

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Inverzní problémy pro diferenciální rovnice



Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

Vedoucí bakalářské práce: **RNDr. Rostislav Vodák, Ph.D.**

Vypracoval(a): **Vojtěch Janek**

Studijní program: B0114A170003 Matematika pro vzdělávání

Studijní obor: Matematika pro vzdělávání/Fyzika pro vzdělávání

Forma studia: prezenční

Rok odevzdání: 2022

BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKACE

Autor: Vojtěch Janek

Název práce: Inverzní problémy pro diferenciální rovnice

Typ práce: Bakalářská práce

Pracoviště: Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

Vedoucí práce: RNDr. Rostislav Vodák, Ph.D.

Rok obhajoby práce: 2022

Abstrakt: Tato bakalářská práce se zabývá inverzními problémy pro diferenciální rovnice. V práci jsou řešeny inverzní problémy pro fyzikální modely dobře promíchané kapaliny a nakloněné roviny.

Klíčová slova: inverzní problémy, diferenciální rovnice, nakloněná rovina, dobře promíchaná kapalina

Počet stran: 46

Počet příloh: 0

Jazyk: český

BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

Author: Vojtěch Janek

Title: Inverse problems in differential equations

Type of thesis: Bachelor's

Department: Department of Mathematical Analysis and Application of Mathematics

Supervisor: RNDr. Rostislav Vodák, Ph.D.

The year of presentation: 2022

Abstract: The following bachelor thesis is concerned with inverse problems in differential equations. The thesis will further study the problematics of inverse problems applied for the physical models of well stirred liquids and inclined plane.

Key words: inverse problems, differential equations, inclined plane, well stirred liquid

Number of pages: 46

Number of appendices: 0

Language: Czech

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracoval samostatně pod vedením pana RNDr. Rostislava Vodáka, Ph.D. a všechny použité zdroje jsem uvedl v seznamu literatury.

V Olomouci dne

.....
podpis

Obsah

Úvod	7
1 Teoretické pozadí	8
1.1 Kauzální problém	9
1.2 Identifikační problém	10
1.3 Smíšený problém	12
2 Praktická část	13
2.1 Dobře promíchaná kapalina v nádobě	13
2.1.1 Prvotní problém	16
2.1.2 Určení proměnných ze dvou hodnot	17
2.1.3 Určení proměnných ze tří hodnot	19
2.1.4 Časově proměnná koncentrace přitékající kapaliny	21
2.1.5 Přesnost měření koncentrace v přitékající kapalině	22
2.2 Nakloněná rovina	25
2.2.1 Bez odporu	28
2.2.2 S lineárním odporem	31
2.2.3 S nelineárním odporem	39
Závěr	43
Literatura	45

Poděkování

Na tomto místě bych rád poděkoval mému vedoucímu bakalářské práce RNDR. Rostislavu Vodákovi, Ph.D. za velmi vstřícný přístup, neustálou ochotu poradit i za všechny čas, který mi věnoval. V neposlední řadě bych pak chtěl poděkovat za neustálou podporu mé rodině, přítelkyni a všem přátelům.

Úvod

Tématem bakalářské práce jsou inverzní problémy pro diferenciální rovnice. Jedná se o problémy, které dávají základ pro řešení mnoha situací reálného světa. Inverzní problémy se objevují převážně v oborech, kde nelze získat data přímo, což je ve vědě velmi časté. [3]

Hlavním cílem mé bakalářské práce je aplikace znalostí diferenciálních rovnic, nabytých během studia v novém prostředí inverzních problémů. Doufám, že čtenáři bude po přečtení jasnější pojem inverzního problému a bude rozumět tomu, proč je tak důležitým pojmem. Speciálně ale věřím, že čtenáři bude zřejmé, proč mne nadchla aplikace inverzních problémů právě pro diferenciální rovnice.

Jako důležité vnímám objasnění první části názvu práce, o což jsem se pokusil i s názornými příklady a ilustracemi v první kapitole. Zde pouze naznačme, že inverzní problém většina matematiků pozná na první pohled, avšak definovat jej již není úplně triviální záležitostí. Intuitivní představa, že slovo inverzní v názvu znamená vlastně opačný není úplně nejšťastnější a nepokrývá inverzní problémy kompletně. Ve druhé kapitole se již věnuji praktickému řešení dvou různých problémů. První z těchto problémů se zabývá modelem dobře promíchané kapaliny a snaží se vytvořit matematický základ pro reálné řešení z naměřených dat. V této části je tedy zapotřebí pracovat s aproximacemi, přesnostmi měření. . . Oproti tomu druhý problém je věnován pohybu po nakloněné rovině, jedná se o takovou klasickou školní úlohu. Pokud tuto úlohu rozvineme a navíc se na ni podíváme inverzně, nabízí nám spoustu zajímavých možností. Oproti předchozímu problému se budeme v tomto snažit o exaktní matematický popis dané situace.

Kapitola 1

Teoretické pozadí

V této kapitole dojde k zavedení pojmů, jejichž problematikou se práce zabývá a již rozvíjí. Terminologie bude inspirována především knihou [4].

Nejprve zdůrazněme, že aby bylo možné hovořit o inverzních problémech, musí být zaveden pojem direktní problém.

Definice 1.1 *Direktním problémem nazveme nalezení výstupu matematického modelu pro daný vstup. Vstupem mohou být prvky různých množin. Často se jedná o naměřená data nebo funkce závislé na čase a/nebo prostoru.*

Naše obecná definice direktního problému by se tedy dala znázornit takto:

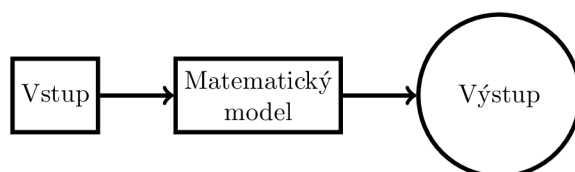


Schéma je tedy rozdělené na tři části, první dvě části známe a poslední se snažíme zjistit, respektive snažíme se ji dopočítat. Při řešení některých praktických úloh se o výstupu často hovoří jako o naměřených datech a o vstupu pak jako o realitě.

Schéma intuitivně nabízí otázku: Šlo by zjistit taktéž vstup či matematický model ze zbylých dvou částí? [4, s.2] Přesně tato otázka vede k zavedení termínu

inverzního problému, jelikož jak řekl Roy Pike „inverzní problém je opakem direktního problému“ [13, přel. z angl.].

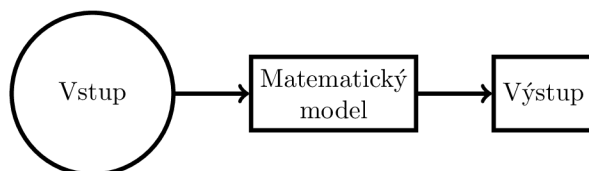
Studium inverzních problémů však posouvá i poznání problémů direktních. [4, s.3] Jestliže totiž existuje matematický model a k němu příslušné proměnné, pak je direktní problém řešitelný jednoznačně, nikdo však nemůže zaručit, že bude řešitelný inverzní problém. [4, s.3] Je tedy vidět, že řešitelnost inverzního problému není vůbec zaručena.

Další velkou výzvou této problematiky jsou nepřesnosti, odchylky, šum... Ty vznikají při reálném měření dat a v takovém případě se vyskytuje nutnost pracovat s aproximacemi. Je třeba také uvažovat přesnost výsledného popisu reality či jak přesně matematický model vyhovuje realitě a datům, více v [1, kap. 1.5].

Každý direktní problém indukuje dva inverzní problémy: kauzální problém a identifikační problém. Tyto dva inverzní problémy však nejsou striktně odděleny a může se stát, že se spojí v jeden inverzní smíšený problém. Jeden z takových smíšených problémů je problém rekonstrukce obrazu. [12, s.2] Asi nejčastější využití tohoto problému je ve skiografii či tomografii.

