



# VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

## FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

## ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A BIOMECHANIKY

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

## VYUŽITÍ HAMILTONOVÝCH ROVNIC PŘI ŘEŠENÍ KMITÁNÍ SOUSTAVY S VÍCE STUPNI VOLNOSTI

APPLICATION OF HAMILTON'S EQUATIONS IN SOLVING OSCILLATION OF MULTI-DEGREE-  
OF-FREEDOM SYSTEM

### BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

### AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Ondřej Sikora

### VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. Jan Pokorný

BRNO 2021



# Zadaní bakalářské práce

Ústav:	Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Student:	<b>Ondřej Sikora</b>
Studijní program:	Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor:	Mechatronika
Vedoucí práce:	<b>Ing. Jan Pokorný</b>
Akademický rok:	2020/21

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

## **Využití Hamiltonových rovnic při řešení kmitání soustavy s více stupni volnosti**

### **Stručná charakteristika problematiky úkolu:**

Při řešení úloh kmitání se často využívají Lagrangeovy rovnice druhého druhu. Díky nim je možné získat pohybové rovnice, jejichž řešení je nutné pro určení kinematických veličin. Pro sestavení pohybových rovnic soustavy tuhých těles je však možné využít také Hamiltonovy kanonické rovnice. Úkolem je aplikovat Hamiltonovy rovnice při řešení pohybu zvolené soustavy těles s více stupni volnosti.

### **Cíle bakalářské práce:**

- 1) Provést rešerši literatury se zaměřením na Hamiltonovskou formulaci mechaniky.
- 2) Sestavit pohybové rovnice zvolené soustavy těles s více stupni volnosti pomocí Lagrangeových rovnic 2. druhu a Hamiltonových rovnic.
- 3) Provést numerické řešení pohybových rovnic.

### **Seznam doporučené literatury:**

MEIROVITCH, Leonard. Methods of analytical dynamics. New York: McGraw-Hill, 1970.

KRATOCHVÍL, Ctirad a Jaromír SLAVÍK. Mechanika těles: dynamika. Vyd. 4. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2007.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2020/21

V Brně, dne

L. S.

---

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.  
ředitel ústavu

---

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.  
děkan fakulty



## **ABSTRAKT**

Tato práce se v úvodní teoretické části zabývá řešením Hamiltonovské mechaniky ve srovnání s Lagrangeovským přístupem. Na základě těchto metod jsou odvozeny pohybové rovnice čtvrtinového modelu automobilu. Ty jsou následně použity pro účely simulace a analýzy vibrací karosérie jedoucího vozu v závislosti na nerovnostech vozovky.

### **Klíčová slova**

Lagrangeovy rovnice, Hamiltonovská mechanika, čtvrtinový model automobilu, Matlab / Simulink.

## **ABSTRACT**

The thesis is mainly focused on the comparison between Hamiltonian and Lagrangian formulations of classical mechanics. This research was used in order to derive equations of motion of a quarter car model and use them to simulate and analyze car body vibrations based on road irregularities.

### **Key words**

Lagrange's equations, Hamiltonian's mechanics, quarter car model, Matlab / Simulink.

## **BIBLIOGRAFICKÁ CITACE**

SIKORA, Ondřej. *Využití Hamiltonových rovnic při řešení kmitání soustavy s více stupni volnosti*. Brno, 2021. 50 s. Dostupné také z: <https://www.vutbr.cz/studenti/zav-prace/detail/132897>. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky. Vedoucí práce: Ing. Jan Pokorný.

## PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma Využití Hamiltonových rovnic při řešení kmitání soustavy s více stupni volnosti vypracoval samostatně s použitím odborné literatury a pramenů, uvedených v seznamu, který tvoří přílohu této práce.

---

Datum

---

Ondřej Sikora

## **PODĚKOVÁNÍ**

Na tomto místě bych chtěl poděkovat svému vedoucímu bakalářské práce, Ing. Janu Pokornému, za jeho cenné připomínky, rady a postřehy.

## OBSAH

<b>1</b>	<b>ZÁKLADY KLASICKÉ MECHANIKY</b> .....	13
1.1	Hmotný bod .....	13
1.2	Mechanická soustava .....	13
1.3	Sumační konvekce .....	13
1.4	Zobecněné souřadnice .....	13
1.5	Lagrangeovy rovnice prvního řádu .....	14
1.6	Integrální a diferenciální principy mechaniky .....	14
1.7	Hamiltonův princip nejmenší akce .....	16
<b>2</b>	<b>POHYBOVÉ ROVNICE</b> .....	18
2.1	Lagrange Joseph a Hamilton Wiliam .....	18
2.2	Teoretická mechanika .....	18
<b>3</b>	<b>LAGRANGEHO FORMALISMUS</b> .....	20
3.1	Lagrangeovy rovnice 2. řádu .....	20
3.2	Zákony zachování .....	22
<b>4</b>	<b>HAMILTONŮV FORMALISMUS</b> .....	26
4.1	Legendreova duální transformace .....	27
4.2	Hamiltonovy diferenciální rovnice .....	29
4.3	Poissonova formulace Hamiltonových rovnic .....	29
4.4	Vlastnosti Poissonových závorek .....	29
<b>5</b>	<b>VIBRACE</b> .....	31
5.1	Kmitání .....	31
5.2	Tlumení .....	31
<b>6</b>	<b>PŘÍKLAD S JEDNÍM STUPNĚM VOLNOSTI</b> .....	32
6.1	Řešená soustava .....	32
6.2	Lagrangeovy rovnice .....	32
6.3	Hamiltonovy rovnice .....	33
6.4	Knihovna Simulink .....	34
6.5	Simulink model .....	35
6.6	Odezva na budící sílu .....	35

---

<b>7</b>	<b>PŘÍKLAD SE DVĚMA STUPNI VOLNOSTI.....</b>	<b>36</b>
7.1	Řešená soustava.....	36
7.2	Lagrangeovy rovnice.....	38
7.3	Hamiltonovy rovnice.....	38
7.4	Volba parametrů.....	40
7.5	Simulink model.....	43
7.6	Odezvy na vstupní signály.....	44
<b>8</b>	<b>SROVNÁNÍ ZKOUMANÝCH METOD .....</b>	<b>47</b>
	<b>ZÁVĚR.....</b>	<b>49</b>
	<b>SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ .....</b>	<b>50</b>



## ÚVOD

Tato práce se v úvodní části zabývá řešením klasické mechaniky. Jsou vysvětleny základní pojmy, které jsou podstatné pro celou bakalářskou práci. Mezi ty nejdůležitější patří zobecněné souřadnice, množina tendence, princip nejmenší akce a Lagrangeova funkce. Následně jsou odvozeny pohybové rovnice dle Lagrangeho a Hamiltonova formalismu.

V této práci je také zmínka o teorému Emmy Neotherové. A zatímco Lagrangeho funkce  $L$  závisí na čase, poloze a rychlosti, tak Hamiltonova funkce  $H$  závisí místo na rychlosti na hybnosti soustavy. V jednotlivých kapitolách je popsán obecný postup sestavení pohybových rovnic pro oba formalismy.

V druhé polovině, v praktické části práce, je řešen příklad mechanického oscilátoru, tedy kmitání tělesa zavěšeného na pružině a tlumiči, který je buzen vnější silou, jejíž velikost se mění v čase deterministicky. Soustava je popsána rovnicemi dle obou výše zmíněných formalismů a výsledná pohybová rovnice je simulovaná v programu Matlab / Simulink.

Dále je pak řešen příklad čtvrtinového modelu vozidla, který je charakterizován pomocí dvou hmotných těles - karoserie vozu a samotného kola s pneumatikou. Z důvodů potřeby nahrazení reálné soustavy pomocí modelu, jsou pro model voleny hodnoty neznámých parametrů jak pro tlumení tlumičů, tak pro tuhosti pružin. Rovnice soustavy jsou názorně odvozeny dle obou formalismů a řešeny v softwaru. Oproti předešlému modelu se sleduje výchylka karoserie vozu v závislosti na výchylce změny vozovky.

V této práci jsou sledovány tři různé příklady změny výšky vozovky, tyto případy mají za cíl simulovat jízdu automobilu po zvrásněné cestě, dále vjezd a výjezd auta z výtluku na silnici a jako poslední simulace je proveden přejezd přes zpomalovací retardér. Na základě těchto tří simulací je sledována výchylka odpružené a neodpružené části vozidla v závislosti na vertikální výchylce vozovky.

Podstatnou částí mé bakalářské práce je kapitola osmá, ve které jsou srozumitelně porovnány výhody a nevýhody formalismů dle Lagrange a Hamiltona.



## 1 Základy klasické mechaniky

V úvodní kapitole jsou formulovány základní principy klasické mechaniky, kinematiky a dynamiky těles. Díky nim je možné postoupit dále a nadefinovat Newtonův, Lagrangeův a Hamiltonův formalismus klasické mechaniky. Teoretická mechanika se zabývá formulací základních mechanických zákonů v křivočarých souřadnicích [4].

### 1.1 Hmotný bod

Pro zjednodušení pohybu reálného tělesa, nebo soustavy těles v prostoru, je zaveden fyzikální model hmotný bod. U takového modelu tělesa jsou zanedbány jeho rozměry a veškerá hmotnost je soustředěná do jeho těžiště. Taková idealizace může být provedena pouze v případě, že není podstatná deformace ani otáčení tělesa v prostoru. Křivka, kterou opisuje hmotný bod při pohybu tělesa se nazývá trajektorie a je určena průvodičem (polohovým vektorem). Délka trajektorie je dráha  $l$ . Trajektorie hmotných bodů může být reálná, nebo virtuální [1].

### 1.2 Mechanická soustava

Soustava, která je popsána jednotlivými velikostmi, hmotnostmi, rychlostmi a zrychleními jejích bodů. Pohyby mohou být omezeny, podmínky, které pohyb těles soustavy ovlivňují, nebo omezují, se nazývají vazby [1]. Vazební podmínku v kartézském souřadnicovém systému lze definovat ve tvaru:

$$\varphi = (x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \quad 1.1.$$

kde  $\varphi$  je funkce,  $x, y, z$  jsou polohy souřadnic,  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  rychlosti souřadnic a  $t$  je čas.

### 1.3 Sumační konvekce

Einsteinova sumační konvekce slouží k usnadnění zápisů sumačních vzorců a rovnic. Je užitečná hlavně v případech, kde se hojně vyskytují souřadnice. Jsou-li tedy ve výrazu dva stejné, libovolné indexy, automaticky se přes ně bude sčítat [5]. A to dle následujícího předpisu:

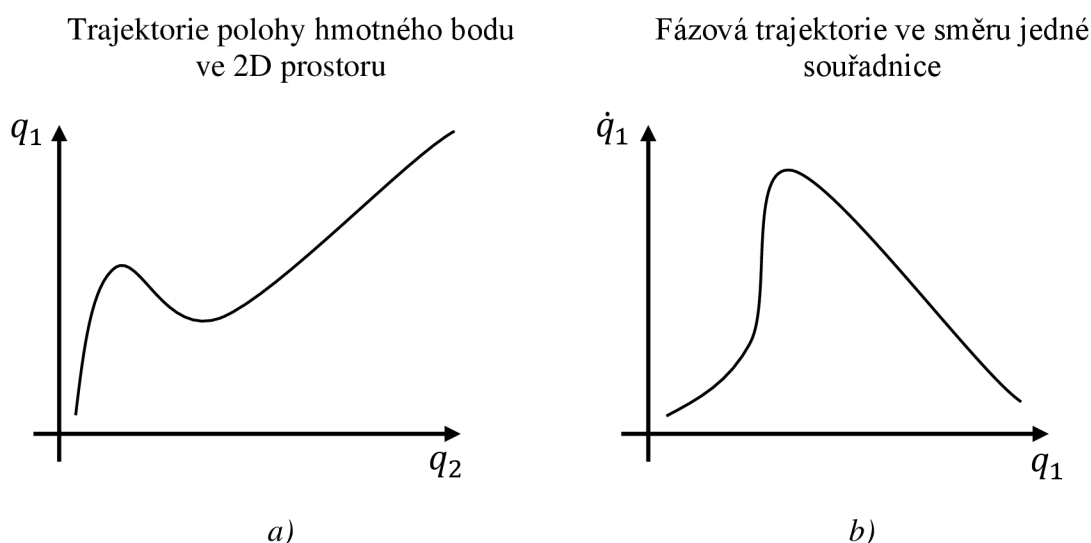
$$\sum_{k=1}^N a_k b_k = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = a_k b_k \quad 1.2.$$

kde  $a, b$  jsou konstanty;  $k$  a  $n$  jsou jednotlivé členy v pořadí.

### 1.4 Zobecněné souřadnice

Zobecněné souřadnice poloh a rychlostí v závislosti na čase jsou potřebné k definování stavu systému. Jako zobecněné souřadnice jsou nazývány takové, které jsou nezávislé na hlavním souřadnicovém systému. Souřadnice, kterými se mechanický systém popisuje, jsou nazývány **konfigurace** ( $q_1, q_2, \dots, q_n$ ). Pro ně se určuje také množina **tendence** (tedy množina jednotlivých rychlostí) jako časová derivace zobecněných souřadnic ( $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$ ) [2].

Na *obr.1.a)* je znázorněn konfigurační prostor ve kterém jsou vykreslené hodnoty zobecněných souřadnic. Na *obr.1.b)* je znázorněna fázová trajektorie bodu závislá na zobecněné poloze a zobecněné rychlosti v daném směru jedné osy [4].



*Obr.1. a) polohová a b) fázová trajektorie*

## 1.5 Lagrangeovy rovnice prvního řádu

Lagrangeovy rovnice prvního druhu jsou pohybové rovnice bodů, které umí popsat časový vývoj soustavy. Zabývají se systémy, ve kterých existují vazby, ty po uvolnění vytvoří dodatečné síly, které nemohou být zanedbány [3].

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = 0 \quad 1.3.$$

kde  $\varphi$  je závislost na jednotlivých polohách  $x$  a čase  $t$ .

## 1.6 Integrovní a diferenciální principy mechaniky

Variační počet se snaží optimalizovat trajektorii pohybu tak, aby našel tu nejvýhodnější. Zavede se rychlostní pole, které definuje, jakou rychlostí je sledovaný objekt schopný se pohybovat v jednotlivých směrech daného souřadnicového systému. Rychlostní pole je funkcí polohy a času v souřadnicovém prostoru. Úlohou variačního počtu je nalézt v systému nejvýhodnější možnou trajektorii z hlediska času, hledá se tedy  $y(t)$ . Soustava hmotných bodů, která vznikne z původní soustavy tak, že se každý z bodů posune, je nazývána soustavou variovanou. Variace je obecně jakákoli změna veličiny, kterou lze považovat za malou. Variace  $\delta$  znamená některý z možných přírůstků [1]. V diferenciálním počtu se hledají minima a maxima funkce, jako extrém vyjdou body v souřadnicovém systému, na rozdíl od variačního principu, kde jako extrém vyjde hledaná funkce.

