



# VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

## FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

## ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

## NELINEÁRNÍ DYNAMICKÉ SYSTÉMY A CHAOS

NONLINEAR DYNAMICAL SYSTEMS AND CHAOS

### DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

### AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. Lukáš Tesař

### VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

doc. Ing. Luděk Nechvátal, Ph.D.

BRNO 2018

# Zadání diplomové práce

Ústav:	Ústav matematiky
Student:	<b>Bc. Lukáš Tesař</b>
Studijní program:	Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor:	Matematické inženýrství
Vedoucí práce:	<b>doc. Ing. Luděk Nechvátal, Ph.D.</b>
Akademický rok:	2017/18

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

## **Nelineární dynamické systémy a chaos**

### **Stručná charakteristika problematiky úkolu:**

O systému hovoříme jako o dynamickém v případě, kdy vykazuje určitou změnu stavu v závislosti na čase. Dynamický systém je obvykle vyjádřen soustavou diferenciálních rovnic, jež popisují tuto změnu. Důležitou otázkou je, zda lze předpovědět stav systému v budoucnosti. Lze očekávat, že nelineární dynamické systémy budou vykazovat podstatně komplexnější chování než lineární.

### **Cíle diplomové práce:**

Diplomant se seznámí se základními pojmy teorie nelineárních systémů jako je rovnovážný bod, stabilita a lokální (linearizovaná) stabilita, limitní cykly, bifurkace, deterministický chaos, atraktor, atd. Získané poznatky pak budou uplatněny při analýze vybraných reálných modelů. Dále se očekává, že student bude schopen počítačově implementovat numerické metody řešení, kterými bude ilustrována správnost dosažených analytických výsledků.

### **Seznam doporučené literatury:**

PERKO, L. Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos, 2nd ed. Springer. 2003. ISBN 978-0387001777.

STROGATZ, S. H. Nonlinear Dynamics and Chaos, 2nd ed. Westview Press. 2015. ISBN 978-0813349107.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2017/18

V Brně, dne

L. S.

---

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.  
ředitel ústavu

---

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.  
děkan fakulty

## **Abstrakt**

Diplomová práce pojednává o nelineárních dynamických systémech, zejména pak typických průvodních jevech jako jsou bifurkace nebo chaotické chování. Základní teoretické poznatky jsou aplikovány při analýze vybraných (chaotických) modelů, konkrétně, Lorenzova, Rösslerova a Chenova systému. Praktická část je pak zaměřena na numerickou simulaci s cílem potvrdit správnost teoretických výsledků. Zejména je vytvořen vlastní algoritmus pro výpočet největšího Ljapunovova exponentu (v prostředí MATLAB). Ten je základním nástrojem pro indikaci chaosu v systému.

## **Summary**

The diploma thesis deals with nonlinear dynamical systems with emphasis on typical phenomena like bifurcation or chaotic behavior. The basic theoretical knowledge is applied to analysis of selected (chaotic) models, namely, Lorenz, Rössler and Chen system. The practical part of the work is then focused on a numerical simulation to confirm the correctness of the theoretical results. In particular, an algorithm for calculating the largest Lyapunov exponent is created (under the MATLAB environment). It represents the main tool for indicating chaos in a system.

## **Klíčová slova**

dynamický systém, bod rovnováhy, bifurkace, deterministický chaos, Lorenzův systém

## **Keywords**

dynamical system, equilibrium point, bifurcation, deterministic chaos, Lorenz system

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci na téma „Nelineární dynamické systémy a chaos“ vypracoval samostatně, pod dohledem svého vedoucího a s pomocí uvedených zdrojů v seznamu použité literatury.

Bc. Lukáš Tesař



Děkuji svému vedoucímu panu doc. Ing. Luďkovi Nechvátalovi, Ph.D. za věcné připomínky, cenné rady a vstřícnost při konzultačních hodinách během vypracování mé závěrečné práce.

Bc. Lukáš Tesař

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Základní pojmy z teorie dynamických systémů</b>	<b>4</b>
2.1	Soustavy diferenciálních rovnice prvního řádu . . . . .	4
2.2	Dynamické systémy . . . . .	7
2.3	Ljapunovovská stabilita . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Jednodimenzionální případ</b>	<b>13</b>
3.1	Body rovnováhy a stabilita . . . . .	13
3.2	Stabilita linearizovaného systému . . . . .	14
3.3	Bifurkace . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Systémy druhého řádu</b>	<b>22</b>
4.1	Lineární soustava s konstantními koeficienty . . . . .	22
4.2	Nelineární systémy druhého řádu . . . . .	25
4.3	Bifurkace . . . . .	33
<b>5</b>	<b>Teorie chaosu a systémy třetího řádu</b>	<b>38</b>
5.1	Deterministický chaos . . . . .	38
5.2	Systémy třetího řádu . . . . .	43
<b>6</b>	<b>Závěr</b>	<b>57</b>



# 1 Úvod

Studium dynamických systémů začalo již v polovině 17. století a souvisí s objevem diferenciálních rovnic Isaacem Newtonem, což razantně změnilo pohled, jakým jsme do té doby vnímali okolní svět.

V práci se budeme zabývat nelineárními dynamickými systémy. Teorie nelineárních dynamických systémů v dnešní době nachází uplatnění v mnoha vědních oborech, jako je například geologie, biologie, robotika, ekonomika, populační dynamika, atp. Při práci s nelineárním systémem je zpravidla prvním krokem linearizace. Zatímco v mnoha případech je dostačující analýza linearizovaného systému, někdy je potřeba jít hlouběji, a využít typických nelineárních nástrojů, jako jsou bifurkace nebo Poincarého mapa.

Linearizace má dvě základní omezení. Zaprvé, linearizace je aproximace pouze v okolí vyšetřovaného bodu, takže může předpovědět pouze chování nelineárního systému v okolí vyšetřovaného bodu. Nemůže předpovědět chování mimo okolí vyšetřovaného bodu a už vůbec ne globální chování.

Zadruhé, dynamika nelineárního systému je daleko bohatší než dynamika lineárního systému. Existují typické nelineární jevy, které se vyskytují pouze v případě, že se v systému nachází nelineární člen a proto nemohou být popsány nebo předpovězeny lineárními modely. Mezi tyto jevy patří například:

- *Více izolovaných bodů rovnováhy*: lineární systém může mít pouze jeden izolovaný bod rovnováhy, zatímco nelineární systém může mít více než jeden izolovaný bod rovnováhy.
- *Limitní cykly*: aby lineární autonomní systém oscilloval musí mít dvojici vlastních čísel na imaginární ose. Takové řešení lze znázornit pomocí uzavřené trajektorie. Ostatní křivky řešení jsou pak taktéž uzavřené trajektorie, které jsou soustředné v bodě rovnováhy. V případě nelineárního systému může nastat případ, kdy uzavřená trajektorie bude pouze jedna, a ta bude ostatní trajektorie s rostoucím časem buď přitahovat, nebo odpuzovat.
- *Chaos*: nelineární systém může mít komplikovanější „ustálený“ stav, jímž není bod rovnováhy nebo periodická oscilace. Takovému chování se obvykle říká chaos. I přes deterministickou povahu systému se při chaosu může vyskytovat náhodnost chování, která je způsobena nelinearitou systému. Hlavní „ingrediencí“ chaosu je citlivost na počátečních podmínkách, kdy při dvou velmi blízkých počátečních podmínkách se již po uplynutí krátkého času budou trajektorie chovat naprosto rozdílně.

Pojem chaos tedy úzce souvisí s problematikou nelineárních dynamických systémů. Existuje mnoho dynamických systémů vykazujících chaotické chování. V této práci je podrobněji rozebrán Lorenzův systém, který je prototypem takového systému. Byl sestavený americkým matematikem a meteorologem Edwardem Lorenzem v roce 1963, který se tak stal průkopníkem teorie chaosu. Jako první také zavedl pojem podivného atraktoru. Druhým vybraným systémem je Rösslerův systémem z roku 1976, který má své uplatnění v chemických reakcích a je pravděpodobně nejjednodušším spojitým systémem, který vykazuje chaotické chování. Posledním uvedeným systémem pak bude systém čínského elektrotechnika Guanronga Chena z roku 1999. Ten tento systém objevil při deregulaci chaosu ve smyslu, že z nechaotického systému udělal systém chaotický [7].

I přesto, že Edward Lorenz je považován za průkopníka v oblasti teorie chaosu, tak kořeny této teorie lze datovat již k roku 1900 a lze je spojit se jménem Henri Poincaré. Tento francouzský matematik ve své práci o pohybu tří objektů se vzájemnou gravitační silou (tzv. problém tří těles) objevil, že mohou existovat trajektorie, které jsou neperiodické a ani se neustálí v bodě rovnováhy. Narazil tedy na možnost chaotického chování. Tyto poznatky však zůstaly v pozadí během první poloviny 20. století, kdy bylo upřednostněno studium dynamiky nelineárního oscilátoru a jeho aplikace ve fyzice a inženýrství (tyto oscilátory později vedly k objevení nových technologií mezi něž patřilo rádio, radar nebo lasery).

Jak je vidět podle let objevení výše uvedených systémů, tak se jedná o vcelku nové odvětví matematiky, s čímž je spjata skutečnost, že terminologie v oblasti teorie chaosu není ustálena.

Vlastní přínos práce spočívá v sestavení algoritmu pro numerické simulace za účelem potvrzení teoretických výsledků u uvedených dynamických systémů.

Práce má následující strukturu. Kapitola druhá uvádí teoretické základy soustav diferenciálních rovnic prvního řádu a definuje pojem dynamického systému. V kapitole třetí je rozebrán jednodimenzionální případ dynamického systému, na němž je vysvětlen pojem bifurkace. Kapitola čtvrtá pojednává o dynamických systémech druhého řádu, rozšiřuje bifurkační teorii a uvádí některé nelineární jevy, jako je například limitní cyklus. Závěrečná kapitola se věnuje teorii okolo deterministického chaosu a uvádí ukázky chaotických dynamických systémů, na kterých jsou aplikovány teoretické poznatky. V závěru této kapitoly je taktéž porovnání teoretických výsledků s hodnotami zjištěných pomocí vlastního algoritmu.

Součástí práce je několik ukázkových příkladů, které by měly poskytnout lepší porozumění dané problematice a praktická aplikace nabytých znalostí a napočítaných výsledků.

Práce čerpá převážně z pramenů [1], [3], [5], [6], kde lze nalézt také důkazy k uvedeným tvrzením.

## 2 Základní pojmy z teorie dynamických systémů

V této kapitole nadefinujeme základní pojmy z teorie soustav diferenciálních rovnic, které nám posléze pomohou při analýze dynamických systémů.

### 2.1 Soustavy diferenciálních rovnice prvního řádu

Dynamické systémy jsou popsány soustavou diferenciálních rovnic prvního řádu. Soustavu  $n$  diferenciálních rovnic 1. řádu ve tvaru

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(t, x_1, \dots, x_n), \\ \dot{x}_2 &= f_2(t, x_1, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(t, x_1, \dots, x_n),\end{aligned}\tag{1}$$

kde funkce  $f_1, \dots, f_n$  jsou definovány na nějaké  $(n+1)$ -rozměrné oblasti  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ , nazveme *soustavou obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu v normálním tvaru (SODR1)*.  $\dot{x}_i$  udává časovou derivaci  $x_i$ -té proměnné. Pro zjednodušení můžeme soustavu (1) zapísat vektorově

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}).\tag{2}$$

**Definice 2.1.** Řešením soustavy (1) na intervalu  $J$  nazveme každou vektorovou funkci  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$  definovanou na  $J$ , která zde má derivaci  $\dot{\mathbf{x}}$  a platí, že dosazením do soustavy (1) dostaneme identickou rovnost pro  $\forall t \in J$  tj.  $(\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)), \forall t \in J)$ .

Pokud je  $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$  navíc spojitá na  $\Omega$ , musí řešení  $\mathbf{x}(t)$  mít derivaci spojitou na  $J$ . Spojitost  $\mathbf{f}$  je přirozeným požadavkem, zaručuje totiž existenci řešení (viz níže). Dále tedy budeme hledat řešení vždy ve třídě  $C^1(J)$  (funkce spojitě diferencovatelné na  $J$ ).

Doplníme-li soustavu (1)  $n$ -ticí počátečních podmínek

$$x_1(t_0) = x_1^0, x_2(t_0) = x_2^0, \dots, x_n(t_0) = x_n^0$$

(zkráceně  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ ), kde  $[t_0, x_1^0, \dots, x_n^0] \in \Omega$ , pak úlohu nalézt řešení soustavy (1), které vyhovuje těmto podmínkám, nazýváme *počáteční (Cauchyovou) úlohou*.

Pokud vektorová funkce  $\mathbf{f}$  na pravé straně soustavy (1) nezávisí explicitně na  $t$ , hovoříme o *autonomní soustavě* a máme tedy

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}),\tag{3}$$

kde  $\mathbf{f}$  je definována na nějaké oblasti  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ . Poznamenejme, že každý neautonomní systém může být převeden na systém autonomní, když položíme  $x_{n+1} = t$  a k soustavě přidáme rovnici  $\dot{x}_{n+1} = 1$ .

Klíčovou vlastností autonomních soustav je, že když funkce  $\mathbf{x}_1$  řeší soustavu s počáteční podmínkou  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ , pak i funkce  $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1(t-t_0)$  řeší soustavu s počáteční podmínkou  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ . To plyne ihned z faktu, že položíme-li  $s = t - t_0$ , pak  $x_2(t) = x_1(s)$  a

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}_2(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{x}_1(s) = \frac{d}{ds}\mathbf{x}_1(s)\frac{ds}{dt} = \frac{d}{ds}\mathbf{x}_1(s) \cdot 1 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_1(s)) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_2(t)),$$

přičemž  $\mathbf{x}_2(t_0) = \mathbf{x}_1(t_0 - t_0) = \mathbf{x}_1(0) = \mathbf{x}_0$ .

Volně řečeno tedy, interpretujeme-li  $t$  jako čas, tak v případě autonomních soustav nezáleží na okamžiku, kdy chování řešení soustavy začneme pozorovat, ale pouze na hodnotě počáteční podmínky (podmínky pro vývoj řešení v čase dané pravou stranou soustavy se nemění).

Dále tedy budeme brát (bez újmy na obecnosti) počátek vždy v  $t_0 = 0$ , tj. budeme uvažovat následující počáteční úlohu

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}), \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0,\end{aligned}\tag{4}$$

kde vektorové pole  $\mathbf{f}$  je definováno na nějaké oblasti  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  a  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ .

V této sekci uvedeme základní větu, která poskytuje postačující podmínky na jednoznačnou řešitelnost úlohy (4) za předpokladu, že  $\mathbf{f} \in C^1(\Omega)$ .

**Věta 2.2** (Picardova-Lindelöfova). *Nechť  $\mathbf{f} \in C^1(\Omega)$ . Potom existuje  $a > 0$  takové, že (4) má jediné řešení  $\mathbf{x} \in C^1(\langle -a, a \rangle)$ .*

Poznamenejme nyní několik věcí:

- Předpoklad spojitosti parciálních derivací na  $\Omega$  lze nahradit předpokladem, že  $\mathbf{f}$  splňuje Lipschitzovu podmínku na  $\Omega$ :

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})\| < L\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^1, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega\tag{5}$$

a vhodné  $L > 0$ . Dokonce stačí, když  $\mathbf{f}$  je lokálně Lipschitzovská, tj. podmínka (5) je splněna na nějakém okolí každého bodu  $\mathbf{x}^* \in \Omega$  (konstanta  $L$  tedy může být pro každý bod  $\mathbf{x}^*$  a jeho okolí různá).

- Lze ukázat, že předpoklad  $\mathbf{f} \in C^1(\Omega)$  implikuje lokální Lipschitzovskost.
- Kromě věty 2.2 existuje i jiná existenční věta a to *Peanova existenční věta*. Rozdíl mezi těmito větami je ten, že Picardova–Lindelöfova věta má silnější předpoklady, ale i silnější tvrzení: vyžaduje Lipschitzovskou spojitost, zatímco Peanova věta vyžaduje pouze obyčejnou spojitost. Picardova–Lindelöfova věta ale zaručuje jak existenci tak jednoznačnost řešení, zatímco Peanova věta zaručuje pouze existenci řešení.
- Ve vztahu k dynamickým systémům není tvrzení až tak užitečné, protože zaručuje pouze lokální řešitelnost. V dalším se tedy budeme zabývat otázkou, za jakých okolností bude mít počáteční úloha (4) řešení na celé reálné ose.

**Věta 2.3.** *Nechť  $\mathbf{f}$  splňuje Lipschitzovu podmínku na  $\Omega = \mathbb{R}^n$ , tj.*

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})\| < L\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

*Pak existuje jediné řešení  $\mathbf{x} \in C^1(\mathbb{R})$  úlohy (4).*

**Věta 2.4.** *Nechť  $\mathbf{f} \in C^1(M)$ , kde  $M$  je kompaktní podmnožinou <sup>2</sup>  $\mathbb{R}^n$ . Nahradíme-li v soustavě (4) oblast  $\Omega$  množinou  $M$ , pak (4) má (pro jakékoliv  $\mathbf{x}_0 \in M$ ) jediné řešení  $\mathbf{x} \in C^1(\mathbb{R})$ .*

<sup>1</sup>Libovolná norma na  $\mathbb{R}^n$ .

<sup>2</sup>Kompaktní množina je uzavřená a ohraničená množina.

## 2 ZÁKLADNÍ POJMY Z TEORIE DYNAMICKÝCH SYSTÉMŮ

Poznamenejme, že řešení počáteční úlohy (4) na nějakém intervalu  $J$  lze geometricky interpretovat buď pomocí grafu zobrazení  $\mathbf{x}$ , tj. jako množinu  $G = \{[t, \mathbf{x}(t)] : t \in J\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$  – *integrální křivka řešení*, nebo pomocí množiny  $T = \{\mathbf{x}(t) : t \in J\} \subset \mathbb{R}^n$  – *fázová trajektorie řešení*.

Tyto dva pojmy se týkají jednotlivých řešení úlohy (4), tj. případ, kdy počáteční vektor  $\mathbf{x}_0$  v úloze (4) považujeme za pevný. Pokud na počáteční vektor  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$  nahlížíme jako na proměnlivý, pak dané „sadě“ řešení říkáme *tok*. Přesněji, uvažujeme-li  $C^1$  vektorové pole  $\mathbf{f}$  definované na  $\mathbb{R}^n$  (nebo na nějaké oblasti  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ), pak *tokem diferenciální soustavy* rovnic (3) rozumíme vektorovou funkci

$$\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

definovanou jako

$$\varphi(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}(t),$$

kde  $\mathbf{x}$  je řešení počáteční úlohy (4). Platí tedy

$$\varphi(0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0, \quad \frac{d}{dt}\varphi(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{f}(\varphi(t, \mathbf{x}_0))$$

$\forall t$  z nějakého intervalu  $J \in \mathbb{R}$ . Tok  $\varphi(t, \mathbf{x}_0)$  bývá obvykle značen  $\varphi_t(\mathbf{x}_0)$ . Pokud nemáme zaručenou globální řešitelnost úlohy (4), za uvažovaný interval  $J$  bereme maximální interval existence, ten však může být pro každý počáteční vektor  $\mathbf{x}_0$  jiný, tj. máme  $J = J(\mathbf{x}_0)$ . Lze ukázat, že tok je potom definován na podmnožině množiny

$$M = \{[t, \mathbf{x}_0] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : t \in J(\mathbf{x}_0)\}$$

a pro každé  $t \in J(\mathbf{x}_0)$  je  $\varphi_t \in C^1(\mathbb{R}^n)$ <sup>3</sup>. Navíc, tok splňuje důležitou vlastnost

$$\varphi_{s+t}(\mathbf{x}_0) = \varphi_s(\varphi_t(\mathbf{x}_0)).$$

*Poznámka.* Za maximální interval existence považujeme otevřený interval  $(\alpha, \beta)$ , na kterém má počáteční úloha (4) jednoznačné řešení, pro každý bod  $\mathbf{x}_0 \in E$ , kde  $E$  je otevřená podmnožina  $\mathbb{R}^n$ .

Závěrem této sekce uveďme ještě další dvě užitečné vlastnosti řešení úlohy (4), kterými jsou spojitá závislost na počáteční podmínce (na vektoru počátečních podmínek) a spojitá závislost řešení na parametru. Přesněji platí:

**Věta 2.5.** *Nechť  $\mathbf{f} \in C^1(\Omega)$  a  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ . Pak existují čísla  $a > 0$ ,  $\delta > 0$  taková, že pro  $\forall \mathbf{y} \in O_\delta(\mathbf{x}_0)$  má počáteční úloha*

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{y} \end{aligned}$$

*jediné řešení  $\mathbf{x}(t, \mathbf{y})$  takové, že  $\mathbf{x} \in C^1(Q)$ , kde*

$$Q = \langle -a, a \rangle \times O_\delta(\mathbf{x}_0) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}.$$

*Navíc pro každé  $\mathbf{y} \in \Omega$  je*

$$\mathbf{x}(\cdot, \mathbf{y}) \in C^2(\langle -a, a \rangle).$$

---

<sup>3</sup> $\Omega = \mathbb{R}^n$ .

Tvrzení tedy říká, že dvě řešení pro dvě „blízké“ počáteční podmínky zůstanou na intervalu  $\langle -a, a \rangle$  „blízké“ a

$$\lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}_0} \mathbf{x}(t, \mathbf{y}) = \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0), \quad \forall t \in \langle -a, a \rangle.$$

**Věta 2.6.** *Nechť  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ ,  $Q$  je otevřená podmnožina  $\mathbb{R}^n$ ,  $\boldsymbol{\mu}_0 \in Q$  a  $\mathbf{f} \in C^1(\Omega \times Q)$ . Pak existují čísla  $a > 0$ ,  $\delta > 0$  taková, že  $\forall \mathbf{y} \in O_\delta(\mathbf{x}_0)$  a  $\forall \boldsymbol{\mu} \in O_\delta(\boldsymbol{\mu}_0)$  má počáteční úloha*

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{y} \end{aligned}$$

*jediné řešení  $\mathbf{x}(t, \mathbf{y}, \boldsymbol{\mu})$  takové, že*

$$\mathbf{x} \in C^1(\langle -a, a \rangle \times O_\delta(\mathbf{x}_0) \times O_\delta(\boldsymbol{\mu}_0)).$$

## 2.2 Dynamické systémy

V této sekci přejdeme k definici *dynamického systému*, který bude hrát klíčovou roli v následujících kapitolách. Obvykle bývá definován následovně:

**Definice 2.7** (spojitý dynamický systém). Nechť  $\Omega$  je oblast v  $\mathbb{R}^n$ . Dynamickým systémem na  $\Omega$  rozumíme jakékoliv  $C^1$ -zobrazení  $\varphi$  definované na  $\mathbb{R} \times \Omega$  s hodnotami v  $\Omega$ , které splňuje

$$\varphi(0, \mathbf{x}) = \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad (6)$$

$$\varphi(s, \varphi(t, \mathbf{x})) = \varphi(s + t, \mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \forall t, s \in \mathbb{R}. \quad (7)$$

Při značení  $\varphi_t(\mathbf{x}) \equiv \varphi(t, \mathbf{x})$  tedy máme  $\varphi_0(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$  a  $\varphi_s(\varphi_t(\mathbf{x})) = \varphi_{s+t}(\mathbf{x})$ , což jsou vlastnosti, které splňoval tok autonomní soustavy  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ . V případě dynamického systému se však vyžaduje, aby vlastnost (7) platila na celé reálné ose (a ne jenom na intervalu  $J(\mathbf{x}) \subseteq \mathbb{R}$ ). Obecně, každý dynamický systém  $\varphi$  na  $\Omega$  definuje vektorové pole

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \left. \frac{d}{dt} \varphi(t, \mathbf{x}) \right|_{t=0}$$

na  $\Omega$  takové, že pro libovolné  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$  je funkce  $\varphi(t, \mathbf{x}_0)$  řešením počáteční úlohy. Naopak toto obecně neplatí, protože  $C^1$ -vektorové pole  $\mathbf{f}$  na  $\Omega$  nezaručí řešení počáteční úlohy (4) na celém  $\mathbb{R}$  (jedná se o již zmíněnou vlastnost, kdy v případě nelineární rovnice/soustavy může řešení „utéct“ do nekonečna v konečném čase).

V každé soustavě s  $C^1$ -vektorovým polem  $\mathbf{f}$  je však možné „přeškálovat“ čas tak, že nová soustava bude mít v jistém smyslu blízké řešení původní soustavy, ale toto řešení již bude definované na celé reálné ose. Za tímto účelem zavádíme pojem topologické ekvivalence dvou soustav ODR.

**Definice 2.8.** Nechť  $\mathbf{f} \in C^1(\Omega_1)$ ,  $\mathbf{g} \in C^1(\Omega_2)$ , kde  $\Omega_1, \Omega_2$  jsou oblasti v  $\mathbb{R}^n$ . Potom autonomní soustavy  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  a  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$  nazveme *topologicky ekvivalentní*, jestliže existuje homeomorfismus<sup>4</sup>  $H : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ , který zobrazuje trajektorie první soustavy na trajektorie soustavy druhé a zachovává jejich orientaci v čase.

<sup>4</sup>Vzájemně jednoznačné zobrazení mezi topologickými prostory, které zachovává topologické vlastnosti.

