



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

ZÁKLADY GEOMETRICKÉ TEORIE ŘÍZENÍ

FOUNDATIONS OF GEOMETRIC CONTROL THEORY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Michal Čulák

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. Mgr. Petr Vašík, Ph.D.

BRNO 2020

Zadání bakalářské práce

Ústav:	Ústav matematiky
Student:	Michal Čulák
Studijní program:	Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor:	Matematické inženýrství
Vedoucí práce:	doc. Mgr. Petr Vašík, Ph.D.
Akademický rok:	2019/20

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Základy geometrické teorie řízení

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Student se seznámí se základy diferenciální geometrie a geometrické teorie řízení. Tyto znalosti použije pro sestavení modelu řízení jednoduchého robotického mechanismu.

Cíle bakalářské práce:

Demonstrace základních pojmů diferenciální geometrie na příkladech.

Sestavení modelu řízení jednoduchého robotického mechanismu.

Popis motion planning algoritmu.

Seznam doporučené literatury:

JEAN, F. Control of nonholonomic systems: from sub-Riemannian geometry to motion planning. New York: Springer, 2014. ISBN 978-331-9086-897.

KOLÁŘ, I. Úvod do globální analýzy. Brno: Masarykova univerzita v Brně, 2003. ISBN 80-210-3205-7.

MURRAY, R. M., LI, Z. and SASTRY, S. A mathematical introduction to robotic manipulation. Boca Raton: CRC Press, 1994. ISBN 08-493-7981-4.

SELIG, J. M. Geometric fundamentals of robotics. 2nd ed. New York: Springer, 2005. ISBN 03-87-0874-7.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2019/20

V Brně, dne

L. S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Táto bakalárska práca sa zaoberá popisom algoritmu riadenia trident snake robota. Jeho model je vytvorený pomocou prostriedkov diferenciálnej geometrie. Ovládateľnosť robota zabezpečuje Lieova algebra, generovaná základnými vektorovými polami a ich Lieovými zátvorkami. Systém je aproximovaný pomocou nilpotentnej aproximácie. V práci je navrhnutý a popísaný algoritmus riadenia s počiatočným konštantným vstupom. Tento algoritmus je navyše odvodený pre trident snake robota. Nakoniec sú simulované a vykreslené vybrané pohyby trident snake robota v prostredí MATLAB.

Summary

This bachelor thesis deals with the description of algorithm for motion planning of trident snake robot. His model is created by means of differential geometry. The controllability of the robot is provided by Lie algebra, generated by elementary vector fields and their Lie bracket. The system is approximated by nilpotent approximation. In this thesis is proposed and described algorithm of motion planning with piecewise constant input. This algorithm is further derived for trident snake robot. Finally, selected motions of trident snake robot are simulated and portrayed in environment called MATLAB.

Kľúčové slová

teória riadenia, neholonómny systém, trident snake robot, nilpotentná aproximácia, počiatočným konštantným vstupom, motion planning, simulácia, MATLAB

Keywords

control theory, nonholonomic system, trident snake robot, nilpotent approximation, piecewise constant input, motion planning, simulation, MATLAB

Prehlasujem, že som bakalársku prácu Základy geometrické teórie řízení vypracoval samostatne pod vedením doc. Mgr. Petra Vašíka, Ph.D. s použitím materiálů uvedených v zozname zdrojov.

Michal Čulák

Rád by som na tomto mieste poďakoval vedúcemu mojej záverečnej práce doc. Mgr. Petrovi Vašíkovi, Ph.D. za odborné vedenie, trpezlivosť, cenné rady a čas, ktorý mi venoval.

Michal Čulák

Obsah

1	Úvod	12
2	Úvod do diferenciálnej geometrie	13
2.1	Varieta	13
2.2	Krivka, dotykový vektor a dotykový priestor	14
2.3	Vektorové pole a tok vektorovým polom	14
2.4	Lieova zátvorka	15
3	Trident snake robot	17
3.1	Popis trident snake robota	17
3.2	Kinematické rovnice robota	18
3.3	Riadiaci systém a riadiace vektorové polia	19
4	Nilpotentná aproximácia	20
4.1	Aproximácie prvých rádov	20
4.1.1	Neholonómne rády	20
4.2	Privilégované súradnice	21
4.3	Nilpotentná aproximácia	21
4.4	Aproximácia trident snake robota	22
5	Úvod do riadenia nilpotentných systémov	24
5.1	Ovládateľnosť	24
5.2	Philip Hall báza	25
5.3	Riadenie s počastiami konštantným vstupom	25
5.3.1	Popis piecewise constant input algoritmu	26
5.4	Aplikácia algoritmu na trident snake robota	28
5.4.1	Pohyb v smere zátvorky	30
5.4.2	Výpočet súradníc robota v čase počas pohybu Lieovou zátvorkou	33
6	Simulácie	36
6.1	Pohyby v smere zátvoriek	36
6.1.1	Pohyb v smere g_5	36
6.1.2	Pohyb v smere g_6	37
6.2	Základné pohyby	37
6.3	Porovnanie dvoch riešení rovnakého pohybu	39
7	Záver	41

1 Úvod

V dnešnom svete sú roboty neoddeliteľnou súčasťou takmer každej oblasti nášho života. Nové prístupy a technológie nám umožňujú robotizovať čoraz viac činností, ktoré boli do dnes z hľadiska ich komplexnosti predovšetkým výsadou ľudí. Žijeme v dobe, kedy sa aktívne pracuje na zavádzaní autonómneho riadenia v cestnej a leteckej doprave.

Táto práca sa zaoberá riadením neholonómnych mechanizmov. Cieľom tejto práce je predstaviť, a odvodiť riadenie s počasiach konštantným vstupom na mechanizmus, zvaný trident snake robot. Trident snake robota, predstavil Masato Ishikawa verejnosti prvý krát v roku 2004. K tomuto riadeniu využívame poznatky z diferenciálnej geometrie.

V kapitole 2 uvedieme pár základných pojmov z diferenciálnej geometrie (varieta, vektorové pole, Lieova zátvorka. . .), a interpretujeme ich význam na trident snake robotovi.

V kapitole 3 priblížime model trident snake robota, popíšeme jeho kinematické rovnice, na základe ktorých bol odvodený jeho riadiaci systém. Riadiaci systém trident snake robota pozostávajúci z jeho základných vektorových polí je naozaj neholonómny systém.

V kapitole 4 popíšeme nilpotentnú aproximáciu, ktorá bude potrebná pre riadenie s konštantným vstupom. Pomocou nilpotentnej aproximácie aproximujeme riadiaci systém trident snake robota. Aproximácia bude viesť k zavedeniu nového súradnicového systému robota. Nový aproximovaný systém nám umožní zaoberať sa týmto konkrétnym riadením podrobnejšie, nakoľko uľahčí mnohé výpočty.

V kapitole 5 uvedieme základy riadenia, vyriešime otázku ovládateľnosti neholonómnych systémov a odprezentujeme algoritmus pre riadenie s piecewise constant inputom. Ukážeme, že algoritmus je atraktívny pri riadení nilpotentných systémov. Následne odvodíme tento algoritmus pre trident snake robota.

V poslednej kapitole simulujeme viaceré základné a dôležité pohyby trident snake robota pomocou piecewise constant inputu a ilustrujeme výsledky algoritmu na grafoch vypracovaných v prostredí MATLAB. Takisto vyriešime pohyby v smere zátvoriek základných vektorových polí. Na záver kapitoly otvoríme problematiku optimálneho riadenia systémov viacerými výsledkami toho istého pohybu, a následne ich porovnaním.

2 Úvod do diferenciálnej geometrie

V tejto kapitole zavedieme základné pojmy z diferenciálnej geometrie, ktoré nám neskôr poslúžia k zostaveniu modelu riadenia trident snake robota. Najskôr definujeme pojem varieta, ktorý bude slúžiť pre náš mechanický systém ako stavový priestor. Následne na ňom zavedieme dotykový priestor, vektorové pole a operáciu Lieova zátvorka. Čerpali sme hlavne zo zdrojov [5], [11].

2.1 Varieta

Medzi základné pojmy použité v nasledujúcich definíciách patrí určite zobrazenie. Preto si pripomeňme definície jeho rôznych typov. Homeomorfizmus je spojité bijektívne zobrazenie, ktorého inverzné zobrazenie je takisto spojité. Difeomorfizmus je zobrazenie, ktoré je spojitاً diferencovateľné a existuje k nemu inverzné zobrazenie, ktoré je takisto spojitاً diferencovateľné. Pokiaľ medzi množinami $U, V \subset \mathbb{R}^n$ existuje homeomorfizmus (príp. difeomorfizmus), hovoríme, že množiny sú homeomorfné (príp. difeomorfné).

Majme funkciu $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, kde $U \subset \mathbb{R}^n$. Funkciu f nazveme funkciou triedy C^r , ak má spojité parciálne derivácie až do rádu r vrátane vo všetkých bodoch U .

Definícia 2.1 Nech $U, V \subset \mathbb{R}^n$ sú otvorené množiny. Bijektívne zobrazenie $f : U \rightarrow V$ nazývame difeomorfizmus triedy C^r , ak f aj inverzné zobrazenie $f^{-1} : V \rightarrow U$ sú triedy $C^r, r \geq 1$.

Ak je zobrazenie triedy C^∞ , hovoríme o hladkom zobrazení.

Definícia 2.2 Topologickou n – rozmernou varietou rozumieme separovaný topologický priestor M so spočítateľnou bázou, ktorá je lokálne homeomorfná s \mathbb{R}^n , tzn. pre každé $x \in M$ existuje jeho okolie U , otvorená množina $V \subset \mathbb{R}^n$ a homeomorfizmus $\varphi : U \rightarrow V$. Dimenziu variety značíme \dim a predpisujeme ako $\dim M = n$.

Pripomeňme, že topologický priestor sa nazýva separovaný, keď každé jeho dva rôzne body majú disjunktné okolie. Každý homeomorfizmus $\varphi : U \rightarrow V$, kde $U \subset M$ a $V \subset \mathbb{R}^n$ sú otvorené množiny, nazývame lokálna mapa na M . Súradnice bodu $\varphi(a)$, $a \in U$, nazývame súradnicami bodu a v mape φ .

Inými slovami, v n -rozmernej variete dokážeme popísať okolie každého bodu n nezávislými súradnicami.

Uvažujme na M dve lokálne mapy φ_1, φ_2 , množiny $V_1, V_2 \subset \mathbb{R}^n$. Množina $V_{12} = V_{21} = V_1 \cap V_2$ značí prienik množín V_1, V_2 . Indukované zobrazenie $\varphi_{12} = \varphi_2 \circ (\varphi_1^{-1}|_{V_{12}}) : V_{12} \rightarrow V_{21}$ nazveme prechodové zobrazenie dvojici lokálnych máp (φ_1, φ_2) .

Dve lokálne mapy $\varphi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ a $\varphi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ na topologickej variete M nazývame hladké, ak prechodové zobrazenie $\varphi_{12} : V_{12} \rightarrow V_{21}$ je hladký difeomorfizmus. Hladkým atlasom \mathcal{A} na topologickej variete M rozumieme sústavu hladkých máp $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$, $\alpha \in I$, takých, že ich definičné obory U_α pokrývajú M . Mapu $\varphi_0 : U_0 \rightarrow V_0$ nazývame zlučiteľnú s hladkým atlasom \mathcal{A} , ak každé prechodové zobrazenie $\varphi_{0\alpha} : V_{0\alpha} \rightarrow V_{\alpha 0}$ je hladkým difeomorfizmom. Hladký atlas na topologickej variete M nazveme úplný, keď obsahuje všetky mapy s ním zlučiteľné.