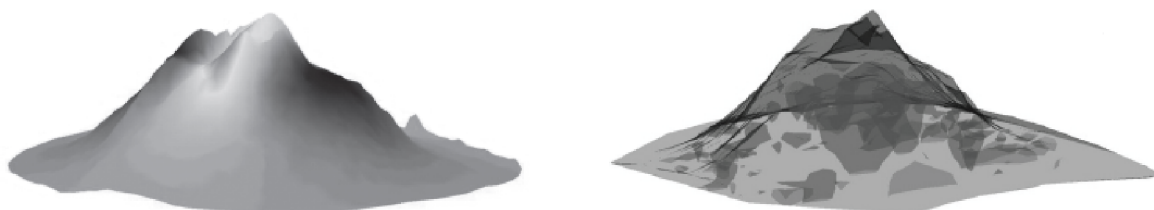
1.1. Kauzální problém

Definice 1.2 *Kauzálním problémem nazveme nalezení vstupu na definované množině, která může obsahovat různé typy prvků pro známý matematický model a výstup.*



Jedná se o velice častý problém řešení v reálném světě. Obvykle přístrojem naměříte nějaká data a následně se snažíte zjistit, co ta data vyvolalo.

Jako příklad by se dalo uvést měření sopečné aktivity. K těmto účelům se využívá toho, že každá hornina má jiné magnetické vlastnosti a tudíž měřením magnetického pole kolem sopky lze určit, jaké je aktuální složení hornin v sopce. Toto dobře ilustrují obrázky převzaté z [6]:



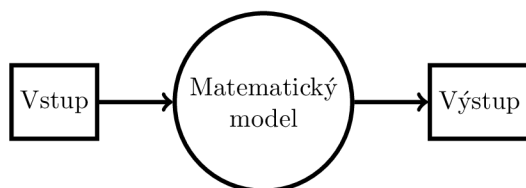
Obrázek 1.1: *Levý obrázek ukazuje naměřené magnetické pole, pravý pak zdroje tohoto magnetického pole, tedy ony horniny*

Jde tedy vidět, že kauzální inverzní problémy se využívají u situací, kdy nejde měřit přímo, jako právě u sopky.

Jako druhý ilustrační příklad použijeme úlohu s názvem: „Můžeme slyšet tvar bubnu?“. Odpověď na tuto otázku je vcelku prostá. Nemůžeme. A proč? Protože se podařilo najít dva bubny různého tvaru, které emitují stejný zvuk. [3] Mluvíme tedy o neřešitelném inverzním kauzálním problému.

1.2. Identifikační problém

Definice 1.3 *Identifikačním problémem nazveme nalezení matematického modelu ze známého vstupu a výstupu.*

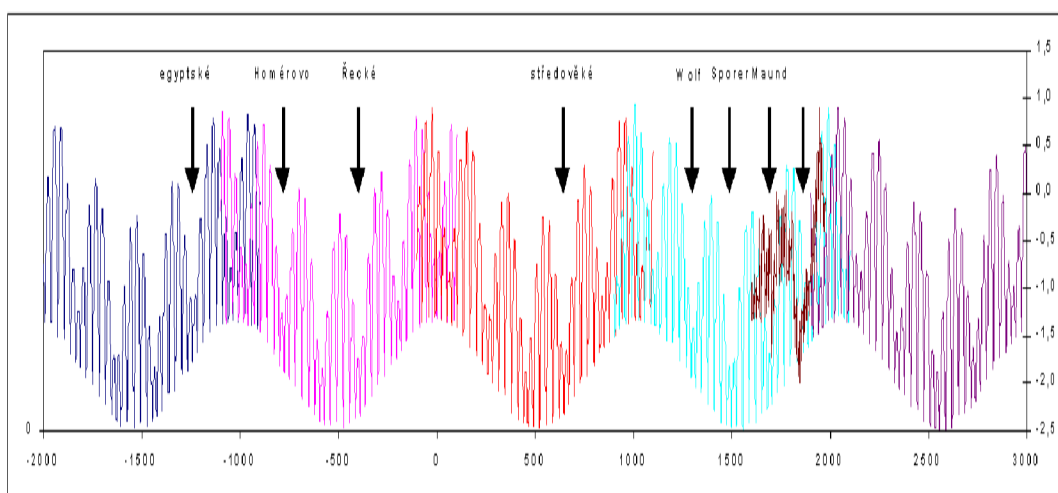


Jedním ze zajímavých řešitelných identifikačních problémů je základní popsání slunečních cyklů. Řešení tohoto problému vytvořil Vladimír Ladma, více zde [9], na základě myšlenky Theodora Landscheidta [11]. Řešení poté ještě rozšířil Pavel Kalenda [10].

Sluneční aktivitu lze v základu popsat pomocí cyklů konjunkcí velkých planet, kdy výsledná rovnice extrémů sluneční aktivity má tvar

$$A = 5 \sin\left(\frac{t - t_0}{59,577}\right) + 3 \sin\left(\frac{t - t_1}{85,72}\right) + 2 \cos\left(\frac{t - t_3}{1025}\right),$$

kde t_1 , t_2 a t_3 jsou fázové posuny, které se však po určité době mění, více opět zde [9] a [10].



Obrázek 1.2: Vykreslením této rovnice lze získat graf, který vytvořil P. Kalenda

V grafu jsou zaznačena i teplotní minima, která byla v historii naměřena (egyptské, Homérovo,...), lze tedy vidět, že graf odpovídá skutečnosti. Proto se velmi pravděpodobně jedná o správné řešení tohoto identifikačního problému.

I u dalšího problému zůstaneme v rovině nebeských těles. Je to problém, který nemá obecné analytické řešení a jedná se o známý problém tří těles. Tento problém se snaží o popsání pohybu tří vesmírných těles, která se navzájem gra-

vitačně ovlivňují. Jazykem, jež používáme pro inverzní problémy, jde o snahu nalézt matematický model, kdy vstupem jsou vlastnosti nebeských těles (gravitační síly, rotace,...) a výstupem pohyb, respektive trajektorie nebeských těles. Toto je velmi důležité pro nebeskou mechaniku, protože díky řešení takového problému by bylo možné předvídat pohyb nebeských těles. Analytické řešení tohoto problému však bylo nalezeno pouze pro speciální případy. Nicméně i nadále byla prokazována snaha a došlo k vyvinutí metod, díky nimž se dá nalézt velmi dobrá aproximace řešení, více v [2].

V těchto problémech se častěji stává to, že je problém chybně zadaný, než to, že by nebyl řešitelný (v angličtině je využíváno termínu ill-posed, který význam vystihuje ještě o něco přesněji než český překlad). Většinou to znamená, že po jeho vyřešení sice dostaneme matematický model, ten však je tak extrémně náchylný na infinitezimální změnu vnějších podmínek, že je naprosto nepoužitelný.

Přirozeně však i tyto problémy chceme nějak vyřešit. Proto se používají různé přístupy, přes pomocné problémy, až po numerické korekce tak, aby se řešení chovalo co nejlépe a bylo použitelné s dostatečnou přesností.

1.3. Smíšený problém

V této podkapitole jen v rychlosti představíme problém rekonstrukce obrazu. V principu se jedná o problém, který je často využíván v tomografii a jiných oborech, kde jsou naměřená data roztržitá. Z nich se pak snažíme dostat obraz, zde by se dalo hovořit o kauzálním problému. Zároveň však máme snahu o to, aby obraz byl co nejpřesnější (protože data jsou nepřesná), jinak řečeno hledáme i matematický model, který by data co nejlépe přiblížil realitě. V této chvíli jde již o identifikační problém.

Toto představení bylo pouze velmi stručné, avšak nutné pro pochopení toho, že inverzní problémy jsou provázané nejen s problémem direktním, ale i navzájem. Rozdělení na 2 složky (kauzální a identifikační část) bylo spíše ilustrační, při řešení reálného problému je často nutností tyto dva problémy řešit současně, více v [7].

Kapitola 2

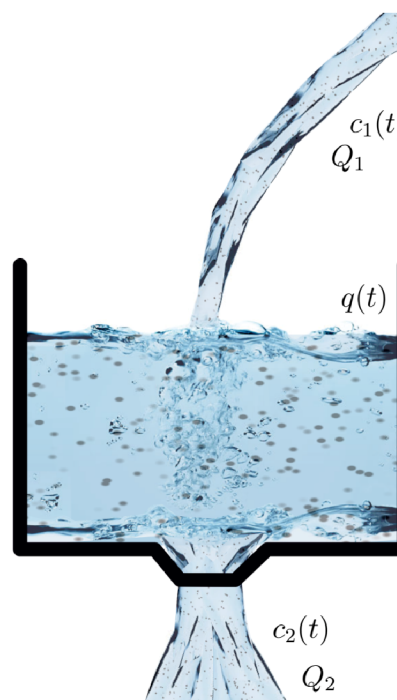
Praktická část

2.1. Dobře promíchaná kapalina v nádobě

Problémy, u kterých dochází k míchání dvou kapalin v nádobě, jsou obecně popsány rovnicí

$$\frac{dq(t)}{dt} = c_1(t)Q_1 - c_2(t)Q_2,$$

kde $q(t)$ [kg] je hmotnost nečistot uvnitř kapaliny v nádobě v čase t [s], $c_i(t)$ [$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$]; $i = 1, 2$ koncentrace nečistot v přitékající a vytékající kapalině, Q_i [$\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$]; $i = 1, 2$ objemový průtok přitékající a vytékající kapaliny. Odvození této obecné rovnice nalezneme například v [5, s.57-58]. Z obrázku 2.1 navíc zřejmě vidíme, že příslušný tvar rovnice odpovídá i naší intuitivní představě, a sice, laicky řečeno, že změna hmotnosti bude rovna rozdílu toho, co nateklo a vyteklo.