## 2 ZÁKLADNÍ POJMY Z TEORIE DYNAMICKÝCH SYSTÉMŮ

*Poznámka.* Za předpokladů předchozí definice říkáme také, že vektorová pole  $\mathbf{f}, \mathbf{g}$  jsou topologicky ekvivalentní. Pokud  $\Omega = \Omega_1 = \Omega_2$ , tak řekneme, že soustavy a příslušná vektorová pole  $\mathbf{f}, \mathbf{g}$  jsou topologicky ekvivalentní na  $\Omega$ .

**Příklad 2.9.** Soustavy (v tomto případě o jedné rovnici)

$$\dot{\mathbf{x}} = x^2, \quad \dot{\mathbf{x}} = \frac{x^2}{1+x^2}$$

jsou topologicky ekvivalentní na  $\mathbb{R}$ . První rovnice má pro počáteční podmínku  $x(0) = x_0$  řešení definované na  $(-\infty, x_0^{-1})$  pro  $x_0 > 0$ , na  $(x_0^{-1}, -\infty)$  pro  $x_0 < 0$  a na  $(-\infty, \infty)$  pro  $x_0 = 0$ . Tato rovnice tedy nepředstavuje dynamický systém. Druhá rovnice má řešení definované již na celé reálné ose. Funkce, která zde „přeskakuje“ čas na celou reálnou osu je dána vztahem

$$\tau(t) = t + \frac{x_0^2 t}{1 - x_0 t}$$

pro  $x_0 \neq 0$  a  $\tau(t) = 0$  pro  $x_0 = 0$ . Protože trajektorie obou rovnic v čase  $t = 0$  procházejí bodem  $x_0$ , tak příslušný homeomorfismus je zde identita.

Uvedený příklad naznačuje obecné pravidlo formulované v následující větě.

**Věta 2.10.** *Nechť  $\mathbf{f} \in C^1(\mathbb{R}^n)$ . Potom počáteční úloha*

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x})}{1 + \|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

*má jediné řešení na  $\mathbb{R}$ . Navíc soustavy*

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \dot{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x})}{1 + \|\mathbf{f}(\mathbf{x})\|}$$

*jsou topologicky ekvivalentní na  $\mathbb{R}^n$  (příslušným homeomorfismem je zde identické zobrazení a část je transformována vztahem  $\int_0^t (1 + \|f(x(s))\|) ds$ ).*

*Poznámka.* Tvrzení obecně neplatí, pokud bychom uvažovali oblast  $\Omega$ , která je vlastní podmnožinou  $\mathbb{R}^n$ , nicméně, čas lze v takovém případě „přeskálovat“ vhodněji tak, že dostaneme nové vektorové pole  $\mathbf{F}$ , které je topologicky ekvivalentní s  $\mathbf{f}$  na  $\Omega$ , a které dává řešení definovaná na celé reálné ose. Bez újmy na obecnosti lze tedy vyslovit závěr, že každá soustava

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

s  $C^1$ -vektorovým polem  $\mathbf{f}$  na  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  představuje nějaký dynamický systém.

### 2.3 Ljapunovská stabilita

Pojem (Ljapunovské) stability řešení patří mezi základní nástroje při vyšetřování „dlouhodobého“ chování dynamických systémů.

**Definice 2.11.**

- a) Řekneme, že řešení  $\mathbf{x}(t) = \varphi_t(x_0)$  počáteční úlohy (4) je *stabilní* (v Ljapunovově smyslu), jestliže pro každé  $\varepsilon > 0$  existuje  $\delta > 0$  takové, že pro každý vektor  $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$  splňující  $\|\mathbf{y}_0 - \mathbf{x}_0\| < \delta$  platí

$$\|\mathbf{y}(t) - \mathbf{x}(t)\| < \varepsilon$$

$\forall t \in \langle 0, \infty \rangle$ . Funkce  $\mathbf{y}$  je zde řešení rovnice  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ , ale s počáteční podmínkou  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{y}_0$ , tj.  $\mathbf{y}(t) = \varphi_t(\mathbf{y}_0)$ .

- b) Pokud je řešení  $\mathbf{x}(t)$  z bodu a) stabilní a navíc platí

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{y}(t) - \mathbf{x}(t)\| = 0,$$

řekneme, že řešení  $\mathbf{x}$  je *asymptoticky stabilní*.

- c) Řekneme, že řešení  $\mathbf{x}$  je *nestabilní*, jestliže není stabilní.

*Poznámka.*

- a) Vágně řečeno, řešení  $\mathbf{x}$  je stabilní, pokud trajektorie řešení začínající „blízko“ trajektorie řešení  $\mathbf{x}$  zůstanou stále „blízko“. V případě asymptotické stability se požaduje, aby trajektorie nejenom zůstaly blízko, ale aby konvergovaly k trajektorii řešení  $\mathbf{x}$ .
- b) Je-li pro dostatečně blízké počáteční vektory  $\mathbf{y}_0$  splněna podmínka  $\|\mathbf{y}(t) - \mathbf{x}(t)\| \rightarrow 0$  pro  $t \rightarrow \infty$  z části b) definice, říkáme, že řešení  $\mathbf{x}$  je *(lokálně) atraktivní*. Pokud tato podmínka platí pro libovolný vektor  $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ , pak řekneme, že řešení  $\mathbf{x}$  je *globálně atraktivní*. Sama atraktivita řešení ještě neimplikuje stabilitu řešení. Poznamenejme, že někteří autoři používají pojmy lokálně (asymptoticky) stabilní, resp. globálně (asymptoticky) stabilní. Je tomu zejména v případě lineárních systémů, kdy atraktivita řešení  $\mathbf{x}$  implikuje asymptotickou stabilitu řešení (ve smyslu předchozí definice b))

Některá řešení autonomní soustavy jsou v jistém slova smyslu významnější než jiná. Mezi taková řešení patří v první řadě konstantní (časem neměnné) řešení.

**Definice 2.12.** Bod  $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$  se nazývá *bodem rovnováhy* (*ekvilibriem*, *stacionárním bodem*, *pevným bodem*) autonomní soustavy  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ , jestliže

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}.$$

Pro body rovnováhy se definice stability modifikuje následovně:

**Definice 2.13.**

- a) Řekneme, že bod rovnováhy  $\mathbf{x}^*$  soustavy  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  je stabilní, jestliže  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ :

$$\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\| < \varepsilon, \quad \forall t \in \langle 0, \infty \rangle.$$



## 2 ZÁKLADNÍ POJMY Z TEORIE DYNAMICKÝCH SYSTÉMŮ

b) Je-li bod rovnováhy  $\mathbf{x}^*$  stabilní a navíc

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\| = 0,$$

pak řekneme, že je asymptoticky stabilní.

c) Řekneme, že bod rovnováhy  $\mathbf{x}^*$  je nestabilní, jestliže není stabilní.

*Poznámka.* Vyšetřování stability nějakého řešení  $\mathbf{u}$  soustavy  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  lze vhodnou substitucí převést na vyšetřování stability bodu rovnováhy, a to dokonce nulového bodu rovnováhy. Položme

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{u}(t).$$

Potom

$$\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{f}(\mathbf{v} + \mathbf{u}) - \mathbf{f}(\mathbf{u}).$$

Označíme-li

$$\mathbf{g}(\mathbf{v}) = \mathbf{f}(\mathbf{v} + \mathbf{u}) - \mathbf{f}(\mathbf{u}),$$

pak soustava  $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{g}(\mathbf{v})$  má zřejmě bod rovnováhy  $\mathbf{v}^* = \mathbf{0}$ .

Vyšetřování stability řešení není obecně jednoduché, protože definice vyžaduje znalost řešení (pro určitou množinu počátečních podmínek). V případě nelineárních soustav však toto řešení lze analyticky málokdy nalézt. Je tedy vhodné mít k dispozici nějaký nástroj, kterým bychom o stabilitě mohli rozhodnout, aniž bychom řešení znali. Prvním takovým nástrojem je metoda linearizace nelineární soustavy. Ukazuje se totiž, že za určitých předpokladů se nelineární soustava v okolí bodu rovnováhy chová jako lineární soustava v okolí počátku, kde matice soustavy je určena Jacobiho maticí vyšetřovaného pole  $\mathbf{f}$  vyčíslenou v bodě rovnováhy.

### Definice 2.14.

- Bod rovnováhy  $\mathbf{x}^*$  soustavy  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  se nazývá hyperbolický jestliže žádná z vlastních hodnot Jacobiho matice  $\mathbf{f}'(\mathbf{x}^*)$  nemá nulovou reálnou část.
- Lineární soustava  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  s maticí  $\mathbf{A} = \mathbf{f}'(\mathbf{x}^*)$  se nazývá linearizace soustavy  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  v bodě  $\mathbf{x}^*$ .
- Bod rovnováhy se nazývá *odtokem (výlevkou)*, jestliže všechna vlastní čísla Jacobiho matice  $\mathbf{f}'(\mathbf{x}^*)$  mají záporné reálné části, nazývá se *zdrojem* jestliže všechna vlastní čísla matice  $\mathbf{f}'(\mathbf{x}^*)$  mají kladné reálné části, nazývá se *sedlem*, jestliže všechna vlastní čísla matice  $\mathbf{f}'(\mathbf{x}^*)$  mají nenulové reálné části a alespoň jedno vlastní číslo má kladnou reálnou část a alespoň jedno zápornou reálnou část.

**Věta 2.15** (Hartmanova–Grobmanova). *Nechť  $\mathbf{x}^*$  je hyperbolický bod rovnováhy soustavy  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  s  $C^1$ -vektorovým polem  $\mathbf{f}$  na oblasti  $\Omega$  obsahující  $\mathbf{x}^*$ . Potom existují okolí  $U(\mathbf{x}^*)$  a  $V(\mathbf{0})$  taková, že vektorová pole  $\mathbf{f}$  a  $\mathbf{f}'(\mathbf{x}^*)\mathbf{x}$  jsou zde topologicky ekvivalentní.*

*Poznámka.* Píšeme-li řešení lineární soustavy  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  jako  $\mathbf{x} = e^{\mathbf{A}t}$ , kde

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{A}}{1!}t + \frac{\mathbf{A}^2}{2!}t^2 + \dots,$$

pak předchozí věta říká, že existuje homeomorfismus  $h : U \rightarrow V$  takový, že

$$h(\varphi_t(\mathbf{x}_0)) = e^{At}h(\mathbf{x}_0), \quad \forall \mathbf{x}_0 \in U$$

(tj. trajektorie v okolí bodu rovnováhy původní nelineární soustavy se spojitě transformují na trajektorie příslušné linearizované soustavy v okolí počátku).

**Věta 2.16.** *Nechť  $\mathbf{f} \in C^1(\Omega)$  a  $\mathbf{x}^*$  je hyperbolický bod rovnováhy soustavy  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ . Je-li  $\mathbf{x}^*$  výlevkou, pak je asymptoticky stabilní a je-li zdrojem nebo sedlem, tak je nestabilní.*

*Poznámka.*

- a) Hyperbolický bod je tedy buď asymptoticky stabilní, nebo je nestabilní (nemůže být stabilní a při tom ne asymptoticky stabilní).
- b) Je-li  $\mathbf{x}^*$  odtokem, pak rychlost poklesu okolních trajektorií je exponenciální, tj. pro dané  $\varepsilon > 0$  existuje  $O_\delta(\mathbf{x}^*)$  takové, že tok splňuje

$$|\varphi_t(\mathbf{x}) - \mathbf{x}^*| \leq \varepsilon e^{-\alpha t}, \quad \forall \mathbf{x} \in O_\delta(\mathbf{x}^*),$$

$$\text{kde } \alpha = \min_j \{|\operatorname{Re}(\lambda_j)|\}.$$

*Poznámka.* Stabilita bodů rovnováhy pro lineární autonomní systémy  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  může být plně vyšetřena pomocí vlastních čísel matice  $\mathbf{A}$ .

### Ljapunovská stabilita

**Věta 2.17** (Ljapunovova věta). *Nechť  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  je bodem rovnováhy pro systém popsaný rovnicí (3) a  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  je definičním oborem obsahujícím  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Dále nechť  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  je spojitě diferencovatelná funkce taková, že*

$$V(\mathbf{0}) = 0 \quad \text{a} \quad V(\mathbf{x}) > 0 \quad \text{pro} \quad \forall \mathbf{x} \in D - \{\mathbf{0}\}, \quad (8)$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0 \quad \text{pro} \quad \forall \mathbf{x} \in D, \quad (9)$$

*potom  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  je stabilní. Mimoto, jestliže platí, že*

$$\dot{V}(\mathbf{x}) < 0 \quad \text{pro} \quad \forall \mathbf{x} \in D - \{\mathbf{0}\}, \quad (10)$$

*tak je  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  asymptoticky stabilní. Funkce  $V(\mathbf{x})$  splňující (8), (9) se nazývá Ljapunova funkce.*

*Poznámka.* Derivaci funkce  $V(\mathbf{x})$  jsme označili jako  $\dot{V}(\mathbf{x})$  a je určena vztahem

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(\mathbf{x}) = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

Ljapunovova věta může být aplikována aniž by bylo třeba řešit soustavu (3). Na druhou stranu neexistuje systematická metoda, jak tuto funkci nalézt. V mnoha případech je potřeba se spolehnout na metodu pokus–omyl.

Bude-li počátek  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  asymptoticky stabilní, tak nás může zajímat, jak daleko od počátku trajektorie může být a stále konvergovat k počátku s rostoucím  $t \rightarrow \infty$ . Zavedeme proto pojem *oblast atraktivity* (*oblast asymptotické stability*).

<sup>5</sup>V takovém případě říkáme, že  $V$  je pozitivně semidefinitní.

## 2 ZÁKLADNÍ POJMY Z TEORIE DYNAMICKÝCH SYSTÉMŮ

**Definice 2.18.** Nechť je  $\varphi(t, \mathbf{x})$  řešením soustavy (3), s počáteční podmínkou v bodě  $\mathbf{x}$  v čase  $t = 0$ . Potom oblastí atraktivity nazveme množinu všech bodů  $\mathbf{x}$ , pro které platí, že

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, \mathbf{x}) = 0.$$

Nalezení oblasti atraktivity analyticky může být obtížné nebo dokonce nemožné. Vystává otázka za jakých podmínek bude oblastí atraktivity celé  $\mathbb{R}^n$ ? Tato možnost nastane v případě, že budeme schopni ukázat, že pro libovolný počáteční stav  $\mathbf{x}$  se trajektorie  $\varphi(t, \mathbf{x})$  přibližuje k počátku s  $t \rightarrow \infty$  nezávisle na velikosti  $\|\mathbf{x}\|$ . Jestliže asymptoticky stabilní bod rovnováhy v počátku má tuto vlastnost, tak řekneme, že je *globálně asymptoticky stabilní*.

**Věta 2.19.** Nechť  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  je bodem rovnováhy soustavy (3) a dále nechť  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  je spojitě diferencovatelná funkce taková, že

$$V(\mathbf{0}) = 0 \quad a \quad V(\mathbf{x}) > 0, \quad \forall \mathbf{x} \neq 0, \quad (11)$$

$$\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty, \quad (12)$$

$$\dot{V}(\mathbf{x}) < 0, \quad \forall \mathbf{x} \neq 0, \quad (13)$$

pak je  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  globálně asymptoticky stabilní.

Tato věta je také známa jako *Barbashin–Krasovskiiého věta*. Za předpokladu, že  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  je globálně asymptotický bod rovnováhy systému, tak musí být jediným bodem rovnováhy daného systému. Kdyby existoval jiný takovýto bod  $\tilde{\mathbf{x}}$ , tak trajektorie vycházející z bodu  $\tilde{\mathbf{x}}$  by v něm zůstaly pro všechna  $t \geq 0$ , tedy by se neblížily k počátku, což je ve sporu s tím, že je počátek globálně asymptoticky stabilní. Proto se globální asymptotická stabilita nevyšetřuje pro systémy s více body rovnováhy.

*Poznámka.* Věty 2.17 a 2.19 se zabývají stabilitou bodu rovnováhy. Existují ale i věty o nestabilitě, které určují, kdy je bod rovnováhy nestabilní. Uvedeme *Chetaevského větu*. Před samotnou větou je však potřeba uvést terminologii, kterou posléze využijeme. Nechť  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  je spojitě diferencovatelná funkce s definičním oborem  $D \subseteq \mathbb{R}^n$ , který obsahuje počátek  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Předpokládejme, že  $V(\mathbf{0}) = 0$  a existuje bod  $\mathbf{x}_0$  libovolně blízko počátku. Vyberme  $r > 0$  takové, že koule  $B_r = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| \leq r\}$  leží v  $D$  a nechť

$$U = \{\mathbf{x} \in B_r : V(\mathbf{x}) > 0\}, \quad (14)$$

kde  $U$  je neprázdná množina ležící v  $B_r$ .

**Věta 2.20.** Nechť je  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  bodem rovnováhy pro soustavu (3) a dále nechť  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  je spojitě diferencovatelná funkce taková, že  $V(\mathbf{0}) = 0$  a  $V(\mathbf{x}_0) > 0$  pro nějaký bod  $\mathbf{x}_0$  s libovolně malou normou  $\|\mathbf{x}_0\|$ . Definujme množinu  $U$  podle (14) a předpokládejme, že

$$\dot{V}(x) > 0 \quad \forall x \in U.$$

Potom je  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  nestabilní.

### 3 Jednodimenzionální případ

V této kapitole již budeme na soustavy obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu nahlížet jako na dynamické systémy. Vyjdeme-li z obecné autonomní soustavy (3), tak pro  $n = 1$  dostaneme jedinou rovnici

$$\dot{x} = f(x). \quad (15)$$

Zde je  $x$  reálná funkce času a  $f$  je diferencovatelná reálná funkce proměnné  $x$ . Takové rovnice modelují jednodimenzionální dynamické systémy (systémy prvního řádu). Přestože pracujeme jen s jednou rovnicí, tak budeme stále hovořit o systému, kde pojem systém chápeme jako dynamický systém a ne jako systém rovnic. Tedy i jediná rovnice může být nazývána systémem.

*Poznámka.* V celé následující kapitole je stabilita chápána ve smyslu asymptotické stability.

#### 3.1 Body rovnováhy a stabilita

Vezměme si obecnou nelineární diferenciální rovnici (15), na které ukážeme využití grafického znázornění pro rozbor stability u jednodimenzionálního případu. Mnohdy je totiž vhodnější využít grafické interpretace místo složitých výpočtů.

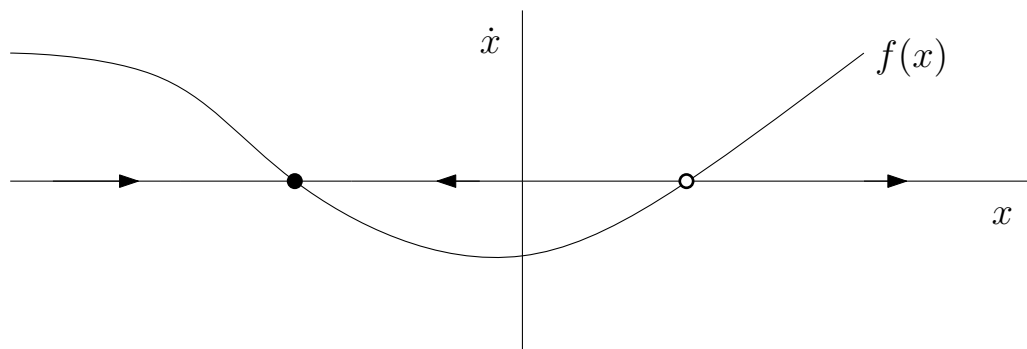
Budeme-li uvažovat, že  $t$  představuje čas,  $x$  pozici nějaké pomyslné částice, která se pohybuje podél reálné osy  $x$  a pod  $\dot{x}$  si představíme rychlost této částice, tak diferenciální rovnice (15) vyjadřuje vektorové pole na ose – určuje vektor rychlosti  $\dot{x}$  v každém  $x$ . K vykreslení vektorového pole je vhodné využít roviny  $(\dot{x}, x)$ , kde nakreslíme šipky na osu  $x$ , které budou vyjadřovat vektor rychlosti v každém  $x$ . Šipky směřují doprava, když  $\dot{x} > 0$  a doleva pro  $\dot{x} < 0$ . Z fyzikálního pohledu si lze představit, že toto naše vektorové pole vyjadřuje tok tekutiny podél osy  $x$  s rychlostí, která se liší místo od místa. Na obrázku 1 lze tedy vidět, že tok je směrem doprava pro  $\dot{x} > 0$  a doleva pro  $\dot{x} < 0$ . V bodech, kde  $\dot{x} = 0$ , žádný tok není a tyto body představují body rovnováhy. Z obrázku je patrné, že máme dva druhy těchto bodů. Plné body reprezentují stabilní bod rovnováhy<sup>6</sup> a prázdné body pak reprezentují body nestabilní<sup>7</sup>. Této pomyslné tekutině se říká *fázová tekutina* a reálná osa představuje fázový prostor.

Při hledání řešení soustavy (15) s libovolnou počáteční podmínkou  $x_0$  umístíme imaginární částici (známou jako *fázový bod*) do  $x_0$  a budeme sledovat jak je unášena proudem. Bod se bude pohybovat podél osy  $x$  podle funkce  $f(x)$ . Této funkci se říká trajektorie s počátkem v bodě  $x_0$  a představuje řešení diferenciální rovnice s počáteční podmínkou  $x_0$ . Obrázku 1 se říká fázový portrét.

<sup>6</sup>Často také nazývány jako *atraktory*.

<sup>7</sup>Často také nazývaný jako *zdroje*.

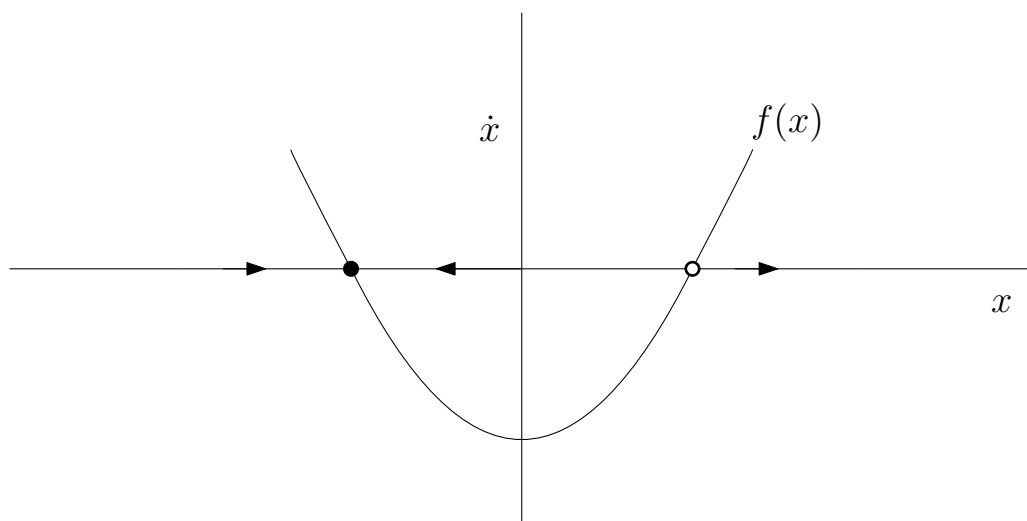
### 3 JEDNODIMENZIONÁLNÍ PŘÍPAD



Obrázek 1: Obecný fázový portrét.

**Příklad 3.1.** Nalezněte všechny body rovnováhy pro  $\dot{x} = x^2 - 1$  a rozhodněte o jejich stabilitě.

*Řešení.* Máme  $f(x) = x^2 - 1$ . K nalezení bodů rovnováhy položíme  $f(x^*) = 0$  a dostaneme, že  $x^* = \pm 1$ . Pro rozhodnutí o jejich stabilitě vykreslíme  $f(x)$  a naznačíme vektorové pole na ose  $x$  (obrázek 2). Tok je doprava pro  $x^2 - 1 > 0$  a doleva pro  $x^2 - 1 < 0$ . Tudíž  $x^* = -1$  je stabilní a  $x^* = 1$  nestabilní.



Obrázek 2: Grafické znázornění řešení rovnice  $\dot{x} = x^2 - 1$ .

## 3.2 Stabilita linearizovaného systému

Doposud jsme pro určení stability bodů rovnováhy spoléhali pouze na grafickou metodu. Hodilo by se však mít k dispozici více kvantitativní způsob o rozhodnutí stability, jako je například rychlost poklesu k bodu rovnováhy. Této informace lze dosáhnout pomocí linearizace okolo tohoto bodu.

Uvažujme nyní řešení  $x$ , které napíšeme ve tvaru

$$x(t) = \eta(t) + x^*,$$

kde  $\eta(t)$  je malá výchylka od  $x^*$ . Abychom viděli, zda výchylka roste nebo klesá, je

třeba odvodit diferenciální rovnici pro  $\eta$ . Dostáváme tedy

$$\dot{\eta} = \frac{d}{dt}(x - x^*) = \dot{x}.$$

Jelikož  $x^*$  je konstanta, dostaneme, že  $\dot{\eta} = \dot{x} = f(x) = f(x^* + \eta)$ . Pomocí Taylorova rozvoje obdržíme vztah

$$f(x^* + \eta) = f(x^*) + \eta f'(x^*) + \mathcal{O}(\eta^2),$$

kde  $f(x^*) = 0$  a  $\mathcal{O}(\eta^2)$ <sup>8</sup> označuje malé kvadratické hodnoty  $\eta$ . Dostáváme tedy, že

$$\dot{\eta} = \eta f'(x^*) + \mathcal{O}(\eta^2).$$

Nyní pokud  $f'(x^*) \neq 0$ , tak hodnoty  $\mathcal{O}(\eta^2)$  považujeme za zanedbatelné, a můžeme psát aproximaci

$$\dot{\eta} \approx \eta f'(x^*).$$

Nahradíme-li  $\approx$  rovností, tak se jedná se lineární rovnici pro  $\eta$  a říká se jí linearizace okolo  $x^*$ . Bude-li

$$f'(x^*) = 0,$$

tak hodnoty  $\mathcal{O}(\eta^2)$  nelze považovat za zanedbatelné a k určení stability je potřeba nelineární analýza, což bude názorně ukázáno v příkladu 3.2.

