Pedagogická fakulta
Faculty of Education
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Fakulta pedagogická
Katedra matematiky

Diplomová práce

Kuželosečky jako množiny bodů dané vlastnosti

Vypracoval: Bc. Eva Schwarzová
Vedoucí práce: prof. RNDr. Pavel Pech, CSc.

České Budějovice 2018

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě - v úpravě vzniklé vypuštěním vyznačených částí archivovaných fakultou elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích ....…………………………

Anotace

Množiny bodů dané vlastnosti patří ke standartnímu učivu matematiky na základních, středních a vysokých školách. Jako množina bodů často vychází kružnice nebo její část, můžeme se též setkat s výskytem ostatních kuželoseček.

Předmětem diplomové práce jsou množiny bodů dané vlastnosti, které jsou vytvořeny kuželosečkami. Práce vychází ze základního kurzu geometrie na Pedagogické fakultě, který se zabývá základními vlastnostmi kuželoseček.

K určování množin bodů dané vlastnosti je využit dynamický software GeoGebra, kde s pomocí Množiny bodů bude hledaná množina vykreslena. Další postup spočívá ve zdůvodnění, o jakou kuželosečku se jedná.

Annotation

Loci of points of given property belong to the standard curriculum of mathematics at schools. As a loci a circle or a part of it is often drawn. We can also see the occurrence of other conics.

The subject of this thesis are loci which are conics. The work is based on the course of geometry at the Faculty of Education, which deals with properties of conics.

To determine the properties of loci dynamic software GeoGebra is used. By GeoGebra first the searched locus is drawn. The next step consists of justification that the locus is a real conic.

PODĚKOVÁNÍ

Ráda bych tímto vyjádřila poděkování vedoucímu své bakalářské práce, panu prof. RNDr. Pavlu Pechovi, CSc., za odborné vedení při řešení této bakalářské práce.

Obsah

10. Úvod

Téma věnované kuželosečkám jsem si vybrala, protože problematika kolem nich je velice zajímavá a příkladů, kde hledanou množinou je právě kuželosečka, je mnoho.

V první části jsem se věnovala rozdělení kuželoseček, které jsem doplnila vlastnostmi známé na základních, středních a vysokých školách. Někde jsou doplněny vlastnosti nové, pro mě byly neznámé.

V další části jsem se věnovala, kterou jsem rozdělila do dvou kapitol, řídící přímce kuželosečky a kuželosečkám jako geometrické místo středů kružnic.

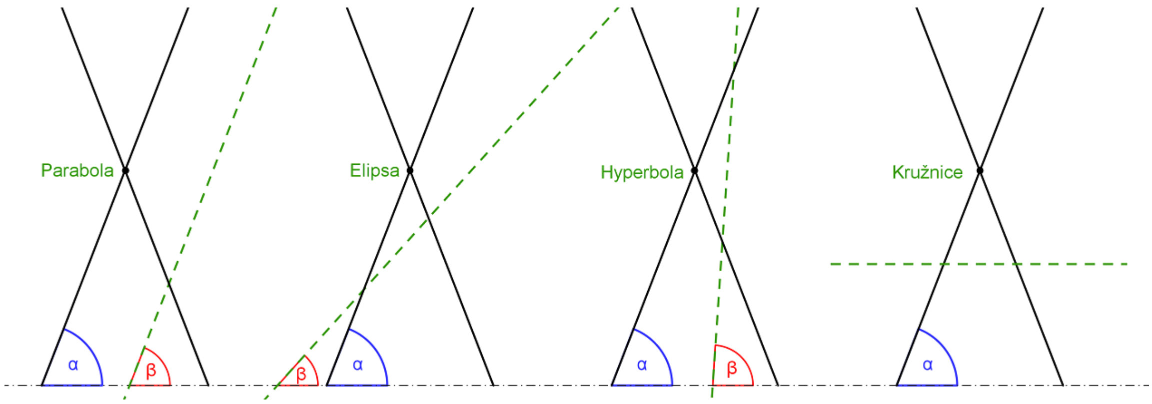
Poslední část je věnována příkladům a následné hledání množin bodů.

Diplomová práce je provázena obrázky, které jsem sestrojila v programu GeoGebra, který jsem si vybrala, protože se mi v něm pracuje dobře a obrázky jsou přehledné.

1. Kuželosečky a jejich rozdělení

Jelikož je celá práce věnovaná kuželosečkám, je třeba se zmínit, co to je kuželosečka.

Kuželosečka, jak už z názvu vyplývá, je rovinnou křivkou, která vznikne seknutím roviny kuželovou plochou. Kuželovou plochou je myšlena přímka, kterou necháme rotovat kolem určitého bodu. Aby nám vznikla kuželosečka, tak rovina nesmí procházet právě tímto bodem. S pomocí následujícího obrázku si řekneme, jaké křivky nám mohou vzniknout.



Obrázek 1 - Rozdělení kuželoseček

Abychom mohli určit, o jakou kuželosečku se jedná, je třeba vědět, pod jakým úhlem protíná rovina řezu kuželovou plochu.

Mohou nastat tyto situace:

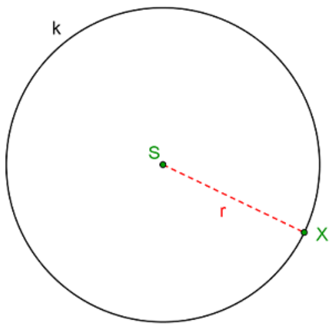
1. Pokud bude $\alpha = \beta$, pak kuželosečkou je parabola.
2. Je-li $\alpha < \beta$, kuželosečkou je elipsa.
3. Zbývá nám $\alpha > \beta$, pak kuželosečkou je hyperbola.

Může nastat speciální případ, kdy řezem bude kružnice, což můžeme vidět na posledním obrázku, kde je znázorněna rovina řezu.

Speciálnímu případu, kterým je kružnice, se budu věnovat ihned na začátku své práce.

2. Kružnice

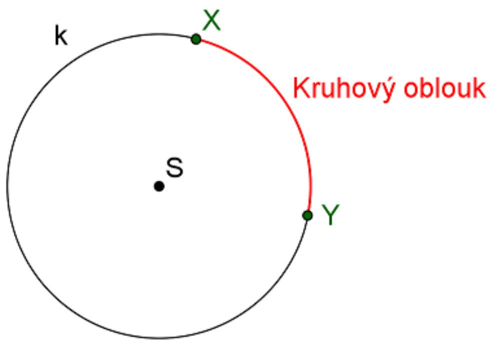
Definice: Nechť je dán v rovině bod S a kladné číslo r. Kružnice $k(S;r)$ je množina všech bodů této roviny, které mají od bodu S vzdálenost r. Bod S se nazývá střed kružnice k a r je poloměr kružnice k. Poloměr r kružnice k je úsečka SX, kde bod S je středem kružnice k a bod X je libovolným bodem kružnice k.



Obrázek 2 – Kružnice

2.1. Kruhový oblouk

Pokud na kružnici $k(S;r)$ zvolíme různé body X, Y, pak se úseku kružnice k mezi zvoleními body říká kruhový oblouk.



Obrázek 3 - Kruhový oblouk

2.2. Vzájemná poloha kružnice a přímky

U kružnice a přímky mohou nastat tyto případy: kružnice a přímka mají dva, jeden nebo žádný společný bod.

Pokud mají kružnice k a přímka p dva společné body X, Y, pak se tato přímka nazývá sečnou, kde X, Y jsou průsečíky přímky p a kružnice k. Úsečka s krajními body

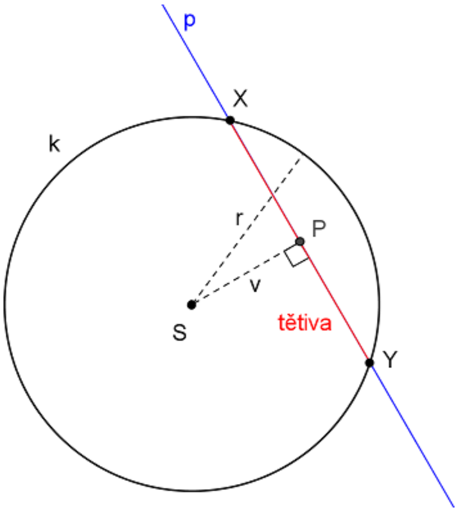
X, Y se nazývá tětivou. Pokud sestrojíme kolmici na sečnu, která prochází středem *S* kružnice *k*, pak pata kolmice *P* rozdělí tětivu na polovinu. Pata kolmice *P* je tedy středem tětivy.

Má-li přímka *p* s kružnici *k* jeden společný bod, pak se přímka nazývá tečnou. Společný bod přímky *p* a kružnice *k* se nazývá bod dotyku, který označíme *T*. Úsečka s krajními body *T, S* je poloměrem kružnice *k*, který je kolmý na tečnu.

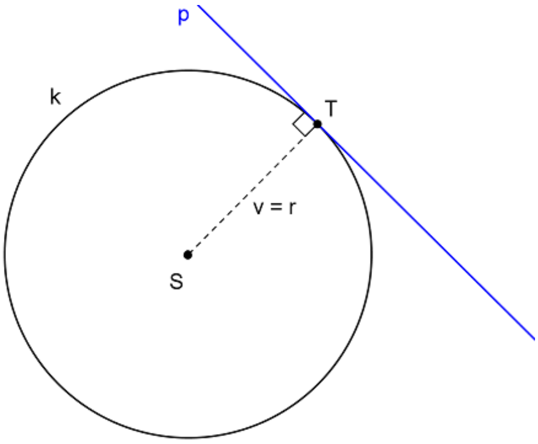
Nemá-li přímka *p* s kružnicí *k* žádný společný bod, pak je přímka *p* vnější přímkou kružnice *k*.

Vzájemnou polohu přímky p a kružnice k lze rozpoznat podle vzdálenosti středu kružnice od přímky. Vzdálenost přímky *p* od středu *S* kružnice *k* označíme *v*.

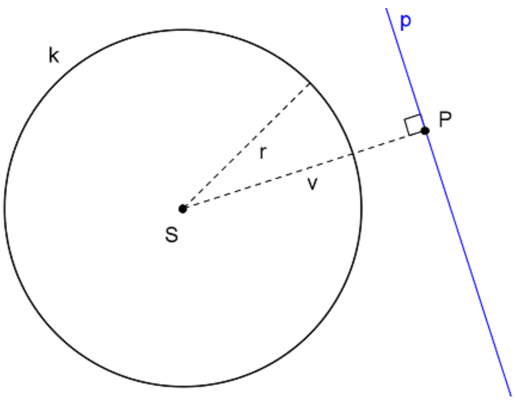
a) Pokud je $v < r$, pak je přímka *p* sečnou kružnice *k*.
b) Pokud je $v = r$, pak je přímka *p* tečnou kružnice *k*.
c) Pokud je $v > r$, pak je přímka *p* vnější přímkou kružnice *k*.



Obrázek 4 - Sečna kružnice



Obrázek 5 - Tečna kružnice



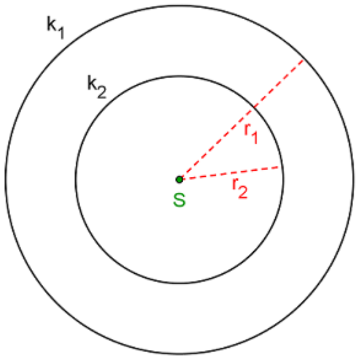
Obrázek 6 - Vnější přímka kružnice

2.3. Vzájemná poloha dvou kružnic

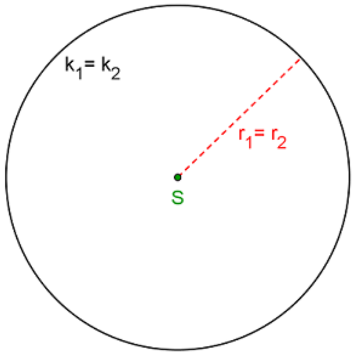
Dvě kružnice, které jsou různé, mohou mít nejvýše dva body společné.

Mohou nastat tyto případy:

Dvě kružnice (k_1, k_2), které mají společný střed S a různé poloměry (r_1, r_2), nazýváme soustřednými kružnicemi. Pokud by kružnice k_1, k_2 měly stejné poloměry $(r_1 = r_2)$, pak se jedná o kružnice totožné.

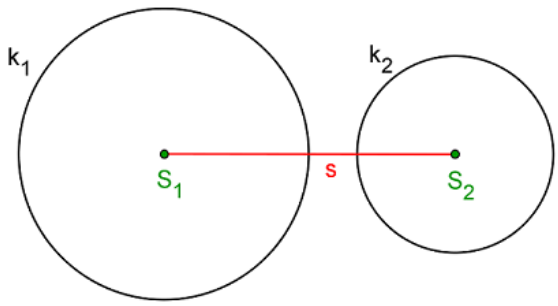


Obrázek 7- Soustředné kružnice



Obrázek 8 - Totožné kružnice

Pokud nemají společný střed (S_1, S_2), nazýváme je nesoustřednými kružnicemi. Spojnicí středů S_1 a S_2 je úsečka, kde krajními body jsou středy S_1 a S_2. Úsečce, kde krajními body jsou středy S_1 a S_2, se říká středná dvou kružnic $k_1(S_1;\ r_1)$ a $k_2(S_2;\ r_2)$.



Obrázek 9 – Středná kružnic

U nesoustředných kružnic může nastat více případů:

Střednu dvou nesoustředných kružnic $k_1(S_1;\ r_1)$ a $k_2(S_2;\ r_2)$ označíme s, kde $r_1 \leq r_2$.

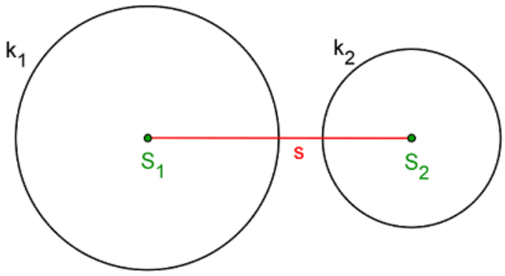
1) Kružnice k_1 leží ve vnější části k_2, to stejné platí i naopak, pokud $s > r_1 + r_2$,

2) pro vnější dotyk kružnic k_1, k_2 platí, pokud $s = r_1 + r_2$,

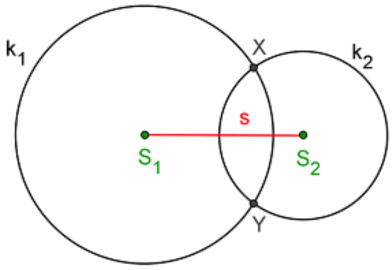
3) kružnice k_1, k_2 se protínají, pokud $r_1 - r_2 < s < r_1 + r_2$,

4) pro vnitřní dotyk kružnic k_1, k_2 platí, pokud $s = r_1 - r_2 > 0$

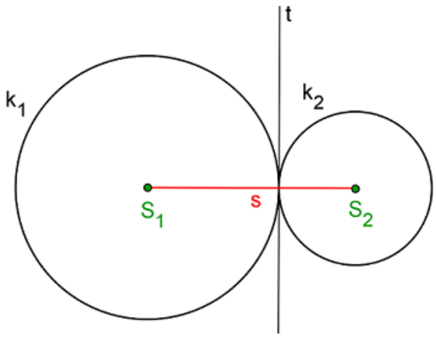
5) kružnice k_2 leží ve vnitřní části kružnice k_1, pokud $s < r_1 - r_2$.



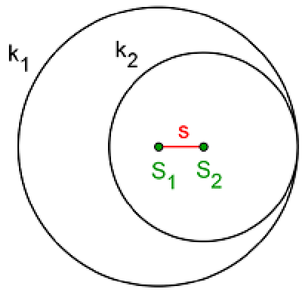
Obrázek 10 - Kružnice k_2 leží vně kružnice k_1



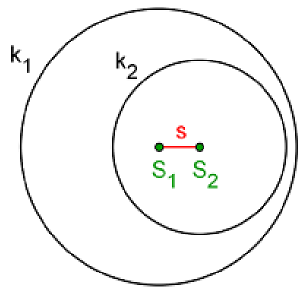
Obrázek 11 - kružnice se protínají ve dvou bodech



Obrázek 12 - Vnější dotyk kružnic



Obrázek 13 - Vnitřní dotyk kružnic



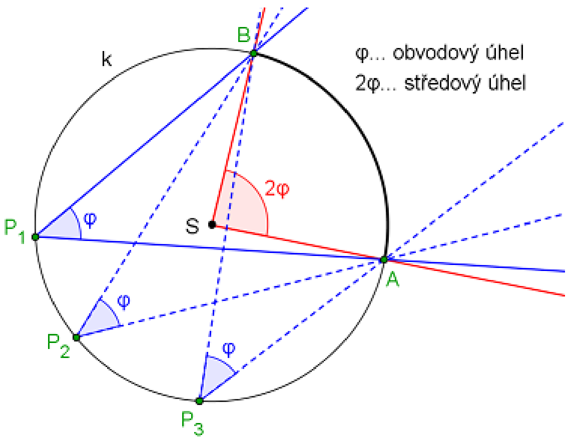
Obrázek 14 - Kružnice k_2 leží uvnitř kružnice k_1

2.4. Obvodový a středový úhel

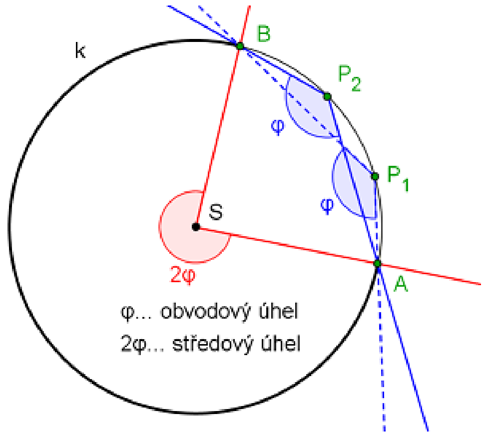
Abychom mohli určit obvodový a středový úhel, je třeba zvolit si na kružnici $k(S; r)$ tři různé body *A*, *B*, *P*. Úhlu *APB*, kde *P* je vrchol úhlu a polopřímky *VA*, *VB* jsou ramena úhlu, říkáme obvodový úhel příslušný k tomu oblouku *AB* kružnice *k*, který leží v tomto úhlu. Úhlu *ASB*, kde vrcholem je střed *S* kružnice *k* a polopřímky *VA*, *VB* jsou ramena úhlu, říkáme středový úhel příslušný k tomu oblouku *AB* kružnice *k*, který leží v tomto úhlu.

Kružnice má pouze jeden střed a proto středový úhel příslušného kruhového oblouku je také jeden. Kruhový oblouk má nekonečně mnoho obvodových úhlů, protože bodů ležících na kružnici je nekonečně mnoho.

Pro středový úhel příslušného oblouku platí, že je dvojnásobkem úhlu obvodového.



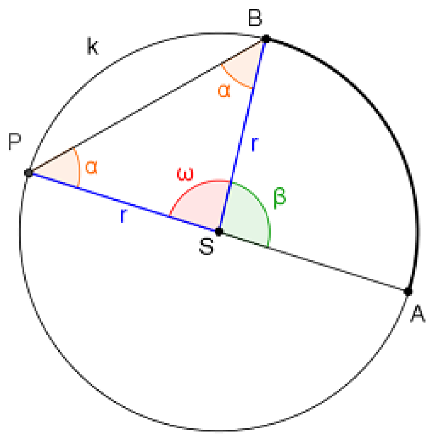
Obrázek 15 - Obvodový a středový úhel menšího kruhového oblouku



Obrázek 16 - Obvodový a středový úhel většího kruhového oblouku

Důkaz

a) Nejdříve využijeme speciálního případu, že střed *S* leží na jednom rameni obvodového úhlu *APB*. Body *A*, *P*, *B* leží na kružnici *k*. Vzdálenosti mezi body ležícími na kružnici a středem *S* je stejná, označíme ji *r*. Využijeme rovnoramenného trojúhelníku *BPS*, kde úhly *SPB* a *PBS* jsou shodné, ty označíme α. Úhel *ASB* označíme β a úhel *PSB* označíme ω.



Obrázek 17 - Střed *S* leží na rameni

V trojúhelníku platí: $\alpha + \alpha + \omega = 180°$. Ze vzorce vyjádříme ω.

$$\omega = 180° - 2\alpha$$

Dále víme, že úhel *ASP* je úhel přímý.

$$\omega + \beta = 180°$$

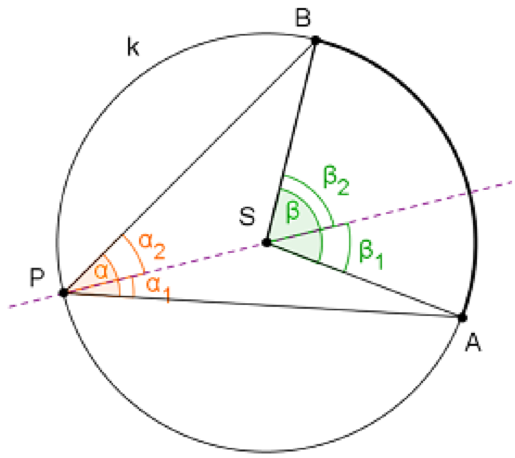
Vyjádříme β a dosadíme.

$$\beta = 180° - \omega \Rightarrow \beta = 180° - (180° - 2\alpha)$$

$$\Rightarrow \beta = 2\alpha$$

Pro speciální případ máme dokázáno.

b) Kruhový oblouk má nekonečně mnoho obvodových úhlů. Využijeme takový obvodový úhel, aby střed *S* kružnice *k* byl uvnitř obvodového úhlu *APS*. Nejdříve si tento případ upravíme na speciální a to tak, že body *P*, *S* vedeme přímku, která nám původní obvodový úhel rozdělí na dvě části, kde střed S kružnice k leží na společném rameni nových obvodových úhlů, které vznikly.



Obrázek 18 - Střed *S* leží uvnitř obvodového úhlu

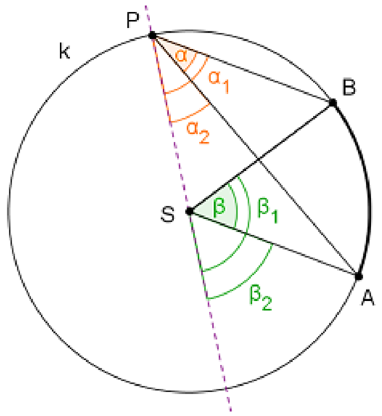
Z předchozí části už víme:

$$\beta_1 = 2\alpha_1,$$
$$\beta_2 = 2\alpha_2.$$

Jelikož $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ a $\beta = \beta_1 + \beta_2$, tak $\beta = \beta_1 + \beta_2 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 2\alpha$.

Máme opět dokázáno.

c) Už zbývá jen případ, kdy střed *S* neleží uvnitř obvodového úhlu *APB*. Opět si pomůžeme přímkou, která prochází body *P*, *S* a vzniknou nám nové obvodové a středové úhly. Obvodové úhly mají i v tomto případě společné rameno, na kterém leží střed *S*.



Obrázek 19 - Střed S neleží uvnitř obvodového úhlu

Můžeme opět napsat:

$$\beta_1 = 2\alpha_1,$$
$$\beta_2 = 2\alpha_2.$$

V tomto případě pro obvodové a středové úhly platí: $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$ a $\beta = \beta_1 - \beta_2$.
Opět dosadíme a dostaneme $\beta = \beta_1 - \beta_2 = 2\alpha_1 - 2\alpha_2 = 2\alpha$.
I tomto případě máme dokázáno.

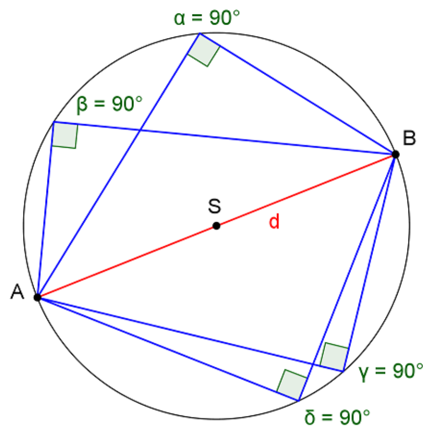
Tímto jsme dokázali, že středový úhel příslušného oblouku je dvojnásobkem obvodového úhlu, protože žádné jiné umístění bodu *P* pro tento kruhový oblouk neexistuje.