2.2. KRIVKA, DOTYKOVÝ VEKTOR A DOTYKOVÝ PRIESTOR

Definícia 2.3 Hladkou diferencovateľnou varietou rozumieme topologickú varietu M spolu s úplným hladkým atlasom \mathcal{A} .

Lokálnou mapou na hladkej variete M rozumieme každú mapu $\varphi : U \rightarrow V$ daného úplného atlasu.

Ďalej nás bude zaujímať iba hladká varietu, preto v neskoršom texte budeme pojem hladká vypúšťať.

Poznámka. V prípade trident snake robota varietu $M = \mathbb{R}^2 \times S^4$ predstavuje stavový priestor, v ktorom sa dá okolie ľubovoľného bodu jednoznačne popísať šiestimi súradnicami $q := (x, y, \theta, \phi_1, \phi_2, \phi_3)$. Platí teda $\dim M = 6$.

2.2 Krivka, dotykový vektor a dotykový priestor

Definícia 2.4 Dráhou na variete M nazývame hladké zobrazenie $f : I \rightarrow M$, kde $I \subset \mathbb{R}$ je otvorený interval.

Ak je $f(I) \subset M$ dráha a f jej parametrické vyjadrenie, hovoríme tiež o parametrizovanej krivke na M .

Poznámka. V našom prípade dráha značí vývoj polohy a tvaru trident snake robota v čase.

Veta 2.5 Dve dráhy $f, g : I \rightarrow M$ splňujúce $f(0) = g(0) = a$ sa dotýkajú v nule, ak pre nejakú súradnú sústavu (x^i) v nejakom okolí U bodu a platí $\frac{df^i(0)}{dt} = \frac{dg^i(0)}{dt}$, kde $f^i(t)$ resp. $g^i(t)$ je súradné vyjadrenie dráhy f resp. g .

Definícia 2.6 Triedu ekvivalencie A dráh $f(t)$ na M , ktoré splňujú $f(0) = a$ a dotýkajú sa v nule, nazývame dotykový vektor variety M v bode a . Píšeme $A = \frac{df(0)}{dt}$ a množinu všetkých týchto vektorov nazývame dotykový priestor T_aM variety M v bode a .

Definícia 2.7 Zjednotenie $TM = \bigcup_{a \in M} T_aM$ nazývame dotykový bandl variety M . Zobrazenie $p : TM \rightarrow M$ značí projekciu, ktorú vektoru $A \in T_aM$ priraduje jeho bod dotyku a .

2.3 Vektorové pole a tok vektorovým polom

Definícia 2.8 Vektorovým polom na variete M rozumieme hladké zobrazenie $X : M \rightarrow TM$ také, že $p \circ X = id_M$.

V lokálnej mape (x^i) , $i = 1, \dots, n = \dim M$ je X určené hladkými funkciami $X^i(x)$. Zapisujeme v tvare

$$X = \sum_{i=1}^n X^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (2.1)$$

Operátori parciálnych derivácií

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right)$$

tvoria súradnicovú bázu dotykového priestoru $T_x M$.

Poznámka. Nech $T_q \mathbb{R}^n$ značí dotykový priestor \mathbb{R}^n v bode $q \in \mathbb{R}^n$. Potom vektorové pole na \mathbb{R}^n je hladké zobrazenie, ktoré priraduje každému bodu $q \in \mathbb{R}^n$ dotykový vektor $X(q) \in T_q \mathbb{R}^n$. V lokálnych súradniciach, predpisujeme X ako stĺpcový vektor, ktorého zložky závisia na q ,

$$X(q) = \begin{pmatrix} X^1(q) \\ \vdots \\ X^n(q) \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Vektorové pole je hladké, ak každá $X^i(q)$ je hladká.

Poznámka. Vektorové pole je zobrazenie, ktoré značí pre trident snake robota konkrétny smer pohybu pre každú jeho konfiguráciu.

Poznámka. Vektorové polia trident snake robota budeme značiť g_1, g_2, \dots

Pre hladkú funkciu $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ definujeme jej deriváciu $Xf : M \rightarrow \mathbb{R}$ v smere vektorového pola X predpisom $(Xf)(a) = X(a)f$. Xf má v lokálnych súradniciach tvar

$$\sum_{i=1}^n X^i(x) \frac{\partial f}{\partial x^i}. \quad (2.3)$$

Definícia 2.9 Dráhu $f : I \rightarrow M$ nazývame integrálnou krivkou vektorového pola X , ak platí $\frac{df(t)}{dt} = X(f(t))$ pre všetky $t \in I$.

Nech $\mathcal{D}X \subset \mathbb{R} \times M := \bigcup_{a \in M} I_a \times \{a\}$ je otvorené množina, kde I_a je interval, na ktorom je definovaná maximálna integrálna krivka $f_a : I_a \rightarrow M$ taká, že $f_a(0) = a$ a tento interval už nejde rozšíriť.

Definícia 2.10 Zobrazenie $e^X : \mathcal{D}X \rightarrow M$ nazývame tok vektorového pola X . Pole nazývame úplné, ak $\mathcal{D}X = \mathbb{R} \times M$.

Ak e^X je tok úplného vektorového pola, potom dostaneme pre každé $t \in \mathbb{R}$ zobrazenie $e_t^X : M \rightarrow M$, $e_t^X(a) = e^X(t, a)$, $a \in M$.

Veta 2.11 Ak vektorové pole X je úplné, tak platí $e^{(t+s)X} = e^{tX} \circ e^{sX}$ pre všetky $t, s \in \mathbb{R}$.

Poznámka. Pre nášho robota tok vektorovým polom predstavuje zmenu polohy a tvaru za čas t .

2.4 Lieova zátvorka

Lieovou algebrou nazveme vektorový priestor V , ak na ňom existuje bilineárna operácia $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V$, ktorá spĺňa dve podmienky, a to antisymetriu a Jacobiho identitu. Bilineárnu operáciu nazveme Lieova zátvorka. Špeciálnym prípadom Lieovej algebry je algebra vektorových polí na variete M .

2.4. LIEOVA ZÁTVORKA

Veta 2.12 Pre každú dvojicu vektorových polí X, Y na M existuje práve jedno vektorové pole $[X, Y]$ na M také, že pre každú funkciu f na M platí

$$[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf).$$

Vektorové pole $[X, Y]$ sa nazýva Lieova zátvorka polí X, Y .

V súradnom vyjadrení

$$[X, Y] = \sum_{i,j=1}^n \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j}. \quad (2.4)$$

Nech existujú vektorové polia X, Y, Z na \mathbb{R}^n , tak Lieova zátvorka spĺňa nasledujúce vlastnosti:

1. Antisymetria

$$[X, Y] = -[Y, X]$$

2. Jacobiho identita

$$[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0.$$

Poznámka. Lieovu zátvorku polí trident snake robota budeme v texte značiť aj ako $g_{12} = [g_1, g_2]$.

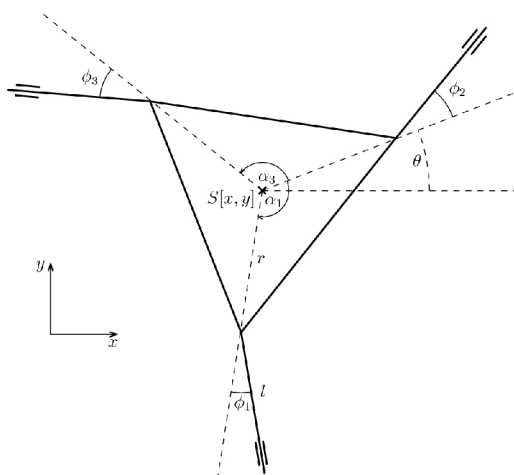
3 Trident snake robot

Táto práca sa zaoberá rovinným pohybom trident snake robota, ktorý bol predstavený v [3]. V tejto kapitole najskôr popíšeme bližšie tvar robota, a následne pomocou kinematických rovníc jeho riadiaci systém, odvodený v [12]. Z riadiaceho systému získame jeho základné vektorové polia. V tejto kapitole sme použili pri popise robota zdroj [3] a postup tvorenia jeho riadiaceho systému sme čerpali z [2] a [12].

3.1 Popis trident snake robota

Trident snake robot sa skladá z tela v tvare rovnostranného trojuholníka. Ku každému vrcholu trojuholníka je pripevnená vetva série článkov, spojených kĺbmi. Uprostred každého článku sa nachádza pár pasívnych kolečiek. Každá vetva tak tvorí obyčajného robotického hada.

My sa budeme zaoberať konkrétnym zjednodušeným typom robota, kde každá vetva pozostáva iba z jednej nožičky a pár pasívnych kolečok je umiestnený na ich konci. Dĺžku nožičky označíme l , a vzdialenosť medzi stredom trojuholníka a jeho vrcholom r . Uhol $\alpha_i, i = 1, 2, 3$ bude označovať uhol medzi i -tým vrcholom trojuholníka od prvého ramena. Model robota je popísaný na Obr. 3.1.



Obr. 3.1: Model trident snake robota [1]

Predpokladáme, že kolečka sa neprešmykujú a nesklzavajú do strán. To zabezpečuje pohyb robota, ktorý je realizovaný natáčaním servomotorčekov umiestnených vo vrcholech trojuholníka.

Umiestnenie robota v rovinnom priestore nám zabezpečí konfiguračný vektor $w := (x \ y \ \theta)^T \in \mathbb{R}^2 \times S$, kde x, y vyjadruje polohu stredu trojuholníka a θ uhol medzi osou x a prvým ramenom. Tvar robota môžeme popísať vektorom $\phi := (\phi_1 \ \phi_2 \ \phi_3)^T \in S^3$ nazývaný aj vektor tvaru, kde ϕ_i predstavuje uhol natočenia i -tej nožičky, pre $i = 1, 2, 3$. Celkovo tak možno pozíciu robota zapísať jednoznačne vektorom o šiestich zložkách $q := (x \ y \ \theta \ \phi_1 \ \phi_2 \ \phi_3)^T$, ktoré nahradíme v neskoršom texte zápisom $q := (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6)^T$.

3.2 Kinematické rovnice robota

V prvom rade vyjadríme polohu (x_i, y_i) i -teho koliečka, pre $i = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} x_i &= x + r \cos(\theta + \alpha_i) + l \cos(\theta + \alpha_i + \phi_i), \\ y_i &= y + r \sin(\theta + \alpha_i) + l \sin(\theta + \alpha_i + \phi_i). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Deriváciou rovníc (3.1) získame zmenu polohy i -teho koliečka v čase:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \dot{x} - r\dot{\theta} \sin(\theta + \alpha_i) - l(\dot{\theta} + \dot{\phi}_i) \sin(\theta + \alpha_i + \phi_i), \\ \dot{y}_i &= \dot{y} + r\dot{\theta} \cos(\theta + \alpha_i) + l(\dot{\theta} + \dot{\phi}_i) \cos(\theta + \alpha_i + \phi_i). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Obmedzujúcu podmienku pohybu robota, ktorú nám určujú pasívne koliečka, zapíšeme týmto výrazom:

$$\vec{n}_i \cdot (\dot{x}_i, \dot{y}_i)^T = 0. \quad (3.3)$$

Táto podmienka hovorí, že normálova zložka rýchlosti koliečiek je nulová, tzn koliečka neuhýbajú do strán.

