UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Derivace komplexní funkce

(Derivative of complex function)

Vedoucí bakalářské práce:

Doc. Mgr. Karel Pastor, Ph.D.

Vypracovala:

Veronika Chaloupková

MATEKO, III. Ročník

Rok odevzdání: 2013

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracovala samostatně pod vedením pana Doc. Mgr. Karla Pastora, Ph.D. a všechny použité zdroje jsem uvedla.

V Olomouci, dne 15. 4. 2013

Poděkování

Na tomto místě bych chtěla poděkovat především svému vedoucímu bakalářské práce panu Doc. Mgr. Karlu Pastorovi, Ph.D. za jeho ochotu, trpělivost a cenné rady při psaní této práce. Také bych ráda poděkovala své rodině a přátelům, kteří mě po celou dobu studia podporovali.

Obsah

Úvod

Cílem této bakalářské práce je seznámit čtenáře s pojmem derivace komplexní funkce, jedním z klíčových pojmů komplexní analýzy. Při studiu tohoto textu se předpokládá znalost reálné analýzy a základní znalost komplexních čísel a teorie o funkcích komplexní proměnné.

Práce začíná pojednáním o historii komplexních čísel a komplexní analýzy, aby měl čtenář představu o tom, jak dlouhým vývojem si musel pojem komplexního čísla projít, jaká jména jsou s ním spojována a ve které době se začíná formovat teorie komplexní analýzy. V tomto pojednání čtenář zjistí, že zpočátku i někteří velcí matematikové nepovažovali komplexní čísla za skutečný matematický pojem, a to především z toho důvodu, že poměrně dlouhou dobu je nebyli schopní nadefinovat a prakticky nevěděli, jak na ně pohlížet. Především díky tomu, že se jejich otázkou postupně zabývalo stále více matematiků, získala komplexní čísla nejen důvěru, ale i zasloužené místo v oblasti matematické analýzy. A jak již dnes víme, nejen komplexní čísla, ale hlavně teorie o funkcích komplexní proměnné výrazným způsobem přispěly k řešení mnoha aplikačních problémů.

Hlavní text práce je rozdělen do dvou kapitol. První kapitola pojednává o pojmu derivace komplexní funkce a jejich vlastnostech, v druhé pak najdeme pojednání o holomorfních funkcích. Celým textem se prolínají definice, věty a jiná tvrzení psané s přihlédnutím k použité literatuře. Vzhledem k omezené délce této práce, jsou až na dvě výjimky uvedené pouze odkazy na důkazy těchto vět a tvrzení. Práce obsahuje také mnoho příkladů. Zadání příkladů je převzato, popř. inspirováno neřešenými příklady, které najdeme v použitých publikacích. Pokud není řečeno jinak, tyto příklady jsem spočítala sama.

První kapitola je psána spíše formou sbírky úloh. Obsahuje základní definice a věty, především však návod k řešení různých typových příkladů. Druhá kapitola je více teoretická. Je dále členěna, přičemž důležitá je především druhá podkapitola, kde se čtenář dozví o využití vlastností holomorfních funkcí při výpočtu křivkových integrálů komplexní funkce. Jak dále uvidíme, holomorfní funkce nabízejí mnohá zkrácení či zjednodušení výpočtu křivkových integrálů a také další využití.

Historie

Historie komplexních čísel sahá až do 16. století. Konkrétně roku 1545 vydal italský matematik, filosof a astronom Gieronimo Cardano (1501 – 1576) knihu s názvem Ars Magna de Regulis Algebraicis, ve které se zabýval algebraickým řešením rovnic prvního až čtvrtého stupně. Při zkoumání kubických rovnic došel k výsledkům, ve kterých se mu objevily odmocniny ze záporných čísel. V této souvislosti také zjistil, že s odmocninami ze záporných čísel se můžeme setkat již u rovnic kvadratických. Jako příklad uvedl úlohu, ve které chtěl rozdělit číslo 10 na dvě části tak, aby jejich součin byl roven číslu 40. Úloha jej zavedla ke kvadratické rovnici $x(10-x)=40$, jejímž řešením byly dva kořeny $x_1=5+\sqrt{-15}$ a $x_2=5-\sqrt{-15}$. Když kořeny mezi sebou zpětně vynásobil, musel dostat číslo 40:

$$\left(5+\sqrt{-15}\right)\cdot\left(5-\sqrt{-15}\right)=25-\left(\sqrt{-15}\cdot\sqrt{-15}\right)=25-(-15)=40$$

Tato rovnost tedy platí za předpokladu, že $\sqrt{-15}\cdot\sqrt{-15}$ je rovna číslu -15. Navzdory tomu, že Cardano takto definované kořeny nepovažoval za skutečná řešení, přispěl svými studiemi k objevu komplexních čísel.

Jako první se však kubickými rovnicemi zabýval matematik jménem Scipione del Ferro, který údajně ovládal metodu řešení rovnic $x^3+ax=b$, kde $a,b>0$. Své poznatky však nikdy nepublikoval, stejně jako Niccola Fontana zvaný Tartaglia, který patrně jako první našel postup řešení kubických rovnic. Gieronimo Cardano v knize Ars Magna zobecnil právě Tartagliovu metodu. Jelikož byl Cardano první, kdo metodu řešení kubických rovnic publikoval, byly po něm pojmenovány vzorce pro jejich řešení. Jak ale historie naznačuje, jejich skutečným objevitelem byl Niccolo Fontana.

S komplexními čísly dále pracoval italský matematik Rafael Bombelli (1526 – 1572), který se ve své knize pustil již do počítání s komplexními čísly, přičemž odmocninu ze záporného čísla vyřešil tím způsobem, že před odmocninu z absolutní hodnoty tohoto čísla napsal speciální slovní spojení jiné při odčítání a jiné při sčítání. Toto jeho slovní spojení vlastně odpovídalo pozdějšímu označení komplexní jednotky i resp. $-i$.

Vývoj komplexních čísel sice postupoval pomalu, zabývalo se však jimi stále více matematiků. V 17. a na přelomu 17. a 18. století to byl například francouzský matematik Albert Girard (1595 – 1632) a francouzský matematik a filosof René Descartes (1596 – 1650), od kterého pochází dodnes používané označení - „imaginární". Ani on nepovažoval komplexní kořeny za skutečná řešení a nazýval je tudíž termínem imaginární. S komplexními čísly bývá spojován i anglický matematik a teolog John Wallis (1616 – 1703) a další velká jména jako Isaac Newton (1643 – 1727), Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) nebo Johann Bernoulli (1668 – 1748). V první čtvrtině 18. století pak francouzský matematik Abraham de Moivre (1667 – 1754) objevil důležitý vztah, dnes známý jako Moivreova věta

$$(\cos\varphi \pm i\cdot\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) \pm i\cdot\sin(n\varphi).$$

V 18. století se postupně začala rozvíjet myšlenka o komplexních funkcích komplexní proměnné, přičemž poprvé se s ní setkáváme u francouzského matematika, fyzika a filosofa Jeana Le Rond d´Alemberta (1717 – 1783). O rozvoj těchto úvah se zasloužil především švýcarský matematik a fyzik Leonhard Euler (1707 – 1783). Jeho zájem směřoval především k elementárním komplexním funkcím a na základě svých výzkumů rozpracoval teorii o vztahu mezi exponenciální funkcí, logaritmickou funkcí a goniometrickými funkcemi v komplexním oboru. V návaznosti na tuto teorii vyjadřoval komplexní čísla v goniometrickém tvaru. Dále definoval goniometrické funkce sinus a kosinus v komplexním oboru dodnes platnými vzorci

$$\cos z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^z - e^{-z}}{2i}.$$

Vděčíme mu také za označení komplexní jednotky $\sqrt{-1}$ symbolem i. Eulerovy myšlenky byly významné pro pozdější úvahy o funkcích komplexní proměnné.

Na konci 18. století význam komplexních čísel značně posílil. Často se již využívala v různých matematických aplikacích, stále však nebylo zcela jasné, jak na ně pohlížet. Na přelomu 18. a 19. století a na počátku 19. století se začala mezi matematiky rozvíjet myšlenka o geometrické interpretaci komplexních čísel. Jako první ji publikoval norský kartograf a geodet Caspar Wessel (1745 – 1818) ve spolupráci s Dánskou akademií věd. S myšlenkou o geometrické interpretaci komplexních čísel pracovali také další matematici: francouzský matematik a fyzik Lazare Nicolas Marquerite Carnot (1753 – 1823), od kterého pochází dnešní pojmenování komplexní číslo, dále francouzský matematik Adrien-Quentin Buée (1748 – 1826), švýcarský matematik Jean Robert Argand (1768 – 1822), který zavedl termín modus pro absolutní hodnotu komplexního čísla nebo britský matematik John Warren (1796 – 1852). Tato jména zaujímají ve vývoji komplexních čísel, především pak v úvahách o geometrické interpretaci komplexních čísel, významné postavení. Vydali řadu publikací, ve kterých formulovali své nejdůležitější úvahy, bohužel však většina z nich zůstala bez větší odezvy.

Mezi nejvýznamnější jména v historii komplexních čísel patří Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855), německý matematik a fyzik, který definoval komplexní čísla jako body roviny (podle něj byla později pojmenována Gaussova rovina) a tím ujasnil způsob, jak komplexní čísla chápat. Dal tak komplexním číslům matematicky korektní podobu a jeho pohled na komplexní čísla se pod jeho vlivem značně rozšířil. Své představy o komplexních číslech jako bodech roviny využil již v roce 1799 ve své disertační práci při důkazu základní věty algebry, v souvislostech tuto teorii popsal ve své knize Theoria residuorum biquadraticorum publikované v roce 1831, ve které mimo jiné napsal, že *„geometrická interpretace komplexních čísel vrhá na jejich metafyzické chápání nové světlo*". Komplexními čísly se zabýval také Gaussův současník, William Rowan Hamilton (1805 –1865), irský matematik, fyzik a astronom, který komplexní čísla definoval jako uspořádané dvojice reálných čísel. Tuto svou teorii prezentoval v knize Theory of conjugate functions, or algebraic couples publikovanou v roce 1837, ve které také definoval aritmetické operace s takto zavedenými komplexními čísly.

U zrodu moderní komplexní analýzy stál francouzský matematik Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857), který ji systematicky popsal po vzoru reálné analýzy. Významným způsobem se podílel na tvorbě teorie o křivkových integrálech komplexních funkcí a primitivních funkcích a je autorem mnoha známých tvrzení. Základy geometrické teorie komplexních funkcí položil německý matematik Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 – 1866) a o rozvoj integrálního počtu a především reprezentaci komplexních funkcí řadami se zasloužil další německý matematik Carl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815 – 1897). Ten v roce 1841 uvedl tzv. Laurentův rozvoj holomorfní funkce, který nezávisle na něm zveřejnil v roce 1843 francouzský matematik Pierre Alphonse Laurent (1813 – 1854).

Komplexní analýza dnes plní významnou funkci v řadě aplikací, např. v teoretické fyzice, hydrodynamice, teorii elektromagnetického pole, v teorii elektrických obvodů, kartografii nebo aerodynamice.

Podrobněji se může čtenář o historii komplexních čísel a komplexní analýzy dočíst ve zdrojích [1], [4], [5] a [13].

I. Derivace komplexní funkce

Jedny ze stěžejních pojmů komplexní analýzy jsou pojmy derivace a diferenciál funkce. Derivace funkce komplexní proměnné se definuje obdobným způsobem jako v reálné analýze pomocí limity funkce.

