Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

Bakalářská práce

Funkcionální rovnice

Vypracovala: Zuzana Beníšková
Vedoucí práce: RNDr. Libuše Samková, Ph.D.

České Budějovice 2020

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci na téma Funkcionální rovnice jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích .... ……………………………

Poděkování

Chtěla bych poděkovat paní RNDr. Libuši Samkové, Ph.D. za věcné připomínky, velkou trpělivost a nesmírnou ochotu během psaní této bakalářské práce.

Anotace

Tato práce se zabývá funkcionálními rovnicemi a jejich metodami, které vycházejí z učiva pro ZŠ. Je vhodná jako příprava na matematické olympiády pro talentované žáky na 2. stupni ZŠ a nižších gymnáziích. Jedná se o přehlednou studii zahrnující jak postupy řešení doplněné o slovní komentáře, tak i tvoření vlastních úloh. Práce může posloužit jako rozšíření učiva matematiky pro vyšší gymnázia.

Annotation

This work deals witch functional equations and their methods which are based on the curriculum for primary school. It is suitable as a preparation for mathematical olympiads for talented students at second grade of primary schools and lower grammar schools. It is a well arranged study involving both solution procedures supplemented with comments and the creation of own tasks. The work can serve as an extension of mathematics curriculum for higher grammar schools.

Obsah

Úvod

V bakalářské práci se věnuji funkcionálním rovnicím a jejich metodám. Dále se také zaměřuji na vytváření vlastních úloh. K tématu mě přivedla má vedoucí práce, paní doktorka Samková. Chtěla jsem psát o něčem, co mě baví nebo o tématu, které mi je známé. V opačném případě vím, že se takové práce nepíšou snadno.

Ráda jsem počítala různé rovnice a příklady s výrazy. Paní doktorka Samková mě seznámila s funkcionálními rovnicemi a dala mi nějaké příklady na počítání. Po prostudování bylo rozhodnuto o mé bakalářské práci. Jednalo se o rovnice a proč se nenaučit něco nového?

Jelikož se jedná o téma, se kterým se v běžné výuce studenti na základních školách ani na gymnáziích nesetkají, může být tato práce využita pro nadané žáky, kteří se chtějí zúčastnit matematických olympiád, případně pro studenty vysokých škol jako studijní materiál.

Funkcionální rovnice se objevily již v několika ročnících matematických olympiádách. Příkladem může být padesátý ročník v sekci Úlohy domácího kola kategorie A, kde zadání znělo: *Najděte všechny funkce* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *takové, že pro všechna reálná čísla x, y platí* $x^2 + y^2 + 2 \cdot f(xy) = f(x+y) \cdot (f(x) + f(y))$. Jako další příklad bychom mohli použít 54. ročník matematické olympiády, kde se rovněž objevily funkcionální rovnice.

Úplně první kapitola je věnována připomenutí základních pojmů, jako jsou funkce a rovnice. Tyto pojmy se nám při vysvětlování funkcionálních rovnic budou hodit.

Na začátku práce nejprve uvádím definici a seznamuji s tématem, aby studenti věděli, co vlastně počítají. Je vhodné zabrousit i trochu do historie a uvést zde pár matematických kapacit, které se zabývaly danou problematikou.

Následující kapitolou jsou vybrané metody řešení, které odpovídají matematickým schopnostem žákům druhého stupně základní školy. Každá metoda je demonstrována příkladem a každý příklad je doprovázen komentářem pro lepší vysvětlení. Není na škodu ukázat, jak se u takových příkladů dělá zkouška.

Rozhodně je zajímavé, že u takových typů úloh stačí malá nepozornost, špatně přečtené zadání a hned řešíte jinou rovnici. Tomu jsem věnovala další kapitolu. Samozřejmě nemohou chybět ukázkové příklady.

Závěrečnou kapitolou, ne však méně důležitou, je vytváření takových rovnic. Tato kapitola může čtenáři pomoci ucelit si všechny získané informace a mohou ji využít i kantoři ke tvoření příkladů pro své studenty.

V poslední části jsem uvedla několik málo zadaných příkladů pouze s výsledky, aby si studenti mohli sami vyzkoušet spočítat nějaké rovnice a zároveň si mohli ověřit správnost řešení.

Bakalářská práce má tedy mnoho směrů využití. Poslouží jako studijní materiál pro studenty druhého stupně základní školy nebo nižších gymnáziích, kteří chtějí rozvíjet své schopnosti. Dále může být tato práce využita i jako inspirace pro kreativní učitele matematiky.

Rozhodně by se dalo práci následně rozšířit o užití funkcionálních rovnic v praxi, případně ji ještě více rozvést. Jelikož se jedná o práci spíše zaměřenou pro studenty druhého stupně základní školy, záměrně jsem vynechala příliš odborných termínů a zdlouhavých detailů, abych zanechala její čtivost a srozumitelnost.

1 Základní pojmy

Ze začátku je nejprve nutné uvést a vysvětlit základní pojmy, které budeme dále potřebovat k definování funkcionálních rovnic. Z názvu vyplývá, že si řekneme, co to jsou funkce a rovnice. S tím souvisí termíny jako *definiční obor, obor hodnot* a *vlastnosti funkce*. Jedná se o velmi obsáhlá témata, v této práci však nemáme dostatek prostoru na jejich podrobné zpracování, proto se jich dotkneme pouze okrajově a vyselektujeme si informace, které jsou pro naše další kapitoly potřebné.

1.1 Rovnice

Jak už z názvu vyplývá, bude se jednat o rovnost. Ta se v matematice zapisuje znaménkem rovnítkem „=“. Rovnice se skládá z levé a pravé strany, které jsou rozdělené rovnítkem. Obě strany jsou si tedy rovny. Toto rozdělení se využívá i u zkoušky, kdy provádíme kontrolu správnosti řešení. Jako příklad můžeme uvést obyčejnou rovnost.

$$3 + 1 = 4$$

Zde vidíme, že levá strana se rovná té pravé. Ale rovnice nejsou složené pouze z číslic, nýbrž mohou obsahovat i neznámé (proměnné). Opět můžeme provést rozdělení na rovnice o jedné neznáme a na rovnice o více neznámých.

1.1.1 Rovnice o jedné neznámé

Nejjednodušší rovnice obsahují pouze lineární výrazy, tj. vyskytují se v nich pouze konstanty a násobky proměnné x. Rovnici upravujeme pomocí ekvivalentních úprav: přičítání a odčítání stejného výrazu k oběma stranám rovnice, úpravy výrazů na levé a pravé straně. Pomocí takových úprav ji převedeme do tvaru

$$x = a,$$

kde a je řešení (Umíme matiku, 2020).

Příkladem je rovnice $3x + 2 = x - 2x + 4$.

Příklad 1:

$$3x + 2 = x - 2x + 4$$

Řešení:

Nejprve si všechny neznámé převedeme na levou stranu a všechna čísla zase na pravou.

$$4x = 2$$

Teď už stačí jen vydělit pravou stranu čtyřmi a máme výsledek rovnice.

$$\boldsymbol{x = \frac{1}{2}}$$

Jako důkaz správnosti řešení provedeme zkoušku. Výsledek dosadíme do původní rovnice jako neznámou. Počítáme zvlášť levou a pravou stranu, které se musí rovnat.

Zkouška:

$$L = 3 \cdot \frac{1}{2} + 2 = \frac{7}{2}$$

$$P = \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 = \frac{7}{2}$$

$$\boldsymbol{L = P}$$

1.1.2 Rovnice o více neznámých

V tomto případě už nepočítáme pouze jednu neznámou *x*, ale i další proměnné (*y*, *z*). S takovými rovnicemi se většinou setkáme v podobě soustavy rovnic. Existuje zde metoda dosazovací nebo sčítací. Tím si zjistíme jednu z proměnných a díky ní vypočítáme ostatní neznámé.

Jako příklad nám postačí soustava rovnic o dvou neznámých.

Příklad 2:

$$3x + y = 2x - 2$$

$$\underline{2y - x = 4 + y}$$

Řešení:

K výpočtu využiji dosazovací metodu, která spočívá ve výběru pouze jedné proměnné z jedné rovnice. Já si třeba z první rovnice vyjádřím *y*.

$$y = -x - 2$$

Do druhé rovnice dosadím za *y* svůj dosavadní výsledek, a tím zjistím hodnotu *x*.

$$2 \cdot (-x - 2) - x = 4 + (-x - 2)$$

$$-3x - 4 = -x + 2$$

$$\boldsymbol{x = -3}$$

Hodnotu *x* dosadím do našeho vyjádřeného *y* a mám řešení soustavy rovnic.

$$y = -(-3) - 2$$

$$\boldsymbol{y = 1}$$

Jako procvičení si můžete udělat zkoušku, kde opět porovnáváte levou a pravou stranu rovnice, nejdříve u první a poté u druhé.

Co se týče rovnic, nám tyto informace postačí k vysvětlení funkcionálních rovnic. Samozřejmě existují různé typy rovnic jako kvadratické, goniometrické a mnoho dalších. Těmi se zde ale zabývat nebudeme. Můžeme se tedy podívat na další důležitý pojem, a to jsou funkce.

1.2 Funkce

Bez znalosti pojmu funkce se nemůžeme bavit o funkcionálních rovnicích. Protože to je přesně řešení našeho problému. Definic, co to ta funkce vlastně je, je mnoho. Záleží, z jakého matematického pohledu se na ně budeme dívat. My si z toho kvanta vybereme pouze některé z nich.

Definice: Nechť *A*, *B* jsou množiny. Pak funkce *f* je taková relace z množiny *A* do množiny *B*, která každému prvku množiny *A* přiřadí právě jeden prvek množiny *B*. Množina *A* je definiční obor funkce *f*, množina *B* je obor hodnot funkce *f*. Píšeme

$$f\colon A \to B.$$

Platí-li vztah $B \subset A$, pak *f* je funkce na množině *A* (užívá se též název transformace množiny *A*). Jsou-li *A*, *B* podmnožiny množiny $\mathbb{R}$ všech reálných čísel, nazývá se *f* reálná funkce (Beránek, 2004, s. 5).

To nám na srozumitelnosti moc nepřidalo, tak zkusíme upravenější verzi.

Definice: Funkce je předpis, který každému číslu *x* z definičního oboru *A* přiřadí právě jedno *y* z oboru hodnot *B*. Funkci obvykle zapisujeme ve tvaru

$$y = f(x),$$

či ji můžeme vyjádřit explicitně

$$f: y = x,$$

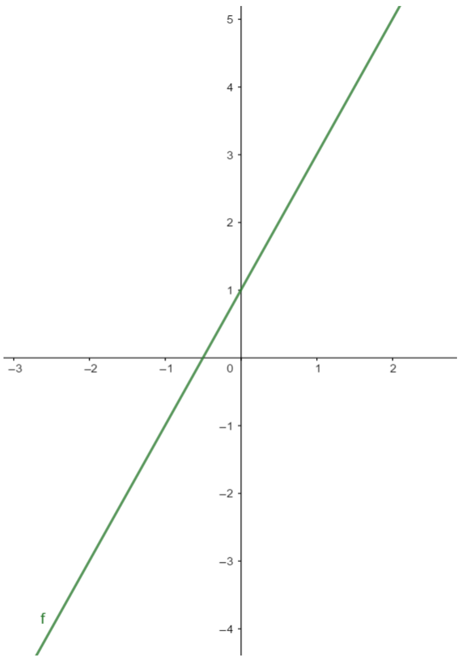
kde proměnná *x* je argument funkce (Matematika, 2020).