Z předchozího důkazu můžeme napsat tyto důsledky:

- Všechny obvodové úhly příslušného oblouku jsou shodné.
- Obvodový úhel je ostrý, pokud je příslušný k menšímu kruhovému oblouku.
- Obvodový úhel je tupý, pokud je příslušný k většímu kruhovému oblouku.
- Obvodový úhel, který je příslušný k půlkružnici, je úhel pravý.

Thaletova věta

Všechny obvodové úhly, které jsou sestrojené nad průměrem kružnice *k*, jsou pravé.

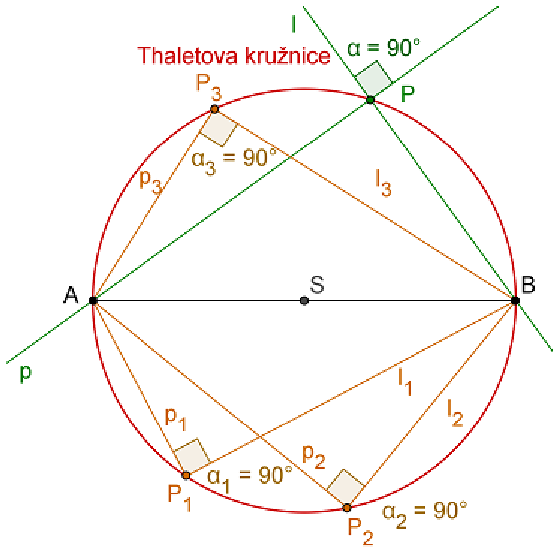


Obrázek 20 - Thaletova věta

Příklad: Je dána úsečka *AB*. Nad úsečkou *AB* je sestrojen pravý úhel *APB*. Jakou množinu tyto pravé úhly vytvářejí?

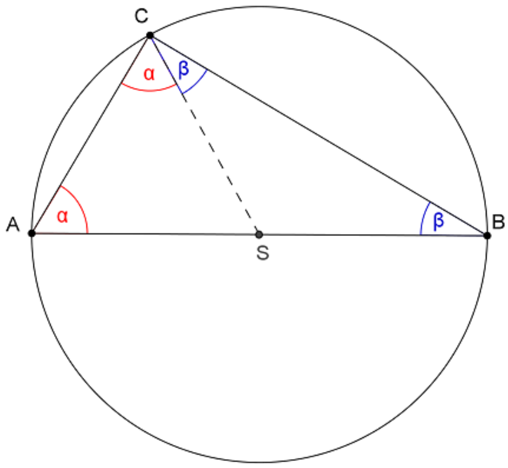
Konstrukce:

Nejdříve sestrojíme úsečku *AB*, bodem *A* vedeme libovolnou přímku *p*. Dále z bodu *B* sestrojíme kolmici *l* na přímku *p*. Průsečík přímky *p* a *l* nazveme bodem *P*, který bude vrcholem pravého úhlu *APB*. Úhel *APB* není jediný pravý úhel, který lze sestrojit. Pravý úhel je závislý na volbě přímky *p* procházející bodem *A*. Při změně polohy přímky *p* dostaneme další pravé úhly. Množinou pravých úhlů nad průměrem *AB* je kružnice – tzv. Thaletova kružnice.



Obrázek 21 - Thaletova kružnice

Thaletova věta: Obvodový úhel kružnice, který je sestrojený nad jejím průměrem, je vždy pravý.



Obrázek 22 - Důkaz

Důkaz:

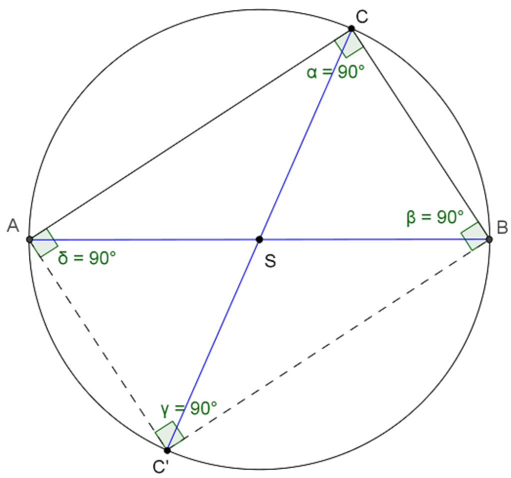
Na obrázku máme dva rovnoramenné trojúhelníky a to ASC, SBC, pro které platí:

$$2\alpha + 2\beta = 180°.$$

Vytkneme ($2(\alpha + \beta) = 180°$) a upravíme, pak dostaneme:

$$\alpha + \beta = 90°.$$

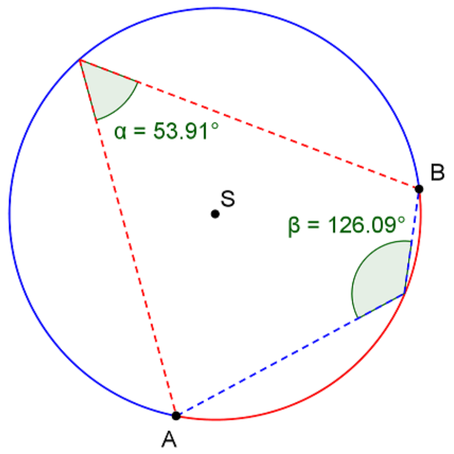
Jiný důkaz:



Obrázek 23 - Důkaz

Pomocí středové souměrnosti sestrojíme středově souměrný bod bodu *C* podle středu *S* a dostaneme bod *C´*. Vznikl nám čtyřúhelník *ACBC´*, jehož úhlopříčky *AB*, *CC´* jsou stejně dlouhé, délka úhlopříček je průměr Thaletovy kružnice. Čtyřúhelník je pravoúhlý, musí být úhel *ACB* také pravý.

Pokud sečteme obvodové úhly, které jsou příslušné k oběma kružnicovým obloukům *AB*, pak dostaneme úhel přímý.

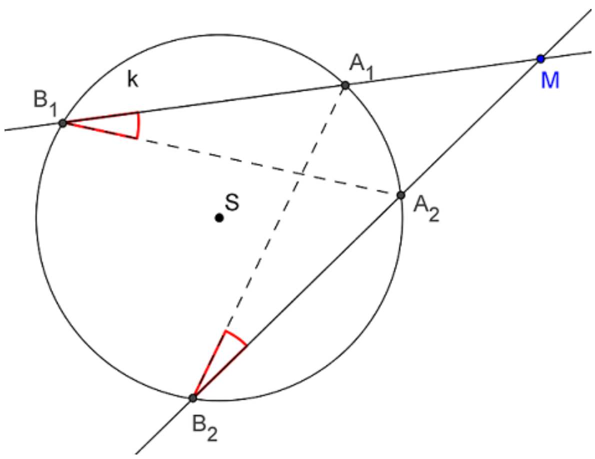


Obrázek 24 - Součet obvodových úhlů

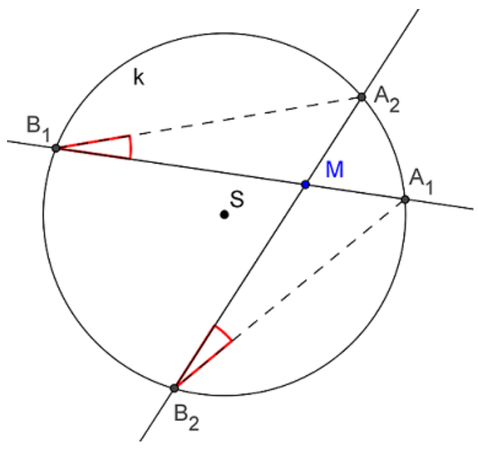
2.5. Mocnost bodu ke kružnici

Máme kružnici *k* a bod *M*, který leží vně kružnice. Vedeme dvě libovolné sečny, které procházejí bodem *M*. Průsečíky sečen a kružnice *k* označíme písmeny A_1, B_1 a A_2, B_2. Pro bod *M* a průsečíky A_1, A_2, B_1, B_2 platí:

$$|MA_1| \cdot |MB_1| = |MA_2| \cdot |MB_2|.$$



Obrázek 25 - Bod M je vně kružnice



Obrázek 26 - Bod M uvnitř kružnice

Důkaz

Úhly MB_1A_2 a MB_2A_1 jsou shodnými úhly, protože to jsou obvodové úhly příslušné k menšímu oblouku A_1A_2. Dále si můžeme všimnout, že společným úhlem v trojúhelnících MA_1B_2 a MA_2B_1 je úhel A_1MA_2. Podle věty *uu* jsou tyto trojúhelníky podobné a z této podobnosti vyplývá:

$$|MA_1|:|MB_2| = |MA_2|:|MB_1|.$$

Když předchozí vztah přepíšeme, dostaneme:

$$|MA_1| \cdot |MB_1| = |MA_2| \cdot |MB_2|.$$

A je tedy dokázáno.

Pokud bude bod M ležet uvnitř kružnice k, lze na to jít stejným způsobem.

Lze tedy napsat, že pro libovolnou sečnu kružnice k, kde A_1, A_2 jsou průsečíky sečny a kružnice k, platí pro součin $|MA_1| \cdot |MB_1| = konstanta$.

Pokud bod M je bodem kružnice k, pak pro něj platí součin $|MA_1| \cdot |MB_1| = 0$. Proto lze napsat:

K libovolnému bodu M roviny můžeme přidělit reálné číslo m, pro které platí:

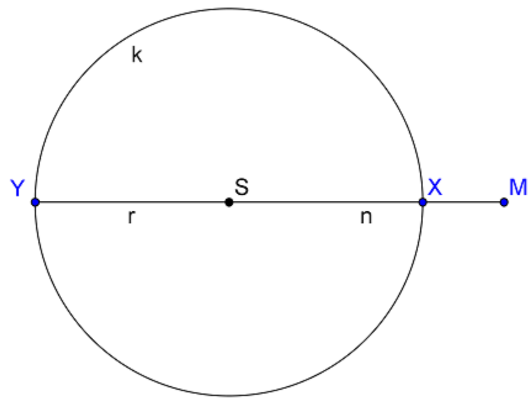
$$|m| = |MX| \cdot |MY|,$$

body X, Y jsou průsečíky libovolné sečny, která prochází bodem M a kružnice k.

Pro reálné číslo m mohou nastat tyto případy:

1. pokud $m > 0$, pak bod M leží vně kružnice k;
2. nastane-li $m = 0$, pak je bod M bodem kružnice k;
3. když $m < 0$, tak bod M leží uvnitř kružnice k.

Mocností bodu M ke kružnici k je označováno reálné číslo m.



Obrázek 27 - Mocnost bodu ke kružnici

Pokud si vzdálenost mezi bodem *M* a středem *S* označíme n $(v \geq 0)$, pak lze napsat, že pro mocnost *m* platí

$$m = n^2 - r^2.$$

Důkaz:

Řekneme si, že součin $|MX| \cdot |MY| = konstantní$. Důkaz ukážeme na sečně, kterou vedeme bodem *M* ležící vně kružnice *k* a středem *S* kružnice *k*. Pro vzdálenosti *MX* a *MY* platí $|MX| = n - r$, $|MY| = n + r$, které dosadíme do $|m| = |MX| \cdot |MY|$ a dostaneme $|m| = (n - r) \cdot (n + r) = n^2 - r^2$. Jelikož je bod *M* bodem ležící vně kružnice *k*, je $m > 0$, pak lze napsat $|m| = 0$ tedy $m = n^2 - r^2$.

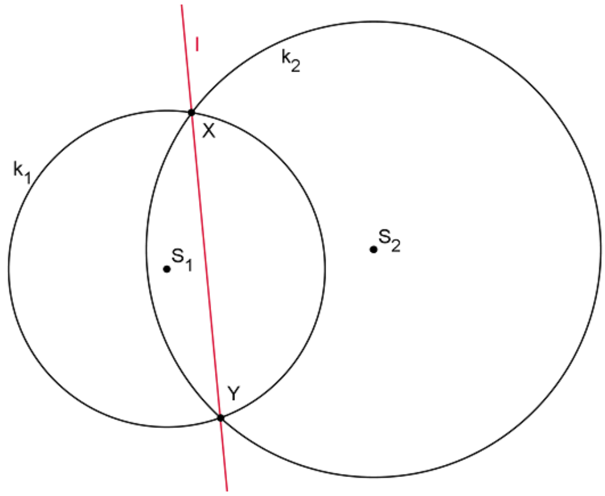
Je tedy jasné, díky vzdálenosti n, že pokud body leží uvnitř kružnice, pak $m < 0$ $(n < r)$, pro body ležící vně kružnice platí $m > 0$ $(n > r)$ a pro body kružnice platí $m = 0$ $(v = r)$.

Chordála kružnic

Chordála dvou kružnic je množinou všech bodů, které mají stejnou mocnost k oběma kružnicím. Tyto kružnice musí být nesoustředné $k_1(S_1, r_1)$, $k_2(S_2, r_2)$. Chordálu kružnic k_1, k_2 označíme písmenem *l*, která je kolmá na střednu *s* $(s = S_1S_2)$.

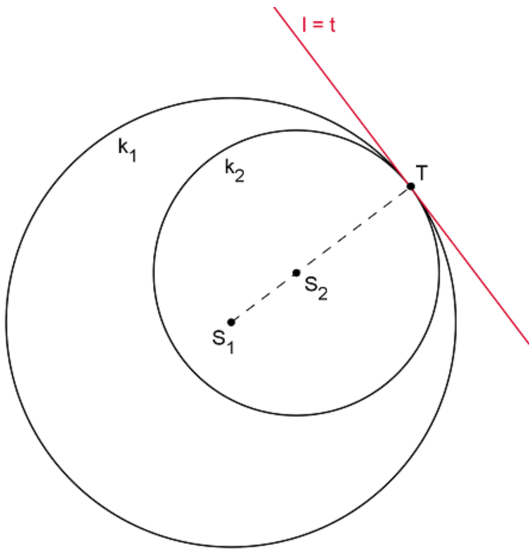
Mohou nastat tyto případy:

1. Kružnice k_1, k_2 mají dva společné body X, Y, které mají stejnou mocnost ($m = 0$), jak ke kružnici k_1, tak ke kružnici k_2, pak chordálou je $l = XY$.



Obrázek 28 - Chordála - kružnice mají dva společné body

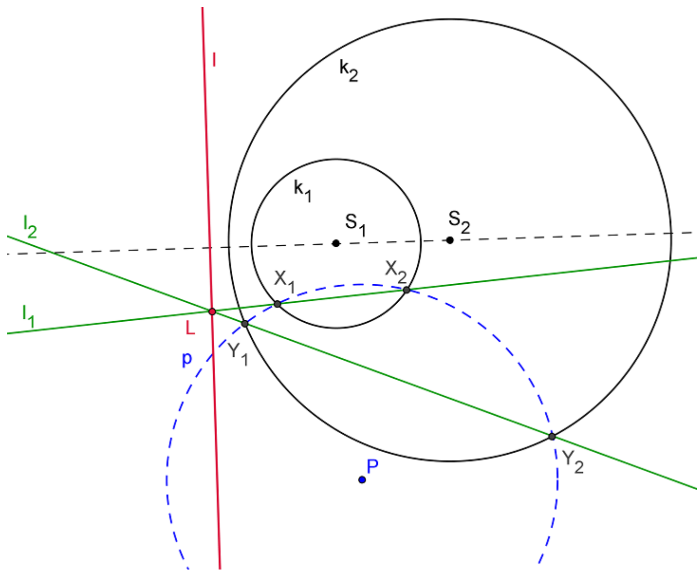
2. Kružnice k_1, k_2 mají jeden společný bod T, který je dotykovým bodem těchto kružnic. Bod T má ke kružnici k_1 a ke kružnici k_2 stejnou mocnost ($m = 0$). Chordálou kružnic k_1, k_2 s dotykovým bodem T je tečna v bodě T.



Obrázek 29 - Chordála - Kružnice s dotykovým bodem

3. Poslední možností jsou kružnice k_1, k_2, které nemají společný bod. Abychom mohli určit chordálu, je třeba si zvolit pomocnou kružnici p, která bude protínat kružnice k_1, k_2 v bodech X_1, X_2, Y_1, Y_2. Body X_1, X_2, Y_1, Y_2 vedeme přímky l_1, l_2. Přímka l_1 je chordálou kružnic p, k_1 a přímka l_2 je chordálou kružnic p, k_2. Průsečík přímek l_1, l_2 je bod L, který má k oběma kružnicím

stejnou mocnost. Bod L je potenčním bodem. Pokud bodem L povedeme kolmici na přímku procházející středy S_1, S_2, dostaneme chordálu kružnic k_1, k_2.



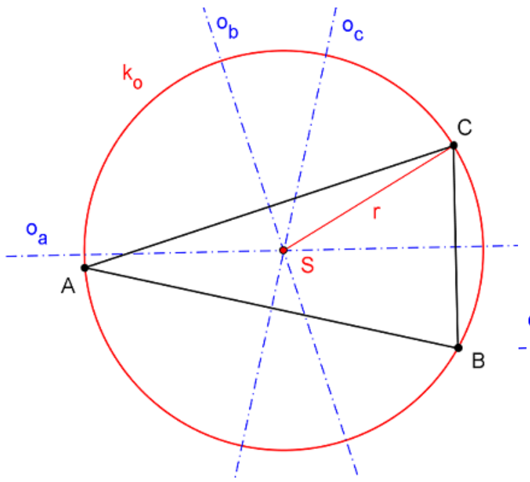
Obrázek 30 - Chordála - Kružnice nemají společný bod

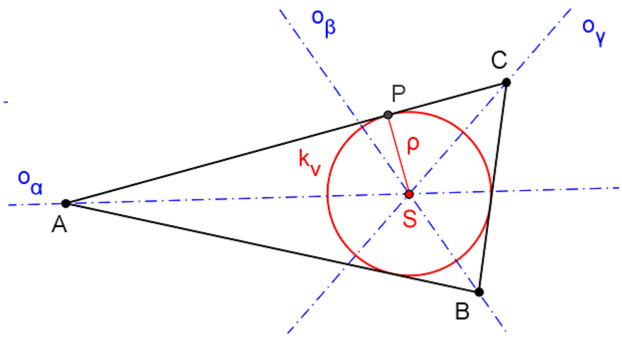
2.6. Kružnice a trojúhelník

Pro každý trojúhelník lze sestrojit kružnici opsanou a kružnici vepsanou.

O kružnici opsané mluvíme, pokud všechny vrcholy trojúhelníku leží na kružnici. Pokud sestrojíme osy stran trojúhelníku, tak se osy stran trojúhelníka protnou v jednom bodě. Průsečíkem os stran trojúhelníku je střed S kružnice opsané a její poloměr se označuje r ($r = |SX|$, kde S je střed kružnice a bod X je vrcholem trojúhelníku).

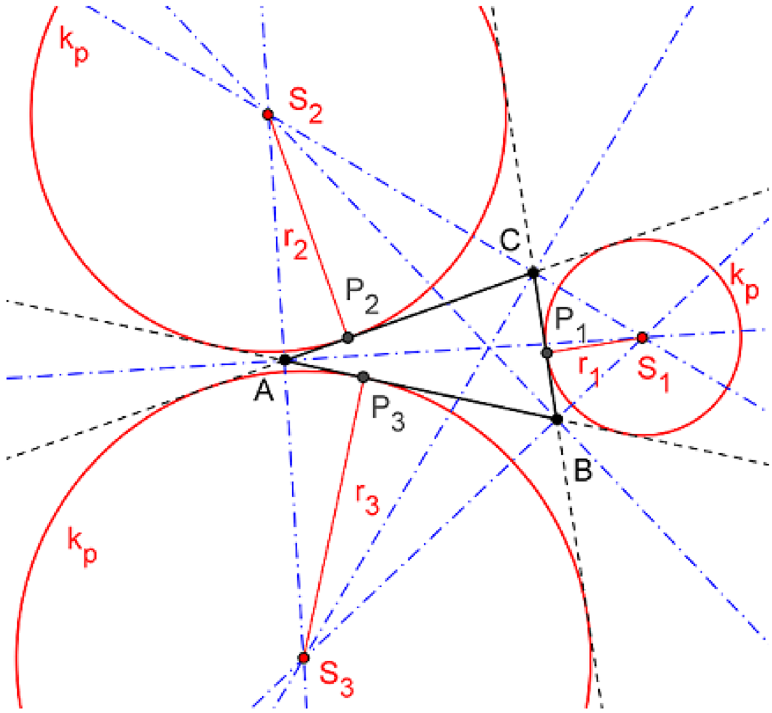
Kružnice, která se dotýká všech stran trojúhelníka, se nazývá kružnice vepsaná trojúhelníku. Střed S kružnice vepsané dostaneme sestrojením os vnitřních úhlů trojúhelníku. Osy vnitřních úhlů se protnou v jednom bodě. Průsečíkem os vnitřních úhlů v trojúhelníku je právě střed S kružnice vepsané a její poloměr se označuje ρ ($\rho = |SP|$, kde S je střed kružnice a P je pata kolmice na stranu trojúhelníku procházející středem S).





Obrázek 31 - Trojúhelník a kružnice vepsaná **Obrázek 32 - Trojúhelník a kružnice opsaná**

Kružnice, která se dotýká jedné strany trojúhelníku a přímek, ve kterých leží zbývající strany trojúhelníka, se nazývají připsané kružnice. Střed *S* kružnice připsané dostaneme sestrojením os vnitřních a vnějších úhlů trojúhelníku. Průsečíkem osy příslušného vnitřního úhlu a os dvou vnějších úhlů, které v trojúhelníků zbývají, jsou středy připsaných kružnic.

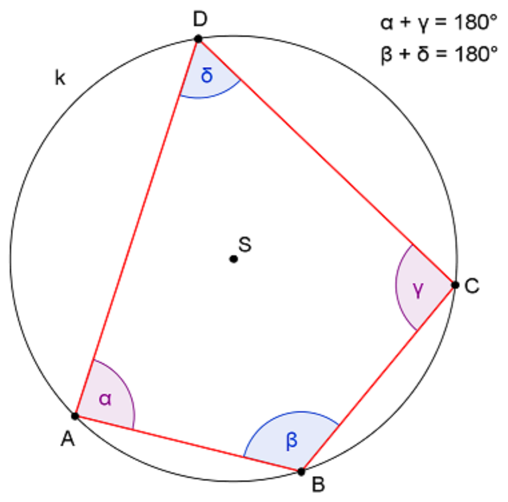


Obrázek 33 - Trojúhelník a kružnice připsané

2.7. Kružnice a čtyřúhelník

3.7.1. Tětivový čtyřúhelník

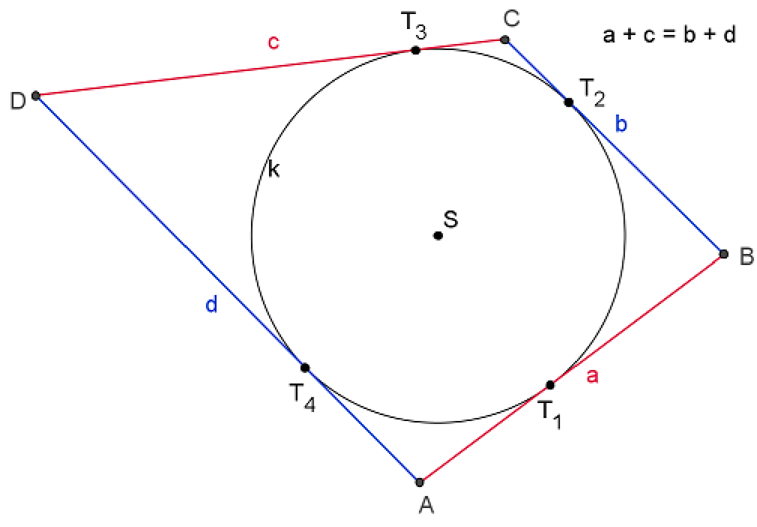
Tětivový čtyřúhelník je takový čtyřúhelník, kterému lze opsat kružnici *k*. Strany tohoto čtyřúhelníku jsou tětivami kružnice *k*. Pro tětivový čtyřúhelník platí, že součty protějších vnitřních úhlů jsou rovny přímému úhlu.



Obrázek 34 - Tětivový čtyřúhelník

3.7.2. Tečnový čtyřúhelník

Tečnový čtyřúhelník je takový čtyřúhelník, kterému lze vepsat kružnici *k*. Strany tohoto čtyřúhelníku jsou tečnami kružnice *k*. Pro tečnový čtyřúhelník platí, že součty protějších stran jsou si rovny.

