměnné s předpisem

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx.$$

Následující tabulky na následující stránce nám ukazují základní přehled vzorů funkcí a jejich obrazů v Laplaceově transformaci.

	Vzor	Obraz
1	$x^\xi, \operatorname{Re}(\xi) > -1$	$\frac{\Gamma(\xi+1)}{s^{\xi+1}}$ pro $s > 0$
2	e^{ax}	$\frac{1}{s-a}$ pro $s > a$
3	$\sin(ax)$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$
4	$\cos(ax)$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$

Vlastnosti

	Vzor	Obraz
5	$af(x)$	$aF(s)$
6	$f_1(x) + f_2(x)$	$F_1(s) + F_2(s)$
7	$f(ax)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$
8	$x^n f(x)$	$(-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$
9	$\int_0^x f(p) dp$	$\frac{1}{s} F(s)$
10	$e^{-ax} f(x)$	$F(s+a)$
11	$\int_0^x f_1(x-y) f_2(y) dy \equiv f_1 * f_2$	$F_1(s) F_2(s)$
12	$\frac{d^n f(x)}{dx^n}$	$s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{n-k-1}(0)$

Nechť je dána Volterrova rovnice s konvolutorním jádrem a konvolutorním součinem³

$$f(x) = \lambda \int_0^x k(x-y)f(y)dy + g(x). \quad (33)$$

Nyní převedeme rovnici (33) na její transformovanou verzi. Protože víme, co to je konvolutorní součin, lze rovnici (33) přepsat do tvaru

$$f(x) = \lambda(k * f)(x) + g(x).$$

Po transformaci dostáváme tvar

$$F(s) = \lambda K(s)F(s) + G(s),$$

z čehož vyplývá, že

$$F(s) = \frac{G(s)}{1 - \lambda K(s)}.$$

Zpětnou, neboli inverzní transformací získáme původní řešení

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{1 - \lambda K(s)} \right\}.$$

7.2.1 Ilustrativní příklad

Uvažujme nejprve obecnou rovnici

$$f(x) = \lambda \int_0^x k(x-y)p(y)dy$$

pro neznámou funkci $p(y)$. Po transformaci dostáváme

$$F(s) = \lambda K(s)P(s).$$

Po vyjádření získáme

$$P(s) = \frac{F(s)}{\lambda K(s)}.$$

³Konvolutorní součin $(k * f)(x) = \int_0^x k(x-y)f(y)dy$.

Zpětnou transformací a využitím pravidla o vytknutí reálného čísla zjistíme výsledek, který je ve tvaru

$$p(x) = \frac{1}{\lambda} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{F(s)}{K(s)} \right\}.$$

Nyní zvolme konkrétní funkce. Mějme rovnici

$$\sin(x) = \lambda \int_0^x e^{x-y} p(y) dy. \quad (34)$$

Tedy $f(x) = \sin(x)$, $k(x-y) = e^{x-y}$ a funkci $p(y)$ neznáme. Podle tabulek a vzorů a obrazů funkcí získáme $F(s) = \frac{1}{s^2+1}$ a $K(s) = \frac{1}{s-1}$ pro $s > 1$.

Po dosazení transformací do obecného předpisu obdržíme

$$p(x) = \frac{1}{\lambda} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\frac{1}{s^2+1}}{\frac{1}{s-1}} \right\} = \frac{1}{\lambda} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s-1}{s^2+1} \right\}.$$

Drobnou úpravou a inverzní transformací získáme

$$p(x) = \frac{1}{\lambda} \left(\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2+1} \right\} - \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2+1} \right\} \right) = \frac{1}{\lambda} (\cos(x) - \sin(x)).$$

Funkce $p(x) = \frac{1}{\lambda} (\cos x - \sin x)$ je řešením rovnice (34).

7.3 Další transformace

Kromě výše uvedené Laplaceovy transformace existují v teorii řešení IR i *Fourierova transformace*, k ní *inverzní Fourierova transformace* a *Hilbertova transformace*.

Fourierova transformace je dána vztahem

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-isy} dy.$$

Inverzní Fourierova transformace je ve tvaru

$$f(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(s) e^{isy} ds.$$

A Hilbertova transformace, jejíž výpočet je dán výrazem

$$\mathcal{H}\{f(x)\} = \frac{1}{\pi} PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)}{x-y} dy,$$

kde PV je tzv. *hlavní hodnota integrálu*.

