



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A BIOMECHANIKY

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

ANALÝZA CHAOTICKÉHO CHOVÁNÍ DVOJITÉHO KYVADLA

ANALYSIS OF CHAOTIC BEHAVIOR IN DOUBLE PENDULUM

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

TOMÁŠ BRÁZDA

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. PETR SOSNA

BRNO 2023

Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Student: **Tomáš Brázda**
Studijní program: Základy strojího inženýrství
Studijní obor: Základy strojího inženýrství
Vedoucí práce: **Ing. Petr Sosna**
Akademický rok: 2022/23

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Analýza chaotického chování dvojitého kyvadla

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Dvojitě kyvadlo je jedním ze základních a nejjednodušších fyzikálních systémů vykazujících chaotické chování. Práce bude zaměřena na popis chaotického chování dvojitého kyvadla kvantifikací jeho fraktálů. Bude k tomu použit dynamický model dvojitého kyvadla a numerické simulace.

Cíle bakalářské práce:

- 1) Student provede rešerši dvojitého kyvadla a teorie chaosu.
- 2) Vytvoření modelu dvojitého kyvadla a určení, při kterých hodnotách systémových parametrů je chování chaotické.
- 3) Provedení analýzy chaotického chování v závislosti na parametrech systému.
- 4) Kvantifikace fraktálů bude sloužit jako přehled chaotického chování dvojitého kyvadla.

Seznam doporučené literatury:

BREPTA, Rudolf, Ladislav PŮST a František TUREK. Mechanické kmitání. Praha: Sobotáles, 1994, 589 s. : il. ISBN 80-901684-8-5.

STROGATZ, Steven H. (Steven Henry). Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering. Cambridge: Perseu publishing, 2000, xi, 498 s. ISBN 0-7382-0453-6.

STACHOWIAK, Tomasz and OKADA, Toshio, 2006. A numerical analysis of chaos in the double pendulum. Chaos, Solitons and Fractals. 2006. Vol. 29, no. 2, pp. 417–422. DOI 10.1016/J.CHAOS.2005.08.032.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2022/23

V Brně, dne

L. S.

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jiří Hlinka, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Tato práce se zabývá představením základních poznatků ohledně teorie chaosu. Je zmíněno několik základních metod výpočtu dimenze a také celkové využití této teorie v různých vědních disciplínách. Hlavní část je věnována celkové analýze dvojitého kyvadla, kde pro uvedení do problematiky byla tato situace nastíněna na jednoduchém matematickém kyvadle. Díky výpočetnímu programu Matlab se povedlo vytvořit fraktál, který reprezentuje chaotické chování dvojitého kyvadla. Nabyté znalosti z výpočtu dimenze zde byly použity pro klasifikaci tohoto fraktálu a vypočítání jeho dimenze. Navíc byla provedena analýza vlivu parametrů na chování systému. Pro identifikaci oblastí, kde se dvojitě kyvadlo chová chaoticky a kde stabilně, bylo použito metod výpočtu největšího Ljapunovova exponentu a 0–1 testu.

Klíčová slova

Dvojitě kyvadlo, Teorie chaosu, Fraktál, Dimenze, Chaos, Matlab

Summary

This thesis deals with the presentation of basic knowledge regarding chaos theory. There are mentioned several basic methods of dimension calculation as well as the overall use of this theory in various scientific disciplines. The main part is devoted to the complete analysis of a double pendulum. To initiate into the issue, this situation was outlined on a simple mathematical basis pendulum. There is derived a numeral system of two differential equations of second order to work with the double pendulum. Thanks to computer program Matlab there was created a fractal that represents chaotic behavior of the double pendulum. Knowledge acquired from dimension calculation was used here to classify the fractal and to work out its dimension. In addition there was analyzed impact of parameters of behavior in system. This overall chaotic behavior has been verified by the largest Lyapunov exponent and the 0–1 test, which identified areas, where this system behaves chaotically and where it is stable.

Keywords

Double pendulum, Chaos theory, Fractal, Dimension, Chaos, Matlab

Bibliografická citace

BRÁZDA, Tomáš. *ANALÝZA CHAOTICKÉHO CHOVÁNÍ DVOJITÉHO KYVADLA*. Brno, 2023. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství. Vedoucí práce Petr Sosna.

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracoval samostatně, pod vedením Ing. Petra Sosny, s použitím literatury, která je uvedena v seznamu zdrojů.

V Brně 2023

Tomáš Brázda

Poděkování

Tímto bych rád poděkoval panu Ing. Petru Sosnovi, doc. Ludku Nechvátalovi a prof. Janu Franců za vedení mé bakalářské práce, za jejich cenné rady a čas. Také bych rád poděkoval své rodině za podporu během studia.

Tomáš Brázda

Obsah

Úvod	10
2 Teorie chaosu	11
2.1 Historie	11
2.2 Atraktory	12
2.2.1 Efekt motýlích křídel (butterfly effect)	13
2.3 Bifurkace	14
2.4 Testy chaotického chování	15
2.4.1 Největší Ljapunovův exponent	15
2.4.2 0–1 test	16
2.5 Fraktální geometrie	17
2.6 Fraktály a jejich dělení	17
2.6.1 L-systémy	18
2.6.2 IFS	19
2.6.3 TEA	20
2.6.4 Náhodné fraktály	21
2.7 Dimenze	22
2.7.1 Topologická dimenze	22
2.7.2 Hausdorffova (fraktální) dimenze	22
2.7.3 Pokrývající dimenze	24
2.7.4 Mřížková dimenze (box-counting dimension)	24
2.8 Aplikace teorie chaosu	25
3 Jednoduché matematické kyvadlo	28
4 Dvojitě kyvadlo	31
4.1 Odvození rovnic	31
4.2 Numerické řešení	33
4.3 Interpretace výsledků	35
4.4 Fraktál dvojitěho kyvadla	36
4.4.1 Změna parametrů	38
4.5 Detekce pomocí největšího Ljapunovova exponentu	39
4.6 0–1 test	41
Závěr	46
Seznam použitých zdrojů	47
Seznam příloh	50

Úvod

Tato práce se zabývá teorií chaosu a analýzou pohybu dvojitého kyvadla. Teorie chaosu je poměrně mladá vědní disciplína, která se začala rozvíjet až v polovině 20. století díky Benoitovi Mandelbrotovi, který je považován za jejího zakladatele. Jedním z důvodů zvolení tohoto tématu byla snaha o seznámení se s takto komplexní teorií a následnou aplikací na konkrétním mechanickém modelu.

Teorie chaosu je nesmírně rozsáhlá vědní oblast. Na příkladech bude ukázáno, že se tato vědní oblast netýká pouze mechaniky nebo matematiky. Další motivací byla snaha o pochopení propojení mezi různými vědními disciplínami. Když se podíváme do přírody na to, jak rostou větve stromu nebo jak se větví průdušnice v plicích člověka, nalezneme zde určitou podobnost. A právě na věcech, které spolu zdánlivě nesouvisí, bude ukázána jednotná teorie, která je dokáže spojit.

Cílem práce je ukázat, jak se dá jedna, i když obsáhlá teorie aplikovat na nespočet věcí, které jsou okolo nás, a zároveň uvést, jak tuto teorii použít v jednom konkrétním případě. Snahou bude odhalit analogii mezi jednoduchým matematickým kyvadlem a dvojitým kyvadlem, které bude hlavním předmětem zájmu. Model dvojitého kyvadla je, i přes relativní matematickou jednoduchost, typickým mechanismem vykazujícím chaotické chování. Jinak řečeno, dynamika tohoto systému je poměrně bohatá. Vedle obecného vhledu do samotné teorie chaosu, jednoduchého matematického kyvadla a dvojitého kyvadla bude představeno několik numerických metod pro práci právě s takto nestabilními systémy. Zároveň bude ukázáno, proč fraktály dokázaly tak fascinovat celý svět v minulém století, a bezpochyby se jejich krása nevytratila ani dnes.

Snahou bude ukázat, že se opravdu jedná o systém, který vykazuje chaotické chování, a to pomocí numerických simulací v programu Matlab. Dále bude snaha o zmapování oblasti, kde se systém chová chaoticky a kde naopak stabilně. V neposlední řadě bude použito teoretických poznatků k výpočtu dimenze vzniklého fraktálu, který je obdržen pomocí trajektorií systému.

2 Teorie chaosu

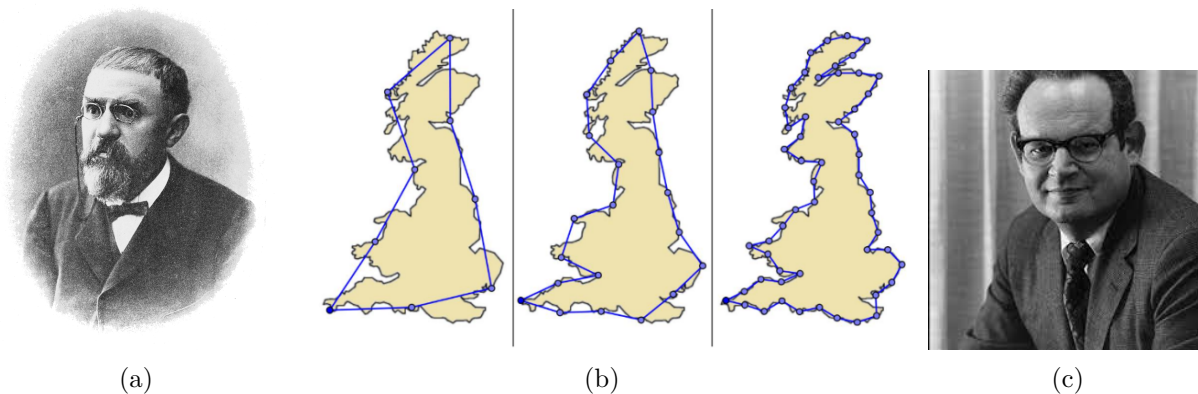
Slovo „Chaos“ má mnoho různých významů podle toho v jakém odvětví se právě nacházíme. Většina lidí si pod pojmem chaos představí nepořádek, úplný zmatek, neexistenci řádu či něco podobného. Ve fyzice a matematice teorie chaosu popisuje systémy, které jsou charakterizovány nelineárními diferenciálními rovnicemi, a proto se jim někdy říká „nelineární dynamické systémy“ [1, 2]. Při jakémkoliv měření, pokusu či simulaci musí být počítáno s nějakou nepřesností. Tato nepřesnost může být následkem lidské nedokonalosti či nedokonalosti dané metody. V případě, kdy systém je stabilní a dopustíme se nějaké malé chyby na vstupu, tak se tato chyba (třeba vlivem zaokrouhlování) projeví pouze malou změnou na výstupních datech. Příkladem může být dobře podmíněná úloha z matematiky. Nicméně v teorii chaosu tomu tak není. Systémy, které vykazují chaotické chování, jsou velmi citlivé na vstupní data a jakákoliv malá a nepatrná změna vstupních údajů nám může zcela ovlivnit výsledek [3]. Přesně tyto vlastnosti vykazuje efekt motýlích křídel, který je velmi známý i pro lidi, kteří se teorií chaosu nezabývají [2]. V případě, kdy bychom znali stav systému, tj. polohy a rychlosti všech částic, které systém vytvářejí, můžeme, alespoň v principu, s libovolnou přesností vypočítat stav systému kdykoliv v budoucnosti nebo v minulosti (jako např. předpověď počasí) [1, 2]. Ale u chaotických systémů by bylo zapotřebí absolutní přesnosti, aby bylo reálné takto „předpovídat budoucnost“, což je bohužel nemožné a je to důvod, proč se tyto systémy vzpírají našim předpovědím a proč tyto jevy nazýváme chaotické jevy [1].

2.1 Historie

Teorie chaosu jakožto vědní obor není zase tak stará. Jako takovou první zmínku o teorii chaosu je možné brát pokus *Roberta Browna* (1773–1858) z roku 1827, kdy prováděl pokusy s pylovými zrny [1]. Pokus spočíval v pozorování chaotického pohybu zrn pylu v kapce vody [1, 2]. Tato zrna vytvářejí dnes už velmi známý Brownův pohyb. Tento pokus ve své době nezbudil moc velkou pozornost, avšak je možné tento pokus považovat za historicky první popis chaotického systému.

Dalším významným vědcem, který významně přispěl k teorii chaosu, tak jak ji dnes známe, je *Jules Henri Poincaré* (viz obr. 1a) (1854–1912). Byl první, kdo začal zkoumat chaotické chování systému a provedl jeho analýzu [1]. Mezi jeho nejznámější práce, které jsou dnes velmi známé, patří problém tří těles (více informací se lze dočíst zde [4]), na kterém pracovali už Newton i Euler, ale bohužel ani jednomu se nepodařilo analyticky tento problém vyřešit. Až Poincaré přišel s tím, že tento problém analyticky vyřešit nelze. Poincaré vytvořil i známé Poincarého mapy, které slouží jako „řez“ fázovým portrétem (soustava trajektorií pro množinu počátečních podmínek) [4]. Díky nim je možné zachytit vlastnosti fázového portréту v prostoru nižší dimenze, přičemž jedna nebo více stavových veličin je konstantních [4]. Celkově Poincaré předběhl svou dobu natolik, že jeho následovníci se objevili až v šedesátých letech 20. století.

Neméně důležitou roli sehrál v teorii chaosu *Aleksandr Michajlovič Ljapunov* (1857–1918), který zavedl pojem Ljapunovův exponent. Díky tomuto exponentu je možné rozhodnout, zda je daný systém stabilní či chaotický [5]. Ljapunovův exponent se také využívá pro výpočet Ljapunovovy dimenze [4, 5].



Obrázek 1: (a) Jules Henri Poincaré; (b) Měření délky pobřeží Velké Británie, převzato z [8]; (c) Benoit Mandelbrot

Jako dalšího významného představitele by bylo možné zmínit *Lewis Fry Richardsona* (1881–1953). Byl to anglický vědec, který se zabýval předpovědí počasí pomocí diferenciálních rovnic [4, 6]. Bohužel v době, kdy žil, na to neexistovala dostatečná výpočetní technika, která by to bývala zvládla. Nicméně v dnešní době se tato metoda používá běžně. Velkou roli má i objev, který se nazývá paradox délky pobřeží (viz obr. 1b) [6]. Tento problém spočívá ve změření délky pobřeží Velké Británie. Zdá se to být jako velmi primitivní záležitost, zvláště s dnešními vymoženostmi. Nicméně Richardson si všiml, že různé zdroje uvádějí různé údaje, které se od sebe liší, a to ne o nějakou zanedbatelnou hodnotu, která by mohla být způsobena třeba zaokrouhlovací chybou [6, 7]. Zjistil, že délka pobřeží bude záviset na délce daného měřítka. Zajímavostí však je, že dané hodnoty nekonvergovaly k nějaké konečné hodnotě, ale se zmenšujícím se měřítkem se stále víc a víc blížily k nekonečnu, což je způsobeno tím, že čím menší měřítko máme, tím započítáváme menší a menší detaily pobřeží [6].

Jako poslední představitel bude zmíněn *Benoit Mandelbrot* (viz obr. 1c) (1924–2010). Byl to velmi významný vědec, je autorem pojmu fraktál a položil základy dnes už známé fraktální geometrie, která je dnes už uznávaným vědním oborem [1, 2]. Jméno Mandelbrot zná spousta lidí třeba jen z doslechu ve spojení Mandelbrotova množina, která patří k nejznámějším fraktálům.

2.2 Atraktory

Atraktorem rozumíme nějaký stav nebo množinu stavů, do kterého směřuje náš daný dynamický systém [2]. Jinak řečeno je to množina hodnot, kterých nabývá stavový vektor dynamického systému po dostatečně dlouhé době [9]. Atraktory jsou rozděleny do několika základních skupin [9, 5]:

- pevný bod
- limitní cyklus
- podivné atraktory

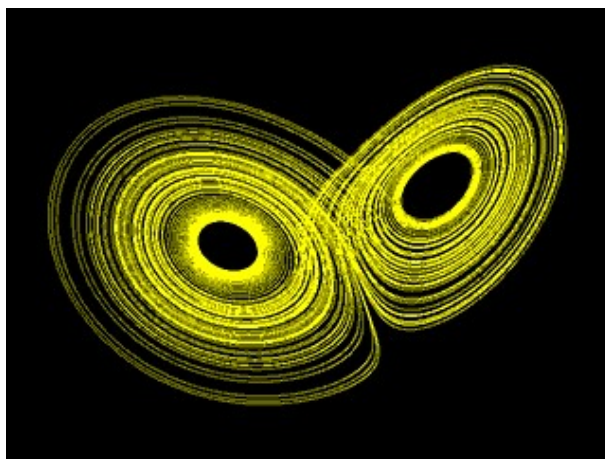
Pokud je atraktorem *pevný bod*, tak se jedná o nejjednodušší případ, kdy se systém za danou dobu (klidně i nekonečně velkou) ustálí v nějakém pevně daném bodě, který se dá dopředu vypočítat [9]. Příkladem může být těleso zavěšené na pružině, které je vychýleno

z rovnovážné polohy, s postupně narůstajícím časem se těleso zavěšené na pružně stále více blíží rovnovážné poloze, ve které bylo před vychýlením [4].

Dalším typem atraktoru je *limitní cyklus*. Tento typ atraktoru je typický např. právě pro dvojité kyvadlo (jak bude zmíněno později). Limitní cyklus je možné si představit jako modifikaci pevného bodu, kdy místo toho, aby se systém při $t \rightarrow \infty$ ustálil v pevně daném bodě, tak se trajektorie tohoto bodu limitně blíží k nějaké uzavřené křivce [5].

Poslední typ atraktoru, který bude uveden, je *podivný atraktor*. Je to nejdůležitější typ atraktoru a je také nejsložitější, protože každý podivný atraktor je popsán alespoň třemi diferenciálními rovnicemi [2, 9]. Termín „podivný“ není matematicky přesně definovaný [7]. Nicméně podivný atraktor je takový atraktor, který vykazuje stejné vlastnosti jako fraktály (tedy podivné atraktory jsou vlastně fraktály) [4]. Atraktor, který má neceločíselnou hodnotu fraktální (Hausdorffovy) dimenze, tak je podivný [9]. Neceločíselná dimenze však nezaručuje chaotické chování, nicméně většinou tomu tak je [7]. Systémy s tímto typem atraktoru jsou velmi citlivé na vstupní podmínky a jejich atraktor může být velmi komplikovaný a zároveň se může jednat buďto o pravidelný, anebo o chaotický atraktor [9].