Obrázek 2.1: Obecný model dobře promíchané kapaliny v nádobě

Koncentrace a hmotnost nečistot jsou ve vztahu $c(t) = \frac{q(t)}{V(t)}$, kde $V(t)$ [m³] je objem kapaliny v daném čase. Předchozí rovnice jde tedy psát ve tvaru

$$\frac{dc(t)}{dt} = \frac{1}{V(t)}(c_1(t)Q_1 - c_2(t)Q_2),$$

jelikož koncentrace v nádobě a ve vytékající kapalině je stejná ($c(t) = c_2(t)$), tak píšeme

$$\frac{dc(t)}{dt} = \frac{1}{V(t)}(c_1(t)Q_1 - c(t)Q_2).$$

V našich výpočtech se budeme nejčastěji zabývat situací, kdy $Q_1 = Q_2$, můžeme tedy při přeznačení objemového průtoku jako Q psát rovnici ve tvaru

$$\frac{dc(t)}{dt} = \frac{Q}{V}(c_1(t) - c(t)).$$

Všimněme si, že se V stalo z funkce času konstantou v čase, právě díky tomu, že není rozdíl v objemových průtocích. Pro větší přehlednost přeznačíme $c_1(t)$ jako $a(t)$, pak

$$\frac{dc(t)}{dt} = \frac{Q}{V}(a(t) - c(t)). \quad (2.1)$$

Zprvu se však budeme zabývat případem, kdy $a(t) = a$, tedy koncentrace nečistot v přitékající kapalině bude konstantní v čase. Pak se předchozí vztah přepíše do tvaru

$$\begin{aligned} \frac{dc(t)}{dt} &= \frac{Q}{V}(a - c(t)), \text{ dále pak} \\ \frac{dc(t)}{c(t) - a} &= -\frac{Q}{V}dt. \end{aligned}$$

Po vyřešení této diferenciální rovnice získáváme obecné řešení ve tvaru

$$\begin{aligned} \ln |c(t) - a| &= -\frac{Q}{V}t + K'; \quad K' \in \mathbb{R}, \\ |c(t) - a| &= e^{-\frac{Q}{V}t}K; \quad K \in \mathbb{R}^+. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Pokud si označíme koncentraci v čase 0 za konstantu, potom se bude jednat o počáteční podmínku $c(0) = c_0$, která společně s rovnicí (2.2) tvoří počáteční úlohu. Nyní tedy řešíme rovnici

$$|c_0 - a| = K; K \in \mathbb{R}^+.$$

Následně budeme muset diskutovat absolutní hodnotu.

ad.1

$$c_0 - a = K$$

pro $c_0 > a$, což ale na základě našeho modelu implikuje $\forall t : c(t) \geq a$. Pak rovnici (2.2) můžeme psát ve tvaru

$$c(t) - a = e^{-\frac{Q}{V}t} K$$

a po dosazení za K i upravení dostáváme řešení počáteční podmínky, jímž je funkce:

$$c(t) = a + (c_0 - a)e^{-\frac{Q}{V}t}. \quad (2.3)$$

ad.2

$$-a + c_0 = K$$

pro $c_0 < a$, což opět na základě našeho modelu implikuje $\forall t : c(t) \leq a$. Rovnici (2.2) pak píšeme ve tvaru

$$-c(t) + a = e^{-\frac{Q}{V}t} K$$

a po dosazení za K i upravení dostáváme řešení počáteční podmínky, jímž je opět funkce (2.3).

Představili jsme si obecnou teorii tohoto problému, my se však budeme zabývat vytvářením matematiky pro praktický případ. Budeme tedy zjišťovat, kolik hodnot musíme naměřit pro určení některých konstant či jak přesné budou spočtené hodnoty.

2.1.1. Prvotní problém

Jako prvotní inverzní problém budeme mít určení hodnoty hustoty nečistot v přítoku a objemového průtoku ze znalosti hustot ve dvou různých časech a počáteční hustoty c_0 . Zadané hodnoty jsou:

$$c_0 = 0,01 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3},$$

$$c(t_1) = 0,011 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3},$$

$$c(t_2) = 0,0119 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}, \text{ kde } t_1 = 1 \text{ den, } t_2 = 2 \text{ dny a objem nádoby je } V = 1000 \text{ l.}$$

Půjde tedy o nalezení výchozích hodnot Q a a .

Vztah (2.3) si upravíme do tvaru, který bude příhodnější pro náš přístup k řešení (za předpokladu, že $c_0 \neq a$)

$$\frac{c(t) - a}{c_0 - a} = e^{-\frac{Q}{V}t}$$

a pro naše konkrétní hodnoty

$$\frac{c(t_1) - a}{c_0 - a} = e^{-\frac{Q}{V}t_1},$$

$$\frac{c(t_2) - a}{c_0 - a} = e^{-\frac{Q}{V}t_2} = \left(e^{-\frac{Q}{V}t_1} \right)^2.$$

Dosazením získáme

$$\left(\frac{c(t_1) - a}{c_0 - a} \right)^2 = \frac{c(t_2) - a}{c_0 - a},$$

poté algebraickými úpravami

$$a = \frac{c(t_2)c_0 - c^2(t_1)}{c(t_2) + c_0 - 2c(t_1)}.$$

Po dosazení číselných hodnot dostáváme

$$a = \frac{0,0119 \cdot 0,01 - 0,011^2}{0,0119 + 0,01 - 2 \cdot 0,011} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} = 0,02 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

Nyní se budeme snažit o určení Q . Vztah pro jeho výpočet získáme pomocí algebraických úprav a vlastností logaritmů ze vztahu (2.3) ve tvaru

$$Q = -\frac{V}{t} \ln \left(\frac{c(t) - a}{c_0 - a} \right),$$

po dosazení (zvolili jsme si dosazení $c(t_1)$) získáváme

$$Q = -\frac{1000}{1} \ln \left(\frac{0,011 - 0,02}{0,01 - 0,02} \right) \frac{1}{\text{den}} \approx *105 \frac{1}{\text{den}}.$$

Určili jsme tedy a jako $0,02 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ a Q jako $105 \frac{1}{\text{den}}$, což byl takový klasický kauzální problém.

2.1.2. Určení proměnných ze dvou hodnot

Předchozí problém v nás může evokovat otázku, zda obecně stačí 2 hodnoty koncentrace $c(t)$ v různých časech k tomu, aby jednoznačně určovali a a Q . My se budeme zabývat případem, kdy $c_0 = 0$, tedy že v původní kapalině nebudou žádné nečistoty. Budeme odtud dále používat značení $c(t_1) = c_1$ a $c(t_2) = c_2$ a bude platit $0 < t_1 < t_2$.

Po dosazení za c_0 do rovnice (2.3) dostáváme rovnici ve tvaru

$$c(t) = a \left(1 - e^{-\frac{Qt}{V}} \right).$$

Ze zadání máme hodnoty c_1 a c_2 v různých časech. Pokud tyto hodnoty porovnáme, dostáváme funkci závislou na podílu Q/V . Po zavedení substituce $R = Q/V$, můžeme psát

$$\gamma(R) := \frac{c_1}{c_2}; \quad 0 < t_1 < t_2,$$

odtud pak

$$\gamma(R) = \frac{1 - e^{-Rt_1}}{1 - e^{-Rt_2}}.$$

*Jedná se o znaménko aproximace, v této práci jej budeme používat jak pro dva vztahy, které si přibližně odpovídají, tak pro číselné hodnoty, které jsme zaokrouhlili.