Normálový vektor \vec{n}_i rozpíšeme ako

$$\vec{n}_i = (-\sin(\theta + \alpha_i + \phi_i), \cos(\theta + \alpha_i + \phi_i)). \quad (3.4)$$

Po dosadení rovníc (3.2) a (3.4) do rovníc (3.3) dostaneme:

$$\dot{x}_i \sin(\theta + \alpha_i + \phi_i) - l\dot{\phi}_i - \dot{y}_i \cos(\theta + \alpha_i + \phi_i) - \dot{\theta}(l + r \cos \phi_i) = 0. \quad (3.5)$$

Následne vyjadríme závislosť na polohových súradniciach, a zároveň vylúčime z rovnici uhol θ , pre jednoduchšiu prácu s rovnicami. Takže sústavu prepíšeme do tvaru

$$B\dot{\phi} = A(\phi)R_\theta^T\dot{\omega}, \quad [12], \quad (3.6)$$

kde

$$\omega = (x, y, \theta)^T, \quad \phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)^T, \quad B = \begin{pmatrix} l & 0 & 0 \\ 0 & l & 0 \\ 0 & 0 & l \end{pmatrix},$$

$$R_\theta^T = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A(\phi) = \begin{pmatrix} \sin(\alpha_1 + \phi_1) & -\cos(\alpha_1 + \phi_1) & -(l + r \cos \phi_1) \\ \sin(\alpha_2 + \phi_2) & -\cos(\alpha_2 + \phi_2) & -(l + r \cos \phi_2) \\ \sin(\alpha_3 + \phi_3) & -\cos(\alpha_3 + \phi_3) & -(l + r \cos \phi_3) \end{pmatrix}.$$

Následne parametrizujeme sústavu kinematických rovníc pomocou závislosti súradníc $\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}$ na premenných $\dot{\phi}_i$, pre $i = 1, 2, 3$.

$$\omega = R_\theta(A(\phi))^{-1}\dot{\phi}, \quad [12]. \quad (3.7)$$

3.3 Riadiaci systém a riadiace vektorové polia

Riadiaci systém odvodený z (3.7) je v tvare

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{\phi}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

kde $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) = \dot{\phi}$. Prvky a_{ij} predstavujú prvky matici $A(\phi)$.

Riadiace vektorové polia môžeme vycítať z kontrolného systému ako i -te stĺpce riadiacej maticí.

Poznámka. Pre nášho robota zvolíme nasledujúce hodnoty: dĺžka nožičky $l = 1$, vzdialenosť vrcholu trojuholníka od jeho stredu $r = 1$, a uhly $\alpha_1 = -\frac{2\pi}{3}$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = \frac{2\pi}{3}$.

Teda základné riadiace vektorové polia nášho trident snake robota sú:

$$g_1 = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} \\ 0 \\ 0 \\ \sin(x_4 - \frac{2\pi}{3})\partial_{x_4} \\ \sin(x_5)\partial_{x_5} \\ \sin(x_6 + \frac{2\pi}{3})\partial_{x_6} \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_{x_2} \\ 0 \\ -\cos(x_4 - \frac{2\pi}{3})\partial_{x_4} \\ -\cos(x_5)\partial_{x_5} \\ -\cos(x_6 + \frac{2\pi}{3})\partial_{x_6} \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

$$g_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial_{x_3} \\ -(1 + \cos(x_4))\partial_{x_4} \\ -(1 + \cos(x_5))\partial_{x_5} \\ -(1 + \cos(x_6))\partial_{x_6} \end{pmatrix}.$$

Poznámka. Vektorové polia (3.9) sme zapísali v tvare (2.2).

4 Nilpotentná aproximácia

V tejto kapitole predstavíme tvorbu privilégovaných súradníc riadiaceho systému, a neskôr nilpotentnú aproximáciu. Nilpotentná aproximácia je veľmi dôležitá pri riadení systémov z dôvodu uľahčenia výpočtov v používaných algoritmoch. Rovnako aj my ju použijeme na aproximovanie vektorových polí nášho systému. Základné definície sme čerpali zo zdroju [4]. Aproximované vektorové polia trident snake robota a jeho privilégované súradnice sme získali z [2].

4.1 Aproximácie prvých rádov

4.1.1 Neholonómne rády

Definujme d ako funkciu vzdialenosti na variete M s nasledujúcimi vlastnosťami:

- (1) d je funkcia z $M \times M \rightarrow [0, \infty)$,
- (2) $d(p, q) = d(q, p)$,
- (3) $d(p, q) = 0$ vtedy a len vtedy, ak $p = q$,
- (4) $d(p, q) + d(q, q) \leq d(p, q)$.

Definícia 5.1 Nech $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkcia. Neholonómny rád f v bode $p \in M$, značený ako $ord_p(f)$, je reálne číslo definované ako

$$ord_p(f) = \sup\{s \in \mathbb{R} : f(q) = O(d(p, q)^s)\}. \quad (4.1)$$

Tento rád je vždy nezáporný. Navyše $ord_p(f) = 0$ ak $f(p) \neq 0$, a $ord_p(f) = +\infty$ ak $f(p) \equiv 0$.

Nech $C^\infty(p)$ je hladká funkcia v p . Pre túto funkciu nazveme neholonómne deriváty rádu 1 Lieove deriváty $X_1 f, \dots, X_m f$. Ďalej nazveme $X_i(X_j f), X_i(X_j(X_k f)), \dots$ neholonómne deriváty rádu 2, 3, ... Neholonómny derivát rádu 0 funkcie f v p je $f(p)$.

Veta 5.2 Nech $f \in C^\infty(p)$. Potom $ord_p(f)$ sa rovná najväčšiemu prirodzenému číslu k takému, že všetky neholonómne deriváty f rádu menšieho ako k v p sa vytratia. Okrem toho

$$f(q) = O(d(p, q)^{ord_p(f)}). \quad (4.2)$$

Vďaka tomu môžeme definovať neholonomný rád hladkej funkcie ako

$$ord_p(f) = \min\{s \in \mathbb{N} : \exists i_1, \dots, i_s \in \{1, \dots, m\} \text{ takže } (X_{i_1} \dots X_{i_s} f)(p) \neq 0\}, \quad (4.3)$$

kde prijmeme konvenciu, že $\min \emptyset = +\infty$.

Definícia 5.3 Nech X je hladké vektorové pole v p . Neholonómny rád X v p , označený ako $ord_p(X)$, je reálne číslo definované ako:

$$ord_p(X) = \sup\{\sigma \in \mathbb{R} : ord_p(Xf) \geq \sigma + ord_p(f), \forall f \in C^\infty(p)\}. \quad (4.4)$$

Všimnime si, že $ord_p(X) \in \mathbb{Z}$, keďže rád hladkej funkcie je prirodzené číslo. Nulové vektorové pole $X \equiv 0$ má nekonečný rád, $ord_p(0) = +\infty$.

Definícia 5.4 Rodina m vektorových polí $(\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_m)$ definovaných blízko p sa nazýva aproximácia prvého rádu (X_1, \dots, X_m) v p ak vektorové polia $X_i - \hat{X}_i, i = 1, \dots, m$, sú rádu ≥ 0 v p .

4.2 Privilegované súradnice

Definícia 5.5 Povieme, že vektorové polia X_1, \dots, X_m spĺňajú Chowského podmienku, ak

$$\text{Lie}(X_1, \dots, X_m)(q) = T_q M, \quad \forall q \in M,$$

kde $\text{Lie}(X_1, \dots, X_m)$ značí Lieovu algebru generovanú vzhľadom k zátvorke X_1, \dots, X_m .

Keďže berieme v úvahu, že X_1, \dots, X_m spĺňajú Chowského podmienku [4], hodnoty týchto množín v p vytvárajú podpriestory $T_p M$,

$$\Delta^1(p) \subset \Delta^2(p) \subset \dots \Delta^{r-1}(p) \subsetneq \Delta^r(p) = T_p M, \quad (4.5)$$

kde $r = r(p)$ sa volá stupeň neholonómie v p .

Zvoľme $n_i(p) = \dim \Delta^i(p)$. Potom r -ticia prirodzených čísiel $(n_1(p), \dots, n_r(p))$ sa nazýva vektor rastu v p . Prvé prirodzené číslo vo vektore rastu je hodnosť $n_1(p) \leq m$ rodiny $(X_1(p), \dots, X_m(p))$ a posledné $n_r(p) = n$ je dimenzia variety M . Pre jednoduchší zápis budeme písať Δ^s namiesto mapy $q \rightarrow \Delta^s(q)$. Táto mapa Δ^s je distribúciou vtedy a len vtedy ak $n_s(q)$ je konštantná na M .

Definícia 5.6 Bod p je regulárny bod, ak rastový vektor je konštantný v okolí p . V opačnom prípade, p je singulárny bod.

Definujeme váhy v p , $w_i = w_i(p), i = 1, \dots, n$, zvolením $w_j = s$ ak $n_{s-1}(p) < j \leq n_s(p)$, kde $n_0 = 0$. Inými slovami,

$$w_1 = \dots = w_{n_1} = 1, w_{n_1+1} = \dots = w_{n_2} = 2, \dots, w_{n_{r-1}+1} = \dots = w_{n_r} = r. \quad (4.6)$$

Váhy v p vytvárajú rastúcu postupnosť $w_1(p) \leq \dots \leq w_n(p)$, ktorá je konštantná blízko p vtedy a len vtedy, ak p je regulárny bod.

Definícia 5.7 Systém privilegovaných súradníc v p je systém lokálnych súradníc (z_1, \dots, z_n) tak, že $\text{ord}_p(z_j) = w_j$ pre $j = 1, \dots, n$.

4.3 Nilpotentná aproximácia

Majme systém privilegovaných súradníc (z_1, \dots, z_n) v p . Každé vektorové pole X_i je rádu ≥ -1 , keďže má v z súradniciach Taylorov rozvoj

$$X_i(z) \sim \sum_{\alpha, j} a_{\alpha, j} z^\alpha \partial_{z_j}, \quad (4.7)$$

kde $w(\alpha) \geq w_j - 1$ ak $a_{\alpha, j} \neq 0$. Združením jednočlenných vektorových polí s rovnakým stupňom váhy vyjadríme X_i ako sériu

$$X_i = X_i^{(-1)} + X_i^{(0)} + X_i^{(1)} + \dots, \quad (4.8)$$

kde $X_i^{(s)}$ je homogénne vektorové pole stupňa s .

4.4. APROXIMÁCIA TRIDENT SNAKE ROBOTA

Veta 5.8 Označme $\hat{X}_i = X_i^{(-1)}$, $i = 1, \dots, m$. Rodina vektorových polí $(\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_m)$ je aproximácia prvého rádu (X_1, \dots, X_m) v p a generuje nilpotentnú Lieovu algebru kroku $r = w_n$.

Definícia 5.9 Rodina $(\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_m)$ sa nazýva (homegénna) nilpotentná aproximácia (X_1, \dots, X_m) v p združená so súradnicami z .

4.4 Aproximácia trident snake robota

V našom prípade konfiguračný priestor trident snake robota je 6-dimenzionálna varieta M so súradnými funkciami

$$(x, y, \theta, \phi_1, \phi_2, \phi_3) =: (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6).$$

Báza vektorového priestoru $T_p M$ je tvorená

$$(\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3}, \partial_{x_4}, \partial_{x_5}, \partial_{x_6}),$$

a distribúcia na TM je určená vektorovými polami g_1, g_2, g_3 . Pridaním vektorových zátvoriek g_4, g_5, g_6 získame filtráciu $(3, 6)$ na TM . Filtrácia zároveň reprezentuje vektor rastu podľa (4.5). Z vektora rastu vypočítame váhy zo zápisu (4.6). Vieme, že musíme hľadať nové súradnice tak, aby ich rády sa rovnali hodnotám váh, vid' Def 5.7. Pre určenie týchto koeficientov sme použili Bellaïchov algoritmus [4].