Závěr je tedy takový, že  $f'(x^*)$  určující sklon funkce  $f(x)$  v bodě rovnováhy určuje jeho stabilitu. To koresponduje s předešlými příklady a obrázky – ve stabilním bodě rovnováhy byl vždy záporný. Nyní navíc máme nástroj ke změření, jak moc stabilním bod rovnováhy je – určeno velikostí  $f'(x^*)$ . Tato velikost hraje roli rychlosti exponenciálního růstu nebo poklesu.

**Příklad 3.2.** Co lze říci o stabilitě bodu rovnováhy, v případě, že je  $f'(x^*) = 0$  ?

*Řešení.* Obecně nelze říci nic a záleží případ od případu. Vezměme si následující případy:

$$(a) \dot{x} = -x^3, \quad (b) \dot{x} = x^3, \quad (c) \dot{x} = x^2, \quad (d) \dot{x} = 0.$$

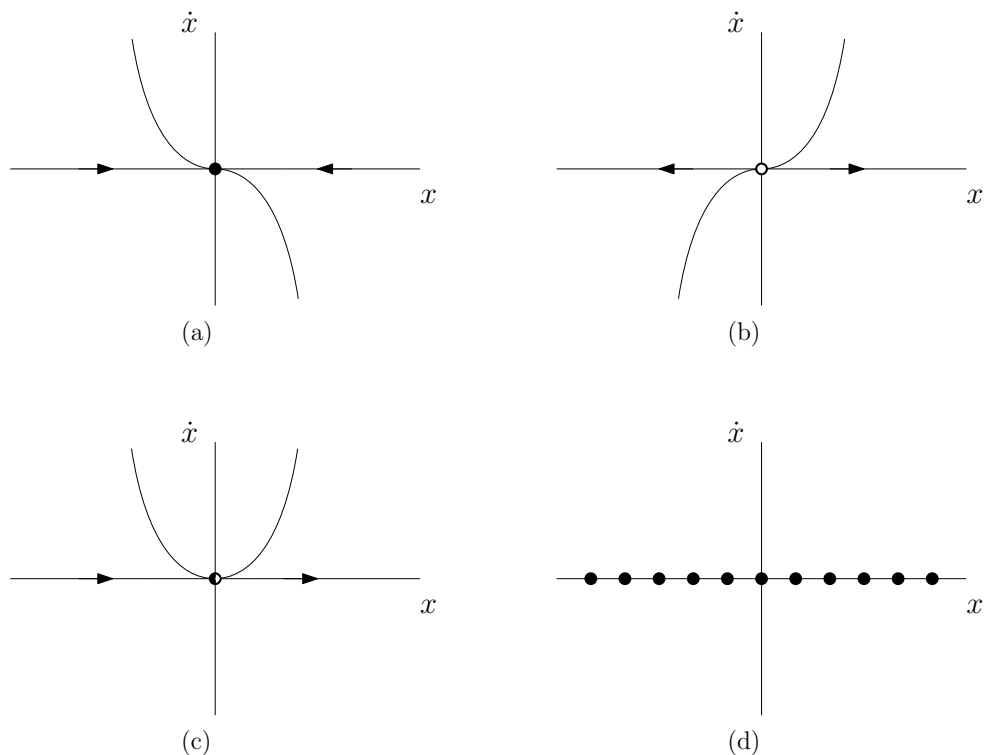
Každý případ má bod rovnováhy  $x^* = 0$  s  $f'(x^*) = 0$ , ale rozhodnutí o stabilitě dopadne pokaždé jinak. Na obrázku 3 lze vidět, že případ (a) je stabilní a (b) nestabilní. Případ (c) je hybridní a jedná se o takzvaný polostabilní případ, jelikož bod rovnováhy přitahuje trajektorie zleva a odpuzuje směrem zprava. Označíme proto polovyplněným kolečkem. V případě (d) pak každý bod na ose  $x$  je bodem rovnováhy, nulový bod tedy ostatní trajektorie ani nepřitahuje ani neodpuzuje.

### 3.3 Bifurkace

V předešlé sekci jsme se zabývali dosti limitovanou dynamikou jednodimenzionálního vektorového pole (všechna řešení se buď „usadí“ v bodě rovnováhy nebo směřují do  $\pm\infty$ ). Proč se tedy vůbec zabývat jednodimenzionálními případy? Důvodem je závislost na parametrech. Kvalitativní vlastnosti toku se mohou měnit v závislosti na parametrech. Přesněji, body rovnováhy mohou vznikat či zanikat a dokonce se může měnit jejich stabilita. Těmto kvalitativním změnám se v teorii dynamických systémů říká *bifurkace* a body s hodnotami parametru, ve kterých k těmto změnám dochází, se nazývají *bifurkační body*.

<sup>8</sup>Landauova notace známá také jako notace velké O nebo notace omikron, která popisuje limitní chování funkce pro argument, který má tendence se blížit nekonečnu, nebo obecně k nějaké konkrétní hodnotě.

### 3 JEDNODIMENZIONÁLNÍ PŘÍPAD



Obrázek 3: Stabilita bodů jednotlivých možností z příkladu 3.2.

#### Bifurkace typu sedlo–uzel

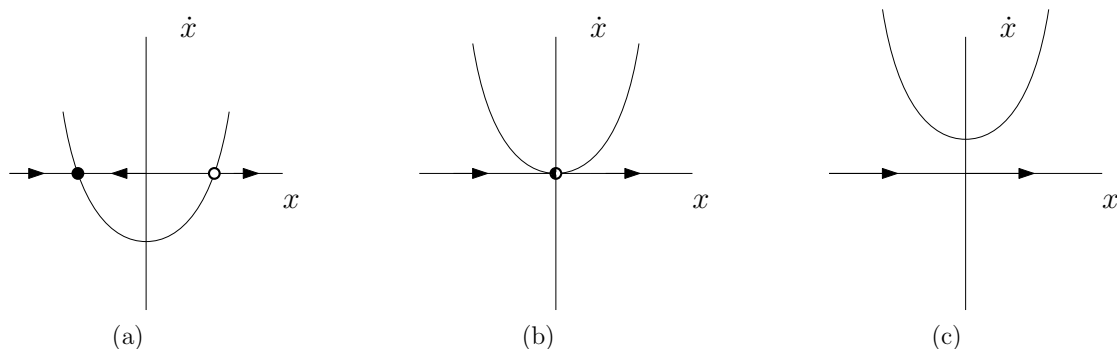
Bifurkace typu sedlo–uzel je základním mechanismem, při kterém body rovnováhy vznikají nebo zanikají. Při změně parametru se dva body rovnováhy mohou přibližovat k sobě, kolidovat a navzájem se rušit.

Ukážeme jednoduchý případ bifurkace sedlo–uzel na systému prvního řádu

$$\dot{x} = r + x^2, \quad (16)$$

kde  $r$  chápeme jako parametr, který může být kladný, záporný nebo nulový. Pro záporné  $r$  dostaneme dva body rovnováhy, a to jeden stabilní a druhý nestabilní (obrázek 4 (a)). Pro  $r \rightarrow \infty$  se parabola bude posouvat směrem nahoru a naše dva body se budou přibližovat k sobě. Při  $r = 0$  body splynou v jeden polostabilní bod rovnováhy  $x^* = 0$  (obrázek 4 (b)). Tento typ bodu rovnováhy je velmi citlivý, protože jakmile máme  $r > 0$ , tak tento bod zaniká a dochází k případu, když již žádné body rovnováhy neexistují (obrázek 4 (c)).

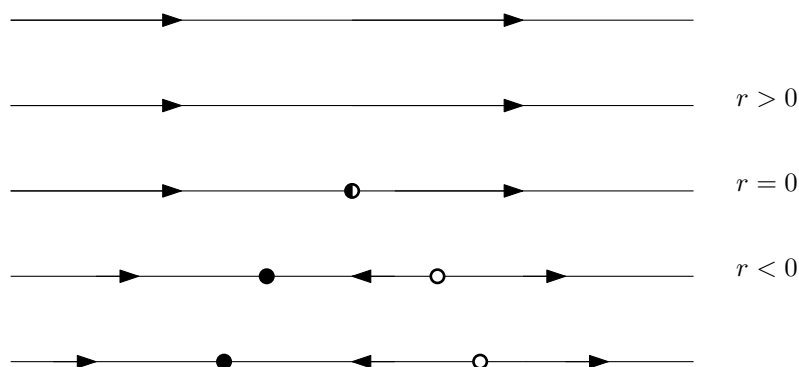
Právě pro  $r = 0$  dochází k bifurkaci, jelikož vektorové pole pro  $r < 0$  a  $r > 0$  je kvalitativně rozdílné.



Obrázek 4: Bifurkace typu sedlo–uzel.

### Grafická konvence

Existují i jiné možnosti, jak vykreslit bifurkaci sedlo–uzel. Můžeme například ukázat několik vektorových polí pro diskrétní hodnoty  $r$  (obrázek 5). Toto znázornění zdůrazňuje závislost bodů rovnováhy na parametru  $r$ . Ve spojitém případě pak máme znázornění jako je 6 (a). Křivka zde je tvaru  $r = -x^2$  (tedy  $\dot{x} = 0$ ) a udává body rovnováhy pro různá  $r$ . Pro rozlišení stabilních a nestabilních bodů rovnováhy budeme používat plnou čáru pro stabilní body rovnováhy a přerušovanou pro nestabilní body rovnováhy.

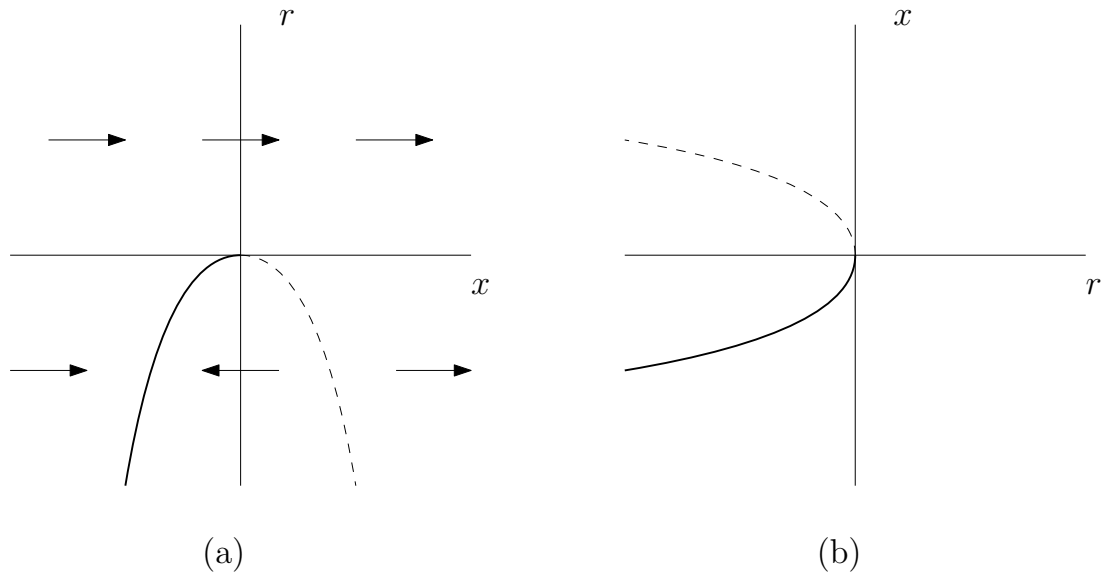


Obrázek 5: Grafická konvence bifurkace typu sedlo–uzel.

Nejčastěji se pro znázornění bifurkace používá graf podle obrázku 6 (b), který má vůči případu (a) prohozené osy. Důvodem je, že  $r$  hraje roli nezávislé proměnné a měla by být tedy zobrazena horizontálně. Občas se do obrázku zobrazují i šipky zdůrazňující stabilitu, či nestabilitu. Znázornění dle obrázku 6 (b) se pak říká *bifurkační diagram* bifurkace sedlo–uzel.



### 3 JEDNODIMENZIONÁLNÍ PŘÍPAD



Obrázek 6: Bifurkační diagram bifurkace sedlo–uzel.

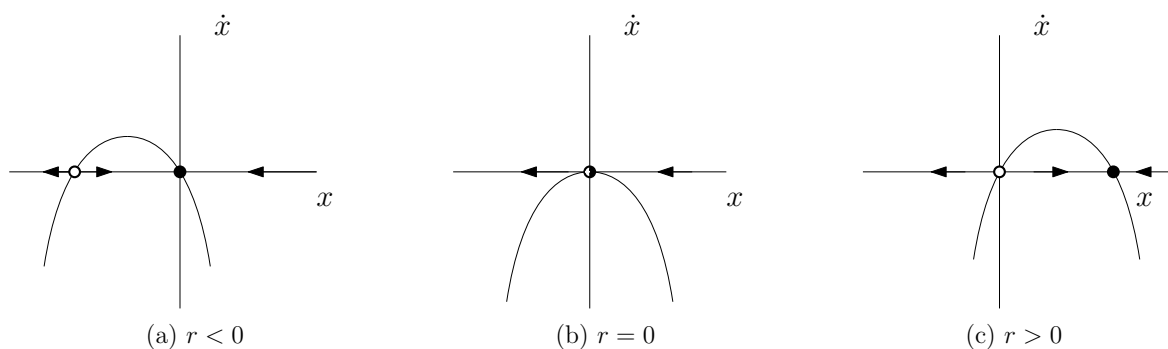
#### Transkritická bifurkace

V některých případech bod rovnováhy musí existovat pro všechny hodnoty parametru a nikdy nemůže zaniknout. Například v logistické rovnici a v jiných jednoduchých modelech růstu jediného druhu je nulový bod rovnováhy nezávislý na hodnotě rychlosti růstu populace. Takový bod ale může měnit svou stabilitu při změně parametru. Tato změna stability se nazývá *transkritickou bifurkací*.

Uvažujme rovnici

$$\dot{x} = rx - x^2. \quad (17)$$

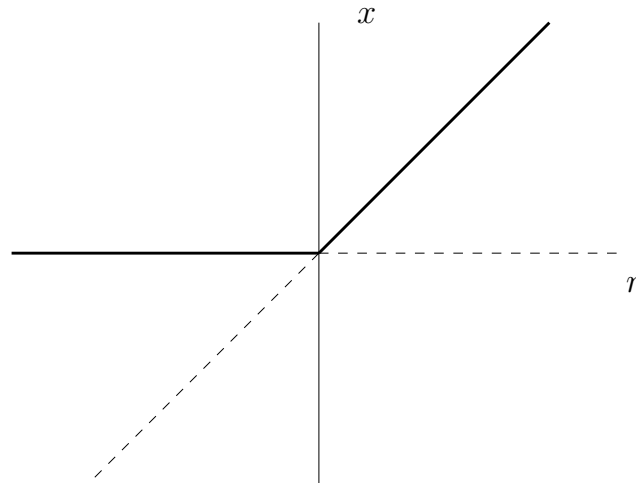
Obrázek 7 ukazuje vektorové pole pro různé hodnoty parametru  $r$ . Lze si všimnout, že bod rovnováhy zůstane v počátku pro všechny hodnoty  $r$ .



Obrázek 7: Transkritická bifurkace.

Pro  $r < 0$  bude nestabilním bodem rovnováhy  $x^* = r$  a stabilním bodem rovnováhy  $x^* = 0$ . Se zvyšující se hodnotou  $r$  se nestabilní bod rovnováhy blíží počátku a dosáhne ho pro  $r = 0$ . Pro poslední případ, kdy  $r > 0$  se počátek stane nestabilním a  $x^* = r$  bude nyní stabilním bodem rovnováhy. Z toho je vidět hlavní rozdíl mezi bifurkací sedlo–uzel a transkritickou bifurkací, kde u transkritické bifurkace dva body rovnováhy po bifurkaci nezmizí, ale místo toho si vymění role ve smyslu stability.

Obrázek 8 ukazuje bifurkační diagram transkritické bifurkace.



Obrázek 8: Bifurkační diagram transkritické bifurkace.

### Vidličková bifurkace

Třetím druhem bifurkace je tzv. *vidličková bifurkace*. Tento druh bifurkace je obvyklý ve fyzikálních úlohách, které vykazují symetrii. V takových případech body rovnováhy mají tendenci vznikat a zanikat v symetrických párech. Rozlišujeme dva typy vidličkové bifurkace – *superkritickou* a *podkritickou*.

Pro ukázkou superkritické vidličkové bifurkace uvažujme rovnici

$$\dot{x} = rx - x^3. \quad (18)$$

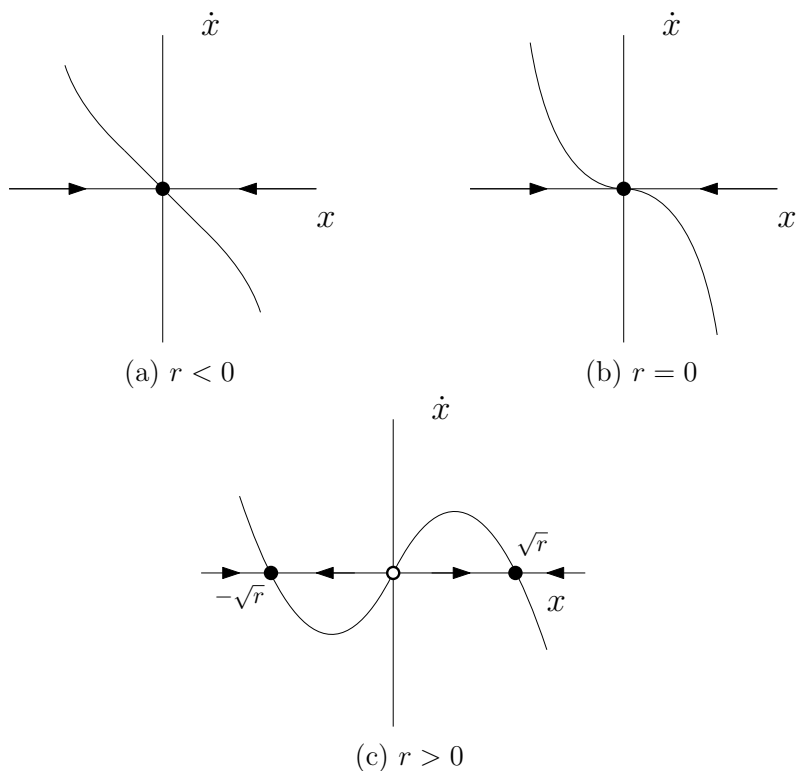
Lze si všimnout, že rovnice (18) se nezmění při změně z  $x$  na  $-x$ .

Obrázek 9 ukazuje vektorová pole pro různé hodnoty  $r$ . Pro  $r < 0$  je počátek jediným bodem rovnováhy a to stabilním. Bude-li  $r = 0$ , tak je počátek stále jediným bodem rovnováhy, stále stabilním, ale jak lze na obrázku vidět, tak ne již tak silně stabilním jako pro  $r < 0$ . Počátek je v tomto případě nehyperbolickým bodem rovnováhy a rychlost poklesu tedy nemůže být exponenciální.<sup>9</sup> Pro  $r > 0$  se počátek již stává nestabilním a objevují se dva nové stabilní body rovnováhy, které jsou symetricky okolo počátku v bodech  $\pm\sqrt{r}$ .

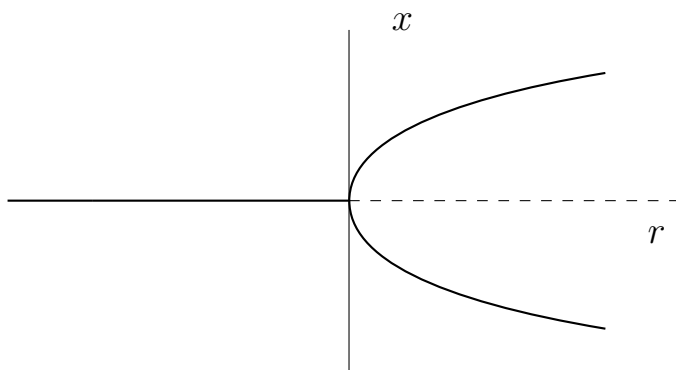
Vykreslíme-li bifurkační diagram (obrázek 10), tak se hned objasní pojem vidličková bifurkace.

<sup>9</sup>Přímým vyřešením lze ukázat, že rychlost poklesu je  $\mathcal{O}(t^{-\frac{1}{2}})$  pro  $t \rightarrow \infty$ .

### 3 JEDNODIMENZIONÁLNÍ PŘÍPAD



Obrázek 9: Transkritické vidličková bifurkace.



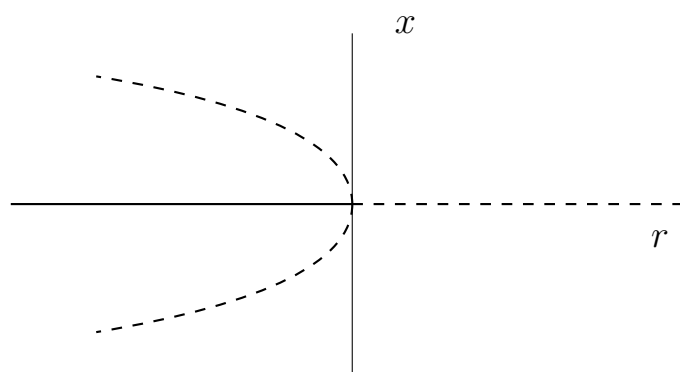
Obrázek 10: Bifurkační diagram superkritické vidličkové bifurkace.

Druhým typem vidličkové bifurkace je podkritická vidličková bifurkace. V případě rovnice (18) kubický člen  $x^3$  byl stabilizující, tedy působil jako vratná síla, která strhává  $x(t)$  zpět k  $x = 0$ . V případě, bude-li tento člen destabilizující

$$\dot{x} = rx + x^3, \quad (19)$$

tak hovoříme o podkritické vidličkové bifurkaci (obrázek 11). Porovnáme-li bifurkační diagramy, tak vidíme, že vidlička je převrácena. Nenulové body rovnováhy  $\pm\sqrt{r}$  jsou nestabilní a existují pouze pod bifurkací ( $r < 0$ ) a tedy je vhodný termín podkritická bifurkace.

### 3 JEDNODIMENZIONÁLNÍ PŘÍPAD



Obrázek 11: Bifurkační diagram podkritické vidličkové bifurkace.

## 4 Systémy druhého řádu

V jednodimenzionálním případě mohly nastat pouze dva případy a to že, trajektorie jsou nuceny pohybovat se monotónně nebo zůstat konstantní. Ve vyšších dimenzích mají tyto trajektorie mnohem více „prostoru k manévrování“, tedy dynamické chování je bohatší. Autonomní soustavy ODR1 druhého řádu zaujímají důležité místo při studiu nelineárních systémů, protože trajektorie řešení jsou křivky v rovině, což umožňuje snadnou vizualizaci kvalitativního chování systému.

*Poznámka.* Budeme se zabývat pouze homogenními soustavami, protože nehomogenita nemá vliv na kvalitativní chování, ale pouze jen mění souřadnice bodu rovnováhy ve fázovém prostoru.

Obecný autonomní systém druhého řádu je reprezentován dvěma diferenciálními rovnicemi

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f_1(x_1, x_2), \\ \dot{y} &= f_2(x_1, x_2).\end{aligned}\tag{20}$$

Nechť  $\mathbf{x}(t) = (\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t))$  je řešením soustavy (20), které vyhovuje počáteční podmínce  $\mathbf{x}_0 = (x_{10}, x_{20})$ .

Interpretace řešení v rovině  $(x_1, x_2)$  pro všechna  $t \geq 0$  je křivka, která prochází bodem  $\mathbf{x}_0$ . Této křivce se říká trajektorie (někdy orbita) systému (20) z bodu  $\mathbf{x}_0$ . Soubor všech trajektorií nazveme fázovým portrétem (analogie s jednodimenzionálním případem).

Než se ale dostaneme k nelineárním systémům druhého řádu, tak ukážeme základní teorii okolo lineárních homogenních soustav, které popisují lineární dynamické systémy. Tuto teorii posléze využijeme při analýze nelineárních systémů, jelikož budeme linearizovat nelineární systém a po linearizaci je potřeba pracovat se systémem lineárním.

### 4.1 Lineární soustava s konstantními koeficienty

Při vyšetřování homogenních lineárních soustav budeme vždy mít pouze jeden izolovaný bod rovnováhy. Pro nalezení obecného řešení a sestavení fázových portrétů budeme využívat *Eulerovu metodu*, která pracuje s vlastními čísly matice soustavy.