Zní to mnohem lépe, ale v obou případech jsme se setkali s matematickými termíny, díky kterým se funkce definuje. Přiblížíme si je v následujících podkapitolách a pro lepší představivost si uvedeme i grafy některých funkcí.

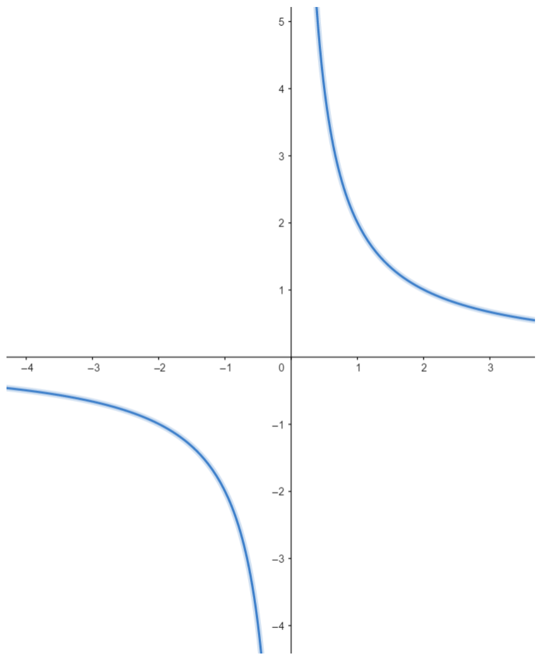
1.2.1 Definiční obor a obor hodnot

Začneme definičním oborem funkce. Jedná se o všechny vstupní hodnoty argumentu *x*. Definiční obor se značí *D(f)*. Mnozí studenti si tento obor pamatují jako podmínky nebo jako *osu x*. Pokud daná funkce nepotřebuje žádnou podmínku, pak je definiční obor roven celé množině reálných čísel (obr. 1).

Jestliže však máme například argument *x* ve jmenovateli, zavede se jasná podmínka, že $x \neq 0$. Tedy definičním oborem takové funkce jsou všechna reálná čísla kromě nuly (obr. 2).



Obr. 1: f(x)=2x+1(program Geogebra)



Obr. 2: f(x)= $\frac{2}{x}$ *(program Geogebra)*

Oborem hodnot jsou vnímány výstupní hodnoty, *osa y*. Značí se *H(f)*. Tento obor závisí na omezenosti funkce. Opět můžeme využít příklad lineární funkce

$$f(x) = 2x + 1,$$

kde oborem hodnot jsou všechna reálná čísla, jelikož tato funkce není nijak omezená (obr. 1). Není tomu tak ale například u kvadratické funkce typu

$$f(x) = x^2.$$

Jasně vidíme, že ať dosadím jakékoliv záporné číslo, stejně dostanu kladné. Oborem hodnot této funkce jsou tedy všechna reálná kladná čísla včetně nuly.

Definiční obor i obor hodnot jsme zvyklí psát pomocí intervalu, reálných čísel případně pomocí náčrtků *osy x* a *osy y*. Jedná se o základní vlastnosti funkce, díky nimž je také definovaná.

1.2.2 Prostá a spojitá funkce

Zde už přecházíme na vlastnosti, které nemusí mít každá funkce. Ale co se týče funkcionálních rovnic, jsou pro nás důležité. Samozřejmě existuje i monotónnost, rozdělení na liché a sudé, rostoucí a klesající a omezenost, které jsme se malinko dotkli. Pro naši problematiku však nejsou tyto vlastnosti tak potřebné.

Prostou funkcí se rozumí taková funkce, která právě jednomu *x* přiřadí právě jedno *y*. Lidsky řečeno, hodnota *y* se nesmí vyskytovat více než jednou. Graficky se dá využít rovnoběžka s *osou x*, která prochází danou funkcí. Pokud taková rovnoběžka má s funkcí pouze jeden průsečík, jedná se o prostou funkci.

Využijeme příklady z minulé podkapitoly. Lineární funkce

$$f(x) = 2x + 1$$

má pro dvě různá *x* taky dvě různá *y* (obr. 1). Zatímco kvadratická funkce

$$f(x) = x^2$$

má s rovnoběžkou vždy dva průsečíky (kromě vrcholu).

Spojitost funkce znamená, že daná funkce neobsahuje žádné mezery, skoky, není „rozkouskovaná“. Jinými slovy „probíhá plynule“. Nejlépe si to vysvětlíme na příkladech. Opět využiju příklad lineární funkce, která „probíhá plynule“, je tedy spojitá na daném definičním oboru. Příkladem nespojité funkce je naše známá

$$f(x) = \frac{2}{x}.$$

Podmínka $x \neq 0$, tedy nula, nám brání v plynulosti. Funkce se dá označit jako nespojitá na celém definičním oboru (obr. 2). Dalším příkladem nespojité funkce můžou být goniometrické funkce tangens a kotangens.

Co se týče základních pojmů, nám výše uvedené dostatečně postačí, abychom konečně mohli přejít k funkcionálním rovnicím a jejich metodám.

2 Co to jsou funkcionální rovnice?

V této kapitole se pokusíme uvést postačující definici, vysvětlíme danou problematiku, aby žák věděl, co vlastně počítá. Představíme si několik málo matematických kapacit, které se tomuto tématu věnovaly.

2.1 Definice a rozdělení

Přesnou definici pojmu funkcionální rovnice nejsme s to podat. Lze však říci, že to je rovnice, u níž se hledá jistá neznámá funkce (nebo i více neznámých funkcí) na základě zadaných vlastností této funkce (Davidov, 1984, s. 5).

Funkcionální rovnice jsou podobné jako algebraické rovnice, až na to, že neznámou proměnou jsou spíše funkce než reálná čísla (Small, 2007, s. 1).

Pro začátek jsme si uvedli dvě definice z našich hlavních zdrojů literatury. Z obou tvrzení nám vyplývají stejné informace a to, že řešením takové rovnice je funkce a důležitost zde hrají i podmínky (zadání příkladu).

Pro každou neznámou funkci musí být určeno, odkud tuto funkci lze vybírat, tzn. je určena množina přípustných řešení. To v praxi znamená, že mohou být stanoveny podmínky na spojitost hledané funkce, její ohraničenost, definiční obor atp. (Beránek, 2004, s. 9).

Příklad zadání funkcionální rovnice:

Nalezněte všechny funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro každé $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$f(xy) - f(x) = y + x.$$

Všechny tyto termíny jsme si představili v minulé kapitole, takže nám nejsou cizí. Proč je však důležité věnovat zadání velkou pozornost, si ukážeme v nadcházející kapitole.

Že rovnice můžeme rozdělit podle počtu neznámých, už víme. Není tomu jinak ani u funkcionálních rovnic. Ale v tomto případě platí známé pořekadlo „čím víc, tím líp“. Jakmile máme totiž více proměnných, naskytuje se nám daleko více metod řešení než v případě jedné proměnné. Metodám řešení věnujeme zvláštní podkapitolu, ještě předtím se však přesuneme do historie.

2.2 Zpátky ke kořenům

Teorie řešení funkcionálních rovnic je jedním z nejstarších odvětví matematické analýzy. K rozpracování této teorie podstatně přispěli matematici Euler, d'Alembert, Cauchy, Gauss, Weierstrass, Abel, Darboux, Hilbert a další. Úlohy vedoucí na funkcionální rovnice vznikají nejčastěji při řešení problémů z geometrie, mechaniky, aerodynamiky apod. (Davidov, 1984, s. 3).

Nemáme tu dostatek prostoru pro představení každého výše uvedeného matematika. Vybereme proto ty nezákladnější, kteří nejvíce přispěli ke zkoumání této problematiky.

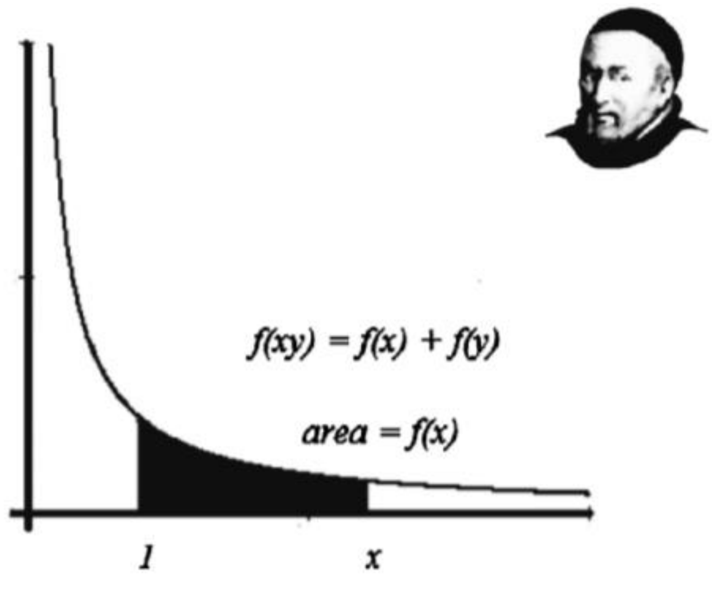
2.2.1 Nicole Oresme a Gregory of Saint-Vincent

Příklady časných funkcionálních rovnic lze vysledovat až do práce matematika čtrnáctého století Nicole Oresme, který poskytl nepřímou definici lineárních funkcí pomocí funkcionální rovnice (Small, 2007, s. 1).

Během následujících několika set let byly použity funkcionální rovnice, ale nevznikla obecná teorie takových rovnic. Pozoruhodný mezi takovými matematiky byl Gregory of Saint-Vincent (1584-1667), jehož práce na hyperbole (obr. 3) implicitně využila funkcionální rovnici

$$f(xy) = f(x) + f(y),$$

a propagovala teorii logaritmu (Small, 2007, s. 4).



Obr. 3: Gregory of Saint-Vincent a jeho teorie logaritmu (Small, 2007, s. 5)

2.2.2 Augustin-Louis Cauchy

Ačkoli N. Oresmeova definice linearity může být interpretována jako časný příklad funkcionální rovnice, nepředstavuje výchozí bod pro teorii funkcionálních rovnic. Téma funkcionálních rovnic je přesněji datováno z práce A. L. Cauchyho (Small, 2007, s. 6).

Funkcionální rovnicí obzvláště spojovanou s Cauchym je

$$f(x+y) = f(x) + f(y),$$

pro všechna reálná x a y, a je nazývána jako tzv. *Cauchyho rovnice*. Tato rovnice je splněna jakoukoliv funkcí ve formě

$$f(x) = ax,$$

kde konstanta a je libovolným reálným číslem. Substitucí $y = c$ a diferenciací vzhledem k x dostaneme

$$f'(x+c) = f'(x)$$

pro všechna reálná c.