Nyní je důležité si uvědomit, že se snažíme o jednoznačné určení R , to by nám již nutně totiž dávalo jednoznačnost Q , což je naším cílem. Musíme tedy najít funkci f , která bude ve tvaru $R = f(x)$. K tomu použijeme následující větu.

Věta 2.1 [16, s.39]

Je-li funkce f prostá, pak k ní existuje funkce inverzní f^{-1} a platí $(x, y) \in f$, právě když $(y, x) \in f^{-1}$.

Naše snaha směřuje k využití této podmínky pro existenci inverzní funkce. Potřebujeme tedy ukázat, že $\forall R > 0$:

$$\gamma'(R) > 0,$$

nepotřebujeme ukázat $\forall R \in \mathbb{R}$, není to v souladu s realitou, kterou se zabýváme. Tato podmínka vyplývá z vlastností monotónní funkce a následujícího tvrzení, že pokud je funkce ryze monotónní na množině, pak je i na této množině prostá (důkaz v [16, s.38]).

Spočteme si první derivaci

$$\gamma'(R) = \frac{t_1 e^{-Rt_1} (1 - e^{-Rt_2}) - t_2 e^{-Rt_2} (1 - e^{-Rt_1})}{(1 - e^{-Rt_2})^2} > 0.$$

Jelikož jmenovatel zlomku v této první derivaci je vždy kladný, tak nerovnost lze psát ve tvaru

$$t_1 e^{-Rt_1} (1 - e^{-Rt_2}) - t_2 e^{-Rt_2} (1 - e^{-Rt_1}) > 0,$$

$$\frac{t_1 e^{-Rt_1}}{(1 - e^{-Rt_1})} > \frac{t_2 e^{-Rt_2}}{(1 - e^{-Rt_2})}; \quad 0 < t_1 < t_2. \quad (2.4)$$

Pokud je tedy R pevné kladné reálné číslo, tak se na každé straně nerovnice jedná o funkci času, kterou definujeme jako

$$F(t) := \frac{t e^{-Rt}}{(1 - e^{-Rt})}.$$

Platnost nerovnice (2.4) tedy bude dokázána, pokud bude funkce $F(t)$ klesající,

tedy

$$F'(t) = \frac{(e^{-Rt} - Rte^{-Rt})(1 - e^{-Rt}) - Rte^{-2Rt}}{(1 - e^{-Rt})^2} < 0,$$

$$e^{-Rt} [(1 - Rt)(1 - e^{-Rt}) - Rte^{-Rt}] < 0,$$

$$1 - e^{-Rt} - Rt < 0.$$

Zaveďme substituci $\xi = Rt > 0$ a definujme pomocnou funkci

$$h(\xi) := 1 - e^{-\xi} - \xi.$$

Vyšetřeme její průběh

$$h(0) = 0 \wedge h'(\xi) = (e^{-\xi} - 1) \in \langle -1; 0 \rangle \forall \xi > 0.$$

Vidíme, že od bodu $h(0) = 0$ (jedná se pouze o pomocný bod pro vyšetření průběhu funkce, protože $t \neq 0$ z počáteční podmínky) je funkce $h(\xi)$ klesající, tedy $\forall \xi > 0 : h(\xi) < 0$. Tím jsme ukázali, že $F(t)$ je klesající funkce $\forall t > 0$ a tím jsme i ukázali, že funkce $\gamma(R)$ je rostoucí $\forall R > 0$, tedy tato funkce je nutně prostou funkcí.

Podle věty 2.1 k funkci $\gamma(R)$ existuje inverzní funkce

$$\gamma^{-1} \left(\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \right) = R,$$

z čeho je již zřejmé, že R je dáno jednoznačně a tudíž je i Q dáno jednoznačně. Jelikož už máme ukázanou jednoznačnost Q , tak z jedné hodnoty koncentrace, třeba $c_1 = a \left(1 - e^{\frac{Q}{V}t_1} \right)$, máme i jednoznačně určenou taktéž hodnotu a .

2.1.3. Určení proměnných ze tří hodnot

V této podkapitole budeme rozšiřovat předchozí problém, kdy budeme mít naměřeny 3 hodnoty koncentrace $c(t)$. Otázkou bude, zda jsme schopni jednoznačně určit z těchto hodnot proměnné c_0 , a a Q .

Máme 3 rovnice (můžeme předpokládat, že $0 < t_1 < t_2 < t_3$)

$$c_1 = a + (c_0 - a)e^{-\frac{Qt_1}{V}},$$

$$c_2 = a + (c_0 - a)e^{-\frac{Qt_2}{V}},$$

$$c_3 = a + (c_0 - a)e^{-\frac{Qt_3}{V}}.$$

Z nich po vyjádření z první rovnice $c_0 - a$ a dosazení do zbylých dvou rovnic, dostáváme rovnice

$$c_2 = a + (c_1 - a)e^{\frac{Q(t_1 - t_2)}{V}},$$

$$c_3 = a + (c_1 - a)e^{\frac{Q(t_1 - t_3)}{V}}.$$

Odečteme od pravé i levé strany obou rovnic c_1 , pak píšeme

$$c_2 - c_1 = a - c_1 + (c_1 - a)e^{\frac{Q(t_1 - t_2)}{V}},$$

$$c_3 - c_1 = a - c_1 + (c_1 - a)e^{\frac{Q(t_1 - t_3)}{V}}.$$

Poté z pravé strany vytkneme $a - c_1$, rovnice navzájem vydělíme a dostáváme rovnici

$$\frac{c_3 - c_1}{c_2 - c_1} = \frac{1 - e^{\frac{Q(t_1 - t_3)}{V}}}{1 - e^{\frac{Q(t_1 - t_2)}{V}}}.$$

Tímto jsme problém převedli na předchozí problém a ukážeme, že opět k funkci

$$\gamma(R) := \frac{c_3 - c_1}{c_2 - c_1}$$

existuje inverzní funkce

$$\gamma^{-1}\left(\frac{c_3 - c_1}{c_2 - c_1}\right) = R.$$

Důkaz je veden stejným způsobem jako v předchozím problému, pouze zavedeme substituci $t_{12} = t_1 - t_2$; $t_{13} = t_1 - t_3$, pro něž $t_{13} < t_{12} < 0$. Poté je důkaz veden prakticky stejným způsobem. Tím je ukázána existence inverzní funkce a pak i jednoznačnost R , tedy i jednoznačnost Q .

Z předchozích rovnic vezměme třeba rovnici

$$c_2 = a + (c_1 - a)e^{\frac{Q(t_1 - t_2)}{V}}$$

a z ní vyjádříme a , což jednoznačně určuje a . Obdobným způsobem třeba z rovnice

$$c_1 = a + (c_0 - a)e^{-\frac{Qt_1}{V}}$$

dostáváme vztah, který jednoznačně určuje c_0 .

2.1.4. Časově proměnná koncentrace přitékající kapaliny

V úvodním inverzním problému jsme si ukázali situaci, kdy je a konstantní. Co když se ale bude měnit v čase? Budeme se pak bavit o $a(t)$ a tedy vycházíme již z obecnějšího vztahu (2.1), než se kterým jsme dosud pracovali. Napadá nás tedy, že bychom nějak tuto funkci $a(t)$ měli vyjádřit. To však není vůbec snadné, musíme se proto spokojit s nalezením vhodné aproximace.

Uvědomme si, že se stále jedná o reálný příklad a máme tudíž pouze konečné množství dat, ze kterých budeme muset hodnotu $a(t)$ získat. Data jsou pak zadána tak, že k jejímu vyjádření známe objem nádoby V , avšak objemový průtok Q naměřený mít nebudeme, máme pouze informaci, že je stejný u přitékající i odtékající kapaliny. Pro měřicí časy platí $t_i = ih; i = 1, 2, \dots, n - 1$ (h je dané diskretizací časového intervalu).

Vezměme rovnici (2.1) a snažme se vyjádřit derivaci na její levé straně. Vyjádříme si nejprve derivaci zprava

$$c'_+(t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{c(t+h) - c(t)}{h}$$

a zleva, pouze si limitu přepíšeme pro $h \rightarrow 0^+$

$$c'_-(t) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{c(t+h) - c(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{c(t-h) - c(t)}{-h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{c(t) - c(t-h)}{h}.$$

Jedná se však o reálný příklad a nejsme schopni dosáhnout infinitezimálně malého h , proto budeme pracovat s diferencemi a budeme je považovat za aproximaci dané derivace, tedy

$$c'_+(t) \approx \frac{c(t+h) - c(t)}{h}, c'_-(t) \approx \frac{c(t) - c(t-h)}{h}, h > 0.$$

Věta 2.2 *Pokud existuje $f'(x)$, pak platí $f'_-(x) = f'_+(x) = f'(x)$.*

DŮKAZ: Plyne z vlastností limit.