Nechť existuje rychlostní pole takové, které je v časovém průběhu neměnné, ale je závislé na vzdálenosti od počátku souřadnicového systému. Úkolem je dostat se z počátku systému na druhou stranu. Důležité je, aby se bod dostal skrze rychlostní pole za co nejmenší čas, tedy co nejrychleji [5]. A právě taková trajektorie nemusí

být z hlediska vzdálenosti nutně ta nejkratší [10]. Celkový čas pohybu bodu po trajektorii odvodíme z rovnice:

$$v(x, y) = \frac{dr}{dt} \quad 1.4.$$

Z této rovnice se vyjádří časový průběh:

$$dt = \frac{dr}{v(x, y)} \quad 1.5.$$

kde  $v(x, y)$  je pole rychlostí,  $r$  je vektor polohy a  $t$  je čas.

Pro vyjádření časového průběhu je potřeba rovnici 1.5. integrovat, bod A je počáteční bod trajektorie a bod B je koncový bod hledané trajektorie:

$$T = \int_A^B \frac{dr}{v(x, y)} = \int_A^B \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{v(x, y)} = \int_A^B \frac{\sqrt{1 + (dy/dx)^2}}{v(x, y)} dx \quad 1.6.$$

kde  $T$  je trajektorií bodu.

Vzhledem k tomu, že se integruje přes  $dx$ , pro body A a B se berou jejich  $x$ -ové hodnoty souřadnic  $x_A$  a  $x_B$ . Výsledný časový průběh mezi body má tvar:

$$T = \int_{x_A}^{x_B} \frac{\sqrt{1 + dy^2}}{v(x, y)} dx \quad 1.7.$$

Úkolem této variační úlohy je najít závislost  $y(x)$  tak, aby trajektorie  $T$  byla z hlediska času optimální, hledán je takový časový extrém, aby byl výsledný čas co nejmenší.

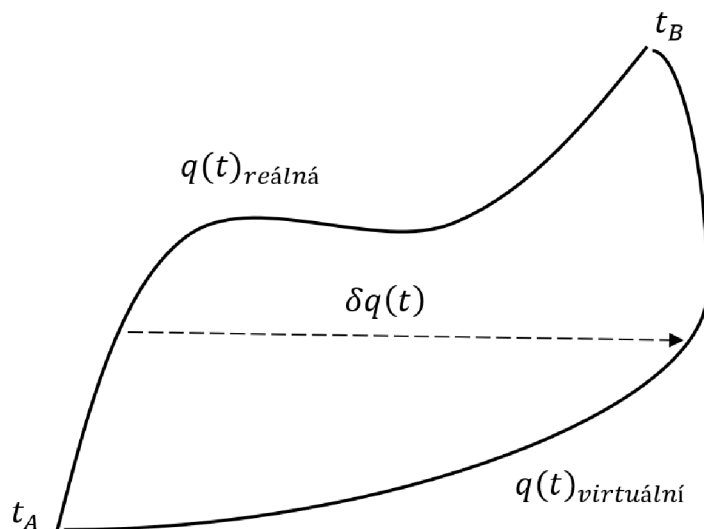
$$T(x_A, x_B) = \int_{x_A}^{x_B} F[x, y(x), dy(x)] dx \quad 1.8.$$

Funkce, které nejsou závislé pouze na jednotlivých proměnných, ale na dalších funkcích, se nazývají **funkcionály**. Takový zápis přiřadí složité funkci reálnou hodnotu. Viz rovnice 1.8., kde je za integrálem funkce, která je závislá na proměnné  $y(x)$  a zároveň i na její derivaci  $dy(x)$ .

Klasickým příkladem, kde se používá rovnice 1.7. je hledání ideální brachystochrony. To je křivka, která má za úkol dostat těleso z bodu A do bodu B co nejrychleji. Vyjadřuje tedy ideální rovnici tvaru nakloněné roviny z hlediska času [5].

## 1.7 Hamiltonův princip nejmenší akce

Vlivem působení sil v čase za současného respektování vazebné podmínky dojde k posunutí bodu po jeho skutečné trajektorii  $r$ . Virtuální posunutí  $\delta q(t)$  je každé takové infinitezimální posunutí, které se může v soustavě uskutečnit vzhledem k okrajovým podmínkám vazeb [4].



Obr.2. Definice virtuálního posunutí

Z obr.2. je patrné, že:

$$\delta q(t) = q(t)_{\text{virtuální}} - q(t)_{\text{reálná}} \quad 1.9.$$

Virtuální trajektorie se neuskutečnila, nebyla z nějakého důvodu pro soustavu výhodná. Těchto trajektorií může být nekonečně mnoho a každá z nich je infinitezimální. Při volbě  $\delta q(t)$  se zjišťuje velikost virtuálního posunutí vždy pro stejný čas vzhledem k reálnému posuvu. Takovému posunutí se říká izochronní variace [1]. Taková variace má dvě základní vlastnosti:

- a) Virtuální i reálné posunutí vždy musí vycházet ze stejného bodu A a ve stejném bodě B se na konci potkat. Platí tedy:

$$\delta q(t_A) = 0 \quad 1.10.$$

$$\delta q(t_B) = 0 \quad 1.11.$$

- b) Operace derivování a variování je záměnná, plyne to z toho, že virtuální posunutí se zjišťuje ve stejném čase a časová derivace se jej tedy netýká.

$$\frac{d}{dt} \delta q = \delta \frac{d}{dt} q \quad 1.12.$$

Z fyzikálního hlediska je zajímavější hledat funkci polohy závislé na čase  $q(t)$ . Na rozdíl od rovnice 1.8., kde  $T$  je funkcí počáteční a koncové polohy bodu, u principu nejmenší akce se předpokládá existence funkce  $L$ . Taková funkce je závislá na čase, všech zobecněných souřadnicích a jejich prvních časových derivacích. Zápis funkce  $S$  (akce), jakožto integrálu z Lagrangeovy funkce je následovný:

$$S(t_A, t_B) = \int L(t, q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n) dt \quad 1.13.$$

kde  $S$  se nazývá akce,  $L$  je Lagrangeovou funkcí,  $t_A$  je počáteční a  $t_B$  je koncový čas.

V této rovnici (1.13) se na rozdíl od Newtonovské mechaniky předpokládá princip výhodnosti a takový posuv nemusí být nutně tím nejrychlejším. Pohyb se uskuteční po trajektorií, pro kterou je akce, tedy  $\int L dt$ , minimální. Základním úkolem teoretické mechaniky je nalézt Lagrangeho funkci  $L$  tak, aby z ní dopočtené trajektorie byly v souladu s experimentálně naměřenými skutečnostmi.

Následující kapitola se zabývá možnostmi, jak popsat soustavu za pomocí pohybových rovnic.

## 2 Pohybové rovnice

Při samotném návrhu modelu mechanické soustavy, ve které jsou dynamické síly zanedbatelné (rychlosti pohybu soustavy jsou nízké), je možné spokojit se pouze s modelem čistě kinematickým. Dynamické síly ovšem nemohou být zanedbané v soustavách s relativně vysokými rychlostmi [3]. Jejich efekty budou ovlivňovat následné chování systému. U soustav s více stupni volnosti se používají maticové zápisy diferenciálních pohybových rovnic. Pro triviální 1D soustavy se používá k řešení metoda redukce. Složitější soustava může být zapsána pomocí rovnic dle Newtonova formalismu, které vycházejí z Newtonova druhého pohybového zákona.

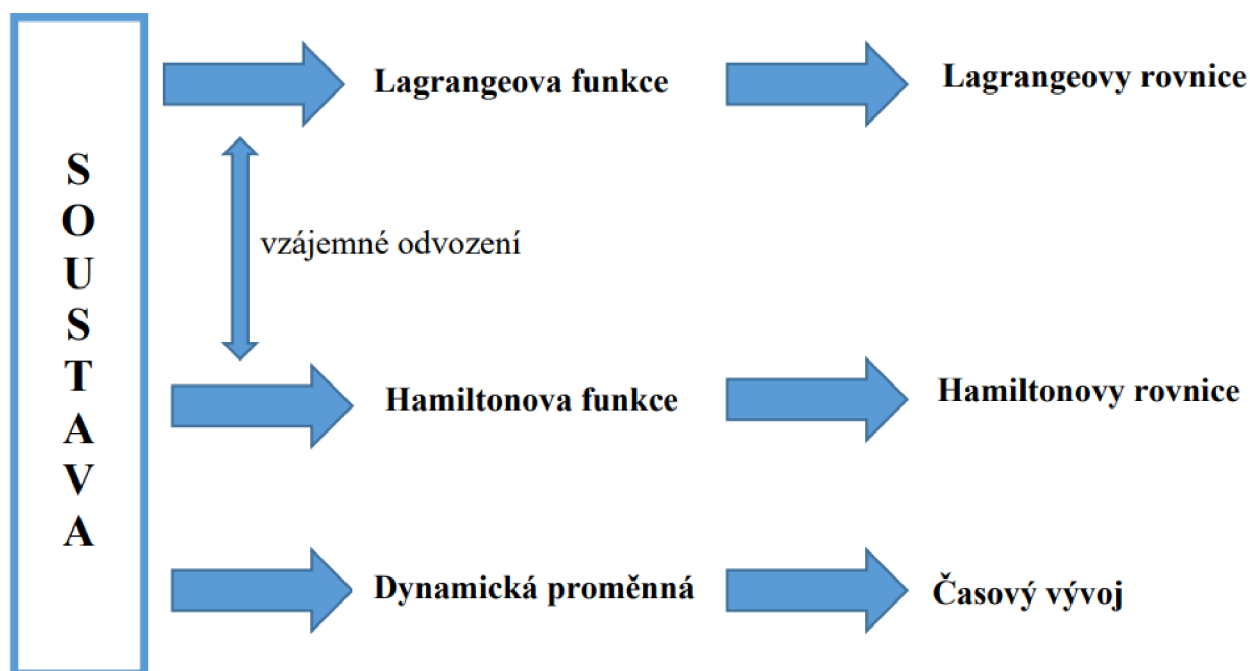
### 2.1 Lagrange Joseph a Hamilton Wiliam

*Lagrange Joseph-Louis* (1736 - 1813), byl francouzský matematik, fyzik a astronom italského původu. Je autorem díla *Mécanique analytique* (1788), které bylo z matematického pohledu první úplnou koncepcí klasické mechaniky. Lagrangeova koncepce mechaniky je odlišná od Newtonovské, nemusí se rozkládat síly [4].

Tato bakalářská práce se zabývá další možností, jak sestavit dynamické pohybové rovnice – formalismem, který popsal v roce 1833 irský matematik, astronom a fyzik, sir *Wiliam Rowan Hamilton* (1805 – 1865).

### 2.2 Teoretická mechanika

Existují tři základní způsoby, jak se věnovat problémům z teoretické mechaniky.



Obr.3. Přehled řešení

---

Z obr.3. vyplývá, že tři zmíněné přístupy jsou ve výsledku ekvivalentní, jde pouze o jiné formulace. Existují i další způsoby řešení pohybových rovnic v klasické mechanice. Formalismus Newtonovy metody vychází z druhého Newtonova pohybového zákona  $\vec{F} = m\vec{a}$ . Pro modelování se musí uvolnit všechna tělesa a vazby se nahradí silovým působením. Pro rovinné úlohy se vypíše  $3n$  rovnic a pro prostorové úlohy  $6n$  rovnic. Kde  $n$  je počet stupňů volnosti dané soustavy. Po následné úpravě se dojde k soustavě diferenciálně algebraických rovnic.

Mezi další způsoby diferenciálního přístupu se řadí Gaussův princip, který je založený na pravděpodobnosti pohybu soustavy. A dle Herzova formalismu se prostorový pohyb uskuteční výhradně po nejpřímější trajektorii, jakou vazby připouštějí [1].

Hamiltonův princip byl odvozen z Lagrangeho formalismu. A proto je nezbytnou součástí k popisu Hamiltonových rovnic nutnost odvodit prvně Lagrangeho rovnice, kterými se zabývá další kapitola.

### 3 Lagrangeho formalismus

Lagrangeova funkce  $L$  je skalární a nezávislá na volbě souřadnicového systému. V konzervativním 1D poli jsou potřeba k určení funkce  $L$  pouze dvě veličiny skalární a to energie kinetická  $E_k$  (v literatuře též značená jako  $T$ ) a energie potenciální  $E_p$  (neboli  $V$ ). Naopak nekonzervativní systém je takový, kde není definována potenciální energie [10].

#### 3.1 Lagrangeovy rovnice 2. řádu

Zná se funkce  $L(t, q, \dot{q})$  a hledá se  $q_k(t)$  pro výslednou minimální hodnotu integrálu  $\int L dt$ . V takovém případě musí být variace zmíněného integrálu rovna nule. Řeší se izochronní variace, tedy nezávislá variace na čase a u takové se smí zaměnit pořadí integrování a variování. Úvodním krokem je:

$$\int \delta L(t, q, \dot{q}) dt = 0 \quad 3.1.$$

kde  $L$  je Lagrangova funkce,  $\delta$  je variace,  $q$  je zobecněná souřadnice,  $\dot{q}$  je zobecněná rychlost a  $t$  je čas.

A variace výrazu 3.1. je následovná:

$$\int \left[ \frac{\partial L}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial L}{\partial q_2} \delta q_2 \dots + \frac{\partial L}{\partial q_n} \delta q_n + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \delta \dot{q}_1 + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \delta \dot{q}_2 \dots + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \delta \dot{q}_n \right] dt = 0 \quad 3.2.$$

kde  $L$  je Lagrangova funkce,  $\delta$  je variace,  $q$  je zobecněná souřadnice,  $\dot{q}$  je zobecněná rychlost a  $t$  je čas.

Vzhledem k nepřehlednosti zápisu rovnice 3.2. se použije Einsteinova sumační konvence (viz kapitola 1.3.). Takový zápis rovnice je poté ve tvaru:

$$\int \left[ \frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k \right] dt = 0 \quad 3.3.$$

kde  $L$  je Lagrangova funkce,  $\delta$  je variace,  $q$  je zobecněná souřadnice,  $\dot{q}$  je zobecněná rychlost a  $t$  je čas.