2.2.1 Efekt motýlích křídel (butterfly effect)



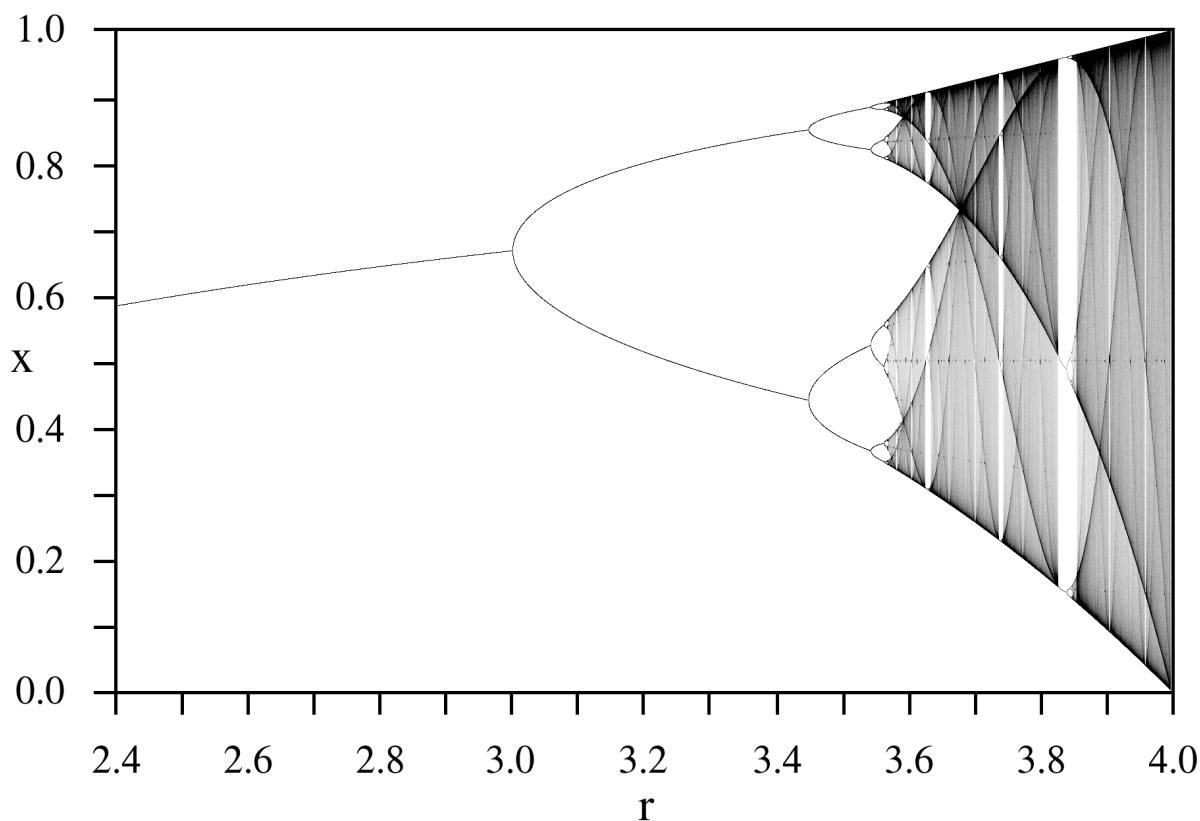
Obrázek 2: Lorenzův atraktor, převzato z [10]

Termín podivný atraktor poprvé zavedli ve své práci Ruelle a Takens v roce 1970 [11]. Nicméně už v roce 1963 byl vytvořen první a asi nejznámější podivný atraktor, který se jmenuje po svém objeviteli Edwardu Nortonovi Lorenzovi [2]. Lorenz při numerické simulaci pozoroval fraktální strukturu atraktoru (viz obr. 2), přitom vycházel ze soustavy tří poměrně jednoduchých nelineárních obyčejných diferenciálních rovnic [2].

Pojem efekt motýlích křídel zavedl Edward Norton Lorenz, který se zabýval předpovědí počasí [4]. Tento termín vyjadřuje vysokou citlivost systému vůči počátečním podmínkám [3, 7]. Všiml si toho v momentě, kdy zadával počáteční podmínky do počítače a rozdíl hodnot, které vložil do počítače, byl velmi malý (prakticky zanedbatelný), nicméně pokaždé mu počítač dal naprosto odlišné výsledky [11]. Tím došel k závěru, který je dnes už velmi známý, ale samozřejmě zveličený: „mávnutí křídel motýla v Mexiku způsobí tornádo na druhé straně světa“ [2, 4]. Mezi systémy, které tyto vlastnosti vykazují, je např. Lorenzův atraktor [2].

2.3 Bifurkace

Slovo bifurkace lze přeložit jako rozdvojení či rozdělení [2]. V matematickém slova smyslu tím rozumíme hodnotu parametru systému, při které dochází ke kvalitativní změně v chování [2]. Příkladem může být provedení malé změny řídicího parametru r v bifurkačním diagramu (viz obr. 3), tak dojde k velké změně vnitřního stavu systému x [2, 4]. Pro zkoumání takových změn jsou používány dvě metody. První je výpočet nějaké charakteristiky pro zvolený parametr systému (např. dimenzi nebo Ljapunovův exponent) [10, 12]. Pokud došlo k náhlé změně naší vypočítané charakteristiky, tak došlo i k bifurkaci v systému [2]. Jako druhou metodu je možné použít sledování průchodu trajektorie vhodnou rovinou (Poincarého plochou) [12]. Následným zkoumáním trajektorie je možné posoudit její kvalitativní chování [13]. Názornou pomůckou pro bifurkaci systému je tzv. bifurkační diagram [12]. Mezi nejznámější typy bifurkací patří: Hopfova bifurkace, tangenciální bifurkace nebo transkritická bifurkace [4]. Bifurkace může postupně vést ke vzniku chaosu. Typickými bifurkacemi týkajícími se pevného bodu, jsou: bifurkace sedlo-uzel, transkritická bifurkace, pitchfork bifurcation (pitchfork = vidle) a Hopfova bifurkace (superkritická a subkritická) [13].



Obrázek 3: Bifurkační diagram, upraveno dle [11]

Na obr. 3 je vyobrazen bifurkační diagram pro logistickou rovnicí

$$x_{(n+1)} = r \cdot x_{(n)} \cdot (1 - x_{(n)}) .$$

Je možné vidět části diagramu, které vykazují stabilní chování, a části, kde je chování naopak chaotické [2]. Do hodnoty $r < 3$ je pevný bod rovnice asymptoticky stabilní (malá změna hodnoty parametru r nehraje velikou roli na změnu hodnoty řešení x) [11]. Nicméně pro hodnoty parametru $r > 3$ dochází k rozdělení neboli bifurkaci. Systém začne „přeskakovat“ mezi dvěma hodnotami, přičemž toto střídání různých stavů a rozdělování pokračuje. Systém nejprve začne vykazovat dvě „větve“, poté na čtyři, osm, šestnáct atd. [2]. Nakonec systém začne vykazovat známky chaotického chování a nedá se předvídat, jaké hodnoty x pro daný parametr nabude [12]. Chaotické chování však nepřetržává pro všechny hodnoty $r > 3$. Je patrné, že diagram také obsahuje „periodická okna“, kdy systém osciluje mezi dvěma nebo více hodnotami [10]. Např. pro hodnotu $r = 1 + \sqrt{8} \approx 3,828427$ [10]. Předem bohužel není možné říct, kde tato „okna“ nastanou. Existuje však pojem jako *Feigenbaumova konstanta*, která má hodnotu $\delta \approx 4,6692016$; ta usnadňuje hledání dalších bifurkačních bodů za předpokladu znalosti dvou předchozích [4, 10]. Vzorec pro výpočet Feigenbaumovy konstanty je $\delta = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_k - \lambda_{k-1}}{\lambda_{k+1} - \lambda_k}$, kde hodnoty parametru λ_k jsou hodnoty parametru r v bodech, kde dochází k bifurkaci [10].

2.4 Testy chaotického chování

2.4.1 Největší Ljapunovův exponent

Největší Ljapunovovy exponenty představují jistou charakteristiku chování dynamického systému. Důvodem výpočtu tohoto exponentu je zjistit, zda se systém chová stabilně či chaoticky [14]. Máme-li soustavu obyčejných diferenciálních rovnic danou předpisem

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{f}(\mathbf{x}), \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0. \end{aligned}$$

Pokud řešení x této soustavy je v čase t_0 vzdáleno od $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ o velmi malou hodnotu d_0 , tak v dostatečně malém čase $t - t_0 > 0$ je vzdálenost obou trajektorií dána vztahem [5]

$$d \approx d_0 e^{\lambda(t-t_0)}, \quad (2.1)$$

λ je zmíněný největší Ljapunovův exponent. Z tohoto vztahu je vidět, že pokud $\lambda > 0$, tak se vzdálenost mezi trajektoriemi zvětšuje, a pokud je $\lambda < 0$, pak se vzdálenost mezi trajektoriemi zmenšuje [5, 14]. Největší Ljapunovův exponent tedy vyjadřuje míru divergence dvou řešení (trajektorií), která jsou v čase t_0 od sebe vzdálena o d_0 [5], a obvykle se tedy na základě vztahu 2.1 počítá jako [15]

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{d_0 \rightarrow 0} \frac{1}{t - t_0} \ln \frac{d}{d_0}.$$

Pokud dané trajektorie konvergují k nějakému atraktoru systému, tak tento systém není citlivý na změnu počátečních podmínek [5, 14]. Tato vlastnost je charakteristická pro disipativní (systém, který zvyšuje organizovatelnost, neboli snižují entropii) [10].

Je-li největší Ljapunovův exponent záporný, tak to značí, že systém má asymptoticky stabilní pevný bod, je-li nulový, tak to znamená přítomnost stabilního periodického orbitu

(limitního cyklu), a pokud je kladný, tak to indikuje buďto přítomnost nestabilního pevného bodu, nebo (je-li systém ohraničený-trajektorie neutíkají do nekonečna) chaotické chování [5, 10, 14].

2.4.2 0–1 test

0–1 test je další metoda, která indikuje, zda se systém chová chaoticky pro danou posloupnost hodnot [16, 17]. Výhodou této metody je její jednoduchost a možnost pracovat nejen s diferenciálními rovnicemi (lépe řečeno s jejich řešeními), ale také lze použít naměřené hodnoty [17]. Tato metoda nachází uplatnění i v medicíně, a to konkrétně v kardiologii, kdy pomocí této metody lze na základě naměřených dat ze srdce předčasně indikovat např. infarkt [18].

Nyní je namístě zavést parametr K_c , který bude reprezentovat daný systém. Pokud bude $K_c \approx 1$, tak se systém chová chaoticky, pokud $K_c \approx 0$, tak se systém bude chovat regulárně [16]. Regulárním chováním je zde myšleno, že systém je v určitém smyslu stabilní.

Je dána posloupnost $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$, která představuje hodnoty stavu systému v časech t_i , $i = 1, \dots, N$ [16].

Dále jsou vytvořeny dvě funkce proměnné m

$$p_c(m) = \sum_{j=1}^m \varphi_j \cos(jc),$$

$$q_c(m) = \sum_{j=1}^m \varphi_j \sin(jc),$$

kde $m = 1, 2, \dots, N$ a $c > 0$ je libovolně zvolené reálné číslo [16]. Poté je určen tzv. střední kvadratický posuv

$$M_c(m) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} ([p_c(j+m) - p_c(j)]^2 + [q_c(j+m) - q_c(j)]^2),$$

ze kterého lze dvěma způsoby vypočítat zmíněný parametr K_c [16]. První způsob spočívá v metodě nejmenších čtverců a druhý v korelační metodě.

Výpočet pomocí metody nejmenších čtverců vede na tvar [17]

$$K_c = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\log M_c(m)}{\log m}$$

Parametr K_c někdy ani není nutné počítat, jistý závěr lze vyslovit i na základě grafického pozorování dílčích hodnot p_c a q_c [17]. Pokud by vzniklá křivka byla „rozumná“, tak se systém bude chovat regulárně, zatímco pokud křivka bude připomínat Brownův pohyb (jak již bylo zmíněno v podkapitole 2.1), tak se jedná o chaotické chování [16].

Výpočet parametru K_c pomocí korelační metody vede na tvar

$$K_c = \text{corr}(\zeta, \delta) = \frac{\text{cov}(\zeta, \delta)}{\sqrt{\text{var}(\zeta) \cdot \text{var}(\delta)}},$$

kde $corr$ je kovariance daných vektorů a var je variace vektoru [16]. Vektor $\zeta = 1, 2, \dots, N_0$ a vektor $\delta = M_c(1), M_c(2), \dots, M_c(N_0)$. Pro N_0 platí $N_0 < m$ a zároveň $N_0 \ll N$ (v podkapitole 4.6 $N_0 = \frac{N}{20}$) [16].

2.5 Fraktální geometrie

Pojem fraktální geometrie, stejně tak jako pojem fraktály, není příliš letitý i přesto, že různí umělci a vědci s těmito útvary pracovali už dávno před vznikem těchto pojmů [1]. Fraktální geometrie je dnes uznávaným vědním oborem, který vznikl v šedesátých letech 20. století [1]. Jak již bylo zmíněno, za otce fraktální geometrie je označován Benoit Mandelbrot, který také zavedl pojem fraktál [2]. Fraktální geometrie ve své době vzniku nebyla příliš vítaná a mnoho tehdy známých vědců tuto teorii vůbec neuznávalo. Např. Charles Hermite roku 1893 prohlásil: „Odvracím se v hrůze od politováníhodné pohromy funkcí bez derivace [19].“ Podobně Poincaré označuje fraktály za „monstra“ a „urážku zdravého rozumu“. Píše, že jde jen o „arogantní kratochvíli“, „jsou vynalezené, jen aby ukázaly, že úvahy našich předků byly chybné“, „nikdy z nich nevzejde nic dalšího“, „nepřináší žádný užitek oboru“ [19].

Důvodem těchto názorů byl přílišný konzervatismus založený na euklidovské geometrii. Ta má však své limity, např. právě při popisu fraktálů. Mandelbrot tedy zavedl novou vědní disciplínu fraktální geometrii. Ta se používá pro popis útvarů, které nejsou hladké, ale jsou „rozlámané“, ze slova fraktál (fractus) [2, 11]. Tato teorie je vhodná pro popis útvarů, které jsou tzv. *soběpodobné* [1]. To je vlastnost, kterou vykazují zejména fraktály. Význam soběpodobnosti je možné si přestavit tak, že když je vzato některé místo fraktálu a je přiblíženo, tak zde je možné nalézt kopii tohoto původního fraktálu [1, 2]. Jinými slovy, nezáleží na měřítku, zda je pozorován celý fraktál, nebo jen jeho část. Jednoduchým příkladem je třeba blesk [2]. Pokud je někomu ukázána fotka blesku (který je také fraktál), tak nikdo nedokáže rozeznat, zda blesk měl velikost několik milimetrů a byl vytvořen v laboratoři, nebo zda je to blesk na obloze, který měl délku např. několika kilometrů.

Již zde byl zmíněn pojem geometricky hladký útvar. Pod tímto pojmem si asi každý dokáže představit nějakou křivku nebo trajektorii tělesa (třeba auta jedoucího po silnici). To, že je útvar geometricky hladký, o tom vypovídá jeho topologická dimenze [1, 2]. Topologická dimenze je dimenze, která je celočíselná [2]. Tedy ta, která je probírána v základních kurzech matematiky. Např. přímka je 1D útvar, čtverec, kruh nebo další rovinné útvary jsou dimenze 2 a prostor, ve kterém žijeme, je dimenze 3. Nicméně pokud je řeč o geometrických útvarech, které nejsou hladké, tak jejich dimenze nemusí a zpravidla není celočíselná (např. u fraktálů) [10].

2.6 Fraktály a jejich dělení

Fraktál nemá úplně přesnou striktní matematickou definici. Slovních popisů fraktálu je mnoho a každý poukazuje na určité jeho vlastnosti [4]. Jednou z variant je, že fraktál je objekt, jehož tvar nezávisí na velikosti měřítka, pod kterým je pozorován [2]. Další možností je množina, která má Hausdorffovu dimenzi vyšší než topologickou [10]. Fraktály jsou velmi složité obrazce, které mají široké uplatnění v různých vědních oborech, ale třeba i v umění. Zvláště se to projevovalo ke konci 20. století, kdy byla fraktální geometrie přijata jako korektní vědní disciplína a lidé najednou začali všude okolo sebe vidět

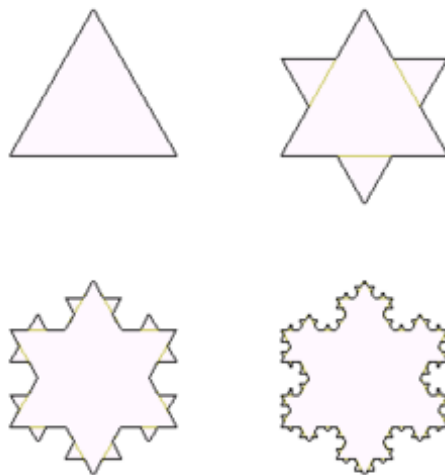
fraktály [9]. Fraktály mimo jiné mají vlastnost soběpodobnosti (soběpříbuznosti) [2, 4]. Soběpodobnost již byla definována výše. Soběpříbuznost je v přírodě častější než soběpodobnost. Důvodem je, že soběpříbuznost toleruje malé nepřesnosti, které se v přírodě přirozeně objevují [1, 2]. Soběpodobnost je často záležitostí matematických simulací či konstrukcí, které jsou uměle vytvořené [1]. Naopak příkladem soběpříbuznosti jsou objekty, se kterými se setkáváme v každodenním životě, jako jsou např. mraky, větvení řek, tvar pobřeží nebo již zmíněný blesk. Fraktály je možné rozdělit na deterministické (pravidelné) a stochastické (nepravidelné) [2].

Dalším faktorem, podle kterého je možné fraktály dělit, je typ algoritmu, kterým vznikají [2]:

- L-systémy,
- IFS,
- TEA,
- náhodné fraktály.

2.6.1 L-systémy

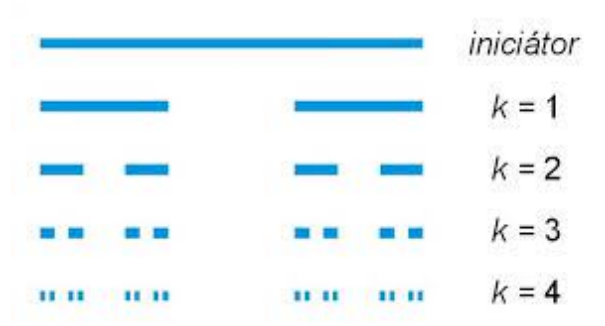
L-systém je jedním ze základních způsobů, jak generovat deterministické fraktály. Někdy je také nazývaný *Lindermayerův systém* podle maďarského botanika Aristida Lindenmayera, který ho poprvé použil pro růst řas [11]. Později zjistil, že pokud je L-systém používán pro dvojrozměrnou grafiku, tak lze programovat tzv. želví grafikou. Tu využívá např. software LOGO, kde pomocí jednoduchých příkazů lze generovat různé fraktály [1, 11]. Často se tento systém využívá také k vytváření biologických struktur, jako jsou stromy, cévy, řeky, atd. [4]. Příklady využití L-systému: Kochova vločka (viz obr. 4), Penroseovo dláždění nebo Cantorovo diskontinuum (viz obr. 5) [1]. Fraktálům vytvořeným L-systémem se také někdy říká graftály [1].