Z toho vyplývá, že f' je konstantní funkce a proto, je f lineární funkcí typu

$$f(x) = ax + b.$$

Substitucí zpátky do Cauchyho rovnice určíme, že $b = 0$ (Small, 2007, s. 8-9).

2.2.3 Jean d‘Alembert

Při zkoumání jistých problémů z mechaniky dospěl francouzský matematik d’Alembert k funkcionální rovnici

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y).$$

Budeme hledat jen taková řešení *f(x)*, jež jsou definována a spojitá pro všechna *x*, a navíc splňují podmínku $|f(x)| \leq 1$. Jedním takovým řešením je zřejmě konstantní nulová funkce. Pokud spojitá funkce *f(x)* vyhovuje daným podmínkám, je nutně tvaru

$$f(x) = \cos Ax,$$

kde *A* je libovolné reálné číslo (Davidov, 1984, s. 81-84).

Jak uvádí (Pešková 2012), Cauchy doplnil d´Alambertovu rovnici o jedno řešení a představil tak kompletní sadu spojitých řešení této rovnice

$$f(x) = \begin{cases} 0 \\ \cos ax \\ \frac{(b^x + b^{-x})}{2}, \ b > 0 \end{cases}.$$

Další obecné metody řešení funkcionálních rovnice pomocí pouze velmi obecných algebraických struktur předvedl Krapež. Nicméně tématikou funkcionálních rovnic se zabývali další velikáni matematické vědy, zejména tedy matematické analýzy, jako jsou Euler, Gauss, Weierstrass, Babbage apod. V současné době patří mezi největší teoretiky v oblasti funkcionálních rovnic maďarsko-kanadský matematik János Aczél (Pešková, 2012).

3 Vybrané metody řešení

V této kapitole si uvedeme pár jednoduchých metod, na které by žák 2. stupně ZŠ měl svými matematickými schopnostmi stačit. Čekají nás celkem čtyři metody, z toho si pouze tři předvedeme na příkladech, které budou doplněné pro lepší vysvětlení komentářem a řešení ilustrujeme grafy.

Vzhledem k tomu, že neexistuje žádná univerzální metoda pro řešení funkcionálních rovnic, je třeba při jejich řešení postupovat případ od případu (Calábek, Švrček, 2000/2001, s. 130).

3.1 Cauchyho metoda

Cauchyho metoda tkví – řečeno co nejobecněji – v tom, že se nejprve určí řešení uvažované funkcionální rovnice, které je definováno na nějaké husté množině reálných čísel. Poté se využije spojitosti tohoto řešení a definuje se pro libovolná reálná čísla.

Obvykle se řešení hledá nejprve na množině všech racionálních čísel. Za tímto účelem se často postupuje podle následujícího schématu:

1. Nějaký vhodným postupem (například substituční metodou) se určí řešení *f(x)* dané funkcionální rovnice na množině všech přirozených čísel.
2. Dokáže se, že takto nalezené řešení vyhovuje rovnici také
   a) pro $x = 0$,
   b) pro všechny celé záporné hodnoty proměnné *x*,
   c) pro všechny racionální hodnoty proměnné *x*.
3. Využije se hustoty množiny racionálních čísel a spojitosti funkce *f(x)*; tím bude zaručeno, že takto určené řešení vyhovuje rovnici pro libovolné reálné hodnoty *x*.

Takto formulovaná Cauchyho metoda je vhodná pouze pro takové funkcionální rovnice, jejichž řešení je definováno a spojité na celé číselné ose (Davidov, 1984, s. 44-45).

Tato metoda mi nepřijde úměrná schopnostem žákům základní školy, proto si ji nebudeme nijak ilustrovat na příkladech. Přesto mi však přišlo vhodné na ní alespoň poukázat, jelikož se jedná o jednu z nejznámějších metod, co se funkcionálních rovnic týče.

3.2 Substituční metoda

Můžeme ji znát pod triviálním názvem jako tzv. *metoda specifikace proměnných*.

Substituční metoda řešení funkcionálních rovnic spočívá – řečeno co „nejobecněji“ – v následujícím postupu: Předpokládáme, že daná funkcionální rovnice už nějaké řešení má, a vhodnými záměnami proměnných a dosazováním konkrétních hodnot se snažíme najít explicitní tvar tohoto řešení. Poté ověříme, zda takto získaná funkce dané funkcionální rovnici také skutečně vyhovuje (Davidov, 1984, s. 7).

Specifikujeme-li některé proměnné, tj. dosadíme-li speciální hodnoty v argumentech proměnné dané funkcionální rovnice, „rozšíříme“ množinu možných řešení. Specifikace proměnných má charakter důsledkové úpravy a při jejím použití je proto zkouška součástí řešení. Dále pak zpravidla najdeme hodnotu funkce v některém bodě definičního oboru a pomocí ní následně určíme vlastnosti a tvar hledané funkce. Pomocí těchto kroků pak určíme další potřebné hodnoty a specifické vlastnosti hledané funkce (Calábek, Švrček, 2013, s. 323-324).

Je zřejmé, že specifikovat při řešení funkcionální rovnice můžeme i několik proměnných (parametrů) současně. Funkcionální rovnice často obsahují jako proměnnou v hledané funkci výraz, který obsahuje několik pomocných proměnných (parametrů), pomocí nichž je hodnota proměnné vytvořena. Cílem specifikace proměnných je snížení jejich počtu. Uvedená metoda je přitom základem celé řady dalších metod, které lze efektivně využít při řešení funkcionálních rovnic (Calábek, Švrček, 2013, s.324).

Příklad 3: Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro libovolné $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$f(x) + f(y) = x + y.$$

Řešení: Specifikací proměnných $x = 0$ a $y = 0$ dostaneme rovnici

$$f(0) + f(0) = 0,$$

ze které po úpravě vychází, že

$$f(0) = 0.$$

Vracíme se do původní rovnice a opět využijeme specifikaci proměnných (substituci) $y = 0$ a získáme

$$f(x) + f(0) = x + 0.$$

Už víme, že $f(0) = 0$. Řešením této rovnice je tedy $\boldsymbol{f(x) = x}$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Abychom si ověřili správnost řešení, provedeme zkoušku.

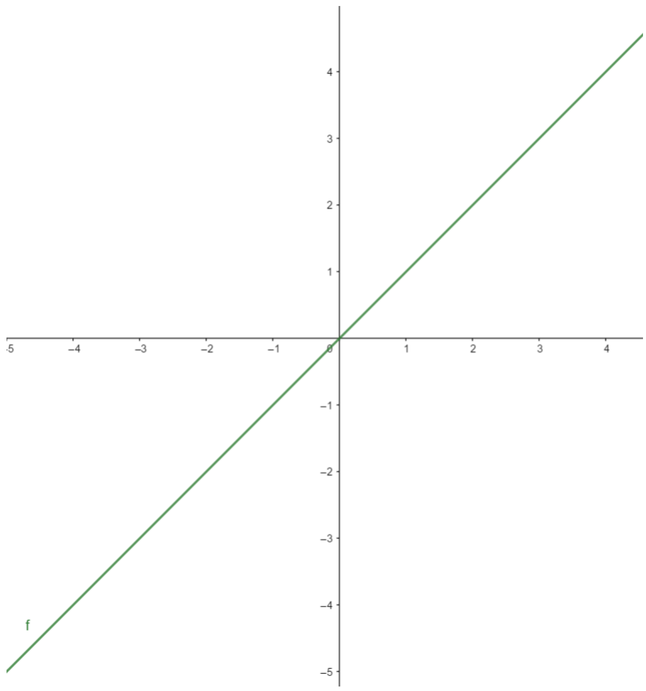
Zkouška:

$$L = x + y$$

$$P = x + y$$

$$\boldsymbol{L = P}$$

Levá strana se rovná pravé, tedy řešením dané funkcionální rovnice je skutečně nalezená funkce $f(x) = x$ (obr. 4).



Obr. 4: Řešení f(x)=x (program Geogebra)

V publikaci (Calábek, Švrček, 2013, s. 325) jsem nalezla chybu ve výpočtech u čtvrtého příkladu. Myslím, že není na škodu zde chybu opravit.

Příklad 4: Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$f(x+y) - 2f(x-y) + f(x) - 2f(y) = y - 2.$$

Řešení: Speciální volbou (specifikací proměnných) $x = 0$ a $y = 0$ dostaneme $-2f(0) = -2$, tedy $f(0) = 1$. Tímto dosazením jsme zjistili, že pro každou funkci f, která je řešením dané funkcionální rovnice, platí $f(0) = 1$.

Opět využijeme metodu specifikace proměnných tak, že v dané funkcionální rovnici položíme $x = 0$. Dostaneme tak

$$f(y) - 2f(-y) + f(0) - 2f(y) = y - 2,$$

což po úpravě dává

$$f(y) + 2f(-y) = y - 3$$

(Calábek, Švrček, 2013, s. 325).

A to je právě ta chyba. Po úpravě je totiž rovnice

$$f(y) + 2f(-y) = 3 - y.$$

Dále už mají příklad v pořádku a výsledek sedí. Jedná se o nepatrnou početní chybu, která může vzniknout z nepozornosti nebo z únavy, tedy nic, co by se i nám ostatním smrtelníkům nemohlo stát.

Zde si příklad dopočítáme. Výše uvedený vztah platí pro všechna reálná čísla y, pak tedy $y = y$ a $y = -y$.

$$f(y) + 2f(-y) = 3 - y$$

$$f(-y) + 2f(y) = 3 + y$$

Na výše uvedené rovnice pohlížíme jako na soustavu dvou lineárních rovnic a řešením je

$$f(y) = y + 1.$$

3.3 Symetrie proměnných

Při řešení funkcionálních rovnic lze poměrně často efektivně využít také symetrie některých dvou proměnných, a to právě v jedné ze stran zadané rovnice (nebo některé její části). V podobných úlohách je potřeba mnohdy předpokládat (nebo dokázat), že hledaná funkce je na daném definičním oboru prostá (Calábek, Švrček, 2013, s. 326).

Co znamená, když řekneme, že je funkce prostá, jsme si už vysvětlili v první kapitole. Nicméně zkráceně zopakujeme.

Řekneme, že funkce *f* je na daném definičním oboru *D* prostá, právě když platí:

Pokud pro určitá $x, y \in D$ je splněna rovnost $f(x) = f(y)$, pak $x = y$ (Calábek, Švrček, 2013, s. 326).

Příklad 5: Určete všechny funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro libovolné $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$f(x) + 1 = f(xy) + 1.$$

Řešení: Vidíme, že pokud na pravé straně prohodím *x* a *y*, nedojde k žádné změně. Pravá strana je tedy symetrická k oběma proměnným *x* a *y*. Musí být rovna i levá strana rovnice takové změně. Tudíž platí

$$f(x) + 1 = f(y) + 1$$

pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$.