Variace z časové derivace má zápis:

$$\delta \dot{q}_k = \delta \frac{d}{dt} q_k \quad 3.4.$$



V následujícím kroku dojde k přehození operace variace a derivace. Taková úprava se dělá z důvodu, aby bylo virtuální posunutí všude v rovnici, nikoli jen posunutí u derivace virtuálního posunu.

$$\int \left[ \frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d}{dt} \dot{q}_k \right] dt = 0 \quad 3.5.$$

Přes integraci PerPartes se osamostatní  $\delta q_k$  od vlivu časové derivace  $\frac{d}{dt}$ :

$$\int_{t_A}^{t_B} \left[ \frac{\partial L}{\partial q_k} \delta q_k - \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \delta q_k \right] dt + \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \right]_{t_A}^{t_B} = 0 \quad 3.6.$$

kde  $L$  je Lagrangova funkce,  $\delta$  je variace,  $q$  je zobecněná souřadnice,  $\dot{q}$  je zobecněná rychlost a  $t$  je čas.

Ze znalosti rovnic 1.10. a 1.11. je patrné, že člen  $\left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta q_k \right]_{t_A}^{t_B}$  z rovnice 3.6. je nulový.

Po další úpravě rovnice 3.6., kde se vytkne  $\delta q_k$  vzniká:

$$\int_{t_A}^{t_B} \left[ \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right] \delta q_k dt = 0 \quad 3.7.$$

Takový integrál je roven nule v libovolných mezích. Výsledkem těchto operací je:

$$\left[ \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right] \delta q_k = 0 \quad 3.8.$$

kde  $\delta q_k$  je nezávislá hodnota na výrazu v závorce, a tedy výraz v závorce sám o sobě je roven nule. Po seřazení dle nejvyšší derivace se rovnice 3.8. dostane do tvaru:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad 3.9.$$

kde  $L$  je Lagrangeova funkce,  $q$  je zobecněná souřadnice,  $\dot{q}$  je zobecněná rychlost a  $k=1, 2, \dots, n$ .

Rovnice 3.9. je známá jako **Lagrangeova rovnice II. řádu**. Lagrangeovy rovnice druhého řádu jsou založeny na analytické dynamice. Prvně se zvolí počet  $n$  stupňů volnosti soustavy a stejný počet nezávislých zobecněných souřadnic  $q_k$ . Následně se sestaví rovnice kinetické, potenciální a disipativní energie v závislosti na  $q_k$  a provedou se jednotlivé derivace. Po dosazení do Lagrangeovy rovnice 2. řádu se získá  $n$  diferenciálních rovnic [1].

Za zmínku stojí povšimnout si podobnosti rovnice 3.9. s Newtonovými pohybovými rovnicemi, které jsou ve tvaru:

$$\frac{d}{dt}(p_k) = F \quad 3.10.$$

Čili časová derivace hybnosti je rovná síle. Po úpravě rovnice 3.9. do tvaru:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial L}{\partial q_k} \quad 3.11.$$

Je zřejmé, že se rovnice opět dostane do tvaru, kde je časová derivace hybnosti rovná síle. Struktura rovnic 3.10. a 3.11. je podobná.

Lagrangeova rovnice II. řádu (3.9.) neuvažuje vnitřní ztrátu energie třením, ani jinou disipativní energii. V případě nutnosti uvažovat odpadní teplo, musí se Lagrangeovy rovnice pozměnit a na pravou stranu se poté místo nuly zapisuje Reillyho disipativní funkce.

Podstatné je nalézt lagrangián  $L(t, q, \dot{q})$  tak aby odpovídal skutečnosti a byl tedy v souladu s přírodou. Pro  $L$  se volí rovnice  $L = E_k - E_p$ , která je klíčovou Lagrangho funkci pro konzervativní systémy. A aby se dala diferenciální rovnice jednoznačně vyřešit, je potřeba znát dvě počáteční podmínky. Pro zobecněnou polohu  $q_k(t_0)$  a pro zobecněnou rychlost  $\dot{q}_k(t_0)$ . Rovnice nabývá následujícího tvaru:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_j} + \frac{\partial E_d}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial E_p}{\partial q_j} = \frac{\partial W}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial A}{\partial q_j} \quad 3.12.$$

kde  $E_k$  je kinetická energie,  $E_d$  je disipativní energie,  $E_p$  je potenciální energie,  $W$  je výkon,  $A$  je práce,  $q$  je zobecněná souřadnice a  $\dot{q}$  je zobecněnou rychlostí.

### 3.2 Zákony zachování

V roce 1916 Emma Noether objevila, že zákony zachování souvisejí se symetriemi v přírodě. Stačí vyhledat přírodní symetrii a tím nalezneme zákon zachování. Při hledání nových rovnic pro interakci se tak prvně hledají symetrie a na jejich základech se odvozují fyzikální principy a popisné rovnice systému. Celý tento koncept je nesmírně významný [4].

Obecná Lagrangeho funkce:

$$L = L(t, q_k, \dot{q}_k) \quad 3.13.$$

kde  $L$  je funkční závislost na čase  $t$ , zobecněné souřadnici  $q$  a zobecněné rychlosti  $\dot{q}$ .

Rovnici 3.13. lze napsat do obecné Lagrangeho rovnice (3.9.) druhého řádu, kde platí symetrie vzhledem k posunutí:  $q_k \rightarrow q_k + \delta q_k$ . V takovém případě, když tato symetrie platí, Lagrangián nemůže být závislý na  $q_k$ . Z toho plyne, že rovnice je pro jednu konkrétní zobecněnou souřadnici  $q_k$  vzhledem k poloze systému imunní [4]. A platí následující vztahy:

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad 3.14.$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = 0 \quad 3.15.$$

$$\left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = konst. \quad 3.16.$$

kde  $L$  je Lagrangeho funkce,  $\dot{q}$  je zobecněná rychlost a  $t$  je čas.

**Zobecněná hybnost**  $p$  se zachovává pouze tehdy, je-li systém symetrický vůči posunutí v parametru  $q$ . V triviálních případech v kartézském systému považujeme hybnosti v daných směrech systému za prostý součin hmotnosti a rychlosti:  $p = mv$ , vyjádřený ze vztahu  $\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}$ . U složitějších případů se nemůže hybnost takto vyjádřit, vychází se z Lagrangeho rovnice:

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \quad 3.17.$$

A rovnice:

$$F_k = \frac{\partial L}{\partial q_k} \quad 3.18.$$

kde  $L$  je Lagrangeho funkce,  $p$  je zobecněnou hybností,  $F$  je zobecněná síla,  $q$  je zobecněná souřadnice a  $\dot{q}$  je zobecněná rychlost.

Pro zákon zachování energie platí, že celková energie soustavy, je obecně definovaná jako veličina zachovávaná se při časové translaci [2]. Symetrií tedy je posunutí ve směru časové osy. Předpokládá se, že soustava má v čase  $t_i$  a v čase  $t_f \rightarrow t_i + \delta t$  shodnou energii. Platí-li symetrie v posunutí v čase, tak Lagrangeova funkce  $L = L(t, q_k, \dot{q}_k)$  nesmí záviset na čase, její časová derivace  $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ . Lagrangeova funkce bude závislá pouze na zobecněné souřadnici a zobecněné hybnosti;  $L = L(q_k, \dot{q}_k)$ . Nulovou časovou změnu je možné rozepsat následujícím způsobem:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d\dot{q}_k}{dt} = 0 \quad 3.19.$$

$$\frac{dL}{dt} = \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) \right] \dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d\dot{q}_k}{dt} = 0 \quad 3.20.$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L \right) = 0 \quad 3.21.$$

kde  $L$  je Lagrangeho funkce,  $t$  je čas,  $q$  je zobecněná souřadnice a  $\dot{q}$  je zobecněná rychlost.

Časová derivace dané kombinace je nulová, to znamená, že výraz v závorkách je konstantní [10]. **Zákon zachování energie** existuje ve tvaru odvozeném z Lagrangeovy funkce následně:

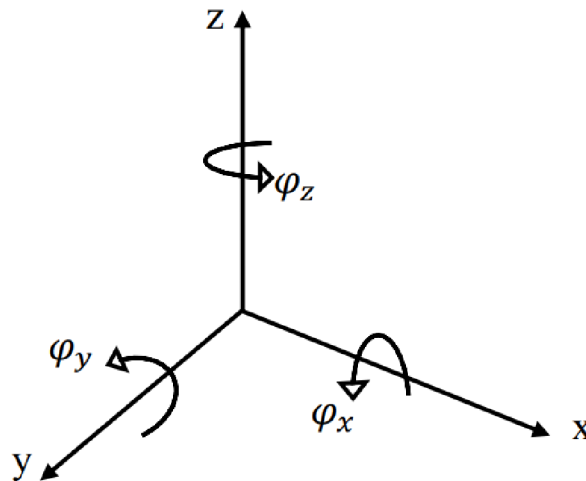
$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L \quad 3.22.$$

kde  $E$  je celková energie soustavy a  $\dot{q}$  je zobecněná rychlost.

Jednotlivé translace jsou jednoznačně spjaté s danými symetriemi a vzniká zákon zachování.

1. Časová symetrie	$\delta t$	$\rightarrow$	$E$
2. Polohová x symetrie	$\delta x$	$\rightarrow$	$p_x$
3. Polohová y symetrie	$\delta y$	$\rightarrow$	$p_y$
4. Polohová z symetrie	$\delta z$	$\rightarrow$	$p_z$
5. Natočení v ose x	$\delta \varphi_x(y,z)$	$\rightarrow$	$L_x$
6. Natočení v ose y	$\delta \varphi_y(x,z)$	$\rightarrow$	$L_y$
7. Natočení v ose z	$\delta \varphi_z(x,y)$	$\rightarrow$	$L_z$

kde  $E$  je energie,  $p_k$  je hybnost,  $L_k$  je moment hybnosti a index  $k$  znázorňuje jednotlivé souřadnice.



Obr.4. 3D prostor

Ke každé vzniklé události  $U(t, x, y, z, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_z)$  existuje odpovídající si zákon zachování  $Z(E, p_x, p_y, p_z, L_x, L_y, L_z)$ , který souvisí s posunutími. Pokud se trojrozměrný kartézský systém  $(x, y, z)$  na obr.4. rozšíří v čtyřrozměrný systém  $(x, y, z, t)$ , k sedmi výše zmíněným závislostem se přidají další tři. Tedy symetrie mezi časem a jednotlivými osami (**Lorentzova symetrie**). Tímto se zabývá kvantová fyzika a plynou z toho zákony zachování spinu. Ve čtyřrozměrném systému jsou čtyři translace a šest rotací kolem vlastních os. Dohromady existuje deset základních symetrií, které jsou nazývané jako **Poincarého grupa symetrií** [5].

Na obr.4. je znázorněn trojrozměrný obecný prostor, kde jsou popsány osy  $x, y, z$  včetně jejich směrů a jednotlivé natočení  $\varphi$  prostoru kolem daných os.

Nyní je jasné, že symetrie jsou ve fyzice nesmírně důležité. Na dalších stranách je popsán Hamiltonův formalismus, ve kterém se symetrie vyskytují, konkrétně spjaté se zákonem zachování hybnosti. A díky znalostem Lagrangeova formalismu může být nyní odvozen přístup Hamiltonův.

## 4 Hamiltonův formalismus

Mezi hlavní výhody Hamiltonových rovnic patří, že jsou na rozdíl od Lagrangeových rovnic pouze rovnicemi s první derivací. I když jich je dvojnásobné množství, numerické řešení takových rovnic je snadnější a umožňuje napsat závislosti libovolných dynamických proměnných [4]. Hamiltonovy rovnice jsou nazývány také kanonickými rovnicemi */z řeckého kános = zákon/*. Na rozdíl od předešlých principů je tento formalismus integrální. Charakteristikou tohoto přístupu je, že jsou sledovány veškeré změny po delší časový úsek, nejen změny polohy, jak udávají Lagrangeovy rovnice, ale také časový vývoj energie kinetické a potenciální. K tomuto je potřeba nalézt takovou funkci, která je schopná variace pohybů soustavy dokonale popsat [6]. Hamilton odvodil charakteristickou funkci z Lagrangeho formalismu, ve kterém je Lagrangeho funkce popsána jako:

$$L(q_k, \dot{q}_k, t) = E_k(q_k, \dot{q}_k, t) - E_p(q_k, \dot{q}_k, t) \quad 4.1.$$

kde  $q$  je zobecněná souřadnice,  $\dot{q}$  je zobecněná rychlost,  $E_k$  je kinetická energie,  $E_p$  je potenciální energie a  $t$  je čas.

Na základě znalosti zákonů zachování, hlavně zobecněné hybnosti (rovnice 3.17.) a zobecněné energie (rovnice 3.22.), se zobecněná energie přepíše pomocí zobecněných hybností do tvaru:

$$E = p_k \dot{q}_k - L(q_k, \dot{q}_k, t) \quad 4.2.$$

kde  $E$  je energie soustavy,  $p$  je hybnost,  $q$  je zobecněná souřadnice,  $\dot{q}$  je zobecněná rychlost a  $t$  je čas.

Nyní se rovnice 4.2. upraví a provede se diferenciál energie:

$$dE = p_k d\dot{q}_k + \dot{q}_k dp_k - \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad 4.3.$$

kde  $E$  je energie soustavy,  $L$  je Lagrangeho funkce,  $p$  je hybnost,  $q$  je zobecněná souřadnice,  $\dot{q}$  je zobecněná rychlost a  $t$  je čas.

Po dalších úpravách, kde ze znalostí Lagrangeovy rovnice (3.9.), je výraz  $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$  zobecněná hybnost a člen  $\frac{\partial L}{\partial q_k}$  je roven výrazu  $\frac{d}{dt} p_k$ , vyplývá z diferenciálu energie (rovnice 4.3.) následující:

$$dE = p_k d\dot{q}_k + \dot{q}_k dp_k - \dot{p}_k dq_k - p_k d\dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad 4.4.$$

kde  $E$  je energie soustavy,  $L$  je Lagrangeho funkce,  $p$  je hybnost,  $\dot{p}$  je derivovaná hybnost,  $q$  je zobecněná souřadnice,  $\dot{q}$  je zobecněná rychlost a  $t$  je čas.

A na závěr této úpravy se pouze odečtou stejné členy:

$$dE = \dot{q}_k dp_k - \dot{p}_k dq_k - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad 4.5.$$

kde  $E$  je energie soustavy,  $L$  je Lagrangeho funkce,  $p$  je hybnost,  $\dot{p}$  je derivovaná hybnost,  $q$  je zobecněná souřadnice,  $\dot{q}$  je zobecněná rychlost a  $t$  je čas.

Je dobré si všimnout, že z rovnice 4.5. úplně zmizely diferenciály zobecněných rychlostí. Energie tedy půjde vždy popsat tak, aby nebyla funkcí rychlosti. Na místo rychlosti je energie v Hamiltonově formalismu závislá na hybnostech. A pro hybnosti platí v přírodě zákony zachování.