Obrázek 4: Kochova vločka, převzato z [1]

Kochova vločka byla jedním z prvních popsáných fraktálů. Poprvé se tento fraktál objevil roku 1904, kdy ho ve své práci publikoval švédský matematik Helge von Koch [2]. Kochovu vločku (a také Kochovu křivku) lze vytvářet pomocí L-systému [2]. Zajímavostí

je, že tato vložka má konečný obsah, ale její obvod je nekonečný [1, 2, 11]. Analogii této myšlenky je možné vidět i v práci Lewise Fry Richardsona, který se zabíral měřením délky pobřeží Velké Británie.

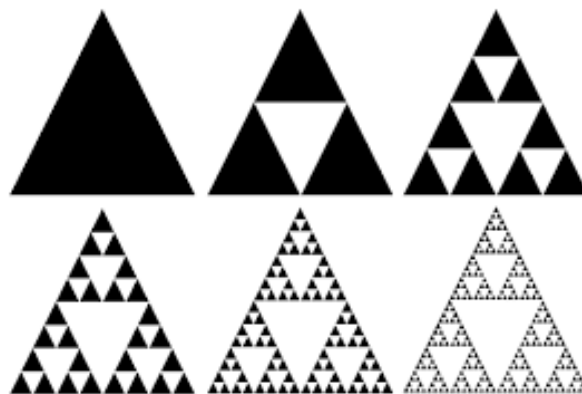


Obrázek 5: Cantorovo diskontinuum, převzato z [1]

2.6.2 IFS

Zkratka IFS je odvozena z anglického názvu Iterated Function System, který je někdy do češtiny překládán jako systém iterovaných funkcí [4]. Ačkoliv se tento systém vytváření fraktálů řadí mezi způsoby vytváření deterministických fraktálů, tak lze tímto způsobem vytvořit i fraktál, který bude stochastický [11].

Existují dva způsoby vytváření IFS fraktálů. Ten první je stochastický neboli náhodný, kdy je určena nějaká množina pravidel, která jsou dopředu sepsána [4]. Každému pravidlu z této množiny je přiřazena nějaká pravděpodobnost toho, kdy nastane. Poté je zvolen libovolný počáteční bod, na který je aplikován náhodný výběr nějakého pravidla z dané množiny. Toto pravidlo vygeneruje nějaký nový bod nebo množinu bodů, které jsou potom brány jako nové počáteční body a je na ně aplikováno nějaké další pravidlo z množiny pravidel [4]. Takto se nechá proběhnout spoustu iterací, než daný systém vykreslí fraktál.



Obrázek 6: Sierpinského trojúhelník, upraveno dle [2]

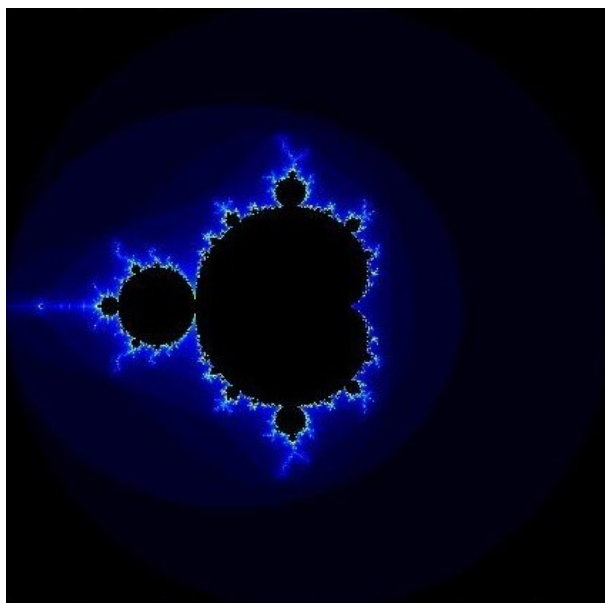
Jako další metodu je možné použít metodu prosté iterace pro generování IFS fraktálů [4, 11]. Ta se skládá z kopírování původního obrazce, který je následně transformován, a tyto obrazce jsou následně sloučeny [4]. Sloučením vznikne nový obrazec, na který je znovu aplikován tento postup. Nicméně oba způsoby vytváření fraktálů vedou ke stejnému

výslednému fraktálu, pokud je tedy použit dostatečný počet iterací [4]. Příkladem IFS fraktálu je třeba Sierpinského trojúhelník (viz obr. 6) [2].

2.6.3 TEA

Způsob generování fraktálů pomocí metody TEA pochází z anglického slovního spojení time-escaped algorithm [2, 20]. I přesto, že matematické předpisy pro vytvoření těchto fraktálů jsou velmi často úplně základní, tak výsledné fraktály jsou známé svojí složitostí. S tím je spojen i fakt, že výpočty i pomocí počítače bohužel trvají velmi dlouho a zatím neexistuje způsob, jak tyto výpočty zkrátit [4]. Faktor, který nám ovlivňuje délku výpočtu, je např. počet iterací, který je požadován (tedy jak moc podrobný fraktál je požadován) [4]. TEA fraktály patří mezi nejrozšířenější způsoby tvoření fraktálů, protože tyto fraktály jsou velmi složité, a dají se jím generovat i nejznámější fraktály. Někdy se tento systém tvoření fraktálů nazývá dynamický systém nebo též polynomické fraktály [11]. Dynamický systém je systém, který je závislý na nějaké veličině, kterou většinou bývá čas (tzn. vyvíjí se v čase) [11]. Odtud je tedy odvozen název tohoto systému.

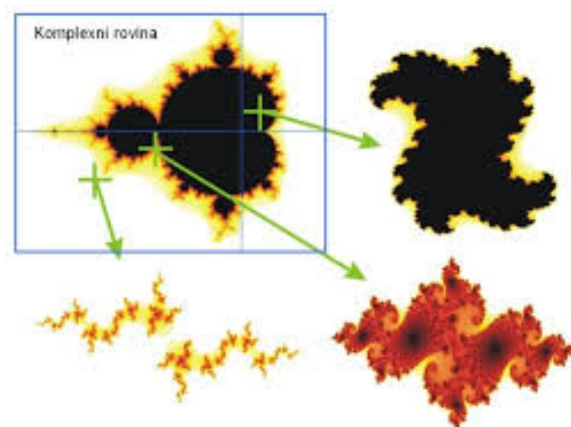
Princip metody TEA je založen na iterování vhodné funkce (obvykle v komplexním oboru) s vhodnou volbou startovacího bodu, přičemž je sledováno, zda posloupnost iterací konverguje [2]. Prakticky o tom je rozhodnuto tak, že je nastaven určitý „práh“; pokud iterace tuto hodnotu překročí, tak sledovaný bod do výsledného fraktálu nepatří, v opačném případě patří [9]. To, jak rychle se tento proces děje, lze ohodnotit přiřazením barvy zmíněnému bodu [1].



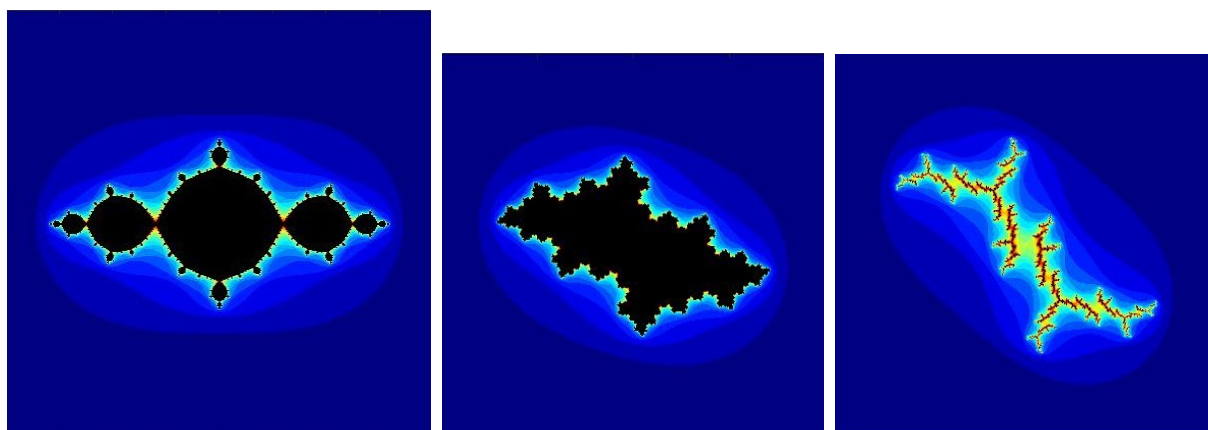
Obrázek 7: Mandelbrotova množina

Mandelbrotova množina (viz obr. 7) a *Juliovy množiny* (viz obr. 9):

Mandelbrotova množina spadá mezi fraktály, které jsou tvořeny systémem TEA [1]. Jedná se o patrně nejznámější fraktál a lze jej chápat jako sjednocení jistých Juliovy množin (tzv. kvadratických Juliovy množin) [1, 9]. Standardně se Mandelbrotova množina definuje jako množina všech $c \in \mathbb{C}$, pro která konverguje (ve výše uvedeném smyslu, kdy je



Obrázek 8: Juliovy množiny v závislosti na zvoleném parametru k , převzato z [1]



(a) $c = -0,95892 + 1,2246 \cdot 10^{-16}i$ (b) $c = -0,54402 - 0,4303i$ (c) $c = -0,13235 - 0,95949i$

Obrázek 9: Příklady Juliových množin pro konkrétní hodnoty parametru c

sledováno překročení nastaveného prahu) posloupnost iterací daná předpisem $z_{n+1} = z_n^2 + c$ při $z_0 = 0$ [9]. Naproti tomu kvadratickou Juliovu množinu lze definovat jako množinu všech bodů $z_0 \in \mathbb{C}$, pro které konverguje iterační proces $z_{n+1} = z_n^2 + c$ při $z_0 = 0$, při pevně zvoleném $c \in \mathbb{C}$ [2, 9]. Jsou-li hodnoty c v Mandelbrotově množině, dostaneme dílčí fraktály, ze kterých je tato množina tvořena (viz obr. 8) [1, 20].

2.6.4 Náhodné fraktály

Náhodné fraktály jsou odlišné od předchozích typů v tom, že v sobě neukrývají žádnou pravidelnost ani symetričnost [4, 11]. Je to tím, že se zde objevuje náhodný jev, který do výsledné množiny vnáší nepravidelnost. Tyto fraktály jsou vhodné k vizualizaci přírodních prvků, jako jsou stromy, řeky apod., které také nevykazují dokonale pravidelnou strukturu [11]. Jak moc se náhodnost při tvoření bude podílet na vytvoření daného fraktálu, bude v důsledku ovlivňovat jeho tvar i Hausdorffovu dimenzi [11].

Existuje vícero postupů, jak náhodné fraktály vytvářet, např. pomocí [4]:

- simulace Brownova pohybu,
- metody přesouvání středního bodu,
- náhodné procházky,
- spektrální syntézy.

Každý z těchto způsobů je vhodný pro něco jiného. Simulace Brownova pohybu se používá pro dvourozměrné fraktály, jako jsou např. toky řek [4]. Metoda přesouvání středního bodu je pak vhodná např. pro vykreslování tvaru krajiny (včetně hor) [11].

2.7 Dimenze

Pojem dimenze již byl v předchozím textu několikrát zmíněn. V této kapitole je uvedeno několik (vzájemně různých) konceptů dimenze množin v \mathbb{R}^n . V běžném slova smyslu lze dimenzi chápat jako počet nezávislých souřadnic, které jednoznačně určují pozici bodu vyšetřované množiny [1]. V následujících podkapitolách jsou zmíněny některé druhy dimenzí.

2.7.1 Topologická dimenze

Topologická dimenze je ta, která odpovídá výše zmíněnému intuitivnímu chápání. Jak už název napovídá, tak se používá hlavně v topologii, kde se neřeší tvar objektů, ale jsou podstatné pouze jejich vlastnosti (zda je objekt spojitý, obsahuje otvor a další) [10]. Tvar objektu není podstatný z důvodu, že daný útvar je možné různě stlačovat a deformovat [10]. Topologická dimenze je vždy celé číslo [2, 10]. Lze ji chápat jako vlastnost geometrických objektů, např. bod v prostoru má dimenzi 0, křivka dimenzi 1, plocha dimenzi 2 a těleso dimenzi 3 [2]. Pro vyšší dimenze už je názorná představa omezená.

2.7.2 Hausdorffova (fraktální) dimenze

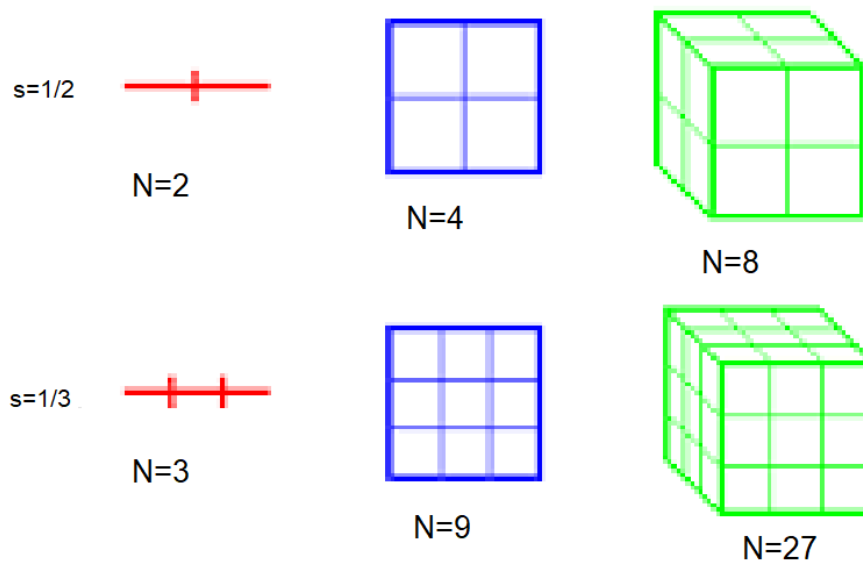
Hausdorffova, někdy nazývaná fraktální dimenze je důležitá veličina vhodná právě pro kvantitativní popis fraktálů [1]. Reflektuje totiž složitost struktury zkoumaných objektů a na rozdíl od topologické dimenze nemusí být tato dimenze celočíselná [11]. Přesněji, fraktály budou mít vždy tuto dimenzi neceločíselnou (ta vyjadřuje míru neuspořádanosti objektu, přičemž čím větší je rozdíl mezi topologickou a Hausdorffovou dimenzí, tím je tato neuspořádanost větší) [1]. Obecná definice Hausdorffovy dimenze vyžaduje pokročilejší matematické znalosti, nicméně v případě soběpodobných objektů lze odvodit poměrně jednoduchý vzorec pro její výpočet [2, 11]. Ten má tvar

$$D = \frac{\log N}{\log \frac{1}{s}}, \quad (2.2)$$

kde N je počet vytvářejících elementů objektu a s je parametr související s měřítkem (škálou) [4, 11].

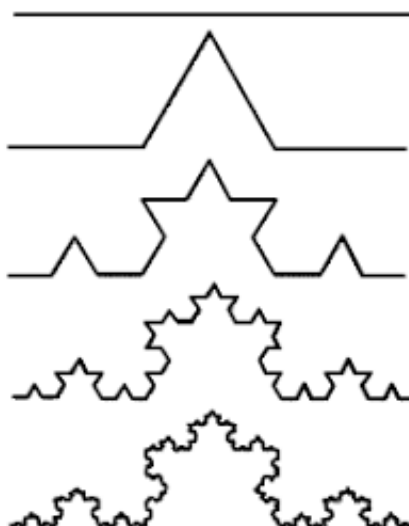
Výpočet je demonstrován na úsečce a čtverci (pro krychli by byl postup analogický). Vezmeme-li úsečku délky jedna, která je rozdělena na poloviny, pak počet dílků, který vznikne, je 2. To odpovídá situaci, kdy je na úsečce nahlíženo s dvojnásobným zvětšením, tedy $s = \frac{1}{2}$.

Je-li $D = \frac{\log 2}{\log \frac{1}{\frac{1}{2}}} = 1$, což odpovídá hodnotě topologické dimenze [10], nejedná se tedy o fraktál. Podobně v případě čtverce rozdělením obou stran na poloviny jsou získány čtyři menší čtverce, tj. $N = 4$ (viz obr. 10). Neboli zvětšením vzniklého menšího čtverce dvakrát je získán původní čtverec, tj. opět je $s = \frac{1}{2}$. Odtud $D = \frac{\log 4}{\log \frac{1}{\frac{1}{2}}} = 2$. V případě krychle by výsledek byl $D = 3$.



Obrázek 10: Dělení útvarů pro výpočet Hausdorffovy dimenze, upraveno dle [21]

Nyní je namístě se pokusit určit Hausdorffovu dimenzi fraktálu, konkrétně Kochovy křivky. Jelikož jako jeden z prvních fraktálů byla vytvořena Kochova vložka (Kochova



Obrázek 11: Kochova křivka, upraveno dle [9]

křivka), tak bude snahou spočítat její dimenzi. Kochova křivka „začíná“ také úsečkou, ale v tomto případě je zvětšena třikrát, neboli $s = \frac{1}{3}$ [2, 11]. Jsou ale potřeba čtyři dílky pro druhou iteraci křivky, tj. $N = 4$ (viz obr. 11).

Tedy $D = \frac{\log 4}{\log \frac{1}{3}} \approx 1,2619$ [2, 11], což je neceločíselná hodnota (vyšší než topologická, která je rovna jedné). Tento výsledek odpovídá intuici, kdy je možné vidět, že Kochova křivka je složitější než pouhá úsečka (která má dimenzi 1), ale zároveň není žádný rovinný obrazec (který má dimenzi 2).

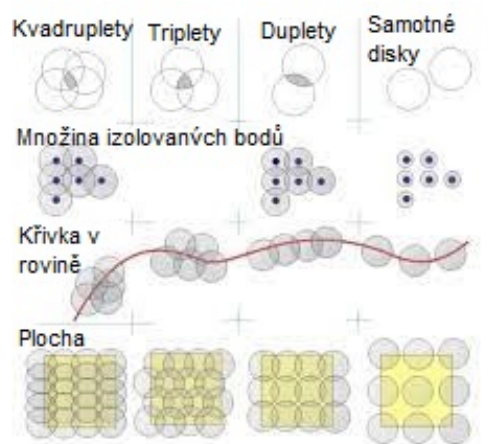
Je však potřeba zdůraznit, že uvedený výpočet Hausdorffovy dimenze platí pouze pro soběpodobné fraktály, kdy výpočetní algoritmus pro jednotlivé iterace je stále stejný [2].

2.7.3 Pokrývající dimenze

Pokrývající dimenze je většinou rovna topologické dimenzi, a proto se někdy bere za definici [1]. Opět bude demonstrována na konkrétním příkladu pro lepší názornost (viz obr. 12).