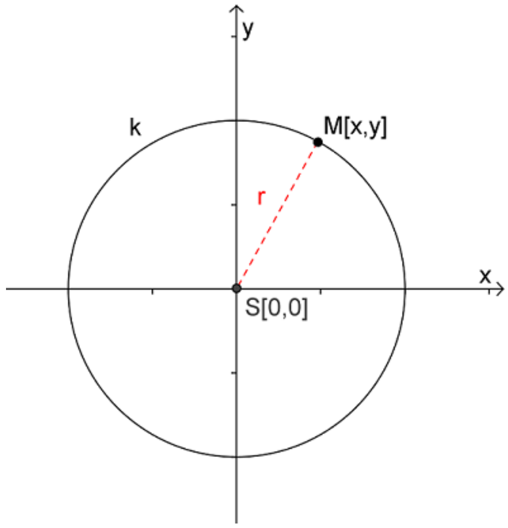


Obrázek 35 - Tečnový čtyřúhelník

2.8. Analytické vyjádření kružnice

Pokud umístíme kružnici k se středem S do počátku kartézské soustavy souřadnic, o poloměrem $r > 0$, dostaneme množinu všech bodů roviny, které mají od středu S konstantní vzdálenost r.

Rovnici kružnice můžeme odvodit pomocí vzdálenosti dvou bodů a to pomocí středu $S = [0,0]$ a libovolného bodu $M[x,y]$, který leží na kružnici.



Obrázek 36 - rovnice kružnice, S je v počátku

Vzdálenost bodů $|SM| = r$ a platí:

$$|SM|^2 = (x-0)^2 + (y-0)^2 = r^2.$$

Přepíšeme

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 = r^2$$

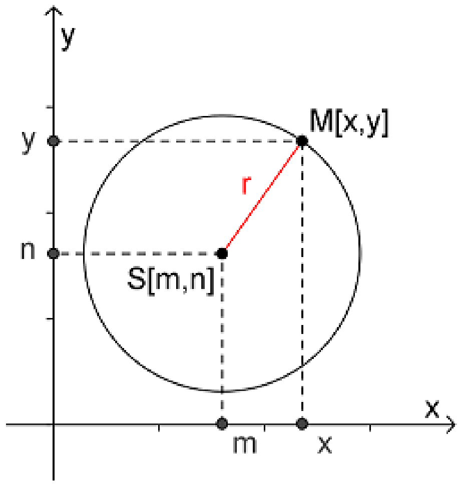
a umocníme

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Dostali jsme rovnici kružnice se středem v počátku kartézské soustavy souřadnic.

Středový tvar rovnice kružnice

Zvolíme si kartézskou soustavu souřadnic, kde libovolný bod *M* bude mít souřadnice *x*, *y* a střed *S* souřadnice *m*, *n*.



Obrázek 37 - Středový tvar rovnice kružnice

Pro kružnici se středem $S = [m, n]$ a poloměru r>0, platí rovnice:

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$$

Rovnici můžeme opět odvodit pomocí vzdálenosti dvou bodů a to pomocí středu $S = [m, n]$ a libovolného bodu $M[x, y]$, který leží na kružnici.

Vzdálenost bodů $|SM| = r$ a platí:

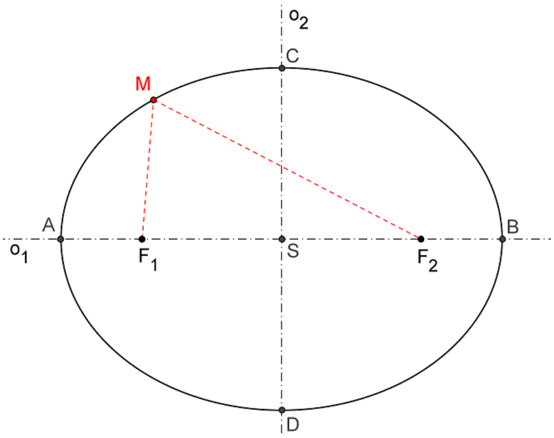
$$|SM|^2 = (x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2.$$

Přepíšeme a máme rovnici pro středovou kružnici:

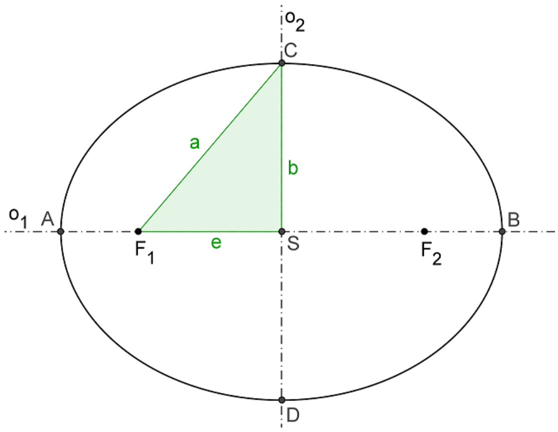
$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2.$$

3. Elipsa

Definice: Elipsa je množina bodů v rovině, jejíchž součet vzdáleností od dvou daných pevných bodů F_1, F_2 je konstantní, [1].



Obrázek 38 - Průvodiče bodu



Obrázek 39 - Základní vlastnosti

Věta: Elipsa má dvě osy souměrnosti o_1 a o_2 a je středově souměrná podle jejich průsečíku S, [2].

Bod S je středem elipsy. Elipsa má dvě osy, ty jsou označeny o_1 a o_2. Osa o_1 je hlavní osa elipsy a o_2 je vedlejší osa elipsy. Jelikož má elipsa střed S, jedná se o středovou kuželosečku.

Elipsa má vrcholy, které jsou označeny písmeny A, B, C, D. Body, které leží na hlavní ose o_1 elipsy, tedy body A, B, jsou hlavními body elipsy. Na vedlejší ose o_2 leží vedlejší vrcholy elipsy, kterými jsou body C, D. Střed úsečky AB, je středem S elipsy, tedy platí $|AS| = |BS| = a$, kde a je velikost hlavní poloosy. To samé platí i pro druhou úsečku CD, tedy $|CS| = |DS| = b$, kde b značí velikost vedlejší poloosy. Ohniska elipsy jsou body F_1, F_2. Vzdálenosti mezi středem S a ohniskem se říká excentricita elipsy, která je označena písmenem e. V obrázku si můžeme všimnout trojúhelníku SF_1C, který je pravoúhlý a platí tedy pro něj Pythagorova věta, pomocí které lze určit velikost excentricity e.

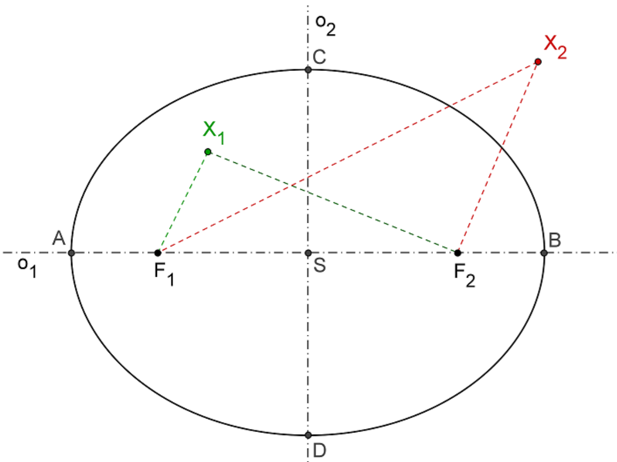
$$e^2 = a^2 - b^2$$

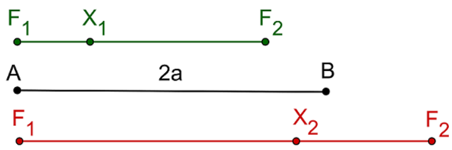
Pokud spojíme libovolný bod *M* s ohnisky F_1, F_2, pak tyto spojnice nazveme průvodiči bodu *M*, pro které platí:

$$|F_1M| + |MF_2| = 2a.$$

Může nastat i situace, kdy ze dvou ohnisek se stane jedno a kuželosečkou bude kružnice, pro kterou platí že $a = b$, tedy excentricita $e = 0$.

Body nemusí vždy ležet na elipse, ale i uvnitř nebo ve vnější části elipsy. Pro bod X_1, který leží ve vnitřní části elipsy, platí: $|F_1X_1| + |X_1F_2| < 2a$. Bod X_1 nazveme vnitřním bodem elipsy. Příkladem vnitřních bodů jsou ohniska F_1, F_2. Pokud bod X_2 leží ve vnější části elipsy, pak pro něj platí: $|F_1X_2| + |X_2F_2| > 2a$. Bod X_2 nazveme vnějším bodem elipsy.

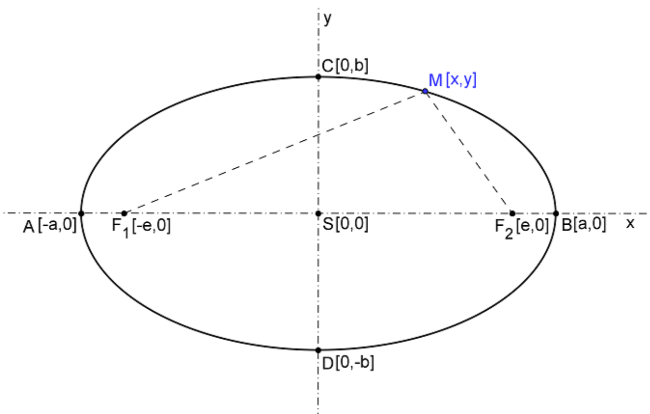




Obrázek 40 - Vnější a vnitřní bod elipsy

3.1. Rovnice elipsy

K odvození rovnice elipsy je třeba zvolit si kartézskou soustavu souřadnic tak, aby $F_1 = [-e, 0]$ a $F_2 = [e, 0]$.



Obrázek 41 - Rovnice elipsy

Dále si zvolíme bod M, který je libovolným bodem elipsy o souřadnicích $M = [x, y]$. Pro bod M platí následující:

$$|F_1M| + |MF_2| = 2a.$$

Tuto rovnici rozepíšeme a dostaneme:

$$\sqrt{(e+x)^2 + y^2} + \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 2a.$$

Postupným upravováním rovnice dostáváme:

$$\sqrt{(e+x)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-e)^2 + y^2}$$

$$(e+x)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-e)^2 + y^2} + (x-e)^2 + y^2$$

$$e^2 + 2ex + x^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-e)^2 + y^2} + x^2 - 2ex + e^2 + y^2$$

$$4a\sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 4a^2 - 4ex$$

$$a\sqrt{(x-e)^2 + y^2} = a^2 - ex$$

$$a^2(x-e)^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2ex + e^2x^2$$

$$a^2x^2 + 2a^2ex + a^2e^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2ex + e^2x^2$$

$$a^2x^2 + a^2e^2 + a^2y^2 = a^4 + e^2x^2$$

$$a^2x^2 - e^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2e^2$$

Dále si pomůžeme vztahem $a^2 - e^2 = b^2$.

Upravíme si rovnici $a^2x^2 - e^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2e^2$, abychom část rovnice mohli nahradit předchozím vztahem.

Připravená rovnice je $x^2(a^2 - e^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - e^2)$.

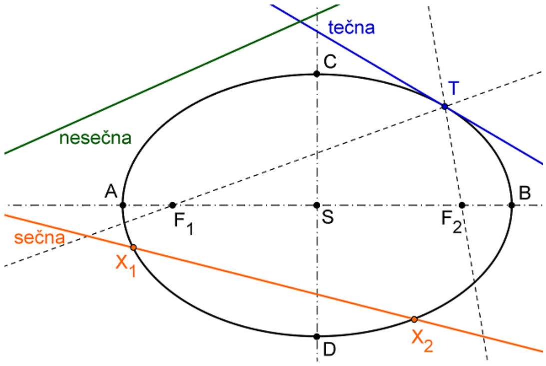
Po dosazení pomocného vztahu dostaneme rovnici $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

Provedeme poslední krok a dostaneme tvar obecné rovnice elipsy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

3.2. Vzájemná poloha přímky a elipsy

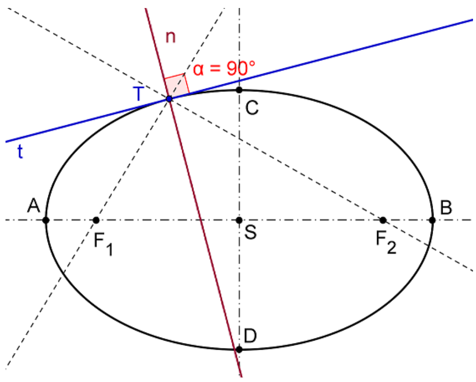
Pro vzájemnou polohu přímky a elipsy mohou nastat tři situace. Pokud má přímka *p* s elipsou dva různé společné body X_1, X_2, pak je přímka *p* sečnou elipsy, kde body X_1, X_2 jsou průsečíky. Dále přímka *p* může mít s elipsou jeden společný bod *T*, pak přímka *p* je tečnou elipsy, kde bod *T* je dotykovým bodem. Poslední situace nastane, pokud přímka *p* nemá s elipsou společný bod, pak přímka *p* se nazývá nesečnou.



Obrázek 32 - Vzájemná poloha přímky a elipsy

3.3. Tečna a normála elipsy

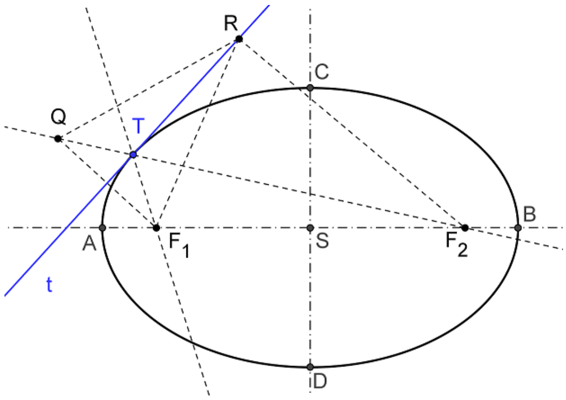
Věta: Tečna elipsy půlí vnější úhel průvodičů bodu dotyku T, [1].



Obrázek 43 - Tečna a normála

Důkaz:

Abychom dokázali, že tečna půlí vnější úhel průvodičů, pak je třeba zvolit si libovolný bod *T*, který bude bodem elipsy. Bodem *T* sestrojíme průvodiče TF_1, TF_2 a sestrojíme jejich osu, kterou nazveme osou *t*. Dále sestrojíme bod *Q*, který je souměrný podle přímky *t* k ohnisku F_1. Pro osovou souměrnost platí, že $|TF_1| = |TQ|$, pak musí platit i tento vztah $|F_2Q| = |F_2T| + |TQ| = |F_2T| + |TF_1| = 2a$. Zvolením libovolného bodu *R*, bod *R* náleží přímce t, který je různý od bodu X, jsme dostali trojúhelník RF_2Q, pro který platí $|RF_2| + |RQ| > |F_2Q| = 2a$. Díky osové souměrnosti ($|RQ| = |RF_2|$) můžeme upravit předchozí vztah na tento $|RF_2| + |RF_1| > 2a$, ze kterého je vidět, že bod T je jediným společným bodem přímky t s elipsou a ostatní body jsou vnějšími body elipsy. Přímka t je tečnou elipsy s dotykovým bodem T.

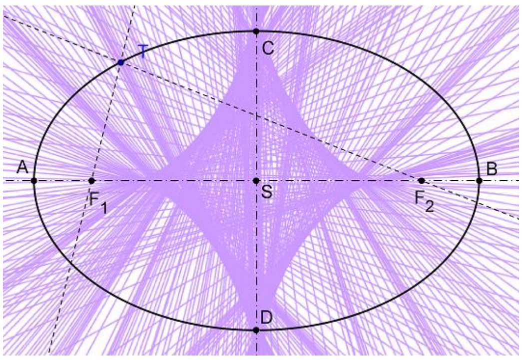


Obrázek 44 – Důkaz

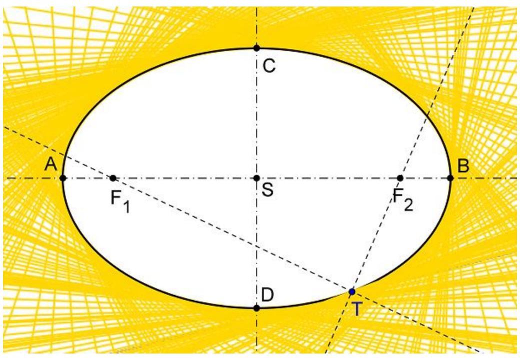
Věta: Normála elipsy půlí vnitřní úhel průvodičů bodu T, [1].

Přímka kolmá na tečnu t a procházející bodem T se nazývá normála n.

Pro elipsu platí, že elipsa je obalovou křivkou svých tečen. Obalovou křivkou normály je křivka, nazývající se evoluta elipsy. Evoluta elipsy je množinou středů křivosti elipsy, kde středy oskulačních kružnic ve vrcholech elipsy jsou jejími vrcholy. Bod evoluty lze sestrojit pomocí trojúhelníkové konstrukce elipsy.



Obrázek 45 - Obálka normál

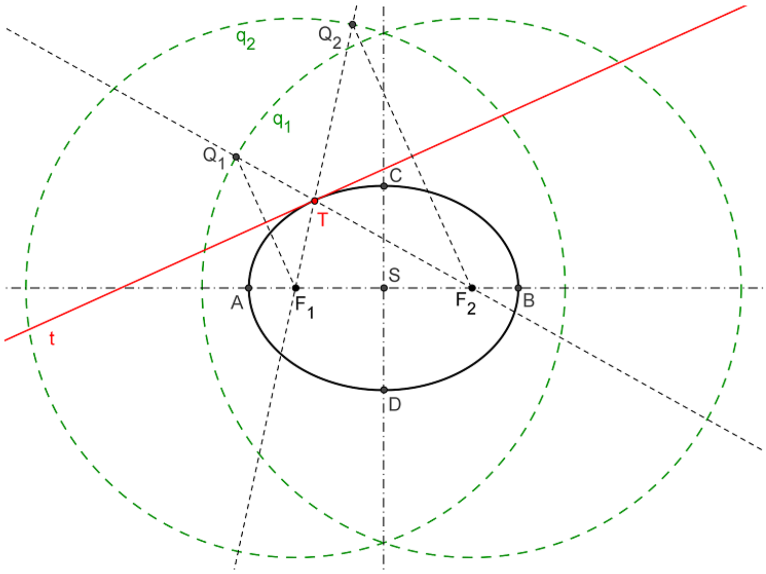


Obrázek 46 - Obálka tečen

3.4. Ohniskové vlastnosti elipsy

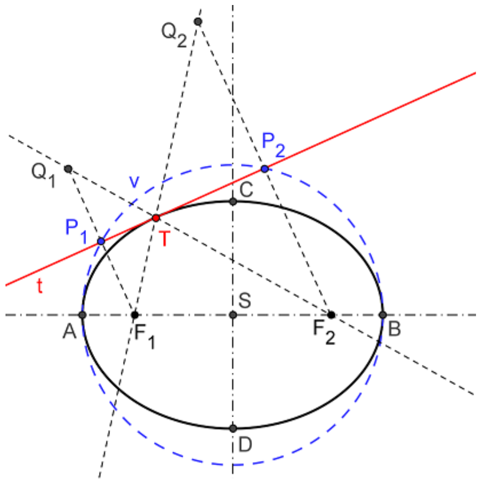
Věta: Množina bodů souměrných s jedním ohniskem elipsy podle všech tečen je kružnice se středem ve druhém ohnisku o poloměru *2a*, [1].

Body Q_1, Q_2 jsou body souměrné s ohnisky podle tečny *t*. S ohniskem F_1 je osově souměrný bod Q_2 a s ohniskem F_2 je osově souměrný bod Q_1, osou souměrnosti je tečna *t*. Kružnice q_1 se středem v ohnisku F_1 a poloměru *2a* je množinou všech bodů Q_1. Kružnice q_2 se středem v ohnisku F_2 a poloměru *2a* je množinou všech bodů Q_2. Kružnicím $q_1(F_1; 2a)$, $q_2(F_2; 2a)$ se říká řídící kružnice elipsy.



Obrázek 47 - Řídící kružnice elipsy

Věta: Množina pat kolmic spuštěných z ohnisek elipsy na její tečny je kružnice se středem ve středu elipsy o poloměru a, [1].



Obrázek 48

Kružnice mající střed ve středu elipsy o poloměr a, se nazývá vrcholová kružnice, kterou označíme písmenem *v*.

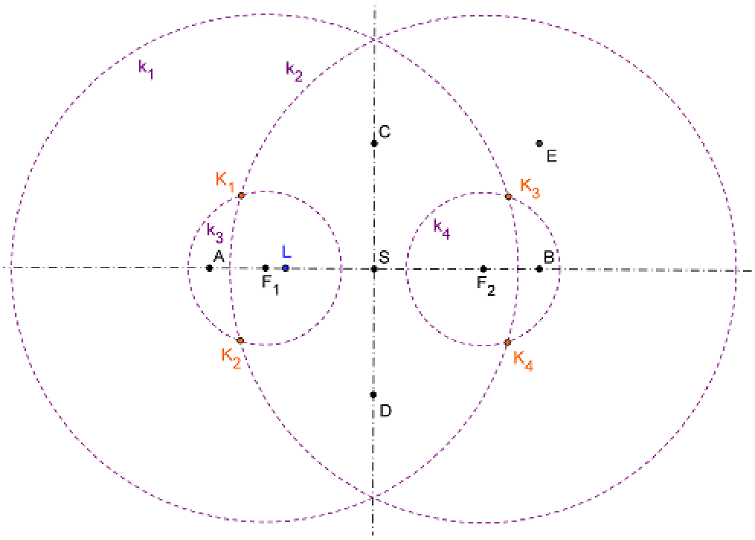
3.5. Konstrukce elipsy

4.5.1. Bodová konstrukce elipsy

Body ležící na elipse sestrojíme následovně. Sestrojíme si libovolný bod L, který bude pomocným bodem při konstrukci. Ohniska využijeme jako středy kružnic k_1, k_2, k_3, k_4, které budou mít poloměry $r_1 = |KA|$, $r_2 = |KB|$. Průsečíky kružnic $k1$, $k2$, $k3$, $k4$ nazveme body K_1, K_2, K_3, K_4. Zda body K_1, K_2, K_3, K_4 jsou body elipsy, ověříme následujícím způsobem:

$$|K_1F_1| + |K_1F_2| = |AH| + |HB| = |AB| = 2a,$$

z toho vyplývá, že bod K_1 je bodem elipsy.

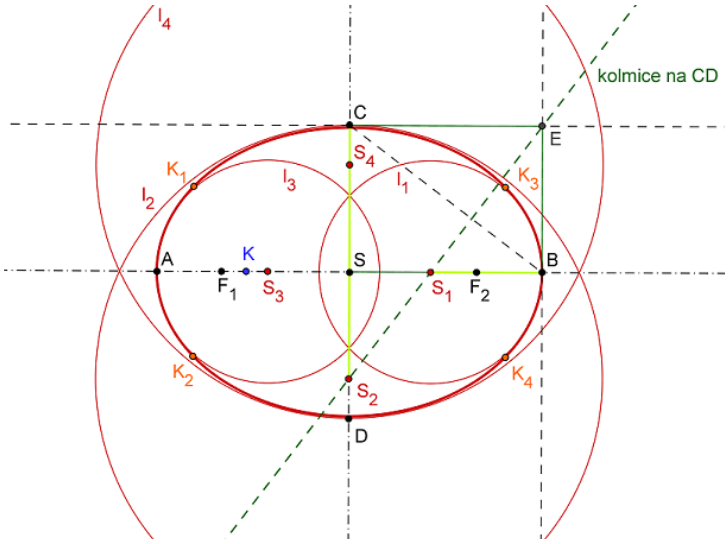


Obrázek 49 - Bodová konstrukce

Abychom vystihli, co nejpřesněji tvar elipsy, tak u vrcholů elipsy nahrazujeme její část oskulačními kružnicemi, které nám s tvarem elipsy pomohou.

Postup sestrojení oskulačních kružnic:

1. Body *B*, *S*, *C* využijeme k doplnění na obdélník *SBEC*.
2. Sestrojíme kolmici na úhlopříčku *BC*, která prochází bodem *E*.
3. V místech, kde protne kolmice hlavní a vedlejší poloosu, vzniknou body S_1, S_2.
4. Body S_1, S_2 jsou středy oskulačních kružnic l_1, l_2.