Homogenní lineární soustava druhého řádu je tvaru

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax + by, \\ \dot{y} &= cx + dy,\end{aligned}$$

kde  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  jsou koeficienty. Vektorově lze zapsat soustavu jako

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x},\tag{21}$$

kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Tato soustava je lineární ve smyslu, že jsou-li  $\mathbf{x}_1$  a  $\mathbf{x}_2$  řešením na nějakém intervalu  $J$ , tak je i jejich libovolná lineární kombinace  $c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2$  řešením na intervalu  $J$ . Za obecné řešení pak můžeme považovat vztah  $\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2$ , kde  $\mathbf{x}_1$  a  $\mathbf{x}_2$  jsou lineárně nezávislé.

*Poznámka.* Nulové řešení  $\mathbf{x}^* \equiv \mathbf{0}$  je vždy bodem rovnováhy pro libovolnou volbu  $\mathbf{A}$ .

Ukažme nyní, jak vypadají fázové portréty lineárního systému v rovině pro různé situace. Využijeme k tomu Eulerovu metodu, kterou popíšeme pro obecnou dimenzi  $n$  (dále bude stačit případ, kdy  $n = 2$ ).

**Definice 4.1** (Eulerova metoda). Eulerova metoda slouží ke konstrukci řešení pomocí vlastních čísel matice  $\mathbf{A}$ . Hledejme řešení soustavy (21) ve tvaru  $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{v}$ , kde  $\lambda \in \mathbb{R}$  a  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)^T \neq \mathbf{0}$ . Abychom našli vektor  $\mathbf{v}$  a  $\lambda$ , tak dosadíme  $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{v}$  do (21) a po vykrácení nenulovým  $e^{\lambda t}$  získáme rovnici

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}. \quad (22)$$

Čísla  $\lambda$  jsou vlastní čísla matice  $\mathbf{A}$  a konstantní nenulové vektory  $\mathbf{v}$ , které pro danou hodnotu  $\lambda$  vyhovují rovnici (22), se nazývají *vlastní vektory* matice  $\mathbf{A}$  při příslušné hodnotě  $\lambda$ . Vlastní čísla najdeme pomocí *charakteristické rovnice*  $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$ , kde  $\mathbf{E}$  je jednotková matice. Obecně má tato rovnice  $n$  komplexních kořenů včetně násobností. Pro náš případ, kdy  $n = 2$  dostaneme kvadratickou rovnici, kterou vyřešíme a její kořeny jsou hledané vlastní čísla  $\lambda_1, \lambda_2$ .

Podle hodnot vlastních čísel  $\lambda_1, \lambda_2$  mohou nastat následující případy:

- **Obě vlastní čísla jsou reálná a různá** ( $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq 0$ ).

Budou-li obě vlastní čísla záporná, bez ztráty na obecnosti uvažujme  $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ , tak se výrazy  $e^{\lambda_1 t}$  a  $e^{\lambda_2 t}$  limitně blíží k nule pro  $t \rightarrow \infty$ . Pro tuto možnost bod stability nazýváme *stabilním uzlem* (obrázek 12 (a)). Naopak budou-li obě vlastní čísla kladná, tak se jedná o *nestabilní uzel* (obrázek 12 (b)), jelikož výrazy  $e^{\lambda_1 t}$  a  $e^{\lambda_2 t}$  rostou exponenciálně pro  $t \rightarrow \infty$ .

Za předpokladu, že mají vlastní čísla různá znaménka ( $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ ) se výraz  $e^{\lambda_2 t} \rightarrow 0$ ,  $e^{\lambda_1 t} \rightarrow \infty$  pro  $t \rightarrow \infty$  a bod rovnováhy nazveme *sedlem* (obrázek 12 (c)).

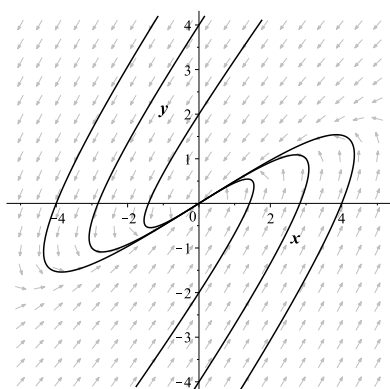
- **Komplexní vlastní čísla** ( $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ ).

Pro komplexní číslo s nenulovou reálnou částí budou trajektoriemi spirály směřující z nebo do bodu rovnováhy v závislosti na znaménku reálné části komplexního čísla. Pro  $\alpha < 0$  se jedná o *stabilní ohnisko* (obrázek 12 (d)) a pro  $\alpha > 0$  o *nestabilní ohnisko* (obrázek 12 (e)). Je-li vlastní číslo matice  $\mathbf{A}$  ryze komplexní, pak trajektoriemi budou elipsy se středem v bodě rovnováhy a hovoříme o *středu* (obrázek 12 (f)).

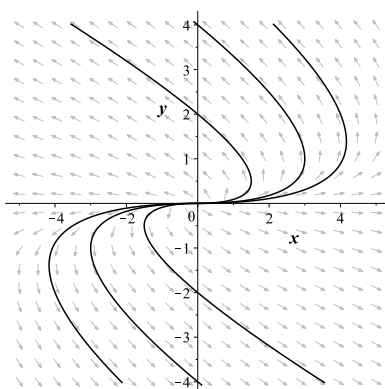
- **Nenulová násobná vlastní čísla** ( $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$ ). V tomto případě bude-li  $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ , tak se bude jednat o stabilní uzel a v opačném případě a nestabilní uzel.
- **Jedno nebo obě vlastní čísla nulové.**

Když je jedno nebo obě vlastní čísla nulové, tak je fázový prostor v jistém smyslu degenerovaný. Matice  $\mathbf{A}$  má nulový prostor. Každý vektor v nulovém prostoru je bodem rovnováhy systému a tedy má systém spíše podprostor rovnováhy než bod rovnováhy (obrázek 12 (g)).

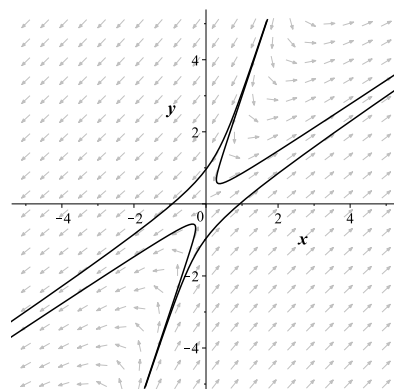
## 4 SYSTÉMY DRUHÉHO ŘÁDU



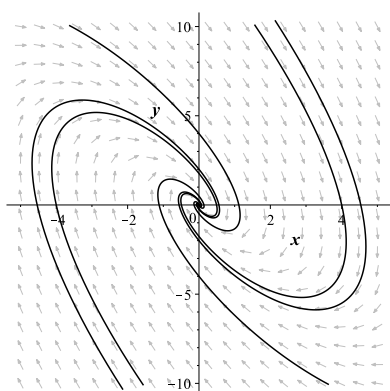
(a) Stabilní uzel



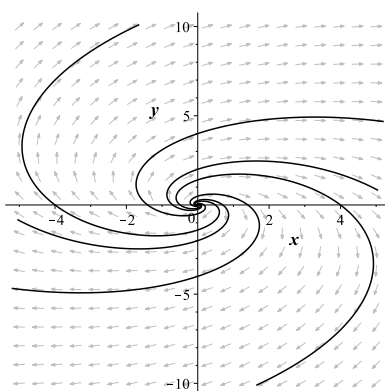
(b) Nestabilní uzel



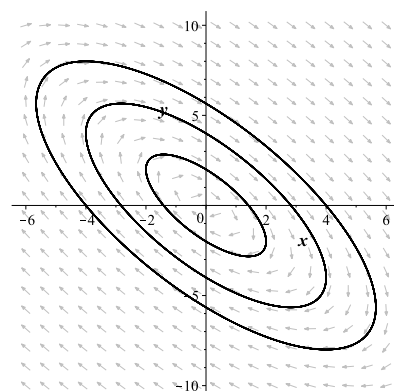
(c) Sedlo



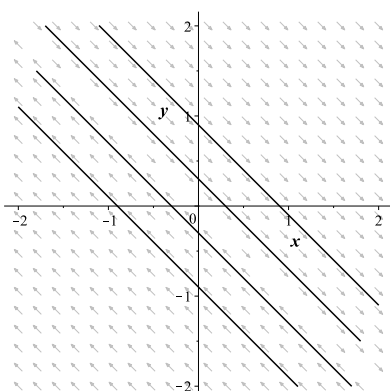
(d) Stabilní ohnisko



(e) Nestabilní ohnisko



(f) Střed



(g)  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

Obrázek 12: Fázové portréty pro různé kombinace vlastních čísel matice  $\mathbf{A}$ .

Typ bodu rovnováhy (sedlo, ohnisko ...) je tedy určen vlastními čísly a pro lineární systémy je charakteristické, že globální chování systému je určeno právě typem bodu

rovnováhy. Dále uvidíme, že pro nelineární systémy toto již neplatí, jelikož mohou mít více izolovaných bodů rovnováhy a ty určují chování trajektorií pouze v okolí těchto bodů.

## 4.2 Nelineární systémy druhého řádu

V této části se již podíváme na nelineární systémy popsané pomocí soustavy (3) a ukážeme si, jak postupovat, chceme-li znát chování těchto systémů. Jak jsme řekli v úvodu, tak chování nelineárních systémů může často být „odhadnuto“ analyzováním lineárního systému v okolí určitého bodu. Budeme-li tedy hledat typy bodů rovnováhy (nelineární systém jich může mít více než jeden), tak budeme postupovat následovně. Nejprve určíme body rovnováhy daného systému. Poté provedeme linearizaci a určíme body rovnováhy linearizovaného systému, pro který sestavíme Jacobiho matici a spočítáme její vlastní čísla. Pomocí vlastních čísel poté určíme o jaký typ bodu rovnováhy se jedná v tomto linearizovaném systému. Kroky k nalezení vlastních čísel Jacobiho matice provedeme pro všechny nalezené body rovnováhy nelineárního systému. Pro určení o jaké typy bodů rovnováhy půjde, při „přechodu“ mezi lineárním a nelineárním systémem, se budeme řídit následujícími pravidly:

- Body rovnováhy, které jsou nestabilní nebo asymptoticky stabilní v linearizovaném systému si tuto vlastnost zachovávají i pro systém nelineární.
- Body rovnováhy typu sedlo a ohnisko v linearizovaném systému jsou stejného typu pro nelineární systém.
- V případě, že se jedná o uzel v linearizovaném systému, kde vlastní čísla jsou reálná a navzájem různá, tak v nelineárním systému zůstane bod rovnováhy uzlem.
- V případě, že se jedná o uzel v linearizovaném systému, kde vlastní čísla jsou reálná ale stejná, tak v nelineárním systému se může typ bodu rovnováhy změnit na ohnisko nebo zůstat uzlem.
- Jedná-li se o střed v linearizovaném systému, tak v nelineárním systému se může typ bodu rovnováhy změnit na ohnisko, nebo zůstat středem.

*Poznámka.* Poslední pravidlo je nejsložitější případ na posouzení, jelikož bod rovnováhy typu střed není asymptoticky stabilní. Takže střed, který se „stane“ ohniskem může být z hlediska dynamického chování zdrojem nebo atraktorem. Střed není ani nestabilní a ani asymptoticky stabilní, takže první uvedené pravidlo nelze aplikovat. Takže v případě, že jeden z bodů rovnováhy bude typu střed, tak nám linearizace nepomůže při analýze tohoto bodu, jelikož nejsme schopni určit jeho chování v nelineárním systému.

**Příklad 4.2.** Uvažujme nelineární dynamický systém, který je popsán soustavou dvou nelineárních ODR1

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(6 - 3x - 2y), \\ \dot{y} &= y(5 - x - y).\end{aligned}$$

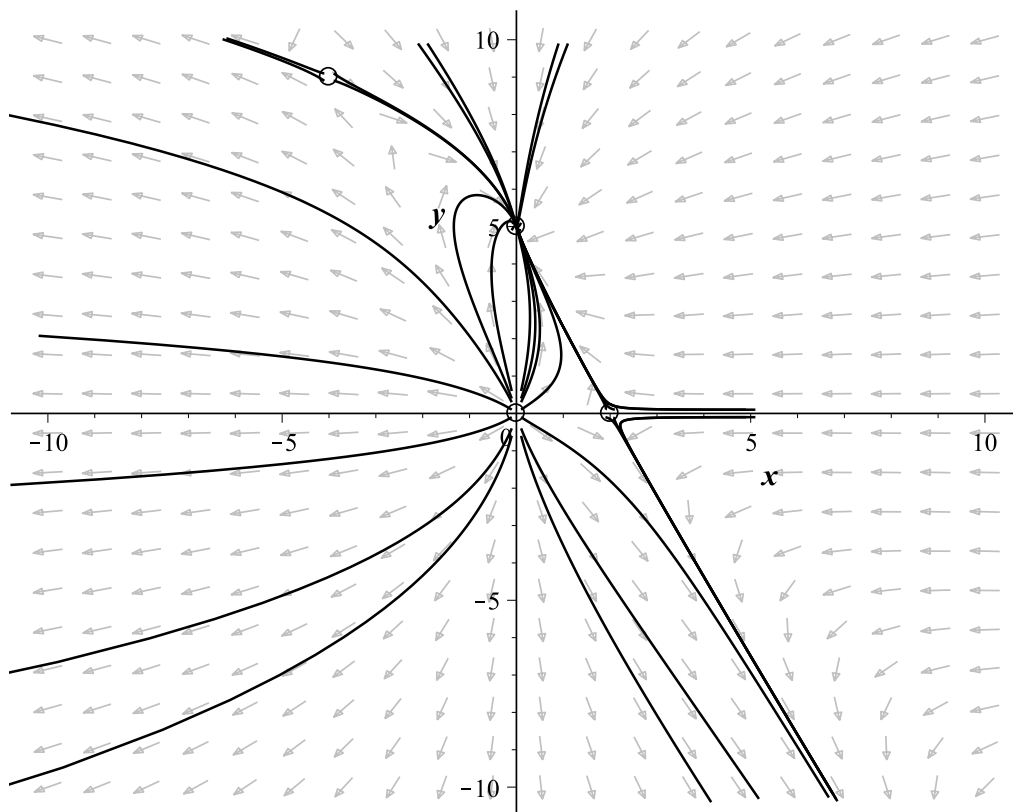


## 4 SYSTÉMY DRUHÉHO ŘÁDU

Snadno se ověří, že daný systém má čtyři body rovnováhy o souřadnicích

$$A = [0, 0], \quad B = [0, 5], \quad C = [2, 0], \quad D = [-4, 9].$$

V dalším kroku bychom linearizovali a napočítali Jacobiho matici linearizovaného systému pro všechny nalezené body rovnováhy a určili o jaké typy bodů rovnováhy se jedná v případě linearizovaného systému. Pomocí výše uvedených pravidel bychom následně určili typy bodů v nelineárním systému. Ale vykreslíme-li fázový portrét, tak vidíme, že bod A je nestabilní uzel, bod B je uzlem stabilním a body C a D jsou sedla.



Obrázek 13: Příklad nelineárního dynamického systému, který má čtyři izolované body rovnováhy.

### Limitní cykly

Jiným projevem nelinearity je pak možná existence limitních cyklů. Uvažujme autonomní systém se soustavou rovnic (3) s  $\mathbf{f} \in C^1(\Omega)$ , kde  $\Omega$  je otevřená podmnožina  $\mathbb{R}^n$ . Pro  $\mathbf{x} \in \Omega$  funkce  $\varphi(\cdot, \mathbf{x}) : \mathbb{R} \rightarrow \Omega$  definuje trajektorii pro (3) procházející počáteční podmínkou  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ . Vykreslíme-li funkci  $\varphi(\cdot, \mathbf{x})$ , tak trajektorii můžeme chápat jako pohyb podél křivky

$$\Gamma_{\mathbf{x}_0} = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid \mathbf{x} = \varphi(t, \mathbf{x}_0), t \in \mathbb{R}\} .^{10}$$

*Pozitivní částí trajektorie* bodem  $\mathbf{x}_0$  pak myslíme

$$\Gamma_{\mathbf{x}_0}^+ = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid \mathbf{x} = \varphi(t, \mathbf{x}_0), t \geq 0\}$$

a analogicky budeme chápat  $\Gamma_{\mathbf{x}_0}^-$ . Pak jakákoliv trajektorie  $\Gamma = \Gamma^+ \cup \Gamma^-$ .

<sup>10</sup>Nehraje-li bod  $\mathbf{x}_0$  roli, tak budeme trajektorii jednoduše značit  $\Gamma$ .

**Definice 4.3.** Bod  $\mathbf{p} \in \Omega$  je  $\omega$ -limitním bodem trajektorie  $\varphi(\cdot, \mathbf{x})$  systému (3) jestliže existuje posloupnost  $t_n \rightarrow \infty$  taková, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n, \mathbf{x}) = \mathbf{p}.$$

Dále, jestliže existuje posloupnost  $t_n \rightarrow -\infty$  taková, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(t_n, \mathbf{x}) = \mathbf{q},$$

kde  $\mathbf{q} \in \Omega$ , tak se tento bod nazývá  $\alpha$ -limitním bodem trajektorie  $\varphi(\cdot, \mathbf{x})$  systému (3). Množina všech  $\omega$ -limitních bodů se nazývá  $\omega$ -limitní množina trajektorie  $\Gamma$  a značíme ji jako  $\omega(\Gamma)$ . Analogicky máme  $\alpha$ -limitní množinu trajektorie  $\Gamma$  označenou jako  $\alpha(\Gamma)$ . Množina všech limitních bodů trajektorie  $\Gamma$ ,  $\alpha(\Gamma) \cup \omega(\Gamma)$  se nazývá limitní množina trajektorie  $\Gamma$ .

**Věta 4.4.**  $\alpha$  a  $\omega$ -limitní množiny trajektorie  $\Gamma$  systému (3) jsou uzavřené podmnožiny  $\Omega$  a jestliže  $\Gamma$  je obsažena v kompaktní podmnožině  $\mathbb{R}^n$ , pak  $\alpha(\Gamma)$ ,  $\omega(\Gamma)$  jsou neprázdné, souvislé a kompaktní podmnožiny  $\Omega$ .

**Definice 4.5.** Nechť  $\Omega$  je otevřená podmnožina množiny  $\mathbb{R}^n$ . Dále nechť  $\mathbf{f} \in C^1(\Omega)$  a nechť  $\varphi_t : \Omega \rightarrow \Omega$  je tok soustavy (3) definovaný  $\forall t \in \mathbb{R}$ . Pak množina  $S \subseteq \Omega$  se nazývá invariantní vůči toku  $\varphi_t$ , jestliže  $\varphi_t(S) \subseteq S, \forall t \in \mathbb{R}$ .

**Věta 4.6.** Jestliže bod  $\mathbf{p}$  je  $\omega$ -limitním bodem trajektorie  $\Gamma$  soustavy (3), tak všechny další body trajektorie  $\varphi(\cdot, \mathbf{p})$  pro (3) procházející bodem  $\mathbf{p}$  jsou taktéž  $\omega$ -limitní body trajektorie  $\Gamma$ . Tedy jestliže  $\mathbf{p} \in \omega(\Gamma)$ , tak  $\Gamma_{\mathbf{p}} \subseteq \omega(\Gamma)$  a obdobně jestliže  $\mathbf{p} \in \alpha(\Gamma)$ , tak  $\Gamma_{\mathbf{p}} \subseteq \alpha(\Gamma)$ .

Z této věty vyplývá, že pro všechny body  $\mathbf{p} \in \omega(\Gamma)$ ,  $\varphi_t(\mathbf{p}) \in \omega(\Gamma), \forall t \in \mathbb{R}$ , tedy  $\varphi_t(\omega(\Gamma)) \subseteq \omega(\Gamma)$  a spolu s poznatkou z Definice 4.5 dostaneme výsledek, který uvedeme v následující poznámce.

*Poznámka.*  $\alpha(\Gamma)$  a  $\omega(\Gamma)$  jsou invariantní s ohledem na tok  $\varphi_t$  systému (3).  $\alpha(\Gamma)$  a  $\omega(\Gamma)$  trajektorie  $\Gamma$  soustavy (3) jsou tedy uzavřené invariantní podmnožiny množiny  $\Omega$ .

**Definice 4.7.** Uzavřená invariantní množina  $A \subseteq \Omega$  se nazývá atraktivní množina soustavy (3), jestli existuje nějaké okolí  $U$  množiny  $A$  takové, že pro  $\forall \mathbf{x} \in U$ ,  $\varphi_t(\mathbf{x}) \in U$  pro  $\forall t \geq 0$  a  $\varphi_t(\mathbf{x}) \rightarrow A$  pro  $t \rightarrow \infty$ .

**Definice 4.8.** Atraktor je atraktivní množina, která obsahuje hustou trajektorii. Existence husté trajektorie znamená, že existuje množina trajektorií, která je hustá v atraktoru, tj. existuje alespoň jedna trajektorie, která buďto leží v atraktivní množině, nebo každý bod atraktivní množiny je libovolně blízko nějakému bodu na této trajektorii.

Je zřejmé, že jakýkoliv bod rovnováhy  $\mathbf{x}_0$  je svou vlastní  $\alpha$  a  $\omega$ -limitní množinou, jelikož  $\varphi(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0, \forall t \in \mathbb{R}$ . A pokud trajektorie  $\Gamma$  systému (3) má jediný  $\omega$ -limitní bod  $\mathbf{x}_0$ , tak bod  $\mathbf{x}_0$  je bodem rovnováhy systému (3).

Stabilní uzel nebo ohnisko, které jsme definovali v předešlém textu je  $\omega$ -limitní množinou každé trajektorie v nějakém okolí toho bodu a dále je také atraktorem systému. Nicméně, ne každá  $\omega$ -limitní množina trajektorie je atraktivní množinou. Například sedlo  $\mathbf{x}_0$ .

## 4 SYSTÉMY DRUHÉHO ŘÁDU

**Definice 4.9.** *Cyklem* neboli *periodickou trajektorií* systému (3) budeme rozumět libovolnou uzavřenou křivku, která je trajektorií řešení a která není bodem rovnováhy daného systému. Řekneme, že periodická trajektorie  $\Gamma$  je *stabilní*, jestliže pro každé  $\varepsilon > 0$  existuje okolí  $U$  trajektorie  $\Gamma$  tak, že pro  $\forall \mathbf{x} \in U$  je  $d(\Gamma_{\mathbf{x}}^+, \Gamma) < \varepsilon$ , tedy pro  $\forall \mathbf{x} \in U$  a pro  $t \geq 0$  je  $d(\varphi(t, \mathbf{x}), \Gamma) < \varepsilon$ . Periodická trajektorie je *nestabilní* jestliže není stabilní a je *asymptoticky stabilní* jestliže je stabilní a  $\forall \mathbf{x}$  v nějakém okolí  $U$  trajektorie  $\Gamma$  platí, že

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, \mathbf{x}), \Gamma) = 0.$$

Periodická trajektorie koresponduje s periodickým řešením, jelikož  $\varphi(\cdot, \mathbf{x})$  definuje uzavřenou křivku řešení právě tehdy, když  $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\varphi(t + T, \mathbf{x}_0) = \varphi(t, \mathbf{x}_0)$$

pro nějaké  $T > 0$ .

Oscilace je důležitým fenoménem dynamických systému. Systém osciluje má-li netriviální periodické řešení

$$\mathbf{x}(t + T) = \mathbf{x}(t), \quad \forall t \geq 0$$

pro nějaké  $T > 0$ <sup>11</sup>. Netriviální je myšleno ve smyslu vyloučení konstantních řešení. Ve fázovém prostoru je periodické řešení znázorněno uzavřenou trajektorií. V předcházející sekci jsme již příklad oscilace ukázali. Pro lineární systém  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  oscilace nastává pro vlastní čísla  $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$ . V tomto případě jsme hovořili o středu a trajektoriemi byly uzavřené křivky.

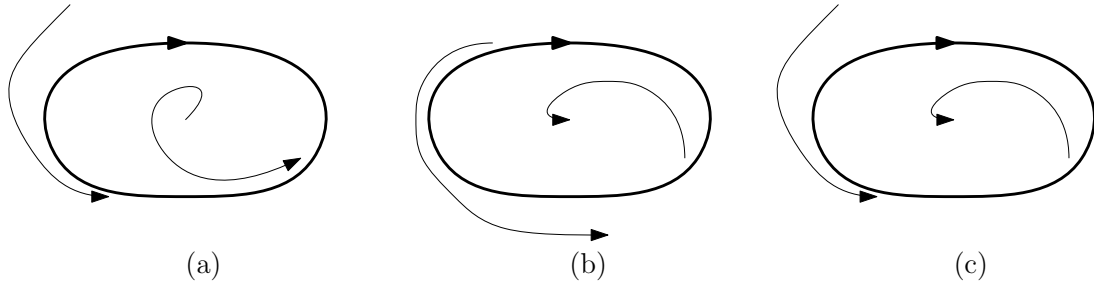
Nyní přejdeme k novému pojmu limitního cyklu. Jde o izolovanou uzavřenou trajektorii. Izolovaná je ve smyslu, že okolní trajektorie nejsou uzavřené a buď se přibližují k limitnímu cyklu nebo se od něj vzdalují. Jedná se o vlastnost nelineárních dynamických systémů, tedy v lineárních systémech se nevyskytují, i když ty mohou mít uzavřené trajektorie, ale nebudou izolované: bude-li tedy  $\mathbf{x}$  periodickým řešením, tak i  $c\mathbf{x}$  pro libovolné  $c \neq 0$ . Řešení  $\mathbf{x}$  je tedy obklopeno jednoparametrickou soustavou uzavřených trajektorií.

