

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA ALGEBRY A GEOMETRIE

Badatelsky orientovaná výuka matematiky



Vedoucí práce:

Doc. RNDr. Petr Emanovský, Ph.D.

Rok odevzdání: 2016

Vypracovala:

Bc. Ivana Tláskalová

M-Dg, II. ročník

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci zpracovala samostatně pod vedením pana doc. RNDr. Petra Emanovského, Ph.D. s použitím uvedené literatury.

V Olomouci dne 20. července 2016

Poděkování

Na tomto místě bych chtěla poděkovat především svému vedoucímu diplomové práce panu doc. RNDr. Petrovi Emanovskému, Ph.D., že měl se mnou dostatek trpělivosti, aby mi pomohl dovést tuto práci ke zdárnému konci. Také bych ráda poděkovala svému manželovi, rodině a přátelům, že mě po celou dobu studia podporovali.

Obsah

| | |
|---|----------|
| Úvod | 5 |
| I Teoretická část | 6 |
| 1 Vyučovací metody | 7 |
| 1.1 Tradiční výuka | 7 |
| 1.2 Moderní vyučovací metody | 8 |
| 1.3 Badatelsky orientovaná výuka | 8 |
| 1.4 Výhody a nevýhody BOV | 11 |
| 2 Tvořivost a motivace | 13 |
| 2.1 Tvořivost | 13 |
| 2.2 Motivace | 14 |
| 3 Badatelsky orientovaná výuka na střední škole | 16 |
| 3.1 Klima ve třídě | 16 |
| 3.2 Některé chyby při realizaci BOV | 17 |
| 4 Badatelsky orientovaná výuka matematiky | 18 |
| 4.1 Příčiny žákova (ne)porozumění matematice | 18 |
| A) Potlačovaná matematické intuice | 19 |
| B) Nereálné úlohy | 20 |
| C) Formální znalosti | 21 |
| 4.2 Specifika BOV matematiky | 22 |
| 4.3 Jeden úspěšný pokus | 24 |
| 4.4 Jak badatelsky učit matematiku | 25 |
| 5 BOV matematiky a přírodovědných předmětů v ČR a v dalších evropských zemích | 28 |

| | | |
|-----|---|----|
| 6 | Mezinárodní projekty zabývající se BOV matematiky | 30 |
| 6.1 | Projekt ASSIST–ME | 30 |
| 6.2 | Projekt Fibonacci | 32 |
| 6.3 | Projekt MaSciL | 32 |
| 6.4 | Projekt Primas | 33 |

II Praktická část 35

| | | |
|-----|---|-----------|
| 7 | Vzorové přípravy na vyučování | 36 |
| 7.1 | Tvorba vlastních příprav na vyučování | 37 |
| 7.2 | Vzorové přípravy | 38 |
| | Příprava 1: Eulerův vztah | 39 |
| | Příprava 2: Součet vnitřních úhlů pravidelného n-úhelníku | 43 |
| | Příprava 3: Platónská tělesa | 46 |
| | Příprava 4: Součet členů aritmetické posloupnosti | 49 |
| | Příprava 5: Kostky a sladkosti | 52 |
| | Příprava 6: Zombie nákaza | 55 |
| | Příprava 7: Úkoly pro spolužáky | 58 |
| | Příprava 8: Vymalování bytu a nové koberce | 61 |
| | Příprava 9: Designový nábytek | 65 |
| | Příprava 10: Náš dům | 68 |
| 7.3 | Náměty pro BOV matematiky | 71 |
| | Závěr | 72 |
| | Literatura | 73 |

Úvod

„Připustíme-li, že jedním z cílů školy je naučit děti pracovat, je matematika oblastí, kde je možné tento cíl postupně realizovat, neboť výsledky matematického úsilí jsou kontrolovatelné a naučit se „kousek“ matematiky znamená něco vykonat (vypočítat, sestrojít, dokázat), nikoli pouze něco reprodukovat.“ ([19], str. 12)

Tato práce si klade za cíl obeznámit učitele matematiky s výhodami i úskalími inovativního přístupu ke vzdělávání zvaném badatelsky orientovaná výuka (dále též BOV) a pomoci jim začlenit novou metodu do každodenního vyučování.

V české literatuře najdeme řadu publikací obecné didaktiky badatelského vyučování, ale našla jsem jen málo textů, které se věnují BOV matematiky. Dalším cílem této práce je proto přenést některé myšlenky publikované v zahraničí do českého jazyka.

V praktické části učitel nalezne rady k tvorbě vlastních příprav na výuku vedenou metodou BOV a několik vypracovaných vzorových příprav. Ty může učitel použít přímo ve výuce nebo se jimi inspirovat při tvorbě vlastních příprav. Přestože metoda je využitelná v jakékoli fázi vzdělávání, v celé práci je pro zjednodušení pro objekty vzdělávání užíván termín žáci.

V současné době pomáhám tvořit a vedu výukové programy zaměřené na matematiku v interaktivním muzeu vědy Pevnost poznání Univerzity Palackého v Olomouci. Při psaní této práce jsem se opírala o zkušenosti z práce s dětmi a mládeží a na rozhovorech s nimi při realizaci výukových programů.

Část I

Teoretická část

1 Vyučovací metody

Výuková metoda (nebo také metoda výuky, vyučovací metoda) je systém vyučovacích činností učitele a učebních aktivit žáků směřujících k dosažení daných edukačních cílů. Prostřednictvím výukových metod probíhá komunikace a interakce mezi učitelem a žáky, která směřuje k dosažení edukačních cílů. Výuková metoda tedy zprostředkovává žákům učivo, je nápomocná jejich učení, je soustavou kroků, které vedou k danému cíli. Plní tak funkci regulace učení žáků. Nadále bude pojem vyučovací metoda užíván ve smyslu následujících definic.

„Různé výukové metody kladou odlišné nároky na aktivitu žáků, na jejich samostatnost a tvořivost. Obecně všechny jsou založeny na učitelově regulaci žákova učení, což znamená, že učitel konkretizuje edukační cíle, rozpracovává učivo, plánuje navozování učebních aktivit žáků, zprostředkovává žákům učební informace a úlohy, kontroluje průběžné výsledky jejich učení a plánuje další průběh výuky.“ ([37], str. 5)

„Činnost učitele svými korekcemi a stimuly má vliv na činnost žáka. Metoda výuky je formou realizace výchovně vzdělávacího obsahu. Vzhledem k cíli má metoda nejen kognitivní, ale i formativní účinky. Metoda výuky je kombinací ideálních podmínek, daných plánovaným cílem a podmínek reálných, daných vnitřními dispozicemi žáka i okolním prostředím. Metoda výuky je kombinací systematického postupu s tvořivou improvizací, reagující na proměnlivou situaci. Metoda neurčuje cíle ani obsah výuky, ale je cestou k jejich realizaci. Metoda výuky je tedy jistým modelem činnosti učitele a žáků, směřující k dosažení cílů vzdělávání.“ ([21], str. 217)

1.1 Tradiční výuka

Tradiční výuka klade velký důraz na znalosti a jejich zapamatování. Žák je považován za „čistý list papíru“, na který je třeba vepsat informace. ([20], str. 27) Učitel předkládá žákům k osvojení hotové poznatky a po té hodnotí množství zapamatovaného. Ve školách to vypadá tak, že se žáci učí už od první třídy memorovat, musejí odříkat básničky, vyjmenovaná slova, násobilku a mnoho dalšího. Tento přístup donedávna úspěšně fungoval a přinášel dobré výsledky, protože často jedinými zdroji vědění a vědomostí byly knihy a učitel.

1.2 Moderní vyučovací metody

S nástupem informačních technologií ustupuje potřeba zapamatování potřebě umět informace vyhledat, kriticky posoudit a zpracovat. Snaha zavádět moderní vyučovací metody do běžné výuky pramení právě z těchto nároků kladených současnou společností a trhem práce.

Bylo by chybou se domnívat, že moderní vyučovací metody zcela zavrhnou klasické memorování. Spíše se snaží jej v rozumné míře omezit a napravit jeho hlavní nedostatky, tedy neschopnost žáka (či studenta) aplikovat získané poznatky mimo školní prostředí. Moderní vyučovací metody se snaží navozovat takové situace, které vyžadují právě aplikaci získaných znalostí, nebo které žáka vedou k získání nových znalostí.

Je obtížné říci, jaké znalosti budou v nadcházejících letech potřeba. Víme ale, že budoucí zaměstnavatelé budou od svých zaměstnanců očekávat schopnost řešit neobvyklé problémy, analyzovat data, diskutovat s kolegy, komunikovat své výsledky a pracovat samostatně. BOV má v žácích podporovat rozvíjení těchto kompetencí. ([28], str. 10)

1.3 Badatelsky orientovaná výuka

Badatelsky orientovaná výuka patří mezi moderní vyučovací metody. Pojem BOV je u nás poměrně nový a existuje málo zdrojů, z nichž by učitelé mohli čerpat inspiraci pro inovaci své výuky. V zahraniční literatuře se pro BOV užívá termínu inquiry či enquiry-based learning nebo teaching (z lat. inquirere = ptám se).

Každý autor vymezuje pojem BOV jinak. Podle Nezvalové je badatelsky orientované učení „*ve vztahu k učení žáka aktivní proces, reflektující přístupy vědců ke zkoumání a bádání v přírodě. Zahrnuje zkušenost, důkaz, experimentování a konstrukci poznatkové struktury. Je tedy konzistentní s konstruktivistickým přístupem k učení. Ve vztahu k vyučování je badatelsky orientované vyučování chápáno jako vyučování, kdy žáci formují výuku ve třídě, učitel je facilitátorem.*“ ([20], str. 56)

Papáček definuje badatelsky orientované vyučování jako „*jednu z účinných aktivizujících metod problémového vyučování, která vychází z konstruktivistického*

přístupu ke vzdělávání. Učitel nepředává učivo výkladem v hotové podobě, ale vytváří znalosti cestou řešení problému a systémem kladených otázek (komunikačního aparátu). Badatelsky orientované vyučování využívá různých vyučovacích strategií.“ Dále uvádí, že „základní charakteristika badatelsky orientovaného vyučování zahrnuje následující znaky: žáci si kladou badatelsky orientované otázky, žáci hledají důkazy, žáci formují objasnění na základě důkazů, žáci vyhodnocují objasnění s možností využití alternativ v objasňování, žáci komunikují a ověřují objasnění.“ ([23], str. 146 citovaný v [7], str. 34) Několik dalších pohledů různých autorů uvádí Dostál v [7] na str. 34-35.

| | |
|---|---|
| <p>Žáci</p> <ul style="list-style-type: none"> • pokládají otázky • bádají a hledají odpovědi • vysvětlují nastalé jevy • spolupracují v týmu • kriticky posuzují zdroje informací • ověřují získané výsledky | <p>Učitel</p> <ul style="list-style-type: none"> • podporuje učení žáků • motivuje žáky k práci • pomáhá nalézt další cesty k řešení • řídí diskuse • připravuje a poskytuje pomůcky k bádání • pomáhá začlenit získané znalosti do poznatkové struktury žáků |
| <p>Klima třídy</p> <ul style="list-style-type: none"> • chyba je součástí procesu učení • sdílení nápadů a názorů • vzájemná podpora a spolupráce • společná touha po nalezení řešení • vzájemný respekt | <p>Rozvoj klíčových kompetencí</p> <ul style="list-style-type: none"> • prozumnění podstatě vědy a jejích aplikací • příprava k celoživotnímu učení • rozvoj tvořivého myšlení a kompetence k řešení problémů • rozvoj komunikačních dovedností a sociální a personální kompetence |
| <p>Otázky</p> <ul style="list-style-type: none"> • otevřené s několika možnými přístupy k hledání odpovědi • vyvolávají diskusi mezi žáky • spojené s reálným světem nebo se světem vědy • hledání odpovědí ukazuje užitečnost dané vědní disciplíny • poukazují na další možné pohledy na řešený problém • vybízí k verifikaci získaných výsledků | |

Tabulka 1: Propojenost jednotlivých aspektů badatelsky orientovaného vyučování

Význam pojmu BOV se částečně překrývá s významem pojmu problémového vyučování. Každý z těchto přístupů předkládá žákovi nerutinní problém, na který je možno nahlížet z několika pohledů, má více řešení apod. Při řešení žák využívá předchozích znalostí i nových nápadů a provádí aktivity podobné aktivitám při vědeckém bádání. Cílem problémového vyučování je vyřešit předložený problém a rozvíjet kompetenci k řešení problémů. Cílem BOV je vyvodit z předloženého problému nové poznatky, ověřit jejich pravdivost a správně je uložit do žákovy poznatkové struktury.

Rámcový vzdělávací program pro gymnázia (RVP G) shrnuje klíčové kompetence, které by si žák měl během studia osvojit a prohloubit. V popisu žádoucí úrovně těchto kompetencí je patrný požadavek na integraci badatelsky orientovaného přístupu do běžné výuky. Podle RVP G má být žák schopen mimo jiné tvořit a ověřovat hypotézy, kriticky přistupovat ke zdrojům informací, využít různé postupy řešení daného problému a aktivně spolupracovat v týmu.

Ve výuce vedené metodou BOV je základním prvkem kladení otázek a dále pak spolupráce žáků a učitele v příznivém klimatu třídy. Tabulka 1 (vytvořená na základě myšlenek převzatých z projektů Primas [28] a MaSciL [41]) znázorňuje propojenost těchto aspektů badatelsky orientovaného vyučování s rozvojem klíčových kompetencí. Co je úkolem učitele a žáka ve výuce vedené metodou BOV podrobněji shrnují následující odstavce.

Činnost učitele

Velkým nedostatkem tradiční výuky je skutečnost, že učitel často přednáší učivo jako soubor faktů a teprve pak učí schopnostem s ním pracovat. BOV se snaží tyto procesy spojit v jediný. ([28], str. 13) Učitel vytváří problémové úlohy tak, aby byly co nejpodobnější reálným situacím, a připraví žákům různé materiály a pomůcky pro řešení těchto úloh.

Na začátku výuky učitel žákům nastíní daný problém, vybídne žáky k jeho řešení (samostatně či ve skupinách) a nabídne připravené pomůcky. (Učitel nedává žákům žádné instrukce či návody na řešení!) Během vyučování učitel sleduje postupy žáků, pomáhá jim kladením otázek, podporuje je v různých pohledech na daný problém a odpovídá na dotazy žáků. Učitel musí být připraven i na neočekávané otázky žáků a alternativní cesty k řešení zadaného problému.

Dalšími úkoly učitele jsou vytvoření podpůrného klimatu ve třídě, řízení diskusí skupin žáků a napomáhání žákům k vytváření spojení mezi dříve získanými znalostmi a novými nápady a myšlenkami. Tyto činnosti jsou stěžejní zejména při prvních setkáních žáků s novou vyučovací metodou. Postupem času si žáci na nový přístup zvyknou, osvojí si jej a tím získají žádoucí pracovní návyky a do jisté míry i kontrolu nad vlastním učením.