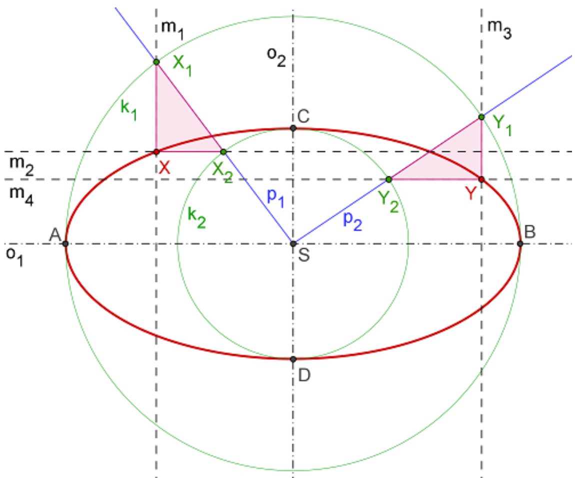


Obrázek 50 - Oskulační kružnice

4.5.2. Trojúhelníková konstrukce

U elipsy známe osy o_1, o_2, které jsou zadány velikostmi poloos a, b. Průsečíkem os o_1, o_2 je střed elipsy S.

Nejdříve sestrojíme kružnice k_1, k_2. Kružnice k_1 je hlavní vrcholovou kružnicí a její poloměr r_1 se rovná velikosti hlavní poloosy a. Kružnice k_2 je vedlejší vrcholovou kružnicí a její poloměr r_2 se rovná velikosti vedlejší poloosy b. Sestrojíme polopřímku p, která má počáteční bod ve středu S elipsy. Kde polopřímka p protne vrcholové kružnice, tak vzniknou body X_1, X_2. Bodem X_1 spustíme kolmici m_1, která je kolmá na osu o_1. Bodem X_2 spustíme kolmici m_2, která je kolmá na osu o_2. Průsečíkem m_1, m_2 je bod X, bod X je bodem elipsy.



Obrázek 51 - Trojúhelníková konstrukce

4.5.3. Proužková konstrukce elipsy

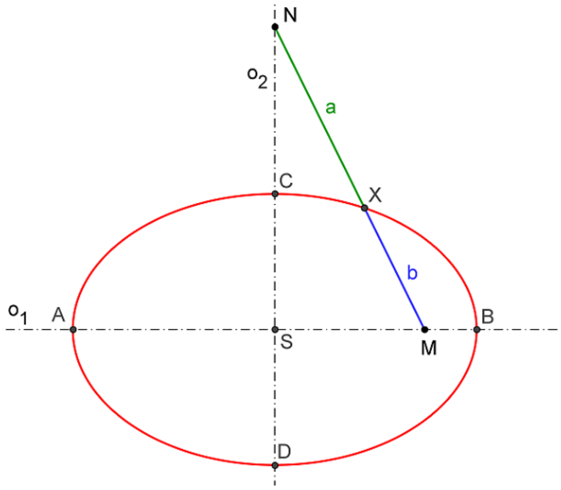
Pokud budeme chtít sestrojit elipsu pomocí proužkové konstrukce, lze ji sestrojit dvojím způsobem, protože existuje součtová konstrukce elipsy a rozdílová konstrukce elipsy. Princip proužkové elipsy vychází z toho, že na proužek papíru přeneseme velikosti hlavní a vedlejší poloosy elipsy.

Součtová konstrukce elipsy

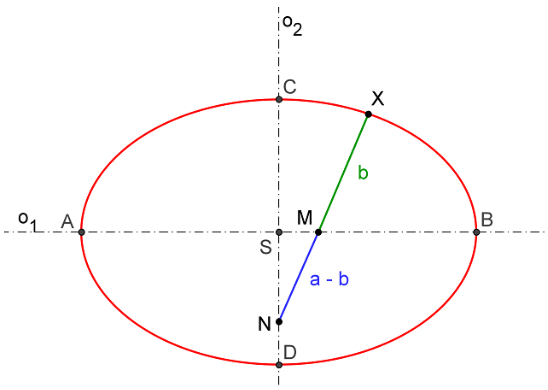
Jelikož se jedná o součtovou konstrukci elipsy, tak na proužek papíru naneseme součet hlavní a vedlejší poloosy. Tím dostaneme úsečku MN s velikostí $a + b$. Na úsečce se nachází bod X, který dělí úsečku MN v poměru $a : b$. Princip spočívá v tom, že proužek přiložíme na osy o_1, o_2. Na hlavní ose o_1 leží bod M a na vedlejší ose o_2 leží bod N. Pokud máme body správně umístěné, vyznačíme si na papír místo, kde se bod X nachází. Pohybem proužku bod X vykresluje elipsu.

Rozdílová konstrukce elipsy

Princip rozdílové konstrukce je podobný jako u součtové. Tentokrát ale na proužek papíru naneseme nejdříve velikost poloosy a, tím dostaneme úsečku XN, poté naneseme z bodu X velikost poloosy b, dostaneme společný průsečík M. Opět umístíme body tak, aby bod M ležel na hlavní ose o_1 a bod N ležel na vedlejší ose o_2. Na papír zaznamenáme bod X. Pohybem proužku dostaneme elipsu, kterou vykresluje bod X.



Obrázek 52 - Součtová konstrukce

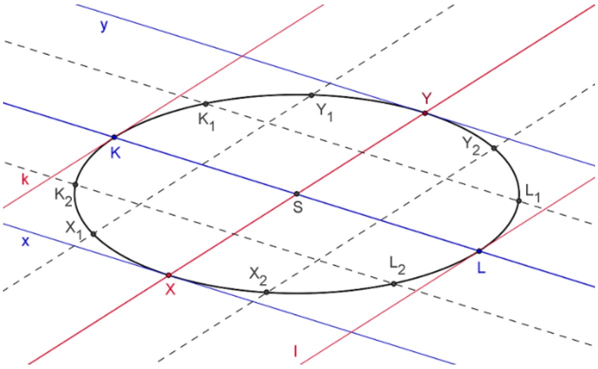


Obrázek 43 - Rozdílová konstrukce

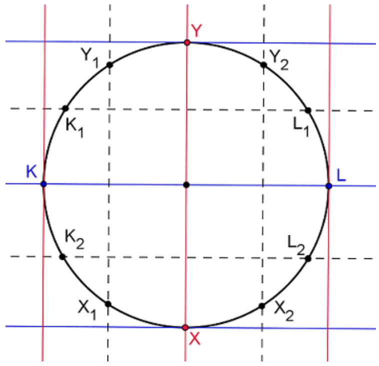
4.5.4. Rytzova konstrukce elipsy

Než začneme s Rytzovou konstrukcí je třeba si říct, co jsou sdružené průměry elipsy, protože v tato konstrukce je na nich založeno.

Sdružené průměry elipsy



Obrázek 54 - Elipsa, sdružené průměry



Obrázek 55 - Kružnice, sdružené průměry

Středem S povedeme tětivu XY, kterou nazveme průměrem. Sestrojíme další tětivy, které jsou rovnoběžné s průměrem. Úsečka KL, procházející středy tětiv $X_1Y_1 \parallel X_2Y_2 \parallel \cdots \parallel XY$ prochází také středem S, se nazývá sdruženým průměrem. Jinak řečeno, středy tětiv $K_1L_1 \parallel K_2L_2 \parallel \cdots \parallel KL$ také leží na průměru XY. Z toho vyplývá, že tětivy, které jsou rovnoběžné s průměrem elipsy, jsou rozděleny na polovinu sdruženým průměrem.

Pokud sestrojíme tečny v krajních bodech průměru, pak jsou tečny rovnoběžné se sdruženým průměrem. Z tětiv sestrojených u krajů elipsy se stanou tečny.

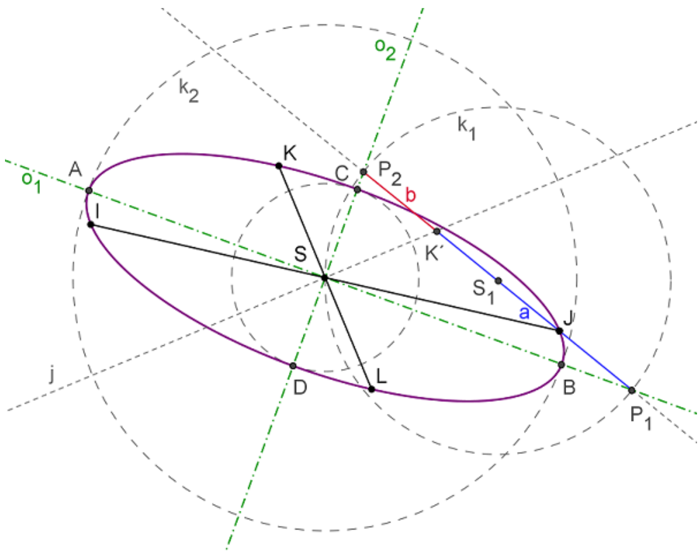
Kružnice má sdružené průměry vždy navzájem si kolmé, lze to říct i naopak, pokud budou průměry na sebe kolmé, pak jsou sdružené.

V afinitě odpovídají sdružené průměry elipsy kolmým průměrům afinní kružnice.

Postup Rytzovy konstrukce:

Rytzovu konstrukci si ukážeme na elipse, která je zadána dvěma sdruženými průměry *IJ*, *KL*.

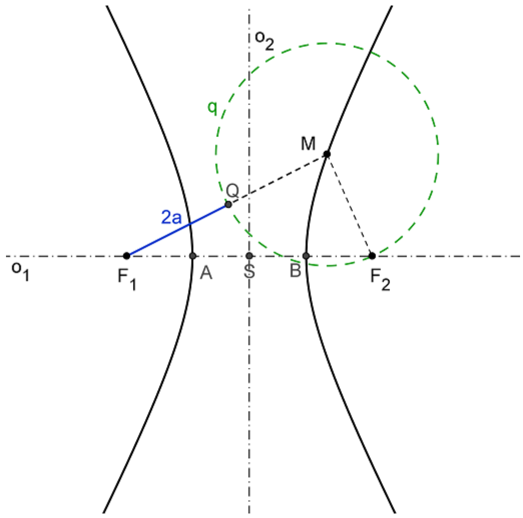
Střed *S* elipsy je průsečíkem sdružených průměrů *IJ*, *KL*. Středem *S* vedeme kolmici *j* na úsečku *KL*. Dále sestrojíme bod *K´* a to tak, že od středu *S* naneseme na kolmici *j* vzdálenost *SK*. Body *K´J* sestrojíme přímku, střed přímky *K´J* označíme S_1. V bodě S_1 sestrojíme kružnici k_1 s poloměrem S_1S. Kružnice k_1 protne s přímku *K´J* ve dvou bodech, tyto body označíme P_1, P_2. Vzniklými body P_1, P_2 sestrojíme přímky P_1S, P_2S, kde P_1S je hlavní osa o_1 elipsy a P_2S je vedlejší osa o_2 elipsy. Velikostí hlavní poloosy *a* je délka úsečky $K´P_1$, pomocí které sestrojíme hlavní vrcholy *A*, *B* a to tak, že sestrojíme kružnici k_2 s středem *S* a poloměrem *a*. Vzniklé průsečíky kružnice k_2 s osou o_1, jsou hlavními vrcholy *A*, *B*. Velikostí vedlejší poloosy *b* je délka úsečky $P_2K´$, pomocí které sestrojíme vedlejší vrcholy *C*, *D*. Tentokrát sestrojíme kružnici k_3 středem *S* a poloměrem *b*. Vedlejší vrcholy *C*, *D* jsou průsečíky kružnice k_3 s osou o_2. Jelikož máme všechny vrcholy elipsy, můžeme sestrojit elipsu.



Obrázek 56 - Rytzova konstrukce

5. Hyperbola

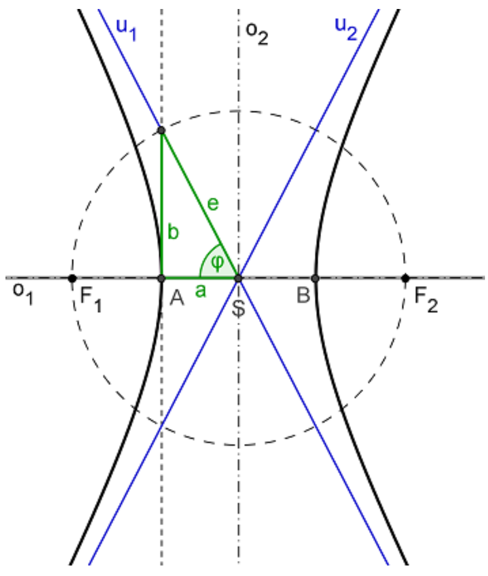
Definice: Hyperbola je množina bodů v rovině, jejíchž rozdíl od dvou daných bodů F1, F2 je konstantní, [1].



Obrázek 57 - Definice hyperboly

Ohnisky hyperboly jsou body F_1, F_2. Vzdálenost *2a* je konstantním rozdílem vzdáleností. Průvodičemi bodu *M* jsou spojnice bodů F_1M, F_2M. Pokud bychom chtěli do definice zahrnout průvodiče, mohli bychom říci, že množinou bodů, která má konstantní rozdíl průvodičů, je hyperbola.

$$\big||MF_1| - |MF_2|\big| = 2a$$



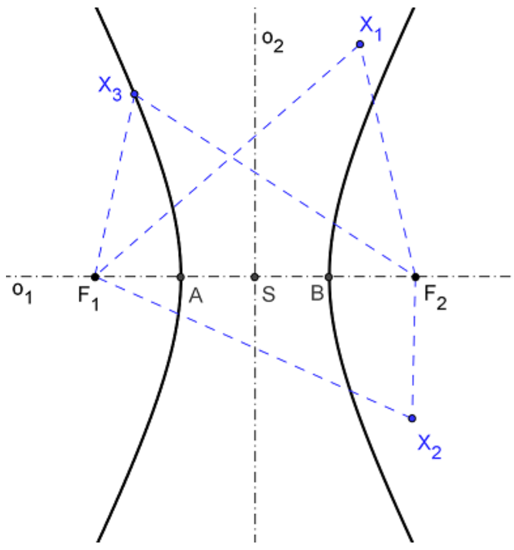
Obrázek 58 - Základní vlastnosti

Vzdálenosti mezi ohnisky F_1, F_2, říkáme ohnisková vzdálenost, kterou značíme $2e$. Hodnotu e nazýváme excentricitou a platí pro ni $a < e$. Excentricita e je vzdálenost mezi středem S hyperboly a ohnisky F_1, F_2. Vzdálenost mezi středem S hyperboly a body A, B, se nazývá délka hlavní poloosy a označujeme ji a. Hodnota b je délka vedlejší poloosy a platí pro ni $b = \sqrt{e^2 - a^2}$. Hlavní osou o_1 hyperboly je přímka, na které leží ohniska F_1, F_2. Na ose o_1 leží ještě body A, B, které jsou hlavními body hyperboly. Pro body A, B platí $|AS| = |BS| = a$. Přímka, která je kolmá na osu o_1 a prochází středem S, je nazývána vedlejší osou o_2.

Numerickou výstředností je číslo $\varepsilon = \frac{e}{a}$, které je vždy větší než jedna, protože pro e a a platí $e > a$. Ke správnému vystižení tvaru hyperboly jsou důležité její asymptoty, asymptoty budeme označovat u_1, u_2. Asymptoty u_1, u_2 jsou přímky procházející středem S, které svírají s hlavní osou o_1 úhel $\varphi = \frac{b}{a}$.

Hyperbola a bod

1. Pokud pro bod X platí $\big||F_1X| - |F_2X|\big| < 2a$, pak bod X je vnějším bodem hyperboly, který leží ve vnější části hyperboly.
2. Pokud pro bod X platí $\big||F_1X| - |F_2X|\big| > 2a$, pak bod X je vnitřním bodem hyperboly, který leží ve vnitřní části hyperboly.
3. Bod X je bodem ležící na hyperbole, pokud pro něj platí $\big||F_1X| - |F_2X|\big| = 2a$.

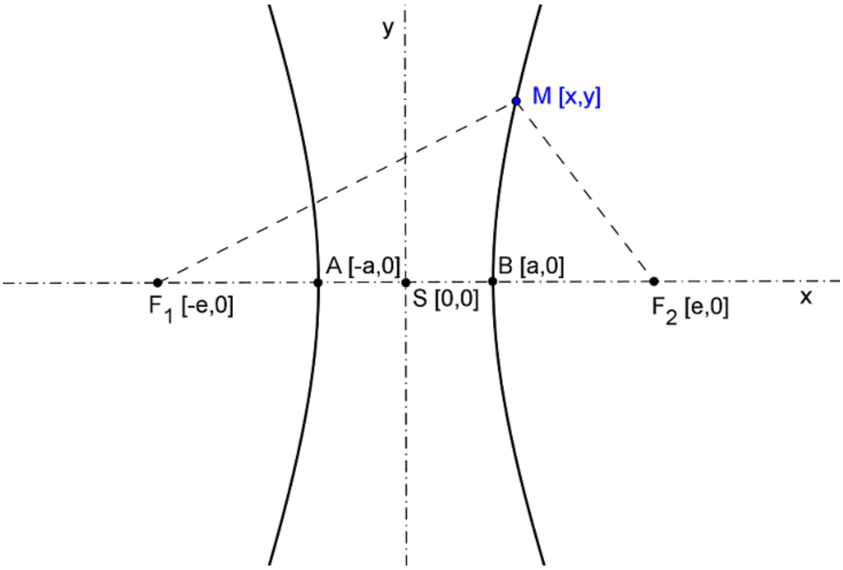


Obrázek 59 - Hyperbola a bod

Speciálním případem hyperboly je rovnoosá hyperbola, pro kterou platí $e = a\sqrt{2}$, tedy $a = b$, jejíž asymptoty u_1, u_2 jsou k sobě kolmé. Více si řekneme v jiné kapitole.

5.1. Rovnice hyperboly

Abychom mohli odvodit rovnici hyperboly, je třeba předpokládat, že hyperbola je zadána délkou hlavní poloosy a a ohnisky F_1, F_2. Dále je třeba zvolit si kartézskou soustavu souřadnic, kde by platilo, že $F_1 = [-e, 0], F_2 = [e, 0]$.



Obrázek 60 - Rovnice hyperboly

O bodu M budeme předpokládat, že je libovolným bodem hyperboly o souřadnicích $M = [x, y]$. Pro bod M platí

$$\big||MF_1| - |MF_2|\big| = 2a.$$

Pokud rovnici rozepíšeme, dostaneme

$$\left|\sqrt{(x+e)^2 + y^2} + \sqrt{(x-e)^2 + y^2}\right| = 2a.$$

$$x^2 + e^2 + y^2 - 2a^2 = \sqrt{((x+e)^2 + y^2)((x-e)^2 + y^2)}.$$

Rovnici upravíme a dostaneme

$$a^4 + x^2e^2 - x^2a^2 - e^2a^2 - y^2a^2 = 0.$$

Nyní využijeme vztah $b^2 = e^2 - a^2$, díky které dostaneme konečnou úpravu rovnice a to

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

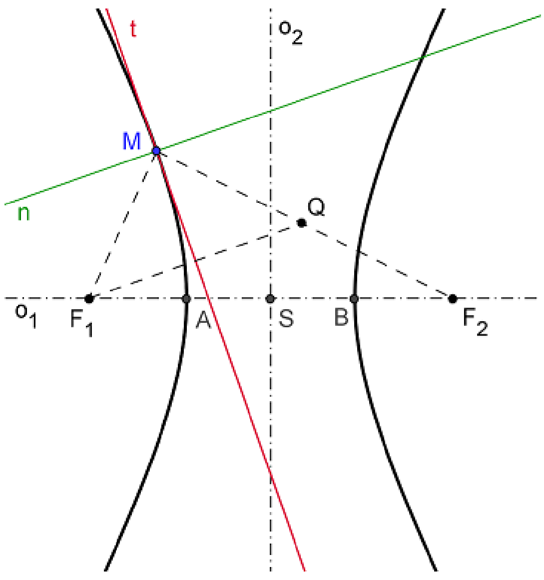
Konečná rovnice se nazývá kanonickou rovnicí hyperboly.

5.2. Tečna hyperboly

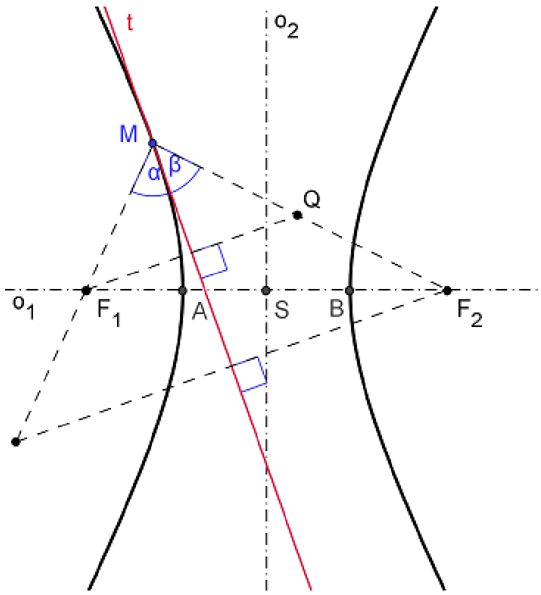
Opět mohou nastat tři situace vzájemné polohy přímky a hyperboly. Přímka *p* může být tečnou, sečnou nebo nesečnou hyperboly.

Definice: Nechť *M* je libovolný bod hyperboly. Přímka procházející bodem *M*, který je dvojnásobným průsečíkem této přímky s hyperbolou, se nazývá tečna hyperboly s dotykovým bodem *M* a přímka procházející bodem *M*, která je kolmá na tečnu se nazývá normála v bodě *M*, [1].

Věta: Tečna hyperboly půlí vnější úhel průvodičů bodu dotyku T, [1].



Obrázek 61 - Tečna a normála



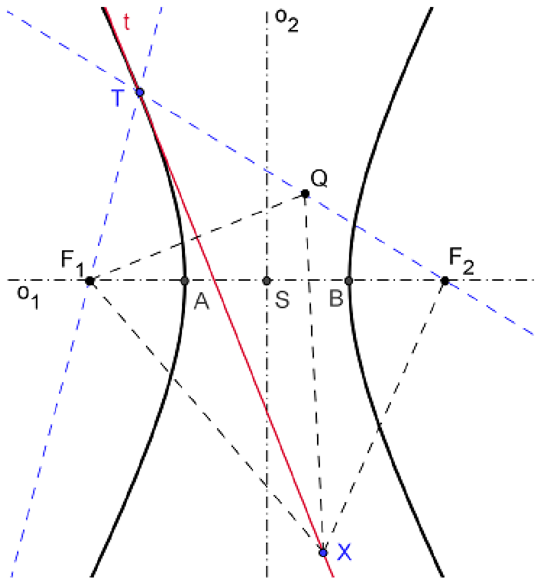
Obrázek 62 - Tečna

Důkaz:

Bod *T* je zvolený libovolný bod náležící hyperbole. U průvodičů TF_1, TF_2 sestrojíme jejich vnější osu úhlu a nazveme ji *t*. Sestrojíme osově souměrný bod *Q* k ohnisku F_2, osou souměrnosti je přímka *t*. Bod *Q* je bod ležící na úsečce TF_1. Z osové souměrnosti vyplývá $|TQ| = |TF_1|$ a proto tedy $2a = \big||TF_2| - |TF_1|\big| = \big||TF_2| - |TQ|\big| = |QF_2|$. Na přímce *t* si zvolíme bod *X*, který jiný než *T*. Všimněme si trojúhelníku *R*, *F₂*, *Q* pro který platí:

$$|XF_2| + |QF_2| > |XQ|,$$
$$\text{proto } 2a = |QF_2| > |XQ| - |XF_2|.$$
$$|QF_2| + |XQ| > |XF_2|,$$
$$\text{proto } 2a = |QF_2| > |XF_2| - |XQ|.$$

Z obou nerovností je vidět, že $2a > \big||XQ| - |XF_2|\big|$. Z osové souměrnosti víme, že $|XQ| = |XF_1|$, pak můžeme napsat $2a > \big||XF_1| - |XF_2|\big|$. A proto bod *X* je vnějším bodem hyperboly. Jelikož bod *X* byl volen libovolně, lze říct, že všechny body *X* jsou vnějšími body hyperboly, až na bod *T*. Přímka t má jediný společný bod s hyperbolou a tím je bod *T*, lze říci, že přímka *t* je tečnou s dotykovým bodem *T*.