Samotná definice limitního cyklu je následující.

**Definice 4.10.** *Limitním cyklem*  $\Gamma$  systému (3) je periodická trajektorie řešení, která je  $\alpha$  nebo  $\omega$ -limitní množina nějaké trajektorie systému (3) jiné než trajektorie  $\Gamma$ . Je-li cyklus  $\Gamma$   $\omega$ -limitní množina každé trajektorie v nějakém okolí cyklu, tak jej nazýváme  $\omega$ -*limitním cyklem* nebo také *stabilním limitním cyklem*. Pokud bude  $\Gamma$   $\alpha$ -limitní množinou každé trajektorie nějakého okolí cyklu, tak hovoříme o  $\alpha$ -*limitním cyklu* nebo o *nestabilním limitním cyklu* a existuje i třetí možnost a to taková, že jestli je  $\Gamma$   $\omega$ -limitní množinou pro jednu trajektorii a  $\alpha$ -limitní množinou pro trajektorii jinou, tak budeme hovořit o *polostabilním limitním cyklu*.

Jinak řečeno, jedná se o stabilní limitní cyklus jestliže se všechny okolní trajektorie blíží k limitnímu cyklu pro  $t \rightarrow \infty$  (obrázek 14 (a)), nebo o nestabilní limitní cyklus, když se všechny trajektorie, začínající libovolně blízko limitního cyklu, budou pro  $t \rightarrow \infty$  vzdalovat (obrázek 14 (b)) a jedná se limitní cyklus polostabilní, jestliže některé trajektorie jsou přitahovány a jiné odpuzovány limitním cyklem (obrázek 14 (c)).

<sup>11</sup>Nejmenší  $T$ , pro které toto platí se nazývá *perioda*.



Obrázek 14: Limitní cykly.

Stabilní limitní cyklus se vyskytuje u systémů, které vykazují samostatně udržitelnou oscilaci (oscilují i v případě absence externí periodické síly). Příkladem může být například tlukot srdce, denní rytmy teploty lidského těla a sekrece hormonů nebo nebezpečné samobuzené vibrace v mostech či křídlech letadel.

*Poznámka.* Vzhledem k Definicí 4.9 stabilní limitní cyklus je vlastně asymptoticky stabilní cyklus a jakýkoliv stabilní limitní cyklus je atraktor.

Pravděpodobně nejzákladnějším nástrojem při zkoumání stability a bifurkace periodických trajektorií je *Poincarého mapa*. Poincarého mapu lze zjednodušeně chápat jako řez fázovým prostorem, kde jedna nebo více stavových proměnných je konstantní.

**Definice 4.11.** Je-li  $\Gamma$  periodická trajektorie systému (3), která prochází bodem  $\mathbf{x}_0$  a  $\Sigma$  je nadrovina kolmá ke  $\Gamma$  v bodě  $\mathbf{x}_0$ , pak pro jakýkoliv bod  $\mathbf{x} \in \Sigma$ , který je dostatečně blízko bodu  $\mathbf{x}_0$ , řešení (3) procházející bodem  $\mathbf{x}$  v čase  $t = 0$ ,  $\varphi_t(\mathbf{x})$  protne nadrovinu  $\Sigma$  opět v bodě  $\mathbf{P}(\mathbf{x})$  blízko  $\mathbf{x}_0$ . Zobrazení

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{x})$$

se nazývá Poincarého mapa (obrázek 15).

Dále uvedeme větu nutnou k existenci a spojitosti Poincarého mapy  $\mathbf{P}(\mathbf{x})$  a její první derivace  $D\mathbf{P}(\mathbf{x})$ .

**Věta 4.12.** Nechť  $\Omega$  je otevřená podmnožina  $\mathbb{R}^n$  a dále nechť  $\mathbf{f} \in C^1(\Omega)$ . Předpokládejme, že  $\varphi_t(\mathbf{x}_0)$  je periodické řešení systému (3) s periodou  $T$ , a že cyklus

$$\Gamma = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} = \varphi_t(\mathbf{x}_0), \quad 0 \leq t \leq T\}$$

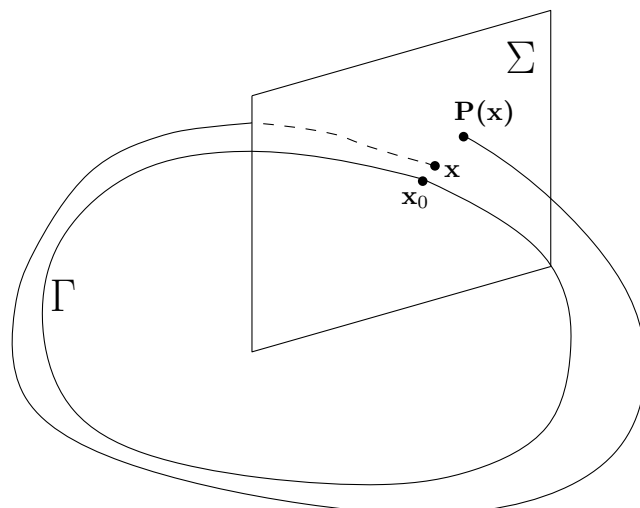
leží v  $\Omega$ . Nechť  $\Sigma$  je ortogonální nadrovina ke  $\Gamma$  v bodě  $\mathbf{x}_0$ . Tedy

$$\Sigma = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = 0\}.$$

Potom existuje  $\delta > 0$  a jediná funkce  $\tau$  definovaná a spojitě diferencovatelná na  $O_\delta(\mathbf{x}_0)$  tak, že  $\tau(\mathbf{x}_0) = T$  a

$$\varphi_{\tau(\mathbf{x})}(\mathbf{x}) \in \Sigma$$

pro  $\forall \mathbf{x} \in O_\delta(\mathbf{x}_0)$ .



Obrázek 15: Poincarého mapa.

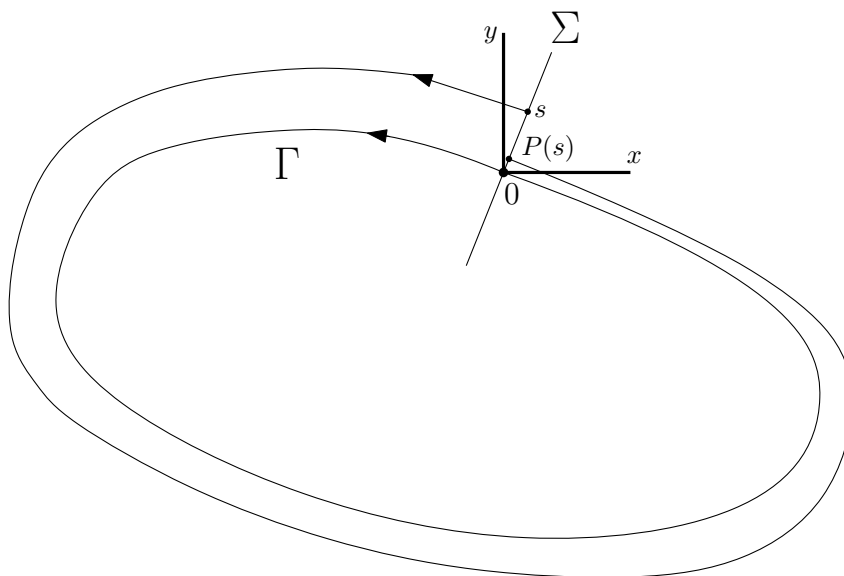
**Definice 4.13.** Nechť je  $\Gamma, \Sigma, \delta$  a  $\tau(\mathbf{x})$  definováno stejně jako v 4.12. Pak pro  $\mathbf{x} \in O_\delta(\mathbf{x}_0) \cap \Sigma$  se funkce

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \varphi_{\tau(\mathbf{x})}(\mathbf{x})$$

nazývá *Poincarého mapa pro  $\Gamma$  v bodě  $\mathbf{x}_0$* .

*Poznámka.* Z Věty 4.12 plyne, že  $\mathbf{P} \in C^1(U)$ , kde  $U = O_\delta(\mathbf{x}_0) \cap \Sigma$ .

V případě  $n = 2$ , přesuneme-li počátek do bodu  $\mathbf{x}_0 \in \Gamma \cap \Sigma$ , tak  $\Sigma$  bude přímka procházející počátkem (Obrázek 16).



Obrázek 16: Poincarého mapa pro dimenzi  $n = 2$ .

Bod  $\mathbf{0}$  rozdělí přímku  $\Sigma$  na dvě části a to  $\Sigma^+$  a  $\Sigma^-$ , kde  $\Sigma^+$  leží vně  $\Gamma$ . Nechť  $s$  popisuje vzdálenost podél  $\Sigma$ , kde  $s > 0$  pro body na  $\Sigma^+$  a  $s < 0$  pro body na  $\Sigma^-$ .

Podle věty 4.12 je pak Poincarého mapa  $\mathbf{P}(s)$  definována pro  $|s| < \delta$  a platí, že  $\mathbf{P}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ . Nyní ukážeme, jak stabilita cyklu  $\Gamma$  souvisí s derivací  $\mathbf{P}'(\mathbf{0})$ . Zavedeme tzv. *funkci posunutí*.

**Definice 4.14.** Funkce posunutí udává nejkratší vzdálenost z počáteční pozice do pozice koncové a je určena vztahem

$$d(s) = P(s) - s.$$

Platí, že  $d(0) = 0$  a derivace  $d'(s) = P'(s) - 1$ .

Jelikož  $d'(s)$  je spojitá funkce, tak znaménko  $d'(s)$  bude stejné jako znaménko  $d'(0)$  pro  $|s|$  dostatečně malé, pokud  $d'(0) \neq 0$ . Tedy pokud  $d'(0) < 0$ , tak  $d(s) < 0$  pro  $s > 0$  a  $d(s) > 0$  pro  $s < 0$ . To znamená, že  $\Gamma$  je stabilní limitní cyklus neboli  $\omega$ -limitní cyklus. Obdobně pokud  $d'(0) > 0$ , tak  $\Gamma$  nestabilní limitní cyklus,  $\alpha$ -limitní cyklus. Ke stejným závěrům dojdeme i pokud  $P(0) = 0$  a  $P'(0) < 1$ , tak je  $\Gamma$  stabilní limitní cyklus a pokud  $P(0) = 0$ ,  $P'(0) > 1$ , tak se jedná o nestabilní limitní cyklus.

Uvedeme nyní větu, která nám dá vzorec pro výpočet  $P'(0)$  na základě pravé strany soustavy (3).

**Věta 4.15.** *Nechť je  $\Omega$  otevřená podmnožina  $\mathbb{R}^2$  a  $\mathbf{f} \in C^1(\Omega)$ . Dále nechť  $\gamma$  je periodické řešení (3) s periodou  $T$ . Pak derivace Poincarého mapy  $P(s)$  podél přímky  $\Sigma$  kolmé na  $\Gamma = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{x} = \gamma(t) - \gamma(0), \quad 0 \leq t \leq T\}$  v bodě  $\mathbf{x} = 0$  je dána vztahem*

$$P'(0) = \exp \int_0^T \nabla \cdot \mathbf{f}(\gamma(t)) dt.$$

*Poznámka.* Vzhledem k Větě 4.15 je periodické řešení  $\gamma(t)$  stabilním limitním cyklem jestliže

$$\int_0^T \nabla \cdot \mathbf{f}(\gamma(t)) dt < 0$$

a nestabilním limitním cyklem, jestliže

$$\int_0^T \nabla \cdot \mathbf{f}(\gamma(t)) dt > 0.$$

Je-li tento integrál roven nule, tak nejsme schopni rozhodnout.

**Příklad 4.16** (Van Der Polův oscilátor). Van der Polův nekonzervativní oscilátor s nelineárním tlumením je popsán diferenciální rovnicí

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu(1 - x^2) \frac{dx}{dt} + x = 0, \quad (23)$$

kde  $\mu \geq 0$  je parametr. Přepíšeme-li tuto rovnici na soustavu, tak dostaneme

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \mu(1 - x_1^2)x_2 - x_1. \end{aligned}$$

Vykreslíme-li fázový portrét, tak vidíme, že dostaneme stabilní limitní cyklus (obrázek 17).

#### 4 SYSTÉMY DRUHÉHO ŘÁDU

Van der Polova rovnice uvedená v příkladě 4.16 může být zobecněna na tzv. *Liénardoviu rovnici*, která je tvaru

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x)\frac{dx}{dt} + g(x) = 0.$$

Přepíšeme-li si tuto rovnici opět na soustavu dvou diferenciálních rovnic prvního řádu, tak dostaneme

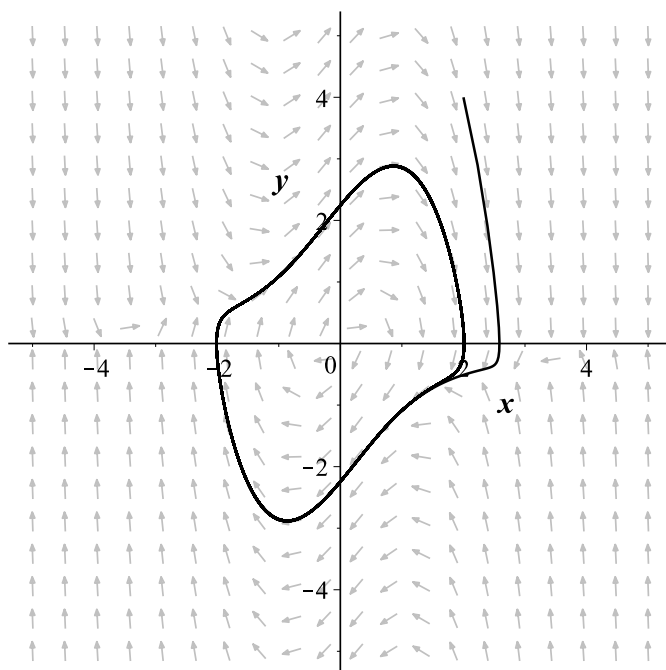
$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -g(x) - f(x)y. \end{aligned} \tag{24}$$

Uvedeme nyní větu, která uvádí, že soustava má jediný stabilní limitní cyklus za určitých požadavků kladených na funkce  $f, g$ .

**Věta 4.17.** *Předpokládejme, že funkce  $f$  a  $g$  splňují následující požadavky:*

- $f(x), g(x) \in C^1(\mathbb{R})$ .
- $g(-x) = -g(x)$  pro  $\forall x$  (tj.  $g$  je lichá funkce).
- $g(x) > 0$  pro  $x > 0$ .
- $f(-x) = f(x)$  pro  $\forall x$  (tj.  $f$  je sudá funkce).
- Lichá funkce  $F(x) = \int_0^x f(u)du$ ,  $F(0) = 0$ ,  $F'(0) < 0$  má právě tři kořeny a to v  $0, -a, a$ , je záporná pro  $0 < x < a$ , kladná a neklesající pro  $x > 0$  a  $F(x) \rightarrow \infty$  pro  $x \rightarrow \infty$ .

*Jsou-li splněny všechny výše uvedené požadavky, tak soustava (24) má právě jeden stabilní limitní cyklus.*



Obrázek 17: Fázový portrét Van der Polova oscilátoru pro  $\mu = 1.2$ .

**Příklad 4.18.** Ukažme, že Van der Polova rovnice má právě jeden stabilní limitní cyklus. Vyjdeme-li z rovnice (23), vidíme, že  $f(x) = \mu(x^2 - 1)$ ,  $g(x) = x$ . Tedy první čtyři požadavky z věty 4.17 jsou splněny. Podíváme-li se na poslední požadavek, tak je vhodné si všimnout, že

$$F(x) = \mu \left( \frac{1}{3}x^3 - x \right) = \frac{1}{3}\mu x(x^2 - 3),$$

z čeho vidíme, že poslední podmínka bude splněna pro  $a = \sqrt{3}$  a tedy Van der Polova rovnice má právě jeden stabilní limitní cyklus.

### 4.3 Bifurkace

V této sekci se budeme věnovat bifurkaci systémů druhého řádu. Při přechodu z jednodimenzionálního systému na systém druhého řádu, stále platí, že body rovnováhy mohou vznikat, zanikat a být destabilizovány změnou parametru, ale navíc totéž platí i pro limitní cykly. Uvedeme tedy možnosti, jak oscilaci spustit nebo zastavit.

Poznatky uvedené v sekci 3.3 mají analogii pro systémy druhého řádu. Dokonce po přidání dalších dimenzí se nic nového dít nebude, jelikož je vše důležité vztažené na jednodimenzionální podprostor, kde se bifurkace odehrává, zatímco ve zbývajících dimenzích je tok jednoduše přitahován či odpuzován z tohoto podprostoru, jak ukážeme v následujících částech této sekce.

#### Bifurkace typu sedlo–uzel

Uvažujme soustavu dvou diferenciálních rovnic

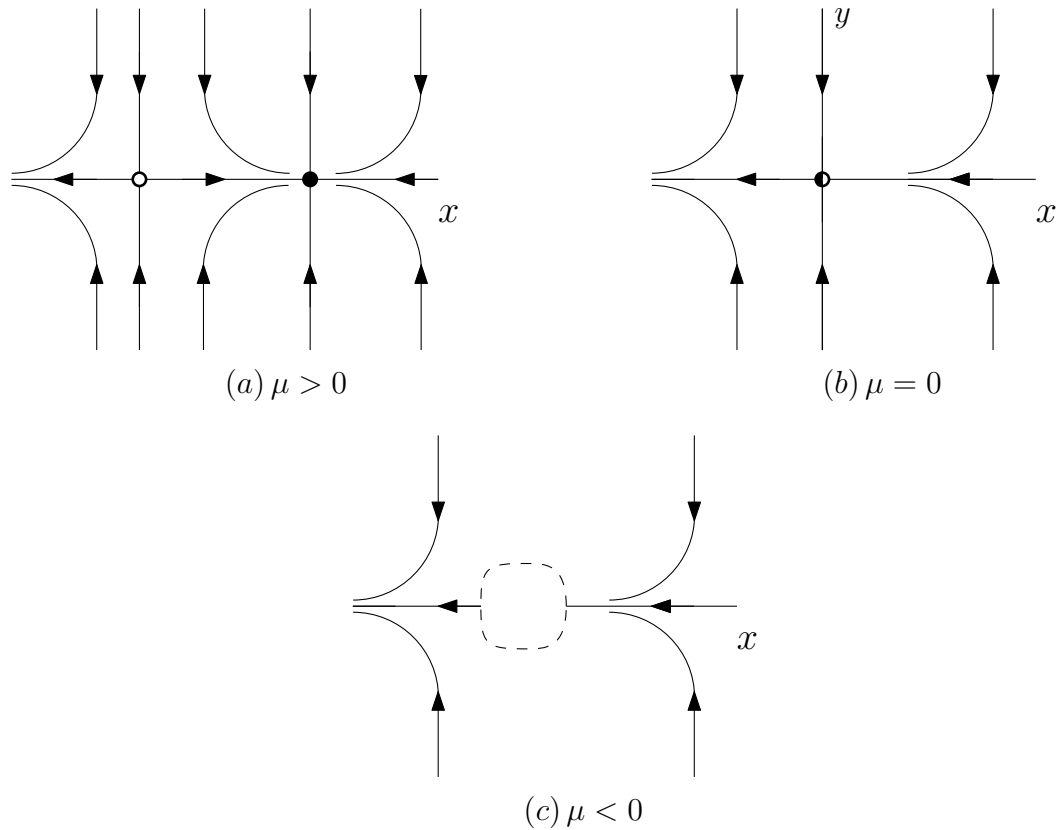
$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu - x^2, \\ \dot{y} &= -y. \end{aligned} \tag{25}$$

Ve směru  $x$  vidíme bifurkační chování diskutované v sekci 3.3, zatímco ve směru  $y$  je pohyb tlumený.

Vykreslíme-li fázový portrét v závislosti na měnící se hodnotě parametru  $\mu$ , tak pro  $\mu > 0$  dostaneme dva body rovnováhy. Stabilní uzel v bodě  $(x^*, y^*) = (\sqrt{\mu}, 0)$  a sedlo v bodě  $(-\sqrt{\mu}, 0)$ . S klesající hodnotou se tyto dva body k sobě přibližují, až splynou při  $\mu = 0$  a zmizí úplně pro  $\mu < 0$  (obrázek 18).

Tok je ovšem ovlivňován i po zmizení bodu rovnováhy. Body zanechávají oblast, které říkáme „*hrdlo*“, která vtáhne trajektorie a opozdí je než je na druhé straně nechá projít dále.





Obrázek 18: Bifurkace typu sedlo uzel pro 2D případ.

### Transkritická a vidličková bifurkace

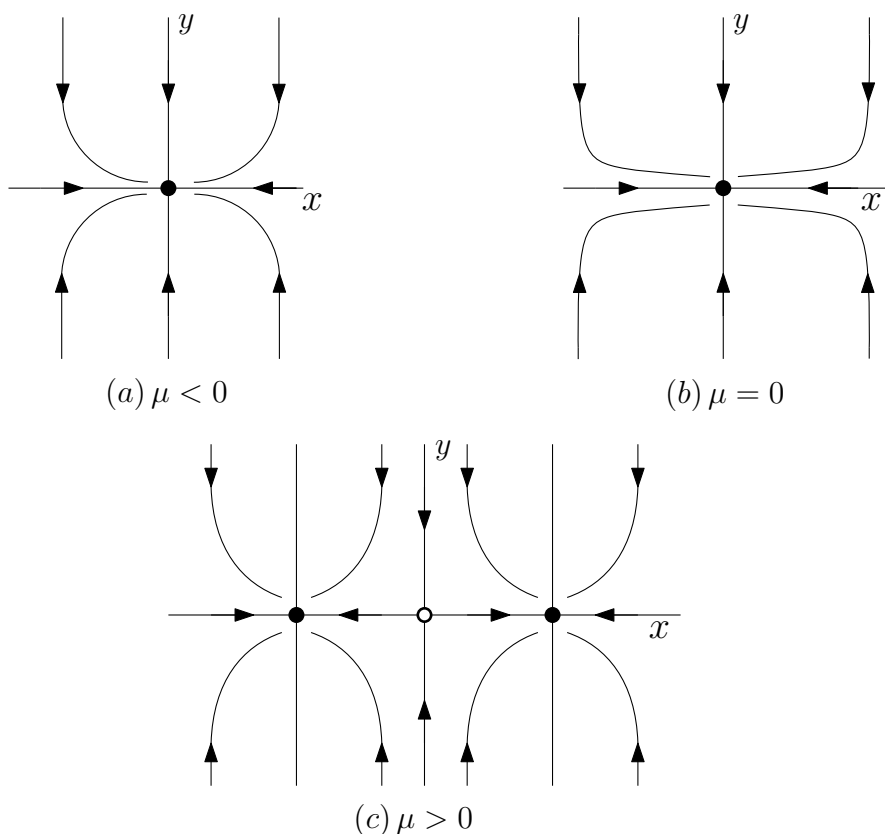
Podobnou úvahou jako pro bifurkaci typu sedlo-uzel můžeme sestavit prototypy soustav, kde se bude vyskytovat transkritická bifurkace typu sedlo-uzel a vidličková bifurkace. Opět ve směru  $x$  vidíme bifurkační chování diskutované v sekci 3.3, zatímco ve směru  $y$  je pohyb tlumený. Uvedme příklady soustav, pro které nastanou v tomto pořadí: transkritická bifurkace typu sedlo-uzel - soustava (26), superkritická vidličková bifurkace - soustava (27) a podkritická vidličková bifurkace - soustava (28).

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu x - x^2, \\ \dot{y} &= -y. \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu x - x^3, \\ \dot{y} &= -y. \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu x + x^3, \\ \dot{y} &= -y. \end{aligned} \tag{28}$$

Při analýze jednotlivých případů se postupuje stejnými kroky. Uvedeme rozbor pro případ superkritické vidličkové bifurkace. Mějme soustavu (27) a vykreslíme fázový portrét pro případy, že  $\mu < 0$ ,  $\mu = 0$ ,  $\mu > 0$  (Obrázek 19).



Obrázek 19: Superkritická vidličková bifurkace pro 2D případ.

Pro  $\mu < 0$  je jediným bodem rovnováhy stabilní uzel v počátku. Pro  $\mu = 0$  je počátek stále stabilním, ale stejně jako v 1D případě je rychlost poklesu menší podél osy  $x$ . Pro  $\mu > 0$  počátek ztrácí stabilitu a objevují se dva nové body rovnováhy, které jsou symetrické okolo počátku  $(x^*, y^*) = (\pm\sqrt{\mu}, 0)$  (stejně jako v 1D případě je pro vidličkovou bifurkaci typická symetrie). Při určení typu bodů rovnováhy bychom pomocí Jacobiho matice zjistili, že počátek je sedlo a nové body jsou stabilními uzly.

Ve všech výše uvedených případech bifurkace nastala pro případ, kdy jedno z vlastních čísel bylo rovno nule. Obecně bifurkace typu sedlo-uzel, transkritická a vidličková jsou příklady tzv. *bifurkace při nulovém vlastním čísle*. Tento typ bifurkace vždy nastává při kolizi jednoho nebo více bodů rovnováhy. Dále uvedeme zcela nový druh bifurkace, který nemá svůj protějšek v jednodimenzionálních případech. Ukazuje, že existuje možnost, aby bod rovnováhy ztratil stabilitu, aniž by došlo k interakci s jiným bodem rovnováhy.