Je uvažována libovolná křivka v rovině, kruhy o libovolném poloměru r a je zvoleno přirozené číslo n . Je snahou křivku pokrýt otevřenými kruhy tak, aby každý její bod patřil maximálně do $n + 1$ kruhů a zároveň nepatřil do n kruhů [2]. Kruhy jsou poskládány tak, aby jejich průnik nebyl prázdný, pokud se jedná o dva kruhy, tak se toto uspořádání nazývá dublety, pokud o tři kruhy, tak triplety atd. [2]. Pokrývající dimenze je potom rovna číslu n [2].

Stejně je možné postupovat v případě čtverce, resp. libovolného rovinného obrazce. V případě vyšších dimenzí je potřeba na místo kruhu n -rozměrná koule [2].



Obrázek 12: Pokrývající dimenze, převzato z [2]

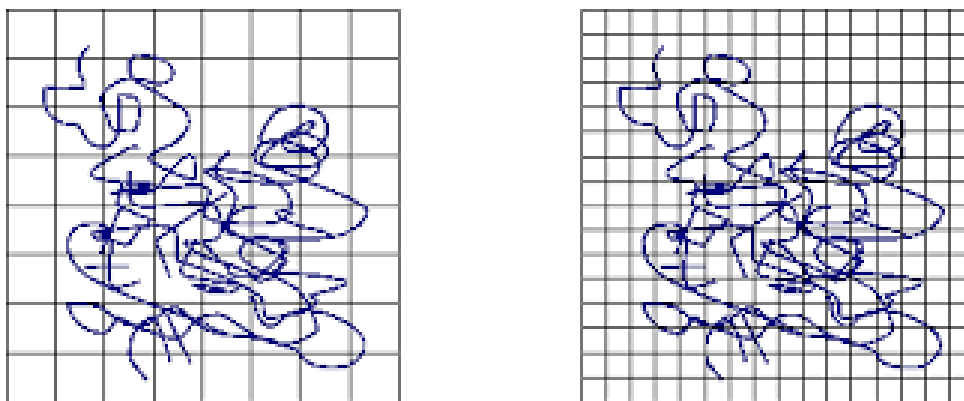
2.7.4 Mřížková dimenze (box-counting dimension)

Mřížková dimenze je další způsob, jak spočítat dimenzi fraktálu [2]. Pro lepší představu je uvažován fraktál, který má dimenzi mezi 1 a 2, tj. rovinný případ. Tento fraktál je vložen do mřížky takové, že ε je délka strany jednoho čtverečku mřížky a $N(\varepsilon)$ je počet čtverečků, které jsou neprázdné [2, 9]. Poté je tento krok zopakován s tím rozdílem, že ε bude poloviční, a opět je spočítán počet neprázdných čtverečků. Hustota čtverečků nemusí být dvojnásobná oproti předchozímu kroku, ale zpravidla se tak postupuje [9]. Mřížková dimenze je potom definovaná jako $D = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \log N(\varepsilon) / \log \frac{1}{\varepsilon}$ [9].

V praxi lze k odhadu mřížkové dimenze použít vzorec: $D = \frac{\log N_2 - \log N_1}{\log \frac{1}{\varepsilon_2} - \log \frac{1}{\varepsilon_1}}$, kde veličiny s exponentem 1 značí parametry s původní mřížkou a proměnné s exponentem 2 značí parametry s hustší mřížkou [9].

Jako příklad je možné uvést křivku z obr. 13, pro kterou je $N_1 = 48$, $\varepsilon_1 = \frac{1}{8}$ a $N_2 = 140$, $\varepsilon_2 = \frac{1}{16}$, a tedy $D = \frac{\log 140 - \log 48}{\log \frac{1}{16} - \log \frac{1}{8}} \approx 1,544$ [9].

Pro zajímavost je možné si uvést hodnoty mřížkové dimenze věcí, které nás běžně obklopují (viz tab. 1).



Obrázek 13: Mřížková dimenze, převzato z [9]

Tabulka 1: Odhady mřížkové dimenze v praxi, převzato z [1]

Pozorovaný objekt	Odhad dimenze
povrch mozku člověka	2,76
neerodované skály	2,2–2,3
obvod 2D – průmětu oblaku	1,33
pobřeží Velké Británie	1,25

2.8 Aplikace teorie chaosu

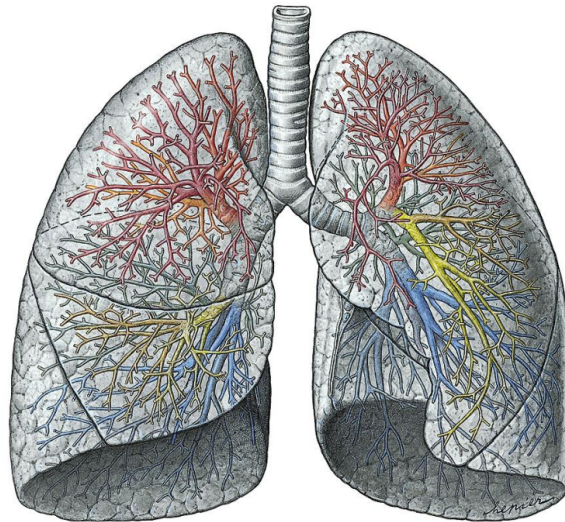
O teorii chaosu a věcí s ní spojených již bylo řečeno několik základních informací. Nyní bude představeno několik vybraných aplikací této teorie v praxi.

Několik souvisejících problémů již bylo naznačeno, např. motivací pro zabývání se fraktální geometrií bylo stanovení délky pobřeží. Lze tedy vytušit, že tato teorie nalezne uplatnění v příkladech, kdy již nevystačíme s euklidovskou geometrií, typicky složité struktury jsou tvořeny samotnou přírodou [1].

I když je pohlédnuto pouze na lidské tělo, hned lze nalézt řadu oblastí, kdy se teorie chaosu uplatňuje. Řada vědců zastává názor, že při činnosti srdce se objevují nepravidelnosti, které jsou typické pro nelineární dynamické systémy, a tedy je zde přímá spojitost s teorií chaosu [4].

V případě lidského mozku v současné době probíhá výzkum, kdy se odborníci snaží zjistit, zda souvisí inteligence člověka s tím, jak moc je jeho mozek „zkroucený“ [22]. Zde je vidět uplatnění fraktální dimenze.

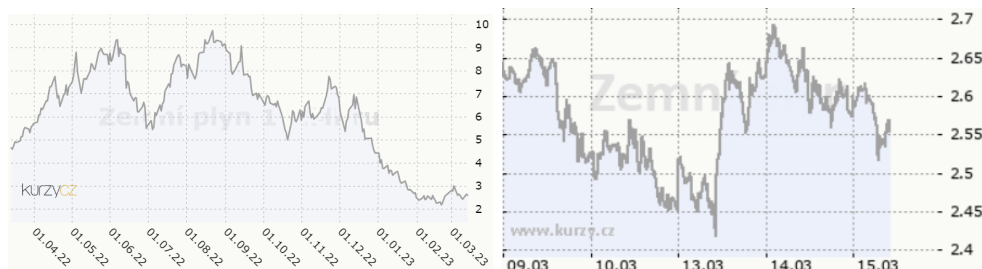
Dalším zajímavým úkazem jsou lidské plíce. Struktura plic je také velmi složitá, a tudíž by se mohlo jednat o fraktál (viz obr. 14). Postupným zkoumáním plic detailněji je možné vidět, že se skládají z průdušnic a ty se dále dělí na dvě (to naznačuje analogii, která byla zmíněna v případě bifurkace v podkapitole 2.3). Při pohybu pouze v teoretickém světě by mohlo toto dělení jít až do nekonečna. V přírodě je počet iterací vždy nějak omezen, např. tím, že atomy, ze kterých se všechno skládá, mají nějakou velikost. V případě plic je běžné (pokud člověk nemá nějakou vadu ve vývoji), že v plicích proběhne těchto dělení právě 23 [23]. Je to z toho důvodu, že poté už by průdušky byly tak drobné, že by jimi nemohly procházet atomy kyslíku nebo červené krvinky [23]. Tohoto poznatku lze velmi dobře využít. Pokud bude docházet právě ke 23 dělením, tak v případě předávání genetické



Obrázek 14: Lidské plíce, převzato z [23]

informace stačí velmi jednoduchý algoritmus, aby mohly být plíce seskládány, a nemusí být vytvořen celý „nákras“ plic [23].

Přejdeme-li od lidského těla např. k ekonomii, tak i zde se promítne teorie chaosu. Pokud jsou zkoumány grafy růstu a poklesu cen různých akcií, tak někdy je vývoj cen třeba za 10 let, jindy to je graf, který je v rámci milisekund. Pokud by tyto diagramy nebyly popsány (jednotky na osách), tak nikdo nedokáže říct, zda se jedná o vývoj ceny v rámci let nebo sekund (viz obr. 15) [4]. Důvodem je, že se jedná o fraktální strukturu, kdy oddálený i přiblížený útvar vypadají stejně. Mimochodem, tohoto faktu si všiml už Mandelbrot a byla to i jedna z věcí, jak se přiblížil k pojmům fraktál a fraktální geometrie [4].

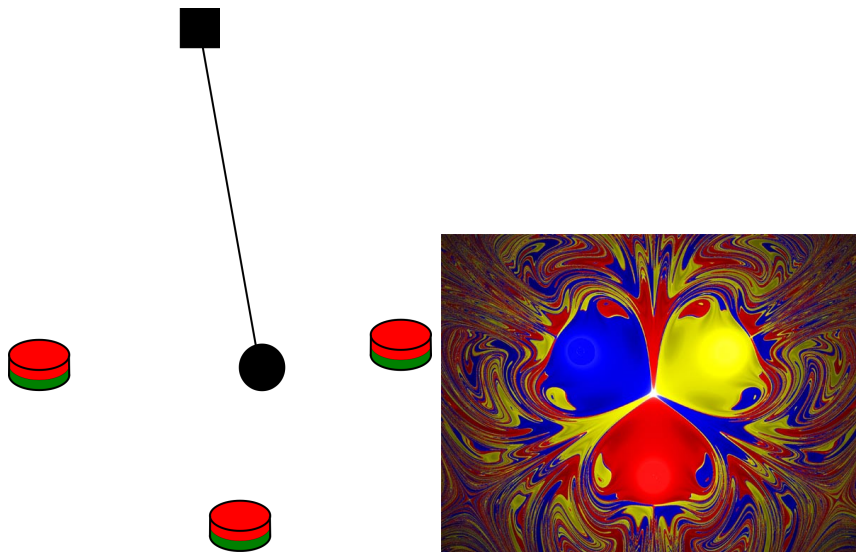


Obrázek 15: Vývoj cen na burze, převzato z [24]

Nyní by bylo vhodné pohlédnout na některé technické aplikace související s fyzikou a dynamikou. Pokus, který si každý může vyzkoušet doma, je pokus s vodovodním kohoutkem. Při otevření vodovodního kohoutku jen nepatrně tak, aby voda začala kapat, tak ze začátku budou kapky kapat v pravidelných intervalech a nic nebude naznačovat, že by to mohlo být jinak. Nicméně pokud se začne kohoutek otevírat více, tak kapky nejprve začnou kapat častěji, poté po dvou, až začnou kapat nepravidelně [4]. Nebude možné předpovědět, kdy odpadne další kapka [4]. Systém se začne chovat chaoticky až do doby, dokud nezačne téct voda proudem, protože v tomto případě nastane laminární proudění, které nevykazuje chaotické chování. Pokud by byly měřeny intervaly mezi odkapáváním kapek v jeho chaotické části a tato závislost byla vykreslena, tak by vznikl atraktor velmi podobný Hénonově atraktoru [4]. To „nejlepší“ přijde s puštěním kohoutku

naplno. V tomto případě vznikne turbulentní proudění, což vede na problém nazývaný svatým grálem fyziky [4]. Přestože se o jeho analytické vyřešení pokoušelo mnoho slavných vědců, doposud se to nikomu nepodařilo. Werner Heisenberg, který se turbulencí také zabýval na sklonku svého života, pronesl: „Na Boha budu mít dvě otázky. Proč relativita a proč turbulence. A opravdu věřím, že na první otázku by mohl mít odpověď.“ [19]

Mezi další fyzikální aplikace patří třeba Lorenzovo vodní kolo, které je možné vidět v iQLandiích a podobných zábavních centrech. I když se jedná o (na první pohled) snadný a nic neříkající exponát, tak toto kolo může při určitém množství přitékající vody vykazovat nepravidelnost toho, jakým směrem se vlastně kolo bude otáčet, a nebude možné dopředu předpovědět, kdy změní směr otáčení [4].



Obrázek 16: Magnetic pendulum, převzato z [25]

Dalším příkladem jednoduché „hračky“, která je ale velmi složitá, je magnetické kyvadlo. Jedná se o kovovou kuličku zavěšenou na provázku, kdy na podložce jsou umístěny tři stejné magnety [4]. Podle místa umístění kuličky ve výchozí pozici dojde k přitáhnutí k jednomu z magnetů. Pokud by byla výchozí pozice nepatrně změněna, tak může dojít k přitáhnutí kuličky jiným magnetem [25]. Jsou oblasti, kde dojde k přitáhnutí vždy stejným magnetem, ale jsou také oblasti, ve kterých není možné predikovat, který magnet kuličku přitáhne. Jedná se tedy o systém citlivý na vstupní polohu kuličky [25]. Pokud je každé výchozí pozici kuličky přiřazena jedna ze tří barev podle toho, ke kterému magnetu se přitáhne, výsledný obraz představuje fraktál (viz obr. 16).

Jako poslední příklad bude uvedeno dvojité kyvadlo (double pendulum), které je typickým příkladem chaotického systému, který bude řešen vzápětí.

3 Jednoduché matematické kyvadlo

Dříve než bude řešeno dvojitě kyvadlo a jeho popis pomocí diferenciálních rovnic, je vhodné si nejprve objasnit postup na jednoduchém matematickém kyvadle z důvodu větší názornosti. Celá kapitola vychází z textu [26]. Je uvažována pevně umístěná rotační vazba (viz obr. 17). Kmitání je uvažováno bez tření nebo tlumení.

Těleso o hmotnosti m je umístěno na konci nehmotné, dokonale tuhé tyče délky l . V kartézském souřadnicovém systému xy je uvažovaný úhel θ , což je úhel mezi nehmotnou tyčí a záporným směrem osy y .

Na těleso působí gravitační síla o velikosti $F_g = mg$, kterou lze rozložit do dvou navzájem kolmých směrů, a to normálového a tečného. Normálová síla F_n tedy působí ve směru tyče a je rovna velikosti, jakou je daná tyč namáhána na tah. Tečná síla F_t je síla, která způsobí pohyb kyvadla po vychýlení z rovnovážné polohy.

Tečnou sílu je možné vyjádřit jako $F_t = -mg \sin(\theta)$. Podle druhého Newtonova zákona $F = ma$ víme, že síla, která působí na dané těleso, způsobí zrychlení tělesa přímo úměrné této síle. Je známo, že úhlová rychlost je první derivací úhlu θ podle času (tj. $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$) a úhlové zrychlení je rovno druhé derivaci podle času (tj. $\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta}$). Zrychlení a je poté získáno z úhlového zrychlení jako $a = \alpha l = \ddot{\theta}l$.

Dosazením do druhého Newtonova zákona $-mg \sin(\theta) = m\ddot{\theta}l$. Po vydělení celé rovnice hmotností a dalších úpravách je obdržena nelineární diferenciální rovnice

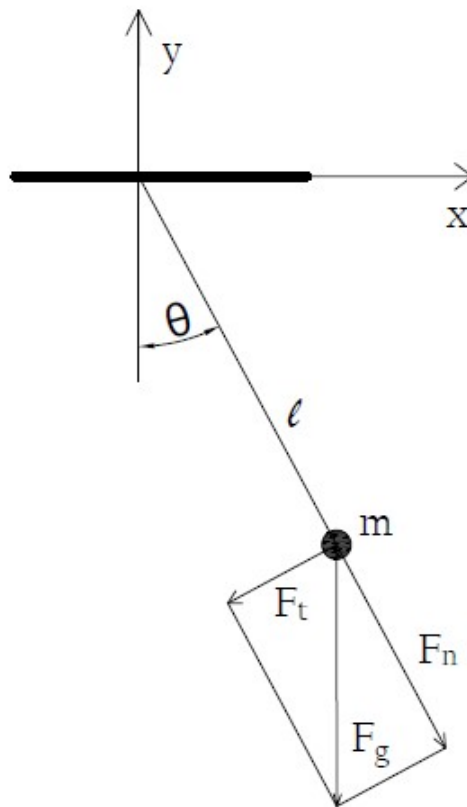
$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin(\theta) = 0.$$

Z důvodu jednoduššího zápisu je zavedena substituce $r = \sqrt{\frac{g}{l}}$, $g, l > 0$. Rovnice tak přejde na tvar

$$\ddot{\theta} + r^2 \sin(\theta) = 0. \tag{3.1}$$

Aby bylo získáno konkrétní řešení této rovnice, musí být přidány dvě počáteční podmínky $\theta(t_0) = \theta_0$, $\dot{\theta}(t_0) = \dot{\theta}_1$, představující počáteční výchylku a počáteční rychlost kyvadla. V případě dostatečně malých kmitů (tj. malých úhlů θ) lze provést zjednodušení $\sin(\theta) \approx \theta$, které způsobí, že rovnice přejde na tvar

$$\ddot{\theta} + r^2\theta = 0,$$



Obrázek 17: Jednoduché matematické kyvadlo

u kterého není obtížné napsat analytické řešení. Tímto krokem byla provedena tzv. linearizace úlohy. V případě zabývání se i většími kmity (lze připustit i úhel větší než 180°) kyvadla, je potřeba pracovat s původní rovnicí (3.1). Tuto nelineární rovnici již není možné vyřešit analyticky (řešení lze získat vhodnou numerickou metodou), je však možné vyšetřit některé její kvalitativní vlastnosti.

Jako první je vhodné si určit singulární body a vyšetření jejich stability. V singulárním bodě platí $\ddot{\theta} = 0$, $\dot{\theta} = 0$, což (po dosazení do rovnice) dává $\theta^* = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Příslušný charakteristický polynom má potom tvar $P(\lambda) = \lambda^2 + r^2 \cos(\theta^*)$. Pokud bude n liché, tak P má dva reálné kořeny $\lambda_{1,2} = \pm r$ s opačnými znaménky. Díky znalosti věty o typech singulárních bodů je známo, že se jedná o singulární bod typu *sedlo*.

Pokud bude číslo n sudé celé číslo (neboli $n = 2k \Rightarrow \theta^* = (2k\pi, 0)$), tak polynom bude mít tvar $P(\lambda) = \lambda^2 + r^2$, který má dva komplexně sdružené kořeny $\lambda_{1,2} = \pm ir$ ($r > 0$). Protože tyto kořeny leží v komplexní rovině na imaginární ose, θ^* nepředstavuje hyperbolický singulární bod, a tedy nelze použít Hartmanovu–Grobmanovu větu¹ [27]. Jinými slovy, θ^* nemusí být singulární bod typu *střed*.