Abychom určili funkční hodnotu v bodě $x = 0$ definičního oboru hledané funkce, položíme $f(0) = c$, kde $c \in \mathbb{R}$. Můžeme využít substituci $y = 0$ a dostaneme

$$f(x) + 1 = f(0) + 1.$$

Jasně vyplývá, že výsledkem je $\boldsymbol{f(x) = c}$, kde *c* je reálný parametr, ale je tomu skutečně tak? O tom se přesvědčíme zkouškou. Dosazujeme do úplně původní rovnice.

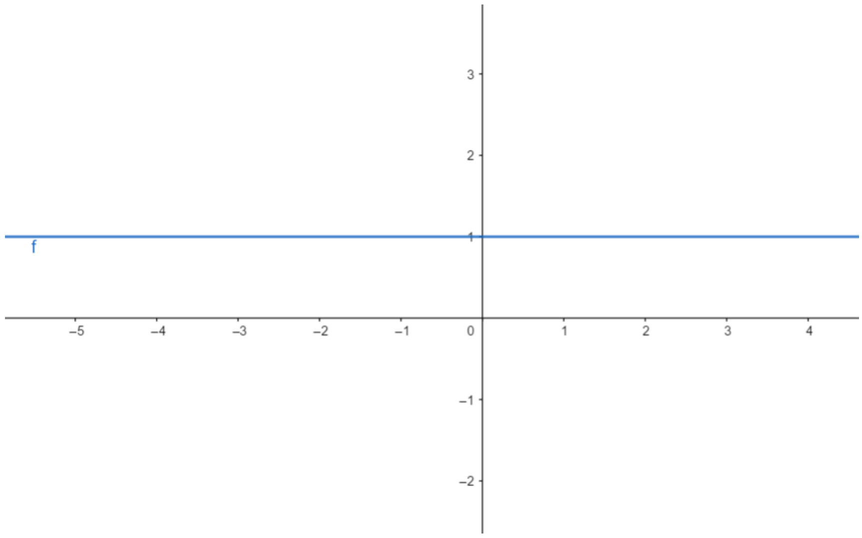
Zkouška:

$$L = f(x) + 1 = c + 1$$

$$P = f(xy) + 1 = c + 1$$

$$\boldsymbol{L = P}$$

Řešením zadané funkcionální rovnice je jakákoliv konstantní funkce, tedy $f(x) = c$, kde $c \in \mathbb{R}$. Jedná se o rovnoběžku s *osou x*, na obrázku se $c = 1$ (obr. 5).



Obr. 5: Jedno z řešeních f(x)=1 (program Geogebra)

Opět jsem v publikaci (Calábek, Švrček, 2013, s. 328) objevila chybu, která se tentokrát týká právě symetrii proměnných, a to v příkladu devět. Jelikož se jedná o procvičovací příklady, je zde uvedeno pouze zadání a výsledek. Ten je bohužel uveden špatně. Takže si celý příklad spočítáme.

Příklad 6: Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro libovolné $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$f(x) + y = f\big(f(x) + f(y)\big) - 1.$$

Řešení: Využijeme zde symetrii proměnných. Vidíme, že na pravé straně se nám nic nezmění, pokud prohodíme x za y a naopak. Pro levou stranu tedy platí

$$f(x) + y = f(y) + x.$$

Položíme $f(0) = c$, kde $c \in \mathbb{R}$. Použijeme substituci $y = 0$ a získáme

$$f(x) = x + c,$$

kde $c \in \mathbb{R}$.

Následně provedeme zkoušku, kde se autoři zřejmě dopustili chyby, jelikož jako výsledek uvedli $f(x) = x + 1$. Nezapomeňme, že zkoušku provádíme s původní rovnicí ze zadání.

Zkouška:

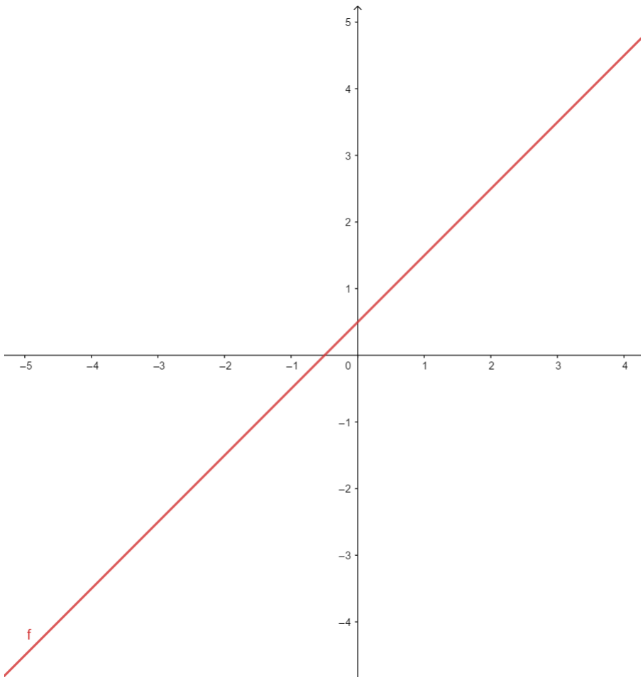
$$L = f(x) + y = x + c + y$$

$$P = f\big(f(x) + f(y)\big) - 1 = f(x + c + y + c) - 1 = x + y + 3c - 1$$

$$x + y + c = x + y + 3c - 1$$

$$c = \frac{1}{2}.$$

Jediné možné řešení je $\boldsymbol{f(x) = x + \frac{1}{2}}$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$ (obr. 6).



Obr. 6: Řešení f(x)=x+$\frac{1}{2}$ *(program Geogebra)*

3.4 Ekvivalentní úpravy

Na závěr této kapitoly tu máme metodu, která nám je známá z první kapitoly. Jedná se o pouhé ekvivalentní úpravy jako přesouvání z jedné strany rovnice na druhou, dělení, případě násobení atd. Málokterých funkcionálních rovnic jsou však stavěny takovým způsobem, aby se daly tak snadno vypočítat.

Příklad 7: Nalezněte všechny funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro libovolné $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$f(x) + f(y) + 1 = x + f(y) + 2.$$

Řešení: $f(y)$ se mi po obou stranách odečte, jedničku odečtu od dvojky a mám výsledek

$$\boldsymbol{f(x) = x + 1}$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

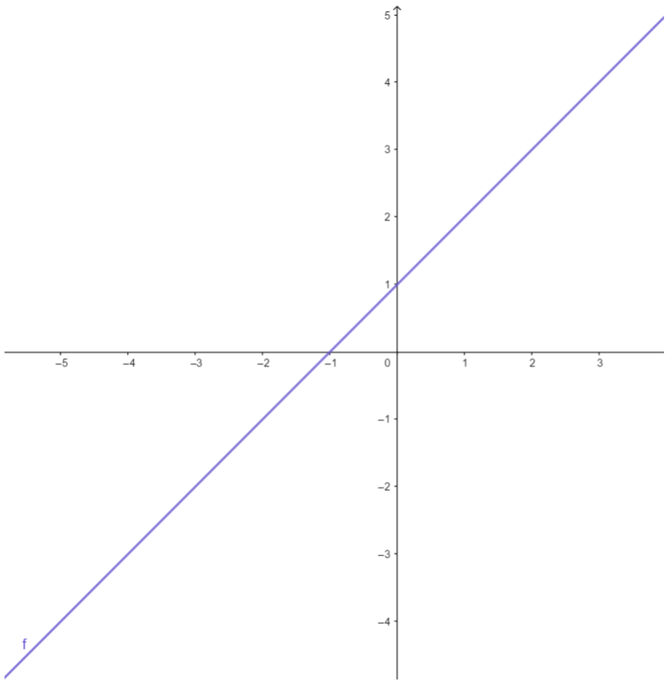
Zkouška:

$$L = f(x) + f(y) + 1 = x + 1 + y + 1 + 1 = x + y + 3$$

$$P = x + f(y) + 2 = x + y + 1 + 2 = x + y + 3$$

$$\boldsymbol{L = P}$$

Daná funkcionální rovnice má řešení $f(x) = x + 1$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$ (obr. 7).



Obr. 7: Řešení f(x)=x+1 (program Geogebra)

Abychom pořád nebyli jen u konstantních nebo lineárních funkcí, zkusíme něco těžšího.

Příklad 8: Uveďte všechny funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro libovolné $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$\frac{f(x)}{2} + y = x^2 + y.$$

Řešení: Argument y se mi opět po obou stranách odečte. Rovnici vynásobím dvojkou a mám řešení

$$\boldsymbol{f(x) = 2x^2}$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

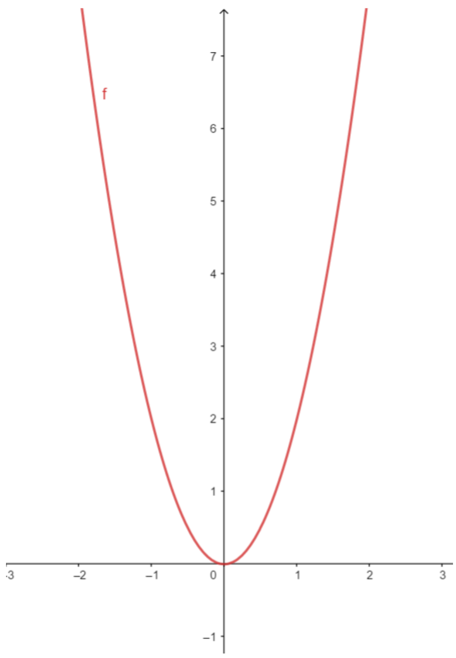
Zkouška:

$$L = \frac{f(x)}{2} + y = \frac{2x^2}{2} + y = x^2 + y$$

$$P = x^2 + y$$

$$\boldsymbol{L = P}$$

Řešením rovnice je funkce $f(x) = 2x^2$pro všechna $x \in \mathbb{R}$ (obr. 8).



Obr. 8: Řešení f(x)=2x^2 (program Geogebra)

4 Zadané podmínky funkcionální rovnice

Při vlastním řešení funkcionálních rovnic je nutno důsledně respektovat zadané podmínky, neboť jakákoliv (byť na první pohled velmi malá) změna např. v popisu rovnice nebo v zadání definičního oboru, popř. oboru hodnot hledané funkce, vede k překvapivým změnám v systému řešení zadané funkcionální rovnice (Calábek, Švrček, 2013, s. 322).

Přesněji, jakékoliv zúžení definičního oboru hledané funkce vede vždy k „rozšíření" systému řešení dané funkcionální rovnice. Zúžení oboru hodnot hledané funkce může vést ve smyslu inkluze ke „zmenšení" množiny řešení dané funkcionální rovnice (Calábek, Švrček, 2013, s. 323).