Dalo by se říci, že učitel BOV přijímá roli „průvodce“ a žáka vede k takovému postupu řešení problému, který je podobný postupům aplikovaným při vědeckých výzkumech.

Činnost žáka

Jak uvádí Nezvalová [20], aktivita žáka je klíčová pro jeho úspěšné vzdělávání. Proto všechny moderní vyučovací metody, včetně BOV, zahrnují pasivní přijímání informací a staví žáka do role aktivního účastníka procesu učení.

Během výuky vedené metodou BOV žák klade otázky, spolupracuje v týmu, naslouchá myšlenkám ostatních, předkládá vlastní nápady a spojuje nové nápady se znalostmi, které již získal. Žák dále kriticky posuzuje získané informace, navrhuje různé postupy řešení problému a metody ověření správnosti. Při této výuce se žák staví do role „vědce“, který spolu s kolegy bádá nad možnými řešeními problému, nad jejich správností a (v některých případech) nad možným zobecněním.

1.4 Výhody a nevýhody BOV

Nespornou výhodou je aktivita žáka, která mu přinese mnoho heuristických zážitků a hlubší pochopení dané problematiky. Žák se naučí uvážlivě pracovat se zdroji informací a vyhodnocovat jejich přínos pro další práci.

Práce v týmu žáka naučí prezentovat své nápady a názory a respektovat své kolegy. Taktéž smysluplný dialog mezi žáky (tj. bez zásahu učitele) přináší ve vzdělávacím procesu často větší užitek, než dialog mezi žákem a učitelem.

Velkou nevýhodou, a pravděpodobně i důvodem, proč se u nás BOV ještě příliš nerozšířila, je značná časová náročnost. Nejedná se jen o přípravu výuky a pomůcek, ale také o hodinovou dotaci pro daný předmět a množství látky, kterou má učitel s žáky projít. Při současném objemu učiva si učitel málokdy může dovolit věnovat celou vyučovací hodinu řešení jediného problému. Dalším možným důvodem, proč se učitelé drží metod tradiční výuky, může být i obava učitele z neúspěšné aplikace nové metody.

2 Tvořivost a motivace

BOV se snaží motivovat žáka k učení a vybízí jej, aby při svém bádání aktivně využíval vlastní tvořivosti. Tato kapitola je proto věnována oběma pojmům, jejich vymezení a charakteristice.

2.1 Tvořivost

Tvořivostí budeme rozumět aktivitu člověka, která přináší doposud neznámé a současně společensky hodnotné produkty. Tvořivost je generování nových, neobvyklých, ale přijatelných a užitečných myšlenek, řešení a nápadů. ([10], str. 11)

V souvislosti s tvořivostí jedince věnujeme pozornost tvořivým schopnostem. Mezi ně řadíme schopnost přenést zkušenost, schopnost zkrátit myšlenkové operace, spojování pojmů, všímavost, pružné myšlení, pohotová paměť a reakce, formulace předpovědi, schopnost objektivního hodnocení a schopnost snadno tvořit nové myšlenky.

Výsledkem tvořivého procesu je nový produkt (nápad, objev, vynález apod.) Tuto „novost“ chápeme ve školní praxi jinak než v běžném životě. Ve škole žáci objevují poznatky, které jsou pro ně nové, ačkoli z hlediska vývoje celé společnosti jsou známé již delší dobu. Ve škole proto hovoříme o poznatcích, které jsou pro žáka nové, jako o tzv. *subjektivní novosti* a *subjektivních tvořivých produktech*. Objektivními tvořivými produkty pak rozumíme takové produkty, které posouvají vývoj celé společnosti - objevy a vynálezy.

Tvořivost člověka ovlivňuje celá řada faktorů, například nekonformnost jedince, široké spektrum oblastí zájmu, fantazie, emoční stabilita a schopnost konvergentního i divergentního myšlení. Pojem konvergentního a divergentního myšlení zavedl v 50. letech 20. století americký psycholog Guilford, rozdíly mezi těmito myšlenkovými operacemi definuje například Plháková: „*Konvergentní „produkce“ umožňuje vyvozování závěrů (konkluzí) na základě logického uvažování, zatímco divergentní „produkce“ vede k vytváření či hledání alternativ. Konvergentní myšlení využíváme při řešení úloh, které mají jediné nebo jednoznačné řešení. Divergentní myšlení se uplatňuje při řešení problémů, které mají několik různých řešení nebo k jejichž vyřešení vede několik rozdílných cest.*“ ([25], str. 296)

Ačkoli se jedná o opačné procesy, oba jsou v tvořivém procesu uplatňovány současně. Toto spojení Tučková ([35], str. 9) vysvětluje: „*Divergentní myšlenkový postup se nejprve postará o generování mnoha různých řešení, poté nastupuje myšlení konvergentní, které umožní vybrat z množství nápadů ten nejvhodnější.*“

Autorka dále uvádí charakteristiku tvůrčího člověka. Říká, že „*tvůrčivý člověk je originálnější, citlivější k problémům a nedostatkům, častěji improvizuje. Odmítá rutinu, obtížněji se přizpůsobuje disciplíně a autoritě, je hravý, zvědavý a vynalézavý, usiluje o vzdálenější cíle a má smysl pro humor.*“ ([35], str. 13)

K podpoře žákovy tvořivého myšlení je třeba ve třídě vytvořit odpovídající klima. Je třeba oceňovat žákovy nápady a nekritizovat žákem navržené cesty k řešení, které neodpovídají standardním algoritmům (příklady situací, v nichž učitel nevhodně reaguje na projevy žákovy tvořivého myšlení, uvádí i s rozбором Hejný a Kuřina v [11]). K příznivému tvořivému klimatu přispívá účast všech členů (žáků ve třídě a jejich učitele), jejich společná práce a celková optimistická nálada ve třídě. Nezbytnou součástí tvořivého klimatu třídy je také podpora žákovy sebevědomí, iniciativy a sebehodnocení.

2.2 Motivace

„*Motivaci v didaktice chápeme jako činnost, prostřednictvím které vzbuzujeme zájem žáka (jedince) o učení se, soustředíme jeho pozornost a aktivizujeme jej k činnosti.*“ ([10], str. 10)

Rozlišujeme dva základní druhy motivace — vnitřní a vnější. Vnitřní motivace je zájem o konkrétní činnost/téma/problém. Žák se účastní aktivit (je k tomu motivován), aby uspokojil svou zvědavost, prověřil své schopnosti (je to pro něj výzva) a/nebo získal nové poznatky z oblasti, o kterou se zajímá. Vnější motivace je zájem dosáhnout jiného cíle, například získání dobré známky, pochvaly či obdivu nebo vyhnutí se neúspěchu.

Chce-li učitel zvýšit žákovu vnitřní motivaci, měl by mu poskytnout zajímavá témata z oblastí žákovy zájmu, dát mu možnost vybrat si téma a nabídnout mu hry a různé aktivity, aby tak podpořil žákovu potěšení z práce. Ke zvýšení vnější motivace dobře poslouží odměny zvyšující prestiž žáka jako jsou dobré známky nebo zvláštní pochvala přímo související s žákovým úsilím a výsledky.

Žákovu motivaci dále ovlivňuje celá řada různých faktorů:

- úspěch či neúspěch,
- aktivita,
- vlastní zájmy,
- předchozí zkušenosti,
- snaha dokončit úkol,
- odměna a trest,
- životní cíle,
- nové věci (nové téma, možnost použít doposud zapovězené pomůcky, ...)
- záhadnost zadání,
- časové omezení,
- experimenty,
- neobvyklé situace a problémy,
- aplikovatelnost situace (úlohy o životě a pro život),
- podpora mezipředmětových vztahů,
- týmová práce.

Ve výuce matematiky často motivujeme žáka problémem nebo problémovou situací vyžadující řešení, ale existuje i mnoho dalších způsobů, jak vzbudit žákův zájem. Mezi tyto způsoby patří zajímavé a různorodé úlohy (například jak nejrychleji se pavouk na stěně místnosti dostane k mouše, která sedí na stropě), historické úlohy a vývoj jejich řešení a úlohy s nečekanými postupy a řešeními.

Správná motivace je pro žáka výzvou k tvořivosti a tvořivost je základním předpokladem úspěšného zařazení BOV do každodenní výuky. Objevování matematických zákonitostí v žákovi posiluje touhu po dalších silných intelektuálních zážitcích a pomáhá tak pěstovat žakovu lásku k matematice. ([10], str. 11)

3 Badatelsky orientovaná výuka na střední škole

Hejný a Kuřina [11] popisují význam učení objevováním pro děti předškolního věku a pro žáky základní školy. Autoři se domnívají, že tento typ vyučování dokáže přinést podobné prožitky z poznání i žákům středních škol, studentům univerzit a nejen jim.

Zařazování nové metody výuky není snadný proces v žádném stupni vzdělávání. Výhodou při zařazování BOV na střední škole je skutečnost, že žák již má vytvořenu svou poznatkovou strukturu, je schopen do ní začlenit nové vědomosti a umí v ní vyhledávat potřebné informace. Žák také měl možnost si vyzkoušet využití dříve získaných poznatků k budování nových znalostí a měl příležitost poznat praktické aplikace některých částí matematiky.

3.1 Klima ve třídě

Děti jsou otevřené novým věcem, rády si hrají, objevují a metoda BOV jim umožní poznávat a objevovat i ve škole. V průběhu dospívání se tyto vlastnosti vytrácí. Nadchnout žáka střední školy pro hru „na objevitele“ se může jevit jako nesplnitelný úkol.

Žáci, kteří se dosud nesetkali s jinou než tradiční výukou, nebo mají jen malou zkušenost s jinými výukovými metodami, nebudou mít k novým přístupům důvěru a je na učiteli, aby ji v nich vybudoval. Úkolem učitele je navodit ve třídě takové klima, ve kterém chyba bude nedílnou součástí výukového procesu a každý názor bude respektován. V takovém prostředí se žák nebude obávat chyby, vysloví svou domněnku před spolužáky a stane se aktivním prvkem výukového procesu.

Jestliže chce učitel dále rozvíjet žákovy objevitelské schopnosti, je třeba podporovat jeho intelektuální sebevědomí a udržovat jeho zvědavost různými podněty a učitelovým zájmem. Až žák dospěje k objevu, je třeba sdílet jeho radost a ocenit vynaložené úsilí.

3.2 Některé chyby při realizaci BOV

- Může se stát, že učitel nesprávně porozumí podstatě BOV a bude po žácích požadovat správná a úplná znění vět či definic. Ve správně vedené badatelské výuce stačí nechat žáky dojít k pochopení a interpretaci vlastními slovy a symboly. Pak může učitel uvést správné tvrzení s obvyklým označením, ale měl by ukazovat spojitost mezi klasickým zněním a výsledky, ke kterým žáci dospěli.
- Badatelské, projektové a problémové vyučování, a mnohá další, jsou časově náročná. Stává se proto, že projekty větších rozměrů nebo zahrnující mezi-předmětové vztahy jsou často realizovány před prázdninami nebo na konci školního roku. Protože jsou striktně odděleny od obvyklé výuky, získané poznatky zůstávají v mysli žáků izolovány a výuka nesplní požadované cíle. ([2], str. 20)
- Hejný [12] poukazuje na existenci situací, kdy žáci nejsou na objev ještě připraveni. Učitel by si měl být této skutečnosti vědom a pokud se s takovou situací setká, neměl by žáky k objevu „násilně“ vést. V takovém případě by měl problém ponechat otevřený a později se k němu vrátit, buď cíleně nebo proto, že jej žáci sami osloví s vlastními novými nápady na řešení.

4 Badatelsky orientovaná výuka matematiky

Tato kapitola je věnovaná vymezení pojmu badatelsky orientované výuky matematiky a realizaci této výukové metody v praxi. Než se zaměříme na specifika BOV matematiky, uvedeme několik možných příčin žákova (ne)porozumění matematice, kterým je možné předcházet aplikacemi metod BOV.

4.1 Příčiny žákova (ne)porozumění matematice

„Matematika je těžká.“ „Tohle nemůžu nikdy pochopit.“ Tyto dvě věty (a řadu dalších jim podobných) slyšel každý učitel a každý rodič mnohokrát. Je na místě si položit otázku, co žáky vede k takovému závěru.

První negativní reakce žáků na matematiku se objevují na druhém stupni základní školy. Jedním z možných vysvětlení tohoto jevu je výrazná změna učiva, prudký nárůst objemu učební látky a také změna učitele. Na prvním stupni se žáci zabývají především přirozenými čísly, mohou počítat na prstech nebo si jinak pomoci a příklady jsou reálné a pro žáky snadno představitelné. Na druhém stupni se matematika výrazně liší od prvního stupně a stává se abstraktní. Žáci náhle přestávají řešit úlohy o cestách z domu do školy a k babičce, ale trasy z města A do města B, místo počítání ovoce nebo koláčů na míse sčítají „nic neříkající“ čísla a podobně bychom mohli pokračovat.

Právě práce se symboly se ve výuce na prvním stupni často ani neobjeví a náhlý požadavek nahrazovat reálné a hmatatelné abstraktním symbolem činí matematiku pro žáka nepřehlednou a nepřístupnou. Přitom se žák setkává se zástupnými symboly od útlého věku, „ze školky mohl jít po „o“ domů“ ([19], str. 19), z reklamy zná označení aut písmeny, čísla, nebo jejich kombinací, je v kontaktu s moderními technologiemi, kde se zástupných symbolů využívá, a sám při komunikaci prostřednictvím komunikačních kanálů využívá různé symboly, například :-), jj, 4U, apod. Úkolem učitele je přiblížit žákovi práci se symboly, a využití toho, co žák zná a používá, by mu v tom mohlo pomoci. Obdobný problém nastává při přechodu ze základní školy na střední školu.

Další možnou příčinou problémů v matematice je rozdíl mezi přirozeným poznáváním světa a způsobem, jakým žák získává znalosti o matematice. (Přirozeným poznáváním rozumíme postupný proces získávání nových poznatků v závislosti na předchozích znalostech a zkušenostech.)

A) Potlačovaná matematické intuice

V článku *Intuitive Mathematics: Theoretical and Educational Implications* [3] autoři hovoří o matematické intuici¹ a o jejím významu ve výuce matematiky. Matematickou intuicí budeme v dalším textu rozumět schopnost řešit úlohy vlastní úvahou, odhadnout správnou cestu(y) k řešení a posoudit možnost/nemožnost získaného výsledku.

Matematická intuice pomáhá řešit (některé) problémy bez předchozích znalostí či instrukcí, ale žáci jsou od intuitivních úvah často zrazováni. (Jako příklad zde uvedme lpění řady učitelů na zápisu postupu řešení i v případě, že žák úlohu vyřeší správně vlastní úvahou a zapíše jen výsledek.) Tak se matematika stává něčím, co z jejich pohledu „nedává smysl“ a vzdají další pokusy o porozumění problému.