Pro lepší představu o chování kyvadla je vhodné uvažovat jeho energetickou bilanci (součet kinetické a potenciální energie)

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - r^2 \cos(\theta) = K, \quad (3.2)$$

kde $K \in \mathbb{R}$. Je možné si všimnout, že derivací rovnice (3.2) podle času je opět získána diferenciální rovnice (3.1). Výhodou vztahu (3.2) je, že je možné snadno určit trajektorie v rovině $\theta\dot{\theta}$. Konkrétně je možné ihned vidět, že $|\dot{\theta}| = \sqrt{2(K + r^2 \cos(\theta))}$, což implikuje podmínku

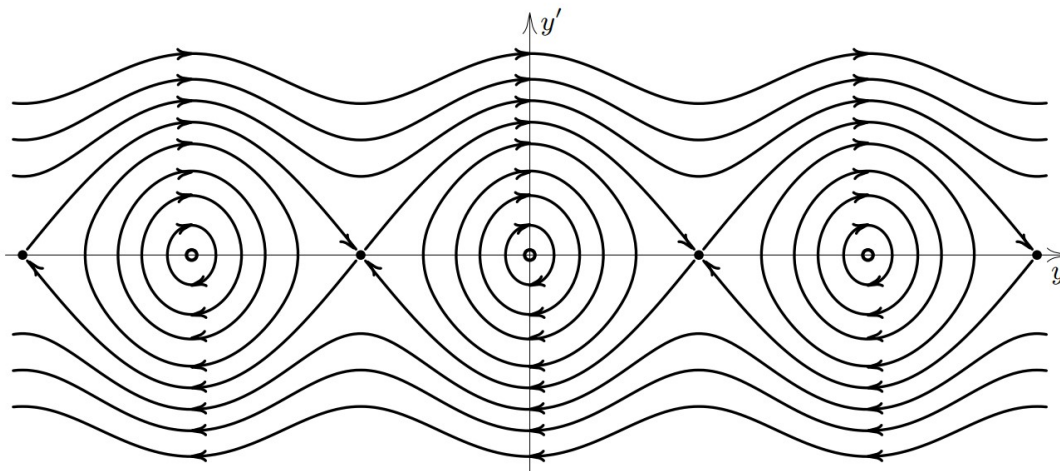
$$K + r^2 \cos(\theta) \geq 0. \quad (3.3)$$

- Jestliže $K = -r^2$, potom z rovnice (3.3) plyne, že $\cos(\theta) = 1$, a to je případ, kdy $\theta = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Z toho vyplývá, že se jedná o singulární body $\theta = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. To je situace, kdy je kyvadlo v dolní poloze a nehýbe se. Tento stav je zřejmě stabilní.
- Jestliže $K = r^2$ a zároveň $\dot{\theta} = 0$, tak $\theta = (2k + 1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, což odpovídá situaci, kdy je kyvadlo v horní (nestabilní) poloze.
- Jestliže $K = r^2$ a zároveň $\dot{\theta} \neq 0$, tak se kyvadlo pohybuje s výchylkou mezi $-\pi$ a π nebo také s výchylkou mezi $2k\pi - \pi$ a $2k\pi + \pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Jestliže $K = (-r^2, r^2)$, tak $\theta \in (-\theta_0, \theta_0)$, kde z rovnice (3.3) vyplývá, že $\pi > \theta_0 = \arccos(-K/r^2) > 0$. Analogicky se kyvadlo může pohybovat s úhlem $\theta \in (2k\pi - \pi, 2k\pi + \pi)$.
- Jestliže $K > r^2$, tak nerovnost (3.3) je splněna pro libovolný úhel $\theta \in \mathbb{R}$. Tomu odpovídá situace, kdy se kyvadlo nepřetržitě otáčí buď ve směru, nebo proti směru hodinových ručiček.

Z výše uvedené diskuze je možné provést konečnou klasifikaci singulárních bodů v rovině a vykreslit příslušné trajektorie. Singulární body $(\theta, \dot{\theta}) = (2k\pi, 0)$ reprezentují dolní polohu kyvadla, která je stabilní, a jsou to body typu *střed*. Body $(\theta, \dot{\theta}) = (2k\pi + \pi, 0)$

¹Hartmanova–Grobmanova věta [27]: Necht $x \in \mathbb{R}$. Uvažujme nelineární soustavu $\dot{x} = f(x)$, jejímž singulárním bodem je x^* , a matice linearizace $A = Df(x^*)$ má všechna vlastní čísla s nenulovými reálnými částmi. Pak existuje okolí $O(x^*)$ takové, že je na něm tento dynamický systém ($\dot{x} = f(x)$) topologicky ekvivalentní se systémem $\dot{x} = Ax$ (zhruba řečeno, trajektorie se v okolí hyperbolického bodu chovají stejně jako trajektorie linearizované soustavy v okolí počátku, přičemž je zachován tok času).

reprezentují horní polohu kyvadla, která je nestabilní, a jsou typu *sedlo*. Tyto singulární body a vybrané trajektorie jsou vyobrazeny na obr. 18.

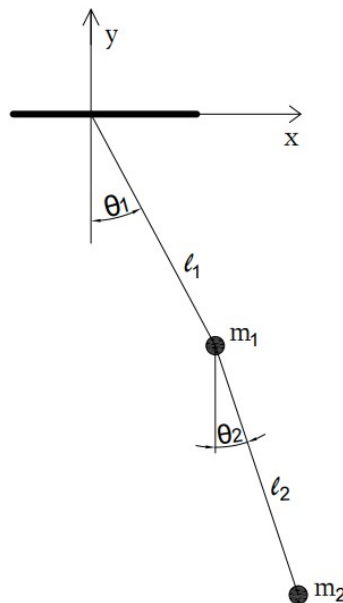


Obrázek 18: Jednoduché matematické kyvadlo, převzato z [26]

4 Dvojité kyvadlo

Jak už bylo naznačeno, tak dvojité kyvadlo (viz obr. 19) je typickým mechanickým systémem, který vykazuje chaotické chování.

Práce bude probíhat s ideálním modelem kyvadla, ve kterém není uvažováno tření (tření vnáší do modelu další členy, které by následnou kvalitativní analýzu udělaly mnohem obtížnější) [7]. Samotná konstrukce bude vycházet z modelu jednoduchého kyvadla z předchozí kapitoly, nyní jsou pouze uvažovány dvě nehmotné dokonale tuhé tyče, na jejichž koncích jsou umístěna závaží o daných hmotnostech. Celý mechanismus je umístěn v gravitačním poli Země, přičemž je uvažováno, že obě tyče mají rovnoběžné osy rotace, tj. dvojité kyvadlo koná pouze rovinný pohyb.



Obrázek 19: Dvojité kyvadlo

4.1 Odvození rovnic

Při odvození matematického popisu dvojitého kyvadla se vychází z Lagrangeovy rovnice II. druhu pro případ konzervativních sil

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = 0, \quad (4.1)$$

kde θ_i , $i = 1, 2$ je úhel mezi jednotlivými tyčemi a svislou souřadnou osou y , $\dot{\theta}_i$ je úhlová rychlost dané tyče a L je lagrangián, pro který platí

$$L = E_k - E_p. \quad (4.2)$$

Jako první krok je sestavení rovnic polohy hmotných bodů v souřadném systému (viz obr. 19)

$$\begin{aligned} x_1 &= l_1 \sin(\theta_1), \\ y_1 &= -l_1 \cos(\theta_1), \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} x_2 &= l_1 \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_2), \\ y_2 &= -l_1 \cos(\theta_1) - l_2 \cos(\theta_2), \end{aligned} \quad (4.4)$$

kde l_1 je délka první tyče, l_2 je délka druhé tyče, θ_1 je úhel mezi první tyčí a svislým směrem, θ_2 je úhel mezi druhou tyčí a svislým směrem, souřadnice x_1 , y_1 udávají polohu prvního hmotného bodu a souřadnice x_2 , y_2 udávají polohu druhého hmotného bodu.

Rychlosti hmotných bodů jsou získány derivací souřadnic polohy podle času ($\dot{\theta}_i = \frac{d\theta_i}{dt}$)

$$\dot{x}_1 = l_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1), \quad (4.5)$$

$$\dot{y}_1 = l_1 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1), \quad (4.6)$$

$$\dot{x}_2 = l_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) + l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2), \quad (4.7)$$

$$\dot{y}_2 = l_1 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1) + l_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2), \quad (4.8)$$

kde $\dot{\theta}_1$ je úhlová rychlost prvního ramene a $\dot{\theta}_2$ je úhlová rychlost druhého ramene.

Nyní je na řadě vyjádřit potenciální a následně i kinetickou energii celého systému

$$E_p = m_1 g y_1 + m_2 g y_2,$$

kde za y_1 a y_2 jsou dosazeny výrazy z rovnic (4.3) a (4.4), čímž je obdrženo

$$\begin{aligned} E_p &= -m_1 g l_1 \cos(\theta_1) + m_2 g (-l_1 \cos(\theta_1) - l_2 \cos(\theta_2)) = \\ &= -m_1 g l_1 \cos(\theta_1) - m_2 g l_1 \cos(\theta_1) - m_2 g l_2 \cos(\theta_2) \\ &= -(m_1 + m_2) l_1 g \cos(\theta_1) - m_2 l_2 g \cos(\theta_2). \end{aligned}$$

Celková kinetická energie je

$$E_k = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2,$$

kde neznámé v_1 a v_2 jsou rychlosti ramen, za které jsou dosazeny rychlosti v jednotlivých osách souřadného systému. Tedy je získán

$$E_k = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2).$$

Za proměnné \dot{x}_1 , \dot{x}_2 , \dot{y}_1 a \dot{y}_2 jsou dále dosazeny výrazy z rovnic (4.5), (4.7), (4.6) a (4.8).

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} m_1 [(l_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1))^2 + (l_1 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1))^2] + \frac{1}{2} m_2 [(l_1 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1) + l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2))^2 + \\ &+ (l_1 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1) + l_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_2))^2] = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 (\cos^2(\theta_1) + \sin^2(\theta_1)) + \frac{1}{2} m_2 [(l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \cos^2(\theta_1) + \\ &+ l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \cos^2(\theta_2) + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1) \cos(\theta_2)) + (l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \sin^2(\theta_1) + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 \sin^2(\theta_2) + \\ &+ 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1) \sin(\theta_2))] = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 [l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)]. \end{aligned}$$

Samotný lagrangián má potom tvar (dosazením do rovnice (4.2))

$$\begin{aligned} L = E_k - E_p &= \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)) \\ &+ (m_1 + m_2) l_1 g \cos(\theta_1) + m_2 l_2 g \cos(\theta_2). \end{aligned}$$

Zbývá sestavit Lagrangeovu rovnici II. druhu (4.1). Protože platí

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2),$$

tak

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2).$$

Dále

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - (m_1 + m_2) l_1 g \sin(\theta_1).$$

Dosazením do (4.1) je tedy získáno

$$m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + \\ + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2) l_1 g \sin(\theta_1) = 0,$$

a po úpravě

$$(m_1 + m_2) l_1 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2) g \sin(\theta_1) = 0 \quad (4.9)$$

Analogicky se postupuje i v případě rovnice pro úhel θ_2 . Ta má po úpravách tvar

$$l_2 \ddot{\theta}_2 + l_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - l_1 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + g \sin(\theta_2) = 0. \quad (4.10)$$

Důvodem výše uvedeného postupu je získání přímo dvou obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu ((4.9) a (4.10)) popisujících pohyb dvojitého kyvadla. Ty lze navíc přepsat na normální tvar

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{m_2 g \sin(\theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)}{(m_1 + m_2) l_1 - m_2 l_1 \cos^2(\theta_1 - \theta_2)} \\ - \frac{(m_1 + m_2) g \sin(\theta_1)}{(m_1 + m_2) l_1 - m_2 l_1 \cos^2(\theta_1 - \theta_2)} \quad (4.11)$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{l_1}{l_2} \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - \frac{g}{l_2} \sin(\theta_2) - \frac{l_1}{l_2} \cos(\theta_1 - \theta_2) \cdot \left[\frac{m_2 g \sin(\theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)}{(m_1 + m_2) l_1 - m_2 l_1 \cos^2(\theta_1 - \theta_2)} \right. \\ \left. + \frac{-m_2 l_1 \dot{\theta}_1^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - (m_1 + m_2) g \sin(\theta_1)}{(m_1 + m_2) l_1 - m_2 l_1 \cos^2(\theta_1 - \theta_2)} \right] \quad (4.12)$$

Jak je možné vidět, tak opět se jedná o nelineární rovnice. Na rozdíl od jednoduchého kyvadla však již není možné získat analyticky trajektorie řešení, je tedy potřeba se spolehnout na vhodnou numerickou metodu, viz následující podkapitola.

4.2 Numerické řešení

K řešení úlohy bylo použito Rungeho–Kuttovy metody, která je přímo implementována v Matlabu. Rungeho–Kuttovy (R–K) metody patří do rodiny explicitních jednokrokových metod [28]. Aplikují se na počáteční úlohy ve tvaru

$$\dot{y} = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0 \quad (4.13)$$

(může se jednat i o soustavu rovnic). Je známo, že metoda i -tého řádu přesnosti potřebuje k vyčíslení funkční hodnoty alespoň i bodů pro $i = 1, \dots, 4$ [28]. Metoda pátého řádu už by

potřebovala alespoň 6 bodů [28]. Z tohoto důvodu se nepoužívají metody příliš vysokých řádů.

Standardní používanou rutinou v Matlabu je `ode45`. Jedná se o metodu s řízením délky kroku, k čemuž je využita Dormandova–Princova metoda [28, 29]. Využívá se sedmi koeficientů [29]

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf(t_k, y_k), \\
k_2 &= hf\left(t_k + \frac{1}{5}h, y_k + \frac{1}{5}k_1\right), \\
k_3 &= hf\left(t_k + \frac{3}{10}h, y_k + \frac{3}{40}k_1 + \frac{9}{40}k_2\right), \\
k_4 &= hf\left(t_k + \frac{4}{5}h, y_k + \frac{44}{45}k_1 - \frac{56}{15}k_2 + \frac{32}{9}k_3\right), \\
k_5 &= hf\left(t_k + \frac{8}{9}h, y_k + \frac{19372}{6561}k_1 - \frac{25360}{2187}k_2 + \frac{64448}{6561}k_3 - \frac{212}{729}k_4\right), \\
k_6 &= hf\left(t_k + h, y_k + \frac{9017}{3168}k_1 - \frac{355}{33}k_2 - \frac{46732}{5247}k_3 + \frac{49}{176}k_4 - \frac{5103}{18656}k_5\right), \\
k_7 &= hf\left(t_k + h, y_k + \frac{35}{384}k_1 + \frac{500}{1113}k_3 + \frac{125}{192}k_4 - \frac{2187}{6784}k_5 + \frac{11}{84}k_6\right),
\end{aligned}$$

přičemž následující hodnota řešení y_{k+1} se spočítá metodou čtvrtého řádu jako

$$y_{k+1} = y_k + \frac{35}{384}k_1 + \frac{500}{1113}k_3 + \frac{125}{192}k_4 - \frac{2187}{6784}k_5 + \frac{11}{84}k_6.$$

Vedle toho se ještě spočítá alternativní hodnota řešení z_{k+1} metodou pátého řádu

$$z_{k+1} = y_k + \frac{5179}{57600}k_1 + \frac{7571}{16695}k_3 + \frac{393}{640}k_4 - \frac{92097}{339200}k_5 + \frac{187}{2100}k_6 + \frac{1}{40}k_7,$$

přičemž rozdíl těchto dvou řešení je považován za chybu [29]

$$|z_{k+1} - y_{k+1}| = \left| \frac{71}{57600}k_1 - \frac{71}{16695}k_3 + \frac{71}{1920}k_4 - \frac{17253}{339200}k_5 + \frac{22}{525}k_6 - \frac{1}{40}k_7 \right|.$$

Optimální krok se pak vypočítá jako

$$h_{\text{opt}} = h \left(\frac{\epsilon h}{2|z_{k+1} - y_{k+1}|} \right)^{\frac{1}{5}},$$

kde ϵ je nastavená tolerance (přesnost) a h je původní krok [29].

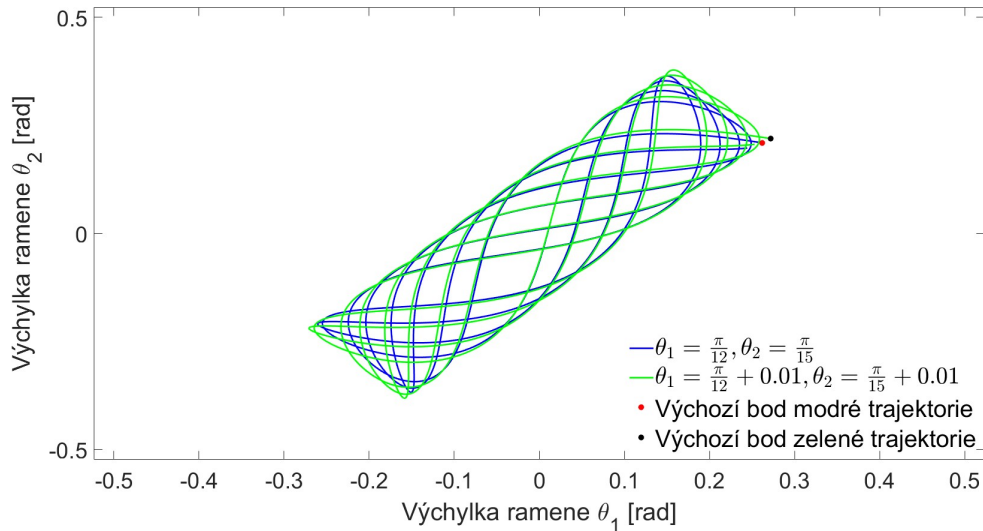
Substituce $y_1 = \theta_1$, $y_2 = \dot{\theta}_1$, $y_3 = \theta_2$ a $y_4 = \dot{\theta}_2$ převedou soustavu (4.11), (4.12) na soustavu čtyř diferenciálních rovnic prvního řádu

$$\begin{aligned}
 \dot{y}_1 &= y_2, \\
 \dot{y}_2 &= \frac{m_2 g \sin(y_3) \cos(y_1 - y_3) - m_2 l_1 (y_2)^2 \cos(y_1 - y_3) \sin(y_1 - y_3)}{(m_1 + m_2) l_1 - m_2 l_1 \cos^2(y_1 - y_3)} \\
 &\quad - \frac{m_2 l_2 (y_4)^2 \sin(y_1 - y_3) + (m_1 + m_2) g \sin(y_1)}{(m_1 + m_2) l_1 - m_2 l_1 \cos^2(y_1 - y_3)}, \\
 \dot{y}_3 &= y_4, \\
 \dot{y}_4 &= \frac{l_1}{l_2} (y_2)^2 \sin(y_1 - y_3) - \frac{g}{l_2} \sin(y_3) - \frac{l_1}{l_2} \cos(y_1 - y_3) \\
 &\quad \cdot \left[\frac{m_2 g \sin(y_3) \cos(y_1 - y_3) - m_2 l_1 (y_2)^2 \cos(y_1 - y_3) \sin(y_1 - y_3)}{(m_1 + m_2) l_1 - m_2 l_1 \cos^2(y_1 - y_3)} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{m_2 l_2 (y_4)^2 \sin(y_1 - y_3) + (m_1 + m_2) g \sin(y_1)}{(m_1 + m_2) l_1 - m_2 l_1 \cos^2(y_1 - y_3)} \right],
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

tj. soustavu ve tvaru (4.13).