Definice I. 1. (Derivace komplexní funkce v bodě) Buď f komplexní funkce komplexní proměnné definovaná a konečná v nějakém okolí $U(z)$ bodu $z \in \mathbb{C}$. Řekneme, že f má derivaci v bodě z (nebo že existuje derivace funkce f v bodě z), jestliže existuje konečná limita

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$

Toto číslo pak nazýváme derivací funkce f v bodě z a značíme je $f'(z)$ nebo $\frac{df(z)}{dz}$.

V návaznosti na definici derivace komplexní funkce v bodě je třeba říci, že v komplexním oboru derivaci zavádíme jako konečnou limitu, podobně také bod z je konečné komplexní číslo. V $\mathbb{C}$ tedy nezavádíme pojem nevlastní derivace a nedefinujeme derivaci funkce v bodě ∞.

Poznámka. Derivace funkce f v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ je tedy podle definice rovna $\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}$. Označíme-li $z_0 + h = z$, dostaneme

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

To znamená, že při vhodné substituci můžeme konečnou limitu definující derivaci komplexní funkce v bodě zapsat v jiném tvaru. V publikacích se setkáváme s oběma způsoby definování tohoto pojmu.

Nyní si nadefinujeme důležitý pojem diferenciál funkce v bodě, úzce související s pojmem derivace funkce.

Definice I. 2. (Diferenciál funkce v bodě) Buď f komplexní funkce komplexní proměnné definovaná a konečná v jistém okolí $U(z)$ bodu $z \in \mathbb{C}$. Řekneme, že funkce f má v bodě z diferenciál (resp. že je diferencovatelná v bodě z), jestliže existují číslo $a \in \mathbb{C}$ a funkce η spojitá v bodě 0, $\eta(0) = 0$ taková, že pro všechny body h nějakého okolí $U(0)$ lze přírůstek f v bodě z vyjádřit ve tvaru

$$(1) \qquad f(z+h) - f(z) = ah + h \cdot \eta(h).$$

Lineární funkci ah proměnné h pak nazýváme diferenciálem funkce f v bodě z a značíme jej $\mathrm{d}\, f(z)$.

Mezi derivací a diferenciálem platí stejný vztah jako v reálném oboru a popisuje jej následující věta.

Věta I. 1. Funkce f má v bodě $z \in \mathbb{C}$ derivaci, jestliže je v tomto bodě z diferencovatelná. V tomto případě je $\mathrm{d}\, f(z) = f'(z)h$, tj. číslo a ve vztahu (1) je rovno $f'(z)$.

Důkaz. Viz [12, str. 55], [9, str. 31].

Pro výpočet derivace funkce komplexní proměnné se obvykle využívá řada pravidel pro derivování (resp. vlastností), která jsou, jak zjistíme dále, často analogická s pravidly (resp. vlastnostmi) z reálné analýzy. Tento fakt plyne právě z obdobné definice derivace a také ze skutečnosti, že vlastnosti limity funkce můžeme mnohdy přenést z reálné analýzy do analýzy komplexní. V některých případech však lze derivaci funkce poměrně snadno spočítat přímo pomocí definice, což nám ukazuje následující příklad.

Příklad I. 1. Podle definice spočítejte derivace následujících funkcí:

a) $f(z) = \frac{1}{z^2}$.

Nejprve dosadíme podle funkčního předpisu zadané funkce do limity definující derivaci funkce v bodě: $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$.

Poté zjednodušíme složený zlomek na jednoduchý, použijeme vzorec pro rozklad dvojčlenu $a^2 - b^2$ na součin a dále upravíme na limitu, do které již lze dosadit z_0 za z. Po dosazení ještě upravíme na vhodný tvar.

$$\lim_{z \to z_0} \frac{\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z_0^2}}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{\frac{z_0^2 - z^2}{z^2 z_0^2}}{\frac{z - z_0}{1}} = \lim_{z \to z_0} \frac{(z_0 - z)(z_0 + z)}{z^2 z_0^2 (z - z_0)} =$$

$$= \lim_{z \to z_0} \frac{-(z - z_0)(z_0 + z)}{z^2 z_0^2 (z - z_0)} = \lim_{z \to z_0} \frac{-(z_0 + z)}{z^2 z_0^2} =$$

$$= \frac{-(z_0 + z_0)}{z_0^2 z_0^2} = \frac{-2z_0}{z_0^4} = -\frac{2}{z_0^3}$$

b) $f(z) = z^3$.

Nejprve opět dosadíme podle funkčního přepisu zadané funkce do limity, poté použijeme vzorec pro rozklad dvojčlenu $a^3 - b^3$ na součin a upravíme na limitu, do které již lze dosadit z_0 za z. Po dosazení upravíme na vhodný tvar.

$$\lim_{z \to z_0} \frac{z^3 - z_0^3}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{(z - z_0)(z^2 + zz_0 + z_0^2)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} (z^2 + zz_0 + z_0^2) = z_0^2 + z_0^2 + z_0^2 = 3z_0^2$$

V následujících větách si uvedeme základní vlastnosti derivace funkce v komplexním oboru a některá pravidla pro derivování, která se využívají při výpočtech. Čerpáno především z [9], [12] a [14].

Věta I. 2. Je-li $f(z) = c$, pak $f'(z) = 0$, kde $c \in \mathbb{C}$.

Důkaz. Provádí se analogicky jako v reálném oboru.

Věta I. 3. Nechť funkce f, g mají derivace v bodě $z \in \mathbb{C}$. Pak v tomto bodě mají derivace též funkce $c \cdot f$ $(c \in \mathbb{C})$, $f + g$, $f \cdot g$ a platí vzorce:

$$(2) \quad [c \cdot f(z)]' = c \cdot f'(z)$$

$$(3) \quad [f(z) \pm g(z)]' = f'(z) \pm g'(z)$$

$$(4) \quad [f(z) \cdot g(z)]' = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z).$$

Jestliže navíc $g(z) \neq 0$, má v bodě z derivaci též funkce $\frac{f}{g}$ a platí:

$$(5) \quad \left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]' = \frac{f'(z) \cdot g(z) - f(z) \cdot g'(z)}{g^2(z)}.$$

Důkaz. Provádí se analogicky jako v reálném oboru.

Pravidlo I. 1.

Pro komplexní funkci $f(z) = z^n$ platí

$$(6) \quad (z^n)' = nz^{n-1}, \text{ kde } n \in \mathbb{N},\ z \in \mathbb{C}.$$

Důkaz. Viz. [9, str. 81].

Příklad I. 2. Derivujte funkci $f(z) = 2z^3 - 5z^2 + 1$.

Pro výpočet derivace funkce $f(z) = 2z^3 - 5z^2 + 1$ využijeme Větu I. 2., vztahy (2) a (3) z Věty I. 3. a Pravidlo I. 1.

Derivace zadané funkce je tedy rovna

$$f'(z) = (2z^3 - 5z^2 + 1)' = 6z^2 - 10z, \text{ pro } z \in \mathbb{C}.$$

Příklad I. 3. Derivujte funkci $f(z) = \frac{z^2-3z-2}{2z}$.

V tomto příkladu využijeme pro výpočet derivace opět Větu I. 2., dále vztahy (2), (3) a (5) z Věty I. 3. a Pravidlo I. 1. Derivace zadané funkce je tedy rovna

$$f'(z) = \left(\frac{z^2 - 3z - 2}{2z}\right)' = \frac{(2z-3)\cdot 2z - (z^2 - 3z - 2)\cdot 2}{4z^2} = \frac{2z^2+4}{4z^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{z^2}$$

$$\text{pro } z \in \mathbb{C} - \{0\}.$$

Následující věta udává souvislost existence derivace komplexní funkce a diferencovatelností jejich složek a patří ke stěžejním větám teorie o derivaci funkce komplexní proměnné.

Věta I. 4. Funkce $f(z) = u + i \cdot v$ definovaná v jistém okolí $U(z)$ bodu $z = x + iy \in \mathbb{C}$ má v tomto bodě derivaci, jestliže platí:

1. Funkce $Re\, f(z) = u(x,y)$ a $Im\, f(z) = v(x,y)$ jsou v bodě (x,y) diferencovatelné.
2. V bodě (x,y) jsou splněny tzv. Cauchyovy-Riemannovy podmínky

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Jsou-li splněny podmínky 1. a 2., pak pro $f'(z)$ platí vzorce

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Důkaz. Viz. [9, str. 83], [12, str. 58] nebo [14, str. 32].

Příklad I. 4. [10, str. 51], [12, str. 59] (Výpočet derivace exponenciální funkce) Řešení tohoto příkladu je převzato z publikace, přičemž je mírně pozměněno zadání a postup řešení je více rozepsán.

Exponenciální funkce v komplexním oboru má tvar

$$f(z) = e^z = e^x(\cos y + i \sin y), \text{ pro } z = x + yi \in \mathbb{C}.$$

K výpočtu derivace exponenciální funkce využijeme Větu I. 4. Nejprve si spočítáme složky této funkce. Reálná složka $Re\, f(z)$ je rovna $Re\, f(z) = u(x,y) = e^x \cos y$ a imaginární složka $Im\, f(z)$ je rovna $Im\, f(z) = v(x,y) = e^x \sin y$. Exponenciální funkci tedy můžeme přepsat do tvaru $f(z) = Re\, f(z) + i \cdot Im\, f(z) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$, konkrétně

$$f(z) = e^z = e^x \cos y + i \cdot e^x \sin y.$$

Nyní spočítáme první parciální derivace funkcí $u(x,y)$ a $v(x,y)$ podle obou proměnných:

(7) $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x} = e^x \cos y$ (9) $\dfrac{\partial v(x,y)}{\partial x} = e^x \sin y$

(8) $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -e^x \sin y$ (10) $\dfrac{\partial v(x,y)}{\partial y} = e^x \cos y$

Vraťme se zpět k parciálním derivacím funkcí $u(x,y), v(x,y)$. Jak můžeme vidět ze vztahů (7), (8), (9) a (10), obě funkce mají spojité parciální derivace prvního řádu podle proměnných x, y v každém bodě (x,y) a tudíž existují totální diferenciály funkcí u, v v každém bodě (x,y). První podmínka je tedy splněna.

Druhou podmínku ověříme rovněž ze vztahů (7), (8), (9) a (10). Vidíme, že $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = e^x \cos y$ a $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} - e^x \sin y = -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = -e^x \sin y$. Exponenciální funkce je tedy diferencovatelná v každém bodě $z \in \mathbb{C}$ a pro každý bod $z \in \mathbb{C}$ platí

$$(e^z)' = u_x' + iv_x' = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^x(\cos y + i \sin y) = e^z.$$

Příklad I. 5. Vyšetřete, kde je diferencovatelná funkce:

a) $f(z) = Re\, z$.

Diferencovatelnost tohoto typu funkce je třeba řešit pomocí Věty I. 4. Nejprve je třeba funkci $f(z)$ vyjádřit ve tvaru $f(z) = u + iv$. Funkci $f(z) = Re\, z$ zapíšeme pomocí reálné a imaginární složky tímto způsobem: $f(z) = f(x + iy) = x$. To znamená, že $u(x,y) = x$ a $v(x,y) = 0$, tedy $f(z) = x = x + i \cdot 0$.

Spočítáme první parciální derivace funkcí u, v podle proměnných x, y:

$\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 1$ $\dfrac{\partial v(x,y)}{\partial x} = 0$

$\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0$ $\dfrac{\partial v(x,y)}{\partial y} = 0$

Jak můžeme vidět, Cauchyovy-Riemannovy podmínky nejsou splněny v žádném bodě: $\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq 0 = \frac{\partial v}{\partial y}$ a $\frac{\partial u}{\partial y} = 0 = 0 = \frac{\partial v}{\partial x}$. Proto funkce $f(z) = Re\, z$ není diferencovatelná v žádném bodě a $f'(z)$ neexistuje.

b) $f(z) = x^2y^2$.