Podpoříme-li žákovi matematickou intuici, může dojít k pocitu vnitřního uspokojení nad vlastní schopností vyřešit problém. Tento pocit je pro žáka důležitý a měl by vést ke zvýšení jeho zájmu o matematiku a ke zlepšení v této oblasti. ([3], str. 26)

Podpora rozvoje matematické intuice

Důležitou úlohu v rozvoji libovolné schopnosti má dostatečný prostor pro sebe-realizaci. V případě rozvoje matematické intuice je významnou překážkou předkládání řešených příkladů.

Žák si z řešeného příkladu osvojí konkrétní algoritmus řešení a ten pak využívá pro řešení všech úloh daného typu. Nesprávné nebo nedostatečné pochopení učiva může vést k tvorbě chybného algoritmu a to může mít za následek nepochopení celého bloku učiva. Žák získá pocit, že je učivo nad jeho síly, a rezignuje na další snahy o porozumění. Jednou z cest, jak tyto nedostatky napravit, je úvážlivěji

¹ V původním znění: „*mathematical intuition*“.

zařazovat řešené úlohy do vyučování a dát žákovi přímou zpětnou vazbu, aby si upevnil získané znalosti bez chyb.

Další překážkou v rozvoji matematické intuice je přílišná typizace úloh. Žák si brzy všimne, že úlohy začínající stejně, vyžadují stejný algoritmus řešení, a žák jej použije s vidinou jistého úspěchu. Pokud je osvojený algoritmus správný, úspěch se dostaví a žák nemá důvod nad problémem více přemýšlet. Pokud je osvojený algoritmus chybný, úspěch se nedostaví a žák hledá chybu, ovšem ne vždy v použitém algoritmu.

Například při řešení kvadratických rovnic se žák setkává s úlohou typu nalézt všechna řešení rovnice $x^2 - 16 = 0$ a pro tento blok učiva zná postup řešení (tedy že každou kvadratickou rovnici lze zapsat ve tvaru $ax^2 + bx + c = 0$, ze zadané rovnice je třeba určit koeficienty a, b, c a dosadit do vzorců pro výpočet diskriminantu a řešení). Pokud si žák osvojil algoritmus, ale problému neporozuměl, může se při řešení dopustit významné chyby (například určí $b = -16$). Kdyby žák měl řešit tuto úlohu bez znalosti algoritmu, z dříve získaných zkušeností (z řešení lineárních rovnic, druhých mocnin,...) by bez obtíží správně určil řešení rovnice $x_1 = 4, x_2 = -4$.

Násilnou aplikací konkrétního postupu pro typově stejné úlohy, se dříve triviální úloha může stát nepochopitelnou či neřešitelnou. Žák by měl být povzbuzován k hledání a tvorbě vlastních cest k řešení namísto kopírování postupů z řešených příkladů. Učitel by měl tyto žákovy snahy podpořit a ocenit, a po té ho přivést k řešení nebo mu případně ukázat další cesty k řešení. ([3], str. 25)

B) Nereálné úlohy

Mnoho lidí vnímá matematiku jako samostatně žijící organismus, který má velmi málo společného s okolním světem. Tento názor rády podporují osobnosti veřejného života a prostřednictvím médií ovlivňují vztah mladších generací k matematice.

Při pročítání učebnic matematiky se stále ještě setkáváme s úlohami, které jsou zcela odtrženy od reality, řeší situace pro život absurdní (například úlohy typu: „v jedné ruce mám deset ananasů“) nebo nejsou aktuální (používání Kčs, starých SPZ a telefonních čísel). A jistě existují další typy úloh, které nijak nesouvisí s tím, co by žák mohl znát, nebo co by mu bylo jinak blízké.

„K čemu je to dobré?“ Tuto nebo podobnou otázku už položili žáci nejednomu učiteli matematiky. Jednou z možností, proč žák takovou otázku položí, je právě pocit, že řešené úlohy nijak nesouvisí s ničím, co sám zná. S jazyky se setkává každý den v mluvené i psané podobě, v přírodních vědách jsou nové poznatky často doprovázeny experimenty a pozorováním a žák tak získává pocit, že se učí něčemu, co je mu blízké. V matematice mu takový kontakt chybí.

Řešením může být úprava formulace úloh s důrazem na propojení školní matematiky s „okolním světem“. Důležité je udržovat v žákovi pocit, že se učí možnostem interpretace (a schematizace) problémů, které zná.

C) Formální znalosti

Autoři u nás (například [11], [12]) i v dalších evropských zemích (například [2], [39]) se shodně domnívají, že chyba je přirozenou součástí procesu učení a jako taková by měla být posuzována. Tradiční výuka však staví chybu do pozice nežádoucího jevu. Ve snaze vyhnout se negativnímu hodnocení se žák může uchýlit k „učení se pro známku“. Získá tak pouze formální a povrchní znalosti.

Formálními znalostmi budeme rozumět ty znalosti, které nejsou nijak ukotvené v žákově poznatkové struktuře a mají krátkodobý charakter. Formální znalosti žák získává z pravidla memorováním faktů bez porozumění.

Potřeba uspět u zkoušky může nutit nejen žáka, ale i učitele k výuce zaměřené na zapamatování požadovaného objemu informací v předem stanoveném a nedostatečném čase. Učitel proto musí volit takové metody výuky, které dle jeho názoru rychle vedou k cíli (žák uspěje u zkoušky), a nezbývá mu dostatek prostoru k vysvětlení hlubších vztahů mezi poznatky.

Dalším důvodem, proč se žák spokojí jen s formální znalostí, může být skutečnost, že „o to, co chtěl žák říct a zda to řekl srozumitelně, jde ve škole často až na druhém místě.“ ([11], str. 19) Autoři svým výrokiem chtějí poukázat na výskyt formalismů u učitelů. Při své práci se setkali s učiteli, kteří požadovali po žákovi přesné znění definic a vět, bez ohledu na žákovo porozumění dané problematice. Žákovi tak, pokud chtěl uspět, nezbylo než se vše naučit z paměti. Faktem zůstává, že častým opakováním se žák naučí pouze imitovat učitele, nikoli porozumět problému.

Hejný a Kuřina poukazují ještě na jeden jev, který vede k žákovu formalismu, totiž že: „žák je zahrnut odpověďmi na otázky, které nepoložil, a otázky, které klade, zůstávají nezodpovězeny.“ ([11], str. 196) Autoři vysvětlují, že soubor poznatků, které nejsou odpovědí na žádnou žákem položenou otázku, pro žáka nemají osobní význam, proto nepovažuje za důležité se jim snažit porozumět. Na druhou stranu hledání odpovědí na otázky, které žák sám položil, pro něj má hluboký význam a nalezené odpovědi zůstávají v žákově poznatkové struktuře hluboko zakořeněny.

Možným způsobem prevence proti formalismu je naučit žáka před provedením výpočtů odhadnout výsledek. Pokud si žák neuvědomuje, jaký výsledek může nebo naopak nemůže získat, může to snížit jeho motivovanost k pochopení dané problematiky a vést až k osvojování pouze formálních znalostí a memorování bez porozumění.

4.2 Specifika BOV matematiky

„Učme žáky pochybovat o všem, co jim říkáme, nebo co si přečetli. Učme je věřit pouze vlastnímu rozumu a vštěpujme jim touhu po jeho zdokonalování.“ ([12], str. 398)

O průběhu badatelsky orientované výuky biologie, fyziky či jiných přírodovědných předmětů, má jistě každý svou vlastní intuitivní představu a ta více či méně odpovídá skutečnosti. Když například geolog najde úlomek horniny, kterou nezná, zkusí tento úlomek porovnávat se vzorky z nějaké odborné sbírky, bude zkoumat jeho vlastnosti (tvrdost, lesk, ...), podrobí jej chemické analýze apod. Výsledkem jeho práce je přesné určení vzorku nebo objev něčeho zcela nového. Při studiu hornin metodou BOV žáci provádí obdobný postup.

Pokusit se o podobnou představu pro BOV matematiky už může být obtížnější. BOV přírodních věd se opírá o pozorování, zkoumání a experimentování na „hmatatelných“ objektech. Matematika se od druhého stupně základní školy postupně stává abstraktní a díky tomu přicházíme ve výuce o možnost využívat podobných pomůcek jaké využívají přírodní vědy. Úkolem BOV matematiky není předat žákům hotové poznatky, ale dát jim možnost si zkusit tvorbu matematických znalostí a pojmů, a získané dále využít k hledání odpovědí na další otázky a problémy.

Bádání v matematice, stejně jako přírodovědné bádání, začíná otázkou nebo problémem. Odpovědi jsou hledány pozorováním a prozkoumáváním; jsou prováděny experimenty mentální, virtuální nebo „klasické“ s pomůckami; jsou hledány dříve zodpovězené otázky a vyřešené problémy, které jsou podobné nové otázce; jsou využívány, a v případě potřeby upravovány, již známé matematické aparáty. Proces bádání je veden nebo vede k hypotetickým odpovědím, které je třeba ověřit. ([1], str. 4, vlastní překlad)²

Učitel by stále měl mít na paměti, že objevování motivované matematickými otázkami může také požadovat nebo mít prospěch z budování spojení mezi různými oblastmi (mezi oblastí aritmetiky a algebry, algebry a geometrie, deterministickými a stochastickými perspektivami apod.), protože všechny oblasti matematiky jsou úzce propojeny. ([1], str. 7, vlastní překlad)³ Rovněž by si měl být vědom skutečnosti, že hodnota objevného přístupu k učení neleží v procesu objevování, ale spíše v myšlenkových operacích, které žák při svém objevování provede. ([3], str. 25)

²V původním znění: „*Like scientific inquiry, mathematical inquiry starts from a question or a problem, and answers are sought through observation and exploration; mental, material or virtual experiments are conducted; connections are made to questions offering interesting similarities with the one in hand and already answered; known mathematical techniques are brought into play and adapted when necessary. This inquiry process is led by, or leads to, hypothetical answers – often called conjectures – that are subject to validation.*“

³V původním znění: „*Inquiries motivated by mathematical questions may also require or benefit from building interactions between different systems (between numerical and algebraic systems, algebraic and geometrical systems, deterministic and stochastic perspectives, etc.) since mathematics is a highly connected field.*“

4.3 Jeden úspěšný pokus

V první polovině dvacátého století se objevila a zformovala nová matematická disciplína zvaná teorie množin. Matematici zjistili, že množiny by mohly být vhodným jazykem k popisu celé matematiky, protože nový přístup dokázal matematiku jako celek axiomatizovat (do té doby byla axiomatizovaná pouze geometrie). Skupina francouzských matematiků vydala pod jménem Nikola Bourbaki matematické učebnice, v nichž vybudovali od základů celou matematiku v jazyce množin.

Ve druhé polovině dvacátého století se objevila myšlenka zavést matematiku pomocí množin i do škol a tím pomoci žákům k jejímu lepšímu porozumění. Snahy nahradit dril objevováním se v našich zemích začaly realizovat prostřednictvím výzkumů a tvorbou nových učebnic a pracovních sešitů (do té doby se ve výuce pracovní sešity nepoužívaly). Učitelům byly nabídnuty semináře k nové metodě, všechny fáze výzkumu konzultovali odborníci s učiteli a učitelé dostali možnost se aktivně podílet na přípravě nové koncepce výuky matematiky. [15]

Když byla nová koncepce připravena a rozšířena do všech škol, byli učitelé postaveni i do role žáků, aby pochopili novou metodu a mohli ji učit. Každý učitel se musel naučit hledat, tvořit a objevovat, což významně ovlivnilo jeho psychiku a následně i klima třídy, v níž učil. Ve třídě se přestalo demonstrovat a memorovat, na místo toho se začalo tvořit, motivovat a objevovat. Žáci pozitivně prožívali své objevy a jejich reakce zpětně motivovaly učitele k další práci. Po čase se učitel přestal intenzivně připravovat na každou vyučovací hodinu a začal ekonomizovat svou práci a plnit předepsané osnovy. To vedlo k návratu původních metod transmisivního vyučování. ([12], str. 41)

Jaké z toho plyne poučení? Ukázalo se, že kvalitu vyučování určuje učitel. Úroveň vyučovacího procesu se odvíjí od intelektuální práce, kterou vloží učitel do samostudia, příprav a výuky. Ukázalo se také, že učitel je schopen výrazně zlepšit svou práci, když mu vytvoříme příznivé podmínky. ([12], str. 41)

4.4 Jak badatelsky učit matematiku

Bádání začíná otázkou nebo problémem. Při vyučování vychází tento počáteční impulz od učitele, ale je žádoucí, aby i žáci byli schopni klást otázky a formulovat problémy, jejichž řešením se budou dále zabývat.

Baptist ([1], str. 15) navrhuje, aby učitel měl svůj seznam badatelských otázek a průběžně jej spolu se svými žáky doplňoval. Na základě publikací [1], [32], [33] je vytvořen seznam základních otázek, které by měl klást učitel žákům a/nebo žáci sobě navzájem a také sami sobě.

- Proč ...?
- Jak je možné vysvětlit ...?
- Co se stane, když ...?
- Existuje nějaký vztah/podobnost mezi ...?
- Za jakých podmínek ...?
- Jaké vlastnosti má ...?
- Je možné zobecnit ...?
- Co myslíme tím ...?
- A co když nebude ...?
- Znáte nějaký podobný problém/úlohu/ ...?
- Jak víte, že ...?
- Je možné, že ...?
- Lze říci, že ...?
- Existuje i jiná cesta k řešení?
- Jakou další otázku si můžeme položit?

Zamyšlení nad vlastním stylem výuky

Jak bylo zmíněno výše, učitelovo pojetí výuky významně ovlivňuje klima ve třídě a tím i přístup žáků k vlastnímu učení. Baptist ([1], str. 23-24, volně přeloženo) formuluje pět základních aspektů učitelova působení a předkládá je učitelům k zamyšlení.

1. Styl učení

Podporujte své žáky ve vzdělávání, ale nepoučujte je. Povzbuzujte je v hledání vlastních cest k učení a pomáhejte jim návrhy a otázkami tak, aby si sami dokázali pomoci. Při výuce používejte různé vyučovací metody a snažte se oddělovat situace, v nichž se žáci učí, od situací, v nichž testujete jejich znalosti. Výuka není zaměřena na Vás, ale na žáky; a ne Vy, ale Vaši žáci jsou zodpovědní za své vzdělání.

2. Problémové učení

Vytvářejte pro své žáky různé problémy a připravte si několik cest k úspěšnému řešení. Poté umožněte svým žákům aktivně pracovat na řešení těchto problémů a mějte na paměti, že výukovým cílem je cesta k řešení. Spojujte znalosti žáků z každodenního života se znalostmi matematickými. Učte své žáky zaznamenávat svou cestu k poznání, například tím, že si žáci povedou studijní deník (sešit) ať už v elektronické nebo papírové podobě.

3. Téma výuky

Omezte se na podstatný obsah a žákům zdůrazňujte základní myšlenky příslušného tématu. Objasňujte obsah v odpovídajících a zajímavých souvislostech, pozitivně hodnotte objevování a posilování vztahů týkajících se obsahu a struktury tématu. Omezte převládající důraz na výpočty ve prospěch snahy o porozumění.