Privilégované súradnice y v bode 0 získame nasledujúcou transformáciou. Pre bližšie informácie vid' [2].

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & -2 & 1 & -1 & \sqrt{3} \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & -2 & 1 & -1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

V tejto novej súradnicovej forme obdržíme aproximované vektorové polia za pomoci Taylorového rozvoja v (4.7), a Vety 5.8:

$$\begin{aligned} \hat{g}_1 &= \partial_{y_1} - \frac{y_2}{2} \partial_{y_4} + \left(-\frac{y_2}{2} - y_3\right) \partial_{y_5} - \frac{y_1}{2} \partial_{y_6}, \\ \hat{g}_2 &= \partial_{y_2} + \frac{y_1}{2} \partial_{y_4} - \frac{y_1}{2} \partial_{y_5} + \left(\frac{y_2}{2} - y_3\right) \partial_{y_6}, \\ \hat{g}_3 &= \partial_{y_3}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Ich Lieove zátvorky sú

$$\begin{aligned} \hat{g}_4 &= [\hat{g}_1, \hat{g}_2] = \partial_{y_4}, \\ \hat{g}_5 &= [\hat{g}_2, \hat{g}_3] = \partial_{y_5}, \\ \hat{g}_6 &= [\hat{g}_1, \hat{g}_3] = \partial_{y_6}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Rodina $\hat{g}_1, \hat{g}_2, \hat{g}_3$ je nilpotentná aproximácia (g_1, g_2, g_3) v 0. Overenie nájdeme v [2].

Pre motion planning vyjadríme nilpotentnú aproximáciu v pôvodnom súradnicovom systéme ako:

$$\begin{aligned}
\hat{g}_1 &= \partial_{x_1} - (x_2 + x_3)\partial_{x_4} - \left(\frac{\sqrt{3}x_1}{4} + \frac{x_2}{4} - \frac{x_3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\partial_{x_5} + \left(\frac{\sqrt{3}x_1}{2} - \frac{x_2}{4} + \frac{x_3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\partial_{x_6}, \\
\hat{g}_2 &= \partial_{x_2} - \partial_{x_4} + \left(\frac{3x_1}{4} + \frac{\sqrt{3}x_2}{4} - \frac{\sqrt{3}x_3}{2} + \frac{1}{2}\right)\partial_{x_5} + \left(\frac{3x_1}{4} - \frac{\sqrt{3}x_2}{4} + \frac{\sqrt{3}x_3}{2} + \frac{1}{2}\right)\partial_{x_6}, \\
\hat{g}_3 &= \partial_{x_3} - 2\partial_{x_4} - 2\partial_{x_5} - 2\partial_{x_6}, \\
\hat{g}_4 &= \partial_{x_4} + \partial_{x_5} + \partial_{x_6}, \\
\hat{g}_5 &= \frac{\sqrt{3}}{2}\partial_{x_5} - \frac{\sqrt{3}}{2}\partial_{x_6}, \\
\hat{g}_6 &= \partial_{x_4} - \frac{1}{2}\partial_{x_5} - \frac{1}{2}\partial_{x_6},
\end{aligned} \tag{4.12}$$

vid' [2].

5 Úvod do riadenia nilpotentných systémov

Budeme sa zaoberať riadením neholonomného systému. Neholonomný systém je taký systém, ktorého dimenzia distribúcie (význam distribúcie bude definovaný nižšie) je menšia ako dimenzia variety. Takéto systémy nie sú ovládateľné, avšak doplnením ďalších lineárne nezávislých vektorových polí, dokážeme tieto systémy ovládať. Preto v tejto kapitole rozoberieme podrobnejšie, kedy je riadiaci systém ovládateľný. Ďalej definujeme Philip Hall bázu, ktorú využijeme pri riadení robota. Hlavná časť kapitoly sa zaoberá popisom algoritmu riadenia s počasiach konštantným vstupom, ktorý použijeme pri riešení plánovania pohybu trident snake robota. Nakoniec ilustrujeme tento algoritmus na konkrétne zvolenom pohybovom probléme. Keďže sa budeme v celom ďalšom texte zaoberať s aproximovanými vektorovými polami, budeme ich miesto \hat{g}_i pre zjednodušenie zápisu značiť g_i . Základným zdrojom kapitoly je [11]. Pri popise algoritmu sme čerpali navyše aj z [6, 8, 9, 10].

Uvažujme riadiaci neholonomný systém v tvare

$$\sum : \dot{q} = g_1(q)u_1 + \dots + g_m(q)u_m, \quad q \in \mathbb{R}^n, \quad u \in U \subset \mathbb{R}^m. \quad (5.1)$$

Riadiace polia g_i , $i = 1, \dots, m$ sú základné polia mechanizmu. Systém (5.1) je vlastne v tvare (3.7).

Tento systém sa nazýva bezunášavý, čo v preklade znamená, že ak je kontrolný vektor u nulový, konfigurácia mechanizmu sa nemení.

5.1 Ovládateľnosť

Systém (5.1) je ovládateľný, ak pre každé $q_0, q_f \in \mathbb{R}^n$ existuje $T > 0$ a $u : [0, T] \rightarrow U$ také, že systém (5.1) splňa $q(0) = q_0$ a $q(T) = q_f$.

Takže $q(t)$ je uskutočniteľná trajektória mechanizmu vtedy a len vtedy ak $q(t)$ vyhovuje rovnici

$$\dot{q} = g_1(q)u_1 + \dots + g_m(q)u_m, \text{ pre nejaký zvolený riadiaci vektor } u(t) \in \mathbb{R}^m. \quad (5.2)$$

Nech $\Delta = \text{span}\{g_1, \dots, g_m\}$ je distribúcia spojená s kontrolnou sústavou. Definujeme $\Delta_1 = \Delta$ a

$$\Delta_i = \Delta_{i-1} + [\Delta_1, \Delta_{i-1}],$$

kde

$$[\Delta_1, \Delta_{i-1}] = \text{span}\{[g, h] : g \in \Delta_1, h \in \Delta_{i-1}\}.$$

Je zrejmé, že $\Delta_i \subset \Delta_{i+1}$.

Reťaz distribúcií Δ_i definujeme ako filtráciu spojenú s distribúciou $\Delta = \Delta_1$.

Involútívne uzatvorenie distribúcie označíme $\bar{\Delta}$. Vyjadruje najmenšiu distribúciu obsahujúcu Δ takú, že ak $f, g \in \bar{\Delta}$ potom $[f, g] \in \bar{\Delta}$. $\bar{\Delta}$ nazveme aj ako kontrolnú Lieovu algebru.

Veta 3.1 Kontrolný systém je lokálne ovládateľný v $q \in \mathbb{R}^n$ ak $\bar{\Delta}_q = T_q\mathbb{R}^n$.

Systém sa nazýva lokálne ovládateľný v malom čase v q_0 , ak dokážeme dosiahnuť blízke body v arbitrárne v malých časových intervaloch a ostať blízko q_0 v ľubovoľne dlhom čase.

Poznámka. V prípade trident snake robota je filtrácia (3, 6) a v nilpotentnej aproximácii zátvorky rádov vyšších ako 2 sú nulové. Podmienka $\bar{\Delta}_q = T_q\mathbb{R}^6$ platí v bode $q := (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ [12].

5.2 Philip Hall báza

Zavedenie Philip Hall bázy na Lieovej algebre nám zabezpečí, že vyberie spomedzi Lieových zátvoriek len tie, ktoré sú na seba lineárne nezávislé.

Majme vektorové polia $\{g_1, \dots, g_m\}$. Definujeme dĺžku Lieového produktu ako:

$$\begin{aligned} l(g_i) &= 1 \quad i = 1, \dots, m \\ l([A, B]) &= l(A) + l(B), \end{aligned} \tag{5.3}$$

kde A a B sú Lieove produkty.

Poznámka. Lieov produkt môže byť ako obyčajné vektorové pole, tak vektorové pole zložené už z iných vektorových polí pomocou Lieovej zátvorky.

Philip Hall báza je usporiadaná množina Lieových produktov $H = \{B_i\}$ splňujúca:

$$\begin{aligned} 1. & g_i \in H, i = 1, \dots, m \\ 2. & \text{Ak } l(B_i) < l(B_j) \text{ tak } B_i < B_j \\ 3. & [B_i, B_j] \in H \text{ vtedy a len vtedy ak} \\ & (a) B_i, B_j \in H \text{ a } B_i < B_j \\ & (b) \text{ buď } B_j = g_k \text{ pre nejaké } k \\ & \text{alebo} \\ & B_j = [B_l, B_r] \text{ s } B_l, B_r \in H \text{ a } B_l < B_r. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Poznámka. Pripomeňme, že v nilpotentnej aproximácii je Philip Hall báza konečná.

5.3 Riadenie s počastiach konštantným vstupom

Jeden z možných algoritmov pri riešení plánovania pohybu sa nazýva piecewise constant input algorithm, v preklade riadenie s počastiach konštantným vstupom. Tento algoritmus pracuje efektívne pre systémy, ktorých ovládateľná Lieova algebra je nilpotentná. To je dôvod, prečo pracujeme nie priamo v pôvodnom systéme, ale jeho nilpotentnej aproximácii.

Poznámka. Ak je Lieova algebra nilpotentná rádu k , potom pre systém v tvare (2.1) sú Lieove zátvorky kontrolných vektorových polí väčšieho rádu ako k rovné 0, inak zapísané, $[g_{i_1}, \dots, [g_{i_{p-1}}, g_{i_p}] \dots] = 0$ ak $p > k$.

5.3. RIADENIE S POČASTIACH KONŠTANTNÝM VSTUPOM

Cieľom tohto algoritmu je pre každý pár bodov q_0, q_f nájsť riadiaci vektor $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))$, ktorý nás dopraví z bodu q_0 do bodu q_f , pričom q_0 značí bod počiatkový, a q_f bod koncový.

5.3.1 Popis piecewise constant input algoritmu

Tento algoritmus pozostáva z dvoch krokov.

Krok číslo 1

Definujeme rozšírený riadiaci systém ako

$$\sum_e : \quad \dot{q} = g_1(q)v_1 + \dots + g_m(q)v_m + g_{m+1}(q)v_{m+1} + \dots + g_s(q)v_s, \quad (5.5)$$

kde vektorové polia g_{m+1}, \dots, g_s sú Lieove zátvorky vyšších rádoov polí g_i vybrané tak, aby $g_1(q), \dots, g_s(q)$ generovali \mathbb{R}^n pre všetky q patriace blízke okoliu bodu q_0 .

Nájďme kontrolný vektor $v(t)$, ktorý privedie mechanizmus zo stavu q_0 do stavu q_f pre rozšírený systém (5.5).

Pre nájdenie vektoru v zvolíme ľubovoľnú C^1 krivku $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, ktorá prechádza od q_0 po q_f . Najjednoduchšie je zvoliť priamku, v prípade ak sa chceme vyhnúť nejakým prekážkam, zvolíme inú vyhovujúcu krivku. Po zvolení krivky vyriešime rovnicu

$$\dot{\gamma}(t) = g_1(\gamma(t))v_1 + \dots + g_s(\gamma(t))v_s \quad (5.6)$$

dosadením krivky $\gamma(t)$ za q v rovnici (5.5), keďže rovnica (5.5) musí platiť počas celého priebehu riadenia.

Následne z riadiaceho vektoru $v(t)$ vyjadríme a spočítame Philip Hall súradnice, ktoré využijeme pri zostavení zápisu toku systému.