Budeme postupovat stejným způsobem jako v případě I. 5. a). Určíme reálnou a imaginární složku funkce $f(z) = x^2y^2$, tedy

$$u(x,y) = x^2y^2$$

$$v(x,y) = 0.$$

Dále spočítáme první parciální derivace funkcí u, v podle proměnných x, y:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 2xy^2 \qquad \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 2x^2y \qquad \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = 0$$

Při aplikaci Cauchyových-Riemannových podmínek dostaneme soustavu:

$$2xy^2 = 0$$

$$-2x^2y = 0$$

Aby byl součin roven nule, je třeba, aby aspoň jeden z činitelů byl roven nule. To znamená, že máme tři možnosti:

1. $x = 0$ a y je libovolné → tento případ odpovídá číslům na imaginární ose
2. x je libovolné a $y = 0$ → tento případ odpovídá číslům na reálné ose
3. $x = 0$ a $y = 0$ → bod počátku (tento případ je zahrnut v prvních dvou případech)

Závěr tedy je, že pro body na reálné a imaginární ose má funkce $f(z) = x^2y^2$ derivaci (je diferencovatelná).

c) $f(z) = x^2 + iy^2$.

Opět postupujeme stejně. Určíme reálnou a imaginární složku zadané funkce. Reálná složka $u(x,y)$ je rovna $u(x,y) = x^2$ a imaginární složka $v(x,y)$ je rovna $v(x,y) = y^2$.

Spočteme první parciální derivace:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = 2y$$

Z Cauchyových-Riemannových podmínek plyne soustava:

$$2x = 2y$$

$$0 = 0$$

Z první rovnice soustavy vidíme, že potřebujeme čísla, která mají stejnou reálnou a imaginární část, tedy $x = y$ neboli $Re\, z = Im\, z$. Funkce $f(z) = x^2 + iy^2$ je diferencovatelná pro $z \in \mathbb{C}$, pro která platí $Re\, z = Im\, z$.

d) $f(z) = 2xy - i(x^2 - y^2)$.

I v tomto případě bude postup stejný. Určíme složky zadané funkce. Reálná složka se rovná $u(x,y) = 2xy$ a imaginární složka $v(x,y) = -(x^2 - y^2)$.

Nyní spočítáme první parciální derivace těchto funkcí:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 2y \qquad \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = -2x$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 2x \qquad \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = 2y$$

Cauchyovy-Riemannovy podmínky jsou splněny v každém bodě (x,y), tzn., že funkce $f(z) = 2xy - i(x^2 - y^2)$ je diferencovatelná v každém bodě $z \in \mathbb{C}$.

Příklad I. 6. Dokažte, že funkce $f(z) = |z|^2$ má derivaci pouze v bodě $z = 0$.

K řešení tohoto příkladu využijeme rovněž Větu I. 4. a také poznatků, které známe z teorie o komplexních číslech. Víme, že modul komplexního čísla neboli jeho absolutní hodnota je rovna $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Vzorec pro absolutní hodnotu dosadíme do předpisu funkce $f(z)$ a dostaneme

$$f(z) = |z|^2 = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = x^2 + y^2.$$

Věta I. 4. požaduje splnění dvou podmínek. K ověření obou podmínek potřebujeme spočítat první parciální derivace reálné a imaginární složky funkce

$f(z)$, tedy funkcí $u(x,y)$, $v(x,y)$. Reálná část je rovna $u(x,y) = x^2 + y^2$ a imaginární $v(x,y) = 0$. Parciální derivace těchto funkcí podle obou proměnných spočítáme snadno:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 2y \qquad \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = 0$$

První podmínka z Věty I. 4. je splněna a z Cauchyových-Riemannových podmínek dostaneme soustavu:

$$2x = 0$$

$$-2y = 0$$

Tato soustava má pouze jediné řešení, bod $x = 0$, $y = 0$, který odpovídá bodu počátku. Funkce daná předpisem $f(z) = |z|^2$ má tedy derivaci skutečně pouze v jediném bodě $z = 0$.

Příklad I. 7. Dokažte, že funkce $f(z) = \bar{z}$ nemá derivaci v žádném bodě.

Tento příklad nás opět zavede k Větě I. 4. Nejprve však použijeme znalostí z teorie o komplexních číslech. Víme, že pro komplexně sdružené číslo k číslu $z = x + iy$ platí vztah $\bar{z} = x - iy$. Funkci $f(z) = \bar{z}$ tedy přepíšeme do tvaru $f(z) = x - iy$. Nyní lze snadno určit reálnou a imaginární část této funkce:

$$u(x,y) = x$$

$$v(x,y) = -y$$

První parciální derivace funkcí u, v podle proměnných x, y jsou dány vzorci:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 1 \qquad \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = -1$$

Cauchyovy-Riemannovy podmínky nejsou splněny pro žádný bod (x,y), protože podmínku $1 = -1$ nesplňuje žádné x ani y. Proto neexistuje derivace funkce $f(z) = \bar{z}$ v žádném bodě $z \in \mathbb{C}$.

Věta I. 5. (O derivaci složené funkce) Existuje-li derivace $f'(z_0)$ v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ a derivace $g'(w_0)$ v bodě $w_0 = f(z_0) \in \mathbb{C}$, pak existuje derivace složené funkce $g \circ f$ v bodě z_0 a platí

$$(g \circ f)'(z_0) = g'\big(f(z_0)\big)f'(z_0).$$

Důkaz. Viz. [12, str. 56].

Příklad I. 8. (Výpočet derivace goniometrických funkcí) Spočtěte derivaci funkce $f(z) = \sin z$.

Goniometrická funkce sinus se v komplexní analýze definuje takto:

$$(11) \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Vztah (11) nejprve vhodně rozepíšeme

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{1}{2i}e^{iz} - \frac{1}{2i}e^{-iz}.$$

K výpočtu derivace použijeme Příklad I. 4. o derivaci exponenciální funkce, vztah (3) z Věty I. 3. a Větu I. 5. o derivaci složené funkce:

$$(\sin z)' = \frac{1}{2i} \cdot i \cdot e^{iz} - \frac{1}{2i} \cdot (-i) \cdot e^{-iz} = \frac{1}{2}e^{iz} + \frac{1}{2}e^{-iz} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$$

Z výpočtu derivace lze vidět, že platí vztah

$$(\sin z)' = \cos z.$$

Derivaci funkce sinus v komplexní analýze vypočteme podle analogického vzorce, který známe z reálné analýzy. Stejným způsobem lze také dokázat, že i pro ostatní goniometrické funkce platí obdobná pravidla pro derivování:

$$(\cos z)' = -\sin z$$

$$(\operatorname{tg} z)' = \frac{1}{\cos^2 z}$$

$$(\operatorname{cotg} z)' = -\frac{1}{\sin^2 z}$$

Příklad I. 9. Najděte oblasti, v nichž jsou následující funkce diferencovatelné, a stanovte jejich derivace.

a) $f(z) = e^{\cos z}$

Pro výpočet derivace funkce $f(z) = e^{\cos z}$ použijeme Příklad I. 4. o derivaci exponenciální funkce, Větu I. 5. o derivaci složené funkce a Příklad I. 8. o derivaci goniometrických funkcí, čímž dostaneme

$$f'(z) = -e^{\cos z} \cdot \sin z, \text{pro } z \in \mathbb{C}.$$

b) $f(z) = e^{-z} \cdot \sin(z^2)$

Pro výpočet derivace zadané funkce použijeme vztah (4) z Věty I. 3., Pravidlo I. 1., Příklad I. 4. o derivaci exponenciální funkce, Větu I. 5. o derivaci složené funkce a Příklad I. 8. o derivaci goniometrických funkcí.

Derivace funkce zadané $f(z)$ je tedy rovna

$$\begin{aligned} f'(z) &= e^{-z}(-1) \cdot \sin(z^2) + e^{-z} \cdot \cos(z^2) \cdot 2z \\ &= -e^{-z} \cdot \sin(z^2) + 2z \cdot e^{-z} \cdot \cos(z^2) \\ &= e^{-z}[2z \cdot \cos(z^2) - \sin(z^2)], \text{pro } z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

c) $f(z) = z \cdot \frac{\cos z}{1+z^2}$

Pro výpočet derivace zadané funkce použijeme Větu I. 2., vztahy (3), (4), (5) z Věty I. 3., Pravidlo I. 1. a Příklad I. 4., čímž dostaneme

$$\begin{aligned} f'(z) &= 1 \cdot \frac{\cos z}{1+z^2} + z \cdot \frac{-\sin z\,(1+z^2) - \cos z \cdot 2z}{(1+z^2)^2} \\ &= \frac{\cos z\,(1+z^2) + z(-\sin z\,(1+z^2) - \cos z \cdot 2z)}{(1+z^2)^2} \\ &= \frac{\cos z\,(1+z^2) - z \cdot \sin z\,(1+z^2) - z \cdot \cos z \cdot 2z}{(1+z^2)^2} \\ &= \frac{(1+z^2)(\cos z - z \cdot \sin z) - 2z^2 \cos z}{(1+z^2)^2}, \text{pro } z \in \mathbb{C} - \{\pm i\}. \end{aligned}$$

V některých případech může být výhodnější uvažovat místo kartézských souřadnic (x, y) souřadnice polární (r, φ). Jak známe z teorie o komplexních číslech, každé komplexní číslo z v algebraickém tvaru $z = x + iy \in \mathbb{C}$ lze poměrně jednoduchým způsobem přepsat do tvaru goniometrického:

$$z = |z|(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$$

Jestliže symbol $|z|$ pro absolutní hodnotu (resp. modul) komplexního čísla nahradíme písmenem r a zavedeme substituci $\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi = e^{i\varphi}$, dostaneme důležitý tvar komplexního čísla, který se v některých publikacích označuje jako exponenciální:

$$z = r \cdot e^{i\varphi}$$

Uvažujeme-li při řešení příkladu polární souřadnice, je třeba si dávat pozor na aplikaci některých vět. Například tak často používané Cauchyovy-Riemannovy podmínky je třeba přepsat do polárních souřadnic a to takto:

Uvažujeme funkci $f(z)$, přičemž $z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}$, tedy

$$f(z) = f\left(re^{i\varphi}\right) = g(r, \varphi).$$

Zároveň tuto funkci $f(z)$ můžeme rozepsat do složek:

$$f(z) = f\left(re^{i\varphi}\right) = g(r, \varphi) = \xi(r, \varphi) + i \cdot \eta(r, \varphi)$$

Podle odvození v [9, str. 83] se Cauchyovy-Riemanovy podmínky vyjádří ve tvaru

$$\frac{\partial \xi}{\partial r} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial \varphi}$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} = -\frac{\partial \eta}{\partial r}$$

a platí

$$(12) \quad f'(z) = f'\left(re^{i\varphi}\right) = \frac{r}{z}\left(\frac{\partial \xi}{\partial r} + i\frac{\partial \eta}{\partial r}\right) = \frac{1}{z}\left(\frac{\partial \eta}{\partial \varphi} - i\frac{\partial \xi}{\partial \varphi}\right).$$

Příklad I. 10. Ověřte splnění Cauchyových-Riemannových podmínek v polárních souřadnicích pro funkci $f(z) = \ln z = \ln r + i\varphi$, $z = r \cdot e^{i\varphi}$, $\varphi \in (0, 2\pi)$, $r > 0$ a spočtěte její derivaci.