4. Způsob hodnocení

Předně si položte několik otázek: Musí test (písemná práce/zkoušení/...) vždy obsahovat výpočty? Mohou mít úlohy několik možných správných řešení? Může testová úloha obsahovat popis jevu či situace?

Příprava různých variant testu, který neobsahuje formální aplikace početních metod, pro Vás může být náročnější. Hodnoťte také vedení studijního deníku.

5. Role učitele matematiky

Ukažte žákům Vaše nadšení pro matematiku, ukazujte svůj osobní zájem o dané téma a stále se aktivně o matematiku zajímejte prostřednictvím populární vědecké literatury, různých soutěží apod. Zdůrazňujte žákům důležitou roli matematiky v kultuře, ve vědě, v technice, v průmyslu a v mnoha dalších odvětvích lidské činnosti. Svým stylem výuky neustále dokazujte, že matematika je živá a stále se rozvíjející disciplína.

5 BOV matematiky a přírodovědných předmětů v ČR a v dalších evropských zemích

Jeden z výzkumů, který byl uskutečněn v rámci projektu MaSciL (viz níže), se zabýval zmapováním stavu využívání badatelských metod ve vyučování matematiky a přírodovědných předmětů v partnerských zemích projektu. Na webových stránkách je dostupná zpráva o tomto výzkumu nazvaná *Report on the large-scale survey about inquiry based learning and teaching in the European partner countries*. [30]

Výsledky výzkumu se opírají o 1132 dotazníků, které vyplnili učitelé (38 % mužů, 62 % žen) matematiky (více než polovina dotázaných), přírodovědných předmětů (fyziky, biologie, chemie, geografie,...), technických předmětů a informačních technologií. Výzkumu se zúčastnilo nejvíce učitelů v Řecku (231), nejméně v Nizozemí (50), v ČR 72 učitelů.

V dotazníku byla obsažena definice BOV a po jejím přečtení měli učitelé odpovědět nejprve na otázky týkající se politiky a kurikula v dané zemi vzhledem k BOV (například do jaké míry učitel pocituje oporu pro BOV v národní vzdělávací politice či v dostupných materiálech.) Další otázky se týkaly učitelových osobních zkušeností s BOV, jak často tuto metodu využívá a jakým aktivitám se s žáky věnuje v hodinách. V souladu s konceptem celého projektu dotazník obsahuje otázky o začleňování situací ze světa práce⁴ do výuky. V žádné z otázek respondenti neměli možnost vybrat neutrální odpověď.

Výzkum ukázal:

- Celkem 66,7 % dotázaných učitelů pocituje ve své zemi jen malou nebo žádnou podporu badatelského vyučování příslušnými institucemi. V ČR je tento počet vyšší než evropský průměr.
- V začleňování badatelských metod výuky a aktivit, které k BOV směřují, do každodenního vyučování matematiky je ČR pod evropským průměrem. Ve využívání situací ze světa práce v každodenní výuce se ČR řadí k neúspěšnějším ze zkoumaných zemí.

⁴V původním znění: „*world of work* — *WoW*“, možno přeložit jako „svět práce“ nebo „z reálného života“. Pojem „svět práce“ používá český tým projektu MaSciL. [42]

- Učitelé matematiky pocítují, na rozdíl od ostatních dotázaných, v souvislosti s implementací BOV a světa práce do svého předmětu více problémů v systémových nařízeních a dostupných zdrojích než v organizaci třídy. Zatímco vliv zdrojů a organizace třídy byl malý, vliv systémových nařízeních je vnímán jako významný. ([30], str. 23, vlastní překlad)⁵

Studie ukázala celkově pozitivní vztah k badatelské výuce ve všech zemích projektu MaSciL, nicméně si BOV nenašla cestu do každodenní praxe. Ve většině zemí je znatelná jistá základní úroveň, ale stále je dostatek prostoru k rozvoji stávajících přístupů. V Německu, Nizozemí a v České republice mají učitelé poměrně nízký zájem realizovat badatelskou výuku. ([30], str. 4 a str. 31, vlastní překlad)⁶

⁵V původním znění: „*While the effect concerning resources and classroom management was small there was a large effect for systemic restriction.*“

⁶str. 4 v původním znění: „*The study showed an overall positive orientation towards IBL in all mascil countries. Nevertheless, IBL has not found its way into daily practice. In most countries a certain basic level is visible but there is ample space for further development of the existing approaches.*“

6 Mezinárodní projekty zabývající se BOV matematiky

V rámci Evropské unie vznikla celá řada projektů na podporu inovativních přístupů ke vzdělávání a k podpoře šíření informací a výukových materiálů mezi učiteli. Zde uvedme některé projekty zabývající se BOV pro přírodovědné předměty (ozn. P) a projekty BOV kombinující přírodovědné předměty a matematiku (ozn. P+M) ([32], str. 95):

- P S-TEAM (2009-2011), s-teamproject.eu, český partner: PF JU;
- P ESTABLISH (2010-2014), www.establish-fp7.eu, český partner: MFF UK;
- P PROFILES (2011-2014), www.profiles-project.eu, český partner: PedF MU;
- P PRI-SCI-NET (2011-2014), www.prisci.net, český partner: PF UJEP;
- P+M FIBONACCI (2010-2013), www.fibonacci-project.eu, český partner PF JU;
- P+M ASSIST–ME (2013-2016), assistme.ku.eu, český partner: PF JU;
- P+M MaSciL (2013-2016), www.mascil-project.eu, český partner: PŘF UHK;
- P+M Primas (2010-2013), www.primas-project.eu .

Následující čtyři podkapitoly jsou věnovány charakteristice vybraných projektů, které se zabývají badatelsky orientovanou výukou matematiky a vznikly za podpory Evropské komise v rámci 7. Rámcového programu EU. Zastoupení členských států v jednotlivých projektech ukazuje tabulka 2.

6.1 Projekt ASSIST–ME

Na projektu ASSIST–ME — *Assess Inquiry in Science, Technology and Mathematics Education* (přeloženo: Posouzení badatelského přístupu ve výuce přírodních věd, technických předmětů a matematiky) spolupracuje deset vědeckých pracovišť z osmi evropských zemí. Českým partnerem je Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích.

Rozsáhlý výzkum si klade za cíl posoudit průběh a výsledky vyučovacích metod k podpoře a zlepšení badatelských přístupů k vyučování přírodních věd, technických předmětů a matematiky v Evropě. ([38], vlastní překlad)⁷ Výzkum

⁷V původním znění: „ASSIST–ME is a high level research project that will investigate formative and summative assessment methods to support and to improve inquiry-based approaches in European science, technology and mathematics education.“

| PROJEKT | ZEMĚ ZAPOJENÉ DO PROJEKTU | PROJEKT | ZEMĚ ZAPOJENÉ DO PROJEKTU |
|-----------|--|---------|--|
| ASSIST-ME | Dánsko* Česká republika Finsko Francie Kypr Německo Švýcarsko Velká Británie | Primas | Německo* Dánsko Kypr Maďarsko Malta Nizozemí Norsko Rumunsko Slovensko Španělsko Švýcarsko Velká Británie |
| | Francie* Belgie Bulharsko Česká republika Dánsko Estonsko Finsko Irsko Itálie Lucembursko Německo Nizozemí Polsko Portugalsko Rakousko Rumunsko Řecko Slovensko Slovinsko Srbsko Španělsko Švédsko Turecko Velká Británie | | Německo* Bulharsko Česká republika Kypr Litva Nizozemí Norsko Rakousko Rumunsko Řecko Španělsko Turecko |

* – koordinátor projektu

Tabulka 2: Zapojení evropských zemí do BOV projektů

se týká základních a středních škol a závěry výzkumu budou nabídnuty institucím, které jsou zodpovědné za vzdělávání a vzdělávací programy své země, jako podklady či doporučení k další práci.

6.2 Projekt Fibonacci

Projekt Fibonacci, na jehož realizaci se podílí 37 evropských pracovišť, se zabývá návrhem, realizací, testováním a formováním procesu šíření badatelsky orientovaného vyučování a učení v přírodovědných předmětech a v matematice pro základní a střední školy v Evropě. Českým partnerem tohoto projektu je Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích [40].

Jednotlivá pracoviště mají své přesné umístění v hierarchii projektu. Pod pařížskou univerzitu, která je koordinátorem projektu, spadá 12 referenčních center, z nichž každé zaštiťuje jedno až tři další pracoviště (ozn. TW1-3). V průběhu projektu byla připojena pracoviště na ještě jednu nižší úroveň. Smyslem této hierarchie je šíření poznatků, materiálů a dalších informací přímo nebo prostřednictvím konferencí a seminářů.

Na Jihočeské Univerzitě v Českých Budějovicích je pracoviště úrovně TW1 a zabývá se využitím informačních a komunikačních technologií, podporou finanční gramotnosti, přípravou budoucích učitelů a dalším vzděláváním pro učitele.

Na internetových stránkách jsou volně ke stažení připravené výukové materiály a studie některých témat. Tyto materiály jsou rozděleny do dvou kategorií — přírodovědné předměty a matematika, další úroveň třídění chybí. Texty jsou různě rozsáhlé a postrádají jednotnou strukturu, což je činí nepřehlednými a to může vést k jejich nevyužívání ve školní praxi. Celé stránky a všechny zveřejněné dokumenty jsou pouze v anglickém jazyce.

6.3 Projekt MaSciL

V rámci projektu MaSciL — *Mathematics and Science for Life* (přeloženo: Matematika a přírodní vědy pro život) spolupracuje 18 evropských univerzit s cílem podporovat a rozšiřovat BOV matematiky a přírodovědných předmětů a spojit výuku těchto předmětů s reálným světem. Tento projekt navazuje na projekt Primas. [43] Českým partnerem je Univerzita Hradec Králové. [42]

Každý měsíc je na internetových stránkách projektu zveřejněna nová „úloha měsíce“ a k ní abstrakt, spojení daného tématu se světem práce a pokyny pro žáky a pro učitele, dostupné volně ke stažení. Ve svých pokynech učitel nalezne kromě abstraktu doporučení k formám výuky daného tématu a věk žáků, dále pak časový odhad, očekávané výstupy a přínosy a seznam pomůcek, jsou-li potřeba. Pro úlohy není stanovena jednotná forma a každou z nich vypracovává jiný partnerský tým, takže se obsahy jednotlivých pokynů liší. Výukové materiály jsou dostupné v anglickém jazyce, ale je možné je třídit podle vyučovaného předmětu, věku žáků nebo podle časové náročnosti úkolu. V seznamu úloh měsíce je pod každou z nich uveden odkaz na diskusní fórum, kde učitelé mohou sdílet své poznatky z výuky.

Na webových stránkách je uvedeno, že projekt chce rozšířit nabídku programů pro další vzdělávání učitelů nejprve v partnerských zemích, později v celé Evropě. Internetové stránky projektu jsou bohatým zdrojem informací a materiálů nejen pro učitele, ovšem jsou jen v anglickém jazyce.

6.4 Projekt Primas

Primas — *Promoting Inquiry in Mathematics and Science Education Across Europe* (přeloženo: Představení badatelského vyučování matematiky a přírodovědných předmětů v Evropě) je projekt zaměřený na prezentaci nové výukové metody v Evropě a její implementaci do vzdělávání. Ve spolupráci čtrnácti univerzit z dvanácti evropských zemí byla pro učitele z partnerských zemí uskutečněna řada kurzů a seminářů v rámci celoživotního vzdělávání, kde si sami mohli vyzkoušet učení objevováním, protože schopnost učitele vyučovat metodou BOV může být závislá na jeho vlastní zkušenosti s bádáním.

Projekt se rovněž realizoval na univerzitách v profesní přípravě učitelů. Účastníci byly obeznámeni s dostupnými materiály a vyzkoušeli si objevování z pozice žáků, aby získali zkušenosti s novou metodou a inspiraci jak učit. Pro rodiče žáků byla připravena na webových stránkách sekce s informacemi a byly realizovány informační prezentace a workshopy, aby i oni získali zkušenost s inovativním přístupem.

I po skončení projektu je na internetových stránkách volně ke stažení celá řada materiálů, které v rámci něj vznikly. Učitelé zde naleznou vyučovací materiály určené přímo pro výuku (bez nutnosti dalšího přepracování), videozáznamy (opatřené titulky v několika jazycích) z několika modelových hodin a tématické příručky k objektivnímu vyučování a dalšímu profesnímu rozvoji. Část obsahu stránek je možné zobrazit v několika různých jazycích, to bohužel neplatí o zveřejněných dokumentech ke stažení.

Výukové materiály jsou dostupné v anglickém, výjimečně i v německém nebo jiném jazyce. Dokumenty je možné třídit podle tématického zaměření, věku cílové skupiny žáků, požadované aktivity ve třídě, klíčových slov nebo podle typu učitelovy činnosti.

Část II

Praktická část

7 Vzorové přípravy na vyučování

V této kapitole učitel nalezne rady a pokyny k tvorbě vlastních vyučovacích jednotek vedených metodou BOV, deset vzorových příprav na výuku a několik dalších námětů na výuku vedenou metodou BOV.

Všechny přípravy mají jednotnou strukturu pro snadnější orientaci a obsahují pět podkapitol. Kapitola „žáci“ je určena přímo žákům, ostatní kapitoly jsou tvořeny pro učitele.

Struktura příprav:

- žáci — obsahuje instrukce adresované přímo žákům, tato část je zařazena jako první na samostatné stránce (k usnadnění kopírování zadání žákům); učitel se může rozhodnout, jakou formou zadání předá žákům;
- očekávaný přínos — získané znalosti a dovednosti, rozvíjené kompetence;
- učitel — nároky kladené na učitele při přípravě a realizaci výuky, doporučený způsob vedení výuky a námět jak pomoci žákům, aby k objevu dospěli;
- organizační struktura výuky — odhadovaná časová náročnost projektu (samozřejmě mohou být třídy, které zvládnou objevit vztah/jev/... v kratším čase, stejně jako třídy, které budou potřebovat více času než je uvedeno; učitel nechť si udělá vlastní odhad dle třídy, v níž chce projekt realizovat), potřebné pomůcky (učitel si může zvolit předepsané pomůcky nebo použít jiné – třeba z jiného materiálu apod.) a doporučení pro rozdělení žáků pracovních týmů;
- možná rozšíření — náměty na navazující problémy, která může učitel dle vlastního uvážení přiřadit k hotovému materiálu.

7.1 Tvorba vlastních příprav na vyučování

Každý učitel jistě ví, že je třeba se svědomitě připravit na každou vyučovací hodinu. Jinak tomu není ani u výuky vedené metodou BOV. Pro tvorbu materiálů na vlastní výuku nabízí tato práce osnovu (je psána adresně přímo učitelům), podle níž jsou tvořeny uvedené vzorové přípravy. Je žádoucí, aby vyučovací hodiny nebyly stejné, proto by bylo dobré brát tyto informace spíše jako rámec či doporučení, jak přípravy tvořit.