Vlastnost funkce  $L$ , že je vyjádřena v závislosti na zobecněné poloze, rychlosti a čase, odráží skutečnost, že tato funkce je schopná reagovat na jakoukoliv změnu stavu systému [4]. Matematická formulace Hamiltonova integrálního principu je následující:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_k, \dot{q}_k, t) dt = 0 \quad 4.6.$$

kde  $\delta$  je variace,  $q$  je zobecněná souřadnice,  $\dot{q}$  je zobecněná rychlost,  $t_1$  je počáteční a  $t_2$  koncový čas.

Pro izochronní variace platí  $\delta t = 0$ . Okrajové podmínky variace dráhy mají stejný počáteční a koncový bod. Hamiltonův princip vybírá ze všech možných  $n$ -rozměrných křivek spojující výchozí bod s bodem koncovým právě jednu takovou křivku, která má v časovém intervalu  $\langle t_1, t_2 \rangle$ , nejmenší hodnoty [10]. Pro hledanou závislost funkce nabývá integrál:

$$H = \int_{t_1}^{t_2} L(q_k, \dot{q}_k, t) dt \quad 4.7.$$

kde  $H$  je Hamiltonová funkce,  $q$  je zobecněná souřadnice,  $\dot{q}$  je zobecněná rychlost a  $t$  je čas.

#### 4.1 Legendreova duální transformace

Legendreova transformace dokáže změnit závislosti na čase, zobecněné poloze a rychlosti a přejít k závislosti na čase, zobecněné souřadnici a hybnosti. Tato transformace lze provést vždy, jen její obtížnost se mění v závislosti na složitosti soustavy.

$$(t, q, \dot{q}) \rightarrow (t, q, p) \quad 4.8.$$

kde  $t$  je čas,  $q$  je zobecněná souřadnice,  $\dot{q}$  je zobecněná rychlost a  $p$  je hybnost.

Hamiltonova funkce  $H$  je energie popsaná díky hybnostem a nevyskytují se v ní rychlosti. Energii  $E$  lze přepsat vzhledem k Hamiltoniánu následovně:

$$E = H(t, q, p) \quad 4.9.$$

kde  $H$  značí Hamiltonovou funkci,  $q$  je zobecněná souřadnice,  $p$  je zobecněná hybnost a  $t$  je čas.

Na rozdíl od funkce  $L$ ,  $H$  nezávisí na rychlosti, nýbrž na hybnosti. Ty jsou v praxi důležitější a platí pro ně zákony zachování hmotnosti. Nyní se provede diferenciál Hamiltonovy funkce:

$$dH(t, q, p) = \frac{\partial H}{\partial t} dt + \frac{\partial H}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k \quad 4.10.$$

kde  $t$  je čas,  $q$  je zobecněná souřadnice,  $p$  je hybnost a  $H$  je Hamiltonova funkce.

Diferenciál Hamiltonovy funkce (rovnice 4.10.) musí být stejný jako diferenciál energie (rovnice 4.5.). Rovnice nabývají při přímém srovnání stejnou hodnotu a ze zmíněných rovnic lze tedy vypsát následující čtyři fakta:

$$dH = dE \quad 4.11.$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = - \frac{\partial L}{\partial t} \quad 4.12.$$

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad 4.13.$$

$$\dot{p}_k = - \frac{\partial H}{\partial q_k} \quad 4.14.$$

kde  $H$  je Hamiltonova funkce,  $L$  je Lagrangeova funkce,  $q$  je zobecněná souřadnice,  $\dot{q}$  je zobecněná rychlost,  $p$  je hybnost,  $\dot{p}$  je časová derivace hybnosti a  $t$  je čas.

Z výše uvedených rovnic plyne, že jestliže hamiltonián neobsahuje čas, neobsahuje jej ani lagrangián. A dle teoremu Neotherové existuje symetrie posunutí v čase a zachovává se energie zvolené soustavy. A ta symetrie se pozná právě tak, že  $L$  ani  $H$  neobsahuje čas  $t$ .

Rovnice 4.13. a 4.14. jsou nazývány **Hamiltonovými kanonickými rovnicemi**. Jsou to dvě diferenciální pohybové rovnice prvního řádu.



## 4.2 Hamiltonovy diferenciální rovnice

Výše jsou sepsané Hamiltonovy diferenciální rovnice prvního řádu, ze kterých se zjišťuje časový vývoj všech zobecněných souřadnic  $q_k(t)$  a zobecněných hybností  $p_k(t)$ . Ve tvaru, kde je nalevo již vyjádřená nejvyšší derivace. U Lagrangeho rovnic jsou jako počáteční podmínky poloha a rychlost na začátku. Pro Hamiltonovy rovnice se musí zjistit počáteční poloha a hybnost [6].

Obecný postup řešení:

- Zjistí se Lagrangeova funkce  $L$  zvoleného systému
- Stanovení počátečních podmínek  $p_k(t_0)$  a  $q_k(t_0)$
- Výpočet zobecněných hybností  $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$
- Výpočet energie  $E = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L$
- Provede se Legenderova duální transformace s cílem získat  $E(t, q, p)$
- Samotné řešení Hamiltonových rovnic s počátečními podmínkami

## 4.3 Poissonova formulace Hamiltonových rovnic

Nechť existuje dynamicky proměnná funkce  $Z$ , která bude záviset pouze na zobecněné poloze a hybnosti, tedy  $Z(q, p)$ . Provede se její časová derivace [4].

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{\partial Z}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt} + \frac{\partial Z}{\partial p_k} \frac{dp_k}{dt} = \frac{\partial Z}{\partial q_k} \frac{dH}{dp_k} - \frac{\partial Z}{\partial p_k} \frac{dH}{dq_k} \quad 4.15.$$

kde  $Z$  je funkce zobecněné polohy a hybnosti,  $q$  je zobecněná souřadnice,  $p$  je hybnost,  $H$  je Hamiltonova funkce a  $t$  je čas.

## 4.4 Vlastnosti Poissonových závorek

Lze dokázat, že funkce  $\{f, g\}$  se nezmění při kanonických transformacích. Jsou podstatné pro formulaci tvrzení hamiltonovské mechaniky [6]. Jedná se o další strukturu, která vede k řešení rovnic. Platí zde **Lieova algebra**, stejně jako pro vektory a matice. Liší se pouze objekty (vektory x matice x funkce) a operace (vektorový součin x maticový součin x derivování) a má to stejné vlastnosti [4].

- $\{f, g\} = -\{g, f\}$  z definice jde vidět: antisymetričnost
- $\{f, f\} = 0$  nulovost
- $\{f + g, h\} = \{f, h\} + \{g, h\}$  derivace součtu funkce
- $\{\alpha f, g\} = \alpha \{f, g\}$  platí linearita
- $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$  Bianchiho identita

Základní Poissonovy závorky:

a) pro zobecněné souřadnice:

$$\{q_k, q_l\} = \frac{\partial q_k}{\partial q_w} \frac{\partial q_l}{\partial p_w} - \frac{\partial q_k}{\partial p_w} \frac{\partial q_l}{\partial q_w} = 0 \quad 4.16.$$

b) pro zobecněné hybnosti:

$$\{p_k, p_l\} = \frac{\partial p_k}{\partial q_w} \frac{\partial p_l}{\partial p_w} - \frac{\partial p_k}{\partial p_w} \frac{\partial p_l}{\partial q_w} = 0 \quad 4.17.$$

c) pro souřadnici a hybnost:

$$\{q_k, p_l\} = \frac{\partial q_k}{\partial q_w} \frac{\partial p_l}{\partial p_w} - \frac{\partial q_k}{\partial p_w} \frac{\partial p_l}{\partial q_w} = \delta_{kl} \quad 4.18.$$

kde  $q$  je zobecněná souřadnice,  $p$  je hybnost, a  $\delta_{kl}$  je Knockerovo delta.

Všechny Poissonovy závorky jsou nulové, protože derivace souřadnice podle hybnosti a derivace hybnosti podle souřadnice, je vždy nulová. Pouze v případě c), pokud se jedná o závorku obsahující souřadnici a její hybnost (která odpovídá dané souřadnici), Poissonova závorka je nenulová.

$\delta_{kl}$  se nazývá **Knockerovo delta**, které je rovno jedné pro  $k = l$  a nule pro  $k \neq l$ .

## 5 Vibrace

Kmitání a tlumení je pro inženýrství velice podstatné. Kmitání je neodlučitelné od mechaniky a má svou roli ve všech oborech strojírenství, kde sehraává velkou roli právě mechanické kmitání, které vzniká při práci každého stroje. S nechtěným kmitáním soustavy je bohužel spjata také životnost stroje, čím více je rozkmitaný, tím kratší je jeho životnost. Úkolem modelování a aplikování pohybových rovnic na soustavy je co nejvíce eliminovat rušivé kmity a tím prodloužit životnost stroje, zvýšit jeho bezpečnost a snížit jeho namáhání a hlučnost [3].

### 5.1 Kmitání

Mechanické kmitání lze různě dělit do několika skupin.

a) Podle vzniku kmitání

**Kmitání volné** je takové, které po počátečním vychýlení soustavy z rovnovážné polohy již není dále buzeno žádnou vnější silou. Soustava se vychýlí tak, že se udělí n-hmotným bodům impulzem síly výchylka, rychlost, či zrychlení. Pro **vynucené kmitání** (buzené) je potřeba stále udržovat vlivem budících sil pohyb soustavy. Budící síly se mohou dělit na deterministické (periodické a harmonické) nebo stochastické (náhodné). **Samobuzené kmitání** je nežádoucí jev v mechanických soustavách. Vzniká díky náhodným zdrojům energie (vítr, voda, okolní vibrace) z okolí modelované soustavy [8].

b) Podle typu modelu soustavy

**Lineární soustavy**, které lze popsat lineárně závislými diferenciálními rovnicemi. V takových soustavách platí podmínka, že síla, která vrací těleso do původní polohy je lineárně úměrná velikosti výchylky. Naopak **nelineární soustavy** (tedy daleko reálnější) úzce souvisí s fyzikálními vlastnostmi materiálů [2].

### 5.2 Tlumení

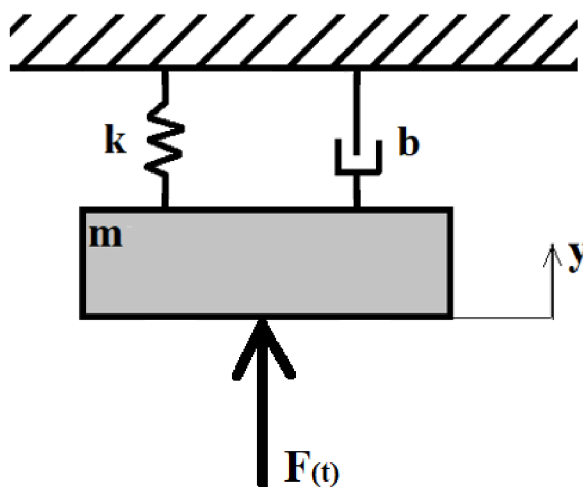
Proces, při kterém se část kinetické energie ze soustavy vytrácí, je nazýván tlumením. Mechanické tlumení způsobuje postupnou přeměnu energie kmitání do jiné formy, kmitavý pohyb bez vnějšího buzení postupně zanikne. Tlumení je pasivním prvkem modelu a je to souhrn všech nevratných dějů doprovázených ztrátou kinetické energie. U modelů, které jsou rozkmitány budící silou a zároveň obsahují tlumení, se tlumení projevuje v grafu závislosti budící síly a polohy na čase fázovým posuvem mezi časovým průběhem budící síly a aktuální výchylky. Tedy nejednoznačnou, závislostí mezi silou a vynucenou polohou tělesa.

Tlumení vždy působí v záporném směru vektoru rychlosti v daném bodě. Mezi prvky tlumení se po boku samotných tlumičů řadí také tlumení ve vazbách (šroubové a svařované spoje), aerodynamický a hydrodynamický odpor a také materiálové tlumení, které je dáno vnitřními odpory materiálů [2].

## 6 Příklad s jedním stupněm volnosti

Šestou kapitolou začíná druhá, praktická část mé bakalářské práce. Před příkladem na těleso se dvěma stupni volnosti (2DOF – „degrees of freedom“) se bude tato kapitola prvně zabývat jednoduchým příkladem s jedním stupněm volnosti (1DOF). Modelové těleso na obr.5. je tvořeno tělesem s hmotností  $m$ , pružinou o tuhosti  $k$  a tlumičem s konstantou tlumení  $b$ . Těleso je buzeno vnější silou  $F(t)$ , která dodá systému v klidu potřebou energii k rozkmitání. Tento příklad slouží pro ověření správné funkce výpočtového modelu v programu Matlab / Simulink.

### 6.1 Řešená soustava



Obr.5. Soustava s jedním stupněm volnosti

Pro výpočty byly zvoleny následující hodnoty konstant:

hmotnost tělesa:	$m = 25 \text{ kg}$
tlumení	$b = 1,5 \text{ Nsm}^{-1}$
tuhost	$k = 20 \text{ Nm}^{-1}$
buďící síla	$F(t) = \langle -3; 6 \rangle \text{ N}$

### 6.2 Lagrangeovy rovnice

Pro zvolenou soustavu na obr.5. lze napsat následující rovnice:

$$\text{Energie kinetická:} \quad E_k = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 \quad 6.1.$$

kde  $m$  je hmotnost a  $\dot{y}$  je rychlost.

$$\text{Energie potenciální:} \quad E_p = \frac{1}{2} k y^2 \quad 6.2.$$

kde  $k$  znamená tuhost a  $y$  vychýlení polohy.

Energie disipativní: 
$$E_d = \frac{1}{2}b\dot{y}^2 \quad 6.3.$$

kde  $b$  je tlumení a  $\dot{y}$  je rychlost.

Rovnice se upraví dle Lagrangeova formalismu z rovnice 3.12. a rovnou se vyjádří nejvyšší derivace, která nabývá tvaru:

$$\ddot{y} = \frac{1}{m}[b\dot{y} - ky + F(t)] \quad 6.4.$$

kde  $\ddot{y}$  je zrychlení,  $m$  je hmotnost,  $b$  je tlumení,  $\dot{y}$  je rychlost,  $k$  je tuhost,  $y$  výchylka polohy a  $F$  je budící síla.

### 6.3 Hamiltonovy rovnice

Následující rovnice byly odvozeny na základě znalostí Hamiltonových kanonických rovnic z kapitoly 4.1. Energie soustavy, tedy energie kinetická  $E_k$ , potenciální  $E_p$  a disipativní  $E_d$  se nemusí znovu vypisovat, jsou stejné jako v předchozím Lagrangeově formalismu, stále se popisuje tentýž model z obr.5., volba výpočtové metody k určení pohybových rovnic nemá vliv na energie samotné [1].

Hamiltonova funkce má tvar:

$$H = E_k + E_p \quad 6.5.$$

kde  $H$  je součtem kinetické  $E_k$  a potenciální  $E_p$  energie.