Využitím této věty jsme schopni dostat hodnotu derivace na levé straně rovnice. Jelikož však diference jsou pouze přibližnou hodnotou, je nutné vzít jejich aritmetický průměr. Vyjděme z věty 2.2 a aproximujme pomocí diferencí takto

$$c'(t) = \frac{c'_+(t)}{2} + \frac{c'_-(t)}{2} \approx \frac{c(t+h) - c(t)}{2h} + \frac{c(t) - c(t-h)}{2h} = \frac{c(t+h) - c(t-h)}{2h}, h > 0.$$

Odtud pak již pro rovnici (2.1) můžeme psát

$$\frac{c(t+h) - c(t-h)}{2h} \approx \frac{Q}{V}(a(t) - c(t)).$$

Uvědomme si, že $t_i + h = t_{i+1}$, obdobně pak $t_i - h = t_{i-1}$. Po algebraických úpravách a zobecnění, kdy jsme za t mohli vzít t_i , pak dostáváme hledanou aproximaci

$$a(t_i) \approx \frac{V}{Q} \frac{c(t_{i+1}) - c(t_{i-1}))}{2h} + c(t_i); \quad (2.5)$$

$$c(t_0) = c_0; \quad c_0 \in \mathbb{R}^+; \quad t_i = ih; \quad i = 1, 2, \dots, n-1; \quad t_0 = 0.$$

2.1.5. Přesnost měření koncentrace v přitékající kapalině

Máme již zavedenu aproximaci, otázkou však zůstává přesnost získané hodnoty. Přirozeně musí existovat souvislost s přesností naměřené hodnoty koncentrace nečistot v kapalině v nádobě a spočtenou hodnotou koncentrace nečistot v přitékající kapalině. My se právě budeme snažit tuto souvislost objasnit.

Řekněme, že reálná hodnota koncentrace v čase t_i je $c(t_i)$, my však máme dostupnou v čase t_i pouze hodnotu c_i , která byla naměřena s přesností ϵ (jedná se nutně o nezáporné číslo), tedy

$$|c_i - c(t_i)| \leq \epsilon.$$

Předpokládejme, že měření bude zkalibrováno tak, aby pro časové kvantum, o nějž se čas jednotlivých měření liší, platilo $h = C\epsilon^{\frac{1}{3}}$, kde samozřejmě musí platit, že $C \in \mathbb{R}^+$.

Naším zájmem je zjistit, s jakou přesností jsme schopni určit a_i z naměřených hodnot pomocí naší aproximace (2.5) oproti reálné hodnotě $a(t_i)$.

V této kapitole budeme využívat speciální případ značení O .

Definice 2.3 Symbolem $f(x) = O(g(x))$ rozumíme, že

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|f(x)|}{g(x)} < +\infty$$

kde $g(x)$ je funkce nezáporná pro všechna $x \in U(0)$, $x \geq 0$, $g(0) = 0$.

Bližší k tomuto značení například v [8, s.295].

Zprvu si napočítejme Taylorův rozvoj pro koncentrace nečistot v kapalině v nádobě při časech t_{i+1} a t_{i-1} , tedy

$$c(t_{i+1}) = c(t_i + h) = c(t_i) + c'(t_i)h + \frac{c''(t_i)}{2!}h^2 + \frac{c'''(t_i + \theta_1 h)}{3!}h^3, \quad \theta_1 \in (0, 1),$$

$$c(t_{i-1}) = c(t_i - h) = c(t_i) - c'(t_i)h + \frac{c''(t_i)}{2!}h^2 - \frac{c'''(t_i + \theta_2 h)}{3!}h^3, \quad \theta_2 \in (0, 1).$$

Spočtené hodnoty využijeme, abychom si vyjádřili zlomek v aproximaci (2.5)

$$\begin{aligned} \frac{c(t_{i+1}) - c(t_{i-1})}{2h} &= \frac{2hc'(t_i) + \frac{c'''(t_i + \theta_1 h)}{3!}h^3 + \frac{c'''(t_i + \theta_2 h)}{3!}h^3}{2h} = \\ &= c'(t_i) + \frac{c'''(t_i + \theta_1 h)}{2 \cdot 3!}h^2 + \frac{c'''(t_i + \theta_2 h)}{2 \cdot 3!}h^2, \quad \theta_{1,2} \in (0, 1). \end{aligned}$$

Použili jsme Taylorův rozvoj se zbytkem, v němž se nachází třetí derivace dané funkce, abychom však toto mohli udělat, musíme předpokládat, že třetí derivace je spojitá a omezená. Právě díky omezenosti třetí derivace je možno psát

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\frac{c'''(t_i + \theta_1 h)}{2 \cdot 3!} h^2 + \frac{c'''(t_i + \theta_2 h)}{2 \cdot 3!} h^2}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \left[\frac{c'''(t_i + \theta_1 h)}{12} + \frac{c'''(t_i + \theta_2 h)}{12} \right] < +\infty.$$

Tímto jsme ověřili, že se jedná o funkci typu $O(h^2)$ a teď tedy můžeme předchozí rovnost psát ve tvaru

$$\frac{c(t_{i+1}) - c(t_{i-1}))}{2h} = c'(t_i) + O(h^2). \quad (2.6)$$

Pozastavme se pouze krátce nad tím, proč bereme $h \rightarrow 0^+$, uvědomme si, že $h = C\epsilon^{\frac{1}{3}}$ a ϵ vyjadřuje přesnost měření. Snahou u každého měření je, aby jeho přesnost byla co nejvyšší, tedy aby číslo ϵ , ve smyslu, jak jsme si jej definovali, bylo co nejmenší, v limitním případě nulové. Pro náš případ to znamená, že se zabýváme situací, kdy $\epsilon \rightarrow 0^+ \Rightarrow h \rightarrow 0^+$.

Nyní si přepíšme nám již známou obecnou rovnici (2.1) do tvaru

$$a(t) = \frac{V}{Q} c'(t) + c(t). \quad (2.7)$$

Tato rovnice je vlastně po dosazení reálných hodnot $c(t_i)$; $t_i = ih$; $i = 0, 1, 2, \dots, n$ vztahem, který nám dává teoreticky přesnou hodnotu $a(t_i)$; $t_i = ih$; $i = 0, 1, 2, \dots, n$. Pro rozdíl hodnot $a(t_i)$ (vyjádřená vztahem (2.7)) a a_i (vyjádřená pomocí aproximace (2.5)) dostáváme vztah

$$a_i - a(t_i) = \frac{V}{Q} \frac{c_{i+1} - c_{i-1}}{2h} + c_i - \frac{V}{Q} c'(t_i) - c(t_i).$$

Do tohoto vztahu dosadíme za $c'(t_i)$ ze vztahu (2.6), pak tedy

$$a_i - a(t_i) = \frac{V}{Q} \frac{c_{i+1} - c_{i-1}}{2h} + c_i - \frac{V}{Q} \frac{c(t_{i+1}) - c(t_{i-1}))}{2h} + \frac{V}{Q} O(h^2) - c(t_i).$$

Pro absolutní hodnotu rozdílu $a_i - a(t_i)$ pak píšeme

$$\begin{aligned} |a_i - a(t_i)| &\leq \frac{V}{Q} \left| \frac{c_{i+1} - c(t_{i+1}))}{2h} \right| + \frac{V}{Q} \left| -\frac{c_{i-1} - c(t_{i-1}))}{2h} \right| + |c_i - c(t_i)| + O(h^2) \leq \\ &\leq \frac{V}{Q} \frac{\epsilon}{2C\epsilon^{1/3}} + \frac{V}{Q} \frac{\epsilon}{2C\epsilon^{1/3}} + \epsilon + O(C^2\epsilon^{2/3}). \end{aligned}$$

Na základě limity

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\frac{V}{Q} \frac{\epsilon}{2C\epsilon^{1/3}} + \frac{V}{Q} \frac{\epsilon}{2C\epsilon^{1/3}} + \epsilon}{\epsilon^{2/3}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left[\frac{V}{CQ} \frac{\epsilon^{2/3}}{\epsilon^{2/3}} + \frac{\epsilon}{\epsilon^{2/3}} \right] = \frac{V}{CQ}$$

a vlastností funkce O , zavedených třeba zde [8, s.295-296] a [14], můžeme předchozí nerovnost přepsat do tvaru rovnosti (pro $\epsilon \rightarrow 0^+$)

$$|a_i - a(t_i)| = O(\epsilon^{2/3}).$$

Toto nám vlastně popisuje rychlost nárůstu přesnosti měření $a(t_i)$ jako rychlost poklesu funkce $\epsilon^{2/3}$.