Inspiraci pro vlastní přípravy může učitel čerpat z uvedených příprav nebo z materiálů, které vznikly v rámci mezinárodních projektů (Primas, MaSciL apod.), případně z dalších zdrojů, zabývajících se danou problematikou.

Očekávaný přínos

Po volbě tématu je třeba si uvědomit, jaký bude cíl Vaší výuky. Jaké znalosti si žáci upevní a procvičí a jaká fakta či vztahy objeví. Nezapomeňte na rozvíjení klíčových kompetencí a jiných dovedností. Všechny cíle si přehledně sepište a mějte je při plánování výuky neustále na paměti.

Učitel

Rozhodněte o aktivitách, které žáky k objevu povedou, a formulujte návrh zadání pro žáky. Podle tohoto zadání si připravte potřebné pomůcky a vyzkoušejte si aktivity, které by žáci měli ve výuce provádět. Při tom objevíte možná úskalí Vašeho prvotního zadání a můžete jej přeformulovat nebo se na ně vhodně připravit. Připravte si pro žáky badatelské otázky, které souvisí s probíraným tématem. Nezapomeňte na otázky vedoucí žáky k ověření získaných výsledků.

Organizační struktura výuky

Rozvrhněte práci žáků ve výuce. Vytvořte si časový odhad pro Vámi navržené aktivity, rozhodněte o velikosti pracovních týmů, případně o rozdělení úkolů v rámci každého týmu. Udělejte si seznam potřebných pomůcek a zajistěte, aby byly k dispozici v den/dny realizace výuky.

Žáci

Pečlivě formulujte výslednou podobu zadání pro žáky. Můžete jej uvést otázkami k zamyšlení či příklady z praxe. Připravte žákům i další potřebné materiály, jako jsou například tabulky, obrázky nebo animace.

Možná rozšíření

Uvažte, zda je možné Vámi vytvořený materiál nějak rozšířit a zda je realizace tohoto rozšíření vhodná pro Vaši třídu (vzhledem ke školnímu vzdělávacímu programu, k hodinové dotaci, ke schopnostem žáků apod.)

Může se stát, že během realizace připravené výuky Vám žáci položí otázku, která Vás inspiruje k rozšíření, nebo sami navrhnou možný posun od již získaných poznatků k dalším. Takového zájmu žáků je vhodné využít a rozšíření připravit. Můžete tak významně ovlivnit jejich vztah k matematice.

7.2 Vzorové přípravy

V této kapitole učitel najde zpracované přípravy na vyučovací hodiny zařaditelné k probíraným tématům ve standardní výuce nebo v seminářích na středních školách. Materiály mohou rovněž být využity v matematických třídách či v matematicky zaměřených kroužcích na druhém stupni základní školy (o vhodnosti zařazení ať rozhodne učitel sám). Příprava 10 je návrh na dlouhodobý badatelský projekt a na možné aplikace mezipředmětových vztahů.

Některé přípravy obsahují aktivity s pomůckami, které se běžně v hodinách matematiky nepoužívají. Bylo by vhodné, kdyby si učitel sám nejprve tuto aktivitu vyzkoušel, aby získal zkušenost s prací se zvoleným materiálem a mohl být žákům při výuce nápomocný.

Příprava 1: Eulerův vztah

Žáci

Co je to konvexní mnohostěn? Kde se s takovými tělesy můžeme setkat? Existuje nějaký vztah mezi počty vrcholů, hran a stěn těchto těles?

Vezměte si špejle a plastelínu a zkuste ve dvojicích vytvořit model nejprve krychle, pak libovolného konvexního mnohostěnu. Špejle si podle potřeby zkracujte. Můžete také využít načrtnutí průmětu tělesa ve volném rovnoběžném promítání. U každého tělesa si do tabulky č. 3 запиšte počty jeho vrcholů, hran a stěn. Dokážete najít vztah mezi těmito hodnotami?

| Těleso | Vrcholy | Hrany | Stěny | Vztah |
|--------|---------|-------|-------|-------|
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |

Tabulka 3: Eulerův vztah

Tato hodina může být zařazena k výuce stereometrie. Žáci během ní odvodí Eulerův vzorec pro konvexní mnohostěny, upevní si znalosti o tělesech a vyzkouší si tvorbu modelů.

Očekávaný přínos

- Žáci sami odvodí Eulerův vzorec $V - H + S = 2$ pro konvexní mnohostěny s počtem vrcholů V , počtem hran H a počtem stěn S ;
- rozvíjení prostorové představivosti;
- procvičení volného rovnoběžného promítání;
- rozvíjení sociální kompetence při práci v týmu;
- procvičení jemné motoriky.

Učitel

Vyzkoušejte si nejprve sami tvorbu několika modelů. Zhodnoťte práci s dostupným materiálem a případně připravte žákům ochranné pomůcky (např. staré noviny na lavici).

Na začátku bude třeba žákům vysvětlit, pokud nebyl v dřívějších hodinách kladen důraz na tento pojem, co je to konvexní mnohostěn. Připravte si obrázky nebo animace některých konvexních i nekonvexních mnohostěnů pro podporu Vašeho výkladu a ponechte je viditelné i během práce žáků (alespoň během tvorby prvního modelu).

Navrhněte využití průmětů těles ve volném rovnoběžném promítání k určení příslušných počtů, například pro krychli a kvádr zabere tato metoda žákům méně času.

Během práce žáků procházejte třídou a pozorujte probíhající činnosti. Je možné, že žáci sami vztah neobjeví, v takovém případě jim můžete pomoci nápovědou: $V + S = _ + _$ nebo nechat problém jako domácí úlohu. Splnění úkolu oceňte vhodným způsobem (pochvala, malé plus, či jiné bonusové ohodnocení, které ve třídě používáte), nesplnění nehodnoťte, bylo by to pro žáky demotivující.

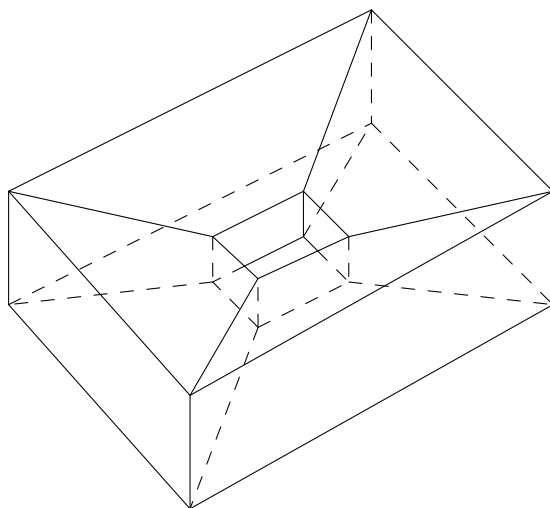
Vybídněte žáky i k tvorbě modelů nepravidelných těles. Pokud objevili vzorec bez nich, navrhněte ověření vztahu pro nepravidelné mnohostěny.

Organizační struktura výuky

- Pomůcky** — psací potřeby, pravítko, tabulka (viz níže), špejle (velké množství) a plastelína (nebo jiná modelovací hmota).
- Časový odhad** — jedna vyučovací hodina.
- Pracovní týmy** — dvojice.

Možná rozšíření

- Na tuto hodinu je možné navázat hledáním Eulerova vztahu pro mnohostěny s otvory (např. obrázek č. 1). Průběh hodiny bude téměř identický, jen by bylo vhodné vytvořit větší pracovní skupiny, nejlépe čtveřice. Modelování těles s otvorem je náročnější, proto navrhněte, aby každý člen skupiny modeloval jiné těleso. Ujistěte se, že v každé skupině vzniknou čtyři různá tělesa.



Obrázek 1: Mnohostěn s otvorem

- Hodinu můžete také rozšířit na projekt, v němž žáci budou mít za úkol doma vytvořit „trvalejší“ modely těles, sestrojený průmět tělesa ve volném rovnoběžném promítání a průvodní text zaměřený na vlastnosti tělesa a Eulerův vztah. Můžete například vybrat platónská tělesa a přidat do textů zmínku o živlech, které zastupují. Výsledné práce žáků vystavte.
- Vhodným rozšířením je také realizace vyučovacích hodin podle přípravy č. 2 „Součet vnitřních úhlů pravidelného n -úhelníku“ a navazující č. 3 „Platónská tělesa“.

Příprava 2: Součet vnitřních úhlů pravidelného n -úhelníku

Žáci

Které pravidelné n -úhelníky umíte sestrojít? Jakou velikost mají vnitřní úhly pravidelného čtyřúhelníku? Kde můžeme vidět tyto rovinné útvary v praxi? Existuje pravidelný n -úhelník, který není možné sestrojít pomocí pravítka a kružítka?

Sestrojte několik různých pravidelných n -úhelníků, změřte jejich vnitřní úhly a запиšte si je do tabulky č. 4. Určete součet všech vnitřních úhlů a rovněž si jej запиšte. Existuje způsob, jak bychom mohli určit tento součet pro libovolný pravidelný n -úhelník, aniž bychom jej museli sestrojít?

| Počet vrcholů | Velikost každého vnitřního úhlu | Součet | Vztah |
|---------------|---------------------------------|--------|-------|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

Tabulka 4: Součet vnitřních úhlů pravidelného n -úhelníku

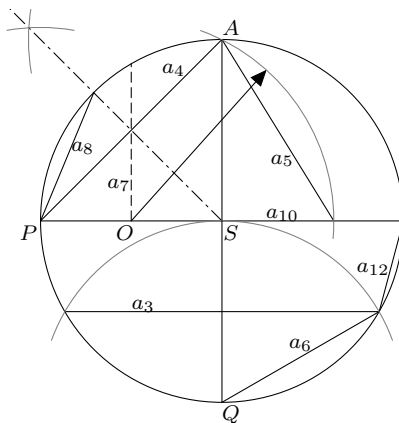
Při výuce planimetrie se žáci učí mimo jiné o pravidelných n -úhelnících, některé vztahy a konstrukce. V této hodině si odvodí vztah pro součet s_u vnitřních úhlů pravidelného n -úhelníku a procvičí si jejich konstrukce.

Očekávaný přínos

- Odvození vztahu $s_u = (n - 2) \cdot 180^\circ$;
- procvičení konstrukcí pravidelných n -úhelníků;
- upevnění znalostí o daných rovinných útvarech v poznatkové struktuře žáků.

Učitel

V této vyučovací hodině budou žáci rýsovat, měřit a počítat, takže nebudou potřebovat žádné zvláštní pomůcky ani upravené prostředí třídy. V úvodu se zaměřte na konstrukce pravidelných n -úhelníků, které už žáci znají. Ke zopakování postupu můžete například využít formu dialogu ve třídě. Poté žákům ukažte konstrukce dalších n -úhelníků, využijte obrázku č. 2 a poskytněte žákům kopii (můžete ji dále ve výuce využívat).



Obrázek 2: Konstrukce pravidelných n -úhelníků

V hodině pozorujte činnosti žáků a povzbuzujte je k práci. V případě obtíží s nalezením vztahu se zaměřte na poslední sloupec tabulky. Vypište získané součty

na tabuli vzestupně pro hodnoty $n = 3, 4, 5, \dots$ a vybídněte žáky k úvahám nad touto posloupností. Jistě v krátké době objeví rozdíl 180° mezi sousedními členy posloupnosti a následně i hledaný vzorec.

Přípravte si obrázky dalších pravidelných n -úhelníků pro $n > 12$ a po nalezení vztahu je nabídněte žákům k ověření platnosti.

Získané znalosti žáků můžete podpořit a upevnit například těmito otázkami:

- Platí vztah i pro trojúhelník?
- Platí i pro jiné čtyřúhelníky než čtverec (kosodélník, lichoběžník, ...)? A proč tomu tak je?
- A co kdybychom měli jiný, např. šestiúhelník (vepsaný do kružnice jiného poloměru), bude vztah stále platit?

Organizační struktura výuky

Pomůcky — psací a rýsovací potřeby (včetně úhlooměru), nelin-kovaný papír, kalkulačka do každé dvojice a tabulka (viz níže).

Časový odhad — jedna vyučovací hodina.

Pracovní týmy — dvojice.

Možná rozšíření

- Hodinu můžete rozšířit na projekt, v němž budou žáci hledat konstrukce dalších pravidelných n -úhelníků pro $n > 12$ pomocí pravítka a kružítka. Výstupem projektu by mohl být plakát vyvěšený ve třídě nebo počítačová animace průběhu konstrukce. Součástí projektu by mohl být článek o Gaussovi a jeho objevu konstruovatelnosti pravidelných mnohoúhelníků eukleidovskými prostředky (na učiteli je ponecháno zvážení uvedení zmínky o Fermatových prvočíslech).
- Vhodným rozšířením je také realizace vyučovací hodiny podle přípravy č. 3 „Platónská tělesa“.

Příprava 3: Platónská tělesa

Žáci

Už znáte pravidelné n -úhelníky, jaká tělesa je možné z nich sestavit? Kolik těles dokážete sestavit ze shodných rovnostranných trojúhelníků?

Konvexní těleso, které je složeno ze stejných shodných pravidelných n -úhelníků, nazýváme platónské těleso. Vezměte si špejle a plastelínu a zkuste ve dvojicích vytvořit modely různých platónských těles. Kolik takových těles dokážete sestavit? Kolik takových těles existuje? Je možné mezi nimi najít nějaký vztah?

K přehlednému zapisování údajů zjištěných o vytvořených tělesech využijte tabulku č. 5 (Stěna = tvar každé stěny, například trojúhelník; Úhel = velikost úhlu při každém vrcholu stěny; V = počet vrcholů tělesa; H = počet hran tělesa; S = počet stěn tělesa).

| Těleso | Stěna | Úhel | V | H | S | Poznámky |
|--------|-------|------|---|---|---|----------|
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | | |

Tabulka 5: Platónská tělesa

Žáci při své práci objeví důkaz existence právě pěti platónských těles a mohou objevit dualitu mezi krychlí a osmistěnem a dvanáctistěnem a dvacetistěnem.

Tuto přípravu je vhodné do výuky zařadit po odvození Eulerova vztahu a vztahu pro součet vnitřních úhlů pravidelného n -úhelníku. Žáci tak poznají využití předchozích poznatků k hledání nových a upevní si dříve získané znalosti.

Očekávaný přínos

- Důkaz existence právě pěti platónských těles;
- využití znalostí Eulerova vztahu a vztahu pro součet vnitřních úhlů pravidelného n -úhelníku;
- rozvoj prostorové představivosti;
- upevnění a rozšíření znalostí o pravidelných n -úhelnících a tělesech v poznatkové struktuře žáků;
- možné objevení principu duality.

Učitel

Vzpomeňte si a využijte zkušenosti s modelováním při odvozování Eulerova vztahu a připravte žákům vhodné ochranné pomůcky.