4.1 Podmínky pro hledanou funkci

Příklad 9: Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ takové, že pro libovolné $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$3f(xy) = f(x) + f(y).$$

Řešení: Symbolem $\mathbb{R}^+$rozumíme množinu kladných reálných čísel, bez nuly. Pomocí substituce $y = 0$ a $x = 0$ dostaneme

$$3f(0) = f(0) + f(0)$$

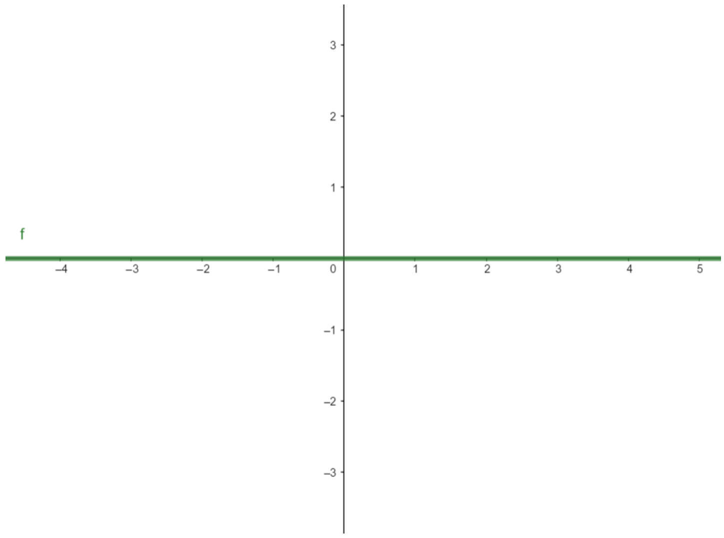
$$f(0) = 0.$$

Vracíme se do původní rovnice a užijeme specifikaci proměnné $y = 0$, potom

$$3f(x \cdot 0) = f(x) + f(0)$$

$$f(x) = 0.$$

Naše řešení ovšem nesplňuje danou podmínku, funkcionální rovnice tedy nemá řešení. Kdybychom však nechali obor hodnot jako množinu všech reálných čísel nebo alespoň jako množinu všech nezáporných reálných čísel ($\mathbb{R}_0^+$), pak by tento výsledek rovnici vyhovoval (obr. 9), a dokonce by nám vyšla i zkouška.



Obr. 9: Řešení f(x)=0 (program Geogebra)

4.2 Změny koeficientů v zadání

Příklad 10: Nalezněte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro libovolné $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$f(x+y) + f(x) - f(y) = 2x^2 + 2xy.$$

Řešení: Využiju substituci $y = 0,\ x = 0$ a získám

$$f(0) + f(0) - f(0) = 0$$

$$f(0) = 0.$$

V původním zadání provedu opět substituci ovšem už jen $y = 0$ a dostávám výsledek

$$f(x) + f(x) = 2x^2$$

$$\boldsymbol{f(x) = x^2}$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Zkouškou si ověřím správnost řešení.

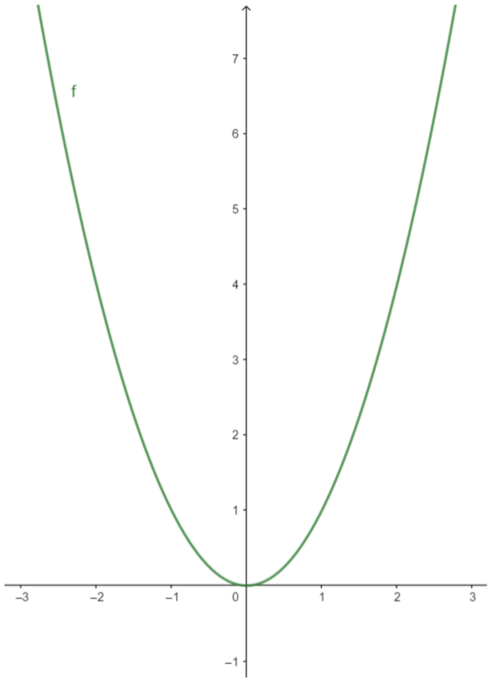
Zkouška:

$$L = f(x+y) + f(x) - f(y) = (x+y)^2 + x^2 - y^2 = 2x^2 + 2xy$$

$$P = 2x^2 + 2xy$$

$$\boldsymbol{L = P}$$

Řešením dané funkcionální rovnice je funkce kvadratická $f(x) = x^2$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$ (obr. 10).



Obr. 10: Řešení f(x)= x^2 *(program Geogebra)*

Teď si předvedeme, že to není jenom o podmínkách, ale i o zadání příkladu. Použijeme stejný příklad, akorát ho trochu změníme. Pouze před $f(x + y)$ dáme dvojku a uvidíme, co se stane.

Příklad 11: Nalezněte všechny funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro libovolné $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$2f(x + y) + f(x) - f(y) = 2x^2 + 2xy.$$

Řešení: Použiju substituci $y = 0,\ x = 0$ a dostanu

$$2f(0) + f(0) - f(0) = 0$$

$$f(0) = 0.$$

Vracím se do původního zadání a provedu opět substituci jen $y = 0$ a mám výsledek

$$2f(x) + f(x) = 2x^2$$

$$f(x) = \frac{2x^2}{3}.$$

Výsledek nevypadá špatně, ale je skutečně správný? O tom se přesvědčíme zkouškou.

Zkouška:

$$L = 2f(x+y) + f(x) - f(y) = 2(x+y)^2 + x^2 - y^2 = 3x^2 + 4xy + y^2$$

$$P = 2x^2 + 2xy$$

$$\boldsymbol{L \neq P}$$

Levá strana rovnice se nerovná té pravé, tedy daná funkcionální rovnice nemá řešení.

Zde jasně vidíme, že výsledek může vypadat jak pěkně, tak vábně, ale nemusí být vždy správný. Právě z toho důvodu provádíme zkoušky, které nám mnohdy přijdou zbytečné, ale věřte, že nejsou.

5 Vytváření vlastních úloh

Tato kapitola vysvětluje, jak se takové úlohy tvoří. Jedná se o takové zkoušení a hraní „co by, kdyby“. Kapitola je především přínosná pro učitele matematiky, ale věřím, že i studentům může pomoci si ucelit znalosti o funkcionálních rovnicích, a ještě lépe je pochopit. Zároveň se žáci naučí odhadnout, jakou metodu zvolit a předvídat výslednou funkci.

Vždycky ze začátku, než vůbec začnu s celým tím procesem, tak si rozmyslím, jak chci, aby výsledná hledaná funkce vypadala a podle toho se to všechno odvíjí. Všechny příklady budou řešené v množině reálných čísel, takže prvotní podmínky úplně vypustím.

5.1 Funkce $\boldsymbol{f(x) = 0}$

Asi neexistuje jednodušší funkce. Začnu tím, že v předpisu budu mít pouze neznámé funkce, nechci zde žádné osamocené proměnné. Daleko lépe se mi řeší funkcionální rovnice dvou proměnných, ale tato hledaná funkce je natolik triviální, že můžeme vytvořit i příklad funkcionální rovnice jedné proměnné.

Příklad 12:

$$f(x) - 2f(x) = f^2(x)$$

Pokaždé musím mít argument $f(x)$. Je to ta má hledaná funkce, kterou z rovnice musím „vysekat“. Aby to nebylo příliš banální, použila jsem $f^2(x)$.

Řešení:

Teď si všechny neznámé převedu na levou stranu a rovnici pro usnadnění vydělím -1.

$$-f(x) - f^2(x) = 0$$

$$f(x) + f^2(x) = 0$$

Z rovnice vytknu $f(x)$ a dostanu

$$f(x) \cdot \big(1 + f(x)\big) = 0.$$

Danému zadání odpovídají dvě funkce, a to $\boldsymbol{f(x) = 0}$ a $\boldsymbol{f(x) = -1}$. Teď už jen záleží, jestli nám s oběma vyjde zkouška.

Zkouška:

1. $f(x) = 0$

$$L = f(x) - 2f(x) = 0$$

$$P = f^2(x) = 0$$

$$\boldsymbol{L = P}$$

2. $f(x) = -1$

$$L = f(x) - 2f(x) = -1 + 2 = 1$$

$$P = f^2(x) = 1$$

$$\boldsymbol{L = P}$$

V obou případech nám vyšla zkouška, takže řešením dané rovnice jsou obě funkce. Jak vypadá graf funkce $f(x) = 0$, víme (obr. 9). Co se týče funkce $f(x) = -1$, tak ta vypadá obdobně, až na to, že je posunuta o jedničku po *ose y* směrem dolů.

Pokud bychom vyloženě chtěli pouze funkci $f(x) = 0$, tak můžeme upravit podmínky, tím myslím obor hodnot omezit na množinu nezáporných reálných čísel ($\mathbb{R}_0^+$), jejíž součástí je nula, ale už ne -1. Tím pádem by rovnice měla jen jedno řešení.

A teď si můžu hrát s koeficienty, takže před každý argument vložím (pro mě zatím neznámý) koeficient. Rovnice dostane formu

$$a \cdot f(x) + b \cdot f(x) = c \cdot f^2(x).$$

Počítám jako běžnou funkcionální rovnici.

$$(a + b) \cdot f(x) - c \cdot f^2(x) = 0$$

$$f(x) \cdot ((a + b) - c \cdot f(x)) = 0$$

Opět dostanu dva výsledky. První funkce je $\boldsymbol{f(x) = 0}$ a druhá je $\boldsymbol{f(x) = \frac{(a+b)}{c}}$, přičemž koeficienty a, b a $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$.

Zde vidíme, že pokaždé získám funkci $f(x) = 0$. Druhá funkce však závisí na každém z koeficientů. Ještě ale nemáme vyhráno, čeká nás zkouška.

Zkouška:

$$L = a \cdot f(x) + b \cdot f(x) = (a+b) \cdot \frac{(a+b)}{c}$$

$$P = c \cdot f^2(x) = \frac{(a+b)^2}{c}$$

$$\boldsymbol{L = P}$$

a, b a $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$.

V našem prvním případě jsme zvolili koeficienty takto: $a = 1$, $b = -2$ a $c = 1$. Následující příklad obsahuje $a = 2$, $b = 1$ a $c = 3$. Podle obecné verze by druhá funkce měla znít $f(x) = 1$.

Příklad 13:

$$2f(x) + f(x) = 3f^2(x)$$

Řešení:

$$f(x) - f^2(x) = 0$$

$$f(x) \cdot \big(1 - f(x)\big) = 0$$

Podle výpočtů nám to zatím vychází a nyní zkusíme provést s řešením $\boldsymbol{f(x) = 1}$ zkoušku.

Zkouška:

$$L = 2f(x) + f(x) = 3$$

$$P = 3f^2(x) = 3$$

$$\boldsymbol{L = P}$$

Zkouška nám potvrdila, že i tímto způsobem můžeme měnit zadání příkladu a výsledek bude vycházet.

5.2 Lineární funkce

V takovém případě už potřebujeme „osamocené“ argumenty x. Můžeme si vybrat třeba funkci $f(x) = x + 1$. Potřebujeme rozhodně $f(x)$, x a jedničku. Zbytek už jsou jen takové doplňky, které by nám mohly, třeba pomocí substituce, vypadnout.