2.2. Nakloněná rovina

V této kapitole budou postupně rozebrány inverzní problémy, které nám, jakožto direktní problém, generuje pohyb po nakloněné rovině.

Základním kamenem této kapitoly bude rovnice volného pádu, která je obecně ve tvaru diferenciální rovnice

$$\frac{d^2h(t)}{dt^2} + \frac{K}{m} \frac{dh(t)}{dt} - g \left(1 - \frac{\rho_p}{\rho_t} \right) = 0,$$

kde h je počáteční výška volného pádu, t je doba pádu, m je hmotnost padajícího tělesa, g tíhové zrychlení, ρ_p hustota prostředí a ρ_t hustota tělesa. V rovnice se taktéž vyskytuje K , což je konstanta, která je závislá na tvaru tělesa a charakterizuje lineárně aproximovanou dynamickou odporovou sílu, více v [15].

Řešením této diferenciální rovnice je (při počáteční podmínce $v(t_0) = 0$) funkce, kdy $v(t) = \frac{dh(t)}{dt}$,

$$v(t) = g \left(1 - \frac{\rho_p}{\rho_t} \right) \frac{m}{K} \left(1 - e^{-\frac{K}{m}t} \right),$$

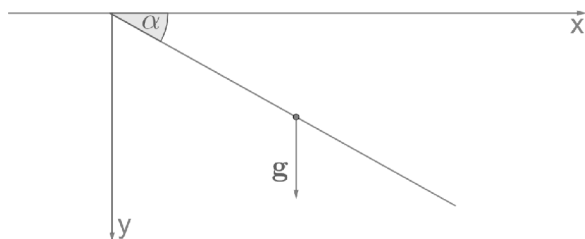
viz [15]. Tato rovnice pro $K \rightarrow 0^+$ a $\rho_p = 0$, tedy při zanedbání odporu prostředí

a dynamické odporové síly, předchází do tvaru

$$\begin{aligned}
 v(t) &= \lim_{K \rightarrow 0^+} \left[g \left(1 - \frac{0}{\rho t} \right) \frac{m}{K} \left(1 - e^{-\frac{K}{m}t} \right) \right], \\
 v(t) &= gt \lim_{K \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{K}{m}t} - 1}{-\frac{K}{m}t}, \\
 v(t) &= gt, \\
 &\Downarrow \\
 h(t) &= \frac{1}{2}gt^2 + h_0; \quad h_0 = h(t_0). \tag{2.8}
 \end{aligned}$$

Toto je tvar rovnice volného pádu, kterou ve svých pracích použil Galileo Galilei (ta byla ve tvaru $h_0 = 0$), proto se o rovnici (2.8) při $h_0 = 0$ budeme bavit jako o Galileiho zákonu volného pádu a z ní budeme také vycházet.

Jelikož již máme prodiskutován volný pád, tak je ještě třeba se podívat i na pohyb po nakloněné rovině bez odporu. Postup odvození je inspirován [4, s.98]. Mějme tedy jednoduché schéma, kdy se pohybuje hmotný bod o jednotkové hmotnosti po nakloněné rovině.



Obrázek 2.2: [4] *Nakloněná rovina*

Toto schéma i další v této kapitole budou brány jako vertikální dvojrozměrné modely reality. Z Druhého Newtonova pohybového zákona (tzv. Zákona síly) máme vztah

$$F = ma,$$

kde F je síla působící na hmotný bod, m hmotnost tělesa a a zrychlení ve směru síly. Budeme se snažit o vyjádření síly působící ve směru nakloněné roviny

$$ma = mg \sin \alpha,$$

v našem případě předpokládáme $m = 1$ kg, pak tedy

$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} = a = g \sin \alpha,$$

kde s je vzdálenost od počátku roviny po hmotný bod. Pohyb začíná z klidu a z počátku, máme počáteční podmínky $\frac{ds}{dt}(0) = 0$, $s(0) = 0$. Jedná se tedy o počáteční úlohu, jejímž řešením je funkce

$$s(t) = \frac{g}{2} t^2 \sin \alpha. \quad (2.9)$$

Převěďme si rovnici, kterou máme v polárním souřadnicovém systému, do pro nás známějšího kartézského souřadnicového systému tak, jak je naznačeno na schématu v obrázku 2.2. Právě podle tohoto schématu vidíme, že pro souřadnice polohy hmotného bodu v soustavě os xy platí

$$x(t) = s(t) \cos \alpha,$$

$$y(t) = s(t) \sin \alpha,$$

jedná se vlastně o kolmé průměty vzdálenosti s na osy xy . Mějme nyní pevně daný čas, který si označme T , během něhož bude probíhat pohyb po nakloněné rovině. Dosaďme nyní do rovnic dráhu vyjádřenou vztahem (2.9), kde za t bereme T (pro zjednodušení píšeme $x = x(T)$; $y = y(T)$)

$$x = \frac{g}{2} T^2 \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$y = \frac{g}{2} T^2 \sin \alpha \sin \alpha.$$

Díky tomu, že α je odchylkou nakloněné roviny od vodorovné osy x , tak $\cos \alpha > 0$ ($\sin \alpha > 0$ je zřejmé z reálné podstaty problému). První rovnici díky tomu můžeme umocnit do tvaru

$$x^2 = \frac{g}{2} T^2 \sin^2 \alpha \frac{g}{2} T^2 \cos^2 \alpha$$

a využitím druhé rovnice lze psát

$$x^2 = y \frac{g}{2} T^2 \cos^2 \alpha = y \left(\frac{g}{2} T^2 - \frac{g}{2} T^2 \sin^2 \alpha \right) = y \left(\frac{g}{2} T^2 - y \right).$$

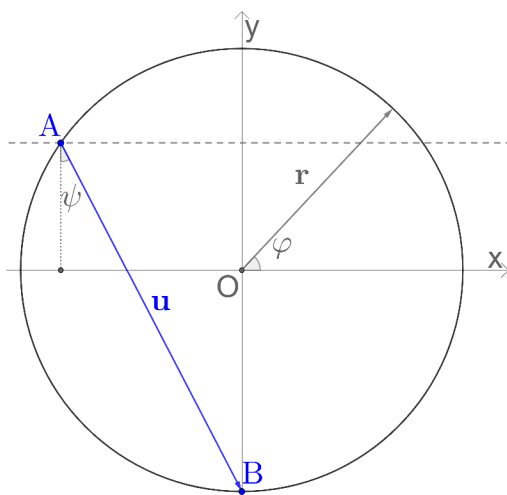
Poté úpravami dostáváme

$$x^2 + y^2 - 2y \frac{g}{4} T^2 + \left(\frac{g}{4} \right)^2 T^4 - \left(\frac{g}{4} \right)^2 T^4 = 0,$$

$$x^2 + \left(y - \frac{g}{4} T^2 \right)^2 = \left(\frac{g}{4} T^2 \right)^2,$$

což je zřejmě rovnice kružnice, která má poloměr $\frac{g}{4} T^2$, a celá leží pod osou x, jíž se dotýká pouze v počátku, tedy bodu $[0,0]$. Dobré je si povšimnout, že průměr této kružnice je $\frac{g}{2} T^2$, což je konstanta figurující ve vztahu (2.9) po dosazení konstanty T za t . Křivka, kterou popisují body, jichž je dosaženo při pohybu hmotného bodu po různě nakloněných rovinách bez odporu za konstantní čas, je kružnicí, která se dotýká osy x v místě počátku pohybu.

2.2.1. Bez odporu



Obrázek 2.3: Ilustrace prvotního problému

Inverzní kauzální Prvotní problém se zabývá případem, kdy na částici o jednotkové hmotnosti působí konstantní gravitační síla a nepůsobí odporová síla. Úkolem je ukázat, že čas, za něž se částice dostane z libovolného bodu kružnice do jejího nejnižšího bodu, je konstantní (neboli nezávislý na volbě bodu kružnice, odkud pohyb začíná).