Chen-Fliessov rad [11] hovorí, že všetky toky nelineárneho kontrolného systému

$$\dot{q} = \sum_{i=1}^m g_i(q)u_i \quad q(0) = q \quad (5.7)$$

sú v tvare zloženého toku

$$S_t(q) = e^{h_s(t)B_s} e^{h_{s-1}(t)B_{s-1}} \dots e^{h_2(t)B_2} e^{h_1(t)B_1}(q), \quad (5.8)$$

pre niektoré vhodne zvolené funkcie h_1, h_2, \dots, h_s , známe ako Philip Hall súradnice. To znamená, že všetky toky, ktoré je možné generovať riadiacim systémom, dokážeme dostať zložením tokov pozdĺž prvkov Phillip Hall bázy B_1, \dots, B_s . Ďalej budeme $S_t(q)$ označovať $S(t)$. Toky $S(t)$ navyše spĺňajú diferenciálnu rovnicu

$$\dot{S}(t) = S(t)(B_1v_1 + \dots + B_s v_s) \quad S(0) = 1, \quad (5.9)$$

kde v_1, \dots, v_s sú prvky kontrolného vektoru $v(t)$ rozšíreného riadiaceho systému, korešpondujúce so smermi prvkov B_1, \dots, B_s , vypočítaného pomocou (5.6).

5. ÚVOD DO RIADENIA NILPOTENTNÝCH SYSTÉMOV

Zavedieme pojem adjungovaná reprezentácia. Nech G je Lieova grupa s Lieovou algebrou \mathfrak{g} . Pre každé $g \in G$,

$$C_g : h \in G \rightarrow ghg^{-1} \in G.$$

Diferenciál C_g nazveme adjungovanou reprezentáciou a označíme ju ako Ad_g , [7].

Potom diferenciálnu rovnicu (5.9) môžeme prepísať do tvaru

$$\begin{aligned} \dot{S}(t) &= \sum_{j=1}^s e^{h_s(t)B_s} \dots e^{h_j(t)B_j} \dot{h}_j B_j e^{h_{j-1}(t)B_{j-1}} \dots e^{h_1(t)B_1} \\ &= \sum_{j=1}^s S(t) e^{-h_1(t)B_1} \dots e^{-h_{j-1}(t)B_{j-1}} \dot{h}_j B_j e^{h_{j-1}(t)B_{j-1}} \dots e^{h_1(t)B_1} \\ &:= \sum_{j=1}^s S(t) Ad_{e^{-h_1(t)B_1} \dots e^{-h_{j-1}(t)B_{j-1}}} \dot{h}_j B_j, \end{aligned} \quad (5.10)$$

kde využijeme zápisu

$$Ad_{e^{-h_i B_i}} B_j = e^{-h_i B_i} B_j e^{h_i B_i}, \quad (5.11)$$

pomocou ktorého platí

$$Ad_{e^{-h_1 B_1} \dots e^{-h_{j-1} B_{j-1}}} = Ad_{e^{-h_1 B_1}} \dots Ad_{e^{-h_{j-1} B_{j-1}}}, \quad [11]. \quad (5.12)$$

Nakoľko predpokladáme, že kontrolná Lieova algebra je nilpotentná, každý prvok pravej strany rovnice (5.10) vieme zapísať ako lineárnu kombináciu B_1, \dots, B_s .

Toto tvrdenie zapíšeme ako

$$Ad_{e^{-h_1(t)B_1} \dots e^{-h_{j-1}(t)B_{j-1}}} \dot{h}_j B_j = \left(\sum_{k=1}^s p_{j,k}(h) B_k \right) \dot{h}_j \quad (5.13)$$

pre určité polynómy $p_{j,k}(h)$.

Použitím (5.13) v rovnici (5.9) dostaneme

$$\sum_{j=1}^s p_{j,k}(h) \dot{h}_j = v_k, \quad k = 1, \dots, s. \quad (5.14)$$

Vďaka úprave rovníc (5.14) dostaneme sústavu diferenciálnych rovníc

$$\dot{h} = Q(h)v, \quad h(0) = 0, \quad (5.15)$$

ktorá sa označuje ako Chen-Fliess-Sussmannova rovnica. Popisuje vývoj Philip Hall súradníc pri vstupoch v_1, \dots, v_s . Počiatočné podmienky $h_i(0) = 0$ odpovedajú difeomorfizmu s konfiguráciou robota v čase $t = 0$.

Poznámka. Philip Hall súradnice h_i , $i = 1, \dots, s$ nazveme aj ako spätné Philip Hall súradnice.

Dosadením spätných Philip Hall súradníc do (5.8) dostaneme tok $S(t)$ vyjadrený ako:

$$S(t) = e^{h_s(t)B_s} e^{h_{s-1}(t)B_{s-1}} \dots e^{h_2(t)B_2} e^{h_1(t)B_1}. \quad (5.16)$$

5.4. APLIKÁCIA ALGORITMU NA TRIDENT SNAKE ROBOTA

Krok číslo 2

V tomto kroku nájdeme kontrolný vektor $u(t)$ nerozšíreného systému pomocou spätných Philip Hall súradníc. Tento riadiaci vektor môžeme nájsť viacerými postupmi. My si ukážeme jeden z tých najjednoduchších.

V prípade nilpotentnej algebry je tento krok jednoduchý. Ak je algebra nilpotentná rádu 2, platí pravidlo

$$e^{t[g_1, g_2]} = e^{\sqrt{t}g_1} e^{\sqrt{t}g_2} e^{-\sqrt{t}g_1} e^{-\sqrt{t}g_2}, \quad (5.17)$$

viď [11].

Predpokladáme, že $t > 0$. Ak $t < 0$, využijeme vlastnosť antisymetrie zátvorky:

$$e^{-t[g_1, g_2]} = e^{t[g_2, g_1]} = e^{\sqrt{t}g_2} e^{\sqrt{t}g_1} e^{-\sqrt{t}g_2} e^{-\sqrt{t}g_1}.$$

Takýmto spôsobom dokážeme prepísať tok (5.16) na toky len pozdĺž reálnych polí g_1, \dots, g_m , aplikovaním pravidla (5.17) postupne zvlášť na každé vektorové pole g_{m+1}, \dots, g_s a následným poskladaním výsledných tokov zasebou.

5.4 Aplikácia algoritmu na trident snake robot

Pripomeňme, že trident snake robot je lokálne ovládateľný v bode $q = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$. Stanovme preto vždy tento bod ako bod počiatočný $q = q_0$.

Vyjadríme Philip Hall koeficienty v závislosti na riadiacom vektore v , keďže táto časť algoritmu je rovnaká pre ľubovoľne zvolený koncový bod q_f . Pracujeme v nilpotentnej aproximácii.

Philip Hall báza Lieovej algebry generovaná vektorovými poliami g_1, g_2, g_3 je tvaru

$$\begin{aligned} B_1 &= g_1, & B_2 &= g_2, & B_3 &= g_3, \\ B_4 &= [g_1, g_2], & B_5 &= [g_2, g_3], & B_6 &= [g_1, g_3]. \end{aligned} \quad (5.18)$$

5. ÚVOD DO RIADENIA NILPOTENTNÝCH SYSTÉMOV

Máme nilpotentný systém v tvare (5.1) s tromi riadiacimi vektorovými polami (4.12) na \mathbb{R}^6 a generovanú Philip Hall bázu (5.18). Koefficienty \dot{h}_j sú podľa rovníc (5.14) spočítané týmto spôsobom:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^6 p_{1,k}(h)B_k &= B_1, \\
 \sum_{k=1}^6 p_{2,k}(h)B_k &= B_2 - h_1B_4, \\
 \sum_{k=1}^6 p_{3,k}(h)B_k &= B_3 - h_1B_6 - h_2B_5, \\
 \sum_{k=1}^6 p_{4,k}(h)B_k &= B_4, \\
 \sum_{k=1}^6 p_{5,k}(h)B_k &= B_5, \\
 \sum_{k=1}^6 p_{6,k}(h)B_k &= B_6.
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

Pre ilustráciu si ukážeme výpočet koeficientu \dot{h}_3 :

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^6 p_{3,k}(h)B_k &= Ad_{e^{-h_1B_1}e^{-h_2B_2}}B_3 \\
 &= Ad_{e^{-h_1B_1}}(B_3 - h_2[B_2, B_3]) \\
 &= B_3 - h_1[B_1, B_3] - h_2[B_2, B_3] \\
 &= B_3 - h_1B_6 - h_2B_5.
 \end{aligned}$$

Nahradením koeficientov v rovnici (5.10) dostaneme

$$\begin{aligned}
 \dot{h}_1B_1 + \dot{h}_2(B_2 - h_1B_4) + \dot{h}_3(B_3 - h_1B_6 - h_2B_5) + \dot{h}_4B_4 + \dot{h}_5B_5 + \dot{h}_6B_6 \\
 = v_1B_1 + v_2B_2 + v_3B_3 + v_4B_4 + v_5B_5 + v_6B_6
 \end{aligned} \tag{5.20}$$

alebo

$$\begin{aligned}
 (\dot{h}_1)B_1 + (\dot{h}_2)B_2 + (\dot{h}_3)B_3 + (-h_1\dot{h}_2 + \dot{h}_4)B_4 + (-h_2\dot{h}_3 + \dot{h}_5)B_5 + (-h_1\dot{h}_3 + \dot{h}_6)B_6 \\
 = v_1B_1 + v_2B_2 + v_3B_3 + v_4B_4 + v_5B_5 + v_6B_6
 \end{aligned}$$

tak, že v upravenom tvare skončíme s nasledujúcou sústavou:

$$\begin{aligned}
 \dot{h}_1 &= v_1 \\
 \dot{h}_2 &= v_2 \\
 \dot{h}_3 &= v_3 \\
 \dot{h}_4 &= v_4 + h_1v_2 \\
 \dot{h}_5 &= v_5 + h_2v_3 \\
 \dot{h}_6 &= v_6 + h_1v_3
 \end{aligned} \tag{5.21}$$

5.4. APLIKÁCIA ALGORITMU NA TRIDENT SNAKE ROBOTA

s počiatočnými podmienkami

$$h_1(0) = h_2(0) = h_3(0) = h_4(0) = h_5(0) = h_6(0) = 0.$$

Následne ilustrujeme kontrétny problém, a to pohyb v smere zátvorky.

5.4.1 Pohyb v smere zátvorky

Pre ilustráciu algoritmu zvolíme počiatočný a koncový bod tak, aby ich spojnice bola pohybom v smere zátvorky $[g_1, g_2]$. Pri riešení pohybu použijeme aproximované vektorové polia v originálnom súradnicovom systéme (4.12).

Poznámka. V smere zátvorky sa pohybovať nedá, a preto ten pohyb modelujeme z (5.17) ako zloženie štyroch tokov.

Zvolíme počiatočný bod $q_0 = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$, koncový bod $q_f = (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1)^T$ a krivku

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \\ \gamma_3(t) \\ \gamma_4(t) \\ \gamma_5(t) \\ \gamma_6(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ t \\ t \\ t \end{pmatrix}.$$

Počiatočný a koncový bod sú zvolené tak, že nimi daný smer je skutočne presne smer zátvorkového pola.

Rozšírený systém (5.5) bude mať nasledujúci tvar:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} v_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} v_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} v_3 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} v_4 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} v_5 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} v_6,$$

alebo

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ -v_2 - 2v_3 + v_4 + v_6 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2 - 2v_3 + v_4 + \frac{\sqrt{3}}{2}v_5 - \frac{1}{2}v_6 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2 - 2v_3 + v_4 - \frac{\sqrt{3}}{2}v_5 - \frac{1}{2}v_6 \end{pmatrix}. \quad (5.22)$$

Vyriešením sústavy (5.22) dostaneme vstupy $v(t) = (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0)^T$.