Příklad 14:

$$2f(xy) + f(x) = x + 2f(y) + 1$$

Před $f(xy)$ jsem si zvolila dvojku, ale mohl by to být jakýkoliv jiný koeficient, stejně tak jsem ho použila i před $f(y)$, jelikož dopředu vím, že budu používat metodu substituce. Ovšem už teď vidím úskalí u zkoušky.

Řešení:

Jak už jsem napověděla, využiju specifikaci proměnných $x = 0$ a $y = 0$.

$$2f(0) + f(0) = 2f(0) + 1$$

$$f(0) = 1$$

Vracím se do původní rovnice pouze se substitucí $y = 0$.

$$2f(0) + f(x) = x + 2f(0) + 1$$

$$f(x) = x + 1$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

A dostávám vysněný výsledek $f(x) = x + 1$ (obr. 7). Podíváme se na zkoušku, u které cítím komplikace.

Zkouška:

$$L = 2f(xy) + f(x) = 2 \cdot (xy + 1) + x + 1 = 2xy + x + 3$$

$$P = x + 2f(y) + 1 = x + 2y + 3$$

$$\boldsymbol{L \neq P}$$

Jak jsem očekávala, jsou tu komplikace. Zadaná rovnice tedy nemá řešení, ale pojďme se na to podívat jiným pohledem a položme si otázku, jak bychom měli zadání upravit, aby nám zkouška vyšla?

Jednoduše vidíme, že $x + 3$ obsahuje jak levá strana, tak i ta pravá. Na levé straně mám $2xy$ a na pravé pouze $2y$, které když vynásobím x, tak mi zkouška vyjde. Mohla bych toho docílit tím způsobem, že bych upravila pravou stranu původního zadání. Nová funkcionální rovnice by měla formu

$$2f(xy) + f(x) = x + 2f(xy) + 1.$$

To bych ovšem vůbec nemusela počítat rovnici substituční metodou a hned ze začátku bych odečetla na obou stranách $2f(xy)$ a měla bych výsledek.

Opět vyzkouším před každý argument vložit neznámý koeficient a vypočítám obecnou rovnici původního zadání.

$$a \cdot f(xy) + b \cdot f(x) = c \cdot x + d \cdot f(y) + e$$

$$a \cdot f(0) + b \cdot f(0) = d \cdot f(0) + e$$

$$(a + b - d) \cdot f(0) = e$$

Zde vidíme, že máme opět dvě možnosti výpočtu.

1. $(a + b - d) = 0$ tj. $(d = a + b)$, tedy $e = 0$ a $f(0)$ může být cokoliv
2. $(a + b - d) \neq 0$, pak $f(0) = \frac{e}{(a+b-d)}$

Nejprve vypočítáme první možnost. Vracím se do původní rovnice se substitucí $y = 0$.

$$a \cdot f(0) + b \cdot f(x) = c \cdot x + (a + b) \cdot f(0) + 0$$

$$b \cdot f(x) = c \cdot x + (a + b) \cdot f(0) - a \cdot f(0)$$

Pokud $b = 0$, pak

$$c \cdot x = 0.$$

Za těchto podmínek rovnice nemá řešení. Chci, aby platilo pro všechna $x \in \mathbb{R} \Rightarrow c = 0$.

Jestliže $b \neq 0$, potom

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{c \cdot x + (a+b) \cdot f(0) - a \cdot f(0)}{b}}.$$

Provedeme zkoušku za podmínek $d = a + b$, tedy $e = 0$ a $b \neq 0$.

$$a \cdot \frac{c \cdot xy + (a+b) \cdot f(0) - a \cdot f(0)}{b} + b \cdot \frac{c \cdot x + (a+b) \cdot f(0) - a \cdot f(0)}{b} =$$

$$= c \cdot x + (a+b) \cdot \frac{c \cdot y + (a+b) \cdot f(0) - a \cdot f(0)}{b}$$

$$a \cdot \big(c \cdot xy + (a+b) \cdot f(0) - a \cdot f(0)\big) + b \cdot \big(c \cdot x + (a+b) \cdot f(0) - a \cdot f(0)\big) =$$
$$= bc \cdot x + (a+b) \cdot (c \cdot y + (a+b) \cdot f(0) - a \cdot f(0))$$

$$ac \cdot xy + ab \cdot f(0) + bc \cdot x + b^2 \cdot f(0) = bc \cdot x + (a+b) \cdot \big(c \cdot y + b \cdot f(0)\big)$$

$$ac \cdot xy = ac \cdot y + bc \cdot y$$

Pokud $c = 0$, pak by zkouška vyšla a řešením rovnice by byla funkce $f(x) = f(0)$.

Jestliže ale $c \neq 0$, potom

$$a \cdot x = a + b.$$

Ze zkoušky vidíme, že $a \neq 0$. Pokud by tomu tak nebylo, pak by neplatilo $b \neq 0$. Tento výsledek nám nevyhovuje, protože chci, aby platilo pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Ještě nás ale čeká výpočet druhé možnosti řešení za podmínek $(a + b - d) \neq 0$, pak $f(0) = \frac{e}{(a+b-d)}$.

Výpočet je podobný jako v předchozí možnosti s tím, že výsledkem je

$$a \cdot \frac{e}{(a+b-d)} + b \cdot f(x) = c \cdot x + d \cdot \frac{e}{(a+b-d)} + e$$

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{c \cdot x + d \cdot \frac{e}{(a+b-d)} + e - a \cdot \frac{e}{(a+b-d)}}{b}},$$

přičemž koeficienty a, b, c, d a $e \in \mathbb{R}$, rovněž jako $x \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, $a + b \neq d$.

Zkouška:

$$a \cdot \frac{c \cdot xy + d \cdot \frac{e}{(a+b-d)} + e - a \cdot \frac{e}{(a+b-d)}}{b} +$$

$$+b \cdot \frac{c \cdot x + d \cdot \frac{e}{(a+b-d)} + e - a \cdot \frac{e}{(a+b-d)}}{b} =$$

$$= c \cdot x + d \cdot \frac{c \cdot y + d \cdot \frac{e}{(a+b-d)} + e - a \cdot \frac{e}{(a+b-d)}}{b} + e$$

$$a \cdot \left(c \cdot xy + d \cdot \frac{e}{(a+b-d)} + e - a \cdot \frac{e}{(a+b-d)}\right) +$$

$$+b \cdot \left(c \cdot x + d \cdot \frac{e}{(a+b-d)} + e - a \cdot \frac{e}{(a+b-d)}\right) =$$

$$= bc \cdot x + d \cdot \left(c \cdot y + d \cdot \frac{e}{(a+b-d)} + e - a \cdot \frac{e}{(a+b-d)}\right) + be$$

$$ac \cdot xy + 2 \cdot ad \cdot \frac{e}{(a+b-d)} + ae - a^2 \cdot \frac{e}{(a+b-d)} + bd \cdot \frac{e}{(a+b-d)} -$$

$$-ab \cdot \frac{e}{(a+b-d)} = cd \cdot y + d^2 \cdot \frac{e}{(a+b-d)} + de$$

$$ac \cdot (a+b-d) \cdot xy + 2 \cdot ade + ae \cdot (a+b-d) - a^2e + bde -$$

$$-abe = (a+b-d) \cdot cd \cdot y + d^2e + (a+b-d) \cdot de$$

$$a^2c \cdot xy + abc \cdot xy - acd \cdot xy + 2 \cdot ade + a^2e + abe - ade - a^2e + bde -$$

$$-abe = acd \cdot y + bcd \cdot y - cd^2 \cdot y + d^2e + ade + bde - d^2e$$

$$a^2c \cdot x + abc \cdot x - acd \cdot x = acd + bcd - cd^2$$

Pokud $c = 0$, pak je výsledkem rovnice

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{d}{a+b-d}},$$

přičemž $a, e \in \mathbb{R}, c = 0, b \neq 0, a + b \neq d$.

Jestliže $c \neq 0$, potom

$$a^2 \cdot x + ab \cdot x - ad \cdot x = ad + bd - d^2$$

$$ax \cdot (a + b - d) = d \cdot (a + b - d)$$

$$a \cdot x = d.$$

Pokavaď $a = 0 \Longrightarrow d = 0$ a výsledkem je funkce

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{c \cdot x + e}{b}},$$

za podmínek $a = 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, $d = 0$, $e \in \mathbb{R}$.

Pokud je ale $a \neq 0$, pak, aby vyšla zkouška, musí platit $x = \frac{d}{a}$, což opět nechci.

Příklad 15: Určete všechny funkce $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro libovolné $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$2f(x) + f(y) = 2x + y.$$

Rovnici předvedeme v obecném tvaru a to tak, že před každou proměnnou doplníme neznámý koeficient. Rovnice bude mít tvar

$$a \cdot f(x) + b \cdot f(y) = c \cdot x + d \cdot y + e.$$

Použijeme substituci $x = 0, y = 0$

$$a \cdot f(0) + b \cdot f(0) = e$$

$$(a + b) \cdot f(0) = e.$$

V této fázi máme dvě možnosti.

1. $(a + b) = 0$, pak tedy $e = 0$ a $f(0)$ může být jakékoliv ($f(0) \in \mathbb{R}$).
2. $(a + b) \neq 0$, $f(0) = \frac{e}{a+b}$.

Nejprve najdeme výsledek pro první možnost. Položím substituci $y = 0$.

$$a \cdot f(x) + b \cdot f(0) = c \cdot x + e$$

$$a \cdot f(x) = c \cdot x - b \cdot f(0) + e$$

Pokud by $a = 0$, nezapomínejme, že $(a + b) = 0$ a $e = 0$, pak by $b = 0$ a rovnice by se upravila na tvar

$$c \cdot x = 0.$$

Tato cesta tedy nikam nevede. Řešením funkcionální rovnice má být funkce, což v tomto případě není. Za těchto podmínek rovnice nemá řešení.

Jestliže $a \neq 0$, můžeme jím vydělit rovnici a výsledkem je

$$f(x) = \frac{c \cdot x + e - b \cdot f(0)}{a}.$$

Využijeme podmínky $(a + b) = 0$ a $e = 0$, tedy $b = -a$ a výsledek upravíme na tvar

$$f(x) = \frac{c \cdot x + a \cdot f(0)}{a}$$

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{c \cdot x}{a} + f(0)}.$$

S tímto výsledkem provedeme zkoušku.

Zkouška:

$$L = a \cdot f(x) + b \cdot f(y) = c \cdot x + a \cdot f(0) + b \cdot \left(\frac{c \cdot y}{a} + f(0)\right)$$

$b = -a$

$$L = c \cdot x + a \cdot f(0) - c \cdot y - a \cdot f(0) = c \cdot x - c \cdot y$$

$$P = c \cdot x + d \cdot y + e$$

$e = 0$

$$P = c \cdot x + d \cdot y$$

Teď obě strany spojíme dohromady. Levá strana se rovná té pravé právě když,

$$c \cdot x - c \cdot y = c \cdot x + d \cdot y$$

$$-c = d.$$

Prvním výsledkem rovnice

$$a \cdot f(x) + b \cdot f(y) = c \cdot x + d \cdot y + e$$

je

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{c \cdot x}{a} + f(0)},$$

přičemž $(a + b) = 0 \Rightarrow b = -a$, $e = 0$ a $f(0) \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ a $-c = d$.