Pokud už uplynula delší doba od realizace příprav č. 1 „Eulerův vztah“ a č. 2 „Součet vnitřních úhlů pravidelného n -úhelníku“, věnujte pár minut v úvodu hodiny zopakování některých poznatků. Poté rozdejte pomůcky a žáci se mohou pustit do práce. V průběhu hodiny kontrolujte, zda stěny každého modelu jsou shodné n -úhelníky. Celou aktivitu můžete pojmut jako soutěž, který tým nalezne více platónských těles.

Žáci by měli během hodiny sestavit alespoň čtyřstěn, osmistěn a krychli. Pokud neobjeví dvanáctistěn nebo dvacetistěn sami, zaveďte diskusi o tom, jak je možné platónská tělesa tvořit. Cílem diskuse je dospět k poznání, že součet vnitřních úhlů stěn při jednom vrcholu tělesa musí být menší než 360° . Tento poznatek by měl vést ke zjištění, že jeden vrchol může být společný také pro tři pravidelné pětiúhelníky a pět rovnostranných trojúhelníků, a že další platónská tělesa neexistují.

Konstrukce dvanáctistěnu a dvacetistěnu může být pro žáky náročnější, ale forma soutěže by mohla zvýšit jejich motivovanost úkol splnit.

Organizační struktura výuky

Pomůcky — psací potřeby, pravítko, tabulka (viz níže), špejle (velké množství) a plastelína (nebo jiná modelovací hmota).

Časový odhad — jedna vyučovací hodina.

Pracovní týmy — dvojice nebo trojice.

Možná rozšíření

- Přehledné zapisování údajů do připravené tabulky může žákům pomoci k objevu duality mezi krychlí a osmistěnem a dvanáctistěnem a dvacetistěnem. Svou výuku pak můžete rozšířit o vepisování osmistěnu do krychle apod.

Příprava 4: Součet členů aritmetické posloupnosti

Žáci

Kde v praxi se můžete setkat s aritmetickou posloupností? Zkoušeli jste někdy sečíst všechna přirozená čísla od jedné do deseti/dvaceti/padesáti? Jakým způsobem budete takový součet hledat?

Sečtěte tři, pět a poté sedm po sobě jdoucích členů aritmetické posloupnosti, zadané údaje a váš výsledek si запиšte do tabulky č. 6. Zkuste najít součet dvaceti členů dané posloupnosti. Existuje způsob, kterým bychom mohli určit výsledný součet bez nutnosti sčítat všechny členy?

| n | a_1 | a_n | s_n | Vztah |
|-----|-------|-------|-------|-------|
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |

Tabulka 6: Součet členů aritmetické posloupnosti

V této hodně si žáci upevní dosavadní znalosti o aritmetické posloupnosti a odvodí vzorec pro součet jejích členů.

Očekávaný přínos

- Odvození vztahu $s_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$;
- upevnění a prohloubení poznatků o aritmetické posloupnosti;
- procvičení základních početních operací a práce s kalkulačkou.

Učitel

Ve vyučování žákům zadáte postupně sérii numericky gradovaných úloh. Na začátku hodiny uvažte zopakování základních informací o aritmetické posloupnosti (AP), pak rozdělte žáky do dvojic a ujistěte se, že v každé dvojici mají žáci alespoň jednu kalkulačku (urychlí proces sčítání, takže žákům zůstane více času na bádání).

Nejprve zadejte úkol sečíst tři po sobě jdoucí členy AP. Členy volte tak, aby bylo pro žáky snadné si všimnout, že výsledný součet je trojnásobkem prostředního členu. Například použijte čísla 100, 150 a 200. Je samozřejmě možné, že si žáci tohoto vztahu nevšimnou. Nesnažte se je k němu dovést, ale zadejte další úlohu, tentokrát sečíst pět členů. Opět volte čísla s ohledem na výše zmíněné, například 30, 40, 50, 60 a 70. Pokud žáci neobjeví pravidlo o násobení středního členu, zadejte ještě další podobné úlohy s lichým počtem sčítanců.

Až žáci dospějí k tomuto dílčímu objevu, zadejte úlohu se sudým počtem sčítanců. Začněte součtem čtyř členů a počty členů postupně zvyšujte. Průběžně nabádejte žáky k hledání vztahu nebo pravidla pro určení součtu. Svůj požadavek odůvodněte příkladem s mnoha (100, 500, 1000) členy posloupnosti, kde postupné sčítání není vhodným nástrojem.

Nabádejte žáky, aby si členy posloupností vypisovali do řádku, bude pro ně jednodušší vztah objevit.

Žáky můžete rovněž motivovat úlohou mladého Gausse, který měl za úkol sečíst všechna přirozená čísla od jedné do sta. Pokud žáci během hodiny nedospějí k objevu vztahu pro součet n členů AP, zadejte jim úlohy s menšími čísly, případně

zadejte problém jako domácí úlohu. Splnění úkolu oceňte vhodným způsobem (pochvala, malé plus, či jiné bonusové ohodnocení, které ve třídě používáte), nesplnění nehodnoťte, bylo by to pro žáky demotivující.

Organizační struktura výuky

Pomůcky — psací potřeby, kalkulačka do každé dvojice a tabulka č. 6.

Časový odhad — jedna vyučovací hodina.

Pracovní týmy — dvojice.

Příprava 5: Kostky a sladkosti

Žáci

Pomáháte připravit dětský den na základní škole a učitelé prvňáčků Vás požádali, abyste připravili odměny pro padesát dětí. Máte připravit šest druhů balíčků tak, že v prvním bude jedna sladkost, ve druhém dvě, ... až do šestého, který obsahuje šest sladkostí. Žák, který si k Vám přijde odměnu vyzvednout, hodí hrací kostkou a dostane balíček s takovým počtem sladkostí, jaké číslo mu padlo. Kolik kterých balíčků si předem připravíte, abyste na místě museli připravovat co nejmenší počet balíčků?

Učitelé druhých tříd také potřebují, abyste připravili odměny pro jejich padesát žáků. Tito žáci nebudou házet jednou kostkou, ale hodí dvěma a odměnu dostanou podle součtu na obou kostkách. Pravidla pro tvorbu balíčků jsou stejná, jen jich bude více druhů. Kolik jakých balíčků připravíte pro tyto děti?

Porovnejte své výsledky s ostatními týmy.

Při výuce pravděpodobnosti žáci často řeší úlohy o hodech jednou nebo více hracími kostkami. Tuto přípravu je možné zařadit na začátek celého bloku učiva. Žáci zjistí, že pravděpodobnost padnutí šestky na hrací kostce je stejná jako pravděpodobnost padnutí jedničky nebo dvojky atp. Při řešení druhého zadaného úkolu objeví Gaussovu křivku.

Očekávaný přínos

- Nalezení hodnot pravděpodobností jednotlivých jevů při hodu jednou a dvěma hracími kostkami;
- procvičení tvorby grafů;
- kritické porovnání a zhodnocení vlastní práce vzhledem k ostatním;
- rozvoj argumentace při prezentaci výsledků a hledání odlišností.

Učitel

Na začátku výuky se se žáky dohodněte způsobu zápisu získaných výsledků. Vzhledem ke snaze dovést žáky k objevu Gaussovy křivky je výhodné zvolit grafické znázornění.

Hodnota padesát je v úloze zvolena proto, že pravděpodobnost padnutí například šestky se s rostoucím počtem pokusů přibližuje hodnotě $\frac{1}{6}$. Při nižším počtu pokusů by tento jev nemusel být pro žáky zřejmý. Házení kostkou může být pro žáky zdlouhavé, proto by bylo dobré je motivovat například soutěží o sladkou odměnu.

Po vyřešení odměn pro prvňáčky sesbírejte zjištěné hodnoty od všech týmů a vytvořte shrnutí. Celkové velké množství pokusů bude ještě výraznější ilustrací zjištěného faktu, že od každého druhu je třeba připravit stejné množství balíčků.

Při hledání počtů jednotlivých balíčků pro žáky druhých tříd by Vaši žáci měli určit (téměř ihned po přečtení zadání), že balíček s jednou sladkostí není potřeba připravovat. Dále pak pro provedení stanoveného počtu pokusů, že nejméně balíčků bude obsahovat dvě sladkosti, dále se počty balíčků budou zvyšovat až

k balíčkům se sedmi sladkostmi a odtud se budou počty potřebných balíčků snižovat až k balíčku dvanácti sladkostí. Tedy že se počet potřebných balíčků řídí Gaussovou křivkou. Opět proveďte shrnutí všech údajů od všech týmů.

Může se stát, že v některém týmu bude křivka posunutá. Využijte této situace k vysvětlení, že Gaussova křivka nám udává pravděpodobnost, se kterou daný jev nastane, nikoli jistotu, že se tak stane.

Organizační struktura výuky

- Pomůcky** — psací potřeby, pravítko, dvě (standardní) hrací kostky do každé dvojice.
- Časový odhad** — jedna vyučovací hodina.
- Pracovní týmy** — dvojice.

Možná rozšíření

- Přirozeně se nabízí úlohu rozšířit o hod třemi kostkami. V takovém případě je vhodné se žáků zeptat, jak je možné, že častěji padne hodnota jedenáct než dvanáct. Také zvyšte počet pokusů a vytvořte větší pracovní týmy, snížíte tak dobu potřebnou k řešení úkolu.

Příprava 6: Zombie nákaza

Žáci

Z laboratoře vyvíjející biologické zbraně unikl nebezpečný virus „zombie“. Člověk, který je virem nakažen, se pohybuje a vypadá jako zcela zdravý jedinec, přichází však o vládu nad svým tělem. Tu převzal virus, který je poháněn touhou šířit nákazu.

Virus nakazil jednoho člověka z vesnice susedící s laboratoří. Nakažený má před sebou hodinu během níž může nemoc rozšířit na nejvýše dvě další osoby (vědci tají, proč právě dvě; prozradili pouze, že se nákaza šíří kousnutím — proto „zombie“ nákaza), poté upadne do kómatu.

Vytvořte prognózu šíření nemoci, za předpokladu, že každý nakažený stihne během hodiny nakazit dvě další doposud nenakažené osoby (tzv. katastrofický scénář). Jak rychle virus zasáhne všechny lidi na Zemi?

Jak rychle se nakazí všichni obyvatelé České republiky, jestliže virus začne šířit jeden nakažený člověk?

Víme, že poslední zdraví obyvatelé ČR a USA byli nakaženi ve stejnou dobu, a že ve 14.00 se v ČR a USA objevili první nakažení. Kolik nakažených bylo na začátku v USA, pokud v ČR byl jeden?

Prostřednictvím této aktivity mají žáci možnost si vyzkoušet práci vědce v prognostickém ústavu a ze vstupních údajů vyslovit hypotézu o průběhu šíření nákazy. Přitom žáci objeví exponenciální funkci a některé její vlastnosti. Tuto přípravu můžete využít jako úvod k učivu o exponenciální funkci nebo ve vyšších ročnících k odvození vztahu pro součet členů geometrické posloupnosti.

Očekávaný přínos

- Objev funkčního předpisu a vlastností exponenciální funkce;
- procvičení tvorby grafu a práce s ním;
- procvičení základních početních operací, práce s kalkulačkou a s tabulkovým editorem.

Učitel

Jak již bylo nastíněno výše, Vaši žáci si zkusí stanovit prognózu vývoje nemoci z dostupných údajů. Cílem aktivity je umožnit žákům objev exponenciální funkce a některých jejích vlastností na modelové situaci šíření nákazy (příklad zombie nákazy byl vybrán jako atraktivní téma pro žáky.)

Žáci by neměli potřebovat více vstupních informací než je uvedeno v zadání. Připravte si údaje o počtech obyvatel, pokud je žáci nemají možnost zjistit sami během vyučovací hodiny. Svou pozornost během výuky věnujte žakovským postupům určení výsledných počtů nakažených a tvorbě grafu.

Připravte si pro žáky další otázky k šíření nákazy a další možné scénáře, například že každý nakažený nakazí tři další apod. Motivujte žáky k formulování obecných závěrů, aby bylo možné vyslovit prognózu pro jakýkoli počet nakažených, tedy k nalezení předpisu exponenciální funkce.

Až žáci aktivitu dokončí, diskutujte o dalších příkladech exponenciální funkce jako je množení bakterií. Vaši žáci jistě objeví mnoho příkladů ze svého okolí a posílí tak spojení matematických znalostí o funkcích s reálným světem, což je žádoucí jev (v souladu RVP G).

Pokud Vaši žáci neumí pracovat s tabulkovým editorem, můžete požádat kolegu, který vyučuje informatiku, aby tuto mezeru ve znalostech žáků vyplnil. Spojením znalostí z informatiky s matematikou podpoříte mezipředmětové vazby.

Organizační struktura výuky

Pomůcky — psací potřeby, kalkulačka, tabulkový editor.

Časový odhad — jedna až dvě vyučovací hodiny.

Pracovní týmy — dvojice.

Možná rozšíření

- Ve vyšších ročnících můžete na toto téma navázat a přivést žáky k úvahám o geometrické posloupnosti a k objevení vztahu pro součet členů GP.

Příprava 7: Úkoly pro spolužáky

Žáci

Dobře víte, jaké to je psát písemnou práci, ale jaké je ji tvořit? Zkoušeli jste někdy vytvořit zadání úkolu, táborové hry nebo cesty za pokladem pro někoho dalšího?

Vypracujte společně v týmu zadání několika úloh pro své spolužáky. Vytvořte slovní úlohy a doplňte je obrázkem či grafem, je-li to potřeba. Snažte se, aby úlohy byly obtížné, ale řešitelné, a aby bylo třeba nad nimi přemýšlet. Využít můžete učebnice, odbornou literaturu nebo internet (při výběru článků z internetu uvažte kvalitu zvoleného zdroje), případně požádejte o pomoc učitele a vytvořte tolik úloh, kolik je ve třídě skupin bez té Vaší.

Ve druhé hodině rozdělte (Vy nebo Váš učitel) vytvořené úlohy tak, aby od Vás dostala každá skupina jednu a Vám žádná nezůstala. Když tohle udělají i ostatní skupiny, dostanete několik zadání úloh, které pro Vás připravili Vaši spolužáci. Ve skupině vypracujte vzorové řešení pro každou z obdržných úloh, pokud Vás napadne více cest k řešení, zpracujte je všechny.

Tuto přípravu využijete při opakování libovolného většího celku učiva, například na začátku školního roku, ke zopakování déle nepoužívaných znalostí před začátkem nového učiva či jako opakování k maturitní zkoušce.

Očekávaný přínos

- Zopakování předchozích znalostí a jejich upevnění v poznatkové struktuře;
- rozvoj sociální kompetence při práci v týmu (klíčová zejména na začátku prvního ročníku střední školy);
- rozvoj kreativního myšlení;
- žáci uvidí známý problém z nové perspektivy.

Učitel

Tyto hodiny dobře poslouží ke zopakování učiva, umožní žákům si připomenout nebo upevnit některé pojmy a prověří jejich kreativitu. Zvolte téma opakování, například na začátku prvního ročníku SŠ bude třeba zopakovat znalosti žáků ze ZŠ a navíc je do jisté míry ujednotit. Rozdělte žáky do skupin po třech až pěti, dbejte přitom na rovnoměrné rozložení sil v každém týmu. Poskytněte žákům učebnice matematiky, matematické tabulky, další literaturu dle vlastní volby a, pokud je to možné, přístup k internetu.