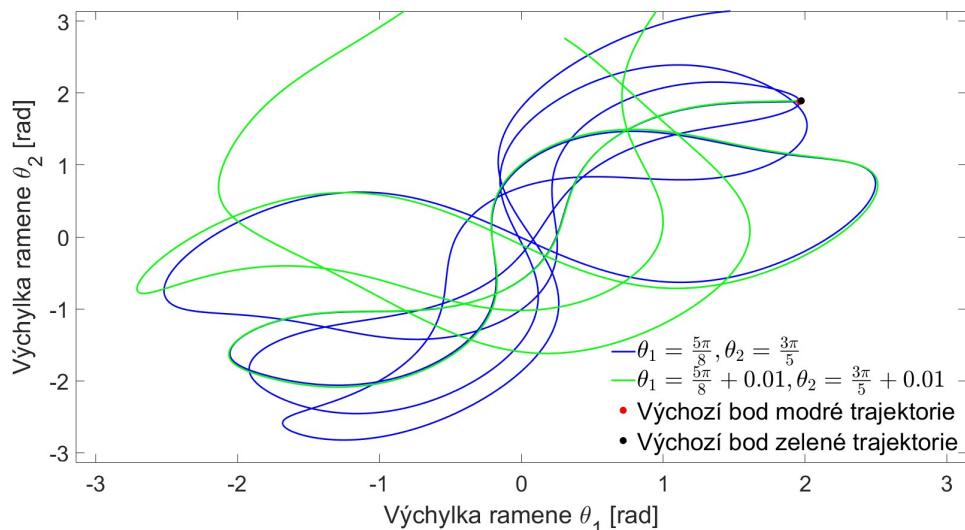
4.3 Interpretace výsledků

V soustavě (4.14) byly uvažovány následující fyzikální konstanty: $m_1 = 1$ kg, $m_2 = 1$ kg, $l_1 = 1$ m, $l_2 = 1$ m a $g = 9.81$ m · s⁻². Nyní jsou za počáteční podmínky brány dostatečně malé výchylky obou ramen a jejich počáteční rychlosti jsou uvažovány nulové. Obr. 20 představuje dvě různé trajektorie (pro dvě různé dvojice počátečních úhlů) ve fázovém podprostoru $\theta_1 \theta_2$.



Obrázek 20: Trajektorie pohybu dvojité kyvadlo, při malých výchylkách

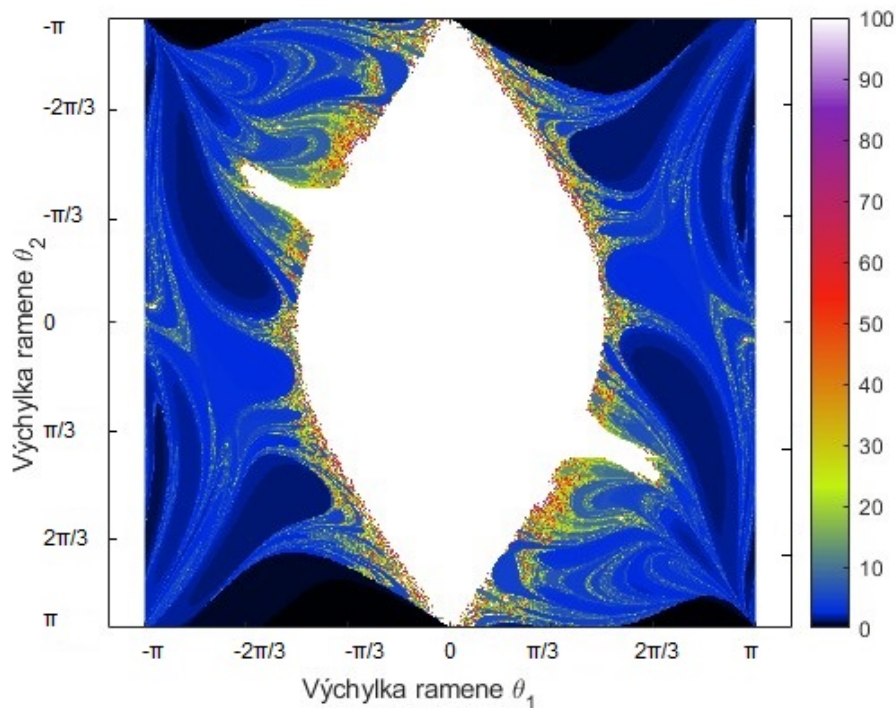
Je možné vidět, že trajektorie tvoří poměrně pravidelnou strukturu, je také patrné, že při blízkých hodnotách počátečních úhlů (odchylka byla volena 0,01 rad) zůstávají tyto trajektorie blízké (malá změna na vstupu způsobuje malou změnu na výstupu). Jinak řečeno, pohyb kyvadla je předvídatelný – kyvadlo se chová stabilně.



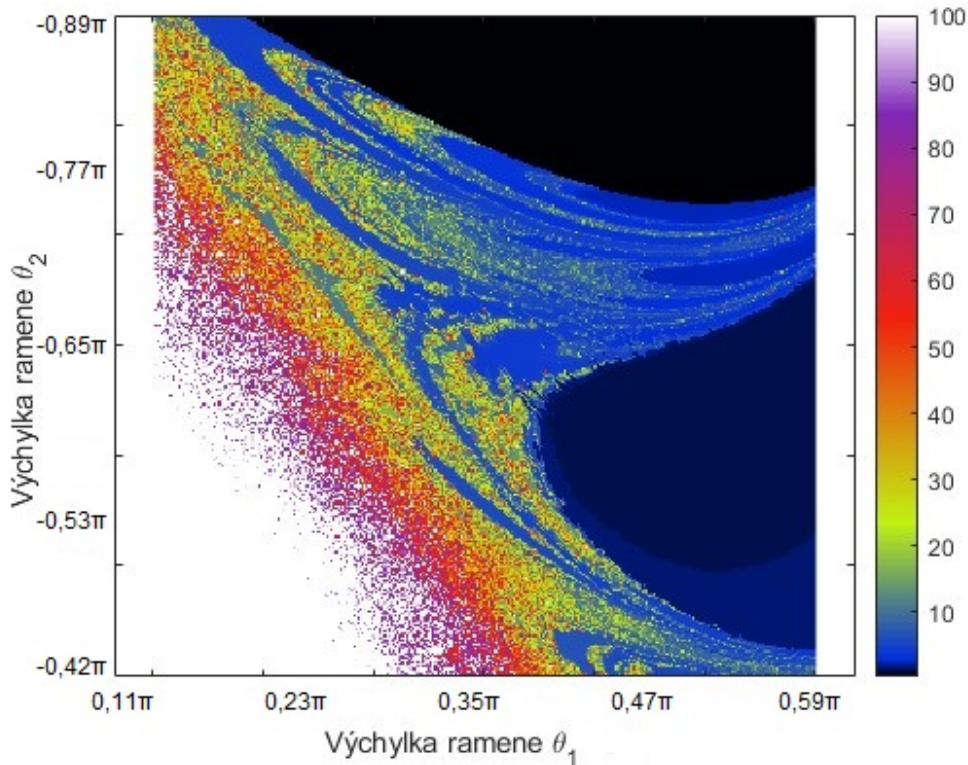
Obrázek 21: Trajektorie pohybu dvojité kyvadlo, při velkých výchylkách

Ve druhém experimentu je opět brána dvojice počátečních úhlů lišících se o 0,01 rad, avšak s hodnotami $\theta_1 = \frac{5\pi}{8}, \theta_2 = \frac{3\pi}{5}$ (resp. $\theta_1 = \frac{5\pi}{8} + 0,01, \theta_2 = \frac{3\pi}{5} + 0,01$). Obr. 21 ilustruje, že v tomto případě se trajektorie zpočátku chovají podobně, s narůstajícím časem se však tato „blížkost“ zcela vytratí. Začíná se již projevovat citlivost na vstupní data.

4.4 Fraktál dvojitého kyvadla



Obrázek 22: Graf časového intervalu doby do přetočení ramene pro jednotlivé počáteční podmínky

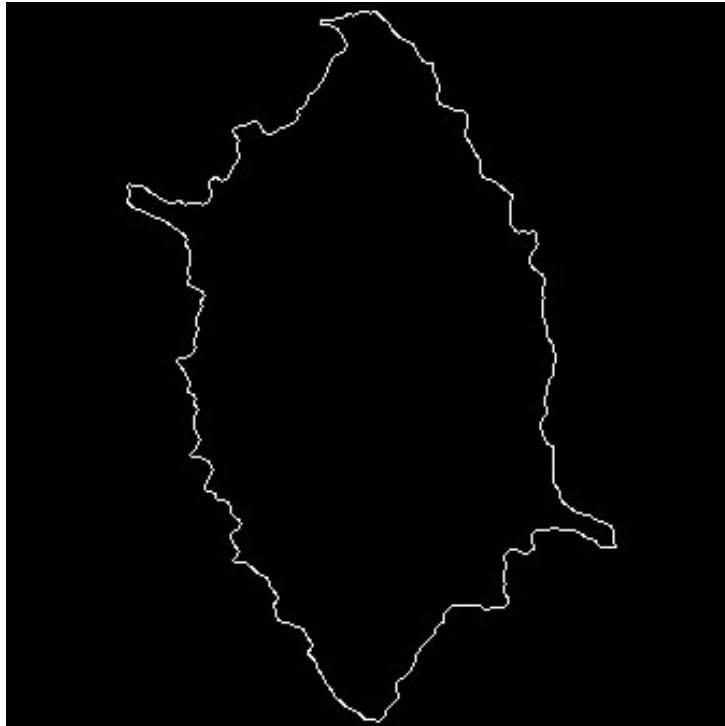


Obrázek 23: Zvětšení oblasti z obr. 22

V předchozí podkapitole bylo vykresleno několik trajektorií při pevně zvolených počátečních podmínkách. Nabízí se otázka, zda nelze vizualizovat chování dvojitého kyvadla, pokud by bylo pracováno s celou množinou (přípustných) počátečních podmínek. Zaměřením se na úhly θ_1 , θ_2 a uvažováním, že mohou nabývat libovolných hodnot mezi $-\pi$ a π . Úhlové rychlosti $\dot{\theta}_1$, $\dot{\theta}_2$ jsou považovány za pevné (a voleny jako nulové). Ostatní parametry soustavy, jako jsou délky či hmotnosti, zůstávají stejné jako v předchozí podkapitole (tj. $m_1 = 1$ kg, $m_2 = 1$ kg, $l_1 = 1$ m, $l_2 = 1$ m a $g = 9.81$ m \cdot s $^{-2}$).

Nyní nebude do roviny $\theta_1\theta_2$ vykreslována trajektorie, ale každému bodu (ve čtverci $\langle -\pi, \pi \rangle \times \langle -\pi, \pi \rangle$) bude přiřazena barva podobným algoritmem, který byl zmíněn v podkapitole o generování TEA fraktálů. Přesněji pro danou dvojici počátečních úhlů (θ_1, θ_2) je sledovaný čas, který je potřeba k překmitu druhého ramene (úhel θ_2 přesáhne hodnotu π , resp. $-\pi$). Tento čas je barevně ohodnocen. Pokud nedojde k překmitu během prvních 100 s, tak je přiřazena bílá barva a je předpokládáno, že by k němu nedošlo ani nikdy později. Podobný experiment byl proveden viz [30]. Výsledný scénář (z praktických důvodů byly body voleny na síti, která byla vytvořena rozdělením intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$ na 600 rovnoměrných dílků) je možné pozorovat na obr. 22. Zjevně se jedná o fraktál, v bílé oblasti nedochází k překmitu. Je možné si všimnout, že je-li $\theta_1 = 0$, tak ve většině případů k překmitu nedojde. Zajímavé také je, že (oproti očekávání) nedochází k osové symetrii (vůči ose $\theta_1 = 0$).

Zvětšením místa v okolí okraje bílé oblasti (viz obr. 23), je možné vidět, že sousední body mají různé barvy. Systém zřejmě vykazuje vysokou citlivost na počáteční podmínky, a tedy chaotické chování. Je ještě možné ověřit, že obr. 22 skutečně představuje fraktál. Vzhledem k neznalosti, zda je vyobrazená struktura soběpodobná, nelze přímo použít vzorec (2.2). I kdyby byl k dispozici obraz na podstatně jemnější síti, detekce soběpodobnosti



Obrázek 24: Binární obrázek vycházející z obr. 22

by nebyla snadná. Nabízí se proto vypočítat odhad mřížkové dimenze. Vzhledem k tomu, že hranice bílé oblasti je příliš složitá, je nutné nejprve provést její separaci z celkového obrazu pomocí rutiny `imshow` v Matlabu. Výsledkem je rovinná křivka (viz obr. 24). Ta je již z pohledu výpočtu mřížkové dimenze mnohem lépe uchopitelná. Algoritmem popsáním v podkapitole 2.7.4 je obdrženo odhad mřížkové dimenze 1,3078. Formálně je fraktál definován skrze neceločíselnou Hausdorffovu dimenzi, nicméně v praxi lze pro detekci použít i jiné druhy fraktální dimenze, diskuze tohoto přístupu je uvedena např. v [31].

4.4.1 Změna parametrů

Nyní by bylo namístě se zabývat otázkou, jak se změní chování dvojitého kyvadla při změně parametrů (pro připomenutí, doposud byly uvažovány $m_1 = 1$ kg, $m_2 = 1$ kg, $l_1 = 1$ m, $l_2 = 1$ m).

Nejprve je potřeba stanovit, jaké vlastnosti mechanismu vlastně sledovat. Nabízí se porovnávat např. mřížkovou dimenzi příslušných fraktálů, což ovšem může být problematický údaj z hlediska intuitivní představy. Jako vhodnější se jeví porovnávat poměr obsahu bílé oblasti (představující regulární chování dvojitého kyvadla) oproti obsahu čtverce $4\pi^2$ (opět je možné použít rutinu `imshow` při „filtraci hranice“).

V tabulce 2 jsou shrnuty výsledky pro 17 různých kombinací hmotností závaží a délek ramen (první řádek odpovídá původní situaci diskutované výše). Jednotlivé řádky jsou uspořádány tak, že nejprve byl měněn vždy pouze jeden parametr, aby bylo možné lépe sledovat, jak systém reaguje na tuto jednotlivou změnu. Na obr. 25 a 26 jsou potom vyobrazeny příslušné fraktály pro osm vybraných kombinací parametrů. Zatímco první čtyři fraktály (obr. 25) jsou podobné původnímu fraktálu z obr. 22 (vedle určité deformace bílé oblasti se fraktály liší také barevností, což indikuje větší počet počátečních úhlů, při kterých se druhé rameno kyvadla přetočí za delší dobu), druhá čtveřice fraktálů (obr. 26) již vykazuje poměrně odlišný tvar bílé oblasti, na obr. 26d lze dokonce pozorovat

Tabulka 2: Vypočítané hodnoty dvojitého kyvadla pro změny jeho parametrů

m_1 [kg]	m_2 [kg]	l_1 [m]	l_2 [m]	Mřížková dimenze [-]	Procentuální podíl bílé plochy v celém obrázku [%]
1	1	1	1	1,3078	27,19
0,5	1	1	1	1,4519	24,99
2	1	1	1	1,2946	28,57
1	0,5	1	1	1,2804	28,58
1	2	1	1	1,4559	25,13
1	1	1,5	1	1,2851	24,78
1	1	3	1	1,2741	24,14
1	1	1	1,5	1,3417	25,39
1	1	1	3	1,3769	17,65
0,5	2	1	1	1,2971	24,11
2	0,5	1	1	1,2181	23,04
1	1	3	1,5	1,3046	24,38
0,5	2	3	1,5	1,3119	18,34
2	0,5	3	1,5	1,2493	28,31
1	1	1,5	3	1,2679	16,51
0,5	2	1,5	3	1,3402	12,50
2	0,5	1,5	3	1,3044	19,99

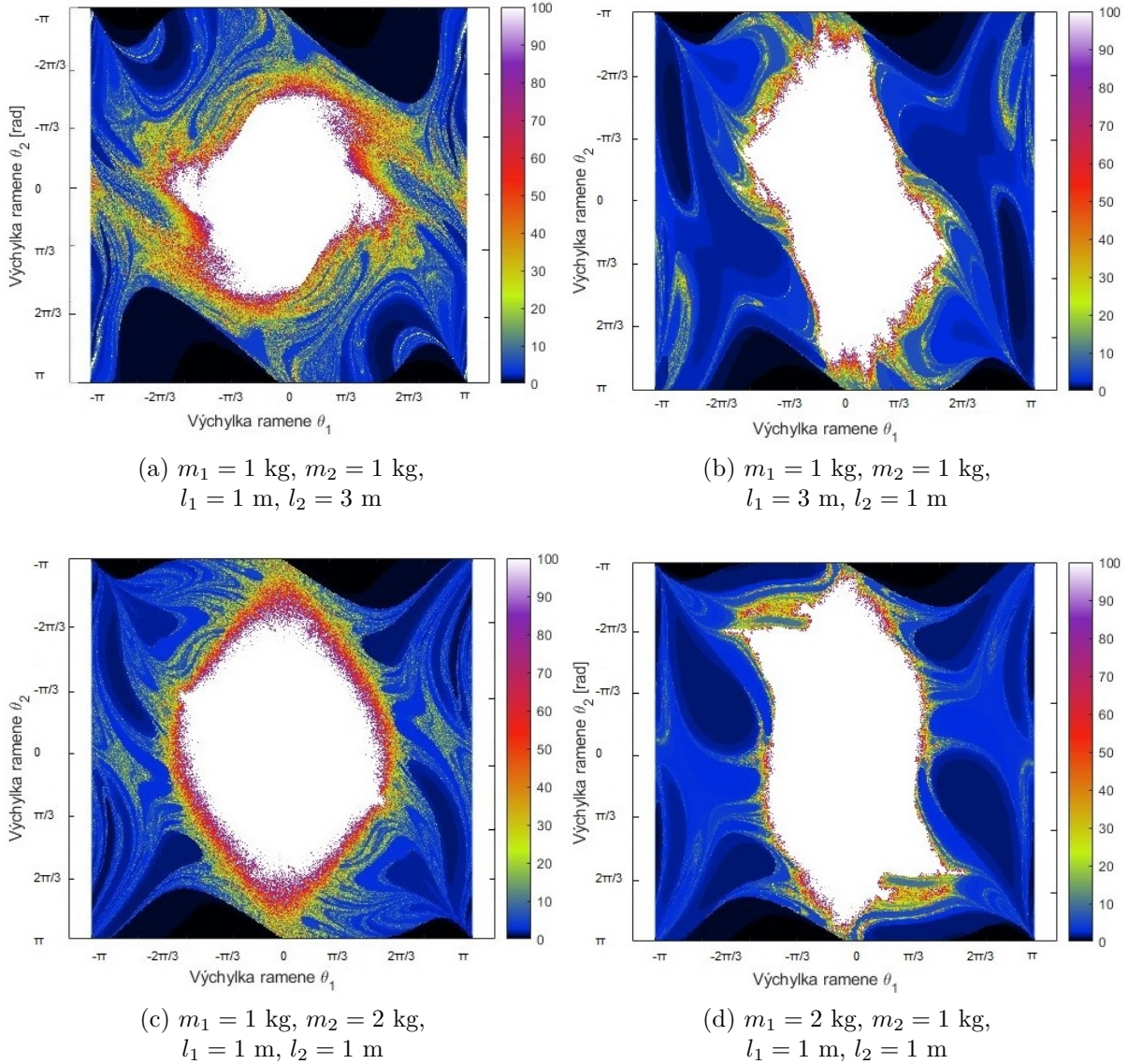
další dvě malé bílé oblasti, kde nedochází k přetočení druhého ramene. Celkově lze tedy konstatovat, že dynamika dvojitého kyvadla je velmi rozmanitá. Je však ještě vhodné poznamenat, že všechny vyobrazené fraktály vykazují jistou symetrii, nehledě na jejich složitost.