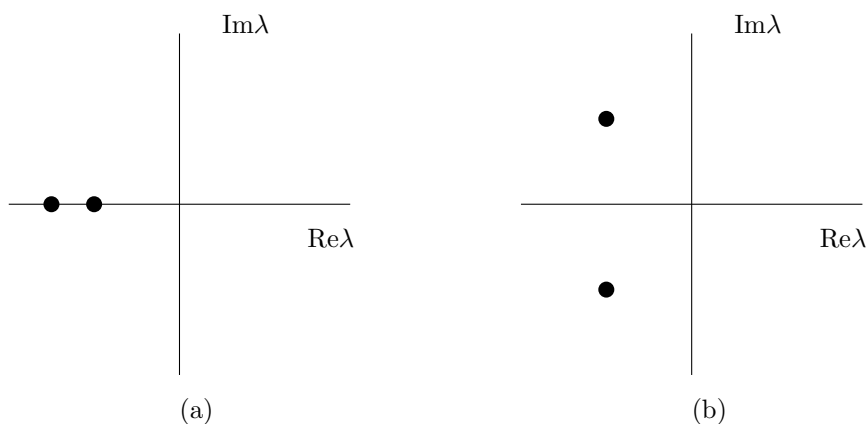
### Hopfova bifurkace

Za předpokladu, že dvoudimenzionální soustava má stabilní bod rovnováhy, tak bude záviset na vlastních číslech Jacobiho matice, které budou určovat, bude-li tento bod stabilní nebo nestabilní s ohledem na měnící se bifurkační parametr.

Je-li bod rovnováhy stabilní, tak víme, že vlastní čísla  $\lambda_1, \lambda_2$  mají  $\text{Re}\lambda < 0$ . Při výpočtu vlastních čísel vycházíme z kvadratické rovnice, kde pro stabilní bod rovnováhy existují dva možné scénáře. Buďto jsou obě vlastní čísla reálná a záporná (Obrázek 20 (a)), nebo se jedná o dvě komplexně sdružená vlastní čísla (Obrázek 20 (b)). Ke ztrátě

#### 4 SYSTÉMY DRUHÉHO ŘÁDU

stability je nutné, aby alespoň jedno vlastní číslo přešlo do oblasti pravé komplexní poloroviny při změně bifurkačního parametru.



Obrázek 20: Rozložení vlastních čísel pro stabilní bod rovnováhy.

Doposud jsme viděli případy, kde vlastní čísla prošla případem, že  $\lambda = 0$  (vidličková bifurkace, bifurkace typu sedlo-uzel. . .). To ale nebylo nic nového, jelikož jsme se s tím setkali již dříve u jednodimenzionálního případu. Nyní však budeme uvažovat zcela nový případ, kdy sdružená komplexní čísla zároveň přejdou přes imaginární osu do oblasti  $\text{Re}\lambda > 0$ . Z obecného hlediska Hopfova bifurkace nastává tam, kde se objeví periodická trajektorie a dojde ke změně stability bodu rovnováhy. Stejně jako vidličková bifurkace, tak i Hopfova bifurkace je superkritická a podkritická.

*Superkritická Hopfova bifurkace* nastává, když se stabilní ohnisko změní na ohnisko nestabilní, které je obklopeno stabilním limitním cyklem s malou amplitudou. V případě *podkritické Hopfovy bifurkace* dochází k tomu, že když nestabilní limitní cyklus obklopuje stabilní ohnisko, tak při změně parametru se tento limitní cyklus bude zmenšovat a bude se „stahovat“ okolo bodu rovnováhy až do chvíle, kdy limitní cyklus zmizí úplně a zůstane pouze nestabilní ohnisko.

*Poznámka.* Dá se jít i v opačném smyslu a bude se také jednat o podkritickou Hopfovu bifurkaci. Tedy začneme s nestabilním ohniskem, kdy při změně parametru dojde k vytvoření malého nestabilního limitního cyklu, který bude růst. Nezávisí tedy na směru, ale na tom, že se jedná o nestabilní limitní cyklus a odtud tedy název podkritická bifurkace.

Na závěr této kapitoly uvedeme ještě jeden druh bifurkace, který bude souviset s pojmem homoklinická trajektorie. Tento druh bifurkace bude názorně vidět v sekci 5.2.

**Definice 4.19.** *Heteroklinická trajektorie* je trajektorie, která spojuje dva body rovnováhy. V případě, že je počáteční bod shodný s bodem koncovým, tak hovoříme o *homoklinické trajektorii*. Máme-li tedy případ homoklinické trajektorie, tak platí, že

$$\Gamma(t) \rightarrow x^*, \text{ pro } t \rightarrow \pm\infty.$$

A v případě heteroklinické trajektorie bude platit, že

$$\Gamma(t) \rightarrow x_1^*, \text{ pro } t \rightarrow -\infty$$

a

$$\Gamma(t) \rightarrow x_2^*, \text{ pro } t \rightarrow +\infty,$$

kde  $\Gamma(t)$  je trajektorie z bodu rovnováhy  $x_1^*$  do bodu rovnováhy  $x_2^*$ .

*Poznámka.* Homoklinická bifurkace se projevuje následovně: část limitního cyklu se přibližuje ohnisku a ve chvíli bifurkace se ho dotkne. V této chvíli se stává homoklinickou orbitou. Homoklinická orbita ale nepředstavuje periodické řešení.

## 5 Teorie chaosu a systémy třetího řádu

Dynamické systémy třetího řádu zaujímají významnou pozici v problematice dynamických systémů a to z důvodu, že ve třídimenčním případě mohou tyto systémy vykazovat chaotické chování. Lorenzův systém je prototypem takového systému, proto je mu v této kapitole věnována velká část, ve které je detailnější rozbor tohoto systému. Další dva zmíněné systémy (Rösslerův systém, Chenův systém) nebudou detailněji rozebrány. Dříve než přejdeme k dynamickým systémům třetího řádu, uvedeme několik pojmů z teorie chaosu, včetně vlastního algoritmu pro indikaci chaotického chování.

### 5.1 Deterministický chaos

V této problematice doposud nebylo ustálené názvosloví a tedy neexistuje obecně uznávaná definice chaosu, nicméně se tyto definice shodují ve třech bodech.

*Chaos* je neperiodické chování deterministického systému, který vykazuje vysokou citlivost na počátečních podmínkách.

1. Neperiodickým chováním rozumíme, že existují trajektorie, které se nepřibližují bodu rovnováhy nebo periodickým trajektoriím pro  $t \rightarrow \infty$ .
2. Deterministický znamená, že systém nemá žádné náhodné vstupy nebo parametry. Nepravidelnost chování tedy vyplývá z nelinearity systému, nikoliv z náhodnosti na vstupu či parametrech.
3. Vysoká citlivost na počátečních podmínkách znamená, že dvě blízko začínající trajektorie se vzdalují exponenciálně, tedy systém má kladný největší Ljapunovův exponent<sup>12</sup>.

*Poznámka.* Ukazuje se, že nutnou podmínkou pro existenci chaosu je dimenze systému  $n \geq 3$ .

Další pojem nutný ke zkoumání problematiky je atraktor, který jsme již zavedli v části o nelineárních systémech v kapitole 4. Pojdme ale tento pojem zopakovat a rozšířit (i zde stále není jednotná úmluva v definici, takže opět uvedeme nejčastěji přijímaný popis).

**Definice 5.1.** Atraktorem budeme chápat uzavřenou množinu  $A$  ve fázovém prostoru, ke které jsou přitahovány trajektorie, a která splňuje následující podmínky:

1.  $A$  je *invariantní* množina (trajektorie začínající v této množině ji neopustí).
2. Existuje otevřená množina  $A \subseteq U$  taková, že  $\mathbf{x}(0) \in U$  a vzdálenost z  $\mathbf{x}(t)$  od  $A$  se blíží k nule pro  $t \rightarrow \infty$  ( $A$  přitahuje všechny trajektorie, které začínají dostatečně blízko). Největší množina  $U$ , která toto splňuje, se nazývá *oblast přitažlivosti* množiny  $A$ .
3.  $A$  je *minimální* (neexistuje žádná její podmnožina, která by splňovala první dvě podmínky atraktoru).

*Poznámka.* Stabilní body rovnováhy a stabilní limitní cykly jsou příkladem atraktoru.

<sup>12</sup>Pojem Ljapunovův exponent bude přesněji vysvětlen později.

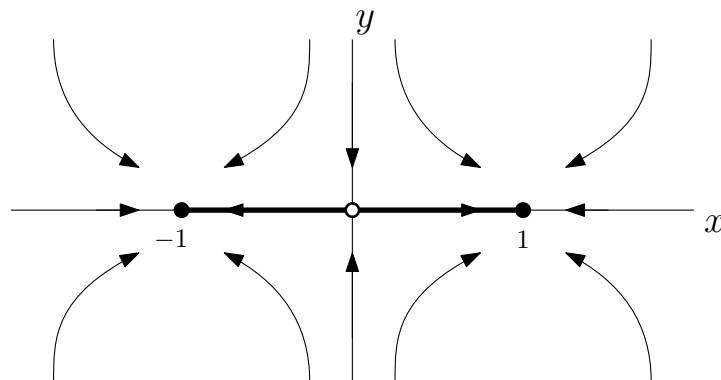
*Poznámka.* Podivným atraktorem<sup>13</sup> budeme chápat atraktor, který má fraktální strukturu.

*Poznámka.* Ne každý podivný atraktor má chaotické chování.

**Příklad 5.2.** Mějme dán fázový portrét (Obrázek 21) pro soustavu rovnic ve tvaru

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - x^3, \\ \dot{y} &= -y. \end{aligned} \quad (29)$$

Nechť  $J$  je interval, kde  $x \in \langle -1, 1 \rangle$  a  $y = 0$  (na obrázku znázorněn tlustou čarou). Je  $J$  atraktorem?



Obrázek 21: Fázový portrét z příkladu 5.2.

*Řešení.* Vidíme, že soustava má tři body rovnováhy: sedlo v počátku a dva stabilní body rovnováhy na konci intervalu  $J$ . Ověříme tedy podmínky atraktoru:

- Obrázek 21 ukazuje, že  $J$  je invariantní množina, tedy každá trajektorie v tomto intervalu začínající, zde i zůstane. Dokonce celá osa  $x$  je invariantní množina, jelikož pro  $y(0) = 0$  dostaneme, že  $y(t) = 0$  pro  $\forall t$  a tedy podmínka 1 z definice 5.1 je splněna.
- Dále vidíme, že  $J$  přitahuje otevřenou množinu počátečních podmínek (přitahuje všechny trajektorie v  $(x, y)$  rovině, podmínka 2 definice 5.1 je taktéž splněna.
- Nyní však narážíme na problém, který způsobují stabilní body rovnováhy, které jsou podmnožinou intervalu  $J$ , ale samy splňují 1. a 2. podmínku atraktoru, tudíž interval  $J$  není minimální a nemůže se jednat o atraktor.

Závěr je tedy takový, že jedinými atraktory soustavy (29) jsou stabilní body rovnováhy o souřadnicích  $(\pm 1, 0)$ .

*Poznámka.* Jak jsme uvedli, tak definice atraktoru není jednotná. Někteří autoři k podmínce 1–3 definice 5.1 uvádějí i podmínku další:

- Trajektorie, které začínají poblíž  $A$ , zůstanou poblíž  $A$ ,  $\forall t > 0$ . Jedná se tedy o případ, že trajektorie zůstávají poblíž  $A$  po celou dobu a nepožadujeme pouze, aby se ve výsledku „přitáhli“, jak uvádí podmínka 2 definice 5.1. Přesněji řečeno: pro libovolné okolí  $U$  množiny  $A$  existuje okolí  $V$  množiny  $A$  takové, že začneme-li v okolí  $V$ , tak zůstaneme v okolí  $U$  napořád.

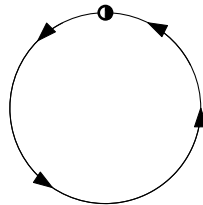
<sup>13</sup>Můžeme se setkat i s názvem jako je *chaotický atraktor* či *fraktální atraktor*.

Ukažme na příkladu:

*Příklad 5.3.* Uvažujme jednodimenzionální soustavu na kružnici

$$\dot{\theta} = 1 - \sin \theta.$$

Pro tento případ dostaneme bod rovnováhy  $\theta^* = \frac{\pi}{2}$  a jedná se o polostabilní bod rovnováhy (obrázek 22). Je bod rovnováhy  $\theta^*$  atraktor?



Obrázek 22: Grafické znázornění pro příklad 5.3.

*Řešení.* Podmínka 1 je splněna, jelikož začneme-li v tomto bodě, tak v něm i napořád zůstaneme. Podmínka 2 je také splněna, jelikož ať začneme kdekoli na kruhu, tak opět skončíme v bodě  $\theta^*$ . Bod nemá žádnou podmnožinu, která by splňovala první dvě podmínky a tedy i podmínka 3 je splněna. Podle definice 5.1 se jedná o atraktor. To se ale některým autorům nelíbilo, protože se jedná pouze o polostabilní bod rovnováhy a při startu z bodu  $\theta^*$  „utečeme“ moc daleko od tohoto bodu a projdeme velkou část fázového prostoru, než se do něj vrátíme. Zde přichází do hry podmínka 4, která již splněna nebude, jelikož bychom opustili libovolné okolí bodu  $\theta^*$ .

### Spektrum Ljapunovových exponentů

Jak jsme již zmínili, tak dynamické systémy vykazující vysokou citlivost na počáteční podmínky, mohou mít chaotické chování. Hodil by se tedy nástroj, kterým by bylo možné tuto citlivost detekovat a případně kvantifikovat. V úvodu kapitoly jsme také uvedli, že kladná hodnota Ljapunova exponentu indikuje chaotické chování dynamického systému. Pojdme se nyní podívat na tuto problematiku podrobněji.

*Ljapunovův exponent* měří citlivost dynamického systému na malou změnu počátečních podmínek. Jestliže dvě trajektorie začínají blízko sebe v chaotickém systému, tak mají tendenci se vzdalovat exponenciálně. Tuto myšlenku můžeme zapsat vztahem

$$\frac{d}{d_0} = e^{\lambda(t-t_0)}, \quad (30)$$

kde  $d_0$  značí počáteční vzdálenost mezi startovacím bodem a bodem na blízké trajektorii.  $d$  označuje vzdálenost v čase  $t > t_0$  a konečně  $\lambda$  označuje námi hledaný Ljapunovův exponent.

*Poznámka.* Pokud  $\lambda > 0$ , tak hodnota  $\frac{d}{d_0}$  poroste exponenciálně, pro  $\lambda < 0$  se tato hodnota bude exponenciálně zmenšovat a pokud  $\lambda = 0$ , tak se trajektorie budou vzdalovat neexponenciálně.

Vyjádríme-li z rovnice (30) vztah pro  $\lambda$ , tak dostáváme

$$\lambda = \frac{1}{t - t_0} \ln \left( \frac{d}{d_0} \right). \quad (31)$$

Tento vztah nám ale dává možnost spočítat  $\lambda$  pouze pro dva určité sousední body na určitém časovém intervalu, neznámá to, že možným způsobem, jak určit Ljapunovův exponent pro celý systém, by mohlo být zprůměrovat hodnoty  $\lambda$  na velkém množství sousedních bodů.

**Definice 5.4.** Jestliže vzdálenost mezi  $i$ -tým bodem a sousedním bodem v čase  $t_i$  je  $d_i$  a počáteční vzdálenost mezi dvěma body je  $d_{0i}$  v čase  $t_{0i}$ , definujeme Ljapunovův exponent vztahem

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{(t_i - t_{0i})} \ln \left( \frac{d_i}{d_{0i}} \right).$$

*Poznámka.* Většina dynamických systémů nemá pouze jeden Ljapunovův exponent. Ve skutečnosti, je-li systém  $n$ -dimenzionální, tak má tento systém  $n$  Ljapunovových exponentů. Dohromady dávají množinu, které se říká *Ljapunovovo spektrum*. Ljapunovovo spektrum je zpravidla uspořádáno od největšího exponentu k nejmenšímu. K nalezení celého spektra musíme napočítat  $\lambda_i$  pro malé vzdálenosti v  $i$ -té proměnné pro všechna  $1 \leq i \leq n$ .

**Definice 5.5.** Jsou-li  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$  Ljapunovovy exponenty  $n$ -dimenzionálního dynamického systému, pak Ljapunovým spektrem budeme chápat množinu

$$\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n\}$$

a  $\lambda_1$  budeme označovat jako *LLE–Largest Lyapunov exponent* (největší Ljapunovův exponent).

Zbývá ještě upravit naše tvrzení o indikaci chaosu pomocí Ljapunovova exponentu to pomocí následujícího kritéria:

$$\begin{aligned} \lambda_1 > 0 &\Leftrightarrow \text{chaotické chování} \\ \lambda_1 \leq 0 &\Leftrightarrow \text{nechaotické chování} \end{aligned}$$

*Poznámka.* LLE slouží jako indikace chaosu, tedy mohou nastat případy, kdy systém má kladný LLE, ale není chaotický. Například systém  $\dot{\mathbf{x}} = \lambda \mathbf{x}$  má pro  $\lambda > 0$  kladný LLE, ale systém není chaotický.

Vlastnosti Ljapunovova spektra :

- Je-li systém konzervativní (bez disipace <sup>14</sup>), tak suma všech Ljapunovových exponentů bude nula, v opačném případě bude tato suma záporná.
- Jestliže trajektorie nekonvergují do jediného bodu, tak jeden Ljapunovův exponent bude vždy nula.
- Pro dynamické systémy vykazující chaotické chování musí být alespoň jeden exponent kladný.

*Poznámka.* U systémů dimenze  $n = 3$  budeme mít vždy  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 < 0$ .

<sup>14</sup>Obecně v disipativním systému se objem „smršťuje“ podél trajektorií.

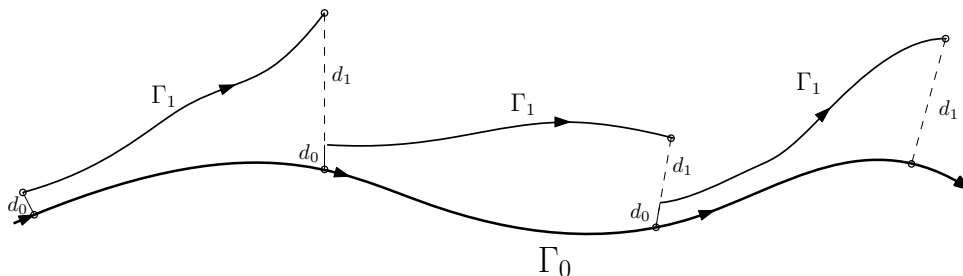


**Algoritmus výpočtu LLE**

Ukažme, jak vypadá algoritmus výpočtu LLE pro obecný dynamický systém za účelem ověření chaotického chování.

1. Vhodným výběrem počáteční podmínky <sup>15</sup> dostaneme trajektorii, kterou budeme považovat za *referenční trajektorii*.
2. Vybereme (libovolně) novou blízkou počáteční podmínku, která je dostatečně „blízko“ a je vzdálená o konstantu  $d$  [4]. Tato nová počáteční podmínka udává *pomocnou trajektorii*.
3. Necháme spočítat jednu iteraci pro obě počáteční podmínky vhodnou numerickou metodou (v našem případě pomocí metody Runge–Kutta čtvrtého řádu s krokem  $h$ ) a spočítáme jejich novou vzdálenost  $d_1$ .
4. Spočítáme lokální Ljapunovův exponent<sup>16</sup> podle vzorce (31).
5. Spočítaná iterace referenční trajektorie nyní určuje novou počáteční podmínku pro tuto trajektorii a počáteční podmínku pro pomocnou trajektorii upravíme tak, aby ležela na úsečce spojující obě iterace ve vzdálenosti  $d$  od referenční trajektorie.
6. Opakujeme kroky 3.-5. až do konečného času  $T$ , přičemž zaznamenáváme průměrnou hodnotu jednotlivých lokálních Ljapunovových exponentů. Takto dostáváme odhad LLE.
7. Vybereme náhodně novou počáteční podmínku pro referenční trajektorii (opět by měla být „blízko“ atraktoru), kterou vezmeme tak, že k počáteční podmínce z předešlé iterace je přičten náhodný vektor z intervalu  $(-1, 1)$ , a opakujeme kroky 2.-6.
8. Krok 7. opakujeme dostatečně mnohokrát a zaznamenáváme průměrnou hodnotu LLE přes jednotlivé počáteční podmínky.

*Poznámka.* Je vhodné neuvažovat několik prvních hodnot průměrného Ljapunovova exponentu a to z důvodu, kdybychom „netrefili“ počáteční podmínku na (nebo blízko) atraktoru. Nemá tedy cenu počítat LLE, dokud nejsme dostatečně „blízko“.



Obrázek 23: Algoritmus výpočtu LLE.  $\Gamma_0$  označuje referenční trajektorii a  $\Gamma_1$  pomocné trajektorie.

<sup>15</sup>Tímto je myšlena volba počáteční podmínky, která je „blízko“ atraktoru.

<sup>16</sup>Lokální Ljapunovův exponent udává předpověď chování systému v lokálním smyslu, zatímco LLE udává předpověď z hlediska globálního.

Ljapunovovo spektrum můžeme využít nejen k identifikaci chaosu v dynamickém systému, ale můžeme jej použít i k přibližnému určení fraktální dimenze podivného atraktoru. K určení této dimenze je potřeba spočítat tzv. *Kaplan–Yorkeovu dimenzi*.

**Definice 5.6.** Jsou-li  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$  Ljapunovovy exponenty  $n$ -dimenzionálního dynamického systému a je-li  $j$  největší celé číslo, pro které platí, že  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_j \geq 0$ , tak Kaplan–Yorkeova dimenze je dána vztahem

$$D_{KY} = j + \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_j}{|\lambda_{j+1}|}. \quad (32)$$

Uved’me nyní několik chaotických dynamických systémů třetího řádu, na kterých posléze budeme aplikovat výpočty pro zjištění LLE. Lorenzovým systémem se budeme zabývat detailněji, jelikož se jedná o prototyp chaotického dynamického systému a další dva systémy zmíníme již jen okrajově.

## 5.2 Systémy třetího řádu

### Lorenzův systém

Edward Lorenz byl americký matematik, meteorolog a průkopník v teorii chaosu. Lorenz se obecně zabýval zjednodušováním složitých modelů a bylo tomu i v případě modelu proudění kapaliny. Lorenzův systém je tvořen soustavou tří diferenciálních rovnic 1. řádu s jedním parametrem a dvěma nelinearitami. Je následujícího tvaru:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \sigma(y - x), \\ \frac{dy}{dt} &= x(\rho - z) - y, \\ \frac{dz}{dt} &= xy - \beta z, \end{aligned} \quad (33)$$

kde parametr  $\beta$  nemá název (jedná se pouze o parametr soustavy), parametr  $\delta$  je *Prandtlovo číslo*, které vyjadřuje poměr ztracené energie vlivem tření v tekutině a energie ztracené vlivem vedení tepla a parametr  $\rho$  představuje až na násobek *Rayleighovo číslo* a udává míru podílu teploty mezi teplotou horní a dolní vrstvou tekutiny, přičemž platí, že  $\sigma, \rho, \beta > 0$  (jedná se o bezrozměrnou hodnotu). Soustavě (33) se také říká Lorenzův model konvektivního proudění v atmosféře.

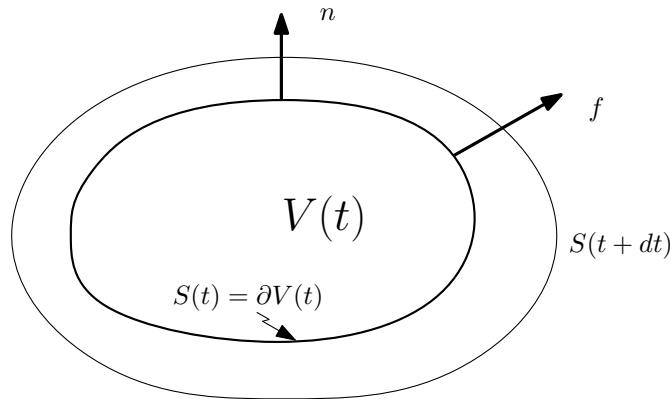
Lorenz zjistil, že takto jednoduše vypadající systém může mít extrémně nestálé chování. Při různých hodnotách parametrů řešení nepravidelně osciluje, avšak nikdy se neopakuje a zůstává v ohraničené oblasti fázového prostoru.

Ukažme nyní několik základních vlastností tohoto systému:

1. V soustavě (33) se vyskytují dvě nelinearity a to výrazy  $xz, xy$ .
2. Taktéž lze vidět symetrii v soustavě. Zaměníme-li totiž  $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$ , tak zůstanou rovnice beze změny. Tedy jestliže je vektor  $(x, y, z)$  řešením, tak i vektor  $(-x, -y, z)$  je řešením. V kapitole o bifurkacích jsme uvedli, že při vidličkové bifurkaci je viditelná symetrie, lze tedy očekávat, že tento typ bifurkace se objeví i u Lorenzova systému.