5. ÚVOD DO RIADENIA NILPOTENTNÝCH SYSTÉMOV

Vektor $v(t)$ je kontrolný vektor rozšíreného systému. Potom sústava diferenciálnych rovníc pre výpočet Philip Hall súradníc vyzerá podľa prepisu (5.21) takto:

$$\begin{aligned}
 \dot{h}_1 &= 0 \\
 \dot{h}_2 &= 0 \\
 \dot{h}_3 &= 0 \\
 \dot{h}_4 &= 1 \\
 \dot{h}_5 &= 0 \\
 \dot{h}_6 &= 0
 \end{aligned} \tag{5.23}$$

s počiatočnými podmienkami

$$h_1(0) = h_2(0) = h_3(0) = h_4(0) = h_5(0) = h_6(0) = 0.$$

Vyriešením sústavy (5.23) dostaneme

$$\begin{aligned}
 h_1(t) &= 0 \\
 h_2(t) &= 0 \\
 h_3(t) &= 0 \\
 h_4(t) &= t \\
 h_5(t) &= 0 \\
 h_6(t) &= 0.
 \end{aligned} \tag{5.24}$$

Pomocou týchto koeficientov môžeme zapísať tok $S(t)$ v tvare

$$S(t) = e^{h_6(t)B_6} e^{h_5(t)B_5} e^{h_4(t)B_4} e^{h_3(t)B_3} e^{h_2(t)B_2} e^{h_1(t)B_1} = e^{tB_4}.$$

Finálny stav v čase $t = 1$ zapíšeme ako $q_f = q_0 e^{B_4}$. Následne vyjadríme bod q_f pomocou základných vektorových polí:

$$q_f = q_0 e^{B_4} = q_0 e^{B_1} e^{B_2} e^{-B_1} e^{-B_2}. \tag{5.25}$$

Pri vyjadrení toku (5.25) sme využili (5.17).

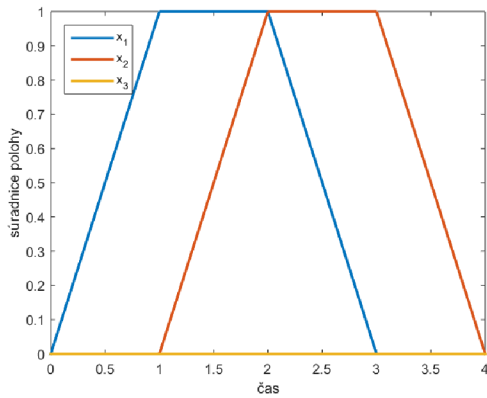
Výsledné korešpondujúce kontrolné vektory nerozšíreného systému budú v tvare:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}_1 &= (1 \ 0 \ 0)^T && \text{pre čas } T_1 = 1, \\
 \mathbf{u}_2 &= (0 \ 1 \ 0)^T && \text{pre čas } T_2 = 1, \\
 \mathbf{u}_3 &= (-1 \ 0 \ 0)^T && \text{pre čas } T_3 = 1, \\
 \mathbf{u}_4 &= (0 \ -1 \ 0)^T && \text{pre čas } T_4 = 1.
 \end{aligned} \tag{5.26}$$

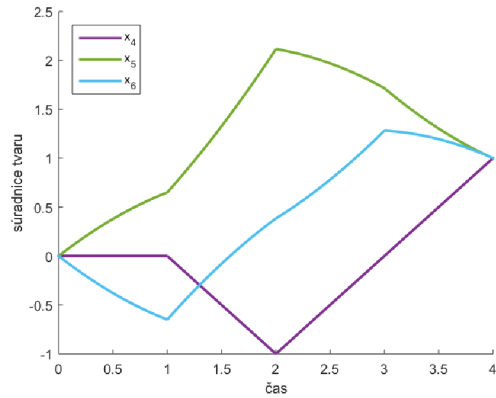
Hodnotu času T_i volíme tak, aby bola integrálna krivka vektorového pola $\mathbf{u}_i \cdot (g_1 \ g_2 \ g_3)^T$ definovaná na celom časovom intervale $t \in (0, T_i)$. Ďalej vypočítame jednotlivé kroky pohybu pre ilustráciu jednotlivých súradníc robota v čase presunu mechanizmu z bodu $q_0 = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ do bodu $q_f = (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1)^T$. Pre vykreslenie súradníc robota vid' Obr. 5.1.

5.4. APLIKÁCIA ALGORITMU NA TRIDENT SNAKE ROBOTA

Na Obr. 5.1(a) vidíme, že uhol θ sa počas celého pohybu nezmení. Ďalej vidíme, že stred trojuholníkovej podstavy opíše v priestore \mathbb{R}^2 štvorec. Na Obr. 5.1(b) vidíme, čím boli tieto posuny spôsobené. Napr. prvý posun v smere x , bol spôsobený natočením druhej a tretej nožičky opačným smerom k osi x o rovnakú hodnotu. Vďaka prudkým zmenám funkcii jednotlivých súradníc, naozaj vidíme, že ide o riadenie s počastiami konštantným vstupom.



(a) Vývoj súradníc x_1, x_2, x_3



(b) Vývoj súradníc x_4, x_5, x_6

Obr. 5.1: Pohyb z bodu $q_0 = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ do bodu $q_f = (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1)^T$

5.4.2 Výpočet súradníc robota v čase počas pohybu Lieovou zátvorkou

Z toku (5.25) vidíme, že tento zložený tok pozostáva zo štyroch kratších naväzujúcich tokov. Preto bude výpočet súradníc rozdelený na štyri kroky.

Krok 1

Kontrolný vektor aj dĺžku časového intervalu sme zvolili podľa (5.26). Pravú stranu modelu systému získame dosadením kontrolného vektora do (5.5), kde teraz polia g_i , $i = 1, \dots, s$ sú z (4.12). Vychádzame z $t = 0$, a počiatočné podmienky reprezentujú q_0 .

Zvolený kontrolný vektor: $\mathbf{u}_1 = (1 \ 0 \ 0)^T$.

Časový interval: $0 \leq t \leq 1$.

Model systému:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -(x_2 + x_3) \\ -\left(\frac{\sqrt{3}x_1}{4} + \frac{x_2}{4} - \frac{x_3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ \frac{\sqrt{3}x_1}{4} - \frac{x_2}{4} + \frac{x_3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \quad (5.27)$$

Počiatočné podmienky:

$$x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = x_4(0) = x_5(0) = x_6(0) = 0$$

Riešenie sústavy diferenciálnych rovníc (5.27) zapíšeme ako:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \\ x_6(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\left(\frac{\sqrt{3}t^2}{8} - \frac{\sqrt{3}t}{2}\right) \\ \frac{\sqrt{3}t^2}{8} - \frac{\sqrt{3}t}{2} \end{pmatrix}$$

Konečný stav v $t = 1$:

$$\left(1 \ 0 \ 0 \ 0 \ \frac{3\sqrt{3}}{8} \ -\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)^T$$

Zvyšné kroky riešime obdobne, avšak ako počiatočné podmienky si stanovujeme konečný stav z predošlého kroku.

5.4. APLIKÁCIA ALGORITMU NA TRIDENT SNAKE ROBOTA

Krok 2

Zvolený kontrolný vektor: $\mathbf{u}_2 = (0 \ 1 \ 0)^T$.

Časový interval: $1 \leq t \leq 2$.

Model systému:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ \frac{3x_1}{4} + \frac{\sqrt{3}x_2}{4} - \frac{\sqrt{3}x_3}{2} + \frac{1}{2} \\ \frac{3x_1}{4} - \frac{\sqrt{3}x_2}{4} + \frac{\sqrt{3}x_3}{2} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Počiatkové podmienky:

$$x_1(1) = 1, x_2(1) = x_3(1) = x_4(1) = 0, x_5(1) = \frac{3\sqrt{3}}{8}, x_6(1) = -\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

Riešenie:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \\ x_6(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ t - 1 \\ 0 \\ -t + 1 \\ \frac{\sqrt{3}t^2}{8} + \frac{(5-\sqrt{3})t}{4} + \frac{2\sqrt{3}-5}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}t^2}{8} + \frac{(5+\sqrt{3})t}{4} + \frac{-2\sqrt{3}-5}{4} \end{pmatrix}$$

Konečný stav v $t = 2$:

$$\left(1 \ 1 \ 0 \ -1 \ \frac{2\sqrt{3}+5}{4} \ \frac{-2\sqrt{3}+5}{4} \right)^T$$

Krok 3

Zvolený kontrolný vektor: $\mathbf{u}_3 = (-1 \ 0 \ 0)^T$.

Časový interval: $2 \leq t \leq 3$.

Model systému:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ (x_2 + x_3) \\ \left(\frac{\sqrt{3}x_1}{4} + \frac{x_2}{4} - \frac{x_3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ -\left(\frac{\sqrt{3}x_1}{4} - \frac{x_2}{4} + \frac{x_3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{pmatrix}$$

Počiatkové podmienky:

$$x_1(2) = x_2(2) = 1, x_3(2) = 0, x_4(2) = -1, x_5(2) = \frac{2\sqrt{3}+5}{4}, x_6(2) = \frac{-2\sqrt{3}+5}{4}$$

5. ÚVOD DO RIADENIA NILPOTENTNÝCH SYSTÉMOV

Riešenie:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \\ x_6(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t + 3 \\ 1 \\ 0 \\ t - 3 \\ \frac{-\sqrt{3}t^2}{8} + \frac{(\sqrt{3}+1)t}{4} + \frac{2\sqrt{3}+3}{4} \\ \frac{\sqrt{3}t^2}{8} + \frac{(-\sqrt{3}+1)t}{4} + \frac{-2\sqrt{3}+3}{4} \end{pmatrix}$$

Konečný stav v $t = 3$:

$$(0 \ 1 \ 0 \ 0 \ \frac{\sqrt{3} + 12}{8} \ \frac{-\sqrt{3} + 12}{8})^T$$

Krok 4

Zvolený kontrolný vektor: $\mathbf{u}_4 = (0 \ -1 \ 0)^T$.

Časový interval: $3 \leq t \leq 4$.

Model systému:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ -(\frac{3x_1}{4} + \frac{\sqrt{3}x_2}{4} - \frac{\sqrt{3}x_3}{2} + \frac{1}{2}) \\ -(\frac{3x_1}{4} - \frac{\sqrt{3}x_2}{4} + \frac{\sqrt{3}x_3}{2} + \frac{1}{2}) \end{pmatrix}$$

Počiatkové podmienky:

$$x_1(3) = x_3(3) = x_4(3) = 0, x_2(3) = 1, x_5(3) = \frac{\sqrt{3} + 12}{8}, x_6(3) = \frac{-\sqrt{3} + 12}{8}$$

Riešenie:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \\ x_5(t) \\ x_6(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -t + 4 \\ 0 \\ t - 3 \\ \frac{\sqrt{3}t^2}{8} + \frac{(-2\sqrt{3}-1)t}{2} + 2\sqrt{3} + 3 \\ \frac{-\sqrt{3}t^2}{8} + \frac{(2\sqrt{3}-1)t}{2} - 2\sqrt{3} + 3 \end{pmatrix}$$

Konečný stav v $t = 4$:

$$(0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1)^T$$

Tým sme sa dostali do koncového bodu a input je skutočne po častiach konštantný.