V první vyučovací hodině bude každý tým vytvářet několik úloh vztahujících se k opakovaným tématům. Každá úloha by měla mít slovní zadání, dle potřeby doplněné obrázkem nebo grafem. Počet úloh, které každá skupina vytvoří, závisí na celkovém počtu skupin ve třídě. Například ve třídě s třiceti žáky vytvoříte šest skupin po pěti a každá skupina bude vytvářet pět úloh - jednu pro každou skupinu, kromě vlastní. Při tvorbě úloh si žáci důkladně procvičí dané učivo, budou nuceni přemýšlet v nových souvislostech a získají nové pohledy na známou problematiku. Buďte žákům během tvorby k dispozici kvůli odborné konzultaci.

Je možné, že žáci během jedné vyučovací hodiny nestihnou splnit zadaný úkol. V takovém případě zadejte dokončení za domácí úkol na příští hodinu.

Ve druhé hodině budou žáci opět rozděleni do stejných skupin. Sesbírejte připravené příklady a následně je rozdejte do skupin tak, aby v každé skupině

byla jedna úloha od každé z ostatních skupin, ale žádná vlastní tvorby. Pokud tedy jedna skupina vytvořila pět úloh, obdrží pět úloh, každou od jiné skupiny. K obdrženým úlohám teď žáci ve skupinách vypracují vzorová řešení. Opět je třeba počítat s variantou, že žáci úkol dokončí doma.

Vypracovaná řešení si od žáků vezměte, pročtěte si je a dejte žákům k dispozici například svázané kroužkovou vazbou nebo v elektronické podobě.

Tip: Pořídte si kopie vytvořených úloh pro případně pozdější využití.

Organizační struktura výuky

Pomůcky — psací potřeby, kalkulačka, učebnice matematiky, matematické tabulky, případně přístup k internetu.

Časový odhad — dvě vyučovací hodiny a práce doma.

Pracovní týmy — tři až pět členů.

Možná rozšíření

- Podobného principu můžete využít například při ústním zkoušení žáka u tabule. Zvolte okruh učiva a nechte žáky, aby kladli otázky. Vaším úkolem bude řídit průběh zkoušení, dbejte přitom na správnost používaného jazyka a samozřejmě na odpovědi zkoušeného žáka.
- Možnosti dalšího využití otázek a úloh, které žáci sami vytvoří, jsou široké. Můžete zorganizovat soutěž typu „Riskuj!“, můžete úlohy použít pro tvorbu písemných prací nebo si takto mohou žáci připravit hodinu pro své spolužáky z nižších ročníků. Je na Vás, jak dokážete svou třídu nadchnout pro tvorbu úloh a jak často budete tuto aktivitu zařazovat do výuky.

Příprava 8: Vymalování bytu a nové koberce

Žáci

Vaším úkolem bude vymalovat všechny místnosti v bytě a do některých místností položit koberec. Narýsujte půdorys bytu někoho z Vás, který má alespoň tři obytné místnosti, kuchyni, koupelnu a toaletu, a opatřete jej rozměry jednotlivých místností, nezapomeňte na výšku bytu. Nejprve je třeba byt vymalovat. Navštivte prodejnu barev ve Vašem okolí, vyberte si barvy dle Vašeho vkusu a z obalu zjistěte, kolik které barvy budete k vymalování bytu potřebovat. Rozhodněte se o počtu nátěrů, pak vypočtete množství balení, která spotřebujete, a celkovou cenu. Všechny údaje si запиšte do tabulky č. 7. Nezapomeňte, že každý byt má okna a stropy.

Až budete mít byt „vymalovaný“, položte do obytných místností koberce. Zjistěte rozměr plochy, kterou bude potřeba pokrýt, a navštivte prodejnu s metrážovými koberci. Vyberte si koberec dle vlastního vkusu, ale takový, který do místnosti umístíte v jednom kuse a bez zbytečných ořezů. Zjistěte si ceny vybraných modelů a запиšte si je do tabulky č. 8.

Na papír velkého formátu přerýsujte půdorys vašeho bytu a k němu připojte text popisující, jak jste určili potřebné množství barvy, včetně ředění na požadovaný odstín, a jakým způsobem (s ohledem na rozměry) jste vybrali koberce. Nezapomeňte na celkové náklady. Plakát můžete vylepšit vzorníky barev a odřezky koberců.

| Místnost | Plocha stěn | Počet nátěrů | Spotřeba barvy | Cena |
|-----------------|--------------------|---------------------|-----------------------|-------------|
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |
| | | | | |

Tabulka 7: Vymalování bytu

| Místnost | Výměra podlahy | Cena za 1 m² koberce | Celková cena |
|-----------------|-----------------------|--|---------------------|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

Tabulka 8: Pokládání koberce

Zvolené téma není pro žáky střední školy nijak obtížné, přesto se může ukázat, že je pro mnohé z nich zcela neprobádané. Žáci si při plnění úkolů zopakují výpočty obsahů ploch a lineární rovnice a vyzkouší si měření velkých objektů.

Tato úloha patří spíše do kategorie problémových než badatelských úloh (rozdíl je vysvětlen v kapitole 1.3 na straně 10), ale je zde uvedena ze dvou důvodů. Prvním z nich je skutečnost, že kompetence k řešení problémů je významnou složkou badatelského vyučování. Druhým důvodem je komplexní a dlouhodobý projekt „Náš dům“ (příprava č. 10), který staví právě na této aktivitě.

Očekávaný přínos

- Zopakování znalostí o výpočtech obsahu plochy;
- rozvoj sociální kompetence při práci v týmu (klíčová zejména na začátku prvního ročníku střední školy);
- rozvoj kreativního myšlení.

Učitel

Tato příprava je koncipována tak, aby nezabrala příliš mnoho času z vyučovací hodiny. Vaši žáci budou většinu aktivit spojených s plněním úkolu provádět samostatně mimo školní výuku. K zadání projektu Vám postačí několik minut z vyučovací hodiny, kolik času věnujete na zhodnocení je jen na Vás.

Před zadáním projektu ověřte, zda je v okolí školy nějaká prodejna barev a koberců, kam by se žáci mohli přijít informovat o dostupných produktech. Pokud prodejny nenajdete, poradte žákům, aby navštívili větší město nebo aby potřebné informace hledali na internetu.

Při zadávání nedávejte žákům rady k měření ani výpočtům, spíše se zaměřte na formu plakátu, který mají zhotovit, a informujte je o datu odevzdání (na vypracování žákům poskytněte jeden až dva týdny) a o způsobu hodnocení jejich práce. Vysvětlete žákům, že z ekonomického hlediska není dobré kupovat zbytečně mnoho materiálu, pro který pak není žádné využití, a že mají tento aspekt při své práci zohlednit. Také jim vysvětlete, pokud to bude nutné, co je to metrážový koberec, a že v každé místnosti bude jen **jeden kus** koberce.

Při plnění úkolů (zejména měření) žáci zažijí mnoho legrace a společných zážitků, proto by bylo vhodné tuto úlohu zařadit na začátek prvního ročníku, aby žáci měli další příležitost stmelovat nově vzniklý kolektiv a rozvíjet své sociální kompetence.

Organizační struktura výuky

- Pomůcky** — psací potřeby a kalkulačka, svinovací metr či pásmo k měření bytu, výtvarné potřeby k tvorbě plakátu.
- Časový odhad** — jedna až dvě vyučovací hodiny a práce doma.
- Pracovní týmy** — dvojice nebo trojice.

Možná rozšíření

- Projekt můžete využít při výuce finanční matematiky. Žáci budou například vybírat nejvýhodnější úvěr z nabídky na trhu pro zaplacení nákladů na renovaci bytu. Pak mohou například z příjmů modelové domácnosti zjistit, že zvolené varianty koberců a barev jsou zbytečně drahé a mohou svou volbu přehodnotit (takový poznatek má pro žáka hluboký význam při modelování představ o reálném světě).
- Projekt „Náš dům“ (příprava č. 10).

Příprava 9: Designový nábytek

Žáci

Vžijte se do úlohy designéra, který chce světu ukázat nový model nějakého kusu nábytku (židle, stolu, školní lavice, šatní skříň, ...). Nejprve musíte zjistit, jaký je současný trend a jak vypadá práce konkurence, proto navštivte prodejny nábytku, prohlédněte si různé katalogy, podívejte se na práce designérů uveřejněné na internetu apod., abyste získali inspiraci pro svůj návrh. Změřte si některé kusy nábytku, ať získáte představu o rozměrech Vašeho výsledného návrhu.

Až si vytvoříte vlastní design, je třeba jej vhodným způsobem zaznamenat, aby bylo možné nábytek vyrobit i bez Vaší přítomnosti. Jak zaznamenáte rozměry a přesnou polohu každého prvku?

Vypracujte pokyny a nákresy potřebné ke zhotovení Vašeho kusu nábytku. Vytvořte model v měřítku 1:20.

V této hodině se žáci vžijí do role designérů a vytvoří vlastní návrh kusu nábytku. Tato aktivita není náročná na přípravu nebo pomůcky a je možné ji zařadit buď k výuce či opakování poměrů a měřítek nebo k výuce stereometrie.

Očekávaný přínos

- Rozšíření a upevnění významu pojmů měřítko a poměr a jejich význam v každodenním životě;
- rozvoj prostorové představivosti;
- procvičení volného rovnoběžného promítání;
- rozvoj kreativního myšlení.

Učitel

Poskytněte žákům zadání a určete termín odevzdání tak, aby žáci měli přibližně dva týdny na vypracování. Následně uspořádejte výstavu jejich prací ve třídě, vyvolejte diskusi o kladech a záporech různých zpracování a nechte žáky společně vybrat nejlépe zpracovaný projekt.

Stane-li se, že žáci sami nezvládnou vymyslet žádný způsob zpracování pokynů ani během práce na modelu, připomeňte jim plán bytu. Přiveďte je k uvědomění, že plán bytu je průmětem jednotlivých místností a jejich uspořádání, v němž jsou navíc zaznamenány příslušné rozměry. Poté, pokud to žáci neudělají sami, se zeptejte, zda nám stejné zobrazení bude stačit i pro zaznamenání všech údajů o zvoleném kusu nábytku.

Organizační struktura výuky

- Pomůcky** — psací a rýsovací potřeby, svinovací nebo jiný metr, přístup k internetu.
- Časový odhad** — jedna až dvě vyučovací hodiny a práce doma.
- Pracovní týmy** — jednotlivci, případně dvojice.

Možná rozšíření

- Projekt „Náš dům“ (příprava č. 10).

Příprava 10: Náš dům

Komplexní projekt nazvaný „Náš dům“ nabízí učitelům dlouhodobou aktivitu, ke které je možné se vracet a rozšiřovat ji podle aktuálně probíraných témat. Žáci si vytvoří model domu, ubytují v něm modelovou rodinu a při řešení úloh ve škole mohou svého výtvoru používat jako konkrétního příkladu.

Jak začít

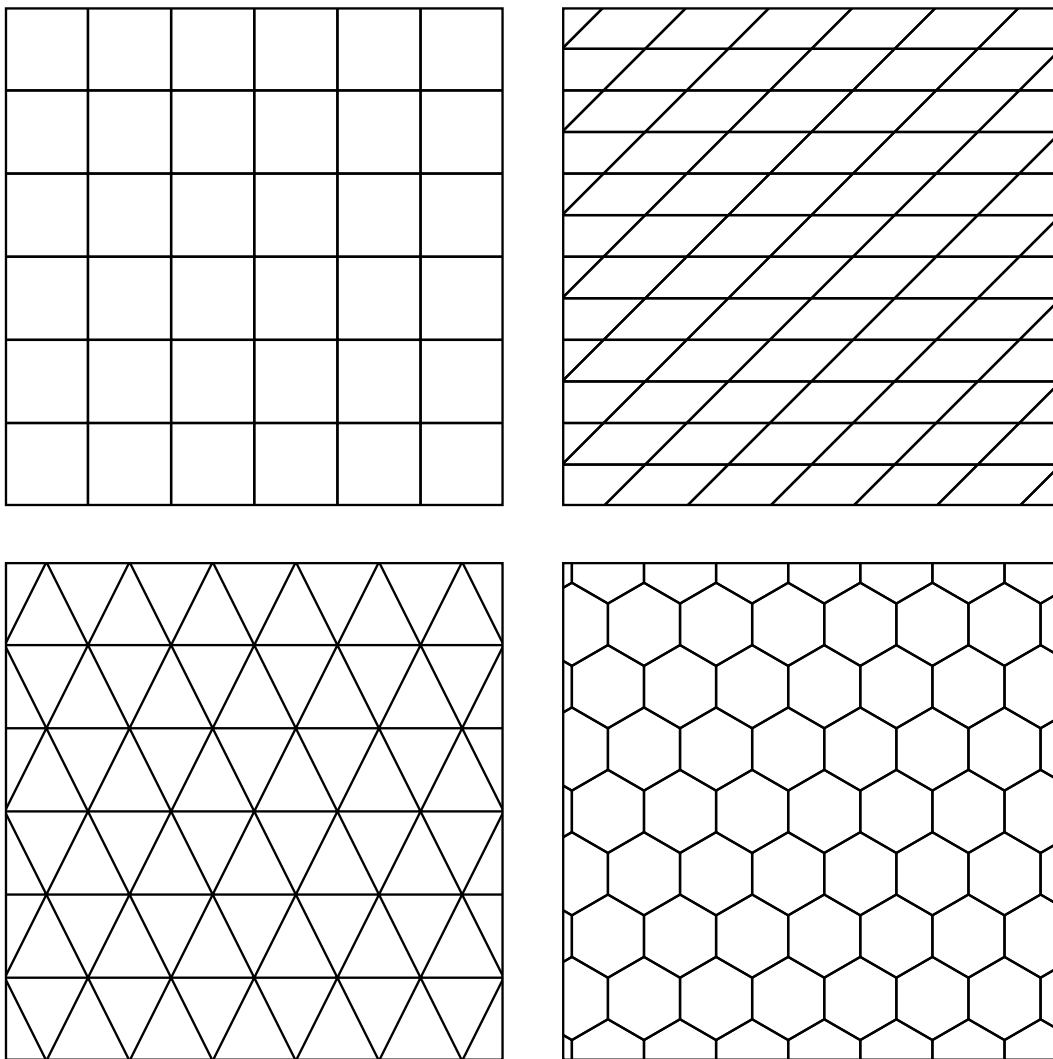
Nejprve rozhodněte, zda chcete mít ve třídě jedinou modelovou domácnost nebo zda jich chcete více. Zadejte žákům narýsovat půdorys jednopatrového obytného domu, pak ve třídě společně vyberte nejlepší návrh (nebo návrhy) a nechte žáky zhotovit model ve Vámi zvoleném měřítku (případně dle konkrétních požadavků, například aby bylo možné model umístit do police ve třídě).