Problém je ilustrován na obrázku 2.3, pokud zachováme stejné značení, pak $A[r \cos \varphi, r \sin \varphi]$ a $B[0, -r]$, kde $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle \wedge \varphi \neq \frac{3}{2}\pi$. Pohyb z bodu A do bodu B je pak ve směru vektoru $\mathbf{u} = \mathbf{B} - \mathbf{A} = (-r \cos \varphi, -r - r \sin \varphi)$.

Na obrázku 2.3 je zaveden úhel ψ jako úhel mezi vektory \mathbf{u} a $(0,-1)$, který má stejný směr jako gravitační síla. Ze znalosti skalárního součinu lze psát

$$\mathbf{u} \cdot (0, -1) = |\mathbf{u}| |(0, -1)| \cos \psi,$$

odtud tedy

$$r + r \sin \varphi = |\mathbf{u}| \cos \psi \Rightarrow \cos \psi = \frac{r(1 + \sin \varphi)}{|\mathbf{u}|}.$$

Podle 2. Newtonova zákona lze pro gravitační sílu psát

$$F_g = m\ddot{s}(t)$$

a tím, že se jedná o pohyb po nakloněné rovině, platí také pro tuto sílu

$$F_g = mg \cos \psi.$$

Nyní se tedy jedná o diferenciální rovnici s počátečními podmínkami

$$\ddot{s}(t) = g \cos \psi; \quad s(0) = 0 \text{ a } \dot{s}(0) = 0,$$

jejímž řešením je funkce

$$s(t) = \frac{g}{2} t^2 \cos \psi.$$

Je však zřejmé, že $s(t) = |\mathbf{u}|$ a tedy je možné psát

$$t^2 = \frac{2 |\mathbf{u}|}{g \cos \psi} = \frac{2 |\mathbf{u}|^2}{g r (1 + \sin \varphi)} = \frac{2 r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi + r^2 + 2r^2 \sin \varphi}{g r (1 + \sin \varphi)} = \frac{4r}{g},$$

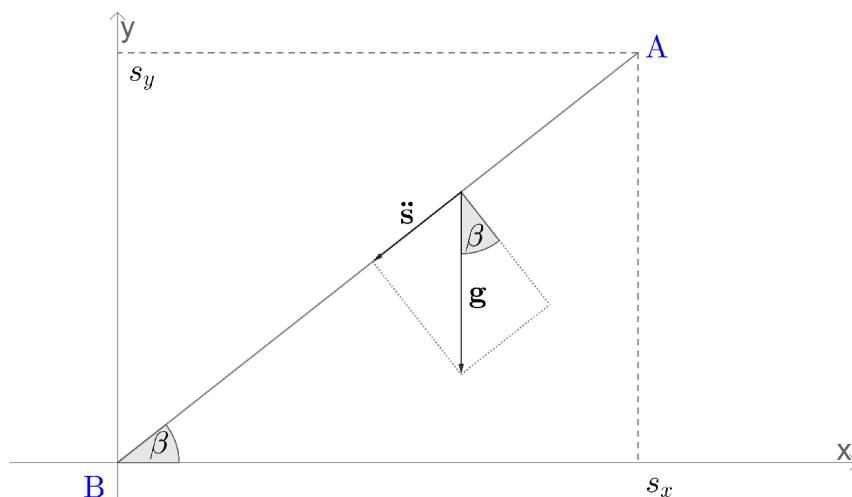
odtud pak

$$t = 2\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Z výše uvedené rovnosti již lze zřetelně vidět, že čas pohybu po nakloněné rovině v tomto případě je nezávislý na umístění bodu A na kružnici.

Inverzní identifikační V tomto problému půjde o zjištění tvaru křivky ze znalosti času pohybu po nakloněné rovině a daného bodu, který bude vždy nejnižším bodem nakloněné roviny (za předpokladu konstantní gravitační síly a žádného odporu). Bude tedy třeba ukázat, že se jedná o kružnici, jejímž nejnižším bodem je právě daný bod.

Pokud umístíme počátek soustavy souřadnic do onoho bodu (nazvěme jej B, pro korespondenci s direktním problémem), bude poté nakloněná rovina s vodorovnou osou svírat odchylku β .



Obrázek 2.4: Pohyb po nakloněné rovině za daný čas do konkrétního bodu

Z tohoto obrázku již jde zřejmě vidět, že $\sin \beta = \frac{\dot{s}(t)}{g}$, což je opět diferenciální rovnice s počátečními podmínkami $\dot{s}(0) = 0$ a $s(0) = 0$. Jejím řešením je tedy $s(t) = \frac{t^2}{2} \sin \beta g$, což je vzdálenost z bodu A do bodu B. Za předpokladu, že příslušná křivka bude kružnicí, kterou bod A opíše, tak pro $\beta = \frac{\pi}{2}$ by se mělo jednat o průměr této kružnice, tedy $d(t) = \frac{t^2}{2}g \Rightarrow r(t) = \frac{t^2}{4}g$ a pro střed této kružnice v takto zvolené soustavě souřadnic dostáváme souřadnice $S[0, \frac{t^2}{4}g]$.

Poslední přípravnou činností je potřeba určení souřadnic bodu A $[s_x, s_y]$. Uvědomme si však, že díky odchylce β můžeme psát $\cos \beta = \frac{s_x(t)}{s(t)} \Rightarrow s_x(t) = \frac{t^2}{2}g \sin \beta \cos \beta$,

obdobně pak $\sin \beta = \frac{s_y(t)}{s(t)} \Rightarrow s_y(t) = \frac{t^2}{2} g \sin^2 \beta$.

Tyto získané poznatky nyní aplikujeme v obecné rovnici kružnice, tak dostáváme rovnici ve tvaru

$$\left(\frac{t^2}{2} g \sin \beta \cos \beta\right)^2 + \left(\frac{t^2}{2} g \sin^2 \beta - \frac{t^2}{4} g\right)^2 = \frac{t^4}{16} g^2, \quad (2.10)$$

po sérii algebraických úprav získáváme rovnici ve tvaru

$$\sin^2 \beta (\cos^2 \beta + \sin^2 \beta - 1) = 0.$$

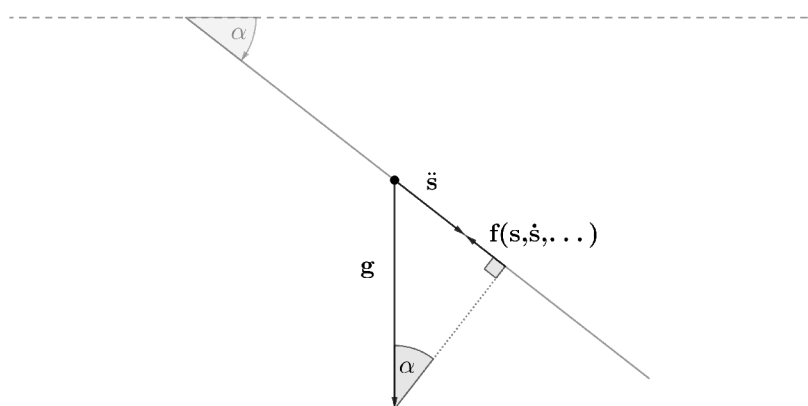
Tato rovnice je zřejmě splněna pro libovolné β i t (jedná se totiž o identitu $0 = 0$, která je vždy pravdivá), jelikož jsme při úpravě použili sérii ekvivalentních úprav, dokázali jsme i platnost původní rovnici (2.10). Ukázali jsme tedy, že při takto zadaném pohybu po nakloněné rovině bude počáteční bod A vždy ležet na kružnici, jejíž nejnižší bod je právě bod B.

Všimněme si rozdílu tohoto inverzního problému oproti identifikaci tvaru křivky v teorii kapitoly. Rozdílem je, že v teorii kapitoly jsme znali bod, ze kterého pohyb začínal a poté rovnici $s(t) = \frac{g}{2} t^2 \sin \alpha$, kdežto v tomto inverzním problému známe bod, do kterého pohyb směřuje a informaci, že čas pohybu po nakloněné rovině je konstantní. Nicméně ve chvíli, kdy jsme v inverzním problému získali rovnici $s(t) = \frac{t^2}{2} \sin \beta g$, bylo možné postupovat prakticky stejným způsobem jako v teorii. Rozhodl jsem se však ukázat i druhý možný přístup, který se lišil v předpokladu, že se jedná o kružnici. Bylo tedy pak nutné napočítat parametry předpokládané kružnice, dosadit je do obecné rovnice kružnice a museli jsme dostat pravdivé tvrzení.