Obrázek 63 - Důkaz

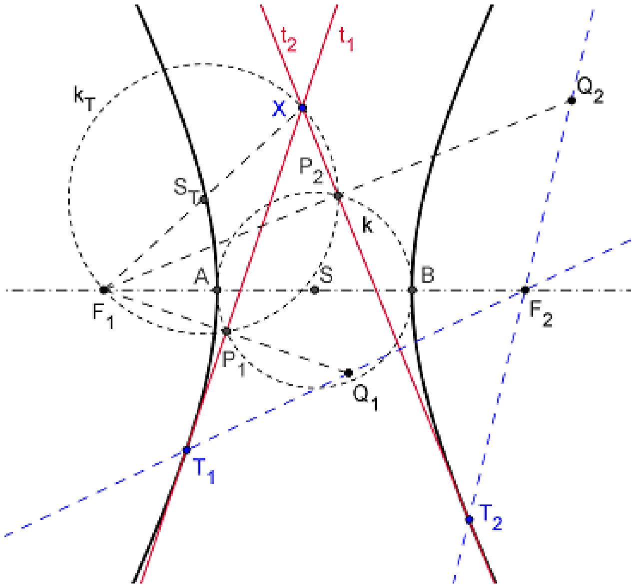
5.2.1. Tečny hyperboly vedené z bodu X

Věta: Geometrickým místem pat kolmic *K* vedených z ohniska hyperboly na její tečny je kružnice *k* o středu *S* a poloměru *a*, [3].

Věta: Přímka spojující ohnisko F_1 s bodem *Q* souměrně položeným k druhému ohnisku F_2 vzhledem k tečně *t* prochází dotykovým bodem *T* této tečny, [3].

Hyperbola je zadána ohnisky F_1, F_2 a velikostmi poloos *a*, *b*. Nyní sestrojíme tečny vedené z bodu *X* a jejich dotykové body.

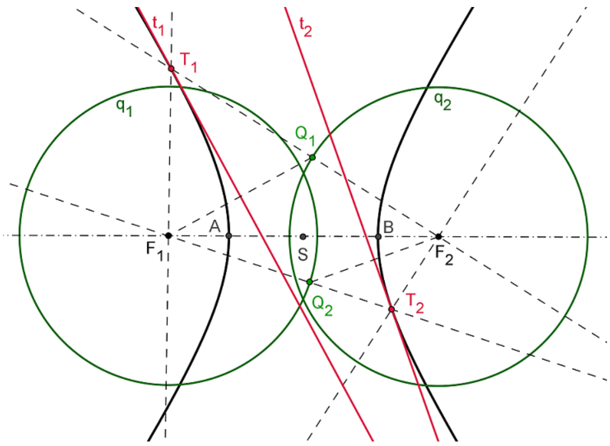
Nad průměrem F_1X sestrojíme Thaletovu kružnici k_T. Víme, že paty kolmic leží na kružnici k, která má střed S a poloměr a. Sestrojíme tedy kružnici k. Průsečíky P_1, P_2 kružnice k s Thaletovou kružnicí k_T jsou paty kolmic hledaných tečen t_1, t_2. Tečna t_1 je přímka procházející body X, P_1 a tečna t_2 je přímka procházející body X, P_2. Dále sestrojíme souměrně sdružené body Q_1, Q_2 s ohniskem F_1 podle tečen t_1, t_2, abychom mohli sestrojit dotykové body T_1, T_2 hledaných tečen t_1, t_2. Spojnicemi Q_1F_2, Q_2F_2 nalezneme dotykové body T_1, T_2.



Obrázek 64 - Tečny vedené bodem X

5.3. Ohniskové vlastnosti hyperboly

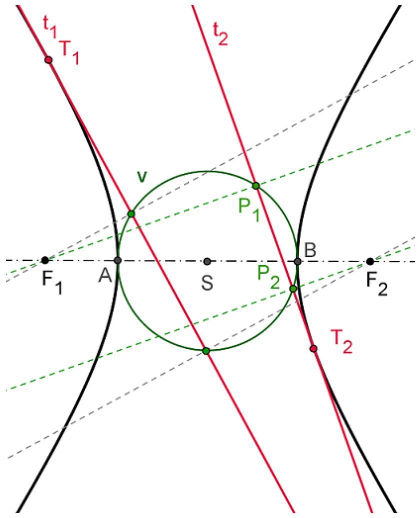
Věta: Množina bodů souměrných s jedním ohniskem hyperboly podle všech tečen leží na kružnici se středem v druhém ohnisku o poloměru $2a$, [1].



Obrázek 65 - řídící kružnice

Body Q_1, Q_2, které jsou souměrné s ohnisky F_1, F_2 podle tečen t_1, t_2, leží na kružnicích q_1, q_2, jejich středy jsou ohniska F_1, F_2, poloměr kružnic q_1, q_2 je $2a$. Kružnice q_1, q_2 se nazývají řídícími kružnicemi hyperboly.

Věta: Množina pat kolmic spuštěných z ohnisek hyperboly na její tečny leží na kružnici se středem ve středu hyperboly o poloměru a, [1].



Obrázek 66 - Vrcholová kružnice

Paty kolmic P_1, P_2, které jsou spuštěné z ohnisek F_1, F_2 na tečnu t_1, leží na kružnici v se středem S a poloměrem a. Kružnice v se nazývá vrcholová kružnice.

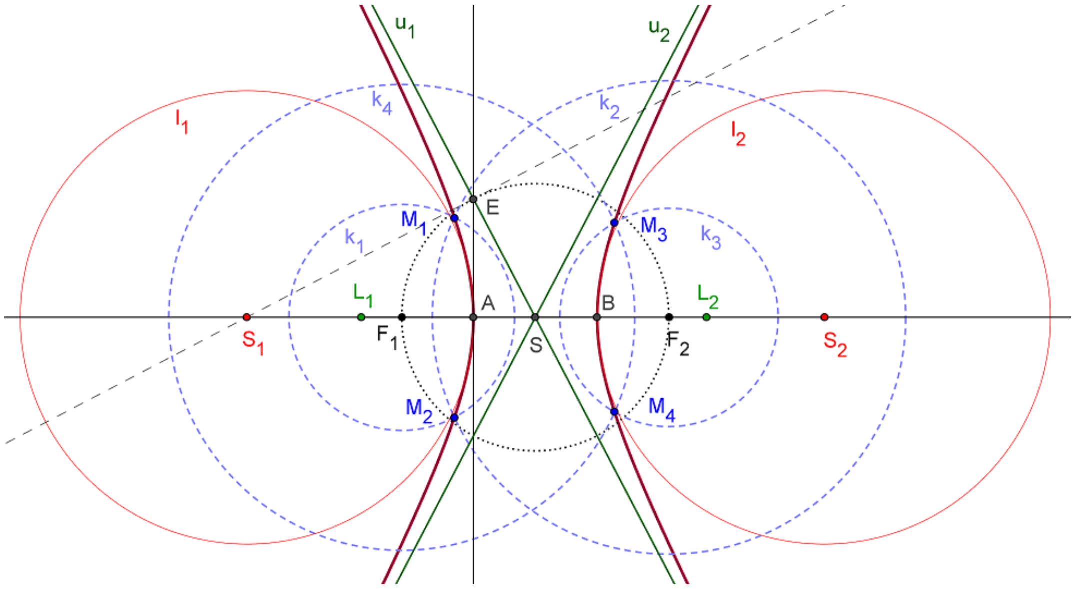
5.4. Konstrukce hyperboly

5.4.1. Bodová konstrukce hyperboly

Zvolíme si pomocný bod L_1. Dále sestrojíme kružnice k_1, k_2 se středy v ohnisku F_1 a F_2, poloměr kružnice k_1 je $|AL|$, poloměr kružnice k_2 je $|BL|$. Průsečíky kružnic k_1, k_2 označíme body M_1, M_2. Sestrojíme si další pomocný bod L_2. Stejným způsobem sestrojíme pomocí kružnic k_3, k_4 body M_3, M_4.

Nyní sestrojíme asymptoty u_1, u_2 a to následujícím způsobem. Ve vrcholu A, který je hlavním vrcholem hyperboly, vedeme kolmici, ze středu S naneseme na kolmici délku úsečky SF_1, tím jsme dostali bod E. Body E, S sestrojíme přímku u_1, která je asymptotou hyperboly, druhou asymptotu u_2 dostaneme pomocí osové souměrnosti.

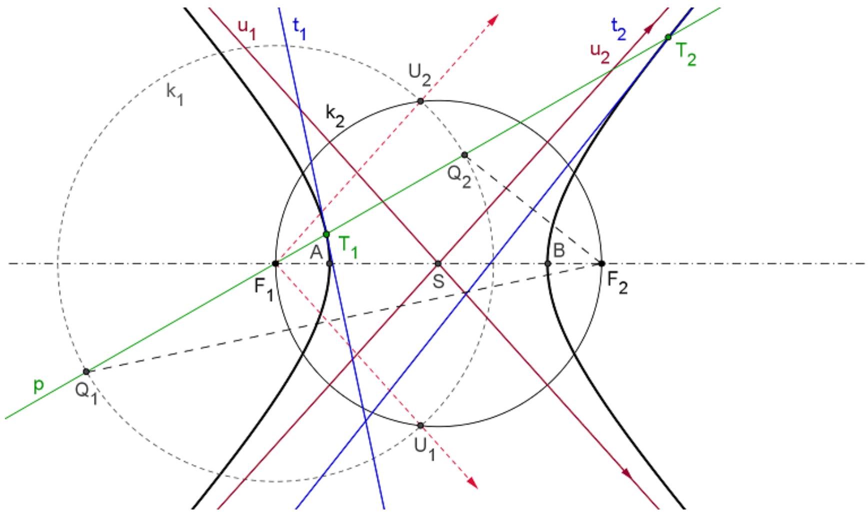
Abychom vystihli tvar hyperboly v hlavních vrcholech A, B, je třeba sestrojit oskulační kružnice l_1, l_2. Sestrojíme kolmici na asymptotu u_1, která povede bodem E, v místě, kde se kolmice na asymptotu u_1 protne s hlavní osou hyperboly, nám vznikne střed oskulační kružnice S_1. Střed druhé oskulační kružnice S_2 sestrojíme pomocí osové souměrnosti.



Obrázek 67 - Bodová konstrukce

5.4.2. Pomocí pevné kružnice

Hyperbola je zadaná vrcholy A, B a ohnisky F_1, F_2. Sestrojíme kružnici k_1 se středem v ohnisku F_1 a poloměrem $2a$. Dále sestrojíme přímku p, která je libovolná a prochází ohniskem F_1. V místě, kde se přímka p protne s kružnicí k_1, jsou body Q_1, Q_2. Sestrojíme osu t_1 úsečky Q_1F_2 a osu t_2 úsečky Q_2F_2. Osy t_1, t_2 jsou tečnami hyperboly s dotykovými body T_1, T_2. Body T_1, T_2 jsou průsečíky přímek t_1, t_2 s přímkou p.



Obrázek 68 - Konstrukce - pevná kružnice

Důkaz:

Vyplývá z konstrukce:

$$Q_1T_1 = F_2T_1, Q_2T_2 = F_2T_2, F_1Q_1 = F_1Q_2 = 2a,$$

$$F_2T_1 - F_1T_1 = Q_1T_1 - F_1T_1 = F_1Q_1 = 2a,$$

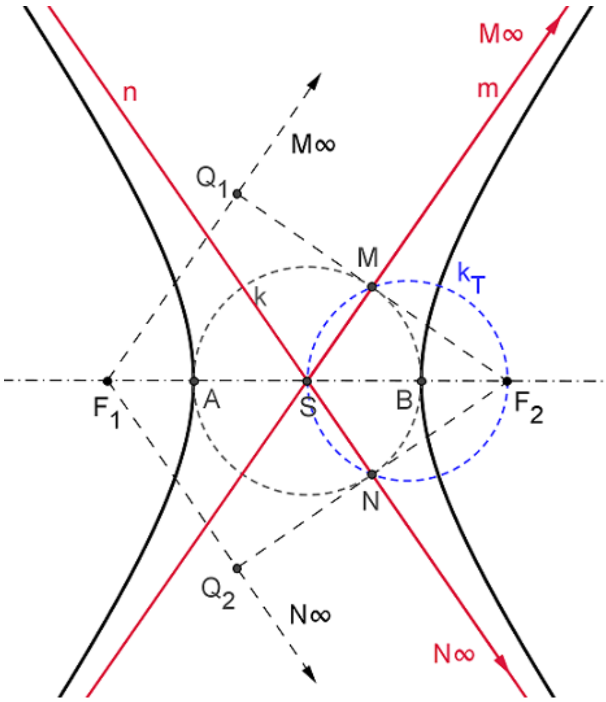
$$F_1T_2 - F_2T_2 = F_1T_2 - Q_2T_2 = F_1Q_2 = 2a.$$

Body T_1, T_2 jsou body ležící na hyperbole, protože rozdílem průvodičů T_1, T_2 je konstanta $2a$. Souměrné body Q_1, Q_2 s ohniskem F_2 podle přímky t_1, t_2 leží na kružnici k_1. Tečnami hyperboly jsou přímky t_1, t_2. Sestrojením libovolné přímky p dostáváme různé dvojice bodů T_1, T_2 ležící na elipse společně s jejich tečnami t_1, t_2.

Jestliže sestrojíme přímku p tak, aby procházela body U_1, U_2, body U_1, U_2 jsou průsečíky kružnic k_1, $k_2(S; e)$, pak dostaneme symetrály úseček F_2U_2, F_2U_1, které jsou rovnoběžné s přímkami F_1U_2, F_1U_1. Asymptoty u_1, u_2 hyperboly jsou odvozené tečny.

5.5. Asymptoty hyperboly

Konstrukce asymptot: hyperbola je zadána ohnisky F1, F2 a vrcholy A, B.



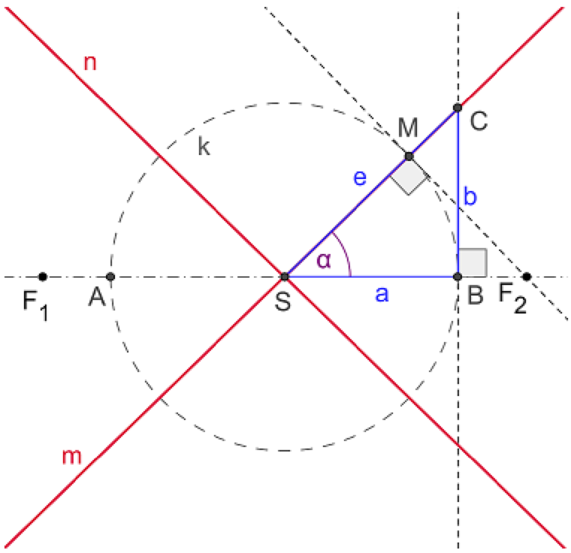
Obrázek 69 - Asymptoty hyperboly

Nejdříve sestrojíme nad průměrem SF_2 Thaletovu kružnici k_T a kružnici k se středem S a poloměrem a. Průsečíky kružnic k_T a k nazveme body M, N. Jelikož platí $Q_1M = MF_2, Q_2N = NF_2$ a $F_1S = SF_2$, proto jsou přímky F_1Q_1 a SM rovnoběžné, to samé i přímky F_1Q_2 a SN. Přímky procházející body S, M a S, N jsou tečnami, které označíme m, n. Průsečíky tečen m, n s přímkami F_1Q_1, F_1Q_2 jsou dotykové body tečen m, n ($m \parallel F_1Q_1, n \parallel F_1Q_2$). Tyto dotykové body nazveme nevlastními body M^∞, N^∞. Asymptoty jsou tečny, které mají tuto vlastnost.

Definice: Asymptota křivky je tečna křivky (vlastní přímka), jejíž dotykový bod je nevlastní, [3].

Věta: Tečny vedené k hyperbole z jejího středu jsou jejími asymptotami, [3].

Věta: Úhly asymptot hyperboly jsou půleny osami, [3].



Obrázek 70 - Vlastnosti asymptot

Na obrázku můžeme vidět další vlastnosti asymptot m, n. Pokud sestrojíme kolmici na asymptotu m procházející ohniskem F_2, pak je tato kolmice tečnou kružnice k, která má střed S a poloměr a. Dále sestrojíme tečnu ve vrcholu B, kde tato tečna protne asymptotu, tam je bod E. Tímto jsme dostali $\triangle SBE \cong \triangle SMF_2$ podle věty usu, kde odpovídající si strany jsou stejně dlouhé.

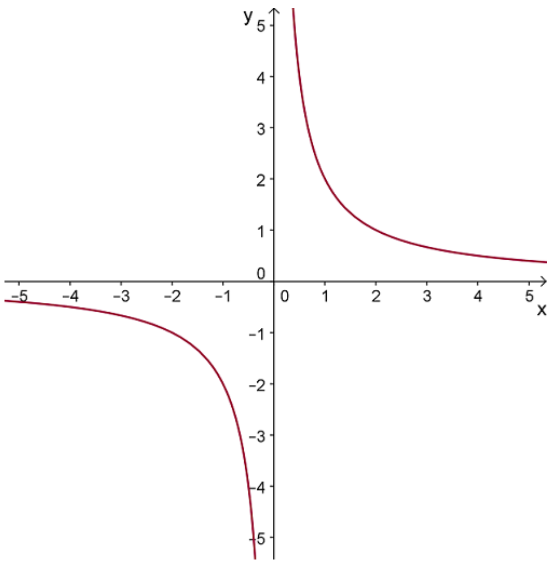
Stranu trojúhelníka $SE = SF_2$ označíme písmenem e, stranu $SB = SM$ písmenem a a poslední stranu $BE = F_2M$ písmenem b, kterou budeme nazývat vedlejší poloosou hyperboly.

Z $\triangle SBE$ vyplývá $e^2 = a^2 + b^2$. Úhel α je úhel, který svírá asymptota s hlavní osou hyperboly a platí pro něj $tg\alpha = \frac{b}{a}$.

Věta: Vzdálenost ohnisek hyperboly od jejich asymptot se rovná délce její poloosy b, [3].

5.6. Rovnoosá hyperbola

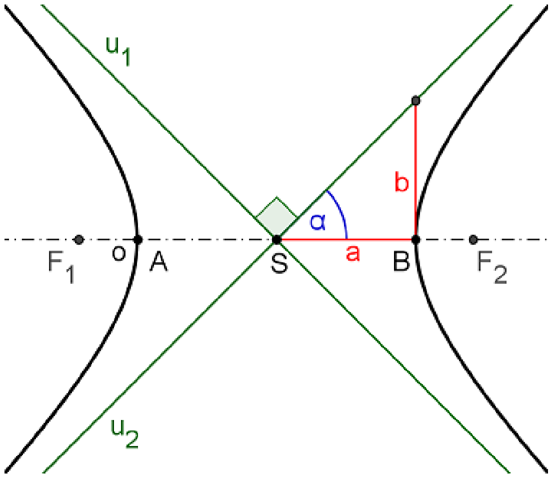
Rovnoosou hyperbolu lze najít jako graf nepřímé úměrnosti, která je zadána rovnicí $y = \frac{k}{x}$ a asymptotami hyperboly jsou osy x, y.



Obrázek 71 - Nepřímá úměrnost

Vlastnosti rovnoosé hyperboly jsou následující:

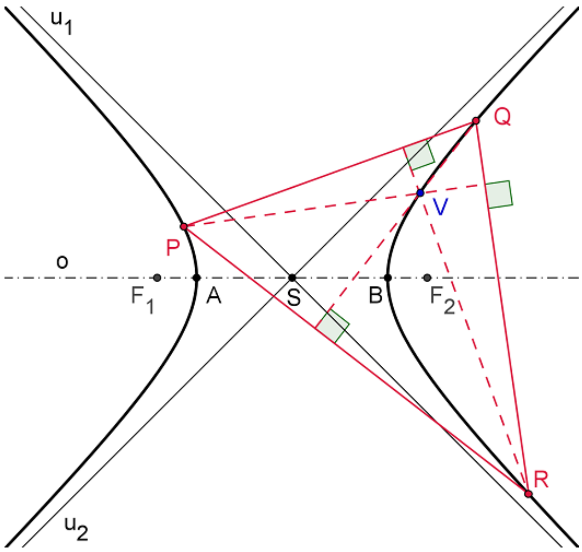
1. Má na sebe kolmé asymptoty u_1, u_2, pro které platí $tg\alpha = \frac{b}{a} = 1$, tedy $\alpha = 45°$, $2\alpha = 90°$. Úhel α je úhel mezi asymptotou a osou hyperboly.
2. Velikost hlavní a vedlejší poloosy je stejná, tedy $a = b$.
3. Věty, které platí pro obecnou hyperbolu, platí také pro rovnoosou hyperbolu.



Obrázek 72 - vlastnosti rovnoosé hyperboly

Navíc pro rovnoosou hyperbolu platí následující věta.

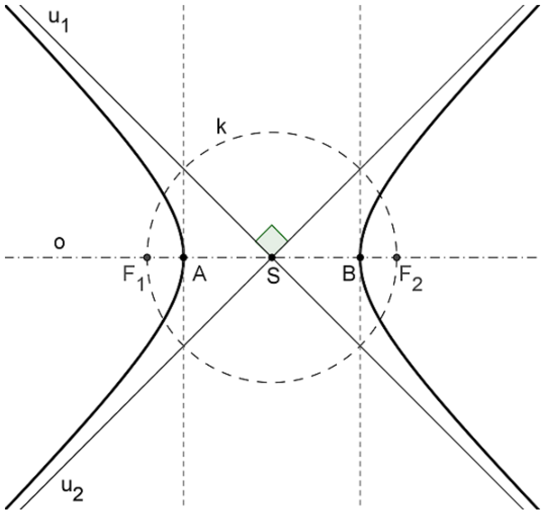
Věta: Průsečík výšek *V* trojúhelníka *PQR*, jehož vrcholy *P*, *Q*, *R* náleží rovnoosé hyperbole, leží na této hyperbole, [4].



Obrázek 73 - Trojúhelník PQR

Konstrukce rovnoosé hyperboly:

Hyperbolu máme zadanou pouze ohnisky F_1, F_2. Sestrojíme osu *o*, která je přímkou procházející body F_1, F_2. Na úsečce F_1, F_2 nalezneme střed *S*, který je středem hyperboly. Dále sestrojíme přímky u_1, u_2 procházející středem *S*, které s osou *o* svírají úhel $\alpha = 45°$. K nalezení vrcholových bodů *A*, *B* je třeba sestrojit kružnici *k* se středem *S* a poloměrem e ($|SF_1|$). Průsečíky kružnice *k* s asymptotami u_1, u_2 jsou body ležící na tečnách, které mají ve vrcholech *A*, *B* dotykové body. Nyní máme vše potřebné pro sestrojení rovnoosé hyperboly, např. bodovou konstrukcí.

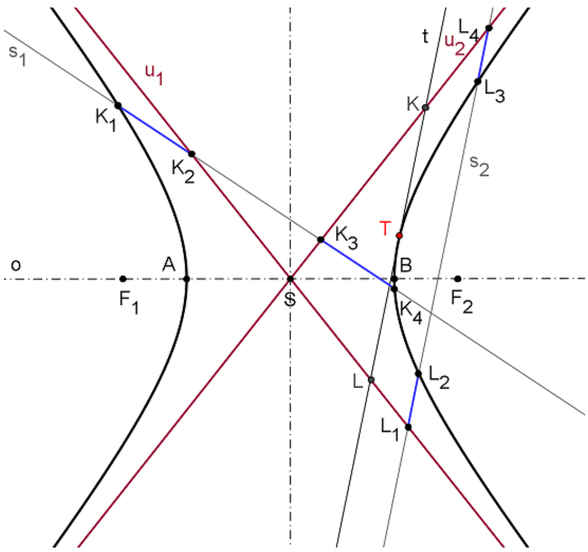


Obrázek 74 - Konstrukce rovnoosé hyperboly, vrcholy A, B

5.7. Sečny hyperboly

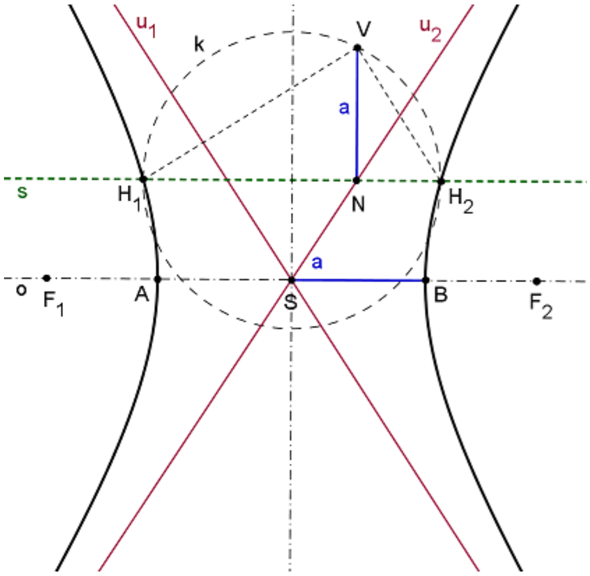
Věta: Libovolná sečna hyperboly vytíná mezi hyperbolou a jejími asymptotami dva stejné úseky, [3].