Kinetická energie 6.1. může být zapsána taktéž pomocí hybnosti:

$$E_k = \frac{1}{2}p\dot{y} \quad 6.6.$$

kde  $p$  je hybnost a  $\dot{y}$  je rychlost tělesa soustavy.

Po dosazení rovnice 6.1. a rovnice 6.2. do rovnice 6.5. lze model popsat následovně:

$$H = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}ky^2 \quad 6.7.$$

kde  $m$  je hmotnost,  $y$  výchylka,  $\dot{y}$  rychlost polohy a  $k$  je tuhost.

Disipativní funkce, tedy energie tlumení se dá nahradit zobecněnou silou  $F_b$ , takto:

$$F_b = \frac{\partial E_d}{\partial \dot{y}} = b\dot{y} \quad 6.8.$$

kde  $F_b$  je síla tlumení,  $E_d$  je disipativní energie,  $\dot{y}$  je rychlost a  $b$  je konstanta tlumení.

Hamiltonová kanonická rovnice pro derivovanou hybnost, která je rozšířená o součet sil na soustavu působících je dána:

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial y} + \sum F \quad 6.9.$$

kde suma sil je součtovou funkcí budící síly a síly od tlumení:  $\sum F = F(t) + F_b(t)$ .

Po dosazení rovnice 6.7. a 6.8. do rovnice 6.9. vzniká následující závislost:


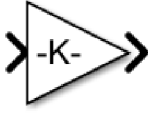
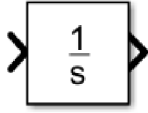
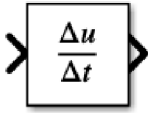
$$\dot{p} = -ky + b\dot{y} + F(t) = m\ddot{y} \quad 6.10.$$

kde  $\dot{p}$  je derivace hybnosti  $p$ ,  $k$  je tuhost,  $b$  je konstanta tlumení,  $F(t)$  je budící síla a  $m$  je hmotnost.

Po vyjádření nejvyšší derivace, v tomto případě zrychlení zavěšeného tělesa, vyjde rovnice, která je totožná s rovnicí 6.4. dle Lagrangeova formalismu z předcházející kapitoly. Z toho vyplývá skutečnost, že pohybové rovnice soustavy s jedním stupněm volnosti jsou při vyjadřování dle dvou nezávislých formalismů dle Lagrange a Hamiltona ve výsledku stejné, jen postup jejich získání je odlišný.

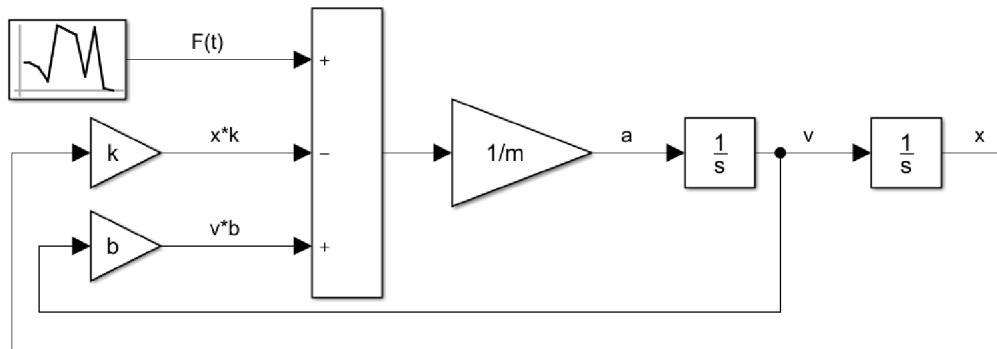
#### 6.4 Knihovna Simulink

Následující tabulka *tab.1.* zobrazuje stručný přehled základních bloků knihovny programu Simulink. A obsahuje všechny bloky použité v této bakalářské práci pro potřeby modelování příkladů s jedním i se dvěma stupni volnosti.

Schéma	Název	Použití
	<b>Add</b>	Pomocí tohoto bloku lze libovolně sčítat či odčítat libovolné množství vstupních signálů
	<b>Gain</b>	Pomocí tohoto bloku lze násobit signál zvolenou konstantou
	<b>Integrator</b>	Blok integruje vstupní signál v časové doméně
	<b>Derivative</b>	Blok derivuje vstupní signál v časové doméně

*Tab.1. Schématické bloky v Simulinku*

## 6.5 Simulink model

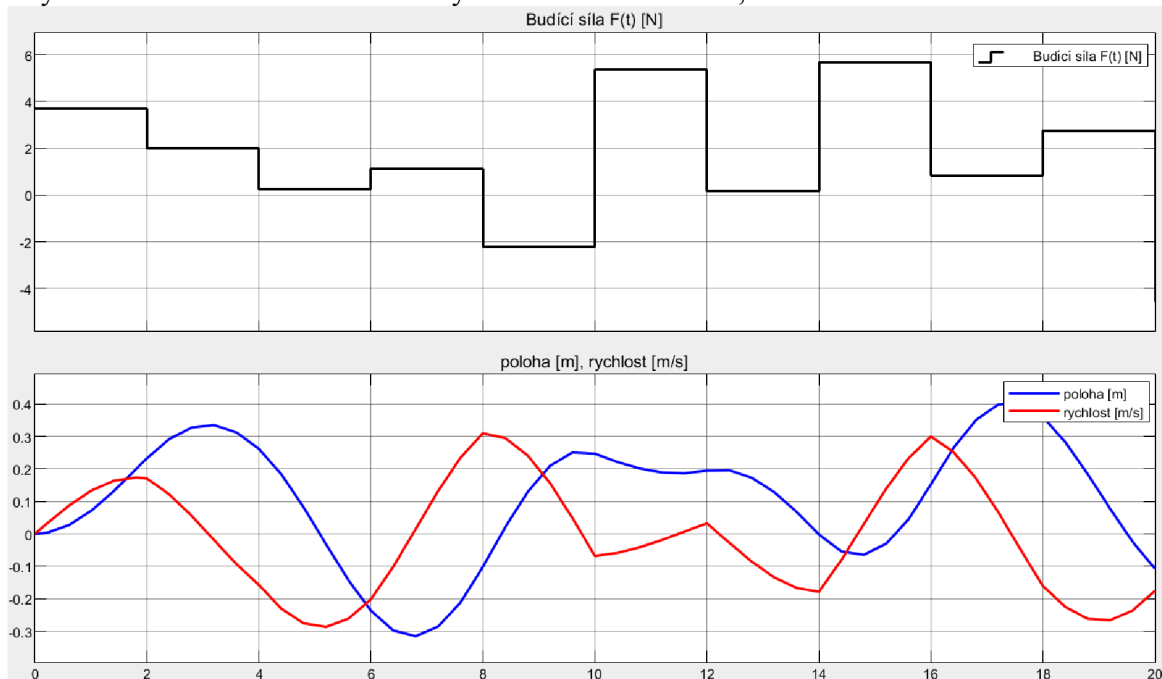


Obr.6. Schéma řešení

Na obr.6. je zobrazeno schéma výpočtového modelu soustavy z obr.5. dle pohybové rovnice 6.4. Model je z prostředí Simulink, kde je použito schématické značení pro zrychlení, rychlost a výchylku:  $a = \ddot{y}$ ;  $v = \dot{y}$ ;  $x = y$ .

## 6.6 Odezva na budící sílu

Ze schématu z obr.6. vznikl v Matlabu a Simulinku následující graf závislosti polohy a rychlosti tělesa na deterministicky se měnící budící síle, která rozkmitá soustavu.



Obr.7. Graf závislosti polohy a rychlosti tělesa na budící síle  $F(t)$

Obr.7. ukazuje závislost polohy  $x$  [m] (modrá barva) a rychlosti  $v$  [ $ms^{-1}$ ] (červená barva) tělesa na budící síle  $F(t)$  [N]. Lze vidět, že dochází ke zpoždění odezvy polohy tělesa v závislosti na budící síle, z grafu je tedy patrné, že modelovaná soustava zcela jistě obsahuje prvky tlumení. Budící síla na obr.7. je časově proměnná, s ostrou hranou změny velikosti. Obdobným způsobem bude vznikat v příkladu se dvěma stupni volnosti signál simulující jízdu po zvrásněné vozovce.

## 7 Příklad se dvěma stupni volnosti

Jako příklad se dvěma stupni volnosti (2DOF) se v této práci řeší dynamika odpružení kola vozidla ve vertikálním směru. První stupeň volnosti představuje odpružená hmota (karoserie vozu) a druhý je hmota neodpružená (samotné zavěšení kola s pneumatikou). Je vytvořen čtvrtinový model auta (v angličtině quarter car model), tedy nejjednodušší model chování vozidla v jedné ose. Model obsahuje jedno kolo, které je nahrazeno tlumičem a pružinou, další tlumič s pružinou zjednodušuje samotné zavěšení nápravy kola, připevněné ke karoserii vozu. Takový model ovšem nemůže vystihnout chování vozidla jako celku, pouze zjednoduší celý systém. Nezhledňuje kolébání vozu, tedy případ, kdy se pravá strana vozu dostává do jiné výšky než levá. Nebere v úvahu ani houpání, tedy předozadní kolébání vozu. Model, kterým se tato bakalářská práce zabývá, taktéž linearizuje vliv všech tlumičů a pružin, které mají obecně nelineární charakteristiky.

Model zjednodušuje reálnou soustavu a pomocí výpočtového modelu se získá přibližné řešení této soustavy. Není-li k dispozici žádný z komerčních výpočtových softwarů přímo určených pro plný (klasický) model vozu a je-li charakteristiku vozu potřebné analyzovat daleko přesněji, než jen s využitím čtvrtinového (výpočtového) modelu, tak takový výsledný model má sedm stupňů volnosti. Dalším důvodem k použití modelu se sedmi stupni volnosti může být případ, kdy je pro řešitele nežádoucí zanedbat vlivy jak kolébání, tak houpání a kroucení vozu [7].

V případě, že se zjednodušuje čtyřkolové vozidlo s dělenou přední nápravou a zadní nápravou nedělenou, je takový model tvořený čtyřmi hmotami, které jsou vzájemně propojeny tlumiči a pružinami. Těleso charakterizující karoserii vozu má v prostoru tři stupně volnosti (vertikální pohyb, kolébání a houpání), poté těleso modelující zadní nápravu má dva stupně volnosti (vertikální pohyb a kolébání) a na závěr dvě stejná tělesa, které představují přední kola vozu, které mají každá jeden stupeň volnosti (pouze vertikální pohyb).

### 7.1 Řešená soustava



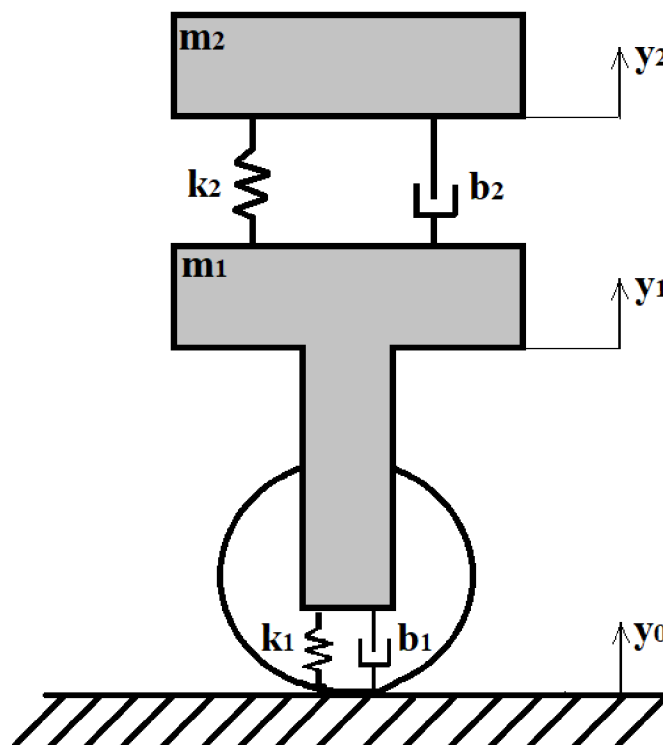
Obr.8. Zavěšení kola vozidla [11]



Takováto trojrozměrná soustava se zjednoduší na dvourozměrnou pomocí jednoduchého modelu, který obsahuje dvě oddělené hmotné části, dvě pružiny a dva tlumiče. Části jsou navzájem spojeny kinematickými vazbami. Po sepsání pohybových rovnic se provede řešení modelu v programu Matlab a Simulink, jako proměnná vstupní veličina je považována  $y_0$ , která reprezentuje virtuální povrch vozovky. Tato práce se nezaobírá tvorbou stavového modelu, jakožto matematického popisu dynamické soustavy za pomocí matic.

Simulovaný model se bude popisovat následujícími symboly:

$y_0$	– virtuální povrch vozovky	$[m]$
$y_1$	– výchylka polohy neodpružené části modelu	$[m]$
$\dot{y}_1$	– rychlost neodpružené části modelu	$[ms^{-1}]$
$\ddot{y}_1$	– zrychlení neodpružené části modelu	$[ms^{-2}]$
$y_2$	– výchylka polohy odpružené části modelu	$[m]$
$\dot{y}_2$	– rychlost odpružené části modelu	$[ms^{-1}]$
$\ddot{y}_2$	– zrychlení odpružené části modelu	$[ms^{-2}]$
$m_1$	– hmotnost kola, pneumatiky a neodpružené části	$[kg]$
$m_2$	– hmotnost odpružené části čtvrtinového modelu	$[kg]$
$b_1$	– tlumení pneumatiky	$[Nsm^{-1}]$
$b_2$	– tlumení odpružené části	$[Nsm^{-1}]$
$k_1$	– tuhost pneumatiky	$[Nm^{-1}]$
$k_2$	– tuhost odpružené části	$[Nm^{-1}]$



Obr.9. Soustava se dvěma stupni volnosti

Na obr.9. je znázorněn čtvrtinový model soustavy se dvěma stupni volnosti (2DOF), pro který budou sestaveny rovnice. V automobilovém průmyslu se při zjišťování vertikální odezvy čtvrtinového modelu používá ještě systém aktivního tlumení, jež by byl umístěn na obr.9. mezi tělesa s hmotnostmi  $m_1$  a  $m_2$ .

## 7.2 Lagrangeovy rovnice

V rešeršní části této bakalářské práce, v kapitole 3. jsou odvozeny Lagrangeovy rovnice, je tedy patrné, že pro modelování se musí stanovit funkční hodnoty energie kinetické  $E_k$ , potenciální  $E_p$  a disipativní  $E_d$  pro danou soustavu modelu auta. V modelu na obr.9. nevystupuje žádná budící síla, ani práce.