Ještě nás ale čeká druhá možnost, a to za těchto podmínek $(a + b) \neq 0$, $f(0) = \frac{e}{a+b}$. Postup výpočtu je analogický s postupem výše uvedeným, akorát do výsledku dosadíme naše hodnoty

$$a \cdot f(x) = c \cdot x - b \cdot f(0) + e$$

$$a \cdot f(x) = c \cdot x - b \cdot \frac{e}{a + b} + e$$

Pokud by $a = 0$, pak

$$0 = c \cdot x - b \cdot \frac{e}{b} + e$$

$$0 = c \cdot x$$

Jenže toto řešení nám nevyhovuje.

Pokud $a \neq 0$, pak

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{c \cdot x + e - b \cdot \frac{e}{a + b}}{a}}.$$

S tímto výsledkem provedeme zkoušku.

Zkouška:

$$a \cdot \frac{c \cdot x + e - b \cdot \frac{e}{a + b}}{a} + b \cdot \frac{c \cdot y + e - b \cdot \frac{e}{a + b}}{a} = c \cdot x + d \cdot y + e$$

$$a \cdot \left(c \cdot x + e - b \cdot \frac{e}{a + b}\right) + b \cdot \left(c \cdot y + e - b \cdot \frac{e}{a + b}\right) = ac \cdot x + ad \cdot y + ae$$

$$ac \cdot x + ae - ab \cdot \frac{e}{a+b} + bc \cdot y + be - b^2 \cdot \frac{e}{a+b} = ac \cdot x + ad \cdot y + ae$$

$$-ab \cdot \frac{e}{a+b} + bc \cdot y + be - b^2 \cdot \frac{e}{a+b} = ad \cdot y$$

$$-abe + (abc + b^2c) \cdot y + (abe + b^2e) - b^2e = (a^2d + abd) \cdot y$$

$$abc \cdot y + b^2c \cdot y = a^2d \cdot y + abd \cdot y$$

$$abc + b^2c = a^2d + abd$$

Z toho výsledku vyplývá několik možností řešení. Buď $a = c$ a $b = d$, nebo $a = b$ a $c = d$. Jiným řešením může být $bc \cdot (a+b) = ad \cdot (a+b)$, $(a+b) \neq 0$, tedy $bc = ad$, $a \neq 0$, tedy $d = \frac{bc}{a}$, přičemž a, b, c a $e \in \mathbb{R}$.

Druhým výsledkem rovnice

$$a \cdot f(x) + b \cdot f(y) = c \cdot x + d \cdot y + e$$

je

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{c \cdot x + e - b \cdot \frac{e}{a+b}}{a}},$$

přičemž $(a+b) \neq 0$, $a \neq 0$ a $e \in \mathbb{R}$. Buď $a = c$ a $b = d$, nebo $a = b$ a $c = d$. Nebo $d = \frac{bc}{a}$, přičemž $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

5.3 Kvadratická funkce

Použiju myšlenky z předchozích podkapitol a v zadání rovnice rozhodně budu vyžadovat nějak upravené $f(x)$ a x^2.

Příklad 16:

$$f(x+y) - 2f(y) = x^2 - y^2$$

Řešení:

Omlouvám se za monotónnost, ale opět využiju substituci $x = 0$ a $y = 0$.

$$f(0) - 2f(0) = 0$$

$$f(0) = 0$$

Substituce $y = 0$

$$f(x) - 2f(0) = x^2$$

$$f(x) = x^2$$

Výsledkem je základní kvadratická funkce $f(x) = x^2$ (obr. 10). Kvůli zkoušce to ale bude chtít menší úpravy v zadání. Pojďme si to předvést.

Zkouška:

$$L = f(x + y) - 2f(y) = (x + y)^2 - 2y^2 = x^2 + 2xy - y^2$$

$$P = x^2 - y^2$$

$$\boldsymbol{L \neq P}$$

Zkouška nám opět nevyšla. Podíváme se, kde je problém. Celou pravou stranu mám i na levé, jen mi tam přebývá $2xy$. Jelikož argument obsahuje y a my využíváme substituci $y = 0$, můžeme $2xy$ bez výčitek připsat na pravou stranu rovnice. Finální rovnice bude vypadat

$$f(x + y) - 2f(y) = x^2 - y^2 + 2xy.$$

Naposledy si vyhrajeme s koeficienty této rovnice. Nejprve si ukážeme, jakou dostane obecnou formu

$$a \cdot f(x + y) + b \cdot f(y) = c \cdot x^2 + d \cdot y^2 + e \cdot xy.$$

Novou funkcionální rovnici vypočítáme pomocí osvědčené substituční metody

$$a \cdot f(0) + b \cdot f(0) = 0$$

$$f(0) = 0$$

$$a \cdot f(x + 0) + b \cdot f(0) = c \cdot x^2$$

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{c \cdot x^2}{a}}$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$, i pro koeficienty a, b, c, d a $e \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Pokud by $a = 0$, pak by rovnice opět neměla smysl.

Z hledané funkce vyplývá, že jaké bude mít x^2 před sebou číslo, závisí na koeficientech a a c. Ostatní nám vypadly během počítání, to znamená, že na jejich velikosti nezáleží.

Před námi je poslední komentovaný příklad. Použiju stejné zadání s koeficienty $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$, $d = 1$ a $e = 5$. Hledanou funkcí by měla být $f(x) = 2x^2$.

Příklad 17:

Nová funkcionální rovnice má znění

$$2f(x+y) + 3f(y) = 4x^2 + y^2 + 5xy.$$

Řešení:

Pustíme se do výpočtů

$$2f(0) + 3f(0) = 0$$

$$f(0) = 0$$

$$2f(x+0) + 3f(0) = 4x^2$$

$$f(x) = 2x^2$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Správnost ověříme zkouškou.

Zkouška:

$$L = 2f(x+y) + 3f(y) = 4 \cdot (x+y)^2 + 6y^2 = 4x^2 + 8xy + 10y^2$$

$$P = 4x^2 + y^2 + 5xy$$

$$\boldsymbol{L \neq P}$$

Zkouška nám nevyšla i přesto, že jsme hýbali nezávislými koeficienty. To znamená, že zadání rovnice musí zůstat v původní verzi, a to

$$f(x+y) - 2f(y) = x^2 - y^2 + 2xy.$$

Existují takové rovnice, které jsou přesně nastavené a nedá se s nimi nijak hýbat, „vyhrát“. Jak vidíte, tak i nám se může podařit takovou rovnici vytvořit.

Pokusíme se o vytvoření další obecné rovnice s výsledkem kvadratické funkce.

$$a \cdot f(x) + b \cdot f(y) = c \cdot x^2 + d \cdot y^2$$

$x = 0, y = 0$

$$a \cdot f(0) + b \cdot f(0) = 0$$

$$(a + b) \cdot f(0) = 0$$

Pokud $(a + b) = 0$, pak je $f(0)$ libovolné a $a \neq 0$.

$$a \cdot f(x) = c \cdot x^2 - b \cdot f(0)$$

Pokud by $a = 0$, pak by pro nás rovnice neměla smysl.

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{c \cdot x^2 - b \cdot f(0)}{a}}$$

Zkouška:

$$a \cdot \frac{c \cdot x^2 - b \cdot f(0)}{a} + b \cdot \frac{c \cdot y^2 - b \cdot f(0)}{a} = c \cdot x^2 + d \cdot y^2$$

$$-b \cdot f(0) + b \cdot \frac{c \cdot y^2 - b \cdot f(0)}{a} = d \cdot y^2$$

$$b \cdot f(0) + \frac{b^2 \cdot f(0)}{a} = \frac{bc \cdot y^2}{a} - d \cdot y^2$$

$$ab \cdot f(0) + b^2 \cdot f(0) = bc \cdot y^2 - ad \cdot y^2$$

$\Rightarrow bc = ad \ \wedge \ b^2 = -ab$ nebo $f(0) = 0$.

$$b^2 = -ab$$

$$b^2 + ab = 0$$

$b \cdot (a + b) = 0 \Longrightarrow$ splněna naše podmínka $(a + b) = 0$.

Pokud $(a + b) \neq 0$, potom $f(0) = 0$. Využijeme substituci $y = 0$.

$$a \cdot f(x) + b \cdot f(0) = c \cdot x^2$$

$$a \cdot f(x) = c \cdot x^2$$

Jestliže $a = 0$, pak rovnice nemá řešení. Pokud $a \neq 0$, potom

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{c \cdot x^2}{a}}.$$

Zkouška:

$$a \cdot \frac{c \cdot x^2}{a} + b \cdot \frac{c \cdot y^2}{a} = c \cdot x^2 + d \cdot y^2$$

$$b \cdot \frac{c \cdot y^2}{a} = d \cdot y^2$$

To tedy znamená, že $d = \frac{bc}{a}$.

5.4 Shrnutí

Na závěr si zopakujeme zadání obecných funkcionálních rovnic a výsledky pro každou hledanou funkci. Uvedeme, za jakých podmínek, daný výsledek platí. Pro větší přehlednost jsou příklady uspořádány do tabulek.

Tabulka 1: Příklad 12

Zadání	Výsledek	Podmínky
$a \cdot f(x) + b \cdot f(x) = c \cdot f^2(x)$	$f(x) = 0, f(x) = \frac{(a+b)}{c}$	$a, b, c \in \mathbb{R}, c \neq 0$

Tabulka 2: Příklad 14

Zadání	Výsledek	Podmínky
$a \cdot f(xy) + b \cdot f(x) = (a+b) \cdot f(y)$	$f(x) = t$	$a, b, t \in \mathbb{R}$

Tabulka 3: Příklad 14

Zadání	Výsledek	Podmínky
$b \cdot f(x) = c \cdot x + e$	$f(x) = \dfrac{c \cdot x + e}{b}$	$b \neq 0, c \neq 0,$ $e \in \mathbb{R}$

Pokud chci lineární řešení $f(x) = px + q$, tak zvolím $p = \frac{c}{b}$, tedy $c = b \cdot p$ a $q = \frac{e}{b}$, tedy $e = b \cdot q$ a rovnice bude mít tvar

$$b \cdot f(x) = b \cdot p \cdot x + b \cdot q.$$

Jestliže chci řešení $f(x) = 4x + 7$, tak zvolím třeba $4 = \frac{8}{2}$, tedy $8 = 2 \cdot 4$ a $7 = \frac{14}{2}$, tedy $14 = 2 \cdot 7$ a rovnice bude mít tvar

$$2 \cdot f(x) = 8x + 14.$$

Tabulka 4: Příklad 14

Zadání	Výsledek	Podmínky
$a \cdot f(xy) + b \cdot f(x) = d \cdot f(y) + e$	$f(x) = \dfrac{d}{(a + b - d)}$	$(a + b - d) \neq 0,$ $b \neq 0, e \in \mathbb{R}$

Tabulka 5: Příklad 15

Zadání	Výsledek	Podmínky
$a \cdot f(x) - a \cdot f(y) = c \cdot x - c \cdot y$	$f(x) = \dfrac{c \cdot x}{a} + t$	$a \neq 0, c, t \in \mathbb{R}$

Pokud chci lineární řešení $f(x) = px + q$, tak zvolím $p = \frac{c}{a}$, tedy $c = a \cdot p$ a $q = t$, $t \in \mathbb{R}$, potom i $q \in \mathbb{R}$ a zvolím tedy rovnici

$$a \cdot f(x) - a \cdot f(y) = a \cdot p \cdot x - a \cdot p \cdot y.$$

Jestliže chci lineární řešení $f(x) = 2x + 3$, tak zvolím třeba $2 = \frac{4}{2}$, tedy $4 = 2 \cdot 2$ a $3 = t$, zvolím tedy rovnici

$$2f(x) - 2f(y) = 4x - 4y.$$

Tabulka 6: Příklad 15

Zadání	Výsledek	Podmínky
$a \cdot f(x) + b \cdot f(y) = a \cdot x + b \cdot y + e$	$f(x) = x + \dfrac{e - b \cdot \dfrac{e}{a+b}}{a}$	$(a + b) \neq 0$, $a \neq 0, e \in \mathbb{R}$

Pokud chci lineární řešení $f(x) = px + q$, tak vidím, že $p = 1$, tedy $q = \frac{e - b \cdot \frac{e}{a+b}}{a}$.