Nejprve si pro funkci $f(z) = \ln z = \ln r + i\varphi$ určíme reálnou a imaginární složku, tedy

$$\xi(r, \varphi) = \ln r$$

$$\eta(r, \varphi) = \varphi.$$

Spočítáme první parciální derivace těchto funkcí podle proměnných r, φ:

$$\frac{\partial \xi}{\partial r} = \frac{1}{r} \qquad \frac{\partial \eta}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial \varphi} = 0 \qquad \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} = 1$$

Ze spočítaných parciálních derivací lze vidět, že funkce ξ, η jsou diferencovatelné a také, že Cauchyovy-Riemannovy podmínky v polárních souřadnicích jsou splněny v každém bodě $z = re^{i\varphi}$. Nyní jen zbývá spočítat derivaci zadané funkce $f(z) = \ln z = \ln r + i\varphi$ podle vztahu (12).

$$f'(z) = (\ln z)' = \frac{r}{z}\left(\frac{\partial \xi}{\partial r} + i\frac{\partial \eta}{\partial r}\right) = \frac{1}{z}\left(\frac{\partial \eta}{\partial \varphi} - i\frac{\partial \xi}{\partial \varphi}\right) = \frac{r}{z}\left(\frac{1}{r} + i \cdot 0\right) = \frac{1}{z}(1 - i \cdot 0) = \frac{1}{z}$$

$$\text{pro } z \in \mathbb{C} - \{0\}$$

II. Holomorfní funkce

Definice II. 1. Řekneme, že funkce f je holomorfní v bodě $z \in \mathbb{C}$, jestliže je diferencovatelná v nějakém okolí $U(z)$ bodu z, tj. když existuje derivace $f'(z)$ pro každý bod $z \in U(z)$. Dále řekneme, že funkce f je holomorfní na otevřené množině $M \subset \mathbb{C}$, jestliže je diferencovatelná na množině M, tj. když je holomorfní v každém bodě z otevřené množiny M.

V některých starších publikacích můžeme holomorfní funkce najít pod termínem regulární či „analytické" funkce.

Z vět o derivování funkcí (zejména Věta I. 3.) a z definice holomorfní funkce plynou různá tvrzení o holomorfních funkcích – zejména tvrzení o holomorfnosti součtu, součinu a podílu holomorfních funkcí.

Poznámka. Nyní vyšetřujeme holomorfní funkci $f(z) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$ v oblasti $D \in \mathbb{C}$ takovou, že $v(x,y) = \operatorname{Im} f(z) = 0$ pro každý bod oblasti $D \in \mathbb{C}$. Pak také první parciální derivace $\frac{\partial v}{\partial x}$ a $\frac{\partial v}{\partial y}$ jsou nulové v oblasti D a podle Cauchyových-Riemannových podmínek je rovněž $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ v D. Z reálné analýzy víme, že v tomto případě je funkce u konstantní v oblasti D. Obdobný výsledek dostaneme i v případě, kdy budeme funkci $f(z) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$ uvažovat takovou, že $u(x,y) = \operatorname{Re} f(z) = 0$ v D. Této úvahy využijeme k tvrzení, že jedinými holomorfními reálnými (resp. ryze imaginárními) funkcemi v oblasti D jsou konstantní funkce.

Příklad II. 1. Vyšetřete, na jakých oblastech jsou funkce z Příkladů I. 4. a I. 7. holomorfní.

V Příkladu I. 4. jsme zjistili, že exponenciální funkce $f(z) = e^z = e^x \cos y + i \cdot e^x \sin y$ je diferencovatelná v každém bodě $z \in \mathbb{C}$, tzn., že je holomorfní v celé Gaussově rovině.

V Příkladu I. 8. jsme dokázali, že funkce $f(z) = \bar{z}$ nemá derivaci (není diferencovatelná) v žádném bodě $z \in \mathbb{C}$. O funkci $f(z) = \bar{z}$ tedy můžeme říci, že není holomorfní v žádném bodě $z \in \mathbb{C}$.

Příklad II. 2. Zjistěte, na jaké oblasti je funkce $f(z) = z \cdot Re\, z$ holomorfní.

K řešení tohoto příkladu využijeme Větu I. 4., pomocí které zjistíme, v kterých bodech má funkce $f(z)$ derivaci (je diferencovatelná).

Nejprve je tedy třeba přepsat funkci $f(z) = z \cdot Re\, z$ do algebraického tvaru $f(z) = u + iv$ a najít tak reálnou a imaginární část této funkce:

$$f(z) = z \cdot Re\, z = f(x + iy) = (x + iy) \cdot x = x^2 + ixy,$$

tedy

$$u(x, y) = x^2$$

$$v(x, y) = xy.$$

Nyní spočítáme první parciální derivace funkcí u, v podle proměnných x, y:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = x$$

Při aplikaci Cauchyových-Riemannových podmínek dostaneme soustavu rovnic:

$$2x = x$$

$$0 = -y$$

Cauchyovy-Riemannovy podmínky jsou splněny pouze v jednom bodě $x = 0, y = 0$, kterému odpovídá bod počátku, tedy $z = 0$.

Funkce $f(z) = z \cdot Re\, z$ je tedy diferencovatelná pouze v bodě $z = 0$ a derivace v tomto bodě je rovna $f'(z) = 0$. Nyní k samotnému zadání příkladu, tedy k otázce, kde je zadaná funkce holomorfní. Našli jsme pouze jeden bod, ve kterém je zadaná funkce diferencovatelná. Nicméně tento bod nevyhovuje definici holomorfní funkce v bodě (v žádném jeho okolí není zadaná funkce diferencovatelná) a tudíž v tomto bodě není zadaná funkce holomorfní. Z toho plyne, že funkce $f(z) = z \cdot Re\, z$ není holomorfní v žádném bodě $z \in \mathbb{C}$.

II. 1. Geometrický význam derivace komplexní funkce

Čerpáno z [12], [14]. Nejprve si připomeneme pojem křivka. Křivkou rozumíme libovolné spojité zobrazení φ libovolného intervalu $\langle a, b\rangle \subset \mathbb{R}$ do množiny $\mathbb{C}$, zapisujeme $\varphi: \langle a, b\rangle \to \mathbb{C}$. Bod $\varphi(a)$ resp. $\varphi(b)$ se nazývá počáteční, resp. koncový bod. Značíme $\mathrm{p.b.}\varphi = \varphi(a)$, $\mathrm{k.b.}\varphi = \varphi(b)$. Množinu $\varphi(\langle a, b\rangle)$ nazýváme grafem křivky φ a značíme jej $[\varphi]$. Nyní již můžeme přistoupit ke geometrickému významu derivace komplexní funkce.

Nechť je dána funkce f holomorfní v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ a dále nechť platí $f'(z_0) = 0$, přičemž derivaci $f'(z_0)$ můžeme zapsat ve tvaru

$$f'(z_0) = |f'(z_0)|e^{i\gamma},$$

kde $\gamma = \arg f'(z_0)$.

Dále uvažujme křivku $\varphi: \langle a, b\rangle \to \mathbb{C}$ takovou, že platí $\varphi(t_0) = z_0$ pro nějaký bod $t_0 \in (a, b)$ a zároveň existuje nenulová derivace $\varphi'(t_0)$. Z předpokladu o nenulovosti derivace křivky φ plyne, že existuje příslušný tečný vektor křivky φ, který označíme $T_\varphi(t_0) = e^{i\alpha}$. Číslo $\alpha = \arg \varphi'(t_0)$ udává až na celočíselný násobek 2π velikost úhlu, který svírá kladná reálná poloosa a tečný vektor $T_\varphi(t_0)$ křivky φ.

Zobrazením $f: z \to f(z) = w$ přejde bod z_0 do bodu $w_0 = f(z_0)$ a křivka φ přejde v křivku $\psi(t) = f[\varphi(t)]$, kde $t \in \langle a, b\rangle$ a platí $\psi(t_0) = f[\varphi(t_0)] = w_0$. Také pro křivku ψ je splněna nenulovost její derivace, tedy

$$(13) \quad \psi'(t_0) = f'(z_0) \cdot \varphi'(t_0) \neq 0.$$

Proto rovněž existuje tečný vektor této křivky ψ, který označíme $T_\psi(t_0) = e^{i\beta}$. Číslo $\beta = \arg \psi'(t_0)$ analogicky udává až na celočíselný násobek 2π velikost úhlu, který svírá kladná reálná poloosa a tečný vektor $T_\psi(t_0)$ křivky ψ. Ze vztahu (13) dostáváme $\beta = \gamma - \alpha$, resp. $\gamma = \beta - \alpha$. Číslo $\gamma \in \arg f'(z_0)$ tedy udává až na celočíselný násobek 2π velikost úhlu, o který se otočí tečný vektor křivky φ v bodě t_0 v zobrazení f. Přitom je důležité, že nezáleží na volbě křivky φ.

Zbývá ještě objasnit geometrický význam modulu derivace, tedy čísla $|f'(z_0)|$. Je zřejmé, že je rovno vztahu

$$|f'(z_0)| = \lim_{z \to z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|}.$$

Podíl $\frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}$ udává, v jakém poměru se mění délka vektoru $z - z_0$ při zobrazení f. Číslo $|f'(z_0)|$ tedy nazýváme koeficientem dilatace zobrazení f v bodě z_0. Pokud je modul derivace menší než 1, vzdálenost obrazů se zkrátí (kontrakce), naopak pokud je modul derivace větší než 1, vzdálenost obrazů se prodlouží (dilatace).

Důsledek: Je-li funkce f holomorfní v bodě z_0 a zároveň platí $f'(z_0) \neq 0$, potom zobrazení f zachovává (orientované) úhly sevřené křivkami procházejícími bodem z_0 a to jak co do velikosti, tak co do směru jejich orientace.

Definice II. 1.1. Řekneme, že zobrazení f je konformní 1. druhu v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$, jestliže:

1. Zobrazení f je spojité v bodě z_0.
2. Zobrazení f zachovává orientované úhly sevřené křivkami procházejícími bodem z_0 (jak co do velikosti, tak co do orientace).

Pokud zobrazení f zachovává velikost úhlů, avšak mění jejich orientaci, mluvíme o konformním zobrazení 2. druhu v bodě z_0.

V následující větě vyslovíme postačující podmínku pro konformnost zobrazení 1. druhu:

Věta II. 1.1. Nechť funkce f je holomorfní v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$. Je-li $f'(z_0) \neq 0$, pak zobrazení f je konformní 1. druhu v bodě z_0.

Příklad II. 1.1. Vyšetřete, ve kterých bodech přestavuje exponenciální funkce konformní zobrazení 1. druhu.

Připomeňme si tvar exponenciální funkce v komplexním oboru:

$$f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$$

Z Příkladu I. 4. víme, že $f'(z) = f(z)$. V Příkladu II. 1. jsme zjistili, že exponenciální funkce je holomorfní v celé Gaussově rovině. K řešení příkladu využijeme Věty II. 1.1. Jelikož je exponenciální funkce holomorfní v celé Gaussově rovině, zbývá zjistit, pro které body Gassovy roviny platí $f'(z_0) \neq 0$.

Úlohu však budeme řešit opačně, zeptáme se, zda existují body, pro které platí $f'(z_0) = 0$. Bod z_0 je komplexní číslo, tedy $z_0 = x_0 + iy_0$. Dosadíme do vztahu pro derivaci, přičemž víme, že $f'(z_0) = f(z_0) = 0$, tedy

$$f'(z_0) = e^{x_0}(\cos y_0 + i \sin y_0) = 0.$$

Při řešení této rovnice dojdeme ke vztahům:

$$\cos y_0 = 0$$

$$\sin y_0 = 0$$

které nejsou splněny pro žádné (x_0, y_0), tzn., že neexistuje číslo $z_0 = x_0 + iy_0$, pro které by platilo $f'(z_0) = 0$. Podmínky z Věty II. 1.1. jsou splněny pro všechna $z \in \mathbb{C}$ a tudíž exponenciální funkce je konformním zobrazením 1. druhu pro všechna $z \in \mathbb{C}$.