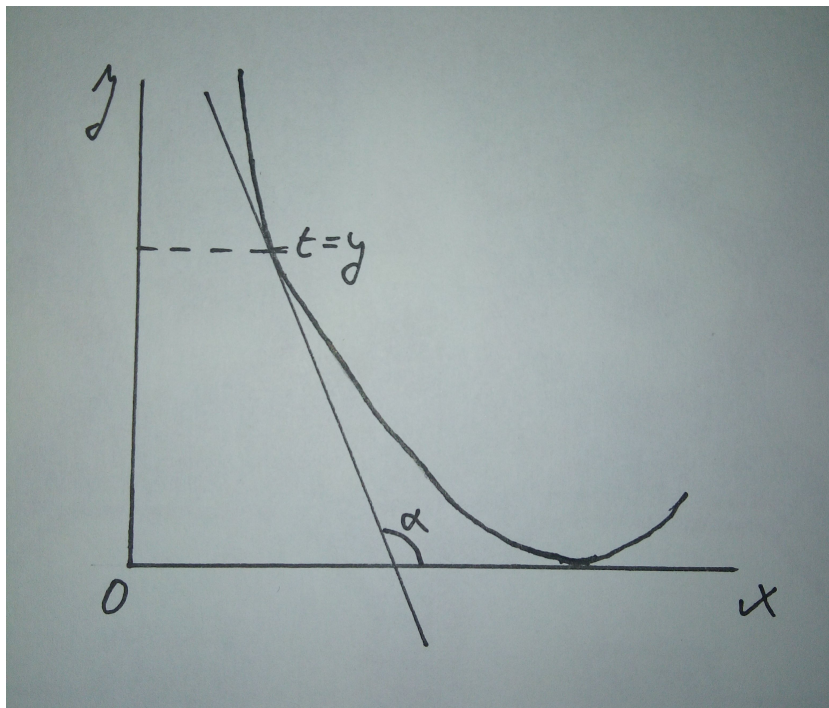
Další informace o uvedených transformacích lze nalézt např. v [3].

8 Abelův problém

Dalším matematicko-fyzikálním problémem s využitím teorie integrálních rovnic je *Abelův problém*.

8.1 Historie problému

V 17. století se hledala křivka, po níž by se pohybovaly kuličky z libovolného bodu, ale do cíle by dorazily ve stejnou dobu. Christiaan Huyghens roku 1673 řekl, že takovým grafem je speciální typ cykloidy (grafy funkcí vzniklé z pohybu kružnice) - *tautochróna* [6]. Rovnici pro tuto křivku zjistil N. H. Abel během 20. let 19. století (pozn. v některých zdrojích je uveden rok 1823 [1], v jiných 1825 [3]). [1]



Obr. 6: Tautochróna.

Hmotný bod (dále jen HB) se pohybuje po tautochróně, která leží v rovině (x, y) .

8.2 Odvození rovnice

HB má nulovou rychlost v bodě $y = t$, tj. $v(t) = 0$ pro pevné t . Musí dorazit na osu x v čase $\tau = f_1(t)$, kde f_1 je zadaná funkce na $[0, \infty)$, $f_1(0) = 0$. Rychlost pohybu HB je $v(y) = \sqrt{2g(t-y)}$, kde g je gravitační konstanta.[1]

Pokud tečna ke grafu v bodě $y = t$ svírá s osou x úhel $\alpha = \alpha(y)$, platí

$$\frac{dy}{d\tau} = -\sqrt{2g(t-y)} \sin \alpha(y).$$

Tedy platí

$$d\tau = -\frac{dy}{\sqrt{2g(t-y)} \sin \alpha(y)}.$$

Po zavedení substituce $f(y) = \frac{1}{\sin(\alpha(y))}$ plyne

$$\frac{f(y)dy}{\sqrt{t-y}} = -\sqrt{2g}d\tau.$$

Následovnou integrací přes interval $[0, t]$ se rovnice upraví do tvaru

$$\int_0^t \frac{f(y)dy}{\sqrt{t-y}} = -\sqrt{2g} \int_0^t d\tau = -\sqrt{2g}f_1(t),$$

a tedy rovnice Abelova problému je

$$\int_0^t \frac{f(y)dy}{\sqrt{t-y}} = -\sqrt{2g}f_1(t). \quad (35)$$

8.3 Řešení Abelova problému

Řešení takovéto rovnice se získá tzv. *Laplaceovou transformací*.