Kinetická energie soustavy:

$$E_k = \frac{1}{2}m_1\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}_2^2 \quad 7.1.$$

Potenciální energie soustavy:

$$E_p = \frac{1}{2}k_1(y_1 - y_0)^2 + \frac{1}{2}k_2(y_2 - y_1)^2 \quad 7.2.$$

Disipativní energie soustavy:

$$E_d = \frac{1}{2}b_1(\dot{y}_1 - \dot{y}_0)^2 + \frac{1}{2}b_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1)^2 \quad 7.3.$$

Rovnice se derivují dle zobecněných souřadnic  $y_1$  a  $y_2$ . Po vyjádření nejvyšší derivace nabývají následujícího tvaru diferenciálních pohybových rovnic dle Lagrangeova formalismu (po dosazení do rovnice 3.12.):

$$\ddot{y}_1 = \frac{1}{m_1}[b_1(\dot{y}_0 - \dot{y}_1) + b_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) + k_1(y_0 - y_1) + k_2(y_2 - y_1)] \quad 7.4.$$

$$\ddot{y}_2 = \frac{1}{m_2}[b_2(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + k_2(y_1 - y_2)] \quad 7.5.$$

## 7.3 Hamiltonovy rovnice

Následující rovnice byly odvozeny na základě znalostí Hamiltonových kanonických rovnic z kapitoly 4.1. Energie soustavy, tedy energie kinetická  $E_k$ , potenciální  $E_p$  a disipativní  $E_d$  se nebudou znovu odvozovat, jsou stejné jako v předchozím Lagrangeově formalismu, stále se popisuje tentýž model.

Pro začátek řešení se stanoví Hamiltonova funkce  $H$ , která je součtem kinetické a potenciální energie:

$$H = E_k + E_p \quad 7.6.$$

Rovnice 7.6. se může použít k určení pohybových rovnic systému se dvěma stupni volnosti. Rovnice nabývá následující podobu:

$$H = \frac{1}{2}m_1\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}_2^2 + \frac{1}{2}k_1(y_1 - y_0)^2 + \frac{1}{2}k_2(y_2 - y_1)^2 \quad 7.7.$$

Disipativní funkce, tedy energie tlumení se dá nahradit zobecněnou silou s lineární závislostí. Znaménko minus je tady z toho důvodu, že síla, která působí na tlumení tlumiče je orientovaná vždy proti pohybu tělesa. Pro první z tlumičů dle těchto vztahů platí:

$$F_{b1} = -\frac{\partial E_d}{\partial \dot{y}_1} = b_1(\dot{y}_0 - \dot{y}_1) + b_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) \quad 7.8.$$

A pro druhý tlumič:

$$F_{b2} = -\frac{\partial E_d}{\partial \dot{y}_2} = b_2(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) \quad 7.9.$$

kde  $F_{b1}$  je síla od prvního tlumiče a  $F_{b2}$  je síla od druhého tlumiče.

Nyní jsou všechny jednotlivé rovnice připraveny k dosazení do Hamiltonovy kanonické rovnice rozšířené o disipativní energii:

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} + \sum F_{bk} \quad 7.10.$$

kde  $F_{bk}$  jsou jednotlivé zobecněné síly  $k$ -tých tlumičů  $b_k$ .

Pro první derivace hybností neodpružené části modelu platí rovnice:

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H}{\partial y_1} + (F_{b1} + F_{b2}) = m_1\ddot{y}_1 \quad 7.11.$$

Po dosazení rovnice 7.7., 7.8. a 7.9. do rovnice 7.11., se dostane následující:

$$\dot{p}_1 = m_1\ddot{y}_1 = -k_1y_1 + k_1y_0 + k_2y_2 - k_2y_1 - b_1\dot{y}_1 + b_1\dot{y}_0 + b_2\dot{y}_2 - b_2\dot{y}_1 \quad 7.12.$$

Nyní se vyjádří nejvyšší derivace, zbytek se převede na pravou stranu a vytknou se konstanty před závorky:

$$\ddot{y}_1 = \frac{1}{m_1} [k_1(y_0 - y_1) + k_2(y_2 - y_1) + b_1(\dot{y}_0 - \dot{y}_1) + b_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1)] \quad 7.13.$$

Z rovnice 7.13., která udává zrychlení neodpružené části modelu  $\ddot{y}_1$  vyplývá stejná funkční závislost jako při řešení v Lagrangeově formalismu. Rovnice 7.13. je tedy shodná s rovnicí 7.4.

Stejným způsobem se provede také výpočet pro zbývající první derivace hybnosti, dle následující rovnice:

$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial y_2} + F_{b_2} = m_2 \ddot{y}_2 \quad 7.14.$$

kam se dosadí funkční závislosti 7.7. a 7.9. Rovnice se dostane do tvaru:

$$\dot{p}_2 = m_2 \ddot{y}_2 = -k_2 y_2 + k_2 y_1 - b_2 \dot{y}_2 + b_2 \dot{y}_1 \quad 7.15.$$

A na závěr této úpravy se pouze vyjádří nejvyšší derivace a pro přehlednost se vytknou konstanty tlumení a tuhosti:

$$\ddot{y}_2 = \frac{1}{m_2} [k_2(y_1 - y_2) + b_2(\dot{y}_1 - \dot{y}_2)] \quad 7.16.$$

Takto odvozená rovnice 7.16. je totožná s rovnicí 7.5. Z výsledků plyne, že pohybové rovnice soustavy, tentokrát se dvěma stupni volnosti jsou nezávislé na metodě odvození. Shoda mezi rovnicemi vzniklými z Lagrangeova a Hamiltonova přístupu byla jasně prokázána.

#### 7.4 Volba parametrů

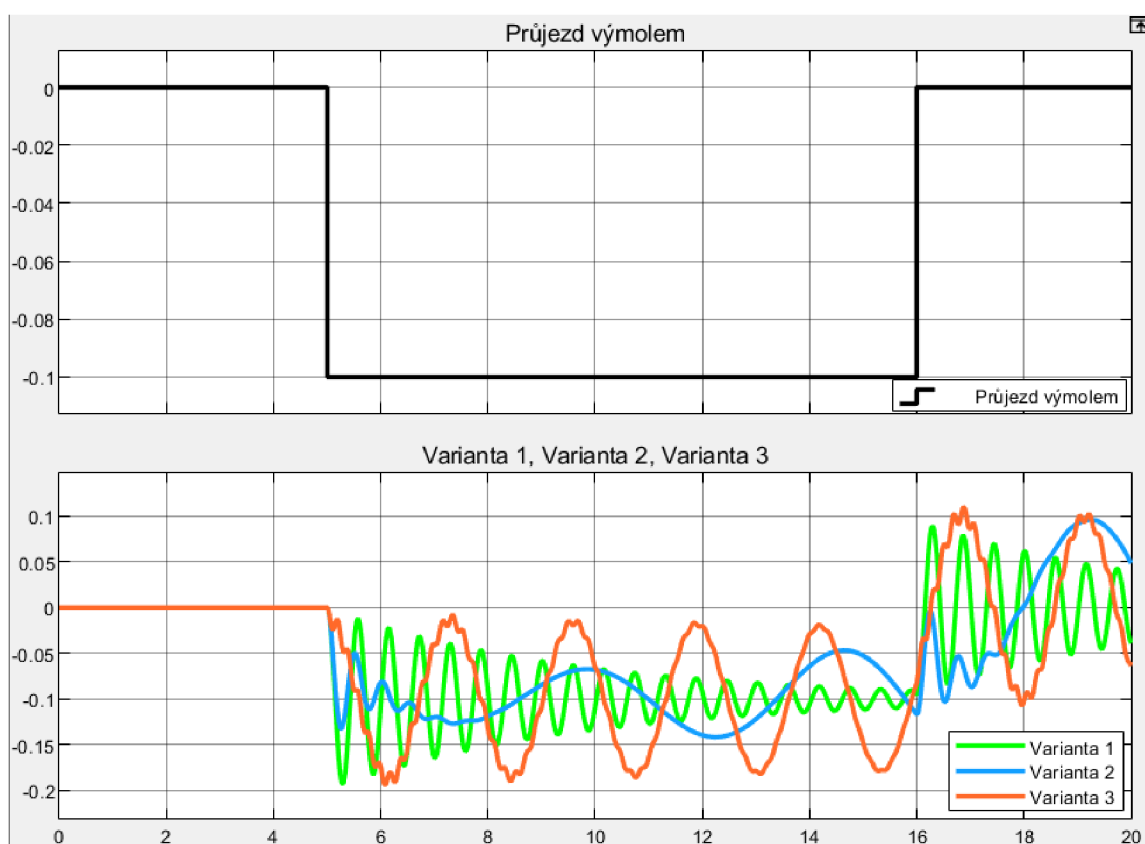
Hodnoty hmotností  $m_1$  a  $m_2$  jsou dané tak, že se modeluje vůz s váhou  $M = 2$  tuny, která odpovídá průměrné celkové hmotnosti standardně naloženého vozu velikosti Škody Octavia. Model je čtvrtinový, který se v této práci řeší jako ideální, předpokládá se tedy rovnoměrné rozložení hmotnosti vozu na všechna čtyři kola. Hmotnost  $m_1$  byla dána jako součet váhy 17" kola, pneumatiky a váhy tlumiče s pružinou, jako  $m_1 = 35$  kg. Hmotnost  $m_2$  byla následně dopočítána jako:  $(M / 4 - m_1) = 465$  kg.

Postup návrhu zbylých hodnot byl následovný: prvně se v modelu (obr.9.) položily hodnoty tuhosti pružiny  $k_2$  a tlumení tlumiče  $b_2$  rovny nule. Takto se zjišťovala odezva pouze neodpružené části modelu, tedy osy kola. Zvolené varianty pro hodnoty tuhosti a tlumení pneumatiky jsou přehledně sepsány v tab.2.

<b>Varianta 1</b>	$k_1 = 4\,200 \text{ Nm}^{-1}$ $b_1 = 15 \text{ Nsm}^{-1}$
<b>Varianta 2</b>	$k_1 = 1\,000 \text{ Nm}^{-1}$ $b_1 = 100 \text{ Nsm}^{-1}$
<b>Varianta 3</b>	$k_1 = 25\,000 \text{ Nm}^{-1}$ $b_1 = 80 \text{ Nsm}^{-1}$

Tab.2. Varianty pro model pneumatiky

Takto zvolené hodnoty jednotlivých variant byly použity pro simulaci jízdy průjezdu výmolem. Následující graf porovnává všechny tři varianty konstant mezi sebou.



Obr.10. Graf závislosti výchylky osy kola v závislosti na volbě vstupních parametrů z tab.2. při průjezdu výmolem

Na základě zvolených hodnot z tab.2. vznikl graf (obr.10.) který znázorňuje závislosti výchylky osy kola vozu, který projíždí výmolem (schéma výmolu na obr.15.). Pro hodnoty tuhosti a tlumení pneumatiky byl vybrán **zelený signál (Varianta 1)**, který má ve srovnání s červeným signálem (Varianta 3) menší amplitudu. Ve srovnání s modrým signálem (Varianta 2) dokáže rychleji sledovat výchylku vozovky. Nejpodstatnější ale je, že se u zeleného signálu jedná o tlumené kmitání. Proto byla pro následné potřeby modelování vybrána první varianta hodnot z tab.2. Tato varianta byla zvolena rovněž proto, aby se výchylka osy kola co nejvíce blížila samotné

výchylce simulovaného povrchu vozovky. Tím se v simulaci chování modelu zaručí, že pneumatika bude co nejvíce v kontaktu s vozovkou a nebude odskakovat.

Posléze se obdobným způsobem (variantou několika vstupních dvojic pro hodnoty  $k_2$  a  $b_2$ , kde hodnoty tuhosti a tlumení pneumatiky  $k_1$  a  $b_1$  byly již jasně dané) volily hodnoty tuhosti pružiny  $k_2$  a tlumení tlumiče  $b_2$  s důrazem na co nejefektivnější odtlumení nerovnosti vozovky pro karoserii vozidla. Volba těchto hodnot je pro výsledné chvění karoserie naprosto podstatná. Tato práce se nezaobírá výpočtem ideálních hodnot, nýbrž jejich pouhou volbou. Toto má za následek nedokonalé odpružení skutečného vozu, ovšem pro potřeby modelování a grafického znázornění výsledků je takovýto postup naprosto dostačující.

Pro konkrétní výpočty simulovaného modelu v této práci byly zvoleny následující hodnoty neznámých:

$$\begin{array}{ll} m_1 = 35 \text{ kg} & m_2 = 465 \text{ kg} \\ b_1 = 15 \text{ Nsm}^{-1} & b_2 = 950 \text{ mNsm}^{-1} \\ k_1 = 4200 \text{ Nm}^{-1} & k_2 = 150 \text{ Nm}^{-1} \end{array}$$

Na následujícím *obr.11.a)* je ukázka scriptu pro řešení rovnic a na *obr.11.b)* je snímek okna workspace z prostředí Matlab, ve kterém jsou abecedně seřazeny hodnoty zvolených konstant uložených v paměti softwaru pro následné řešení diferenciálních rovnic 7.4. a 7.5. v programu Simulink.

```

1 -   clc
2 -   clear all
3 -   close all
4
5 -       %hmotnosti
6 -   m1 = 35;
7 -   m2 = 465;
8 -       %neodpružená část
9 -   b1 = 15;
10 -  k1 = 4200;
11 -       %odpružená část
12 -  b2 = 0.95;
13 -  k2 = 150;