II. 2. Využití vlastností holomorfních funkcí

Holomorfní funkce zaujímají v komplexní analýze skutečně významné postavení a prolínají se takřka celou teorií o komplexních funkcích. Jejich specifických vlastností se využívá v různých oblastech komplexní analýzy. V této podkapitole se zaměříme na jejich využití v rámci výpočtu křivkových integrálů komplexní funkce. Holomorfní funkce nám mohou v kombinaci s určitými jinými vlastnostmi výrazně usnadnit práci s výpočtem určitých typů křivkových integrálů.

II. 2.1. Cauchyova věta

Ještě než vyslovíme Cauchyovu větu, ve zkratce si připomeneme pojmy s ní úzce související. V kapitole o geometrickém významu derivace komplexní funkce jsme si na začátku připomněli pojem křivka. Ten je důležitý také v souvislosti s Cauchyovou větou. Řekli jsme si, co rozumíme pod pojmem graf křivky a také jak jej značíme. Mimoto jsme si vysvětlili pojmy koncový a počáteční bod křivky. V souvislosti s tím je třeba říci, že pokud tyto dva body splývají, řekneme, že křivka je uzavřená. Speciálním typem křivek je tzv. Jordanova křivka. Jordanovou křivkou rozumíme každou prostou a uzavřenou křivku. Jordanovy křivky mají jednu důležitou vlastnost, kterou budeme dále potřebovat a kterou si shrneme v následující větě.

Věta II. 2.1.1. (Jordanova věta) Nechť φ je Jordanova křivka v $\mathbb{C}$, tj. $[\varphi] \subset \mathbb{C}$. Potom existují otevřené souvislé množiny (oblasti) $\operatorname{Int} \varphi$ a $\operatorname{Ext} \varphi$, z nichž první je omezená a druhá neomezená, takové, že platí

1. $\mathbb{C} - [\varphi] = \operatorname{Int} \varphi \cup \operatorname{Ext} \varphi$, přičemž $\operatorname{Int} \varphi$, $\operatorname{Ext} \varphi$ jsou neprázdné disjunktní množiny.
2. $[\varphi]$ tvoří společnou hranici množin $\operatorname{Int} \varphi$ a $\operatorname{Ext} \varphi$.

Množina $\operatorname{Int} \varphi$ se nazývá vnitřek křivky φ a množina $\operatorname{Ext} \varphi$ se nazývá vnějšek křivky φ.

Důkaz. Navzdory tomu, že se tvrzení této věty zdá být velmi intuitivní, důkaz je poměrně obtížný. Najdeme jej například v publikaci [Černý, 1983].

Další pojem, který potřebujeme, je jednoduše souvislá oblast. Tento pojem souvisí s Jordanovou křivkou. Oblast D nazveme jednoduše souvislou, jestliže pro každou Jordanovu křivku φ ležící v D platí, že také její vnitřek leží v této oblasti D, tedy $\operatorname{Int} \varphi \subset D$.

Než si nadefinujeme stěžejní pojem následujících kapitol – křivkový integrál komplexní funkce, je ještě třeba si vysvětlit pojem po částech hladká křivka. Křivku nazveme po částech hladkou, jestliže existuje dělení $D: a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ intervalu $\langle a, b \rangle$ takové, že na každém intervalu $\langle t_{k-1}, t_k \rangle$ dělení D je derivace $\varphi'(t)$ spojitá a různá od nuly. Ve vnitřních bodech intervalu $\langle t_{k-1}, t_k \rangle$ tedy existují tečny, v bodech t_{k-1}, t_k příslušné polotečny. Délka po částech hladké křivky se spočítá podle vzorce

$$d(\varphi) = \int_a^b |\varphi'(t)| dt.$$

V tomto shrnutí o křivkových integrálech se omezíme pouze na základní definici a věty, které budeme v následujícím textu potřebovat. Celou teorii o křivkových integrálech najde čtenář především v [12], [14].

Definice II. 2.1.1. Je-li $\varphi: \langle a, b\rangle \rightarrow \mathbb{C}$ po částech hladká křivka a f komplexní funkce konečná a spojitá na $[\varphi]$, pak křivkovým integrálem funkce f přes křivku φ nazýváme

$$(14) \quad \int_{\varphi} f(z)\, dz \stackrel{\text{def}}{=} \int_{a}^{b} f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)\, dt,$$

pokud integrál na pravé straně existuje jako Riemannův integrál z komplexní funkce reálné proměnné.

Věta II. 2.1.2. (Pro odhad křivkového integrálu) Je-li φ po částech hladká křivka a f komplexní funkce konečná a spojitá na jejím grafu $[\varphi]$, pak platí odhad

$$\left| \int_{\varphi} f(z)\, dz \right| \leq \sup_{z \in [\varphi]} |f(z)| \cdot d(\varphi).$$

Důkaz. Je analogický důkazům podobných tvrzení pro křivkové integrály II. druhu.

Věta II. 2.1.3. (O aproximaci křivkového integrálu) Nechť $D \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina a $\varphi: \langle a, b\rangle \rightarrow \mathbb{C}$ je křivka konečné délky. Buď f komplexní funkce, konečná a spojitá v D. Pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každou volbu bodů

$$(15) \quad z_0 = \varphi(a), z_1, z_2, \ldots, z_n = \varphi(b) \in [\varphi],$$

Pro niž je $d(\varphi_k) = d(\varphi | \langle t_{k-1}, t_k\rangle) < \delta$, leží graf $[\psi]$ odpovídající lomené čáry ψ s vrcholy (15) v D, a platí

$$\left| \int_{\varphi} f(z)\, dz - \int_{\psi} f(z)\, dz \right| < \varepsilon.$$

Důkaz. Viz [Černý, 1967].

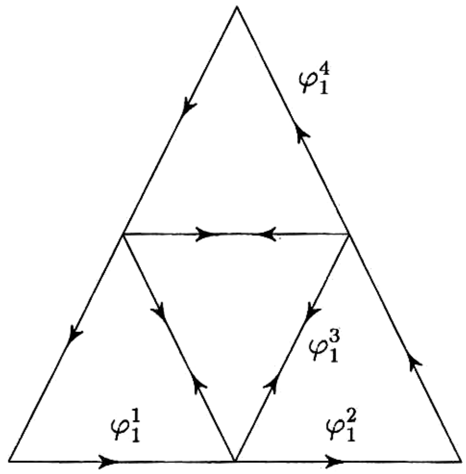
Nyní můžeme vyslovit Cauchyovu větu, jednu z nejdůležitějších vět v komplexní analýze.

Věta II. 2.1.4. (Cauchyova věta) Nechť D je jednoduše souvislá oblast neobsahující bod ∞ a nechť f je holomorfní funkce v oblasti D. Pak pro každou Jordanovu křivku φ, jejíž graf leží v oblasti D, tedy $[\varphi] \subset \mathrm{D}$, platí

$$\int_{\varphi} f(z)\, dz = 0.$$

Důkaz. Podle [14]. Kompletní důkaz Cauchyovy věty (viz např. [Černý, 1967] nebo [Rudin, 1977]) je poměrně rozsáhlý, proto se omezíme jen na hlavní myšlenku. Důkaz provedeme ve třech krocích.

1. Předpokládejme, že $[\varphi]$ je kladně orientovaný obvod trojúhelníka. Trojúhelník, tedy vnitřek Jordanovy křivky $\overline{\operatorname{Int}\varphi}$ rozdělíme středními příčkami na čtyři shodné trojúhelníky, jejichž kladně orientované obvody označíme $[\varphi_1^1], [\varphi_1^2], [\varphi_1^3], [\varphi_1^4]$. Tuto situaci vidíme na *Obr. II. 2.1.1.*



Obr. II. 2.1.1. (Zdroj [14, str. 75])

Z vlastností integrálu komplexní funkce plyne, že

$$I = \int_{\varphi} f(z)\, dz = \sum_{j=1}^{4} \int_{\varphi_1^j} f(z)\, dz.$$

Z integrálů na pravé straně vybereme ten, jehož absolutní hodnota je větší nebo rovna než absolutní hodnoty zbývajících tří integrálů. Řekněme, že je to např. integrál $\int_{\varphi_1^1} f(z)\, dz$.

Potom platí, že

$$(16)\qquad |I| \leq 4\left|\int_{\varphi_1^1} f(z)\,dz\right|.$$

Trojúhelník $\overline{\operatorname{Int}\varphi_1^1}$, tedy vnitřek nově vzniklé Jordanovy křivkyφ_1^1, opět rozdělíme středními příčkami na čtyři shodné trojúhelníky, jejichž kladně orientované obvody označíme obdobně $[\varphi_2^1], [\varphi_2^2], [\varphi_2^3], [\varphi_2^4]$. Opět platí

$$\int_{\varphi_1^1} f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{4} \int_{\varphi_2^j} f(z)\,dz.$$

Z integrálů na pravé straně rovněž vybereme ten, jehož absolutní hodnota je větší nebo rovna absolutním hodnotám tří zbývajících integrálů. Nyní řekněme, že je to např. integrál $\int_{\varphi_2^1} f(z)\,dz$. Potom obdobně platí

$$\left|\int_{\varphi_1^1} f(z)\,dz\right| \leq 4\left|\int_{\varphi_2^1} f(z)\,dz\right|,$$

což spolu s předchozí nerovností (16) dává nerovnost

$$|I| \leq 4^2\left|\int_{\varphi_2^1} f(z)\,dz\right|.$$

Budeme-li tímto způsobem dále pokračovat, obdržíme nerovnosti

$$(17)\qquad |I| \leq 4^n\left|\int_{\varphi_n^1} f(z)\,dz\right|$$

a posloupnost podobných uzavřených trojúhelníků $\overline{\operatorname{Int}\varphi_n^1}$, $\overline{\operatorname{Int}\varphi} \supset \overline{\operatorname{Int}\varphi_1^1} \supset \overline{\operatorname{Int}\varphi_2^1} \supset \cdots \supset \overline{\operatorname{Int}\varphi_n^1} \supset \cdots$ takových, že délka stran $(n+1)$-tého trojúhelníka se rovná polovině délek příslušných stran n-tého trojúhelníka. Podle toho označíme $d = d(\varphi)$, $d_1 = d(\varphi_1^1) = \frac{d}{2}$ a obecně $d_n = d(\varphi_n^1) = \frac{d}{2^n}$ pro $n = 1,2,3 \ldots$.

Dále existuje bod z_0 takový, že $z_0 \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} \overline{\operatorname{Int}\varphi_n^1}$ a tudíž i $z_0 \in D$. Jelikož je funkce f holomorfní v bodě z_0, existuje derivace $f'(z_0)$.