Nyní budeme řešit rovnici (35), která lze napsat přes konvolutorní součin ve tvaru

$$(k * f)(t) = -\sqrt{2g}f_1(t). \quad (36)$$

Abychom mohli použít Laplaceovou transformaci, musíme zjistit obraz funkce $k(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$, který je

$$K(s) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{s^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}.$$

Obraz rovnice (36) má tedy tvar $K(s)F(s) = -\sqrt{2g}F_1(s)$, neboli

$$F(s) = -\sqrt{\frac{2g}{\pi}}\sqrt{s}F_1(s).$$

Zde nastává problém, neboť podle tabulky vzorců funkce \sqrt{s} nemá svůj vzor. Proto poslední výraz musíme upravit do tvaru

$$F(s) = -\sqrt{\frac{2g}{\pi}}s\frac{F_1(s)}{\sqrt{s}}.$$

Nyní definujme funkci $H(s)$ následovně

$$H(s) = \frac{F_1(s)}{\sqrt{s}} = \frac{K(s)F_1(s)}{\sqrt{\pi}},$$

čili

$$F(s) = -\sqrt{\frac{2g}{\pi}}sH(s).$$

Nyní provedeme inverzní Laplaceovu transformaci funkce $H(s)$.

$$\begin{aligned} h(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K(s)F_1(s)}{\sqrt{\pi}}\right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(k * f_1)(t) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t k(t-y)f_1(y)dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{f_1(y)}{\sqrt{t-y}}dy \end{aligned}$$

Pro použití poslední vlastnosti transformace, musíme zjistit hodnotu výrazu $h(0)$. Tedy

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} |h(t)| = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left| \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{f_1(y)}{\sqrt{t-y}} dy \right| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-y}} dy = 0.$$

Protože víme, že $f_1(0) = 0$ a je spojitá, pak pro malá t je $|f_1(t)| \leq 1$.

Nyní teprve můžeme najít obraz funkce

$$F(s) = -\sqrt{\frac{2g}{\pi}} sH(s).$$

Její obraz je

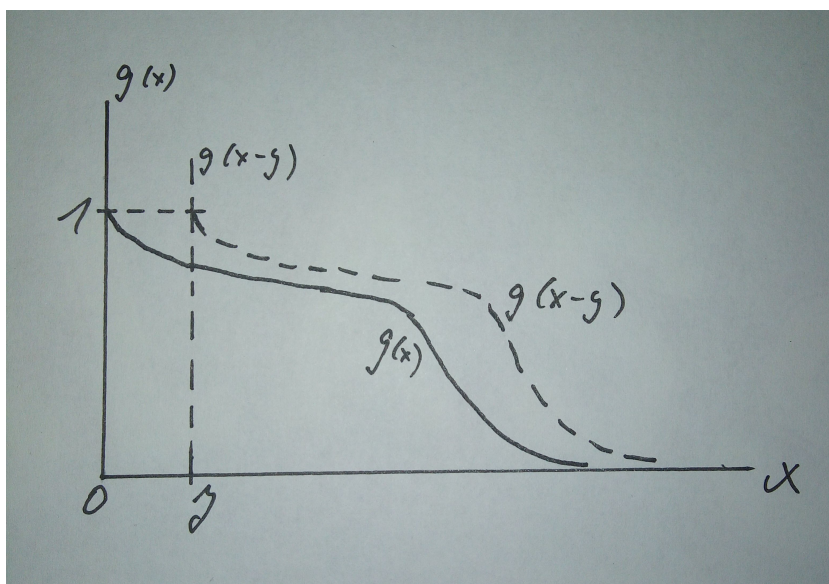
$$\begin{aligned} f(t) &= -\sqrt{\frac{2g}{\pi}} \mathcal{L}^{-1} \{sH(s) - h(0)\} = -\sqrt{\frac{2g}{\pi}} \mathcal{L}^{-1} \{sH(s)\} = -\sqrt{\frac{2g}{\pi}} \frac{dh(t)}{dt} = \\ &= -\sqrt{\frac{2g}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f_1(y)}{\sqrt{t-y}} dy = \frac{\sqrt{2g}}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f_1(y)}{\sqrt{t-y}} dy, \end{aligned}$$

což je i řešení Abelova problému.

9 Lidská populace

Nyní se práce bude zabývat prognózováním vývoje lidské populace.

Funkce $f(x)$ vyjadřuje velikost populace v čase x . Závisí na počátečním stavu populace v čase $x = 0$. Zároveň je důležité, kolik dětí se narodilo v čase $y \in (0, x)$ a dožilo se času x . [5]



Obr. 7: Funkce přežití. [5]

Vývoj populace lze charakterizovat nehomogenní rovnicí druhého druhu s konvolutorním jádrem, která má tvar

$$f(x) = f_0 g(x) + \lambda \int_0^x g(x-y) f(y) dy, \quad (37)$$

kde

- f_0 je počet obyvatel v čase $x = 0$,
- $g(x)$ udává podíl lidí dožívající se času x , přičemž $g(0) = 1$ a je to tzv. *funkce přežití*, její graf je na obr. 7,
- $\lambda g(x-y) f(y)$ značí počet dětí narozené v čase y , které se dožili do času x . Protože jejich věk je $x-y$, má jejich funkce přežití tvar $g(x-y)$. Současně výraz $\lambda f(y)$ ukazuje počet dětí, které se narodily v čase y . [5]