```

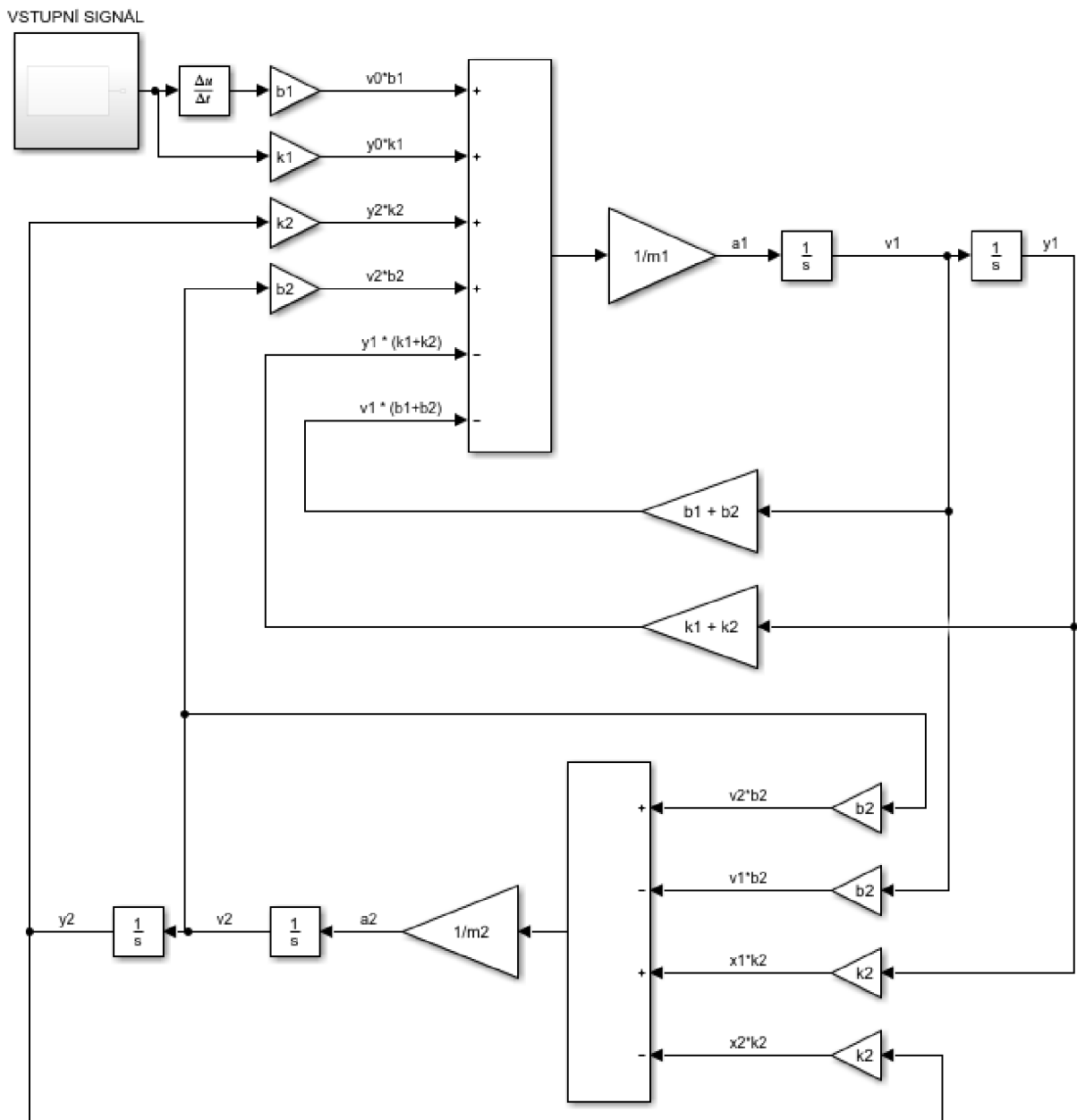
a)

Workspace	
Name ▲	Value
b1	15
b2	0.9500
k1	4200
k2	150
m1	35
m2	465

b)

Obr.11. a) script a b) workspace v Matlabu

## 7.5 Simulink model



Obr.12. Schéma řešení pohybových rovnic 7.4. a 7.5. v prostředí Simulink

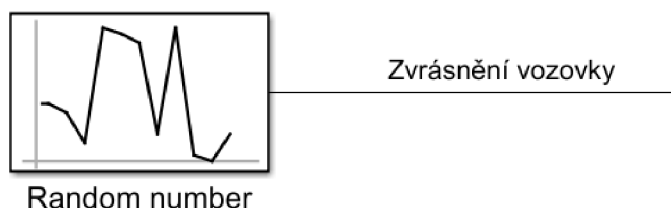
V obr.12. je použit subsystém, který se bude měnit v závislosti na volbě vstupního signálu, výsledný signál ze subsystému bude vždy charakterizován změnou výšky virtuální polohy a její rychlostí. Bylo zde také použito schématické značení pro polohu, rychlost a zrychlení  $k$ -tého prvku schématu:

$$\begin{aligned} Y_k &= y_k \\ \dot{Y}_k &= v_k \\ \ddot{Y}_k &= a_k \end{aligned} \quad 7.17.$$

## 7.6 Odezvy na vstupní signály

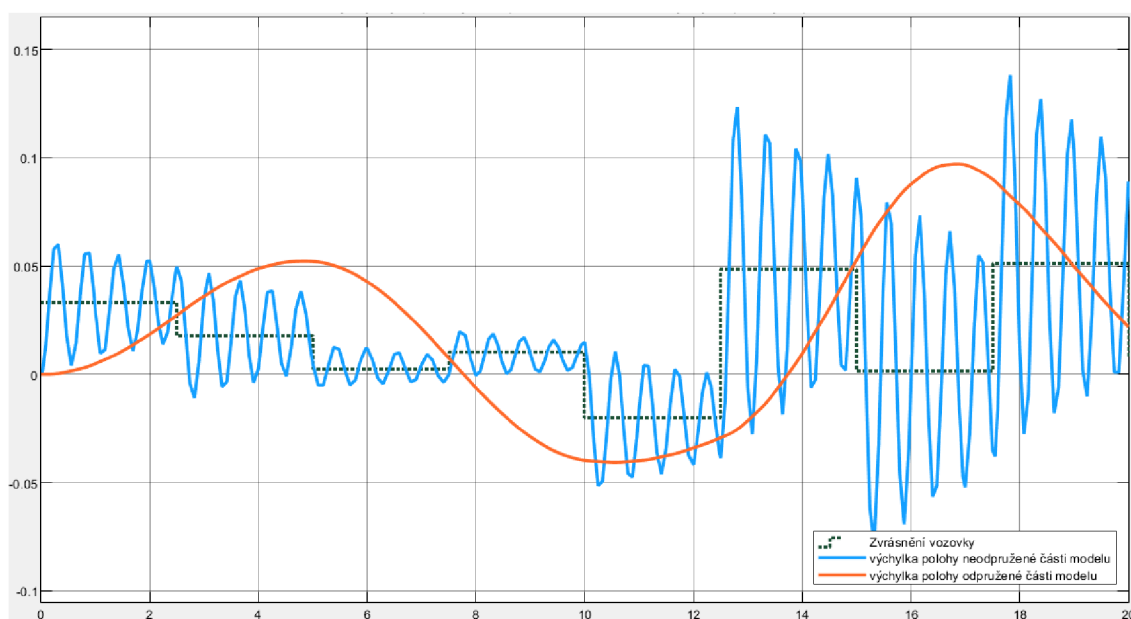
Pro vertikálně kmitající soustavu je podstatné znát odezvu jednotlivých částí (odpružené a neodpružené) soustavy na daný vstupní signál. V tomto případě na vstupní výchylku povrchu vozovky. Odezva se bude pozorovat na třech rozdílných vstupních závislostech. Na náhodném (stochastickém) signálu (*obr.14.*), dále na průjezdu výmolem (*obr.16.*) a nakonec na přejezdu přes zpomalovací retardér (*obr.18.*).

### a) Stochastický signál



*Obr.13. Subsystém modelu pro stochastický signál*

Na *obr.13.* je zobrazen náhodný signál, který reprezentuje reálné zvrásnění vozovky pro potřeby simulace. Tento signál vzniká v bloku Random number, který je nastavený tak, že se výsledná hodnota signálu mění vždy po 2,5 sekundách, kde výsledný signál nabývá hodnot  $\langle -3,5 \rangle$  cm.

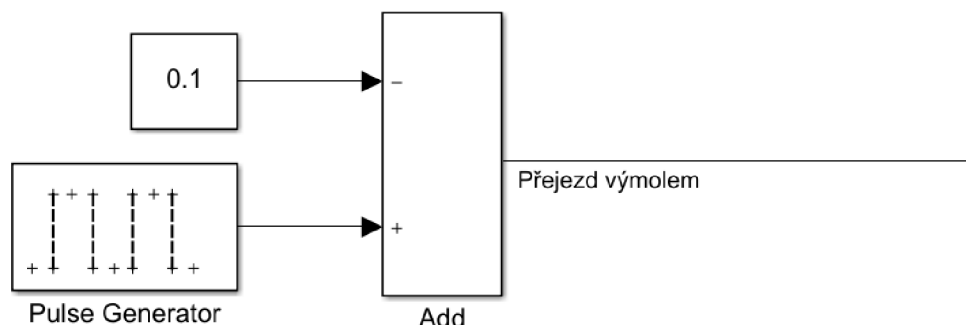


*Obr.14. Graf závislosti polohy [m] karoserie a neodpružené části modelu v závislosti na stochastickém vstupním signálu [m]*

Na *obr.14.* jsou výsledky analýzy kmitání zvolené mechanické soustavy se dvěma stupni volnosti v závislosti na jízdě po zvrásněné vozovce. Odezva neodpružené části modelu se skládá ze silně kmitajícího signálu (v *obr.14.* modrou barvou), který reprezentuje vibrace osy kola, na které je přenášena každá nerovnost vozovky. Naopak odpružená karoserie vozu má daleko plynulejší výchylky (červená barva) bez náhlých změn polohy, což v praxi znamená vyšší pohodlnost pro cestující.

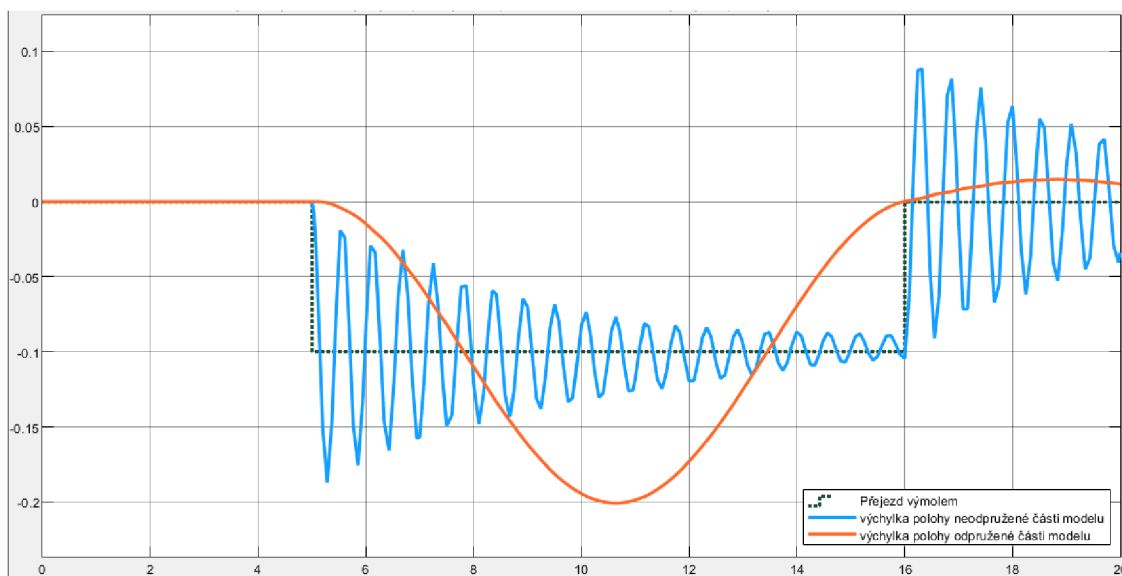


### b) Průjezd výmolem



Obr.15. Subsystem modelu pro průjezd výmolem

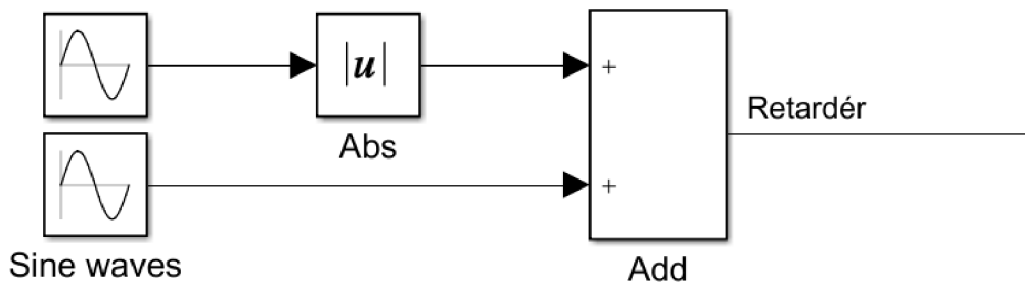
Na obr.15. je zobrazen subsystem pro vznik signálu reprezentujícího průjezd výmolem o hloubce 0,1 m. Blok Pulse Generator vytvoří skokový signál v páté sekundě simulace z hodnoty 0,1 m na hodnotu 0 m a po 11 sekundách se signál vrátí do své původní hodnoty. Pomocí konstanty je zvolena referenční hodnota počáteční a koncové výchylky vozovky do hladiny nula. Díky tomu se bude na obr.16. sledovat závislost polohy karoserie a neodpružené části vozu bez jakéhokoli předchozího rušení.



Obr.16. Graf závislosti polohy [m] karoserie a neodpružené části modelu v závislosti na v závislosti na průjezdu výmolem [m]

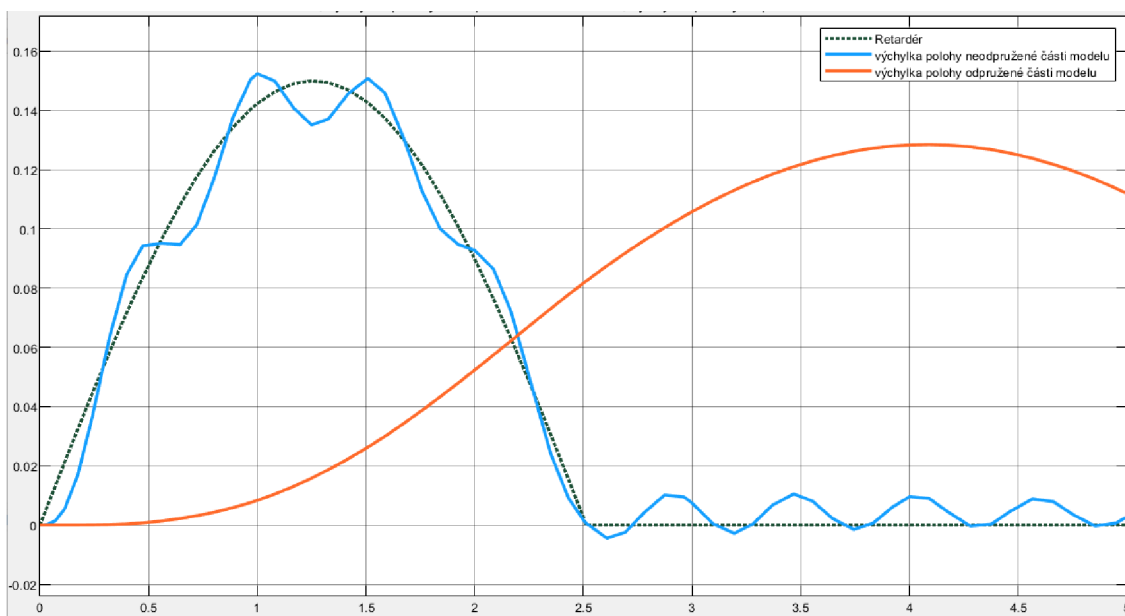
Na obr.16. je patrná náhlá změna polohy vozovky, konkrétně je simulovaný vjezd, průjezd a následné vyjetí z výmolu na ideální (dokonale rovnou) vozovku. Díky vysoké hodnotě tuhosti pneumatiky ve srovnání s tuhostí pružiny karoserie pneumatika lépe sleduje povrch vozovky, což je chtěné z hlediska bezpečnosti jízdy vozu. Odpružená část modelu (v obr.16. červenou barvou) pomaleji sleduje výchylku vozovky díky nízkému tlumení a hodnotě tuhosti. Právě takové nastavení má pozitivní vliv na pohodlnou a bezpečnou jízdu automobilem. Na výchylce osy kola (modrá barva signálu) je patrné, jak náročný průjezd takovým výmolem, vzhledem k celkovému namáhání a únavě jednotlivých komponentů, zejména osy kola, je.

c) Přejezd přes retardér



Obr.17. Subsystem modelu pro přejezd přes retardér

Na obr.17. je schéma subsystému pro signál reprezentující výchylku přejezdu přes retardér. Pro vznik takového signálu byly použity dvě shodné sinusovky o periodě  $T = 5$  s a amplitudě 0,075 m. Výsledný signál, který má tvar válcové úseče je dán součtem klasické sinusové funkce a hodnoty sinusu v absolutní hodnotě. Tím se dosáhlo jedné kladné půlvlny o amplitudě 0,15 m, která představuje jednoduchý virtuální retardér o maximální výšce 15 cm.