Na závěr je namístě vykreslit ještě několik závislostí mřížkové dimenze a podílu bílé oblasti na vybraném parametru (viz obr. 27 a 28). Je možné vidět, že se zvyšující se hmotností m_1 se snižuje mřížková dimenze a naopak podíl bílé části se zvyšuje (s rostoucí hmotností m_1 se tedy zvyšuje oblast regulárního chování kyvadla). Opačný efekt má zvyšování hmotnosti m_2 . Podobný úsudek lze vytvořit i při změně délky ramen.

Jako poslední poznámku je potřeba připomenout, že ve všech scénářích byly uvažovány nulové počáteční rychlosti. Lze tedy očekávat, že nenulové rychlosti by vedly k ještě rozmanitějšímu dynamickému chování dvojitého kyvadla.

4.5 Detekce pomocí největšího Ljapunovova exponentu

Smyslem této podkapitoly bude verifikace předchozích výsledků. Jak již bylo zmíněno v podkapitole 2.4.1, největší Ljapunovův exponent (LE) je nástrojem pro detekci chaosu v dynamickém systému. Podobnou technikou jako v případě obr. 22 je možné vytvořit nový grafický výstup, jediným rozdílem bude, že je nutné zvolit vhodnou prahovou hodnotu λ_p , bude-li LE větší než tato hodnota, tak jednotlivým bodům bude přiřazena červená barva, pokud menší, tak černá (viz podkapitola 2.4.1). Teoreticky by tato prahová hodnota měla být nulová (je nutné připomenout, že nulový LE indikuje existenci periodické trajektorie, tj. regulární chování systému, zatímco kladný LE indikuje chaos). Je totiž potřeba si uvědomit, že celý výpočet je numerické povahy (a je ovlivněn mnoha faktory jako volba metody, krok, koncový čas atp.), a tedy nelze dosáhnout přesně nuly. Obr. 29 demonstruje

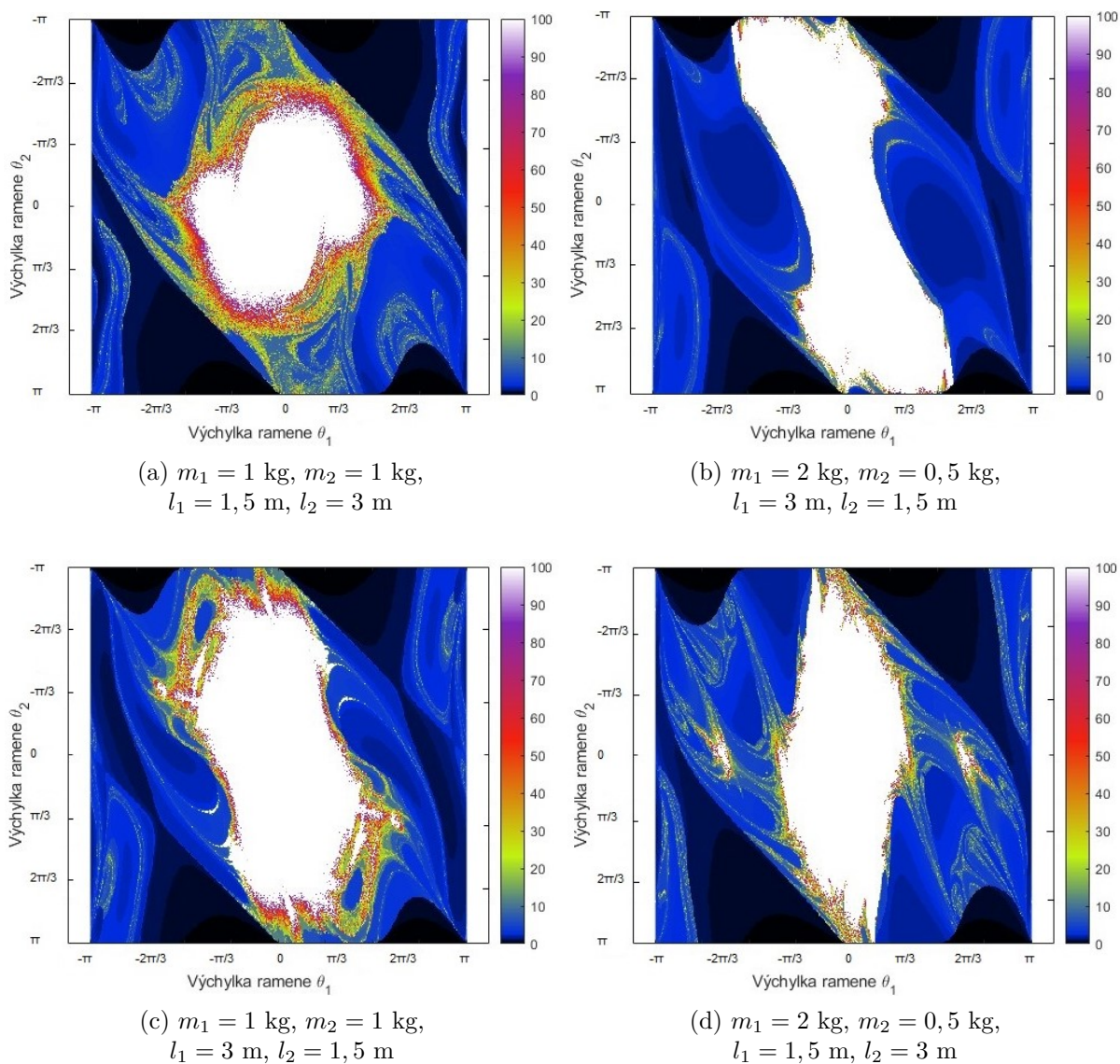


Obrázek 25: Vytvořené fraktály při změně jednoho parametru

několik voleb zmíněné prahové hodnoty, je možné vidět, že až při $\lambda_p = 0, 2$ dochází k dobré shodě s obr. 22. K samotnému výpočtu LE byl použit matlabovský skript uvedený ve zdroji [15].

Na obr. 30 je pro zajímavost vykreslena trajektorie řešení odpovídající počátečním úhlům $\theta_1 = \frac{\pi}{3}, \theta_2 = \frac{\pi}{5}$ (ty jsou v černé oblasti, tj. v oblasti regulárního chování kyvadla), přičemž je vykreslen pouze „konec“ trajektorie (tj. ustálený pohyb bodu o hmotnosti m_2). Jinými slovy, vyobrazená uzavřená křivka představuje stabilní limitní cyklus dvojitého kyvadla.

Je ještě vhodné poznamenat, že Matlab má vestavěnou rutinu `lyapunovExponent` pro výpočet LE na základě znalosti časové řady (není tedy potřeba znát rovnice, ze kterých byla tato časová řada získána) [32]. To je výhodné v situacích, kdy je potřeba pracovat pouze s naměřenými daty, je však potřeba něco vědět o procesu, který takovou časovou řadu vytváří [32]. Bez této znalosti je obtížné správně zvolit parametry rutiny `lyapunovExponent`. Jejich nesprávná volba obvykle vede k nespolehlivým hodnotám LE. To lze pozorovat na obr. 31. I když základní tvar poměrně odpovídá obr. 29d, lze pozorovat navíc dva artefakty v podobě dvou „eliptických“ útvarů.



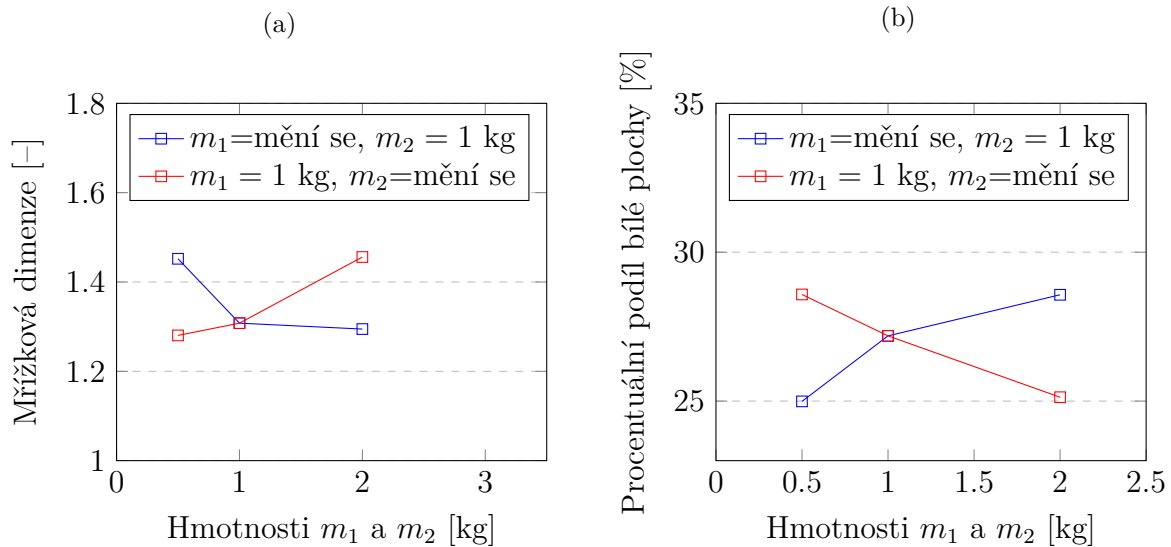
Obrázek 26: Vytvořené fraktály při změně více parametrů

4.6 0–1 test

Pro optimální výstup je namísto provést ještě jednu verifikaci obdržných výsledků, a to pomocí 0–1 testu. Při tom bude použita korelační metoda zmíněná v podkapitole 2.4.2. Nejprve je možné ilustrovat, podobně jako v případě metody Ljapunovova koeficientu, situaci na vybrané trajektorii. Volbou $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$ a $\theta_2 = \frac{3\pi}{4}$ spolu s nulovými počátečními rychlostmi obou hmotných bodů. Aby se předešlo nevhodné volbě konstanty c , je náhodně zvoleno 100 hodnot v intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$. Následně je spočítáno odpovídajících 100 hodnot parametru K_c a za výslednou hodnotu lze považovat jejich průměr.

Vykreslením vzájemné závislosti hodnot p_c a q_c v rovině (viz obr. 32), je možné vidět, že výsledná křivka není příliš hladká (pravidelná). To naznačuje, že studovaná trajektorie představuje chaotický pohyb. To potvrzuje i výsledná hodnota $K_c = 0,9604 \approx 1$.

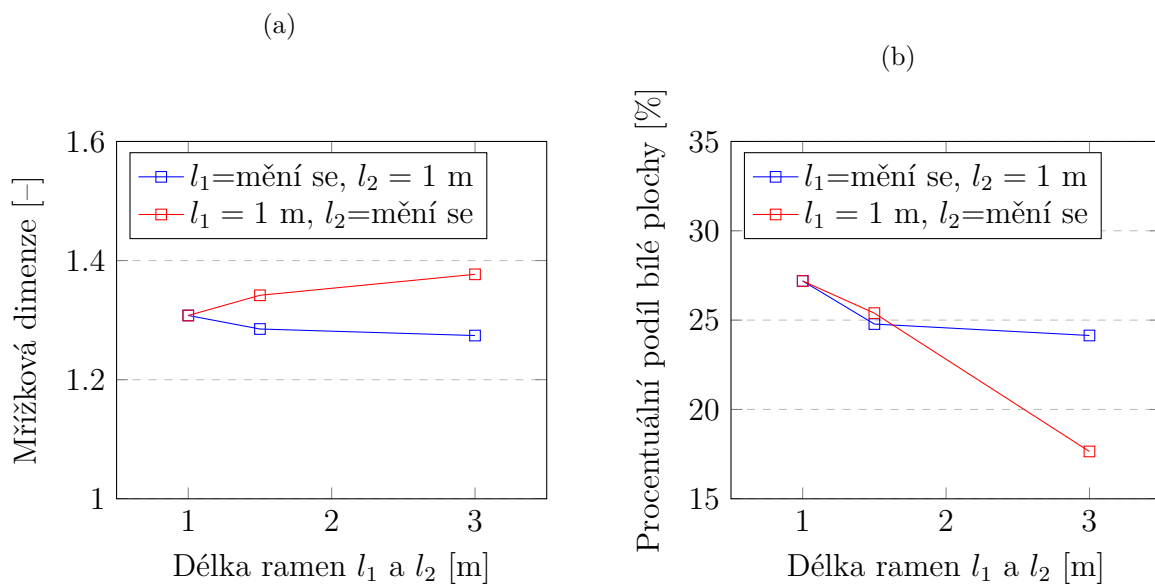
Nyní je vhodné aplikovat výše popsany algoritmus pro dostatečně „hustou“ síť dvojic (θ_1, θ_2) . Výsledný scénář je vykreslen na obr. 33. Opět lze pozorovat dobrou shodu s 22 a 29d (černá oblast představuje množinu počátečních podmínek vedoucích na regulární chování bez překmitů druhého ramene, červená potom množinu vedoucí na chaos).



Obrázek 27: Grafy, kdy se vždy mění pouze jedna hmotnost a $l_1 = 1$ m, $l_2 = 1$ m:

a) graf závislosti změny hmotnosti a mřížkové dimenze;

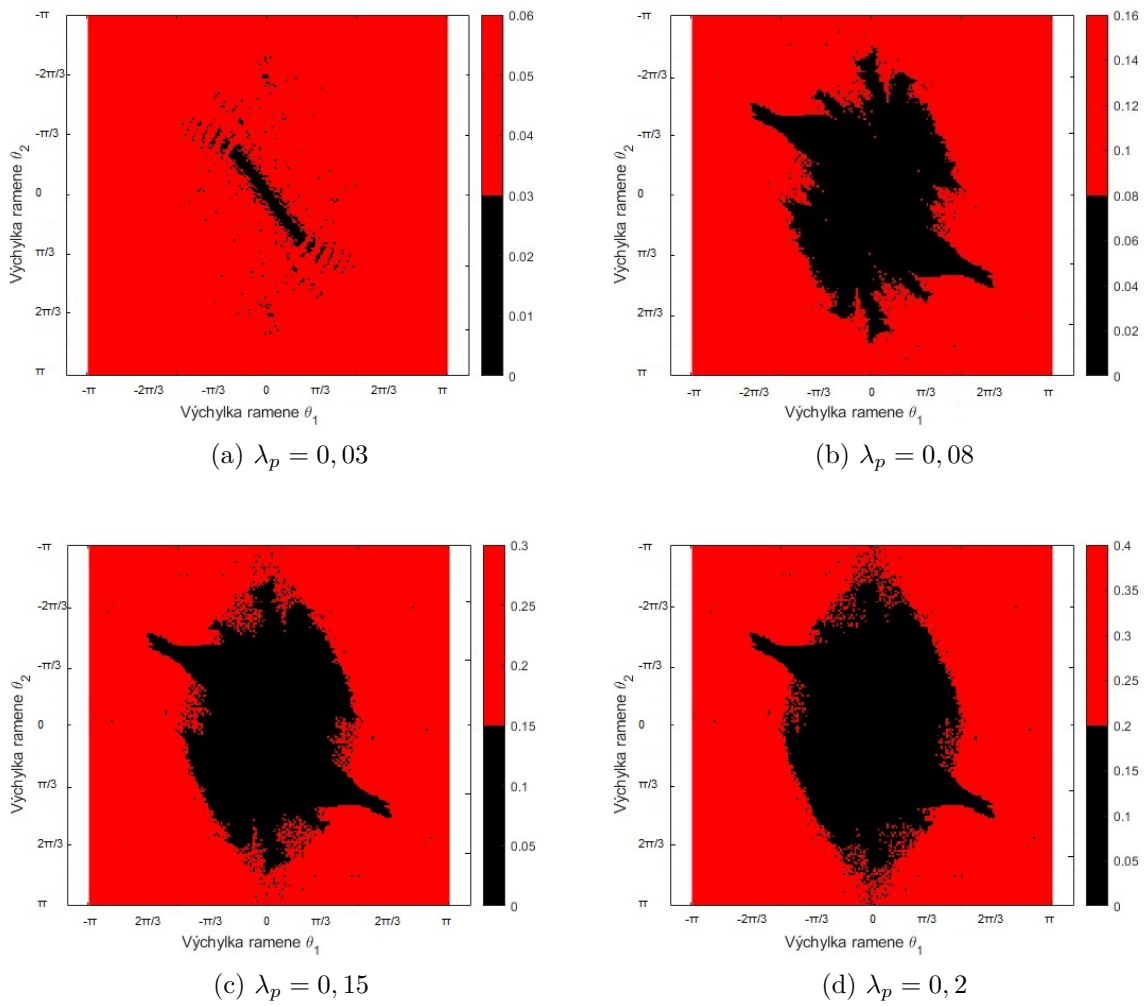
b) graf závislosti změny hmotnosti a procentuálního podílu bílé plochy v celém obrázku