K libovolnému reálnému číslu $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že $U(z_0, \delta) \subset D$ a pro každé z z redukovaného δ-okolí bodu z_0 a platí

$$\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0)\right| < \varepsilon\,,$$

odtud

$$(18) \quad \left|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)\right| < \varepsilon(z - z_0).$$

Nyní využijeme tvrzení, které najdeme v [14, str. 72]. Je-li φ uzavřená křivka, pak $\int_\varphi z^n\,dz = 0$ pro $n = 0,1,2 \dots$. Jelikož pro libovolné n tedy platí

$$\int\limits_{\varphi_n^1} \left[f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)\right] dz = f(z_0) \int\limits_{\varphi_n^1} dz + f'(z_0) \int\limits_{\varphi_n^1} z\,dz + z_0 f'(z_0) \int\limits_{\varphi_n^1} dz = 0\,,$$

je

$$(19) \quad \int\limits_{\varphi_n^1} f(z)\,dz = \int\limits_{\varphi_n^1} \left[f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)\right] dz.$$

Jestliže bod z leží v trojúhelníku $\overline{\operatorname{Int}\varphi_n^1}$, pak jistě platí $|z - z_0| \le \frac{d}{2^n}$, tzn., že vzdálenost dvou bodů v tomto trojúhelníku není větší než jeho obvod. Ze vztahu $z_0 \in \overline{\operatorname{Int}\varphi_n^1} \subset D$ a z toho, že $d_n = \frac{d}{2^n} \to 0$ pro $n \to \infty$ plyne, že pro dostatečně velká n je $[\varphi_n^1] \subset U(z_0, \delta)$. Podle vztahů (18), (19) a Věty II 2.1.2 pro odhad křivkového integrálu dostáváme pro dostatečně velká n odhad

$$\left|\int\limits_{\varphi_n^1} f(z)\,dz\right| = \left|\int\limits_{\varphi_n^1} \left[f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)\right] dz\right| \le \varepsilon \frac{d}{2^n}\frac{d}{2^n} = \varepsilon \frac{d^2}{4^n}.$$

Z nerovnosti (17) pak dostaneme odhad $|I| \le \varepsilon d^2$. A jelikož $\varepsilon > 0$ je libovolné malé číslo, platí $I = 0$. Tím jsme dokázali Cauchyovu větu pro trojúhelník.

2. Nyní budeme předpokládat, že $[\varphi]$ je uzavřená lomená čára, tzn., že množina $M = \operatorname{Int}\varphi \cup [\varphi] \subset D$ je uzavřený n-úhelník ($n > 3$). Pokud je M konvexní, potom je možné integrál $I = \int_\varphi f(z)\,dz$ vyjádřit jako součet integrálů téže funkce po jistých trojúhelnících s vrcholy ve vrcholech lomené čáry $[\varphi]$. S využitím prvního kroku důkazu potom dostaneme $I = 0$. Pokud M není konvexní, pak je

možno tuto množinu rozložit na konečný počet konvexních mnohoúhelníků. I v tomto případě se nakonec dostaneme k výsledku $I = 0$.

3. Předpokládáme, že φ je libovolná uzavřená křivka konečné délky a $[\varphi] \subset D$. S využitím Věty II. 2.1.3. o aproximaci křivkového integrálů a předchozích kroků dojdeme k nerovnosti

$$\left| \int_{\varphi} f(z)\, dz \right| < \varepsilon\,,$$

která je při libovolném $\varepsilon > 0$ možná jen tehdy, když $I = \int_{\varphi} f(z)\, dz = 0$.

Nyní si uvedeme některá zobecnění Cauchyovy věty.

Věta II. 2.1.5. Nechť D je jednoduše souvislá oblast neobsahující bod ∞ a nechť funkce f je holomorfní v oblasti D. Pak pro každou uzavřenou křivku φ konečné délky, jejíž graf leží v oblasti D, platí

$$\int_{\varphi} f(z)\, dz = 0.$$

Zobecnění v této větě spočívá v tom, že křivka φ může mít násobné body (není již požadována prostota křivky φ).

Důkaz. Viz [Černý, 1967].

Věta II. 2.1.6. Nechť D je vnitřek Jordanovy křivky $\varphi\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{C}$ konečné délky a nechť f je holomorfní v oblasti D, a konečná a spojitá na jejím uzávěru $\overline{D} = D \cup [\varphi]$. Potom platí

$$\int_{\varphi} f(z)\, dz = 0.$$

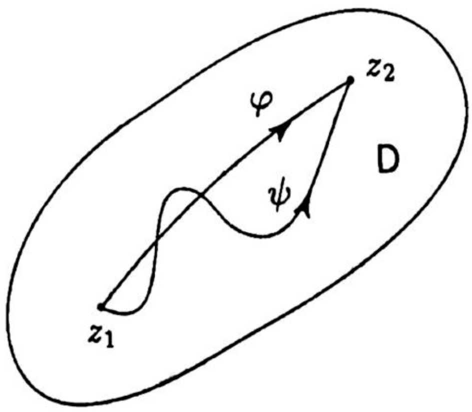
Dále ještě existuje zobecnění Cauchyovy věty pro vícenásobně souvislou oblast, které si však uvádět nebudeme. Najdete jej např. v [9, str. 111], [12, str. 130] nebo [14, str. 78]. Uvedeme si však jinou větu – o nezávislosti křivkového integrálu na integrační cestě.

Věta II. 2.1.7. Nechť D je jednoduše souvislá oblast neobsahující bod ∞ a f je holomorfní funkce v oblasti D. Nechť z_1, z_2 jsou libovolné dva body oblasti D a φ, ψ jsou křivky konečné délky v oblasti D takové, že platí $\mathrm{p.b.}\varphi = \mathrm{p.b.}\psi = z_1$, $\mathrm{k.b.}\varphi = \mathrm{k.b.}\psi = z_2$. Potom platí

$$\int_{\varphi} f(z)\,dz = \int_{\psi} f(z)\,dz\,,$$

tj. integrál funkce f po křivce nezávisí na volbě křivky φ, ale jen na jejím počátečním a koncovém bodě.

Důkaz. Tvrzení této věty je důsledkem Věty II. 2.1.5. aplikované na uzavřenou křivku $\omega = \varphi \dot{-} \psi$.



Obrázek II. 2.1.2. (Zdroj [14, str. 82])

Je pak

$$\int_{\omega} f\,dz = \int_{\varphi} f\,dz + \int_{\dot{-}\psi} f\,dz = 0, \quad \text{tj.} \quad \int_{\varphi} f\,dz - \int_{\psi} f\,dz = 0.$$

Poznámka. Takový integrál, který nezávisí na integrační cestě, se obvykle značí $\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz$. Nicméně tvrzení této věty neplatí obecně. Neplatí pro vícenásobně souvislé oblasti nebo pro některé specifické typy integrálů.

Cauchyova věta se používá k výpočtu různých typů integrálů. V některých případech lze tuto větu aplikovat přímo na námi hledaný integrál, a jak uvidíme na příkladu, výpočet je pak velmi jednoduchý.

Příklad II. 2.1.1. Vypočtěte integrál $\int_{\varphi} \frac{dz}{z-i}$, kde φ je kružnice $|z| = \frac{1}{2}$.

Integrovaná funkce není holomorfní pouze v bodě $z = i$, který neleží ve vnitřní oblasti křivky φ. To znamená, že ve všech bodech oblasti $D = \text{Int}\,\varphi$ je funkce $f(z) = \frac{1}{z-i} dz$ holomorfní. Dále je také zřejmé, že křivka φ je uzavřená. Tím jsou splněny předpoklady Cauchyovy věty, což nám výrazně usnadní práci s výpočtem tohoto integrálu. Podle Cauchyovy věty je tedy hodnota tohoto integrálu nulová.

Často se tato věta používá tím způsobem, že vezmeme vhodnou holomorfní funkci, která se zadaným integrálem určitým způsobem souvisí a zvolíme vhodnou uzavřenou integrační cestu φ. Tato integrační cesta je vlastně množina cest, které závisejí na nějakém parametru, resp. parametrech, např. $\varphi_r = \varphi_r^1 \dotplus \varphi_r^2$. Jak jsme již výše dokázali, podle Cauchyovy věty platí $\int_{\varphi_r} f(z)\, dz = 0$. Je-li $\lim_{r\to r_0} \int_{\varphi_r^1} f(z)\, dz$ rovna hledanému integrálu, pak, pokud je to snazší, stačí místo ní najít $\lim_{r\to r_0} \int_{\varphi_r^2} f(z)\, dz$. Přitom je často výhodné křivku φ_r^2 rozdělit na více částí a hledat limitu pro každou z nich. Tímto způsobem často najdeme zobecněné integrály nebo integrály ve smyslu hlavní hodnoty, pak je třeba ověřit, zda spočítaný výsledek je i výsledkem námi hledaného integrálu.

Příklad II. 2.1.2. [9, str. 114], [10, str. 69], [14, str. 80]. (Výpočet Fresnelových integrálů) Tento příklad a jeho řešení je převzato z publikací.

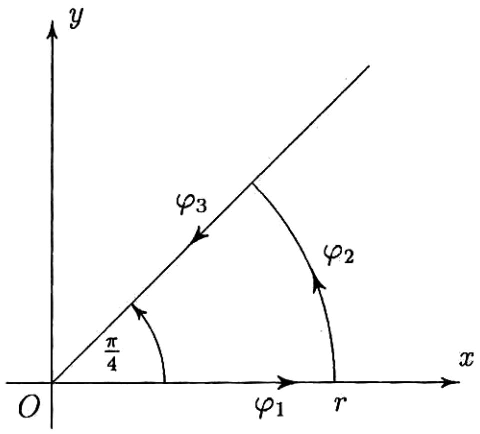
Spočítejte Fresnelovy integrály

$$\int_0^{+\infty} \cos(t^2)\, dt, \int_0^{+\infty} \sin(t^2)\, dt$$

jako zobecněné integrály, tj. ve smyslu $\lim_{r\to+\infty} \int_0^r f(t)\, dt$.

Budeme uvažovat funkci $f(z) = e^{iz^2}$, která je holomorfní v celé Gaussově rovině. Protože pro reálné z je $e^{iz^2} = \cos(z^2) + i \cdot \sin(z^2)$, stačí spočítat $\int_0^{+\infty} e^{it^2} dt$ a pak vzít reálnou a imaginární část výsledku. Podle Cauchyovy věty platí pro každou uzavřenou křivku φ konečné délky $\int_{\varphi} e^{iz^2} dz = 0$.

Zvolíme integrační křivky $\varphi = \varphi_1 \dotplus \varphi_2 \dotplus \varphi_3$, kde:



$$\varphi_1(t) = t, t \in \langle 0, r \rangle$$

$$\varphi_2(t) = r \cdot e^{it}, t \in \langle 0, \frac{\pi}{4} \rangle$$

$$\varphi_3(t) = (r - t)e^{i\frac{\pi}{4}}, t \in \langle 0, r \rangle$$

Obr. II. 2.1.3. (Zdroj [14, str. 81])

Integrál podél φ vyjádříme jako součet integrálů podél $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ a každý z nich rozepíšeme podle vzorce (14), dostaneme tak rovnost:

$$(20) \qquad \int_0^r e^{it^2} dt + ir \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{ir^2 e^{2it}} e^{it} dt - \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i) \int_0^r e^{-s^2} ds = 0.$$

Dále v této rovnosti přejdeme k limitě pro $r \to +\infty$. Zjistíme, že pro limitu posledního integrálu ve vztahu (20) pro $r \to +\infty$ platí

$$\lim_{r \to \infty} \int_0^r e^{-s^2} ds = \int_0^{+\infty} e^{-s^2} ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

tzv. Euler – Poissonův integrál. Nyní potřebujeme dokázat, že existuje vlastní limita prostředního integrálu ve vztahu (20) pro $r \to \infty$. Platí

$$0 \leq \left| ir \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{ir^2 e^{2it}} e^{it} dt \right| \leq r \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left| e^{ir^2 \cos 2t - r^2 \sin 2t} e^{it} \right| dt =$$

$$= r \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-r^2 \sin 2t} dt \leq r \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-r^2 \frac{4t}{\pi}} dt = -r \frac{\pi}{4r^2} \left[e^{-r^2 \frac{4t}{\pi}} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} \frac{1 - e^{-r^2}}{r}$$

jelikož pro $t \in \langle 0, \frac{\pi}{4} \rangle$ platí $\sin 2t \geq \frac{4t}{\pi}$ a $\lim_{r\to+\infty} \frac{1-e^{-r^2}}{r} = 0$. Užitím Věty o limitě tří funkcí dostaneme, že limita, kterou hledáme, je nulová. Můžeme pak také říci, že existuje $\lim_{r\to+\infty} \int_0^r e^{it^2} dt$ (limita prvního integrálu ve vztahu (20) pro $r \to \infty$) a platí

$$\int_0^{+\infty} e^{it^2} dt - \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\frac{\sqrt{\pi}}{2} = 0.$$

Odtud porovnáním reálných a imaginárních částí dostaneme Fresnelovy integrály

$$\int_0^{\infty} \cos(t^2)\, dt = \int_0^{\infty} \sin(t^2)\, dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

II. 2.2. Cauchyův integrální vzorec

V této části uvedeme důležitou vlastnost holomorfních funkcí. Hodnoty holomorfní funkce a jejich derivací uvnitř oblasti lze za jistých předpokladů určit pomocí hodnot této funkce na hranici uvažované oblasti.