Před nastěhováním modelové rodiny je třeba (stejně jako ve skutečnosti) byt vymalovat a vybavit jej koberci a nábytkem - využijte k tomu přípravy č. 8 *Vymalování bytu a nové koberce* a přípravy č. 9 *Designový nábytek*. K vylepšení modelu použijte vzorky barev a odřezky koberců, které žáci získají při plnění zadaných aktivit. Před zadáním tvorby nábytku ověřte, zda zhotovené modely budou vhodné pro umístění do domu. Pokud ne, upravte měřítko nábytku nebo po zhotovení modelů v zadaném měřítku nechte žáky, ať společně vyberou nejlepší modely a upraví je pro model domu (v případě např. židlí u jídelního stolu bude třeba zhotovit více kusů).

Další vylepšení

Na podlahy v kuchyni, na chodbě a v koupelně položte dlažbu z kachliček, které žáci sami navrhnu. Dláždění (jinak též kachličkování, parketáž nebo teselace, angl. tessellation) je navrhované jako badatelská aktivita v projektech jako je např. MaSciL (viz kapitola 6.3 na straně 32), tyto přípravy jsou dostupné pouze v anglickém jazyce. Český psaný názorný popis procesu teselace lze najít například v [36], str. 40-47. Využít můžete síť z pravidelných rovinných útvarů (viz obrázek 3) nebo síť složené z kombinací různých útvarů.

- Nezapomeňte na vnější podobu domu a příjezdovou cestu.
- Hotový nebo rozpracovaný model je možné využít i jako příklad domácnosti v úlohách z finanční matematiky.
- Téměř neomezené možnosti rozšiřování a vylepšení nabízí 3D tisk.



Obrázek 3: Dláždění roviny

Mezipředmětové vztahy

Model domu může sloužit jako pomůcka nejen v hodinách matematiky, ale i v dalších předmětech. Například v hodinách biologie mohou žáci k domu přidat zahrádku, v odborných předmětech zase osvětlení, modely spotřebičů a mnoho dalších, dle zaměření studijního oboru a zájmu žáků. V hodinách výpočetní techniky a počítačové grafiky mohou žáci vytvořit 3D model nebo virtuální prohlídku domu.

7.3 Náměty pro BOV matematiky

V této kapitole učitel nalezne náměty na další vyučovací hodiny vedené metodou BOV. Témata jsou pouze naznačena s důrazem na klíčové otázky. Rozpracování do přípravy na vyučování a možná rozšíření jsou ponechána na učiteli.

Další náměty je možné čerpat od Samkové [32]. Autorka vytvořila 20 badatelských úloh, převážně pro první stupeň základní školy, ale některé úlohy mají potenciál pro rozšíření a využití i ve vyšších ročnících.

Narozeniny

Po osvojení potřebného aparátu z pravděpodobnosti můžete žákům položit otázku, jak velká musí být skupina lidí, aby pravděpodobnost, že dva z nich mají narozeniny ve stejný den, byla větší než $\frac{1}{2}$? Úlohu můžete začít průzkumem ve třídě nebo v jiné skupině osob, čímž žáky motivujete k řešení.

Střed úsečky

Hejný ([12], str. 403-404) popisuje hledání souřadnic středu úsečky metodou objevování. Využívá k tomu čtverečkový papír (nebo jinou čtvercovou síť) a sérii úloh se rostoucí obtížností, která je dána polohou krajních bodů úsečky. Autor říká, že „žák, který samostatně objeví, že geometrickému středu úsečky odpovídá hledání aritmetického průměru souřadnic, pochopí jednu z klíčových myšlenek analytické geometrie.“

Prvočísla

Úkolem žáků je vytvořit program, který o libovolném přirozeném čísle n rozhodne, zda je či není prvočíslem. Žáci projdou několik fází řešení. První úvahy povedou k tvorbě programu, který zadané číslo n vydělí všemi menšími (přirozenými) čísly ($k < n$). Dalším krokem je učitelův požadavek optimalizace programu. Žáci zjistí, že stačí, když program otestuje dělitelnost čísla n čísly $k < \frac{n}{2}$. Při dalších snahách o snížení počtu prováděných operací mohou žáci objevit poznatek, že číslo n je prvočíslem právě když není dělitelné žádným $k \leq \sqrt{n}$. Je možné, že někteří žáci objeví řešení i při vynechání některé z úvah, což není na závadu. Tato úloha je vhodnou badatelskou aktivitou k posílení mezipředmětových vztahů matematiky a informatiky.

Závěr

Cílem práce bylo představit badatelsky orientovanou výuku matematiky a přenést některé myšlenky publikované v zahraničí do českého jazyka. Tématu se věnuje poměrně velké množství zahraničních publikací a nebylo možné všechny v této práci obsáhnout.

V rámci Evropské unie vzniklo několik projektů na podporu BOV matematiky a k podpoře šíření informací a výukových materiálů mezi učitele. Tyto projekty, konkrétně ASSIST–ME, Fibonacci, MaSciL a Primas, obsahují celou řadu vypracovaných příprav na vyučování, ale téměř výlučně v anglickém jazyce. V žádném ze zmíněných projektů nemají připravené materiály jednotnou strukturu a práce s nimi tak může být pro učitele náročnější. Proto jsem k cílům své práce přidala vytvoření jednotné struktury pro vypracovávání příprav na BOV matematiky. V této struktuře je v práci uvedeno několik vzorově vypracovaných příprav.

Věřím, že učitelé matematiky naleznou v mé práci oporu i inspiraci pro zavedení badatelských metod výuky ve svých třídách a tím pomohou ke zvýšení obliby matematiky. Budou-li učitelé ve svém snažení vytrvalí, vychovají generaci samostatně myslících a pracujících jedinců, kteří jsou schopni řešit neobvyklé problémy, vyvozovat závěry a dokáží se poučit (nejen) z vlastních chyb.

Literatura

- [1] ARTIGUE, Michele, BAPTIST, Peter, *Inquiry in Mathematics Education (Resources for Implementing Inquiry in Science and in Mathematics at School)*. 2012. [cit. 19.3.2016] 26 s. Dostupné z fibonacci.uni-bayreuth.de/resources/resources-for-implementing-inquiry.html
- [2] BAPTIST, Peter, RAAB, Dagmar, *Implementing Inquiry in Mathematics Education (Resources for Implementing Inquiry in Science and in Mathematics at School)*. 2012. 188 s. ISBN: 978-3-00-040752-9.
- [3] BEN-ZEEV, Talia, STAR, Jon, *Intuitive Mathematics: Theoretical and Educational Implications*, In *Understanding and Teaching the Intuitive Mind: Student and Teacher Learning*, Routledge, 2001. 286 s. ISBN 1-4106-0574-4.
- [4] BERNHOLT, Sascha, RONNEBECK, Silke, ROPOHL, Mathias, KOLLER, Olaf, PARCHMANN, Ilka, *Report on current state of the art in formative and summative assessment in IBE in STM - Part I*, University of Copenhagen, Denmark 2013. 124 s. ISSN: 2246-2325.
- [5] BROUMOVÁ, Denisa, *Motivace žáků k učení*, Masarykova Univerzita, Filozofická fakulta, Bakalářská práce, vedoucí práce Kateřina Lojdrová, Brno 2011. 66 s.

- [6] DOORMAN, Michiel, FECHNER, Sabine, JONKER, Vincent, WIJERS, Monica, *Pokyny pro učitele k tvorbě IBST-orientovaných výukových materiálů pro přírodní vědy a matematiku za použití kontextu světa práce*, Přeložili Bílek Martin a Sibalová Jarmila, [online]. Publikováno 4.6.2014, [cit. 30.3.2016] 22 s. Dostupné z: www.fisme.science.uu.nl/en/mascil/index.php?language=6
- [7] DOSTÁL, Jiří, *Badatelsky orientovaná výuka*, Univerzita Palackého v Olomouci, 2015. 151 s. ISBN 978-80-244-4393-5.
- [8] DOSTÁL, Jiří, *Badatelsky orientovaná výuka - Kompetence učitelů k její realizaci v technických a přírodovědných předmětech na základních školách*, Univerzita Palackého v Olomouci, 2015. 260 s. ISBN 978-80-244-4515-1.
- [9] FENYVÉSY, Kristóf, TÉGLÁSI, Ilona Oláhné, SZILÁGYI, Ibolya Prokajné, *Adventures on paper. Math-art activities for experience-centered education of Mathematics*, Eszterházy Károly College, Eger, 2014. 200 s. ISBN 978-615-5297-25-0.
- [10] FULIER, Jozef, ŠEDIVÝ, Ondrej, *Motivácia a tvorivosť vo vyučovaní matematiky*, Fakulta prírodných vied UKF v Nitre, 2001. 270 s. ISBN 80-8050-445-8.
- [11] HEJNÝ, Milan, KUŘINA, František, *Dítě, škola a matematika: Konstruktivistické přístupy k vyučování*, Portál Praha, 2009. 240 s. ISBN 978-80-7367-397-0.
- [12] HEJNÝ, Milan, a kolektiv, *Teoria vyučivania matematiky 2*, Slovenské pedagogické nakladateľstvo Bratislava, 1990. 554 s. ISBN 80-08-01344-3.
- [13] HOFFMAN, Johan, JOHNSON, Claes, LOGG, Anders, *Dreams of Calculus: Perspectives on Mathematics Education*, Springer, 2004. 172 s. ISBN 978-3-642-18586-1.
- [14] HUČÍNOVÁ, Lucie, *Klíčové kompetence – nová výzva z EU II*, [online]. Publikováno 29.6.2014, [cit. 29.3.2016]. Dostupné z: clanky.rvp.cz/clanek/k/z/13/KLICOVE-KOMPETENCE---NOVA-VYZVA-Z-EU-II.html/

- [15] JANKŮ, Marie, *Chceme zvyšovat úroveň vyučování matematice?*, [online]. Publikováno 24.6.2013, [cit. 25.3.2016]. Dostupné z: clanky.rvp.cz/clanek/o/z/17577/CHCEME-ZVYSOVAT-UROVEN-VYUCOVANI-MATEMATICE.html/
- [16] KOLÁŘ, Zdeněk, VALIŠOVÁ, Alena, *Analýza vyučování*, Grada Publishing, 2009. 232 s. ISBN 978-80-247-2857-5.
- [17] KOTLÍK, Bohumír a kolektiv, *Matematické, fyzikální a chemické tabulky*, Nakladatelství Fragment, 2009. 288 s. ISBN 978-80-7200-521-5.
- [18] KUBEŠOVÁ, Naděžda, CIBULKOVÁ, Eva, *Matematika - přehled středoškolského učiva*, Petra Velanová - VYUKA.CZ, Třebíč, 2006. 239 s. ISBN 80-86873-03-X.
- [19] KUŘINA, František, a kolektiv, *Matematika a porozumění světu: setkání s matematikou po základní škole*, Academia Praha, 2009. 331 s. ISBN 978-80-200-1743-7.
- [20] NEZVALOVÁ, Danuše, *Inovace v přírodovědném vzdělávání*, Univerzita Palackého v Olomouci, 2010. 68 s. ISBN 978-80-244-2540-5.
- [21] NEZVALOVÁ, Danuše, *Moduly pro profesní přípravu učitele přírodovědných předmětů a matematiky*, Univerzita Palackého v Olomouci, 2008. 370 s. ISBN 978-80-244-1912-1.
- [22] PAPÁČEK, Miroslav, *Badatelsky orientované přírodovědné vyučování - cesta pro biologické vzdělávání generací Y, Z a alfa?* In Scientia in educatione 1, Karlova Univerzita v Praze, 2010. ISSN 1804-7106.
- [23] PAPÁČEK, Miroslav, *Limity a šance zavádění badatelsky orientovaného vyučování přírodopisu a biologie v České republice.*, In Didaktika biologie v České republice 2010 a badatelsky orientované vyučování (DiBi 2010), sborník příspěvků semináře, 25. a 26. března 2010. Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, 165 s. ISBN 978-80-7394-210-6.

- [24] PECH, Pavel, a kolektiv, *Badatelsky orientovaná výuka matematiky a informatiky s podporou technologií*, Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Pedagogická fakulta, 2015. 194 s. ISBN 978-80-7394-531-2.
- [25] PLHÁKOVÁ, Alena, *Učebnice obecné psychologie*, Academia 2003. 472 s. ISBN 80-200-1499-3.
- [26] POLÁK, Josef, *Didaktika matematiky — Jak učit matematiku zajímavě a užitečně*, Fraus, Plzeň, 2014. 431 s. ISBN 978-80-7238-449-5.
- [27] PRESOVÁ, Radmila, *Motivace studentů ve výuce*, Mendelova univerzita v Brně, Bakalářská práce, vedoucí práce Kristina Marešová, Brno 2012. 67 s.
- [28] Primas, *Inquiry-based learning in maths and science classes*, 2013. 82 s. ISBN 978-3-00-043851-6.
- [29] *Rámcový vzdělávací program pro gymnázia*, Výzkumný ústav pedagogický v Praze, 2007. ISBN 978-80-87000-11-3.
- [30] *Report on the large-scale survey about inquiry based learning and teaching in the European partner countries*, [online]. Publikováno 30.6.2014, 49 s. [cit. 27.3.2016]. Dostupné z: <http://www.mascil-project.eu/images/pdf/mascilD102FinalVersion.pdf>
- [31] RŮŽIČKOVÁ, Lucie, *Užití podnětných úloh ve výuce matematiky*, Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy v Praze, 2012. 116 s. ISBN 978-80-7920-538-6.
- [32] SAMKOVÁ, Libuše, a kolektiv *Badatelsky orientované vyučování matematice*, In Scientia in educatione 6(1), Karlova Univerzita v Praze, 2015. 91-122 s. ISSN 1804-7106.
- [33] SERRA, Michael, *Discovering Geometry: An Investigative Approach*, Key Curriculum Press, 2008. 107 s. ISBN 978-1-55953-899-2.
- [34] ŠVEC, Vlastimil a kol., *Od implicitních teorií výuky k implicitním pedagogickým znalostem*, Paido Brno, 2005. 99 s. ISBN 80-7315-092-1.

- [35] TUČKOVÁ, Renata, *Rozvoj tvořivosti žáků ve výuce odborných předmětů*, Masarykova Univerzita, Pedagogická fakulta, Diplomová práce, vedoucí práce Pavel Pecina, Brno 2011. 77 s.
- [36] WELTMANOVÁ, Anna, *Tohle není matika*, Computer Press v Brně, 2015. 96 s. ISBN 978-80-251-4570-8.
- [37] ŽÁK, Vojtěch, *Metody a formy výuky. Hospitační arch.*, Národní ústav pro vzdělávání, Praha, 2012. 32 s. ISBN 978-80-87063-61-3.
- [38] assistme.ku.dk
- [39] www.fibonacci-project.eu
- [40] www.pf.jcu.cz/stru/katedry/m/fibo.html
- [41] www.mascil-project.eu
- [42] ris2.uhk.cz/mascil
- [43] www.primas-project.eu