Věta: Úsek, který vytínají asymptoty hyperboly na její tečně, je půlen dotykovým bodem, [3].



Obrázek 75 - Sečny hyperboly

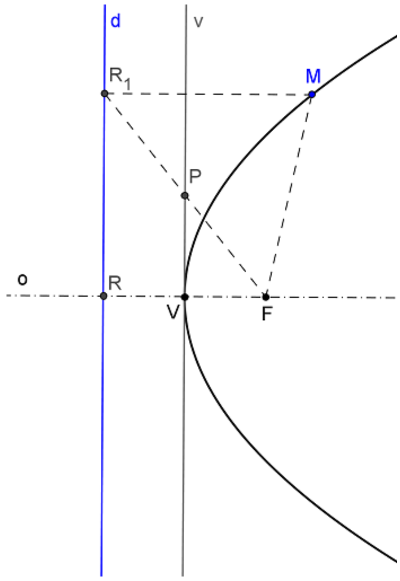
Věta: Sečny hyperboly rovnoběžné s hlavní osou protínají větve hyperboly v bodech H_1, H_2 tak, že asymptota hyperboly dělí úsečku H_1H_2 na dva úseky, jejichž součin je konstantní a rovná se dvojmoci hlavní poloosy. Na obr. je sečna $s \parallel o, H_1N \cdot NH_2 = a^2 = |NV|^2$, [3].



Obrázek 76 - Věta o rovnoběžné sečně s osou

6. Parabola

Definice: Parabola je geometrické místo bodů v rovině, které mají od pevné přímky *d* a pevného bodu *F* této roviny stejnou vzdálenost ($F \notin d$), [3].

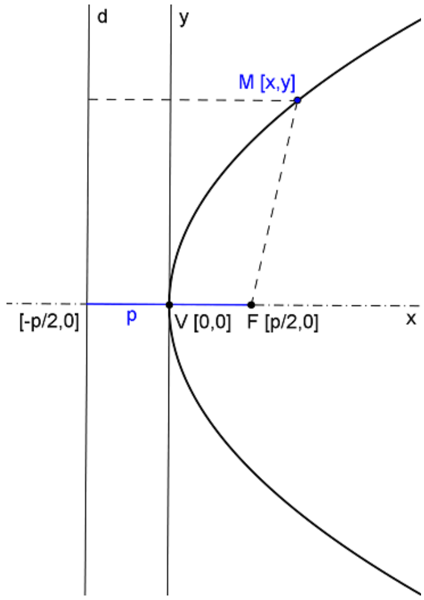


Obrázek 77 - Definice

Přímka, která je označena písmenem *d*, se nazývá řídící přímka paraboly. Ohniskem paraboly je bod *F*. Parametrem *p* paraboly je vzdálenost mezi ohniskem *F* a řídící přímkou *d*. Kolmice na řídící přímku *d* se nazývá osou *o* paraboly procházející bodem *V*. Bod *V* je vrcholem paraboly. Vrchol *V* půlí vzdálenost, která je určena body *R*, *F*. Tečna nacházející ve vrcholu *V* se nazývá vrcholovou tečnou a označíme ji *v*, tečna *v* je rovnoběžná s řídící přímkou *d*. Úsečky *MF*, MR_1 jsou průvodiče bodu *M*, kde bod *M* je bod ležící na parabole.

6.1. Rovnice paraboly

Zvolíme si kartézskou soustavu tak, aby $F = \left[\frac{p}{2}, 0\right]$, pak rovnicí řídící přímky *d* bude: $x = -\frac{p}{2}$. Libovolným bodem roviny je bod $M = [x, y]$.



Obrázek 78 - Rovnice paraboly

Dále si řekneme, že bod M je bodem paraboly, pak lze napsat $|MF| = |Md|$ a pomocí souřadnic vztah rozepíšeme na

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2} = \left|x+\frac{p}{2}\right|.$$

Pokud rovnici umocníme na druhou, pak dostaneme rovnici ve tvaru

$$y^2 = 2px.$$

Lze to udělat i obráceně. Můžeme si říct, že pro bod $M = [x, y]$ ležící na parabole platí rovnice $y^2 = 2px$. Dosadíme $y^2 = 2px$ do rovnice $|MF| = \sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}$, tedy dostaneme $|MF| = \left|x+\frac{p}{2}\right|$, kde je vidět, že platí $|MF| = |Md|$.

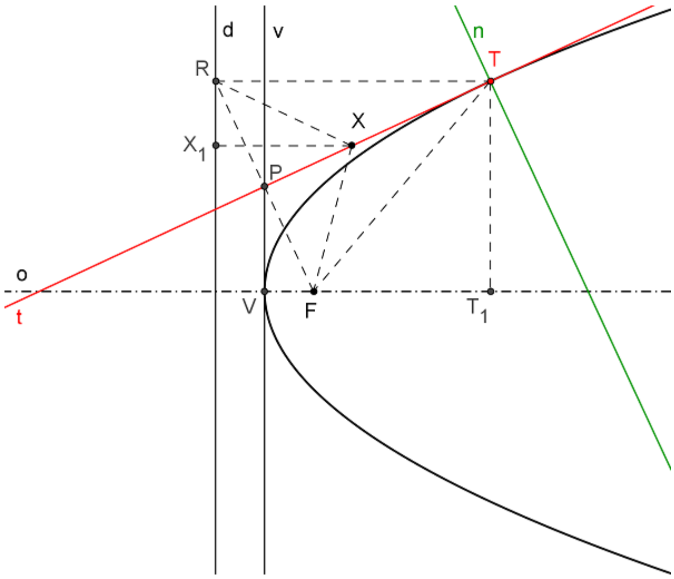
Rovnice $y^2 = 2px$ je kanonickou rovnicí paraboly.

6.2. Tečna a normála paraboly

Pro vzájemnou polohu přímky p s parabolou mohou nastat následující situace.

- přímka p může být sečnou paraboly, kterou označíme písmenem s, pokud má s parabolou dva společné body X_1, X_2;

– přímka p může být tečnou paraboly, tu označíme písmenem t, pokud má jeden společný bod T, kde T je dotykovým bodem;
– pokud přímka p nemá s parabolou žádný společný bod, pak je přímka p nesečnou a označíme ji n.



Obrázek 79 - Tečna a normála

Důkaz:

Nejprve si zvolíme libovolný bod T, kterému sestrojíme průvodiče. Pro bod T platí $FT = RT$, $RT \parallel o$. Dále sestrojíme osu úhlu RTF, kterou označíme t. Vznikl nám rovnoramenný trojúhelník RFT, kde osa úhlu t je výškou v tomto vzniklém trojúhelníku. Jelikož se jedná o výšku v rovnoramenném trojúhelníku, tak přímka t je kolmá na základnu RF, kterou zároveň půlí. Průsečíkem přímky t se základnou RF je bod P, pro který platí $RP = PF, RF \perp t$. Nyní si zvolíme libovolný bod X, který leží na přímce t, kde XF je vzdálenost mezi libovolným bodem X a ohniskem F a X_1X je vzdálenost mezi libovolným bodem X a řídící přímkou d. Pro vzdálenosti XR, X_1X platí $X_1X < XR$, což vyplývá z pravoúhlého trojúhelníka X_1XR. Z osové souměrnosti, kde osou souměrnosti je přímka t, vyplývá, že $RX = FX$, pak platí $X_1X < FX$. Dokázali jsme, že přímka t je tečnou paraboly, protože bod X není bodem paraboly.

Normálou n paraboly je přímka kolmá na tečnu t, která prochází dotykovým bodem T.

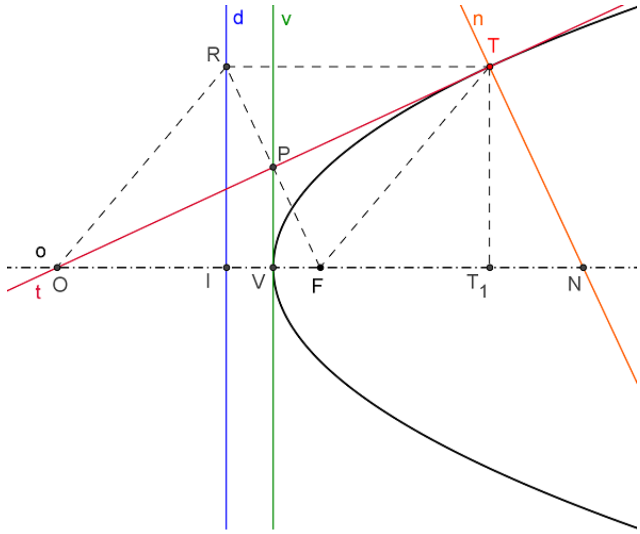
Věta: Tečna paraboly půlí vnější úhel průvodičů, [1].

Věta: Množina bodů souměrných podle všech tečen je řídící přímka d, [1].

Věta: Množina pat kolmic spuštěných z ohniska paraboly na její tečny je vrcholová tečna v, [1].

6.3. Subtangenta a subnormála paraboly

Čtyřúhelníkem $RTFO$ je kosočtverec, protože úhly RTO a TOF jsou stejné, jehož úhlopříčky se půlí a platí $OP = PT, OV = VT_1$. Na ose o nalezneme subtangentu paraboly, což je úsečka OT_1, kde bod T_1 je patou kolmice na osu procházející dotykovým bodem T.



Obrázek 80 - Subtangenta a subnormála

Věta: Subtangenta paraboly je půlena vrcholem, [3].

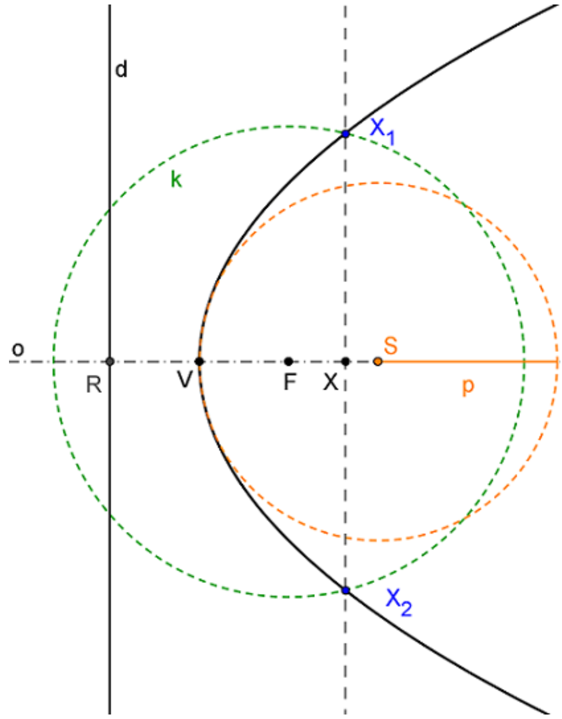
Na obrázku si můžeme všimnout dvou trojúhelníků, které jsou shodné. Jedná se o trojúhelníky RIF, TT_1N a platí pro ně $IF = T_1N$.

Věta: Subnormála paraboly se rovná jejímu parametru, [3].

6.4. Konstrukce paraboly

6.4.1. Bodová konstrukce paraboly

Bodovou konstrukci paraboly si ukážeme na parabole, která je zadána ohniskem F a řídící přímkou d.



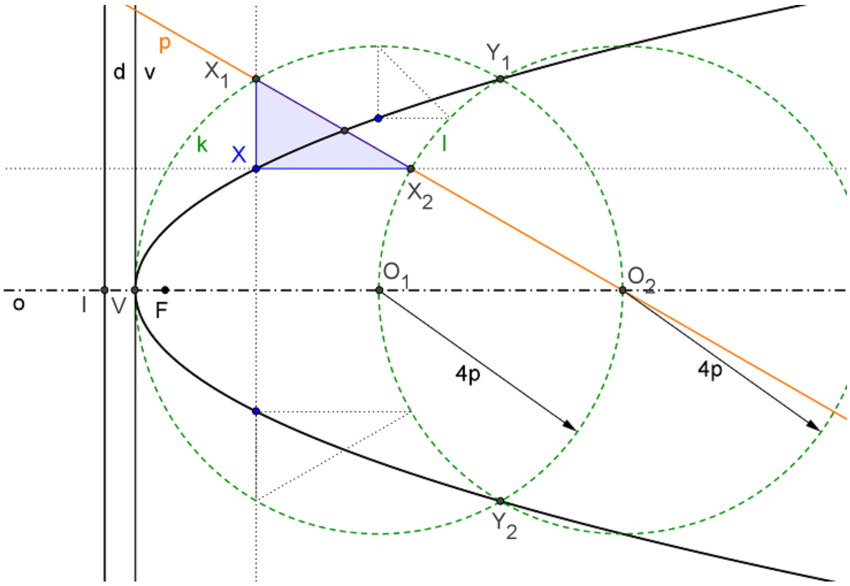
Obrázek 81 - Bodová konstrukce paraboly

Nejprve si sestrojíme vrchol *V* paraboly, o kterém víme, že leží na ose paraboly *o*. Osa paraboly *o* je kolmá na řídící přímku *d* a prochází bodem *F*. Průsečík řídící přímky *d* a osy *o* je bod *R*. Sestrojíme střed úsečky *RF*, který je hledaným vrcholem *V*. Na ose *o* si zvolíme libovolný pomocný bod *X*. Bodem *X* vedeme kolmici na osu *o* a k tomu kružnici *k* se středem v ohnisku *F* o poloměru *Xd*. Tato kružnice protíná kolmici ve dvou bodech a označíme je X_1, X_2. Sestrojené body X_1, X_2 jsou body ležící na parabole.

K vystižení tvaru paraboly v okolí vrcholu *V* nám pomůže opět oskulační kružnice. Střed *S* oskulační kružnice nalezneme tak, že si parametr *p* naneseme na osu *o*. Nanesení parametru *p* provedeme z vrcholu *V*. Nyní sestrojíme oskulační kružnici, která má střed *S* a poloměr *VS*.

6.4.2. Trojúhelníková konstrukce

Začneme tím, že si sestrojíme osu *o* paraboly, řídící přímku *d* a ohnisko *F*. Na ose *o* si zvolíme body O_1, O_2, pro které bude platit $VO_1 = O_1O_2 = 8 \cdot VF = 4p$. Dále sestrojíme kružnice *k*, *l*, pro které platí $k(O_1; r = 4p), l(O_2; r = 4p)$. Bodem O_2 vedeme libovolnou přímku *p*. Průsečíky přímky *p* s kružnicemi *k*, *l* označíme X_1, X_2. Sestrojíme následující rovnoběžky. Bodem X_1 vedeme rovnoběžku s řídící přímkou *d*, bodem X_2 vedeme rovnoběžku s osou *o*. Průsečíkem sestrojených rovnoběžek je bod *X*, který leží na parabole. Pro bod *X* platí, že ve vrcholem pravého úhlu v trojúhelníku X_1XX_2.



Obrázek 82 - Trojúhelníková konstrukce

7. Řídící přímka kuželosečky

Lze definovat kuželosečky i pomocí řídící přímky *d*. S řídící přímkou *d* jsme se setkali u paraboly a je třeba ji zavézt i u elipsy a hyperboly.

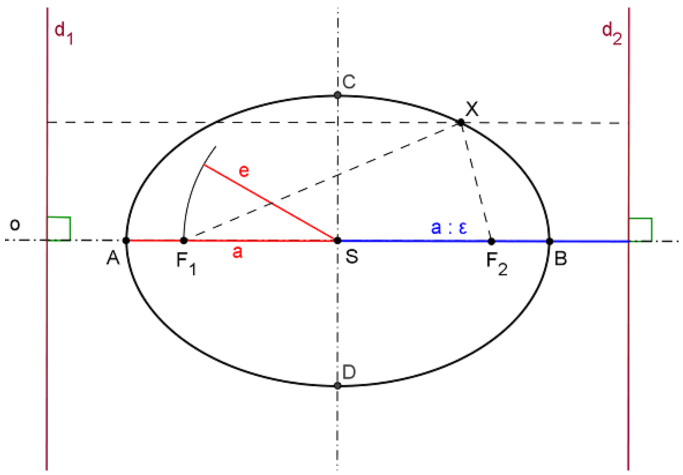
Definice: Řídícími přímkami d_1, d_2 elipsy (hyperboly) nazýváme přímky, které jsou kolmé na hlavní osu ve vzdálenosti $\frac{a}{\varepsilon}$ od středu, kde ε je numerická výstřednost elipsy (hyperboly), [1].

Vzdálenost e je délkovou výstředností. Pro elipsu platí $a > e$, tedy $\frac{a}{\varepsilon} = \frac{a^2}{\varepsilon} > a$, z toho vyplývá, že řídící přímky d_1, d_2 jsou vnějšími přímkami elipsy, které elipsu neprotínají. Stejně tak je to i pro hyperbolu, pro kterou platí $\frac{a}{\varepsilon} = \frac{a^2}{\varepsilon} < a$, kde $a < e$, opět řídící přímky d_1, d_2 hyperbolu neprotínají.

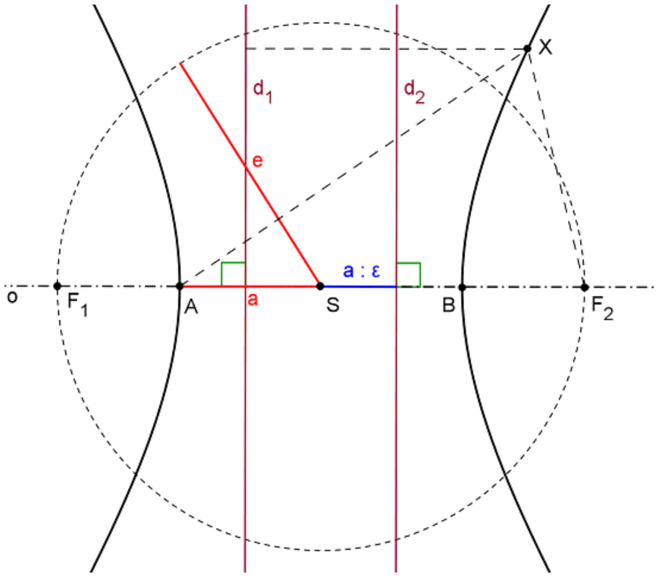
V následující větě definujeme elipsu, hyperbolu i parabolu stejným způsobem.

Věta: Kuželosečka je množina bodů v rovině, které mají od daného bodu F a dané přímky d stálý poměr vzdáleností rovný konstantě ε, [1].

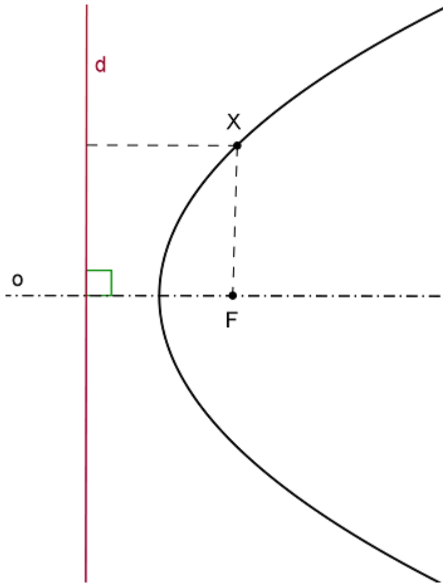
1. Pokud je $\varepsilon < 1$, kuželosečkou je elipsa,
2. dále pro $\varepsilon = 1$, pak kuželosečkou je parabola,
3. a pro $\varepsilon > 1$, pak je kuželosečkou hyperbola.



Obrázek 83 - Řídící přímky elipsy



Obrázek 84 - Řídící přímky hyperboly



Obrázek 85 - Řídící přímka paraboly

Důkaz:

1. Nejdříve se podíváme, jak je to s řídícími přímkami elipsy.

Budeme zkoumat poměr vzdálenosti libovolného bodu $X = [x, y]$ od ohniska $F_2 = [e, 0]$ a řídící přímky $d_2 \colon x = \frac{a}{\varepsilon}$. Pro vzdálenosti $|XF_2|$ a $|Xd_2|$ platí

$$|XF_2| = \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = \sqrt{\left(a - \frac{e}{a}x\right)^2} = \left|a - \frac{e}{a}x\right| = a - \frac{e}{a}x = a - \varepsilon x$$
$$= \varepsilon\left(\frac{a}{\varepsilon} - x\right),$$

$$|Xd_2| = \frac{a}{\varepsilon} - x.$$

A dostaneme poměr

$$\frac{|XF_2|}{|Xd_2|} = \frac{\varepsilon\left(\frac{a}{\varepsilon} - x\right)}{\frac{a}{\varepsilon} - x} = \varepsilon = \frac{e}{a} < 1.$$

Lze se na to podívat i obráceně, pak pro bod X roviny platí

$$\frac{|XF_2|}{|Xd_2|} = \varepsilon < 1,$$

Pak bod F_2 je libovolným bodem a přímka d_2 je libovolnou přímkou roviny.

Vzdálenost bodu F_2 od řídící přímky d_2 je označena písmenem p.

Je-li $\varepsilon = \frac{e}{a}$ a $p = \frac{a^2}{e} - e$, pak $a = \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2} p$ a $e = \frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} p$.

Dále si zvolíme kartézskou soustavu souřadnic tak, aby $X = [x, y]$, $F_2 = [e, 0]$ a $d_2 : x = \frac{a}{e}$. Pak pro vzdálenosti $|XF_2|$ a $|Xd_2|$ platí $|XF_2| = \sqrt{(x-e)^2 + y^2}$ a $|Xd_2| = \left|\frac{a}{\varepsilon} - x\right|$, které dosadíme do vztahu $\frac{|XF_2|}{|Xd_2|} = \varepsilon$ dostaneme

$$\sqrt{(x-e)^2 + y^2} = \varepsilon \left|\frac{a}{\varepsilon} - x\right|.$$

Dále tuto rovnici umocníme na druhou, kde dostaneme

$$(x-e)^2 + y^2 = (a - \varepsilon x)^2.$$

Úpravou dostaneme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Pokud bychom zkoumali poměr vzdálenosti libovolného bodu X od ohniska F_1 a řídící přímky d_1, pak dostaneme stejný výsledek.

2. Dále se podíváme, jak je to s řídícími přímkami hyperboly.

Budeme opět zkoumat poměr vzdálenosti libovolného bodu $X = [x, y]$ od ohniska $F_2 = [e, 0]$ a řídící přímky $d_2 : x = \frac{a}{\varepsilon}$. Pro vzdálenosti $|XF_2|$ a $|Xd_2|$, mluvíme-li o bodech jedné větve hyperboly, kde $x > a$, platí

$$|XF_2| = \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = \sqrt{\left(\frac{e}{a}x - a\right)^2} = \left|\frac{e}{a}x - a\right| = \frac{e}{a}x - a = \varepsilon x - a$$
$$= \varepsilon\left(x - \frac{a}{\varepsilon}\right),$$

$$|Xd_2| = x - \frac{a}{\varepsilon}.$$

Pokud mluvíme o bodech druhé větve hyperboly, kde $x < -a$, pak

$$|XF_2| = \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = \sqrt{\left(\frac{e}{a}x - a\right)^2} = \left|\frac{e}{a}x - a\right| = -\frac{e}{a}x + a = -\varepsilon x + a$$
$$= \varepsilon\left(\frac{a}{\varepsilon} - x\right),$$

$$|Xd_2| = \frac{a}{\varepsilon} - x.$$

Tyto dvě vzdálenosti dáme do poměru a dostaneme

a) pro body jedné větve hyperboly

$$\frac{|XF_2|}{|Xd_2|} = \frac{\varepsilon\left(x - \frac{a}{\varepsilon}\right)}{x - \frac{a}{\varepsilon}} = \varepsilon = \frac{e}{a} > 1,$$

b) pro body druhé větve hyperboly

$$\frac{|XF_2|}{|Xd_2|} = \frac{\varepsilon\left(\frac{a}{\varepsilon} - x\right)}{\frac{a}{\varepsilon} - x} = \varepsilon = \frac{e}{a} > 1.$$

Opět, pokud bychom zkoumali poměr vzdálenosti libovolného bodu *X* od ohniska F_1 a řídící přímky d_1, pak dostaneme stejný výsledek.

3. Poslední kuželosečka, která zbývá, je parabola.

Opět se podíváme na poměr vzdálenosti libovolného bodu *X* od ohniska *F* a řídící přímky *d*. Pro vzdálenosti $|XF|$ a $|Xd|$ platí

$$\frac{|XF|}{|Xd|} = 1,$$

což plyne z definice paraboly.