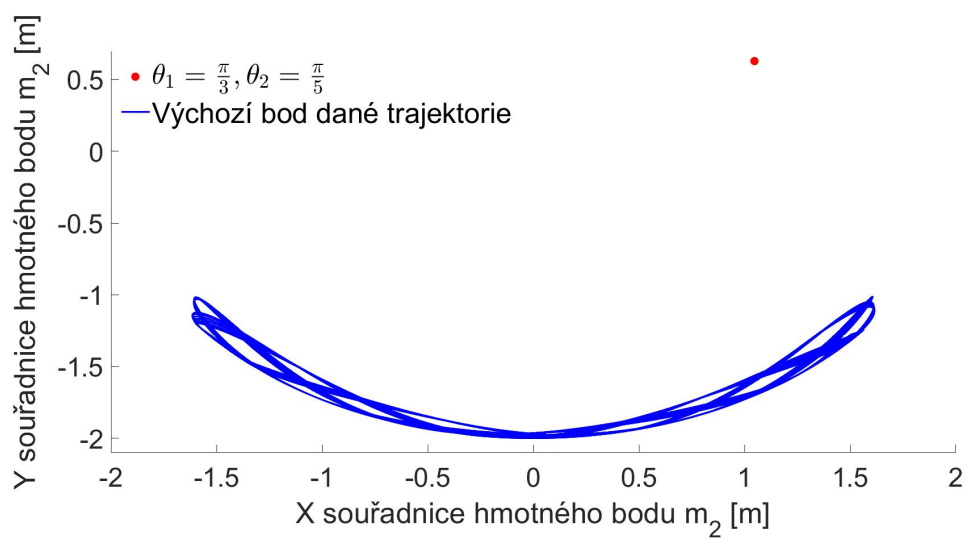
Obrázek 28: Grafy, kdy se vždy mění pouze jedna délka ramene a $m_1 = 1$ kg, $m_2 = 1$ kg:

a) graf závislosti změny délky ramen a mřížkové dimenze;

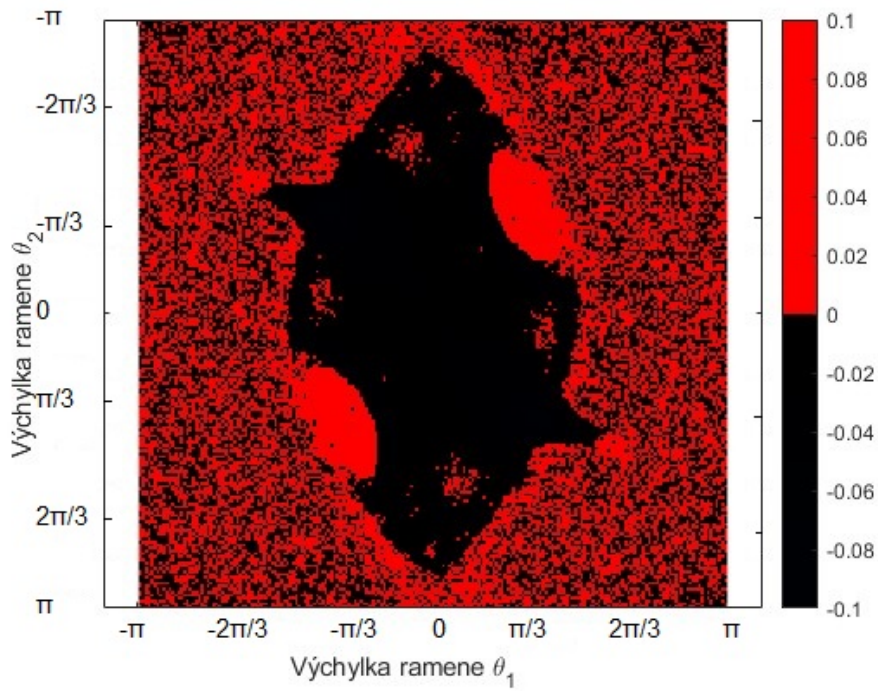
b) graf závislosti změny délky ramen a procentuálního podílu bílé plochy v celém obrázku



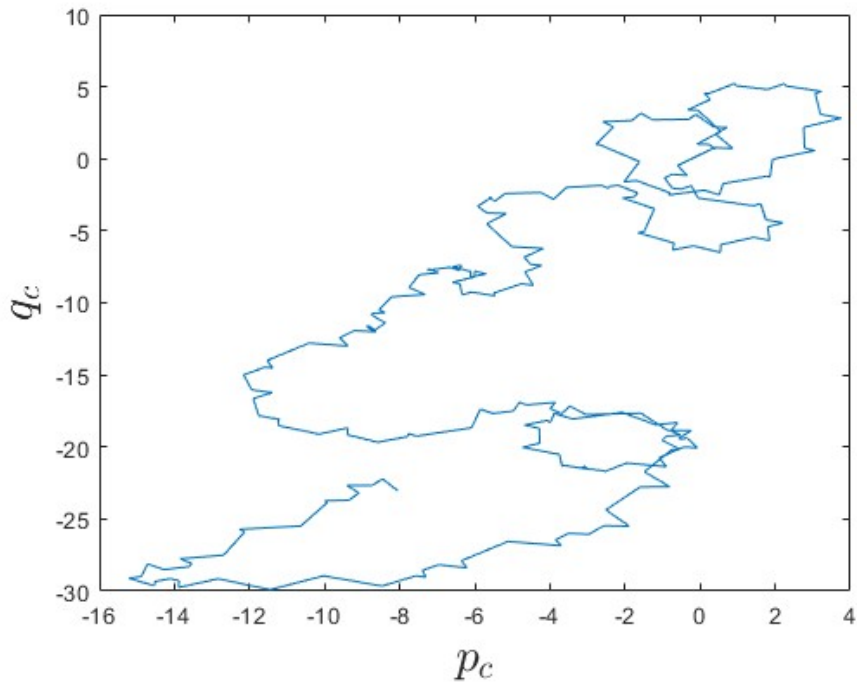
Obrázek 29: Ljapunovovy exponenty dvojitého kyvadla



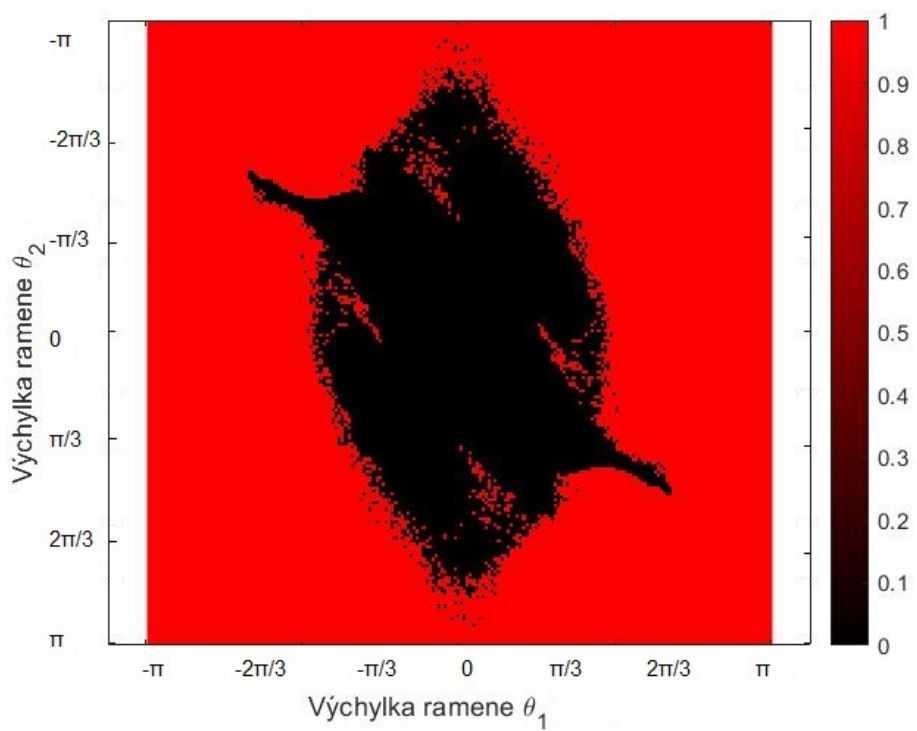
Obrázek 30: Trajektorie hmotného bodu m_2 při počátečním natočení ramen $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$ a $\theta_2 = \frac{\pi}{5}$



Obrázek 31: Graf Ljapunovových exponentů



Obrázek 32: p-q graf pro $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$ a $\theta_2 = \frac{3\pi}{4}$



Obrázek 33: Znázornění chaotické a stabilní oblasti pomocí 0–1 testu

Závěr

V práci byly popsány metody, které slouží k detekci chaosu, ať už v mechanických systémech či jiných. Jak bylo možné vidět, možností je vícero, vždy záleží na povaze studovaného problému, výpočetních možnostech a určité zkušenosti se studovanou oblastí.

Hlavním cílem bylo zanalyzovat mechanickou soustavu dvojitého kyvadla (včetně odvození matematického modelu) vzhledem k co nejširší množině vstupních parametrů. Zejména bylo snahou odhalit oblasti těchto parametrů, při kterých dochází k chaotickému pohybu kyvadla a při kterých naopak dochází ke stabilizaci soustavy. Za tímto účelem se podařilo vytvořit řadu ilustrujících grafických výstupů, které byly verifikovány několika metodami detekce chaosu. Je však namístě poznamenat, že k uvedeným výsledkům je potřeba přistupovat kriticky, je potřeba si totiž uvědomit, že veškeré výpočty mají numerickou povahu. Např. samotný model dvojitého kyvadla je řešen Rungeho–Kuttovou metodou, o které je známo, že je vhodná pro tzv. netuhé systémy (tj. systémy, které jsou „odolné“ z hlediska numerické stability). Otestování, zda náš systém je nebo není tuhý, bylo nad rámec práce, a tedy nebylo provedeno. Navíc vysoká citlivost chaotických systémů na počáteční data problému numerické stability nepomáhá. Je tedy vhodné konstatovat, že získané výsledky mají spíše kvalitativní charakter, z kvantitativního hlediska je nelze považovat za stoprocentně průkazné (zejména v bodech „blízko“ rozhraní regulárního a chaotického chování kyvadla). Je potřeba si také uvědomit, že uvedené algoritmy jsou dosti náročné z hlediska výpočetního času, je tedy potřeba nepodcenit návrh jednotlivých simulací.

Zajímavé je také sledovat změnu chování dvojitého kyvadla při změně hmotností či délek ramen. Příslušný fraktál se vizuálně nejenom deformuje, ale mohou se objevit i nové (nečekané) struktury. Systematičtější studium závislosti na změně parametrů může být jedním ze směrů, kterým by práce mohla pokračovat. V této souvislosti je však dobré připomenout, že také byly neustále uvažovány nulové počáteční rychlosti obou ramen, lze očekávat, že „uvolnění“ těchto rychlostí by značně obohatilo dynamiku kyvadla. Dalším směrem rozšíření práce by mohla být hlubší analýza uvedených metod (pouze pro připomenutí, že ani v samotné definici chaosu nepanuje v literatuře příliš jednotnost) či diskuze jejich vhodné numerické implementace.

Seznam použitých zdrojů

- [1] *Fraktály*. [B.r.]. Dostupné také z: <http://www.fit.vutbr.cz/~tisnovpa/fract/uvod.html>.
- [2] *Fraktální geometrie*. [B.r.]. Dostupné také z: <https://www.ksr.tul.cz/fraktaly/index.html>.
- [3] BREPTA, Rudolf; TUREK, František; PŮST, Ladislav. *Mechanické kmitání*. První vydání. Praha: Sobotáles, 1994. ISBN 80-901-6848-5.
- [4] *Nelineární fyzika a teorie chaosu*. České Budějovice, 2009.
- [5] TAYLOR, Robert L.V. Attractors: Nonstrange to Chaotic. *SIAM Undergraduate Research Online*. 2011, roč. 4, s. 72–80. ISSN 23277807. Dostupné z DOI: [10.1137/10S01079X](https://doi.org/10.1137/10S01079X).
- [6] Paradox délky pobřeží. *Matykání*. 2021, č. 48. Dostupné také z: <https://www.matfyz.cz/clanky/matykani-xlviiii-paradox-delky-pobrezi>.
- [7] STROGATZ, Steven H. *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. První vydání. Cambridge: Perseu publishing, 2000. ISBN 07-382-0453-6.
- [8] *Průvodce fraktální geometrií*. Praha, 2016.
- [9] *Počítačové generování fraktálních množin*. 2003/2004. Dostupné také z: <https://docplayer.cz/27108444-Resersni-prace-pocitacove-generovani-fraktalnich-mnoz-in-petr-paus-skolitel-zamereni-katedra-akademicky-rok-rok-studia.html>.
- [10] The chaos hypertextbook. [B.r.]. Dostupné také z: <https://hypertextbook.com/chaos/>.
- [11] *Interaktivní editor afinních transformací*. [B.r.]. Dostupné také z: <http://www.fit.vutbr.cz/~tisnovpa/publikace/diplomka/doc/ifscad.html>.
- [12] WANG, Weichung; HWANG, Tsung-Min; JUANG, Cheng; JUANG, Jong; LIU, Chin-Yueh; LIN, Wen-Wei. Chaotic Behaviors of Bistable Laser Diodes and Its Application in Synchronization of Optical Communication. *Japanese Journal of Applied Physics*. 2001-10-01, roč. 40, č. 10R, s. 7. ISSN 0021-4922. Dostupné z DOI: [10.1143/JJAP.40.5914](https://doi.org/10.1143/JJAP.40.5914).
- [13] Classification of bifurcations in 2-D systems, bifurcations of fixed points, the Hopf bifurcation, the supercritical and subcritical Hopf bifurcations, bifurcations of closed orbits, hysteresis on the level of cycles, examples of dynamical instabilities. 2022, s. 15. Dostupné také z: https://www.ioc.ee/~dima/YFX1520/LectureNotes_7.pdf.
- [14] DIECI, Luca; RUSSELL, Robert D.; VLECK, Erik S. Van. On the Computation of Lyapunov Exponents for Continuous Dynamical Systems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 1997, roč. 34, č. 1, s. 402–423. ISSN 0036-1429. Dostupné z DOI: [10.1137/S0036142993247311](https://doi.org/10.1137/S0036142993247311).
- [15] TANCJUROVÁ, Jana. *Metody indikace chaosu v nelineárních dynamických systémech*. Brno, 2019. Dostupné také z: <http://hdl.handle.net/11012/175359>.

- [16] MELOSÍK, M.; MARSZALEK, W. On the 0/1 test for chaos in continuous systems. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences Technical Sciences*. 2016-09-1, roč. 64, č. 3, s. 521–528. ISSN 2300-1917. Dostupné z DOI: [10.1515/bpasts-2016-0058](https://doi.org/10.1515/bpasts-2016-0058).
- [17] SUN, Ke-Hui; LIU, Xuan; ZHU, Cong-Xu. The 0-1 test algorithm for chaos and its applications. *Chinese Physics B*. 2010-11-01, roč. 19, č. 11. ISSN 1674-1056. Dostupné z DOI: [10.1088/1674-1056/19/11/110510](https://doi.org/10.1088/1674-1056/19/11/110510).
- [18] TOKER, Daniel; SOMMER, Friedrich T.; D'ESPOSITO, Mark. A simple method for detecting chaos in nature. *Communications Biology*. 2020, roč. 3, č. 1. ISSN 2399-3642. Dostupné z DOI: [10.1038/s42003-019-0715-9](https://doi.org/10.1038/s42003-019-0715-9).
- [19] *Math's Beautiful Monsters*. [B.r.]. Dostupné také z: <https://nautil.us/maths-beautiful-monsters-rp-234858/>.
- [20] *Exercises Computer Graphics Session 5 - Escape-Time Fractals*. [B.r.]. Dostupné také z: <http://soft.vub.ac.be/~tvcutsem/teaching/wpo/grafsys/ex5/les5.html>.
- [21] *Fraktály a L-systémy*. Praha, 2014/2015. Dostupné také z: https://www.wlyceum.cz/web/soubory/rp_david-dostal.pdf.
- [22] *Quora*. [B.r.]. Dostupné také z: <https://www.quora.com/How-do-you-increase-brain-capacity-Does-intelligence-have-a-direct-correlation-to-brain-surface-area-or-mass>.
- [23] Dýchací soustava II. In: [b.r.], s. 93. Dostupné také z: <https://anatomie.lf2.cuni.cz/sites/anatomie/files/page/files/2020/dychani2.pdf>.
- [24] *NÁKUPNÍ SPOLEČNOST S.R.O.* [B.r.]. Dostupné také z: <https://www.nakupnispolcnost.cz/v%C3%BDvoj-cen-na-burze>.
- [25] Fractal basins of attraction in a Magnetic Pendulum. In: [b.r.]. Dostupné také z: <https://mathematica.stackexchange.com/questions/120946/fractal-basins-of-attraction-in-a-magnetic-pendulum>.
- [26] FRANČŮ, Jan. Trajektorie autonomních rovnic v rovině II. Nelineární rovnice a soustavy. *Kvaternion*. 2021, roč. 8, č. 1-2, s. 59–82. ISSN 1805-1332. Dostupné také z: <http://hdl.handle.net/11012/204128>.
- [27] *Differential Equations and Dynamical Systems*. 2001. vyd. New York: Springer-Verlag, 2001. ISBN 0-387-95116-4.
- [28] BUTCHER, J. C. *Numerical methods for ordinary differential equations*. 2nd ed. Chichester, England ; John Wiley, c2008. ISBN 978-0-470-72335-7.
- [29] *Numerary*. [B.r.]. Dostupné také z: <https://numerary.readthedocs.io/en/latest/dormand-prince-method.html>.
- [30] The Double Pendulum Fractal. [B.r.]. Dostupné také z: <https://www.famaf.unc.edu.ar/~vmarconi/fiscomp/Double.pdf>.
- [31] WU, Jiaxin; JIN, Xin; MI, Shuo; TANG, Jinbo. An effective method to compute the box-counting dimension based on the mathematical definition and intervals. *Results in Engineering*. 2020, roč. 6, č. Volume 8, s. 100178. ISSN 25901230. Dostupné z DOI: [10.1016/j.rineng.2020.100106](https://doi.org/10.1016/j.rineng.2020.100106).

- [32] ROSENSTEIN, Michael T.; COLLINS, James J.; LUCA, Carlo J. De. A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1993, roč. 65, č. 1-2, s. 117–134. ISSN 01672789. Dostupné z DOI: [10.1016/0167-2789\(93\)90009-P](https://doi.org/10.1016/0167-2789(93)90009-P).

Seznam příloh

Přiložené skripty obsahují některé kódy v Matlabu pro výpočet a vykreslení některých výstupů použitých v této práci.

Mandelbrotova_mnozina	skript pro vykreslení Mandelbrotovy množiny (viz obr. 7)
Juliovy_mnoziny	skript pro vykreslení Juliových množin (viz obr. 9)
Dvojite_kyvadlo_fraktal	skript pro vykreslení fraktálu dvojitého kyvadla (viz obr. 22)
LE_fraktal	skript pro výpočet a vykreslení největšího Ljapunovova exponentu ve fázovém podprostoru (viz obr. 29)
zero_one_test_pq_graf	skript pro vykreslení p-q grafu a výpočet parametru K_c pro 0–1 test (viz obr. 32)