6 Simulácie

V poslednej kapitole sa budeme zaoberať najvyužiteľnejšími pohybmi trident snake robota v skutočnosti. Najprv preberieme pohyby v smere zvyšných zátvoriek, a neskôr predstavíme ideu základných pohybov. Priložíme grafy vykresľujúce zmenu súradníc v čase pri jednotlivých simulovaných pohyboch. Pre simulovanie pohybov trident snake robota sme využili softvér MATLAB. Na konci predstavíme možnosť skrátenia počtu krokov pohybu, prezentovanú v [10].

6.1 Pohyby v smere zátvoriek

Pohyby v smere zátvoriek predstavujú pohyby v smere vektorových polí g_4, g_5, g_6 . Tieto pohyby v skutočnosti nie sú priamo realizovateľné. Avšak dokážeme ich realizovať pomocou viacerých pohybov v smeroch polí g_1, g_2, g_3 . Pohyb v smere zátvorky g_4 sme vyriešili v predošlej kapitole, viď (5.26). Pristúpme k zostávajúcim zátvorkám.

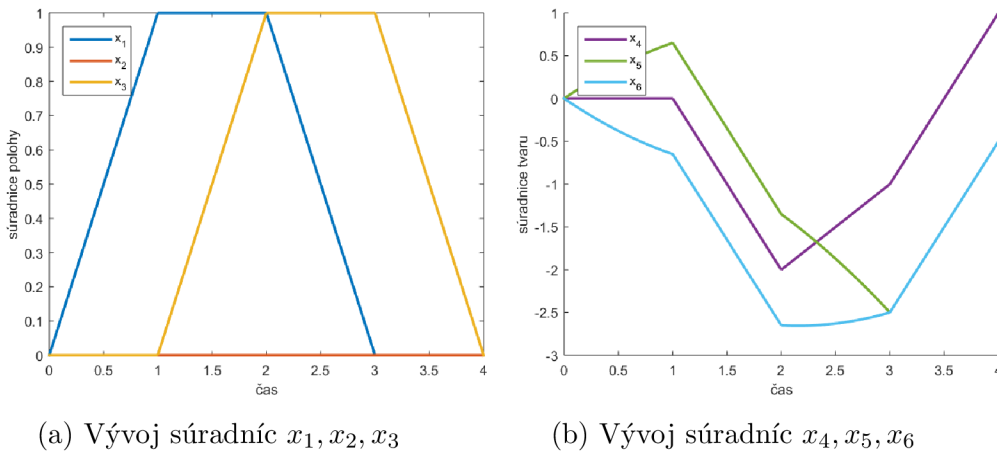
6.1.1 Pohyb v smere g_5

Tento pohyb realizujeme zvolením bodu $q_f = (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ -\frac{1}{2} \ -\frac{1}{2})^T$. Po vyriešení (5.21), dostaneme vektor Philip Hall súradníc $h = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0)^T$, a výsledný zložený tok, napíšeme podľa (5.17) ako:

$$q_0 e^{[g_2, g_3]} = q_0 e^{g_2} e^{g_3} e^{-g_2} e^{-g_3}. \quad (6.1)$$

Zložený tok sa rozkladá takisto na 4 kroky. V tomto prípade zmena oproti predošlému príkladu vo veľkosti a počte časových intervalov nenastáva, nakoľko koeficienty tokov (5.25) sú rovnaké ako (6.1), čo pri neskorších pohyboch platiť obecné nebude. Pri voľbe (5.27) by sme volili model systému s vektorovým polom g_2 , na základe jednotkových riadiacich vektorov zostavených z (6.1).

Vývoj súradníc počas presunu robota môžeme sledovať na Obr. 6.1.



Obr. 6.1: Pohyb z $q_0 = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ do $q_f = (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ -\frac{1}{2} \ -\frac{1}{2})^T$

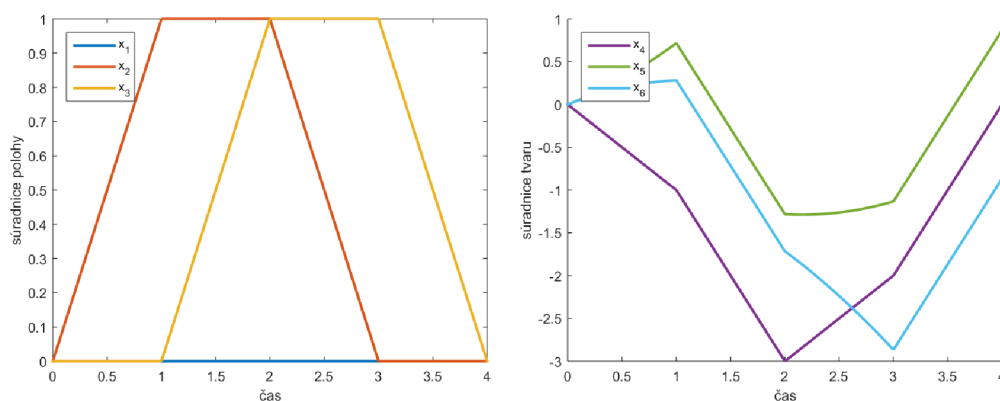
6.1.2 Pohyb v smere g_6

Tento pohyb realizujeme zvolením bodu $q_f = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \frac{\sqrt{3}}{2} \ -\frac{\sqrt{3}}{2})^T$. Pre opakujúci sa postup výpočtu budem ďalej uvádzať len dôležité kľúčové výsledky.

Vektor Philip Hall súradníc $h = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1)^T$, zložený tok je v tvare

$$q_0 e^{[g_1, g_3]} = q_0 e^{g_1} e^{g_3} e^{-g_1} e^{-g_3}. \quad (6.2)$$

Trident snake robot sa dostane do koncového bodu pomocou 4 krokov. Vývoj súradníc ilustrujeme na Obr. 6.2.



(a) Vývoj súradníc x_1, x_2, x_3

(b) Vývoj súradníc x_4, x_5, x_6

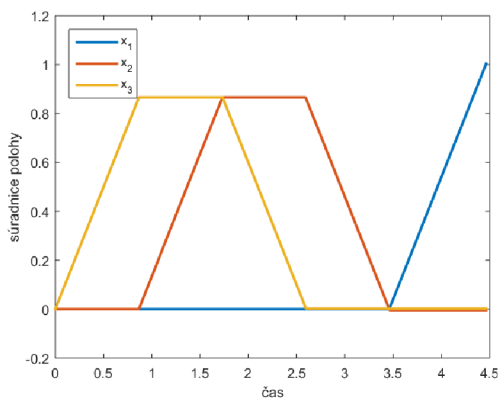
Obr. 6.2: Pohyb z $q_0 = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ do $q_f = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \frac{\sqrt{3}}{2} \ -\frac{\sqrt{3}}{2})^T$

6.2 Základné pohyby

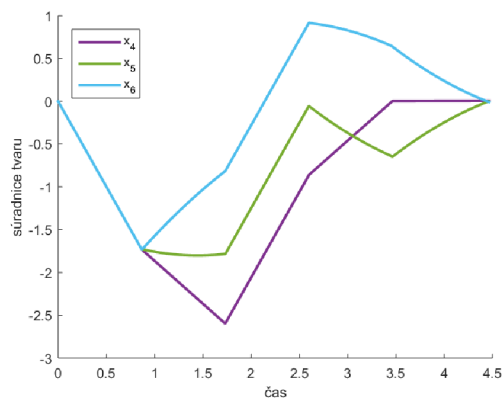
Pre mechanizmus trident snake robota, existujú 3 základné pohyby. Pohyb v smere osi x , v smere osi y , a zmena uhlu θ , teda jeho otočenie na mieste. Predpokladáme pri týchto pohyboch, že tvar robota zostáva na konci pohybu rovnaký ako na jeho začiatku. Tieto pohyby sú veľmi využiteľné pre motion planning.

Na nasledujúcej strane ilustrujeme vývoj súradníc robota v čase pri týchto pohyboch. Vid' Obr. 6.3, 6.4, 6.5.

6.2. ZÁKLADNÉ POHYBY

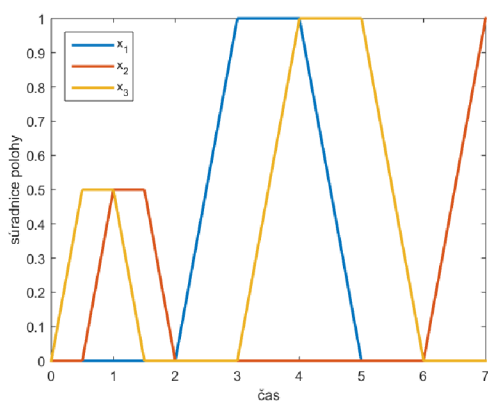


(a) Vývoj súradníc x_1, x_2, x_3

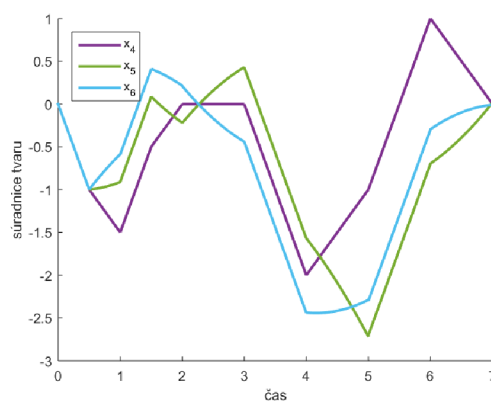


(b) Vývoj súradníc x_4, x_5, x_6

Obr. 6.3: Pohyb z $q_0 = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ do $q_f = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$

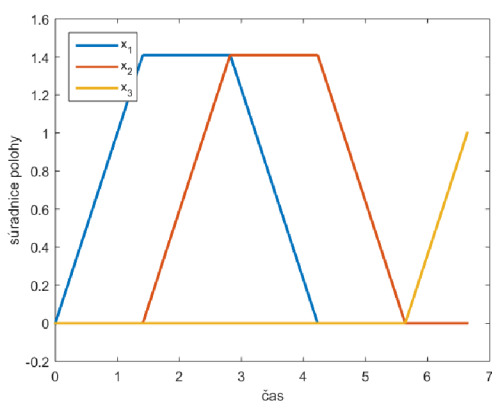


(a) Vývoj súradníc x_1, x_2, x_3

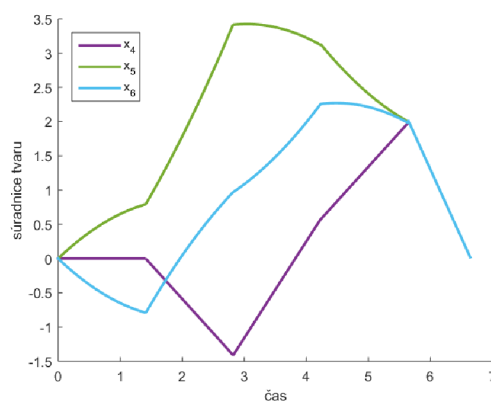


(b) Vývoj súradníc x_4, x_5, x_6

Obr. 6.4: Pohyb z $q_0 = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ do $q_f = (0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$



(a) Vývoj súradníc x_1, x_2, x_3



(b) Vývoj súradníc x_4, x_5, x_6

Obr. 6.5: Pohyb z $q_0 = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ do $q_f = (0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0)^T$