8. Kuželosečky jako geometrické místo středů kružnic

8.1. Elipsa

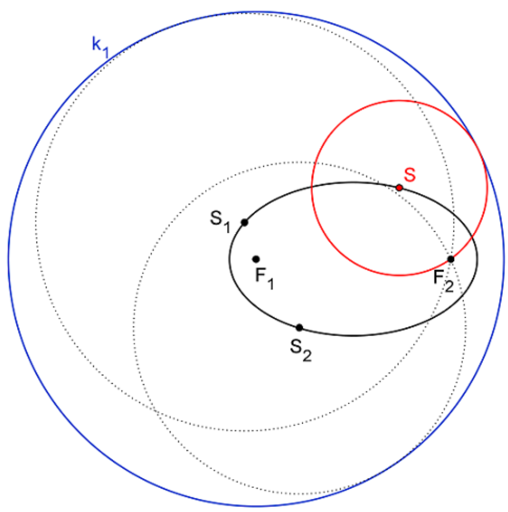
Máme zadanou kružnici $k_1(F_1, r_1)$, uvnitř této kružnice je kružnice $k_2(F_2, r_2)$ a máme hledat geometrické místo středů kružnic k, které se mají dotýkat uvnitř kružnice $k_1(F_1, r_1)$ a platí pro ně, že s kružnicí $k_2(F_2, r_2)$ mají vnější dotyk.

Poloměr jedné hledané kružnice d se středem v bodě S. Pokud mají kružnice vnitřní dotyk k_1 a k, pak platí $r_1 - d = F_1S$. Pokud mají kružnice vnější dotyk k_1 a k, pak platí $r_2 + d = F_2S$.

Pokud sečteme obě rovnice, zbavíme se poloměru d a dostaneme

$$r_1 + r_2 = F_1S + F_2S.$$

Věta: Geometrickým místem středů kružnic, které se dotýkají uvnitř kružnice $k_1(F_1, r_1)$ a vně kružnice $k_2(F_2, r_2)$, přičemž k_2 leží celá uvnitř k_1, je elipsa, která má ohniska ve středech daných kružnic a jejíž hlavní osa se rovná součtu obou poloměrů, [3].



Obrázek 56 - Elipsa jako geometrické místo středů kružnic

Věta: Geometrickým místem středů kružnic, které se dotýkají dané kružnice $k_1(F_1, r_1)$ a procházejí bodem F_2 ležící uvnitř ní, je elipsa, jež má ohniska v bodech F_1, F_2 a délku hlavní osy rovnou poloměru r_1, [3].

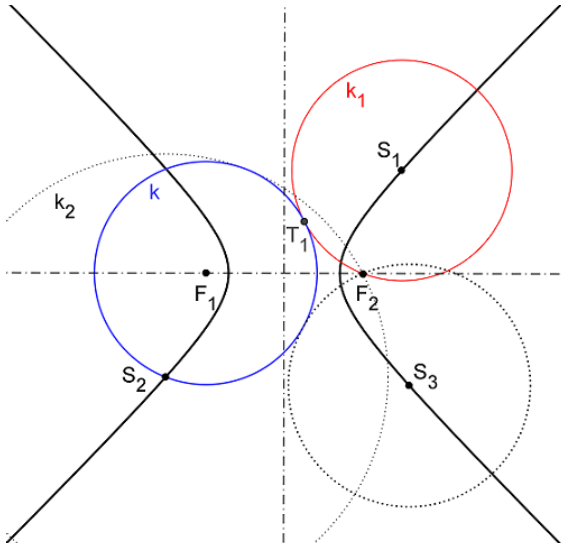
8.2. Hyperbola

Hledáme geometrické místo středů kružnic tak, aby se dotýkaly kružnice $k(F_1, r)$ a procházely bodem F_2 ve vnější části kružnice k.

Kružnice k_1 je jednou z hledaných kružnic o poloměru d se středem v bodě S_1. Bod T_1 je dotykovým bodem s kružnicí k, pro který platí $F_1S_1 = F_1T_1 + T_1S_1 = r + d, F_2S_1 = r + d$. Pokud tyto rovnice odečteme, tak dostaneme

$$F_1S_1 - F_2S_1 = r.$$

Hledaným geometrickým místem, je kuželosečka, která má od daných bodu F_1, F_2 stejný rozdíl vzdáleností.

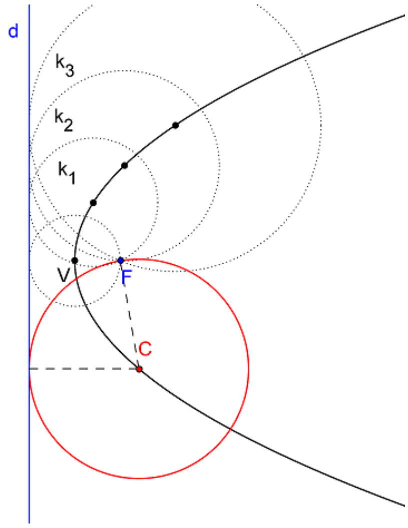


Obrázek 87 - Hyperbola jako geometrické místo středů kružnic

Věta: Geometrickým místem středů kružnic, které se dotýkají kružnice $k(F_1, r)$ a jdou bodem F_2 ležící vně této kružnice, je hyperbola, která má ohniska v bodech F_1, F_2 a délku hlavní osy rovnou poloměru r, [3].

8.3. Parabola

Z definice vyplývá, že každý bod paraboly má od řídící přímky d a od ohniska F stejnou vzdálenost. Tedy každý libovolný bod C je středem kružnice, která se dotýká řídící přímky d a prochází bodem F.



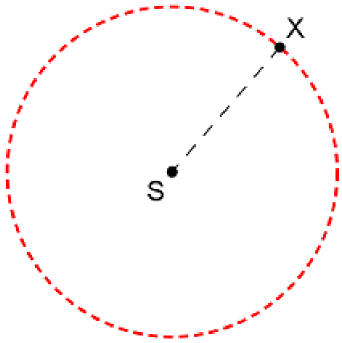
Obrázek 88 - Parabola jako geometrické místo středů kružnic

Věta: Geometrickým místem středů kružnic, které se dotýkají přímky *d* a prochází bodem *F*, je parabola, jež má ohnisko *F* a řídící přímku *d*, [3].

9. Hledání množin bodů

Příklad 1:

Najděte množinu bodů, která má od daného bodu S stejnou vzdálenost.

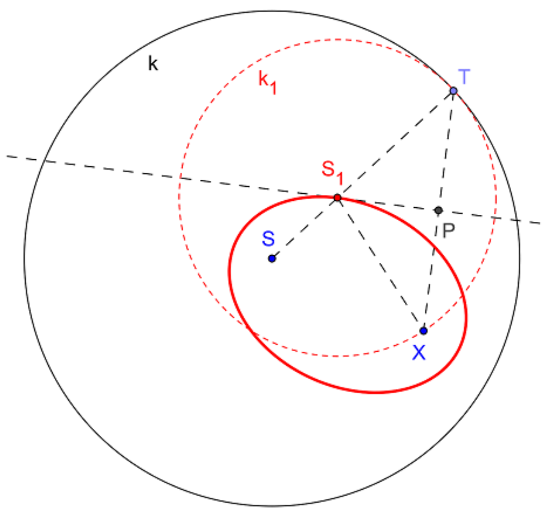


Obrázek 89 – Příklad 1

Hledanou množinou je kružnice se středem v bodě S a poloměru $|SX|$.

Příklad 2:

Najděte množinu středů všech kružnic, které se dotýkají dané kružnice k a procházejí bodem X. Bod X je uvnitř kružnice.



Obrázek 90 - Příklad 2

GeoGebra - hledání pomocí nástroje Množina bodů:

Nejdříve jsem si sestrojila kružnici k_1, která se dotýká dané kružnice k a prochází bodem X. Kružnice k_1 má střed v bodě S_1 s poloměrem S_1X. Střed S_1 jsem našla následujícím způsobem. Na kružnici k, jsem si zvolila libovolný bod T, který sloužil jako dotykový bod kružnic k a k_1. Dále jsem si sestrojila úsečku XT a našla její střed P, kterým jsem vedla kolmici. Průsečík této kolmice s úsečkou ST je hledaným středem S_1 kružnice k_1. Teď už jen zbývá použít nástroj Množina bodů, kde S_1 je bod, který utváří množinu a pohyblivým bodem je bod T.

Musíme dokázat, že S_1 je bodem elipsy. Musí platit $|SS_1| + |S_1X| = r$.

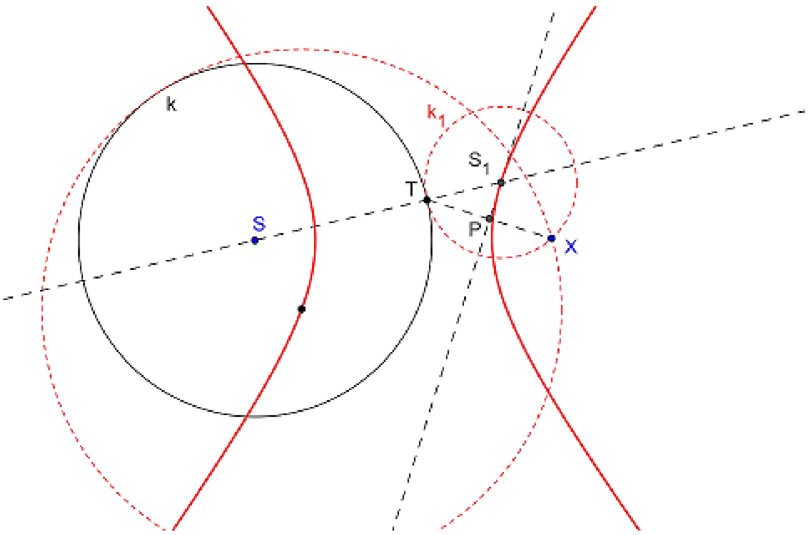
Důkaz:

$$|SS_1| + |S_1T| = |SS_1| + |S_1X| = r$$

Hledanou množinou je elipsa s ohnisky X, S.

Příklad 3:

Najděte množinu středů všech kružnic, které se dotýkají dané kružnice k a procházejí bodem X. Bod X je vně kružnice.



Obrázek 91 - Příklad 3

GeoGebra - hledání pomocí nástroje Množina bodů:

Opět jsem si nejdříve sestrojila jednu z kružnic a to kružnici k_1, která se dotýká dané kružnice k a prochází bodem X. Kružnice k_1 má střed v bodě S_1 o poloměru S_1X. Střed S_1 jsem našla stejným způsobem jako v příkladu 2. Na kružnici k, jsem si zvolila libovolný bod T, který sloužil jako dotykový bod kružnic k a k_1. Dále jsem si sestrojila úsečku XT a našla její střed P, kterým jsem vedla kolmici. Průsečík této kolmice s úsečkou ST je hledaným středem S_1 kružnice k_1. V poslední části použiji nástroj Množina bodů, kde S_1 je bod, který utváří množinu a pohyblivým bodem je bod T a vidíme, že výslednou množinou je hyperbola s ohnisky S, X.

Musíme dokázat, že $|SS_1| - |S_1X| = r$

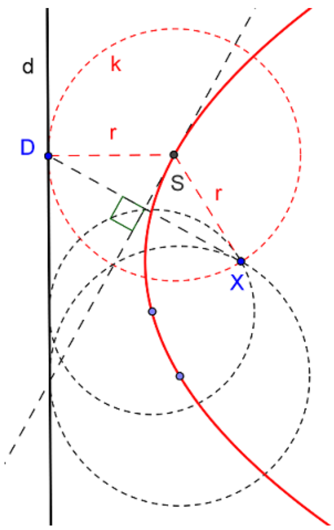
Důkaz:

$$|ST| - |TS_1| = |SS_1| - |S_1X| = r$$

Hledanou množinou je hyperbola s ohnisky S, X.

Příklad 4:

Najděte množinu středů všech kružnic, které se dotýkají dané přímky d a procházejí bodem X. Bod X neleží na přímce d.



Obrázek 92 - Příklad 4

GeoGebra - hledání pomocí nástroje Množina bodů:

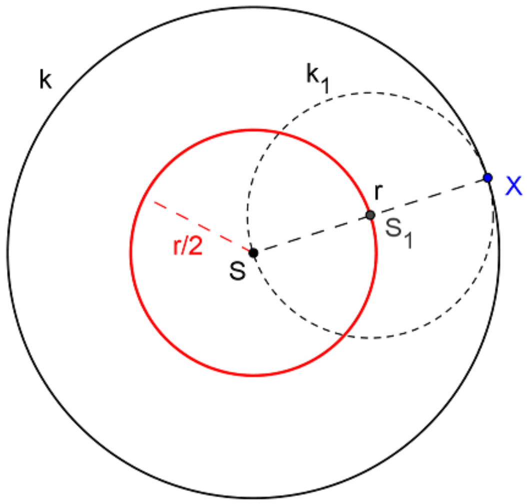
Nejdříve si najdu kružnici *k*, která se dotýká přímky *d* a prochází bodem *X*. Je třeba nalézt střed *S* kružnice *k*. Na přímce *d* si zvolíme libovolný bod *D* a sestrojíme úsečku *DX*. Středem *P* úsečky *DX* vedeme kolmici. Dále druhou kolmici, která je kolmá na přímku *d* a prochází bodem *D*, kde se tyto dvě kolmice protnou, tam je střed *S* kružnice *k*. Nyní můžu použít nástroj Množina bodů, kde *S* je bod, který utváří množinu a pohyblivým bodem je bod *D*. Jak je vidět, hledanou množinou je parabola s ohniskem *X* a přímka *d* je řídící přímkou paraboly.

Potřebujeme najít kružnici se středem v bodě *S* a poloměru $|SX| = |SD|$.

Hledanou množinou středů kružnic je parabola, jak vyplývá z definice.

Příklad 5:

Najděte množinu středů všech kružnic, které se dotýkají dané kružnice *k* a procházejí jejím středem.



Obrázek 93 - Příklad 5

GeoGebra - hledání pomocí nástroje Množina bodů:

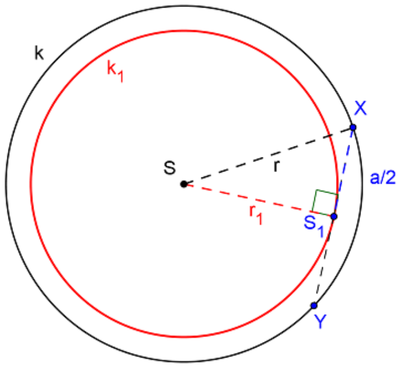
Nejdříve si najdeme kružnici k_1, která se dotýká dané kružnice *k* a prochází jejím středem *S*. Nalezení středu S_1 kružnice k_1 je velmi jednoduché, stačí si najít libovolný bod *T* kružnice *k*. Střed úsečky *SX* je hledaným středem kružnice k_1. Pomocí nástroje Množina bodů nalezneme hledanou množinu, pokud si zvolíme bod *T* za pohyblivý bod a střed S_1 je bodem, který utváří množinu. Vyjde nám kružnice se středem v bodě *S* o poloměru $\frac{r}{2}$.

Důkaz:

$$|SX| - |S_1X| = r - \frac{r}{2} = \frac{r}{2}$$

Příklad 6:

Najděte množinu středů všech tětiv kružnice *k*, kde tětivy mají délku a, pro kterou platí $a < 2r$.



Obrázek 94 - Příklad 6

GeoGebra - hledání pomocí nástroje Množina bodů:

Na kružnici k si zvolíme libovolnou tětivu *XY* a najdu si její střed S_1. Pomocí nástroje Množina bodů najdeme hledanou množinu, kde bod *X* je pohyblivým bodem a střed S_1 je bod, který utváří množinu. Vyjde nám kružnice k_1.

Důkaz:

Máme pravoúhlý trojúhelník SS_1X, pro který platí

$$r^2 = {r_1}^2 + \frac{a^2}{4};$$

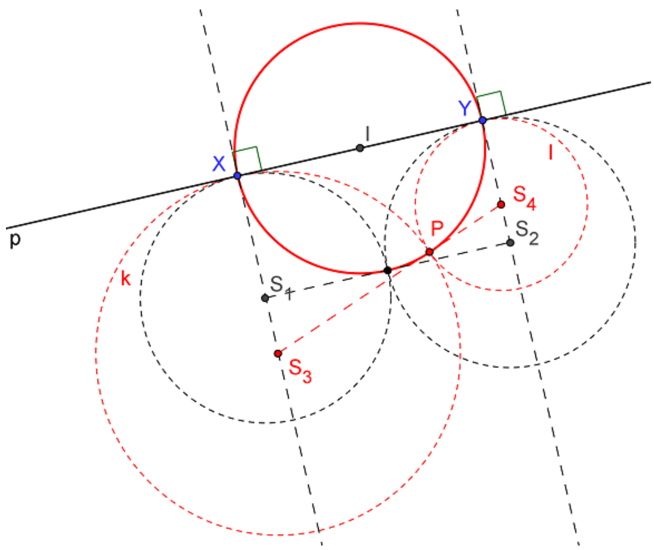
$$r_1{}^2 = r^2 - \frac{a^2}{4};$$

$$r_1 = \sqrt{\frac{4r^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - a^2}.$$

Poloměr r_1 je poloměrem hledané množiny středů, kterou je kružnice se středem S a poloměrem $r_1 = \frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - a^2}$.

Příklad 7:

Je dána přímka *p* a na ní body *X, Y*. Najděte množinu bodů *P*, v nichž se dotýkají každé dvě kružnice *k, l*, jedna kružnice se dotýká přímky *p* v bodě *X* a druhá se dotýká přímky *p* v bodě *Y*.



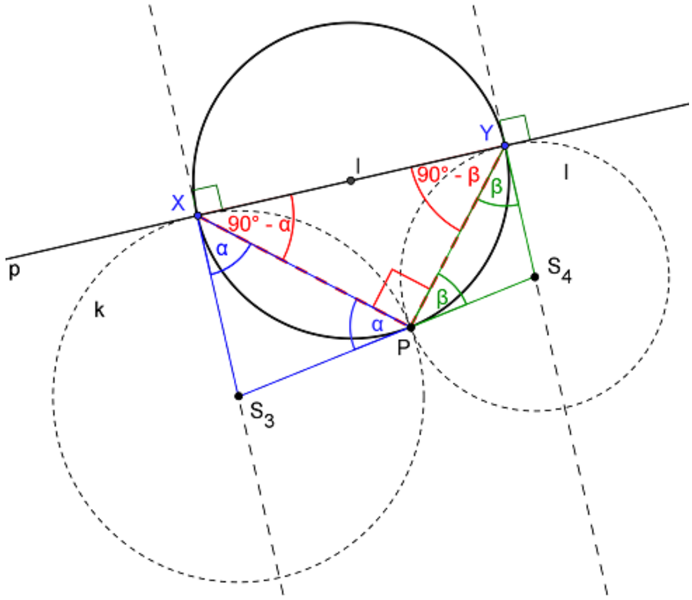
Obrázek 95 - Příklad 7

GeoGebra - hledání pomocí nástroje Množina bodů:

Je třeba najít kružnice *k, l*, které se dotýkají dané přímky *p* v bodech *X*, *Y*. Dotykový bod těchto kružnic je bod *P*. Středy kružnic *k, l* nalezneme na přímkách, které jsou kolmé na přímku *p* a procházejí body *X*, *Y*. S pomocí nástroje Množina bodů nalezneme opět hledanou množinu, kde pohyblivým bodem je střed kružnice *l* a bod *P* je bodem, který utváří množinu. Vidíme, že hledanou množinou je kružnice se středem *I* a poloměrem $\frac{1}{2}|XY|$.

Důkaz:

S pomocí následujícího obrázku, dokážeme, že úhel *XPY* je úhel pravý.



Obrázek 96 - Příklad 7 – důkaz

Na obrázku jsou vidět dva rovnoramenné trojúhelníky XS_3P, PS_4Y. Díky kolmicím na přímku *p* procházející body *X*, *Y* můžeme napsat velikosti úhlu *PXY*, *PYX*

$$|\sphericalangle PXY| = 90° - \alpha, |\sphericalangle PYX| = 90° - \beta.$$

Pak pro úhel *XPY* musí platit:

$$|\sphericalangle XPY| = 180° - |\sphericalangle PXY| - |\sphericalangle PYX| = 180° - (90° - \alpha) - (90° - \beta) = \alpha + \beta.$$

Pro přímý úhel S_3PS_4 platí

$$\alpha + \beta + \alpha + \beta = 180°,$$

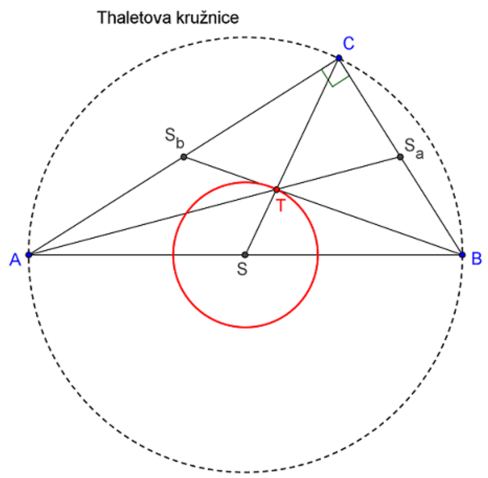
$$2(\alpha + \beta) = 180°,$$

$$\alpha + \beta = 90°.$$

A máme dokázáno. Hledanou množinou bodu *P* je kružnice se středem v bodě *I* a poloměru $\frac{1}{2}|XY|$.

Příklad 8:

Najděte množinu těžišť všech pravoúhlých trojúhelníků, které mají společnou přeponu *AB*.



Obrázek 97 - Příklad 8

GeoGebra - hledání pomocí nástroje Množina bodů:

Nad průměrem *AB* sestrojíme Thaletovu kružnici. Na Thaletově kružnici si zvolíme libovolný bod *C*. Díky Thaletově kružnici máme zajištěno, že u vrcholu *C* bude úhel pravý. Sestrojíme těžnice a průsečíkem těžnic je těžiště *T*. V nástroji Množina bodů si zvolíme, že pohyblivým bodem je bod *C* a bod *T* je bod, který utváří množinu. Vyjde nám kružnice se středem v bodě *S* a poloměrem $|ST|$.

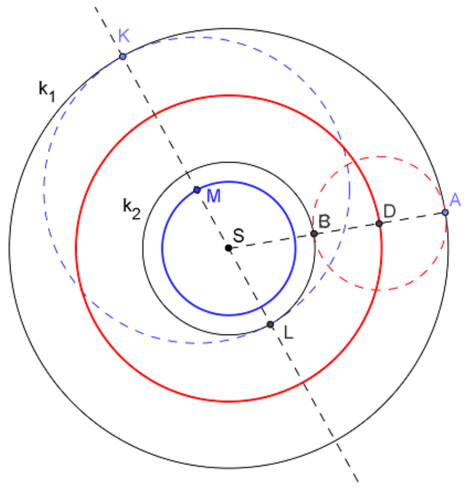
Důkaz:

Jelikož těžiště *T* rozděluje těžnice v poměru 1:2, pak vzdálenost $|ST| = \frac{1}{3}|SC|$. Bod *C* leží na Thaletově kružnici se středem *S* a poloměru $\frac{1}{2}|AB|$, protože se jedná o pravoúhlé trojúhelníky, pak $|SC| = |SB|$. Tedy $|ST| = \frac{1}{3}|SB| = \frac{1}{6}|AB|$.

Hledanou množinou je kružnice se středem v bodě *S* a poloměru $\frac{1}{6}|AB|$.

Příklad 9:

Známe dvě soustředné kružnice. Najděte množinu středů všech kružnic, které se dotýkají obou kružnic.



Obrázek 98 - příklad 9

GeoGebra - hledání pomocí nástroje Množina bodů:

Zde máme dvě možnosti, jak se kružnice mohou dotýkat soustředných kružnic. Musíme si najít středy dvou kružnic. Na kružnici k_1 si zvolíme dva libovolné body *A*, *K*. Body *A*, *K* vedeme přímky procházející středem *S*. Pomocí těchto přímek najdeme body *B*, *L*, které leží na kružnici k_2. Úsečka *AB*, *KL* jsou průměry hledaných kružnic. Nalezneme středy úseček *AB*, *KL*, které označíme písmeny *M*, *D*, tyto středy jsou středy hledaných kružnic. Tentokrát použijeme nástroj Množina bodů dvakrát. V prvním případě pohyblivým bodem bude bod *A* a bodem utvářejícím množinu bude bod *D*. V druhém případě pohyblivým bodem bude bod *K* a bodem utvářejícím množinu bude bod *M*.