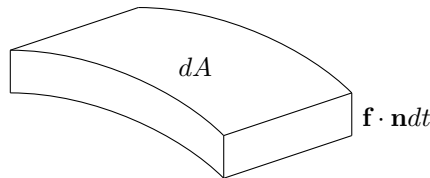
## 5 TEORIE CHAOSU A SYSTÉMY TŘETÍHO ŘÁDU

3. Poslední vlastností, kterou ukážeme je „smrštění“ objemu. Lorenzův systém je totiž disipativní ve fázovém prostoru ve smyslu toku. Uvažujme nejprve obecný libovolný třídídimenzionální systém  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$  a vezměme libovolný uzavřený povrch  $S(t) = \partial V(t)$  objemu  $V(t)$  ve fázovém prostoru. Body z  $S$  budeme považovat za počáteční podmínky pro trajektorie a budeme pozorovat, jak se tyto trajektorie budou vyvíjet pro infinitezimální přírůstek času  $dt$ . Povrch  $S$  se tedy změní na  $S(t + dt)$  a vyvstává otázka, jaký bude objem  $V(t + dt)$ . Dále nechť  $\mathbf{n}$  označuje vnější jednotkový normálový vektor povrchu  $S$  a vektor  $\mathbf{f}$  udává rychlost bodů na povrchu (viz obrázek 24).



Obrázek 24: Objem.

Potom  $\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}$  udává normálovou složku rychlosti na povrchu  $S$ . Tedy s přírůstkem času  $dt$  se malá část plochy  $dA$  „vynoří“ z objemu  $(\mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dt)dA$  (obrázek 25).



Obrázek 25: Přírůstek objemu.

Nyní už můžeme přistoupit k zodpovězení otázky, jak se změní objem s přírůstkem času  $dt$ :

$$V(t + dt) \cong V(t) + dt \iint_S (\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}) dA.$$

Upravíme na

$$\lim_{dt \rightarrow 0} \frac{V(t + dt) - V(t)}{dt} = \dot{V}(t) = \iint_S (\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}) dA,$$

což lze pomocí Gaussovy–Ostrogradského věty upravit na tvar

$$\dot{V}(t) = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{f} dV. \quad (34)$$

Pro náš konkrétní případ soustavy (33) dostaneme

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{\partial}{\partial x}(\sigma(y-x)) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho x - y - xz) + \frac{\partial}{\partial z}(xy - \beta z) = -\sigma - 1 - \beta = -(\sigma + \beta + 1) < 0.$$

Protože je divergence  $\nabla \cdot \mathbf{f}$  konstantní, (34) představuje jednoduchou diferenciální rovnici, která má řešení

$$V(t) = V(0)e^{-(\sigma+\beta+1)t}.$$

Odtud je vidět, že se objem ve fázovém prostoru zmenšuje exponenciálně rychle. Závěr je tedy takový, že začneme-li s libovolným útvarem počátečních podmínek o nějakém objemu, tak dojde k tomu, že se tento „útvár“ smrskne do limitní množiny s nulovým objemem.

Co takovou množinou může být? V případě Lorenzova systému závisí na parametrech. Může se jednat o bod rovnováhy, limitní cyklus ale také se bude jednat o podivný atraktor.

Dále provedeme základní analýzu Lorenzova systému: určíme body rovnováhy, posoudíme jejich stabilitu a popíšeme chování systému ve fázovém prostoru s ohledem na měnící se hodnotu parametru  $\rho$ . Body rovnováhy jsou řešením soustavy

$$0 = \sigma(y - x), \quad (35)$$

$$0 = x(\rho - z) - y, \quad (36)$$

$$0 = xy - \beta z. \quad (37)$$

Z první rovnice vidíme, že  $x = y$ . Dosazením této rovnosti do rovnic (36),(37) dostaneme tři body rovnováhy:

$$L_1(x^*, y^*, z^*) = (0, 0, 0),$$

$$L_{2,3}(x^*, y^*, z^*) = (\pm\sqrt{\beta(\rho-1)}, \pm\sqrt{\beta(\rho-1)}, \rho-1).$$

Dále vidíme, že existence bodů  $L_2$  a  $L_3$  závisí na parametru  $\rho$ . V případě, že  $\rho < 1$ , tak body  $L_2$  a  $L_3$  nebudou existovat. Pro  $\rho = 1$  dostaneme, že  $L_2 = L_3 = L_1$  a konečně pro  $\rho > 1$  budou body  $L_2$  a  $L_3$  existovat a budou různé.

Nyní posoudíme stabilitu těchto bodů. Linearizace okolo počátku může být provedena pomocí Jacobiho matice. My však využijeme toho, že v okolí počátku jsou hodnoty  $x, y, z$  malé a tedy výrazy  $xy$  a  $-xz$  zanedbáme. Touto úvahou dostaneme ze soustavy (33) zjednodušený tvar

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma y - \sigma x, \\ \dot{y} &= x\rho - y, \\ \dot{z} &= -\beta z. \end{aligned} \quad (38)$$

V soustavě (38) vidíme, že třetí rovnice je rovnice se separovanými proměnnými, která má řešení

$$z(t) = c_1 e^{-\beta t}, \quad c_1 \in \mathbb{R}$$

a platí, že  $z(t) \rightarrow 0$ , pro  $t \rightarrow \infty$ , přičemž rychlost poklesu je zřejmě exponenciální. Zůstává nám tedy pouze soustava dvou rovnic

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma \\ \rho & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

## 5 TEORIE CHAOSU A SYSTÉMY TŘETÍHO ŘÁDU

Nyní můžeme aplikovat již známé informace z kapitoly 4. Matice soustavy

$$A = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma \\ \rho & -1 \end{pmatrix}$$

má vlastní čísla ve tvaru

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left( -(\sigma + 1) \pm \sqrt{(\sigma + 1)^2 - 4\sigma(1 - \rho)} \right),$$

kde vidíme, že pro volbu  $\rho > 1$  dostaneme bod rovnováhy typu sedlo, kde jeden směr je přitahující a jeden odpuzující. Spojíme-li to s tím, že pro směr v ose  $z$  jsme zjistili, že pro rostoucí čas, trajektorie skončí v počátku, tak budeme mít jeden směr odpuzující a dva směry přitahující. Je-li  $\rho < 1$ , počátek bude stabilní uzel.

Pro  $\rho < 1$  jsme tedy schopni ukázat, že se každá trajektorie asymptoticky přibližuje počátku pro  $t \rightarrow \infty$ , tedy počátek je globálně stabilní. To znamená, že nevznikají žádné limitní cykly, podivné atraktory, apod., a počátek je tedy jediný atraktor.

K dokázání tohoto tvrzení využijeme poznatky ze sekce 2.3. Uvažujme Ljapunovovu funkci

$$V(x, y, z) = \frac{1}{\sigma} x^2 + y^2 + z^2.$$

V případě, že  $V$  bude konstantní, tak z geometrického hlediska se bude jednat o soustředné elipsoidy se středem v počátku. Naším cílem bude ukázat, za předpokladu, že  $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ , bude  $\dot{V} < 0$  pro  $\rho < 1$ . Spočítáme-li tedy  $\dot{V}$ :

$$\frac{1}{2} \dot{V} = \frac{1}{\sigma} x \dot{x} + y \dot{y} + z \dot{z},$$

kde po dosazení z (33) dostaneme

$$\frac{1}{2} \dot{V} = yx - x^2 + x\rho y - xzy - y^2 + xyz - \beta z^2 = xy(1 + \rho) - x^2 - y^2 - \beta z^2. \quad (39)$$

Vztah (39) lze dále upravit tak, že jej rozšíříme na čtverec v prvních dvou výrazech:

$$\frac{1}{2} \dot{V} = - \left( x - \frac{\rho + 1}{2} y \right)^2 - \left( 1 - \left( \frac{\rho + 1}{2} \right)^2 \right) y^2 - \beta z^2. \quad (40)$$

Z tohoto tvaru je ihned vidět, že  $\dot{V} < 0$ ,  $\forall (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$  a  $\rho < 1$ .

Díky větě 2.19 tedy máme

$$V(x(t), y(t), z(t)) \rightarrow 0 \Rightarrow (x(t), y(t), z(t)) \rightarrow 0,$$

tj. počátek je globálně asymptoticky stabilní.

Předpokládejme nyní, že  $\rho > 1$ . Pro tento případ jsme již ukázali, že v počátku budeme mít bod rovnováhy typu sedlo se dvěma směry přitahujícími a jedním směrem odpuzujícím. Dále víme, že pro případ  $\rho > 1$  dostaneme další body rovnováhy  $L_2$  a  $L_3$ .

Pomocí symetrie Lorenzova systému lze ulehčit práci a to tím, že budeme analyzovat stabilitu pouze pro jeden bod a druhý bod bude vykazovat stejné chování. Vezmeme tedy bod  $L_2(x^*, y^*, z^*) = (\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1)$ . K této analýze bude vhodné využít *Routh-Hurwitzovo kritérium*, kde nám budou stačit pouze koeficienty charakteristického polynomu z Jacobiho matice.

**Věta 5.7.** *Mějme polynom*

$$P(\lambda) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \dots + c_{n-1}\lambda + c_n,$$

kde všechny koeficienty  $c_i, i = 1, \dots, n$  jsou reálné. Dále necht'

$$H_n = \begin{pmatrix} c_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_3 & c_2 & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ c_5 & c_4 & c_3 & c_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{2n-1} & c_{2n-2} & c_{2n-3} & c_{2n-4} & \dots & c_n \end{pmatrix}$$

$$H_1 = (c_1) \quad H_2 = \begin{pmatrix} c_1 & 1 \\ c_3 & c_2 \end{pmatrix} \quad H_3 = \begin{pmatrix} c_1 & 1 & 0 \\ c_3 & c_2 & c_1 \\ c_5 & c_4 & c_3 \end{pmatrix}$$

jsou Hurwitzovy matice koeficientů  $c_i$ . Potom budou všechny kořeny polynomu  $P(\lambda)$  mít zápornou reálnou část, jestliže všechny determinanty Hurwitzových matic budou kladné.

Tyto znalosti můžeme nyní aplikovat na případ Lorenzova systému, kdy po sestavení Jacobiho matice a příslušného charakteristického polynomu obdržíme, že

$$c_1 = (\sigma + 1 + \beta) \quad c_2 = \beta(\sigma + \rho) \quad c_3 = 2\sigma\beta(\rho - 1)$$

a můžeme spočítat  $H_1, H_2, H_3$ .

$$H_1 = \sigma + 1 + \beta, \quad H_2 = \rho(-\sigma + \beta + 1) + \sigma(\sigma + \beta + 3), \quad H_3 = 2\sigma\beta(\rho - 1)H_2$$

Okamžitě vidíme, že  $H_1 > 0$  a hodnota  $H_3$  bude záviset na hodnotě  $H_2$ . Vezměme případ, že  $H_2 = 0$ . Z tohoto upravením dostaneme, že

$$\rho_c = \sigma \frac{\sigma + \beta + 3}{\sigma - \beta - 1}. \quad (41)$$

Dostali jsme jakési  $\rho_c$ , které lze chápat jako jakousi kritickou hodnotu parametru  $\rho$ , proto je vhodné podívat se na na případ, jak dopadne hodnota  $H_2$  pro  $\rho < \rho_c$  a pro  $\rho > \rho_c$ . Vezměme prvně  $\rho < \rho_c$ , například

$$\rho = \frac{1}{3}\sigma \frac{\sigma + \beta + 3}{\sigma - \beta - 1},$$

kteří když dosadíme do výrazu pro  $H_2$ , tak dostaneme, že  $H_2 > 0$  a v opačném případě rychlím dosazením lze ověřit, že pro  $\rho > \rho_c$  bude  $H_3 < 0$ . Tedy pro  $\rho < \rho_c$  máme hodnoty  $H_2, H_3 > 0$ .

*Poznámka.* Dosadíme-li do rovnice (41) hodnoty  $\sigma = 10, \beta = \frac{8}{3}$ , tak dostaneme, že  $\rho_c = 24.74$ .

V následující tabulce můžeme vidět přehledně chování systému pro měnící se  $\rho$ :

Tabulka 1: Stabilita Lorenzova systému.

Hodnota $\rho$	Bod $L_1$	Body $L_{2,3}$
$\rho < 1$	asymptoticky stabilní	neexistují
$\rho = 1$	kritický případ (bifurkace)	neexistují
$\rho \in (1, \rho_c)$	nestabilní	asymptoticky stabilní
$\rho = \rho_c$	nestabilní	kritický případ (bifurkace)
$\rho > \rho_c$	nestabilní	nestabilní

*Poznámka.* Jak uvidíme dále, tak otázka stability není plně vyřešena hodnotou  $\rho_c$ .

Ukažme nyní graficky, jak se Lorenzův systém chová, budeme-li postupně měnit hodnotu parametru  $\rho$ .

Začneme intervalem  $\rho \in (0, 1)$ . Jak jsme již uvedli, tak v tomto případě bude existovat pouze jediný bod rovnováhy a tím bude počátek. V takovém případě se bude jednat o atraktivní uzel a všechny trajektorie se k tomuto bodu přibližují. Počátek je globálně stabilní.

Je-li  $\rho = 1$  počátek ztrácí stabilitu vlivem superkritické vidličkové bifurkace. Objevuje se dvojice symetrických bodů rovnováhy. Pohybujeme se nyní v intervalu  $\rho \in (1, 24.74)$ . Naše nově vzniklé body  $L_2$  a  $L_3$  jsou stabilními ohnisky. Až do hodnoty  $\rho = 13.926$  se nic nemění. Při této hodnotě opět dochází k bifurkaci, ale tentokrát se jedná o homoklinickou bifurkaci. Při této hodnotě vzniká dvojice nestabilních limitních cyklů. Od doby, kdy  $\rho$  přesáhne hodnotu 13.926, tak trajektorie obíhá oba tyto body, než se ustálí v jednom z ohnisek, které jsou stále stabilní.

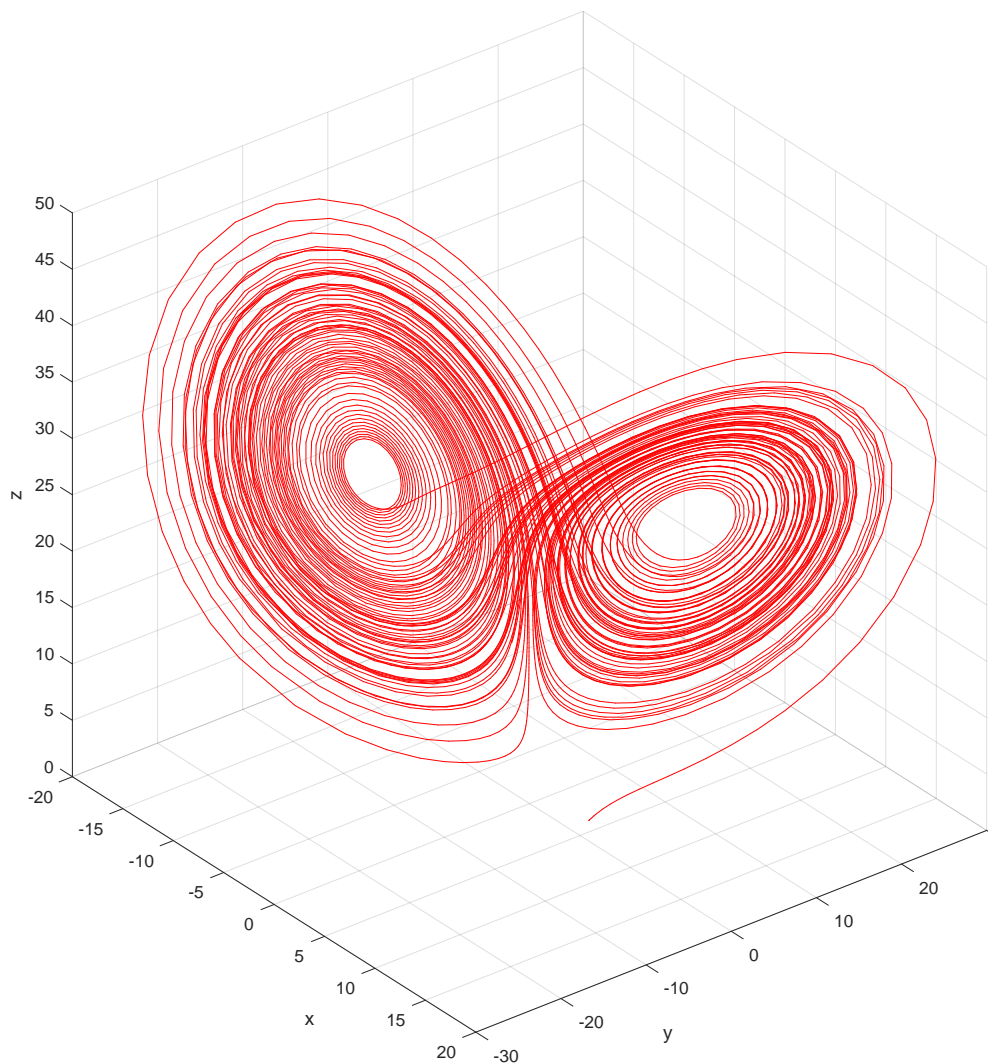
S rostoucí velikostí  $\rho$  limitní cykly postupně snižují svou amplitudu a to až do hodnoty  $\rho = 24.74$ , kdy dochází ke splynutí ohnisek s limitními cykly při Hopfově podkritické bifurkaci. Ohniska  $L_2, L_3$  ztrácí svou stabilitu a pro hodnoty  $\rho > 24.74$  se objevuje množina, kterou nazýváme *Lorenzovým atraktorem* (jedná se o podivný atraktor). Chaotičnost chování trajektorií spočívá v tom, že nevíme, kolikrát jedno konkrétní řešení oběhne kolem bodu rovnováhy, než se odkloní k druhému. Tato hodnota je nahodilá a neexistuje v ní žádná pravidelnost

*Poznámka.* Pro hodnoty  $\rho \in (24.06, 24.74)$  nastává zajímavá situace, kterou původně ani Lorenz nezjistil a to, že máme dva asymptoticky stabilní body rovnováhy a Lorenzův atraktor.

Na následujících obrázcích (a)-(h) vidíme změny fázového portréту pro pevně dané hodnoty  $\sigma = 10, \beta = \frac{8}{3}$  a mění se hodnoty  $\rho$  pro dvě různé počáteční podmínky.

*Poznámka.* Vystává otázka, jestli se pro hodnoty  $\rho > 24.74$  již nic nového dít nebude. Opak je však pravdou. Numerické simulace naznačují, že systém má globálně atraktivní limitní cyklus pro všechna  $\rho > 313$ . Během intervalu  $\rho \in (28, 313)$  je však situace daleko složitější. Pro většinu hodnot  $\rho$  nastává chaos, ale existují i výjimky, kdy se „vracíme“ k periodickému chování. Mezi takovéto hodnoty  $\rho$  patří například interval  $\rho \in (145, 166)$ . Na obrázcích (i)-(l) lze vidět měnící se fázový portrét pro  $\rho > 24.74$ , ale tentokrát pro přehlednost již jen pro jednu počáteční podmínku.

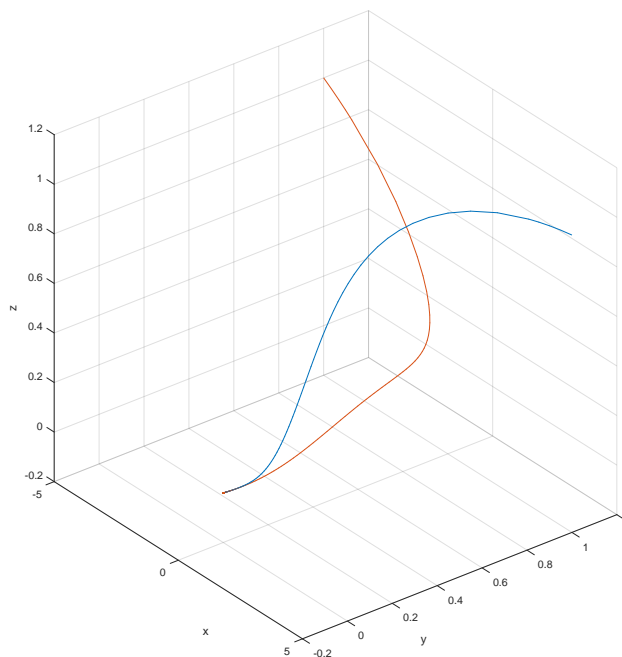
*Poznámka.* Nejčastěji se chaos Lorenzova systému studuje při hodnotě  $\rho = 28$ .



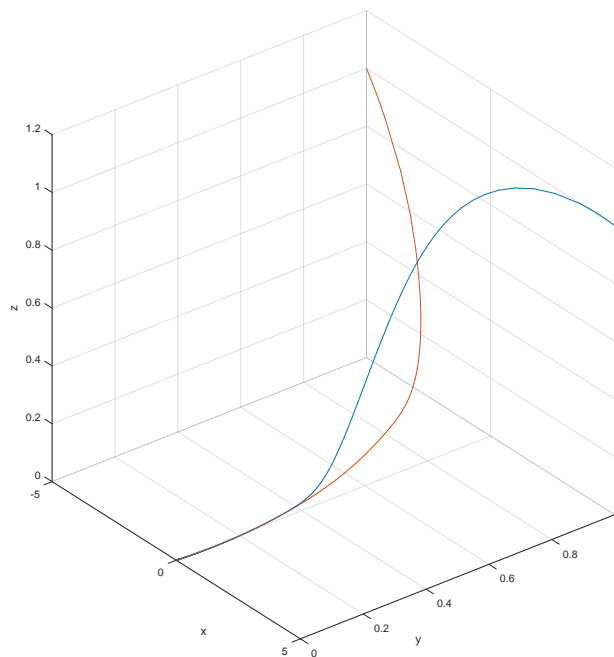
Obrázek 26: Lorenzův atraktor pro hodnotu  $\rho = 28$ .