9.1 Konkrétní model a řešení

Uvažujme funkci $g(x) = e^{-cx}$, kde $c > 0$ a $\lambda > 0$. Po dosazení zadaných hodnot dostáváme rovnici

$$f(x) = f_0 e^{-cx} + \lambda \int_0^x e^{-c(x-y)} f(y) dy.$$

Tuto rovnici vyřešíme metodou Laplaceovy transformace. Transformovaná rovnice má tvar

$$F(s) = f_0 \frac{1}{s+c} + \lambda \mathcal{L}\{e^{-cx}\}(s) F(s),$$

neboli

$$F(s) = f_0 \frac{1}{s+c} + \lambda \frac{1}{s+c} F(s).$$

Dalšími úpravami dostáváme

$$F(s) = \frac{f_0}{s+c-\lambda},$$

přičemž $s+c-\lambda \neq 0$.

Pro zjištění tvaru funkce $f(x)$ použijeme inverzní Laplaceovu transformaci. Získáváme

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{f_0}{s+c-\lambda} \right\} = f_0 \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s-(\lambda-c)} \right\} = f_0 e^{(\lambda-c)x},$$

pro $s > \lambda - c$.

Závěr

Cílem práce bylo ukázat využití znalostí o integrálních rovnicích na řešení některých modelů.

Nejprve je vysvětlena samotná teorie integrálních rovnic.

Dále následuje matematický problém - Bernoulliho problém zabývající se tvarem křivky v obdélníku. Kromě obecného řešení jsme vypočítali další 3 příklady, které se týkají daného modelu.

Poté práce pokračuje teorií Greenovy funkce. Tato funkce se dále uplatní na dalších 2 modelech.

Prvním modelem je otázka vzpěru tyče. Stlačujeme tyč ve tvaru válce a komolého kužele v určitém směru a cílem bylo zjistit při jaké hodnotě tyč ztrácí stabilitu, resp. "zkřiví se". Pro konkrétní tvary jsme zvolili určité hodnoty a následně vypočítali kritickou hodnotu.

Greenovou funkcí se též řešila otázka zatížené struny. Rovnice je nejdříve odvozena a následně řešena, pokud struna kmitá volně nebo kmity jsou vynucené, tedy zda na strunu působí vnější síla způsobující kmity.

Poslední teorie vysvětlovala, co to je a jak v integrálních rovnicích uplatnit Laplaceovu transformaci. Než se přešlo na konkrétní modely, ukázali jsme si vzorový příklad jako ilustrace práce Laplaceovy transformace.

Předposledním modelem byl Abelův problém, který je znám už ze 17. století. V ostatních modelech jsme vždy měli Fredholmovo jádro, ale zde je jádro slabě singulární s konvolucí. Proto bylo třeba rovnici vysvětlit přes Laplaceovu transformaci.

Druhým modelem využívající Laplaceovu transformaci kvůli konvolutornímu jádru byla otázka zabývající se populací. Pro konkrétní řešení jsme museli zvolit konkrétní funkci.

Literatura

- [1] DRÁBEK, P. *Integrální rovnice: Celostát. vysokošk. příručka pro vys. šk. techn.*. Praha: Nakladatelství technické literatury, 1991. ISBN 80-03-00280-X.
- [2] RACHŮNKOVÁ, I., Hlaváčková, N. *Integrální rovnice*. Syllabus přednášek. Olomouc: Univerzita Palackého, 2009
- [3] RAHMAN, M. *Integral Equations and their Applications* . Southampton: WIT Press, 2007. ISBN 987-84564-101-6. Dostupné na <http://bahadorzadeh.mshdiau.ac.ir/IE.pdf>
- [4] MICHLIN, S. G. *Integrální rovnice a jejich použití při některých problémech mechaniky, matematické fyziky a techniky*. Praha: Přírodovědecké vydavatelství, 1952. Dostupné na <https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/402783>
- [5] JERRY, A.J. *Introduction to Integral Equations with Applications* . John Wiley & Sons, Inc., USA, 1999
- [6] PICKOVER, A. C. *Matematická kniha: od Pythagora po 57. dimenzi : 250 milníků v dějinách matematiky*. Praha: Argo, 2012, ISBN 978-80-257-0705-0
- [7] LANK, V. a VONDRA, M.. *Fyzika v kostce: pro střední školy*. 1. vyd. Praha: Fragment, 2007. 184 s. Maturita v kostce. V kostce. ISBN 978-80-253-0228-6.