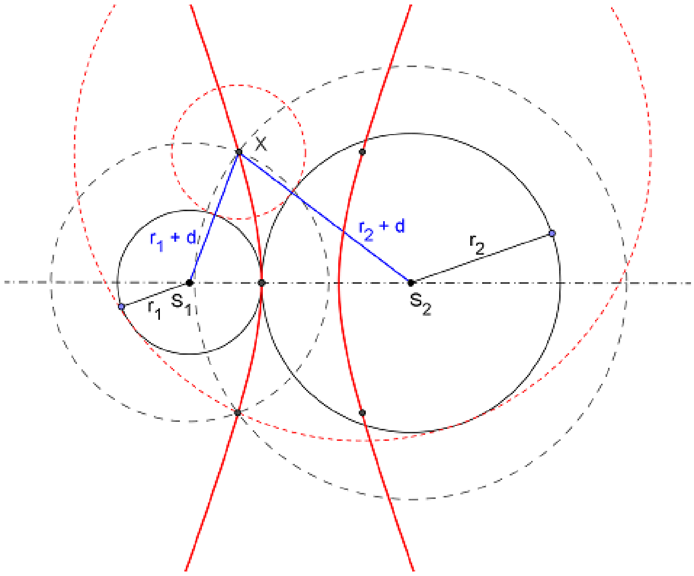
Hledanými množinami mohou být dvě kružnice.

První množinou bude kružnice se středem v bodě *S* a poloměru $|SD|$, kde *D* je střed dotykové kružnice. Střed *D* je středem úsečky *AB*.

Lze najít druhou množinu středů dotykových kružnic, kterou bude kružnice se středem v bodě S a poloměru $|SM|$, kde M je střed dotykové kružnice. Střed M je střed úsečky KL.

Příklad 10:

Známe dvě kružnice, které mají jeden společný bod. Najděte množinu středů všech kružnic, které se dotýkají obou kružnic.



Obrázek 99 - Příklad 10

GeoGebra - hledání pomocí nástroje Množina bodů:

Je třeba najít střed X kružnice, která se dotýká obou kružnic. Střed X najdeme pomocí kružnic se středy v bodech S_1, S_2 a poloměry $|r_1 + d|, |r_2 + d|$, kde bod X bude jejich průsečík. Parametr d si vytvořím pomocí posuvníku. V nástroji Množina bodů zvolíme posuvník d a bod X, který utváří množinu. Vidíme, že se nám vykreslila hyperbola s ohnisky S_1, S_2.

Důkaz:

Zjistíme, zda rozdíl průvodičů bodu X od středů kružnic je konstantní.

$$|S_1X| - |S_2X| = k\ (konstanta)$$

$$r_1 + d - (r_2 + d) = k$$

$$r_1 - r_2 = k$$

Hledanou množinou je hyperbola s ohnisky S_1, S_2.

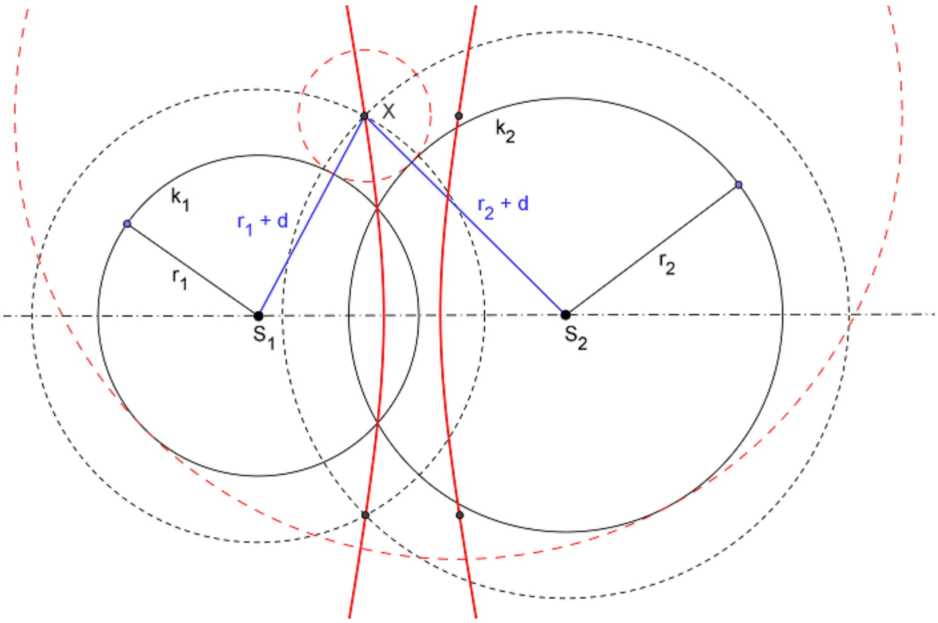
Příklad 11:

Známe dvě kružnice, které mají dva společné body. Najděte množinu středů všech kružnic, které se dotýkají obou kružnic ($k_1(S_1, r_1)$; $k_2(S_2, r_2)$).

Kružnice mohou mít vnitřní dotyk i vnější dotyk.

Nejdříve se podíváme, jak je to s vnějším dotykem.

Pokud budeme hledat kružnice, které mají vnější dotyk se zadanými kružnicemi k_1, k_2. pak množinou středů je hyperbola s ohnisky S_1, S_2.



Obrázek 100 - Příklad 11

GeoGebra - hledání pomocí nástroje Množina bodů:

Stejně jako v předchozím příkladu (příklad 10) je třeba najít střed X kružnice, která se dotýká obou kružnic. Střed X najdeme pomocí kružnic se středy v bodech S_1, S_2 a poloměry $|r_1 + d|$, $|r_2 + d|$, kde bod X bude jejich průsečík. Parametr d si opět vytvořím pomocí posuvníku. V nástroji Množina bodů zvolíme posuvník d a bod X, který utváří množinu. Vidíme, že se nám vykreslila hyperbola s ohnisky S_1, S_2.

Důkaz:

Zjistíme, zda rozdíl průvodičů bodu X od středů kružnic je konstantní.

$$|S_1X| - |S_2X| = k(konstanta)$$

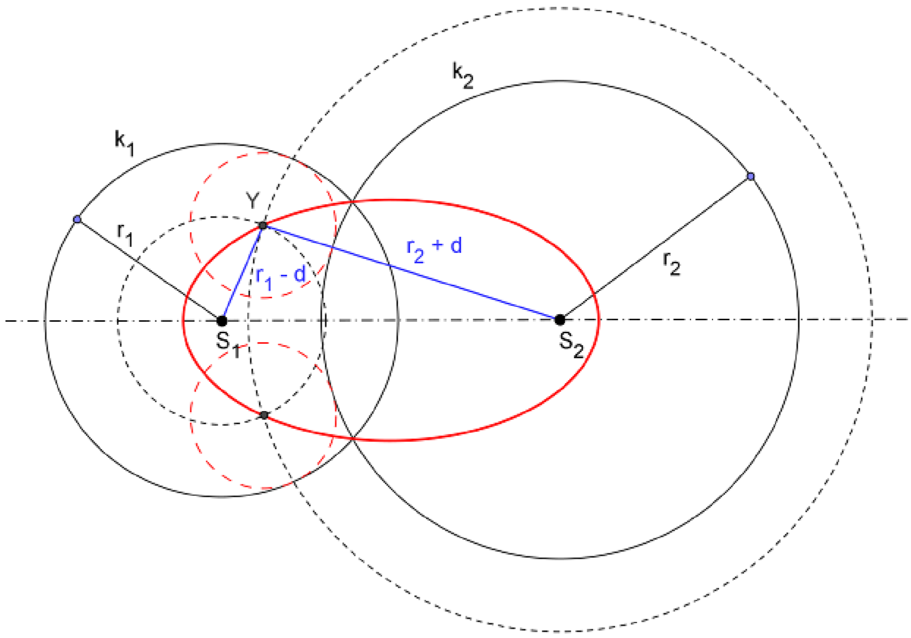
$$r_1 + d - (r_2 + d) = k$$

$$r_1 - r_2 = k$$

Hledanou množinou je hyperbola s ohnisky S_1, S_2.

Nyní se podíváme, jak je to s vnitřním dotykem.

Hledáme-li kružnice, které mají se zadanými kružnicemi k_1, k_2 vnitřní dotyk, pak hledanou množinou středů je elipsa s ohnisky S_1, S_2.



Obrázek 101 - Příklad 11

GeoGebra - hledání pomocí nástroje Množina bodů:

Opět je třeba najít střed Y kružnice, která se dotýká obou kružnic. Střed Y najdeme pomocí kružnic se středy v bodech S_1, S_2. Poloměry budou tentokrát $|r_1 - d|, |r_2 + d|$, kde bod Y bude jejich průsečík. Sestrojíme si posuvník d, který bude sloužit jako parametr. V nástroji Množina bodů zvolíme posuvník d a bod Y, který utváří množinu. Vidíme, že se nám vykreslila hyperbola s ohnisky S_1, S_2.

Důkaz:

Zjistíme, zda součet průvodičů bodu Y od středů kružnic je konstantní.

$$|S_1Y| + |S_2Y| = k\ (konstanta)$$

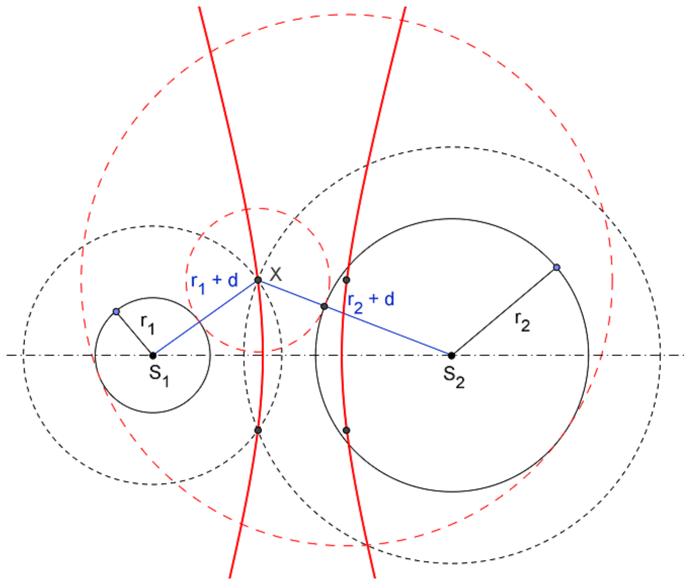
$$r_1 - d + (r_2 + d) = k$$

$$r_1 + r_2 = k$$

Hledanou množinou je elipsa s ohnisky S_1, S_2.

Příklad 12:

Známe dvě kružnice k_1, k_2, které nemají žádný společný bod. Najděte množinu středů všech kružnic, které se dotýkají obou kružnic ($k_1(S_1, r_1)$; $k_2(S_2, r_2)$).



Obrázek 102 - Příklad 12

GeoGebra - hledání pomocí nástroje Množina bodů:

V tomto příkladu je postup opět podobný jako v příkladu 10. Začneme tím, že si najdeme střed *X* kružnice, která se dotýká obou kružnic. Střed *X* najdeme pomocí kružnic se středy v bodech S_1, S_2 a poloměry $|r_1 + d|, |r_2 + d|$, kde bod *X* bude jejich průsečík. Zvolený posuvník *d* bude sloužit opět jako parametr. V nástroji Množina bodů zvolíme posuvník *d* a bod *X*, který utváří množinu. Vidíme, že se nám vykreslila hyperbola s ohnisky S_1, S_2.

Důkaz:

Zjistíme, zda rozdíl průvodičů bodu *X* od středů kružnic je konstantní.

$$|S_1X| - |S_2X| = k\ (konstanta)$$

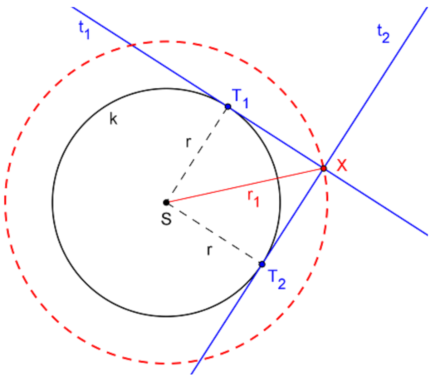
$$r_1 + d - (r_2 + d) = k$$

$$r_1 - r_2 = k$$

Hledanou množinou je hyperbola s ohnisky v bodech S_1, S_2.

Příklad 13:

Známe kružnici, najděte množinu všech průsečíků dvou na sebe kolmých tečen.



Obrázek 103 - Příklad 13

GeoGebra - hledání pomocí nástroje Množina bodů:

Na kružnici *k* si zvolíme libovolný bod T_1, kterým vedeme tečnu a pak k ní hledáme kolmou tečnu. Průsečík kolmých tečen označíme *X*. Zde stačí použít ihned nástroj Množina bodů, kde pohyblivým bodem bude bod T_1 a bodem, který utváří množinu, je bod *X*. Vykreslí se nám kružnice.

Důkaz:

Na obrázku je vidět, že čtyřúhelníkem ST_1XT_2 je čtverec. Je třeba zjistit, jaká je velikost úhlopříčky SX, která je zároveň poloměrem hledané množiny bodů X.

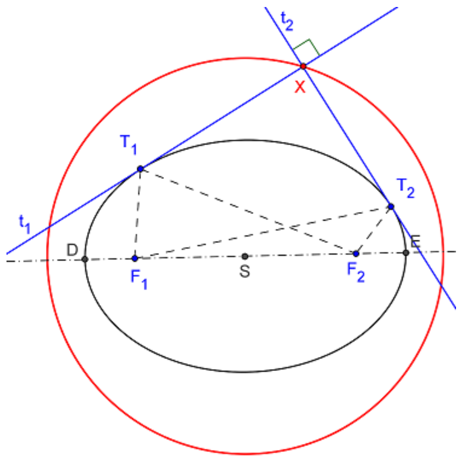
$$r_1{}^2 = r^2 + r^2$$

$$r_1 = \sqrt{r^2 + r^2} = \sqrt{2r^2} = r\sqrt{2}$$

Hledanou množinou je kružnice se středem v bodě S a poloměrem $|SX| = r_1 = r\sqrt{2}$, kde bod X je průsečíkem kolmých tečen.

Příklad 14:

Známe elipsu, najděte množinu všech průsečíků dvou na sebe kolmých tečen.



Obrázek 104 - Příklad 14

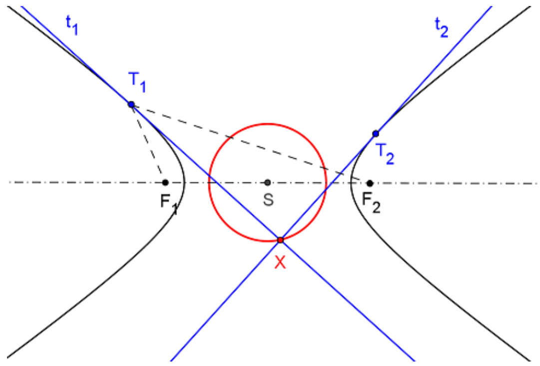
GeoGebra - hledání pomocí nástroje Množina bodů:

Na elipse si zvolíme libovolný bod T_1, kterým vedeme tečnu a pak k ní hledáme kolmou tečnu. Průsečík tečen označíme X. Použijeme nástroj Množina bodů, kde pohyblivým bodem bude bod T_1 a bodem, který utváří množinu, je bod X. Vykreslí se nám kružnice, která má střed ve středu S elipsy.

Hledanou množinou je kružnice se středem v bodě S a poloměrem $|SX|$, kde bod X je průsečíkem kolmých tečen.

Příklad 15:

Známe hyperbolu, najděte množinu všech průsečíků dvou na sebe kolmých tečen.



Obrázek 105 - Příklad 15

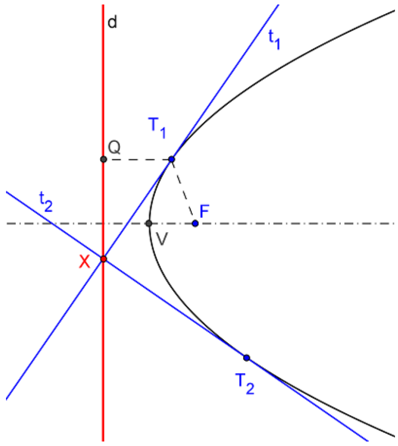
GeoGebra - hledání pomocí nástroje Množina bodů:

Na hyperbole si zvolíme libovolný bod T_1, kterým vedeme tečnu a pak k ní hledáme kolmou tečnu. Průsečík kolmých tečen označíme X. Použijeme nástroj Množina bodů, kde pohyblivým bodem bude bod T_1 a bodem, který utváří množinu, je bod X. Vykreslí se nám kružnice se středem v bodě S.

Hledanou množinou je kružnice se středem v bodě S a poloměrem $|SX|$, kde bod X je průsečíkem kolmých tečen.

Příklad 16:

Známe parabolu, najděte množinu všech průsečíků dvou na sebe kolmých tečen.



Obrázek 106 - Příklad 16

GeoGebra - hledání pomocí nástroje Množina bodů:

Na parabole si zvolíme libovolný bod T_1, kterým vedeme tečnu a pak k ní hledáme kolmou tečnu. Průsečík kolmých tečen označíme X. Použijeme nástroj Množina bodů, kde pohyblivým bodem bude bod T_1 a bodem, který utváří množinu, je bod X. Vykreslí se nám řídící přímka paraboly.

Důkaz:

S pomocí obrázku dokážeme.

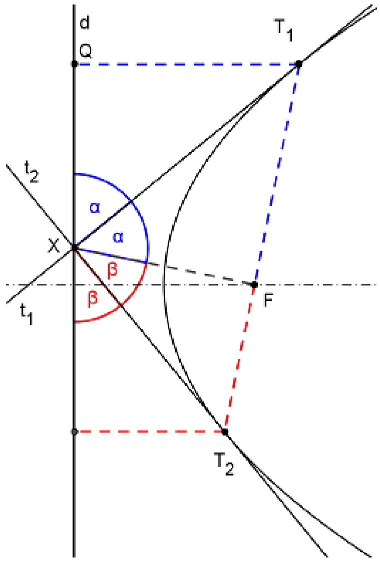
Z obrázku je patrné, že tečny t1, t2 jsou osami úhlů. Pro úhly platí

$$\alpha + \alpha + \beta + \beta = 180°$$

$$2\alpha + 2\beta = 180°$$

$$2(\alpha + \beta) = 180°$$

$$\alpha + \beta = 90°$$

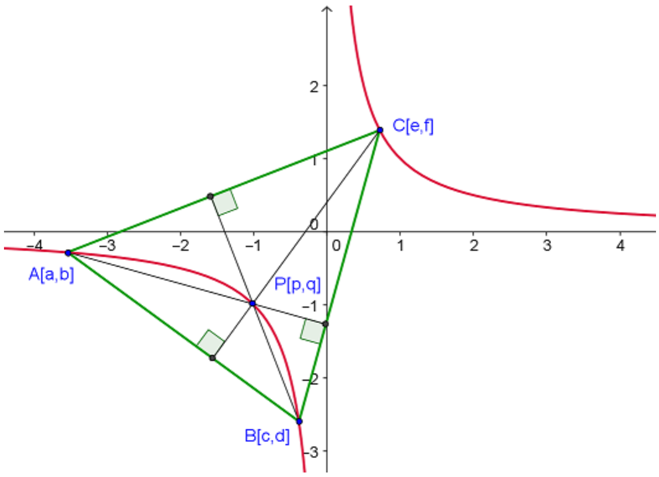


Obrázek 107 - Příklad 16 - důkaz

Hledanou množinou je řídící přímka *d*.

Příklad 17:

Určete množinu průsečíků výšek všech trojúhelníků, které mohou být vepsány rovnoosé hyperbole.



Obrázek 108 - Příklad 17

GeoGebra – hledání pomocí nástroje Množina bodů:

Sestrojíme si rovnoosou hyperbolu, na které si zvolíme body *A*, *B*, *C*. Body *A*, *B*, *C* jsou vrcholy v trojúhelníku. Dále si setrojíme výšky stran. Průsečík výšek označíme písmenem *P*. Pomocí nástroje Množina bodů nalezneme hledanou množinu, kde pohyblivým bodem bude jeden z vrcholů a bod, který vytváří množinu, je bod *P*. Vykreslí se nám rovnoosá hyperbola.

Důkaz:

Známe body $A = [a, b]$, $B = [c, d]$, $C = [e, f]$, $P = [p, q]$ a graf funkce $y = \frac{1}{x}$.

Souřadnice známých bodů dosadíme do grafu nepřímé úměrnosti a dostane

$$b = \frac{1}{a} \rightarrow ba - 1 = 0,$$

$$d = \frac{1}{c} \rightarrow dc - 1 = 0,$$

$$f = \frac{1}{e} \rightarrow fe - 1 = 0.$$

Dále potřebujeme podmínky, že jsou body různé

$$A \neq B \qquad (a - c)^2 + (b - d)^2 \neq 0,$$

$$B \neq C \qquad (c - e)^2 + (d - f)^2 \neq 0,$$

$$C \neq A \qquad (e - a)^2 + (f - b)^2 \neq 0,$$

$$[(a - c)^2 + (b - d)^2]t - 1 = 0,$$

$$[(c - e)^2 + (d - f)^2]t - 1 = 0,$$

$$[(e - a)^2 + (f - b)^2]t - 1 = 0.$$

Jelikož jsou výšky na strany kolmé, pak

$AB \perp CP$

$$\overrightarrow{AB} = (c - a, d - b)$$
$$\overrightarrow{CP} = (p - e, q - f)$$
$$(c - a)(p - e) + (d - b)(q - f) = 0$$

$BC \perp AP$

$$\overrightarrow{BC} = (e - c, f - d)$$
$$\overrightarrow{AP} = (p - a, q - b)$$
$$(e - c)(p - a) + (f - d)(q - b) = 0$$

$AC \perp BP$

$$\overrightarrow{AC} = (e - a, f - b)$$
$$\overrightarrow{BP} = (p - c, q - d)$$
$$(e - a)(p - c) + (f - b)(q - d) = 0$$

Využijeme program CoCoA, kam napíšeme:

```
Use R::=Q[a,b,c,d,e,f,t,p,q];

I:=Ideal(ba-1,dc-1,fe-1,(c-a)(p-e)+(d-b)(q-f),(e-c)(p-a)+(f-d)(q-b),((a-c)^2+(b-d)^2)((c-e)^2+(d-f)^2)((e-a)^2+(f-b)^2)t-1);

Elim(a..t,I);
```

A vyjde nám: `Ideal(pq - 1)`. Můžeme říct, že množinou průsečíků P je rovnoosá hyperbola, protože nám vyšlo $pq - 1 = 0$.

10. Závěr

Dle mého názoru je problematika kuželoseček velmi zajímavá a je hezké, že hledanými množinami jsou právě ony.

V práci jsem uvedla vlastnosti, které jsou probírány na základní, střední a vysoké škole, které jsem obohatila o věci pro mě nové.

K demonstraci obrázků jsem zvolila program GeoGebra, ve kterém se mi dobře pracuje. Zároveň mi pomáhal, abych se v daném problému zorientovala a to díky přehledným obrázkům, které lze v tomto programu vytvořit.

Tato práce by se dala využít středních a vysokých školách k rozšíření učiva. Některé části by se daly, dle mého názoru, využít i na základních školách.

11. Citovaná a použitá literatura

1. Pech, Pavel. *Kuželosečky.* České Budějovice : Jihočeská univerzita, 2004. 80-7040-755-7.

2. Karel Drábek, František Harant, Ota Setzer. *Deskriptivní geometrie I.* Praha : SNTL/ALFA, 1978. 04-011-78.

3. Miroslav Menšík, Ota Setzer, Karel Špaček. *Deskriptivní geometrie.* Praha : SNTL, 1966. 04-001-66.

4. Miroslav Menšík, Ota Setzer. *Deskriptivní geometrie 1.* Praha : SNTL, 1976. 04-001-76.

5. POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia: planimetrie*. 4., upr. vyd. Praha: Prometheus, 2000. Učebnice pro střední školy. ISBN 80-7196-174-4.

6. KOČANDRLE, Milan a Leo BOČEK. *Matematika pro gymnázia*. 3. vyd. Praha: Prometheus, 2009. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-390-5.

7. BYDŽOVSKÝ, Bohumil. *Úvod do analytické geometrie*. Vydání 2. Praha: Jednota českých matematiků a fysiků, 1946. Knihovna spisů mathematických a fysikálních.