6.3 Porovnanie dvoch riešení rovnakého pohybu

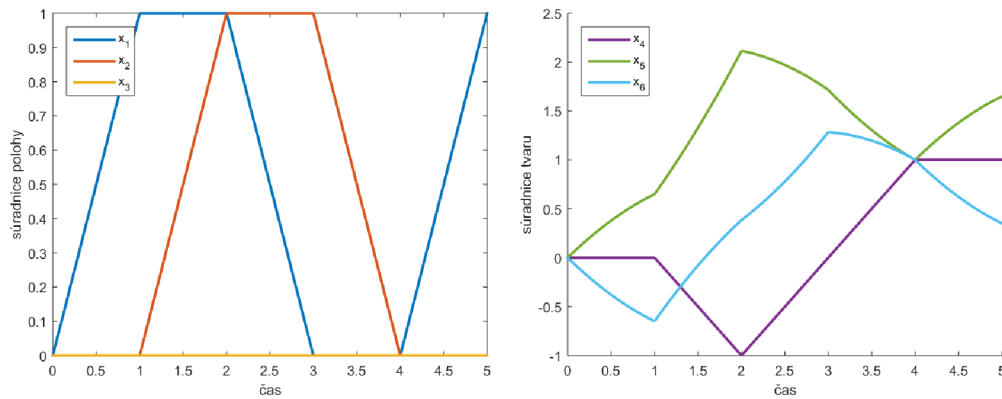
Avšak najzaujavným prípadom, bolo riešenie pohybu zloženého zo zátvorky g_4 a pola g_1 pri voľbe

$$q_f = \left(1 \ 0 \ 0 \ 1 \ \frac{8+3\sqrt{3}}{8} \ -\frac{8+3\sqrt{3}}{8}\right)^T.$$

Pri tomto koncovom bode, sme dostali tok v tvare

$$q_0 e^{[g_1, g_2]} e^{g_1} = q_0 e^{g_1} e^{g_2} e^{-g_1} e^{-g_2} e^{g_1}. \quad (6.3)$$

Riešením zámény tokov sme obdržali 5 krokový riadiaci systém, ktorého presun do žiadaného bodu vidíme na Obr. 6.6.



(a) Vývoj súradníc x_1, x_2, x_3

(b) Vývoj súradníc x_4, x_5, x_6

Obr. 6.6: Pohyb z $q_0 = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ do $q_f = \left(1 \ 0 \ 0 \ 1 \ \frac{8+3\sqrt{3}}{8} \ -\frac{8+3\sqrt{3}}{8}\right)^T$

Avšak na základe Lafferierovej vety v [10],

$$e^{h_3[g_1, g_2]} e^{h_2 g_2} e^{h_1 g_1} = e^{a_1 g_2} e^{a_2 g_1} e^{a_3 g_2},$$

ak $h_2 = 0$. Koeficienty $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$ získame explicitne predpisom

$$a_1 = h_2 - \frac{h_3}{h_1}, \quad a_2 = h_1, \quad a_3 = \frac{h_3}{h_1}.$$

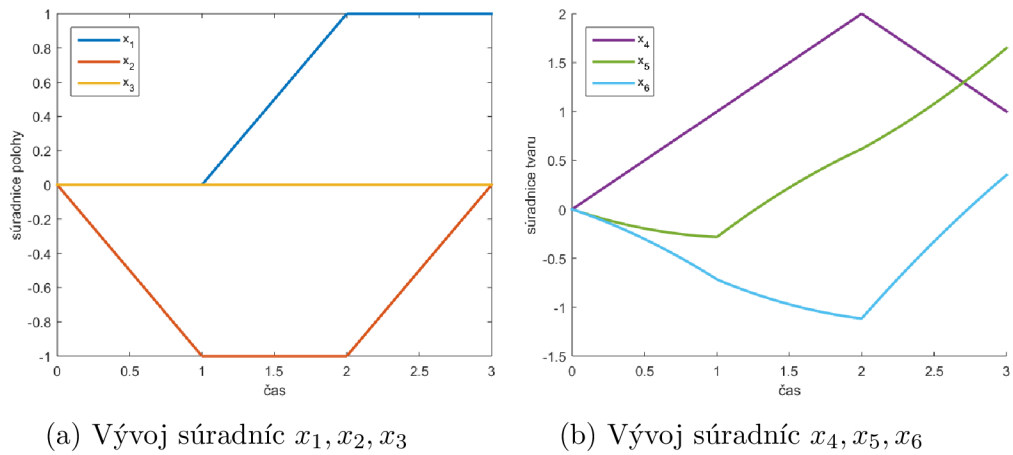
V našom prípade, môžeme teda tok (6.3) nahradiť zloženým 3 krokovým systémom predpísaným tokom

$$q_0 e^{[g_1, g_2]} e^{g_1} = q_0 e^{-g_2} e^{g_1} e^{g_2}. \quad (6.4)$$

Vývoj súradníc je možné sledovať na Obr. 6.7.

Použitím Lafferierovej vety, sme nie len znížili počet krokov riadiaceho systému, ale aj skrátili čas potrebný pre dosiahnutie požadovaného koncového bodu. Táto úprava pri praktickom riadení extrémne uľahčí prácu riadenia, a takisto robí piecewise constant input algoritmus atraktívnejším, pri výbere algoritmu na riešenie pohybových problémov robotov.

6.3. POROVNANIE DVOCH RIEŠENÍ ROVNAKÉHO POHYBU



Obr. 6.7: Pohyb z $q_0 = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ do $q_f = (1 \ 0 \ 0 \ 1 \ \frac{8+3\sqrt{3}}{8} \ -\frac{8+3\sqrt{3}}{8})^T$

7 Záver

Popísali sme riadenie neholonómneho mechanizmu, zvaného trident snake robot. K odvodu kinematických rovníc nám pomohla skutočnosť, že obmedzenie pasívnych kolíčok limituje pohyb robota. Pomocou diferenciálnej geometrie sme zostavili jeho riadiaci systém. Vyriešili sme otázku ovládateľnosti zistením, že dimenzia stavového priestoru sa rovná dimenzii kontrolnej Lieovej algebry, a tým pádom je trident snake robot lokálne ovládateľný v bode $q_0 = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$.

Následne sme zjednodušili riadiaci systém pomocou nilpotentnej aproximácie. Aproximovali sme základné vektorové polia pomocou zavedenia nového súradného systému, a vytvorili tak Lieovu nilpotentnú algebru rádu 2. Následne sme kvôli zjednodušeniu výpočtov uviedli túto aproximovanú algebru do modelu riadenia, a predostreli algoritmus na riešenie motion planningu.

Algoritmus pracoval presne, s počastiami konštantnými vstupmi a dovedol mechanizmus do koncových bodov po určitom počte krokov. Tento počet krokov závisel na voľbe prepísania zloženého toku do tokov základných vektorových polí.

Nakoniec sme použili tento algoritmus pri simuláciách pohybov trident snake robota v smeroch Lieových zátvoriek pomocou ich nahradenia základnými polami, a vytvorením 4 krokových pohybov. Ilustrovali sme priebeh súradníc v čase počas pohybov z počiatočného do koncového bodu, zvoleného tak, aby odpovedali vyššie uvedeným pohybom. Ďalej sme vyriešili základné pohyby, ktorými boli pohyb v smere x , pohyb v smere y a rotácia okolo osi z . Výsledky zmeny súradníc trident snake robota v čase týchto základných pohybov sme takisto ilustrovali v prostredí MATLAB.

V poslednej časti sme pomocou Lafferriereho vety dokázali dosiahnuť ten istý požadovaný koncový bod za kratší čas a s menším počtom krokov, na základe iného prístupu zvoleného pri riešení kroku číslo 2 v algoritme. Tento jav nás ďalej núti sa zaoberať optimálnym riadením pomocou tohto algoritmu, na základe efektívnejšieho riešenia algoritmu v kroku číslo 2. Táto otázka je v súčasnosti stále otvoreným problémom.

Literatúra

- [1] BYRTUS, Roman a Jana VECHETOVÁ. Trident Snake Robot Motion Simulation in V-Rep. Modelling and Simulation for Autonomous Systems. Cham: Springer International Publishing, 2019, 2019-03-14, 27-42. Lecture Notes in Computer Science. DOI: 10.1007/978-3-030-14984-0. ISBN 978-3-030-14983-3. Dostupné také z: <http://link.springer.com/10.1007/978-3-030-14984-0>
- [2] HRDINA, Jaroslav, Radomil MATOUŠEK, Aleš NÁVRAT a Petr VAŠÍK. Nilpotent approximation of a trident snake robot controlling distribution. *Kybernetika*. IEEE, 1991, 37(6), 1118-1130. DOI: 10.14736/kyb-2017-6-1118. ISBN 0-7803-0450-0. ISSN 0023-5954. Dostupné také z: <https://www.kybernetika.cz/content/2017/6/1118>
- [3] ISHIKAWA, Masato. Trident snake robot: Locomotion analysis and control. *IFAC Proceedings Volumes*. 2004, 37(13), 895-900. DOI: 10.1016/S1474-6670(17)31339-3. ISSN 14746670. Dostupné také z: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1474667017313393>
- [4] JEAN, Frédéric. Control of nonholonomic systems: from sub-Riemannian geometry to motion planning. Cham: Springer, [2014]. Briefs in mathematics (Springer). ISBN 978-3-319-08689-7.
- [5] KOLÁŘ, Ivan. Úvod do globální analýzy. Brno: Masarykova univerzita v Brně, 2003. ISBN 80-210-3205-7.
- [6] KOUSSOULAS, Nick T. a Photis SKIADAS. Symbolic computation for mobile robot path planning. *Journal of Symbolic Computation*. 2004, 37(6), 761-775. DOI: 10.1016/j.jsc.1999.05.001. ISSN 07477171. Dostupné také z: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S074771710400032X>
- [7] KOSMANN-SCHWARZBACH, Yvette. Groups and symmetries: from finite groups to Lie groups. New York: Springer, c2010. Universitext (Springer). ISBN 978-0-387-78865-4.
- [8] LAFFERRIERE, G. a H. SUSSMANN. Motion planning for controllable systems without drift. *Proceedings. 1991 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. IEEE Comput. Soc. Press, 1991, , 1148-1153. DOI: 10.1109/ROBOT.1991.131763. ISBN 0-8186-2163-X. Dostupné také z: <http://ieeexplore.ieee.org/document/131763/>
- [9] LAFFERRIERE, G. a Photis SKIADAS. A general strategy for computing steering controls of systems without drift. [1991] *Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control*. IEEE, 1991, 37(6), 1115-1120. DOI: 10.1109/CDC.1991.261506. ISBN 0-7803-0450-0. ISSN 07477171. Dostupné také z: <http://ieeexplore.ieee.org/document/261506/>
- [10] LAFFERRIERE, Gerardo a Héctor J. SUSSMANN. A Differential Geometric Approach to Motion Planning. *Nonholonomic Motion Planning*. Boston, MA: Springer US, 1993, 1993, , 235-270. DOI: 10.1007/978-1-4615-3176-0. ISBN 978-1-4613-6392-7. Dostupné také z: <http://link.springer.com/10.1007/978-1-4615-3176-0>

- [11] MURRAY, Richard M., Zexiang LI a S. Shankar SASTRY. A mathematical introduction to robotic manipulation. Boca Raton: CRC Press, 1994. ISBN 08-493-7981-4.
- [12] VECHETOVÁ, Jana. Geometrické optimální řízení robotického hada [online]. Brno, 2016 [cit. 2020-06-23]. Dostupné z: <http://hdl.handle.net/11012/60555>. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně. Fakulta strojního inženýrství. Ústav matematiky. Vedoucí práce Petr Vašík.

Zoznam príloh

1. *piecewiseconstantinputalgorithm.m – MATLAB skript*