Věta II. 2.2.1. (Cauchyův integrální vzorec) Nechť φ je kladně orientovaná Jordanova křivka konečné délky a $[\varphi] \subset \mathbb{C}$. Dále nechť funkce f je holomorfní v oblasti $D = \operatorname{Int}\varphi$ a konečná a spojitá na jejím uzávěru $D = \operatorname{Int}\varphi \cup [\varphi]$. Potom hodnotu funkce f v libovolném bodě $z \in D$ lze vyjádřiv vzorcem

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Důkaz. Viz [9, str. 122], [12, str. 132] nebo [14, str. 83].

Poznámka.

1. Pokud jsou splněny předpoklady z Cauchyovy integrální věty, lze na základě Cauchyovy věty říci, že pro každý bod $z \in \operatorname{Ext}\varphi$ platí $\int_{\varphi} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0$.

2. Důsledkem Cauchyova integrálního vzorce je Věta o střední hodnotě pro kružnici, která říká, že hodnota funkce f, která je holomorfní v oblasti $D = \operatorname{Int}\varphi$ a

konečná a spojitá na jejím uzávěru $\overline{D}$, ve středu kruhu je rovna střední hodnotě této funkce na hranici kruhu, tj. $f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{it}\right)dt$.

3. Cauchyův integrální vzorec lze zobecnit, což popisuje Cauchyův vzorec pro vícenásobně souvislou oblast. Najdeme jej např. v [12, str. 133; 14, str. 85].

4. Máme-li křivku φ konečné délky a funkci f konečnou a spojitou na jejím grafu $[\varphi]$, pak integrál $\frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = F(z)$ se nazývá integrál Cauchyova typu.

Nyní se budeme zabývat některými vlastnostmi integrálů Cauchyova typu.

Věta II. 2.2.2. Nechť $\varphi\colon \langle a, b\rangle \to \mathbb{C}$ je křivka konečné délky a f je konečná a spojitá funkce na jejím grafu $[\varphi]$. Pak pro každé $p \in \mathbb{Z}$, $p \neq 0$ je funkce

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\varphi \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^p} d\zeta$$

holomorfní v množině $M = \mathbb{C} - [\varphi]$ a pro každé $z \in M$ platí

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\varphi \frac{d}{dz}\left[\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^p}\right] d\zeta = \frac{p}{2\pi i}\int\limits_\varphi \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{p+1}} d\zeta.$$

Důkaz. Viz [12, str. 134], [14, str. 86].

Poznámka

Věta II. 2.2.1 říká, že homomorfní funkci f lze v libovolném bodě $z \in \operatorname{Int}\varphi$ vyjádřit Cauchyovým integrálním vzorcem

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\varphi \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Integrál na pravé straně je Cauchyova typu, tzn., že podle Věty II. 2.2.2. pro $p = 1$ má funkce f má pro každé $z \in \operatorname{Int}\varphi$ derivaci, která je dána vzorcem

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\varphi \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta.$$

Opět máme na pravé straně integrál Cauchyova typu a lze tedy znovu aplikovat stejný postup. Indukcí potom dostaneme Cauchyův integrální vzorec pro n-tou derivaci, tedy pro každé $z \in \operatorname{Int}\varphi$ a každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$(21) \quad f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

Na základě těchto úvah lze vyslovit důležitou větu, která nemá v reálném oboru žádnou analogii.

Věta II. 2.2.3. Nechť f je holomorfní funkce na otevřené množně $M \subset \mathbb{C}$, tj taková, že pro každé $z \in M$ existuje derivace $f'(z)$. Pak na množině M existují derivace všech řádů funkce f, které jsou rovněž holomorfními funkcemi v této množině M.

Důkaz. Tvrzení plyne z Vět II. 2.2.1. a II. 2.2.2. a úvah v poslední Poznámce.

Příklad II. 2.2.1. Užijte Cauchyova integrálního vzorce pro výpočet integrálu, přičemž φ je kladně orientovaná Jordanova křivka.

a) $\int_{\varphi} \frac{e^z}{z^2-1} dz, \ \varphi: |z-1| = 1$

Zvolíme $f(z) = \frac{e^z}{z+1}$, tedy $I = \int_{\varphi} \frac{f(z)}{z-1} dz$. Funkce $f(z)$ splňuje předpoklady Věty II. 2.2.1. a bod $z = 1$ leží uvnitř křivky φ, jelikož $|1-1| = 0 < 1$.

Můžeme tedy na tento příklad aplikovat Cauchyův integrální vzorec:

$$f(1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(z)}{z-1} dz \ \Rightarrow \ \int_{\varphi} \frac{f(z)}{z-1} dz = \int_{\varphi} \frac{e^z}{z^2-1} dz = 2\pi i \cdot f(1) = 2\pi i \cdot \frac{e}{2} = \pi i e$$

b) $\int_{\varphi} \frac{z^2+2z+2}{z+2} dz, \ \varphi: |z| = 3$

Zvolíme $f(z) = z^2 + 2z + 2$, tedy $I = \int_{\varphi} \frac{f(z)}{z-(-2)} dz$. Funkce $f(z)$ splňuje předpoklady Věty II. 2.2.1. a bod $z = -2$ leží uvnitř křivky φ, jelikož $|-2| = 2 < 3$.

Můžeme tedy použít Cauchyův integrální vzorec:

$$f(-2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(z)}{z-(-2)} dz \ \Rightarrow \ \int_{\varphi} \frac{f(z)}{z-(-2)} dz = \int_{\varphi} \frac{z^2+2z+2}{z+2} dz = 2\pi i \cdot f(-2) = 4\pi i$$

c) $\int_{\varphi} \frac{e^{iz}}{z} dz, \ \varphi\colon |z+1| = 2$

Zvolíme $f(z) = e^{iz}$, tedy $I = \int_{\varphi} \frac{f(z)}{z} dz$. Funkce $f(z)$ splňuje předpoklady Věty II. 2.2.1. a bod $z = 0$ leží uvnitř křivky φ, jelikož $|0+1| = 1 < 2$.

Můžeme tedy použít Cauchyův integrální vzorec:

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(z)}{z} dz \Rightarrow \int_{\varphi} \frac{f(z)}{z} dz = \int_{\varphi} \frac{e^{iz}}{z} dz = 2\pi i \cdot f(0) = 2\pi i$$

d) $\int_{\varphi} \frac{\cos z}{z} dz, \ \varphi\colon |z| = 1$

Zvolíme $f(z) = \cos z$, tedy $I = \int_{\varphi} \frac{f(z)}{z} dz$. Funkce $f(z)$ splňuje předpoklady Věty II. 2.2.1. a bod $z = 0$ leží uvnitř křivky φ, jelikož $|0| = 0 < 1$.

Můžeme tedy použít Cauchyův integrální vzorec:

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(z)}{z} dz \Rightarrow \int_{\varphi} \frac{f(z)}{z} dz = \int_{\varphi} \frac{\cos z}{z} dz = 2\pi i \cdot f(0) = 2\pi i$$

e) $\int_{\varphi} \frac{z^2}{z+5-2i} dz, \ \varphi\colon |z+i| = 1$

Zvolíme $f(z) = z^2$, tedy $I = \int_{\varphi} \frac{f(z)}{z-(-5+2i)} dz$. Funkce $f(z)$ splňuje předpoklady Věty II. 2.2.1. Bod $z = -5+2i$ však neleží uvnitř křivky φ, jelikož

$$|-5+2i+i| = |-5+3i| = \sqrt{34} > 1.$$

Z tohoto důvodu je hodnota integrálu rovna nule.

f) $\int_{\varphi} \frac{\sin z}{z-i} dz, \ \varphi\colon |z| = 2$

Zvolíme $f(z) = \sin z$, tedy $I = \int_{\varphi} \frac{f(z)}{z-i} dz$. Funkce $f(z)$ splňuje předpoklady Věty II. 2.2.1. a bod $z = i$ leží uvnitř křivky φ, jelikož $|i| = 1 < 2$.

Můžeme tedy použít Cauchyův integrální vzorec:

$$f(i) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{f(z)}{z-i} dz \Rightarrow \int_{\varphi} \frac{f(z)}{z-i} dz = \int_{\varphi} \frac{\sin z}{z-i} dz = 2\pi i \cdot f(i) = 2\pi i \cdot \sin(i)$$

g) $\int_\varphi \frac{z}{z^2-2z+2}dz$, φ: $|z+2i|=2$

Nejprve zjistíme kořeny jmenovatele, abychom mohli zvolit funkci $f(z)$. Kořeny jsou $z_1 = 2+2i$ a $z_2 = 2-2i$. Jako bod z zvolíme kořen z_2, tedy $z = 2-2i$. Integrál $\int_\varphi \frac{z}{z^2-2z+2}dz$ nyní přepíšeme vhodným způsobem:

$$\int_\varphi \frac{z}{z^2-2z+2}dz = \int_\varphi \frac{\frac{z}{z-(2+2i)}}{z-(2-2i)}dz$$

Funkci $f(z)$ je tedy třeba zvolit jako $f(z) = \frac{z}{z-(2+2i)}$.

Nyní můžeme pro výpočet integrálu použít Cauchyův integrální vzorec:

$$f(2-2i) = \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{f(z)}{z-(2-2i)}dz \Rightarrow$$

$$\int_\varphi \frac{f(z)}{z-(2-2i)}dz = \int_\varphi \frac{z}{z^2-2z+2}dz = 2\pi i\cdot f(2-2i) = 2\pi i\cdot\frac{1-i}{-2i} = \pi(i-1)$$

h) $\int_\varphi \frac{e^z}{z(1-z)}$, φ: $|z-1| = \frac{1}{2}$

Zvolíme $f(z) = -\frac{e^z}{z}$, tedy $I = \int_\varphi \frac{f(z)}{z-1}dz$. Funkce $f(z)$ splňuje předpoklady Věty II. 2.2.1. a bod $z=1$ leží uvnitř křivky φ, jelikož $|1-1| = 0 < \frac{1}{2}$. Můžeme tedy použít Cauchyův integrální vzorec:

$$f(1) = \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{f(z)}{z-1}dz \Rightarrow \int_\varphi \frac{f(z)}{z-1}dz = \int_\varphi \frac{e^z}{z(1-z)}dz = 2\pi i\cdot f(1) = -2\pi e i$$

Příklad II. 2.2.2.