Pokud chci lineární řešení $f(x) = x + 1$, tak $p = 1$ a třeba $1 = \frac{2 - 1 \cdot \frac{2}{1+1}}{1}$. Takže rovnice bude mít tvar

$$f(x) + f(y) = x + y + 2.$$

Tabulka 7: Příklad 15

Zadání	Výsledek	Podmínky
$a \cdot f(x) + a \cdot f(y) = c \cdot x + c \cdot y + e$	$f(x) = \dfrac{c \cdot x + e - \dfrac{e}{2}}{a}$	$a \neq 0, c, e \in \mathbb{R}$

Pokud chci lineární řešení $f(x) = px + q$, tak zvolím $p = \frac{c}{a}$, tedy $c = a \cdot p$ a $q = \frac{e - \frac{e}{2}}{a}$, zvolím tedy rovnici

$$a \cdot f(x) - a \cdot f(y) = a \cdot p \cdot x + a \cdot p \cdot y + e.$$

Jestliže chci lineární řešení $f(x) = 3x + 1$, tak zvolím třeba $3 = \frac{6}{2}$, tedy $6 = 2 \cdot 3$ a $1 = \frac{4-\frac{4}{2}}{2}$, zvolím tedy rovnici

$$2f(x) - 2f(y) = 6x + 6y + 4.$$

Tabulka 8: Příklad 16

Zadání	Výsledek	Podmínky
$a \cdot f(x+y) + b \cdot f(y) = c \cdot x^2 + d \cdot y^2 + e \cdot xy$	$f(x) = \frac{c \cdot x^2}{a}$	b, c, d a $e \in \mathbb{R}, a \neq 0$

Pokud chci kvadratické řešení $f(x) = ox^2 + px + q$, tak zvolím $o = \frac{c}{a}$, tedy $c = a \cdot o$, p a q se v tomto případě rovnají nule. Zvolím tedy rovnici

$$a \cdot f(x+y) + b \cdot f(y) = a \cdot o \cdot x^2 + d \cdot y^2 + e \cdot xy.$$

Jestliže chci kvadratické řešení $f(x) = 3x^2$, tak zvolím třeba $3 = \frac{3}{1}$, tedy $3 = 1 \cdot 3$, tedy rovnici

$$f(x+y) + b \cdot f(y) = 3x^2 + d \cdot y^2 + e \cdot xy.$$

Tabulka 9: Příklad 17

Zadání	Výsledek	Podmínky
$a \cdot f(x) + b \cdot f(y) = c \cdot x^2 + \frac{bc}{a} \cdot y^2$	$f(x) = \frac{c \cdot x^2}{a}$	$(a+b) \neq 0, a \neq 0$ a $c \neq 0$

Pokud chci kvadratické řešení $f(x) = ox^2 + px + q$, tak zvolím $o = \frac{c}{a}$, tedy $c = a \cdot o$, p a q se v tomto případě rovnají nule. Zvolím tedy rovnici

$$a \cdot f(x) + b \cdot f(y) = a \cdot o \cdot x^2 + \frac{b \cdot a \cdot o}{a} \cdot y^2.$$

Takže pokud bych chtěla jako výsledek $f(x) = 4x^2$, pak by třeba $\frac{8}{2} = 4$, tedy $8 = 2 \cdot 4$. Rovnice by tedy měla tvar

$$2f(x) + b \cdot f(y) = 8x^2 + b \cdot 4y^2.$$

A tímto způsobem vytvoříte kvantum zajímavých příkladů na téma *funkcionální rovnice*. Neberte, prosím, tento způsob jako jediný. Je to pouze má metoda, jak jsem při tvoření postupovala.

6 Příklady na procvičování

V naší poslední kapitole najdete příklady funkcionálních rovnic na procvičení. Nezapomeňte provádět zkoušku, správný výsledek máte u každého příkladu v závorce. Pro všechny příklady máme stejné podmínky: Nalezněte všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že pro libovolné *x*, *y* ∈ ℝ platí

1) $f(x) + f(y) + 1 = x + f(y) + 2$

$$[f(x) = x + 1]$$

2) $f(x) - f(x) \cdot f(y) = f(y) \cdot x$

$$[f(x) = 0]$$

3) $y \cdot f(x^2) + 2f(xy) = f(x) - x + 2$

$$[\text{nemá řešení}]$$

4) $2f(x) + f(y) - 2x^2 = y^2$

$$[f(x) = x^2]$$

5) $f\big(f(x) + f(y)\big) = -2f(x) + 4y$

$$[f(x) = -2x]$$

6) $2f(x) - 2f(y) = -2f^2(y) + f(y)$

$$\left[f(x) = 0, f(x) = \frac{1}{2}\right]$$

7 Závěr

Cílem této bakalářské práce bylo představit žákům ne tak známé téma funkcionálních rovnic, se kterými se mohou setkat na matematických olympiádách, jak jsme si názorně uvedli již v úvodu. Pokoušeli jsme se o kreativitu, takže tu naleznou jak řešené příklady, tak grafy hledaných funkcí.

Během čtení této práce si čtenář zopakoval základní matematické pojmy jako rovnice, funkce, neznámá (proměnná), definiční obor, obor hodnot a vlastnosti funkce. Bez těchto znalostí by se nám jen těžko definovaly funkcionální rovnice.

Uvedli jsme si ty nejdůležitější matematiky, kteří co nejvíce přispěli k danému tématu. Pokud bych měla vytknout pouze jednoho, rozhodně by to byl A. L. Cauchy, který vytvořil i vlastí metodu řešení.

To nás přivádí právě k těm nejjednodušším metodám, které jsme si představili na příkladech. Celou kapitolu doprovázely barevné grafy výsledných funkcí. Veškeré grafy této bakalářské práce byly vytvořeny díky programu Geogebra.

Nesmíme zapomínat, jak velkou pozornost musíme věnovat čtení zadání, jelikož se snadno může stát, že přehlédneme nějakou zásadní informaci a dopustíme se tak obrovské chyby. Této problematice jsme věnovali samostatnou kapitolu, abychom vystihli její důležitost.

Dále jsme předvedli, jak se takové funkcionální rovnice vytvářejí a jak si s nimi člověk může vyhrát. Nebudu lhát, dá to práci vymyslet příklad, který vychází nějak rozumně a zároveň, aby výsledek prošel i zkouškou. Rozhodně to není aktivita pro začátečníky, kteří se s funkcionálními rovnicemi teprve seznamují.

A na závěr tu máme pár příkladů na procvičování, opět velký boj příklady vymyslet a dát jim „učesanou" formu. Ale podařilo se, jak vidíte. Slovo „vzdát se" nemám ve slovníku.

Tato práce by si rozhodně zasloužila nějaké rozšíření. Jelikož je zaměřená pro žáky 2. stupně ZŠ, musela jsem se držet při zemi a selektovat spoustu informací, abych vybrala jen ty srozumitelné.

Pokud by práce byla psaná třeba pro studenty vyšších gymnázií nebo i vysokých škol, kde se dokonce v matematice vyskytuje předmět vyloženě zaměřený na funkcionální rovnice, psala by se bez omezení a mnohem lépe. Mohli bychom využít spoustu definic a provádět i důkazy, vymýšlet ještě náročnější příklady a posouvat své hranice při vymýšlení nových úloh.

Na závěr ještě musím říct, jak mě překvapilo, že k této problematice existuje velmi málo zdrojů. Čerpala jsem především ze tří knížek, z toho každá byla maličká a tenoučká a jedna dokonce i v angličtině. Dále tu máme zdroje internetové, které jsem nechtěla tolik využívat kvůli nejisté kvalitě informací a nesmíme zapomínat na články, ve kterých se i vyskytovaly chyby.

I tak si ale myslím, že jsem se s daným tématem „poprala“ obstojně. Pevně věřím, že práce je čtivá, srozumitelná a že „přinese své ovoce“.

Literatura

BERÁNEK, Jaroslav. *Funkcionální rovnice.* 1. vyd. - Brno: Masarykova univerzita, 2004. ISBN 80-210-3422-X

CALÁBEK, P., ŠVRČEK J. *Abeceda řešení funkcionálních rovnic*. Matematika – fyzika – informatika, 22, 2013

CALÁBEK, P., ŠVRČEK J. *Úvod do řešení funkcionálních rovnic*. Matematika – fyzika – informatika, 10, 2000/2001

DAVIDOV, Ljubomir. *Funkcionální rovnice.* ÚV matematické olympiády, Mladá fronta (Praha), 1984

PEŠKOVÁ, Lenka. *Funkcionální rovnice v příkladech z matematických olympiád*. Olomouc, 2012. diplomová práce (Mgr.). UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI. Přírodovědecká fakulta

SMALL, Christopher G. *Functional equations and how to solve them.* New York: Springer, 2007 ISBN 978-0-387-34539-0

Matematika. *Matematika.cz: Vlastnosti funkce* [online]. [cit. 10. 2. 2020]. Dostupné z: https://matematika.cz/funkce

Umíme matiku. *Umíme matiku: Základní rovnice s jednou neznámou* [online]. [cit. 10. 2. 2020]. Dostupné z: https://www.umimematiku.cz/cviceni-reseni-linearni-rovnice

Matematická olympiáda. *50. ročník Matematické olympiády: Úlohy domácího kola kategorie A* [online]. [cit. 1. 4. 2020]. Dostupné z: http://www.matematickaolympiada.cz/media/440630/A50i.pdf