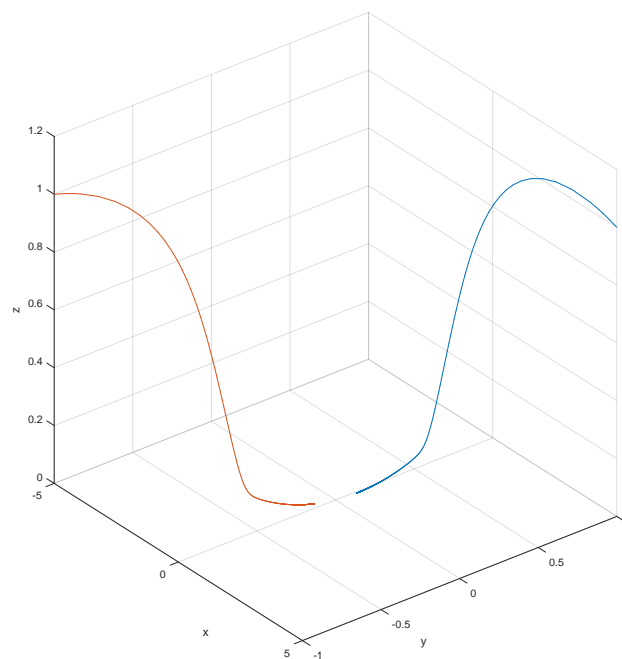
5 TEORIE CHAOSU A SYSTÉMY TŘETÍHO ŘÁDU



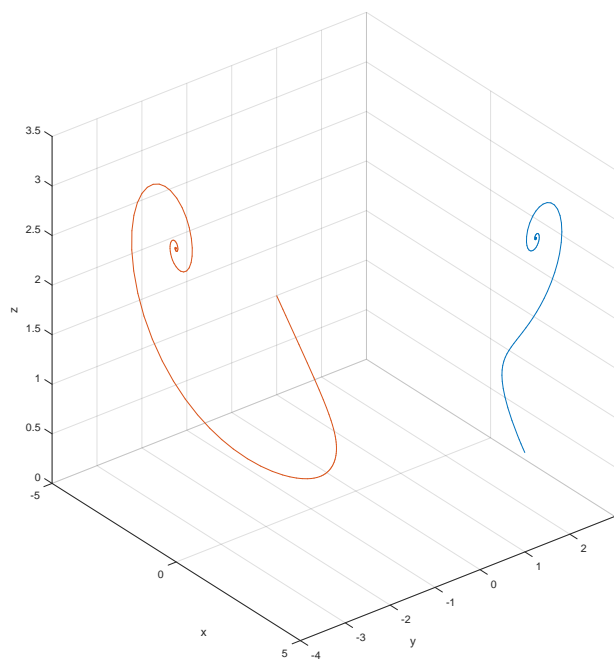
(a)  $\rho=0.42$



(b)  $\rho=0.90$

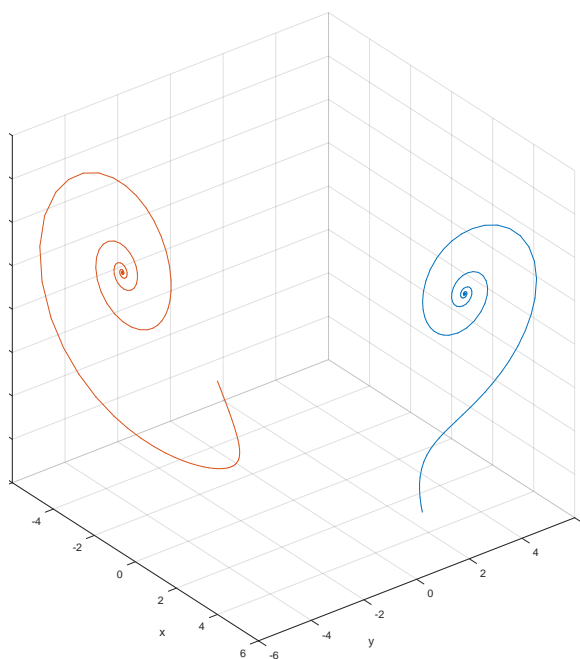


(c)  $\rho=1$

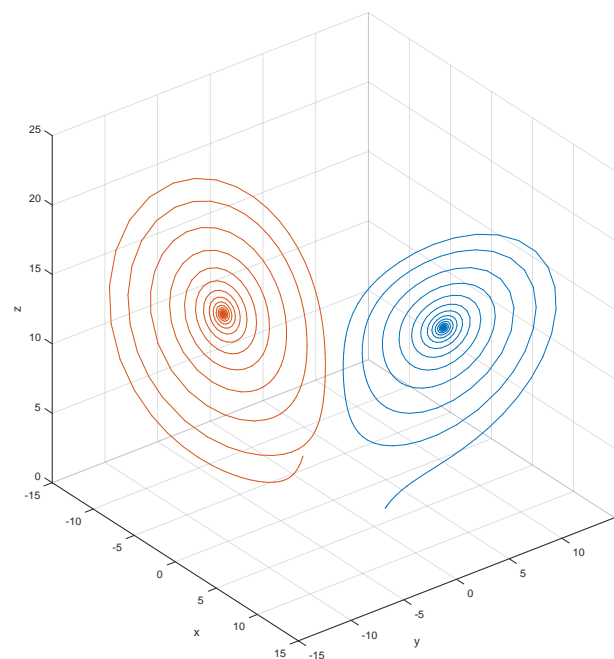


(d)  $\rho=3.5$

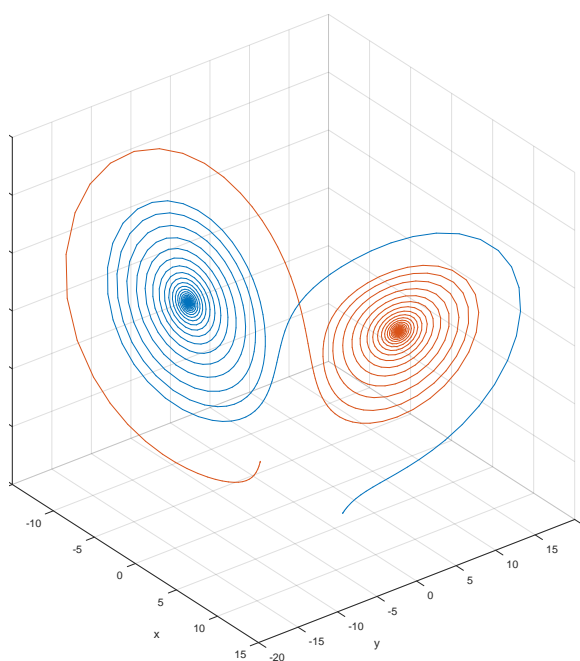
5 TEORIE CHAOSU A SYSTÉMY TŘETÍHO ŘÁDU



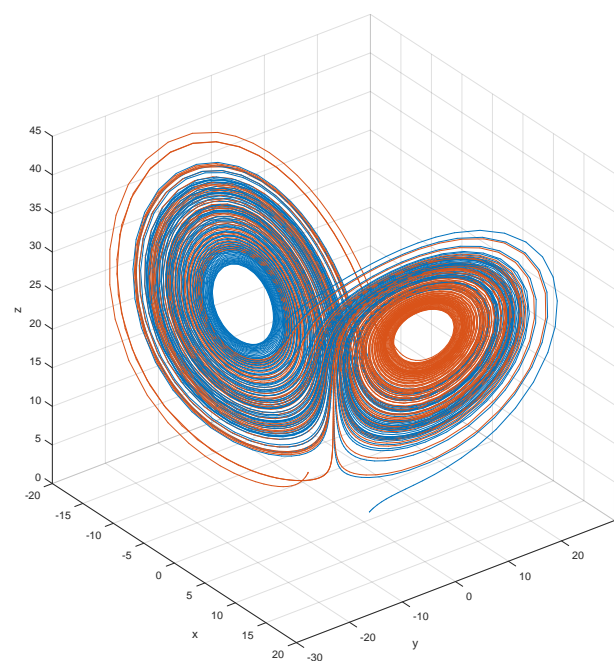
(e)  $\rho=6$



(f)  $\rho=13.926$

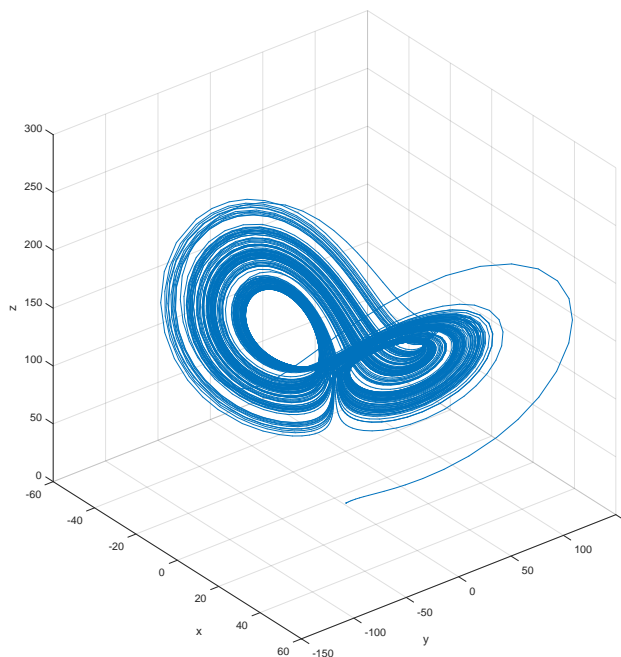


(g)  $\rho=17$

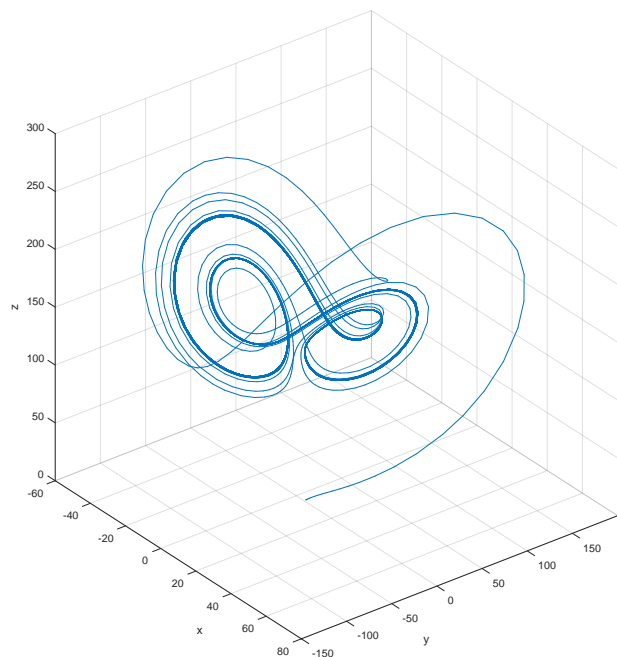


(h)  $\rho=24.74$

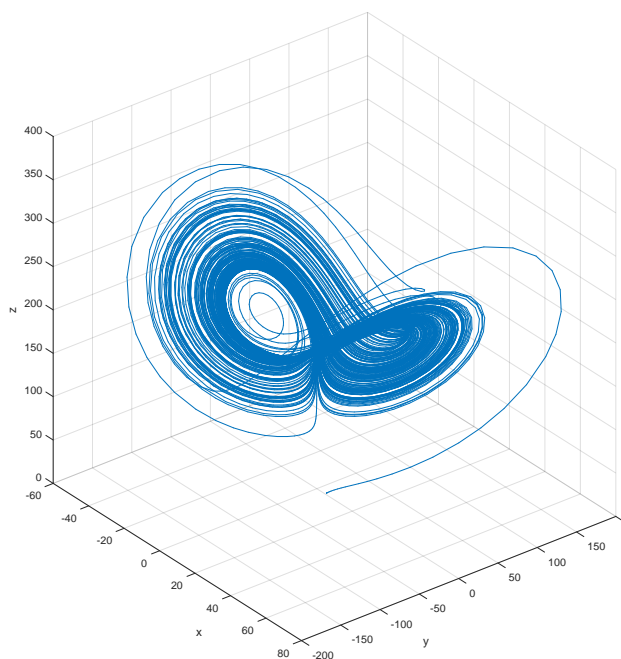
5 TEORIE CHAOSU A SYSTÉMY TŘETÍHO ŘÁDU



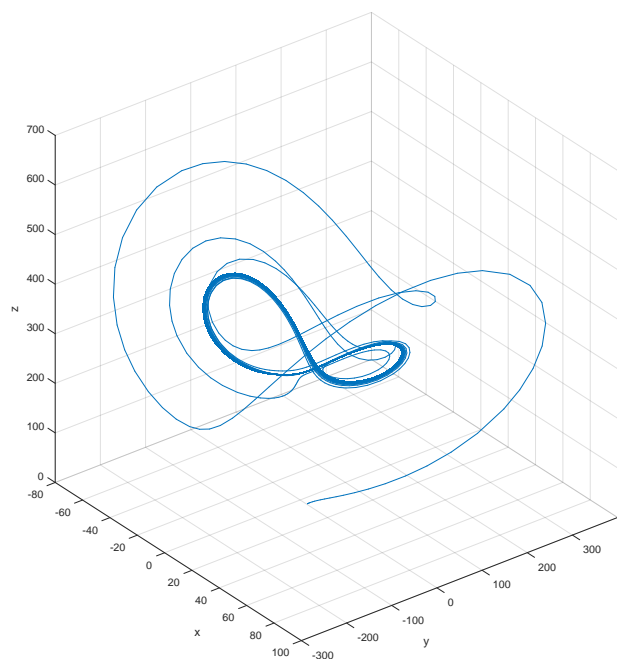
(i)  $\rho=135$



(j)  $\rho=155$



(k)  $\rho=185$



(l)  $\rho=313.4$

### Rösslerův systém

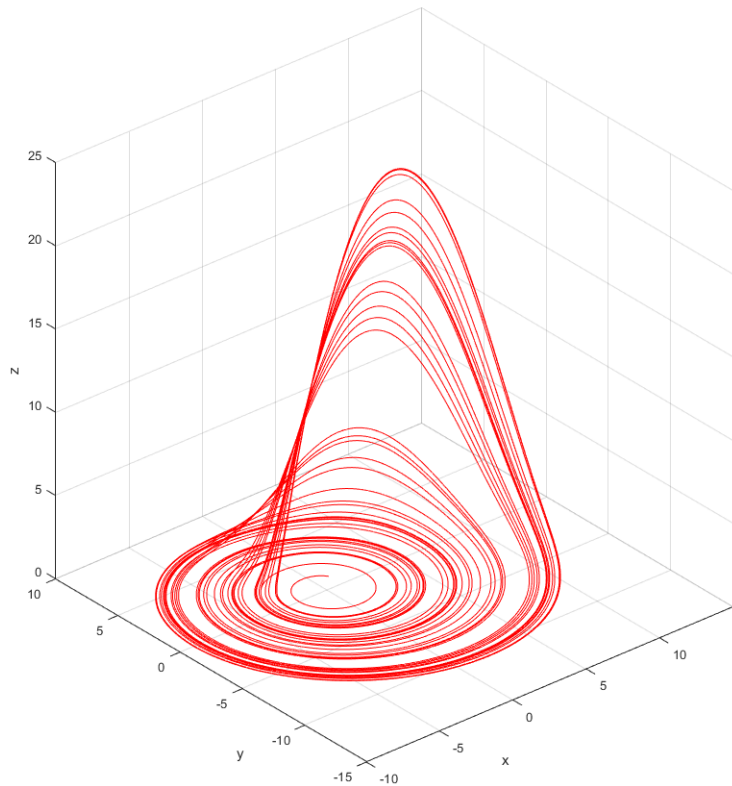
Německý biochemik Otto Rössler tento systém navrhl v roce 1976 a jedná se pravděpodobně o nejjednodušší spojitý systém, který může za určitých okolností vykazovat chaotické chování. Stejně jako u Lorenzova systému bude chaotické chování záviset na hodnotách parametrů. Detailnější informace ohledně tohoto systému lze nalézt v [2], [5]. Rösslerův systém je popsán třemi diferenciálními rovnicemi

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -y - z, \\ \frac{dy}{dt} &= x + ay, \\ \frac{dz}{dt} &= b + z(x - c),\end{aligned}\tag{42}$$

kde  $a, b, c \in \mathbb{R}$  jsou parametry. Rössler chaotické chování systému studoval pro hodnoty  $a = 0.2, b = 0.2, c = 5.7$ <sup>17</sup> Systém (42) má pouze jedinou nelinearitu, člen  $xz$ , a dva body rovnováhy, které budou existovat, pokud  $c^2 > 4ab$ . Tyto body mají souřadnice

$$F^\pm(x^*, y^*, z^*) = \left( \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2}, -\frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}, \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a} \right),$$

kde bod  $F^+$  bude vždy nestabilní a stabilitu bodu  $F^-$  budou určovat hodnoty parametrů  $a, b, c$  a může být tedy stabilní nebo nestabilní.



Obrázek 27: Rösslerův atraktor pro hodnoty  $a = 0.2, b = 0.2, c = 5.7$ .

<sup>17</sup>Jiná častá volba parametrů je  $a = 0.1, b = 0.1, c = 14$ .

## 5 TEORIE CHAOSU A SYSTÉMY TŘETÍHO ŘÁDU

*Poznámka.* Otto Rössler byl původním povoláním lékař, jeho systém tedy našel později uplatnění v chemických reakcích.

Na obrázku 28 lze názorně vidět Rösslerův atraktor pro vybrané hodnoty parametrů.

### Chenův systém

Čínský odborník v oblasti elektrotechniky Chen Guanrong v roce 1999 navrhl nový chaotický dynamický systém-Chenův systém. Opět uvedeme jen pár základních informací ohledně tohoto systému, více lze nalézt v [7], odkud také pochází většina dále zmíněných informací. Podobně jako dva předešlé systémy se i Chenův systém skládá ze tří diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= a(y - x), \\ \frac{dy}{dt} &= (c - a)x + cy - xz, \\ \frac{dz}{dt} &= -bz + xy,\end{aligned}\tag{43}$$

kde  $a > 0, b > 0, 2c > 0$  a podobně jako u Lorenzova systému má dvě nelinearity:  $xz, xy$ . Tento systém vykazuje chaotické chování např. pro hodnoty parametrů  $a = 35, b = 3, c = 28$ . Při analýze bodů rovnováhy zjistíme, že jsou nyní tři za podmínky, že  $(2c - a)b > 0$ . Těmito body jsou

$$\begin{aligned}O_1(x^*, y^*, z^*) &= (0, 0, 0), \\ O_{2,3}(x^*, y^*, z^*) &= \left(\pm\sqrt{b(2c - a)}, \pm\sqrt{b(2c - a)}, 2c - a\right).\end{aligned}$$

Na Chenův systém lze nahlížet jako na řízený Lorenzův systém [7], kde přeznačíme  $\sigma \rightarrow a, \rho \rightarrow c, \beta \rightarrow b$ . Potom

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= a(y - x), \\ \frac{dy}{dt} &= cx - xz - y + u, \\ \frac{dz}{dt} &= xy - bz,\end{aligned}\tag{44}$$

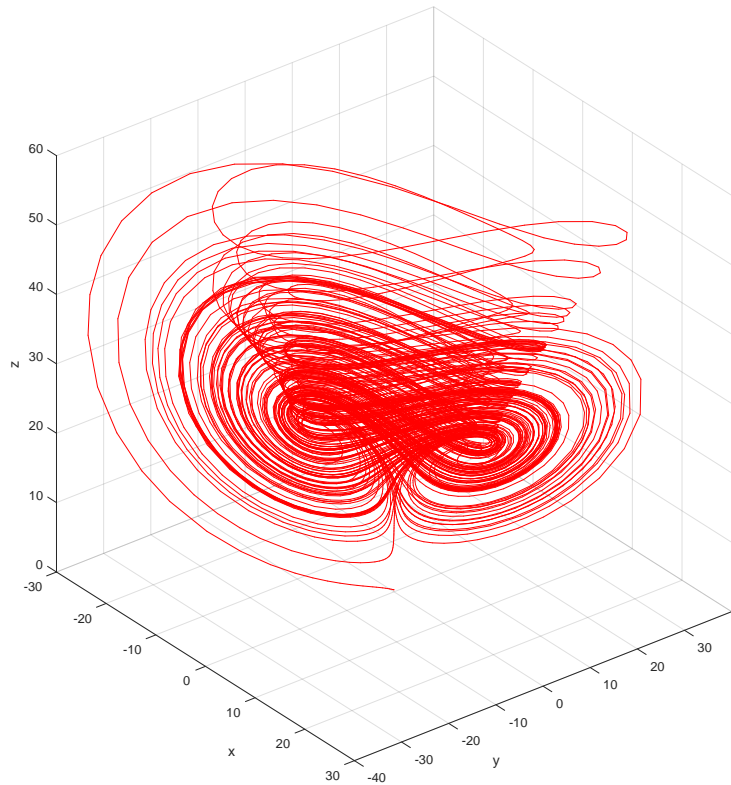
kde  $a, b, c \in \mathbb{R}$  jsou konstanty a  $u$  je lineární regulátor tvaru

$$u = k_1x + k_2y + k_3z,$$

kde  $k_1, k_2, k_3$  jsou konstanty, které budeme potřebovat určit. Ukazuje se, že

$$u = -ax + (1 + c)y,$$

což po dosazení do (44) dává Chenův systém (43) uvedený výše.

Obrázek 28: Chenův atraktor pro hodnoty  $a = 35, b = 3, c = 28$ .

*Poznámka.* Stejně jako v Lorenzově systému i zde se vyskytuje symetrie.

*Poznámka.* I přes určitou podobnost mezi Lorenzovým a Chenovým systémem, nejsou tyto dva systémy topologicky ekvivalentní.

Pro posouzení globální asymptotické stability počátku uvažujme Ljapunovovu funkci

$$V(x, y, z) = \frac{a-c}{2a}x^2 + y^2 + z^2$$

pro  $c < 0 < a$ , kde  $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ . Tedy

$$\dot{V} = -(a-c)x^2 + cy^2 - bz^2 < 0$$

a podle věty 2.19 je počátek globálně asymptoticky stabilní.

### Aplikace LLE a spektra Ljapunovových exponentů

V této poslední části se pokusíme aplikovat doposud získané poznatky z teorie chaosu na uvedených dynamických systémech. Výsledky této části budou shrnuty v závěru této práce. Pro další výpočty a úvahy budeme používat hodnoty Ljapunovových exponentů, které lze najít v [4] (až na hodnoty LLE napočítané výše uvedeným algoritmem). Spektrum Ljapunovových exponentů pro Lorenzův systém je

$$\lambda_1 = 0.9056, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = -14.5723$$

a pro Rösslerův systém

$$\lambda_1 = 0.0714, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = -5.3943.$$

## 5 TEORIE CHAOSU A SYSTÉMY TŘETÍHO ŘÁDU

*Poznámka.* Pro Chenův systém se bohužel v literatuře nepodařilo najít spektrum Ljapunových exponentů a proto se pro další úvahy musíme pouze „spokojit“ s vypočteným LLE.

V tabulce 2 vidíme porovnání napočítaného LLE pomocí výše uvedeného algoritmu pro jednotlivé systémy vůči LLE z literatury.

Tabulka 2: Porovnání hodnot LLE.

Dynamický systém	Algoritmus	Literatura
Lorenzův systém	0.90593	0.9056
Rösslerův systém	0.07135	0.0714
Chenův systém	2.02429	nenalezeno

Dále se podíváme na Kaplan–Yorkeovu dimenzi. Vyjdeme ze vztahu (32), kam postupně dosadíme hodnoty pro jednotlivé systémy. Pro Lorenzův systém tedy

$$D_{KY} = 2 + \frac{0.90593 + 0}{|-14.5723|} = 2.0622$$

a pro Rösslerův systém

$$D_{KY} = 2 + \frac{0.07135}{|-5.3943|} = 2.0132.$$

*Poznámka.* O Lorenzově systému jsme tvrdili, že je disipativní, což koresponduje s tím, že suma Ljapunova spektra je menší než nula. Vidíme, že totéž platí i pro Rösslerův systém.

## 6 Závěr

Hlavním cílem této práce bylo seznámit se s problematikou nelineárních dynamických systémů a umět dané poznatky aplikovat na vybraných systémech. Pro tuto práci byl vybrán Lorenzův, Rössler a Chenův systém, pro které jsme pomocí uvedeného algoritmu napočítali LLE a s pomocí literatury, odkud jsme převzali Ljapunovovo spektrum, určili i některé jejich základní vlastnosti, které nyní pojd'me shrnout.

Při porovnání vypočtené hodnoty s hodnotou z literatury vidíme, že se tyto dvě čísla velmi podobají (Tabulka 2). Bohužel v případě Chenova systému se nepodařila nalézt hodnota LLE, ani Ljapunovovo spektrum. Proto nebylo možné dané hodnoty porovnat a ověřit pravdivost hodnoty LLE. Možností, jak napočítané hodnoty zpřesnit, by mohlo být například navýšení času výpočtu numerické metody (v našem případě Runge–Kuttova metoda čtvrtého řádu), nebo navýšení počtu počátečních podmínek.

Jak jsme uvedli v kapitole 5, tak kladná hodnota LLE indikuje chaos u nelineárních dynamických systémů. Vypočtené LLE s tímto koresponduje, a tím jsme potvrdili, že vybrané systémy jsou chaotické.

Jelikož jsme ověřili, že všechny uvedené systémy jsou chaotické, a měli by tedy mít podivný atraktor, bylo by vhodné tuto skutečnost ověřit. Aby byl atraktor podivný, tak musí mít fraktální strukturu, která je detekována neceločíselnou dimenzí. K ověření jsme využili Kaplan–Yorkeovu dimenzi, kde po dosazení do vzorce skutečně vidíme, že pro Lorenzův systém je  $D_{KY} = 2.0622$  a pro Rösslerův systém je  $D_{KY} = 2.0132$ . Tedy se opravdu jedná o podivný atraktor u těchto dvou systémů. Pro Chenův systém lze očekávat, že hodnota  $D_{KY}$  bude v intervalu  $(2, 3)$ . Více do problematiky fraktálů jsme nezabíhali, neboť se jedná o komplexní a složitou oblast matematiky jdoucí nad rámec této práce.

Jak jsme si mohli všimnout, tak využití dynamických systémů je široké, ať už to bylo v termodynamice u Lorenzova systému, nebo v elektrotechnice u Chenova systému či uvedený Van der Polův oscilátor v kapitole 4. Ukazuje se, že i chaos může být užitečný a není to jen „překážka“ při studiu dynamických systémů [5]. Jednou z možných aplikací je soukromá komunikace, kde se pomocí chaosu „zamaskuje“ šifrovaná zpráva.

Téma chaotických nelineárních dynamických systémů je stále málo probádaná oblast matematiky a stále se objevují nové informace. Práci by bylo možné dále rozšířit směrem ke zobecněným Lorenzovým systémům, hlubšímu porozumění bifurkační teorie, detailnějšímu rozboru uvedených i dalších chaotických dynamických systémů, či zkoumání řízených systémů a jejich deregulace. Taktéž se nabízí zkoumat hlouběji problematiku fraktálů, která je úzce spjatá s podivným atraktorem. V celé práci jsme se bavili pouze o spojitých dynamických systémech, ale existují i diskrétní dynamické systémy, kde se využívají diferenční rovnice. I zde existují systémy, které vykazují chaotické chování. Příkladem takového systému je například Hénonova mapa.

Pro tuto práci byly výpočty prováděny v prostředí Matlab a obrázky zde uvedené byly vytvořeny v prostředí Matlab, Maple a Ipe.



## Reference

- [1] Khalil, H. K.: *Nonlinear Systems*, Second Edition. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1996. ISBN 0-13-228024-8
- [2] Letellier, Ch. a Rössler, O. E.: *Rössler attractor*. [online]. Scholarpedia, 2006. [cit. 1.5.2018]. Dostupné z: [http://www.scholarpedia.org/article/Rössler\\_attractor](http://www.scholarpedia.org/article/Rössler_attractor)
- [3] Perko, L.: *Differential Equations and Dynamical Systems*, Third Edition. Springer, New York, 2000. ISBN 0-387-95116-4
- [4] Sprott, J. C.: *Common Chaotic Systems*. [online]. Madison, WI 53706, USA: Department of Physics, University of Wisconsin, 18.4.1998. Poslední změna 2.11.2004. [cit. 1.5.2018]. Dostupné z: <http://sprott.physics.wisc.edu/sprott.htm>
- [5] Strogatz. S. H.: *Nonlinear Dynamics and Chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. Addison-Wesley Publishing Company, 1994. ISBN 0-201-54344-3
- [6] Taylor, R. L. V.: *Attractors: Nonstrange to Chaotic*. [online]. [cit. 1.5.2018]. Dostupné z: <http://www.siam.org/students/siuro/vol4/S01079.pdf>
- [7] Ueta, T. a Chen. G.: *Bifurcation Analysis of Chen's Equation*. [online]. [cit.1.5.2018]. Dostupné z: <http://risa.is.tokushima-u.ac.jp/~tetsushi/chen/chenbif/node11.html>