Užijte zobecnění Cauchyova integrálního vzorce pro výpočet integrálu $\int_\varphi \frac{z\cdot\cos z}{(z-1)^2}dz$, přičemž φ: $|z| = 2$ je kladně orientovaná Jordanova křivka.

Zvolíme $f(z) = \mathrm{z} \cdot \cos z$, tedy $I = \int_{\varphi} \frac{f(z)}{(z-1)^2} dz$. Funkce $f(z)$ splňuje předpoklady pro použití zobecnění Cauchyova vzorce a bod $z = 1$ leží uvnitř křivky φ, jelikož $|1| = 1 < 2$.

První derivace funkce $f(z)$ je rovna

$$f'(z) = \cos z - z \cdot \sin z.$$

Po dosazení do vztahu (19) dostaneme:

$$f'(1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{z \cdot \cos z}{(z-1)^2} dz.$$

Odtud

$$\int_{\varphi} \frac{z \cdot \cos z}{(z-1)^2} dz = 2\pi i \cdot f'(1) = 2\pi(\cos 1 - \sin 1)i\,.$$

II. 2.3. Primitivní funkce

Primitivní funkce v komplexní analýze se definuje analogicky jako primitivní funkce pro funkce jedné reálné proměnné.

Definice II. 2.3.1. Buď $D \subset \mathbb{C}$ otevřená množina a dále F, f dvě funkce takové, že platí $F'(z) = f(z)$ pro každé $z \in D$. Pak řekneme, že funkce F je primitivní funkce k funkci f v D.

Má-li funkce f primitivní funkci $F(z)$ v D, pak má nekonečně mnoho primitivních funkcí v této množině. Stejně jako v reálné analýze totiž platí, že je-li $F(z)$ primitivní funkce k funkci f v D, pak také $F(z) + c$ pro libovolné $c \in \mathbb{C}$ je primitivní funkce k této funkci.

V komplexní analýze však neplatí tvrzení, že ke každé funkci f spojité na otevřené množině existuje primitivní funkce na této množině, jako tomu bylo u funkcí jedné reálné proměnné. Pokud však umíme tuto primitivní funkci v otevřené množině D obsahující $[\varphi]$ najít, je možné integrál $\int_{\varphi} f(z)\, dz$ snadno spočítat, pomocí následující věty.

Věta II. 2.3.1. Nechť funkce f je spojitá v otevřené množině $D \subset \mathbb{C}$ a má v D primitivní funkci F. Je-li $\varphi\colon \langle a, b\rangle \to D$ křivka konečné délky, pak platí

$$\int_{\varphi} f(z)\,dz = F(b) - F(a).$$

Důkaz. Viz [14, str. 89].

Nyní je otázka, kdy primitivní funkce k funkci f existuje. Ukazuje se, že existence primitivní funkce úzce souvisí s nezávislostí integrálu na integrační cestě. Připomeňme si, co to znamená.

Definice II. 2.3.2. Nechť f je konečná a spojitá funkce v otevřené množině $D \subset \mathbb{C}$. Řekneme, že křivkový integrál funkce f nezávisí na integrační cestě, jestliže

$$\int_{\varphi} f(z)\,dz = \int_{\psi} f(z)\,dz$$

pro každé dvě křivky φ, ψ v D, které mají konečnou délku a platí $\mathrm{p.b.}\varphi = \mathrm{p.b.}\psi$, $\mathrm{k.b.}\varphi = \mathrm{k.b.}\psi$.

Nezávislost integrálu na integrační cestě můžeme však popsat i jiným způsobem, pomocí následující věty.

Věta II. 2.3.2. Křivkový integrál konečné a spojité funkce f nezávisí v oblasti D na integrační cestě, jestliže pro každou uzavřenou křivku ω, $[\omega] \subset D$, konečné délky, je

$$\int_{\omega} f(z)\,dz = 0.$$

Důkaz. Viz. [12, str. 137], [14, str. 90]. Jen připomenu, že úvahy se zakládají na dvou křivkách φ, ψ konečné délky, které mají společný počáteční a koncový bod. Pak můžeme také říci, že $\omega = \varphi \dot{-} \psi$ je uzavřená křivka konečné délky.

Věta II. 2.3.3. Nechť funkce f je konečná a spojitá v oblasti $D \subset \mathbb{C}$. Pak funkce f má v D primitivní funkci, jestliže křivkový integrál funkce f (podél libovolné po částech hladké křivky ω) nezávisí v D na integrační cestě.

Důkaz. Viz. [12, str. 137], [14, str. 90].

Důsledek: Je-li funkce f holomorfní v jednoduše souvislé oblasti D, pak k této funkci f existuje v dané oblasti primitivní funkce F.

Důkaz. Tvrzení plyne z Vět II. 2.1.7. a II. 2.3.3.

Příklad II. 2.3.1. Spočtěte integrál $\int_\varphi e^z dz$, kde křivka φ je orientovaný oblouk elipsy $x^2 + 4y^2 = 4$ s počátečním bodem $a = -i$ a koncovým bodem $b = i$.

V tomto příkladu využijeme Věty II. 2.3.1. a II. 2.3.2. Funkce $f(z) = e^z$ je holomorfní v celé Gaussově rovině. Má tedy primitivní funkci $F(z)$, kterou v tomto případě umíme snadno určit: $F(z) = e^z$. Integrál $\int_\varphi e^z\, dz$ je tedy roven

$$\int_\varphi e^z\, dz = \mathrm{F(b)} - \mathrm{F(a)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}}.$$

Závěr

Cílem této práce bylo seznámit čtenáře s pojmem derivace komplexní funkce a pojmy s ním související, především přiblížit oblast holomorfních funkcí. V první kapitole, která je věnována přímo pojmu derivace funkce komplexní proměnné, se podařilo tento pojem představit pomocí vybraných definic a vět, především pak pomocí řady příkladů. Díky praktickým příkladům může čtenář lépe pochopit, jak tento pojem chápat. Po přečtení první kapitoly čtenář zjistí, že řada pravidel pro derivování lze přenést z reálné analýzy do analýzy komplexní a samotný výpočet derivace je tak analogický. Existují zde však pravidla, která nemají v reálné analýze obdobu. Vybrala jsem příklady tak, aby obsáhly ty nejdůležitější typové postupy – jak ty, které jsou podobné postupům v reálné analýze, tak ty, které vyžadují složitější řešení. Mimo jiné jsem připojila příklady o derivaci některých známých elementárních funkcí, jako jsou funkce exponenciální, logaritmické nebo goniometrické. K výpočtu derivace těchto funkcí bylo třeba užít složitějších postupů, odlišných o reálné analýzy, výsledek však byl analogický. Derivací exponenciální funkce komplexní proměnné je rovněž funkce samotná, derivací logaritmické funkce komplexní proměnné je funkce lomená a také pro goniometrické funkce v komplexní analýze platí obdobné vzorce, které známe z reálné analýzy.

V druhé kapitole o holomorfních funkcích jsem se zaměřila především na jejich využití v teorii o křivkových integrálech komplexní funkce. Zde se čtenář mohl dozvědět, že Cauchyova věta je jedna z nejdůležitějších vět v komplexní analýze. Z tohoto důvodu je v práci rozepsán také její důkaz. Díky této větě se nám výpočty některých typů integrálů podstatně zjednoduší, mimoto nabízí také řešení pro spoustu jiných úloh. Co se týče Cauchyova integrálního vzorce, práce obsahuje spoustu příkladů, ve kterých se čtenář přesvědčí o tom, že vhodná volba holomorfní funkce nám otevře další možnosti využití jejich vlastností pro zjednodušení výpočtu křivkových integrálů. Mimoto, důsledkem tohoto Cauchyova integálního vzorce je velmi důležité tvrzení, které nemá v reálné analýze obdoby. Máme-li holomorfní funkci v otevřené množině M, pak v M existují derivace všech řádů této funkce, které jsou rovněž holomorfními funkcemi v M. V podkapitole o primitivních funkcích se objevují další zajímavá tvrzení o holomorfních funkcích, která nám mohou pomoci s jednodušším výpočtem integrálů. Důležitý je také důsledek těchto tvrzení, že k holomorfní funkci v jednoduše souvislé oblasti existuje primitivní funkce v této oblasti.

Teorie o holomorfních funkcích je velmi rozsáhlá. Holomorfní funkce mají mnoho dalších významných vlastností. Velmi důležité jsou rozvoje holomorfních funkcí v mocninné řady – tzv. Taylorova řada, vlastnosti nulových bodů holomorfních funkcí nebo pojem index bodu vzhledem ke křivce, který umožňuje zobecnit Cauchyův integrální vzorec také pro uzavřené křivky, které nejsou Jordanovy. S holomorfními funkcemi také souvisí Laurentovy řady, izolované singulární body nebo harmonické funkce, pomocí kterých můžeme určit holomorfní funkci, známe-li pouze její reálnou, resp. imaginární složku. Jedním z klíčových pojmů komplexní analýzy je reziduum funkce v bodě, jelikož Reziduová věta je zobecněním Cauchyovy věty a nachází četné aplikace nejen při výpočtu integrálů.

Seznam použité literatury

[1] Bečvář, J., Z historie lineární algebry [internetový zdroj], dostupné z:

https://docs.google.com/viewer?a=v&q=cache:XEgKvSAjIywJ:dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/400929/DejinyMat_3520071_10.pdf+komplexn%C3%AD+%C4%8D%C3%ADsla+historie&hl=cs&gl=cz&pid=bl&srcid=ADGEESjdJRVso4g_QwQuAcNdE0gvkV3SCAD3pg1fPmGIr58G1l6IRn_0pAQSlbXHN4T0_32QbbX55AAJaw5tbmmkY3Ai9NGBdtvIZZguz5HtLx2sb8WtIFg4uZgXlbKsP8262lImC&sig=AHIEtbRtv8FcFKbGeBr4Pw3jNwhHC17sYA [citováno 29. 1. 2013].

[2] Bouchala, J., Funkce komplexní proměnné, VŠB–TU Ostrava, Západočeská univerzita v Plzni, 2012.

[3] Bouchala, J., Sbírka příkladů z komplexní analýzy, VŠB–TU Ostrava, Fakulta aplikované matematiky, 2001.

[4] Dějiny matematiky [internetový zdroj], dostupné z:

https://www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/knihy/DejinyM.pdf [citováno 29. 1. 2013].

[5] Hamhalter, J., Tišer, J., Funkce komplexní proměnné, ČVUT, Fakulta elektrotechnická, Katedra matematiky, Praha, 2001.

[6] Jevgrafov, M. A., Funkce komplexní proměnné, SNTL – Nakladatelství technické literatury, Praha, 1981.

[7] Jevgrafov, M.A., Sbírka úloh z teorie funkcí komplexní proměnné, SNTL – Nakladatelství technické literatury, Praha, 1976.

[8] Kolářová, E., Matematika 2 – Sbírka úloh, VUT, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, Ústav matematiky, Brno.

[9] Kopáček, J., Matematická analýza pro fyziky (IV), Matfyzpress, Praha, 2003.

[10] Kopáček, J. a kol., Příklady z matematiky pro fyziky IV., Matfyzpress, Praha 2003.

[11] Mašek, J., Sbírka úloh z matematiky – Funkce komplexní proměnné, Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta aplikovaných věd, Katedra matematiky, Plzeň, 1996.

[12] Šulista, M., Základy analýzy v komplexním oboru, SNTL – Nakladatelství technické literatury, Praha, 1981.

[13] Veselý, J., Komplexní analýza pro učitele, Karolinum, Univerzita Karlova v Praze, Praha, 2000.

[14] Zeman, J., Úvod do komplexní analýzy, Univerzita Palackého v Olomouci, Přírodovědecká fakulta, Olomouc, 1994.