Obr.18. Graf závislosti polohy [m] karoserie a neodpružené části modelu v závislosti na přejezdu přes retardér [m]

U obr.18. se odezva polohy karoserie (červená barva) projeví až po samotném průjezdu přes retardér. Z toho vyplývá, že odezva karoserie na vstupní signál, v tomto případě na výchylku způsobenou přejezdem přes zpomalovací zařízení je hodně závislá na hodnotě tlumení mezi osou kola a samotnou karoserií. Zároveň je rovněž vidět, že simulovaný model odtlumí maximální výchylku, která činí 15 cm takovým způsobem, že se samotný vůz vychýlí pouze o 13 cm. Poté dojde k následnému utlumení vibrací. Z odezvy neodpružené části (modrá barva) se opět potvrzuje fakt, že pneumatika má schopnost sledovat vozovku bez velkých odskoků (ovšem s velkou frekvenci jednotlivých kmitů).

## 8 Srovnání zkoumaných metod

Lagrangeova a Hamiltonovská mechanika jsou důležité pojmy, které spadají pod klasickou mechaniku. Lagrangeovu mechaniku vytvořil italský matematik Joseph Louis Lagrange v roce 1788, zatímco Hamiltonovskou mechaniku vytvořil William Rowan Hamilton v roce 1833 [13]. V kontextu klasické mechaniky je vhodné napsat, že jsou Lagrangeovy a Hamiltonovské formulace ekvivalentní Newtonovské mechanice.

Lagrangeova mechanika je ve srovnání s Newtonovskou mechaikou matematicky propracovanější a systematictější koncept. Pro aplikaci Lagrangeovy mechaniky nebyly zavedeny žádné fyzikální koncepty. Když Newtonova formulace klasické mechaniky není vhodná, Lagrangeova mechanika je velmi užitečná při řešení mechanických problémů.

V konceptu Lagrangeovské mechaniky je trajektorie fyzikálního systému obsahujícího částice odvozena řešením Lagrangeových rovnic v jedné ze dvou forem, buďto jako Lagrangeovy rovnice prvního druhu, nebo Lagrangeovy rovnice druhého druhu. V každém z těchto dvou typů je matematická funkce  $L$  pojmenovaná jako lagrangián, označována jako funkce zobecněných (generalizovaných) souřadnic, jejich časových derivací a času.

Lagrangián je nástroj k popisu pohybu (velmi užitečný nástroj ve všech oblastech fyziky), na druhé straně, ve skutečnosti nepředstavuje nic fyzicky smysluplného, protože je to rozdíl dvou energií. Dále neexistuje nic takového jako zachování lagrangiánů, takže obecně se nejedná o konzervativní veličinu. To dává Hamiltonianovi v mnoha věcech jasně navrch.

Hamiltonovská mechanika je matematicky rovněž velmi propracovaná formulace klasické mechaniky. Tento koncept přispěl k formulaci statistické mechaniky a kvantové mechaniky. Sir Hamilton jej vyvinul s tím, že vycházel z Lagrangeovy mechaniky.

V Hamiltonovské mechanice existuje matematická funkce  $H$  pojmenovaná jako hamiltonián, je to funkce zobecněných souřadnic, jejich hybností a času. Hamiltonovská mechanika je převládající přístup používaný ve statistické mechanice. Mimo jiné proto, že hamiltonián představuje celkovou energii a kvůli zákonu zachování energie systému, je veličinou konzervativní. Tím, že Hamiltonovský přístup však předpokládá, že je systém konzervativní, je to znevýhodňuje s ohledem na Lagrangeův přístup.

Na závěr, hamiltonián je základní součástí kvantové mechaniky, protože jej lze použít k výpočtu celkové energie. Dále má Hamiltonovská mechanika jasnou výhodu oproti Lagrangeovi v řešení hlubších a filozofických otázek ve fyzice. Lagrangián se naopak používá spíše v něčem, jako je klasická teorie pole a kvantová teorie pole [13].

Každopádně platí pravidlo, že v klasické mechanice lze Lagrangeovu a Hamiltonovskou mechaniku použít na stejné věci a při výběru většinou jde jen o vlastní preference. Oba přístupy poskytnou stejné pohybové rovnice a oba mohou být použity k odvození stejných fyzikálních zákonů a je s nimi možno popsat stejné jevy. Je potřeba zdůraznit, že v klasické mechanice nejsou rozdíly mezi hamiltoniány a lagrangiány výrazné.

Klíčový rozdíl mezi Lagrangeovou a Hamiltonovskou mechanikou je v tom, že Lagrangeova mechanika popisuje rozdíl mezi kinetickou a potenciální energií, zatímco hamiltonovská mechanika popisuje součet kinetických a potenciálních energií.

Pro systém s  $n$  nezávislými zobecněnými souřadnicemi Hamiltonovský přístup určuje diferenciální rovnice  $2n$  prvního řádu. Na rozdíl od Lagrangeovy mechaniky má

hamiltonián dvakrát tolik nezávislých proměnných než lagrangian, což je ovšem velká výhoda, nikoli nevýhoda, protože rozšiřuje oblast možných transformací, které lze použít ke zjednodušení řešení. Zároveň numerické řešení diferenciálních rovnic prvního řádu je nesporně jednodušší, oproti řešení diferenciálních rovnic druhého řádu u Lagrangeho mechaniky. A toto je jedna z velkých výhod Hamiltonovské mechaniky.

Lagrangeova mechanika je obvykle zastoupena v něčem, co se nazývá konfigurační prostor, zatímco hamiltoniánská mechanika je zastoupena ve fázovém prostoru (viz *obr.1.*). Je to další z podstatných rozdílů, oba přístupy se od sebe liší způsobem, jakým jsou zastoupeny. Tím je myšleno, že ve fyzice je typické reprezentovat fyzikální systémy v různých prostorech, které jsou užitečné pro vizualizaci stavů systémů a také pro popis povahy fungování konkrétního systému. Fázový prostor je obecně užitečný pro popis pohybu systému, na rozdíl od konfiguračního prostoru, který poskytuje pouze informace o možných polohách různých komponent systému. Rozdíl mezi těmito dvěma prostory je ten, že konfigurační prostor je reprezentací všech možných prostorových poloh systému [13].

I když se na první pohled může zdát, že mezi těmito dvěma formulacemi mechaniky je mnoho rozdílů, ve skutečnosti jde jen o různé pohledy na popis stejných jevů. Obě tyto formulace však mají své vlastní výhody.

Níže je pro přehlednost uvedena tabulka podstatných rozdílů mezi Lagrangeovou a Hamiltonovou mechanikou.

<b>Lagrangeova mechanika</b>	<b>Hamiltonova mechanika</b>
Joseph Louis Lagrange, 1788	William Rowan Hamilton, 1833
Diferenciální rovnice druhého řádu	Dvě diferenciální rovnice prvního řádu
Rozdíl kinetické a potenciální energie	Součet kinetické a potenciální energie
Pohyb je popsán polohou a rychlostí	Pohyb je popsán polohou a hybností
Konfigurační prostor	Fázový prostor
Lagrangián není konzervativní veličina	Hamiltonián je konzervativní veličina

Tab 3. Podstatné rozdíly mezi Lagrangeovou a Hamiltonovskou mechanikou

## ZÁVĚR

Úkolem této bakalářské práce bylo provést rešerši základních principů klasické mechaniky za pomoci Lagrangeho a Hamiltonova formalismu, tedy tak, aby řešení pohybových rovnic nebylo založeno jen na Newtonových zákonech. Byl zmíněn teorém Neotherové, Poincarého grupa symetrií a Poissonovy závorky. Práce si nekladla za cíl stát se podrobným popisem klasické mechaniky, nýbrž být stručnou vstupní branou do tématu.

Ve třetí kapitole je odvozen Lagrangeho formalismus, na který plynule navazuje další kapitola, která se zabývá přístupem Hamiltonovým. Na základě úvodní rešerše se řešily dva příklady. Prvním příkladem bylo těleso s jedním stupněm volnosti. Vytvořil se model mechanického oscilátoru a po sestavení pohybových rovnic dle obou formalismů zvláště, se sledovala závislost rychlosti a zrychlení vzhledem k velikosti budící síly oscilátoru.

Druhý příklad, se dvěma stupni volnosti, byl náročnější, odvodily se pohybové rovnice čtvrtinového modelu vozidla, volily se vhodné velikosti tlumení a tuhosti pneumatiky a rovněž hodnoty odpružení samotného vozu. Na základě vzniklého modelu v prostředí Matlab / Simulink se sledovalo odpružení karosérie vozu s ohledem na jízdu vozu po silnici, průjezd výmolem a přejezd přes zpomalovací retardér.

Pro oba příklady byly odvozeny jak Lagrangeovy rovnice II. řádu, tak Hamiltonovy kanonické rovnice. Po vyjádření mají pohybové rovnice shodný tvar, jsou tedy nezávislé na zvoleném formalismu, pouze postup jejich získání je odlišný.

V klasické mechanice se používá Lagrangeho formalismus k odvození pohybových rovnic soustavy, které ve výsledku mají  $n$  diferenciálních rovnic druhého řádu (kde  $n$  je počet stupňů volnosti dané soustavy). Zatímco Hamiltonův formalismus má  $2n$  diferenciálních rovnic, ovšem prvního řádu. Z matematického hlediska je tedy snadnější počítat rovnice dle Hamiltonova formalismu, který zjednodušuje numerickou i analytickou práci s pohybovými rovnicemi.

Další rozdíl mezi těmito přístupy je, že Lagrangeho formalismus je definován jako rozdíl kinetické a potenciální energie, zatímco Hamiltonův jako jejich suma. Díky součtu energií je hamiltonián konzervativní veličinou, což lagrangián rozhodně není. Ten zároveň nereprezentuje nic fyzikálně uchopitelného. A v úvodní kapitole, je uvedena rozdílnost ve zobrazovacím prostoru, kdy Lagrange využívá konfigurační prostor, zatímco Hamilton prostor fázový.

Podstatné ale je, že odvozené pohybové rovnice v klasické mechanice dle obou formalismů budou ve výsledku vždy shodné, neboť popisují stejnou trajektorii pohybu tělesa. Tato skutečnost byla jasně prokázána i v obou demonstračních příkladech v mé bakalářské práci.

---

## SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ

- [1] MACUR, Milan. Úvod do analytické mechaniky a mechaniky kontinua. Brno: VUTIUM, 2010. ISBN 978-80-214-3944-3.
- [2] KRATOCHVÍL, Ctirad a Jaromír SLAVÍK. Mechanika těles: dynamika. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2007. ISBN 978-80-214-3446-2.
- [3] GREPL, Robert. Kinematika a dynamika mechatronických systémů. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2007. ISBN 978-80-214-3530-8.
- [4] KULHÁNEK, Petr. Teoretická mechanika [online]. Třetí vydání. Praha. ČVUT FEL. 2016. [citováno 12. 4. 2021]. Dostupné z <https://www.aldebaran.cz/studium/mechanika.pdf>.
- [5] KULHÁNEK, Petr. Vybrané kapitoly z teoretické fyziky. Praha: AGA, 2019. ISBN 978-80-904582-8-4.
- [6] PRACHAŘ, Jan a kolektiv. Fyzikální korespondenční seminář XVIII. ročník [online]. Praha: Matfyzpress, 2004. [citováno 2. 3. 2021]. Dostupné z: [https://fykos.cz/\\_media/rocnik18/ulohy/pdf/rocenka18.pdf](https://fykos.cz/_media/rocnik18/ulohy/pdf/rocenka18.pdf).
- [7] HAJŽMAN, Michal a POLACH, Pavel. Jednoduchý nelineární model trolejbusu pro úlohy vertikální dynamiky vozidel. [online]. 2004. [citováno 6. 3. 2021]. Dostupné z: [https://www.kme.zcu.cz/mhajzman/download/data\\_mlab\\_model/clanek.pdf](https://www.kme.zcu.cz/mhajzman/download/data_mlab_model/clanek.pdf).
- [8] BREPTA, Rudolf., PUST, Ladislav., TUREK, František: Mechanické kmitání, Sobotáles, první vydání, Praha, 1994.
- [9] MEIROVITCH, Leonard. Methods of analytical dynamics. New York: McGraw-Hill, 1970.
- [10] GOLDSTEIN, Herbert. Classical mechanics. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company, 1973.
- [11] Zavěšení kola vozu, [obrázek], [citováno 9. 3. 2021], dostupné z: <https://media.cheggcdn.com/media/a94/a947f47c-cb7a-430c-a893-517864eb41a2/phpychHXmQ.png>.
- [12] BREPTA, Rudolf, TUREK, František, PŮST, Ladislav. Mechanické kmitání. Praha: Sobotáles, 1994.
- [13] CLINE, Douglas. Comparison of the Lagrangian and Hamiltonian Formulations. University of Rochester, [citováno 9. 7. 2021], dostupné z: [https://phys.libretexts.org/Bookshelves/Classical\\_Mechanics/Variational\\_Principles\\_in\\_Classical\\_Mechanics\\_\(Cline\)/15%3A\\_Advanced\\_Hamiltonian\\_Mechanics/15.08%3A\\_Comparison\\_of\\_the\\_Lagrangian\\_and\\_Hamiltonian\\_Formulations](https://phys.libretexts.org/Bookshelves/Classical_Mechanics/Variational_Principles_in_Classical_Mechanics_(Cline)/15%3A_Advanced_Hamiltonian_Mechanics/15.08%3A_Comparison_of_the_Lagrangian_and_Hamiltonian_Formulations)