2.2.2. S lineárním odporem

Od tohoto problému dále bude pozornost věnována pohybu po nakloněné rovině částice o jednotkové hmotnosti. Tento pohyb bude vždy z fixního bodu a již ve výpočtu bude zahrnuta i odporová síla závislá na dráze, rychlosti. . . Direktním problémem pak bude identifikace ekvitemporálních křivek (tj. křivek, které v kartézské soustavě souřadné dávají do poměru souřadnice bodu x a y , kterých je dosaženo za

daný konstantní čas při různých úhlech) a inverzním bude právě určení příslušné odporové funkce z rovnice těchto křivek. Dále bude použito značení $s = s(t)$, $\dot{s} = \dot{s}(t)$...



Obrázek 2.5: Pohyb hmotného bodu o jednotkové hmotnosti po nakloněné rovině s odporovou funkcí

Odpor závislý na rychlosti

Direktní V prvním případě budeme uvažovat pohyb po nakloněné rovině, kdy bude odpor charakterizován odporovou funkcí ve tvaru $f(\dot{s}) = k\dot{s}$; $k \in \mathbb{R}^+$.

Budeme vycházet z podobných úvah, jaké vedly ke vztahu (2.9), pouze je budeme rozšiřovat i pro situaci, kdy máme uvažovat odpor. Úhel, který svírá nakloněná rovina s vodorovnou osou, je α jako na obrázku 2.5. Pohybová rovnice je pak ve tvaru

$$\ddot{s} = g \sin \alpha - f(\dot{s}),$$

tento tvar přímo vyplývá z obrázku 2.5 a základních znalostí vektorového počtu.

Po dosazení pak dostáváme nehomogenní diferenciální rovnici

$$\ddot{s} + k\dot{s} = g \sin \alpha.$$

Tato diferenciální rovnice společně s podmínkami $\dot{s}(0) = 0$; $s(0) = 0$ tvoří počáteční úlohu. K obecnému řešení lze dojít třeba metodou speciálních pravých stran. Příslušná homogenní diferenciální rovnice má obecné řešení ve tvaru

$$s = C_1 + C_2 e^{-kt}.$$

Obecné řešení nehomogenní diferenciální rovnice získáme přičtením jednoho partikulárního řešení k obecnému řešení příslušné homogenní diferenciální rovnice. My jsme našli partikulární řešení $s_n(t) = \frac{g \sin \alpha}{k} t$ a v tom případě je obecným řešením původní nehomogenní diferenciální rovnice

$$s = C_1 + C_2 e^{-kt} + \frac{g \sin \alpha}{k} t.$$

Nyní již využitím podmínek $\dot{s}(0) = 0$; $s(0) = 0$ dostáváme řešení počáteční úlohy, jímž je funkce

$$s = P(t) \sin \alpha, \tag{2.11}$$

kde $P(t) = \frac{g}{k^2}(e^{-kt} + kt - 1)$ je průměr kružnice, pokud je čas fixní. Toto tvrzení lze dokázat velmi podobným způsobem, jako byl ukázán v teorii úvodem této podkapitoly tvar křivky, které dosáhnou při pohybu po nakloněné rovině bez odporu za konstantní dobu pohybu. Tedy opět pro polohu hmotného bodu v kartézských souřadnicích napíšeme na základě obecného obrázku 2.2 rovnice

$$\begin{aligned} x(t) &= s \cos \alpha, \\ y(t) &= s \sin \alpha. \end{aligned}$$

Dosadíme

$$\begin{aligned} x(t) &= P(t) \sin \alpha \cos \alpha, \\ y(t) &= P(t) \sin \alpha \sin \alpha, \end{aligned}$$

analogickým způsobem jako v úvodu kapitoly pokračujeme

$$\begin{aligned} x^2(t) &= P^2(t) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = y(t)P(t) \cos^2 \alpha = y(t) (P(t) - P(t) \sin^2 \alpha) = \\ &= y(t) (P(t) - y(t)) \end{aligned}$$

a úpravami dostáváme

$$\begin{aligned} x^2(t) + y^2(t) - 2y(t)\frac{P(t)}{2} + \left(\frac{P(t)}{2}\right)^2 - \left(\frac{P(t)}{2}\right)^2 &= 0, \\ x^2(t) + \left(y(t) - \frac{P(t)}{2}\right)^2 &= \left(\frac{P(t)}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Toto je jistě kružnice s poloměrem $\left(\frac{P(t)}{2}\right)$ a tedy průměrem $P(t)$.

Postup lze obecně psát pro rovnice tvaru

$$s = d \sin \alpha, d \in \mathbb{R}^+,$$

vlastně bychom předchozí postup přepsali, pouze bychom $P(t)$ nahradili d . Pak tedy každá rovnice pohybu po nakloněné rovině v tomto tvaru bude rovnicí kružnice s průměrem d . V našich počtech se často bude stávat, že na pozici d bude funkce času, pokud se však za čas dosadí konkrétní hodnota, tak příslušná funkce opět přejde v číslo.

Je však třeba ověřit, zda příslušné řešení odpovídá skutečnosti, tedy zda pro $k \rightarrow 0^+$ průměr $P(t)$ konverguje k hodnotě bez odporu, tedy $\frac{g}{2}t^2$. Pro výpočet této limity lze využít L'Hospitalova pravidla.

Věta 2.4 [16, s.79] ***L'Hospitalovo pravidlo*** (varianta 0/0)

Nechť platí

1. *funkce f, g mají derivace v prstencovém okolí $P(a)$ bodu $a \in \mathbb{R}^+$,*
2. *$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0,$*
3. *existuje vlastní nebo nevlastní $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K.$*

Pak existuje i $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ a rovná se K . (Totéž platí i pro jednostranné limity.)

Lze taktéž formulovat znění této věty pro variantu ∞/∞ , změna by byla pouze v druhém kroku, kdy by limity byly rovny $\pm\infty$.

Výpočet poté realizujeme takto:

$$\lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{g(e^{-kt} + kt - 1)}{k^2} \stackrel{\text{rH}}{=} \lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{g(-te^{-kt} + t)}{2k} \stackrel{\text{rH}}{=} \lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{gt^2 e^{-kt}}{2} = \frac{gt^2}{2}.$$

Je možné si všimnout, že se zvětšujícím se časem t narůstá i průměr $P(t)$ (při fixním k). Využijeme vlastností monotónní funkce, stejně jako v části 2.1.2. **Určení proměnných ze dvou hodnot**, tedy podmínkou pro to aby byla funkce $P(t)$ rostoucí je

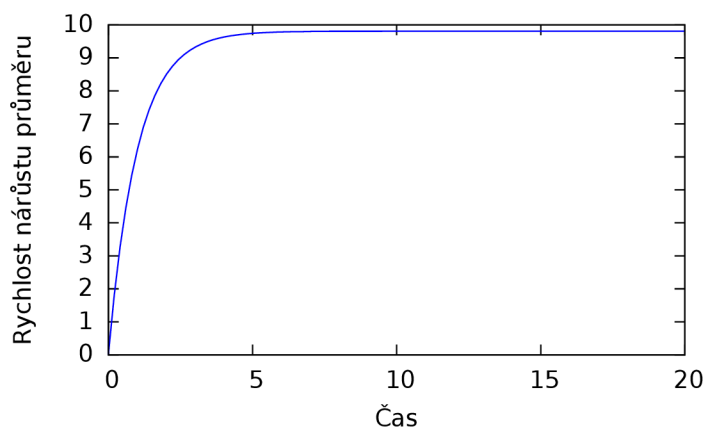
$$\dot{P}(t) = \frac{g}{k} (1 - e^{-kt}) > 0; \forall t : t > 0,$$

přičemž zřejmě platí $\frac{g}{k} > 0$ a z požadavku $1 - e^{-kt} > 0$ dostáváme $t > 0$, což taktéž vyhovuje a tedy platí i $\dot{P}(t) > 0$.

Otázkou zůstává, jaká je rychlost nárůstu. To jsme již vlastně zjistili, jedná se totiž o funkci $\dot{P}(t)$, což vyplývá ze samotné definice derivace. Pro plnou představu, jak se onen poloměr chová, je třeba znát ještě rychlost nárůstu pro $t \rightarrow 0^+$ a $t \rightarrow +\infty$:

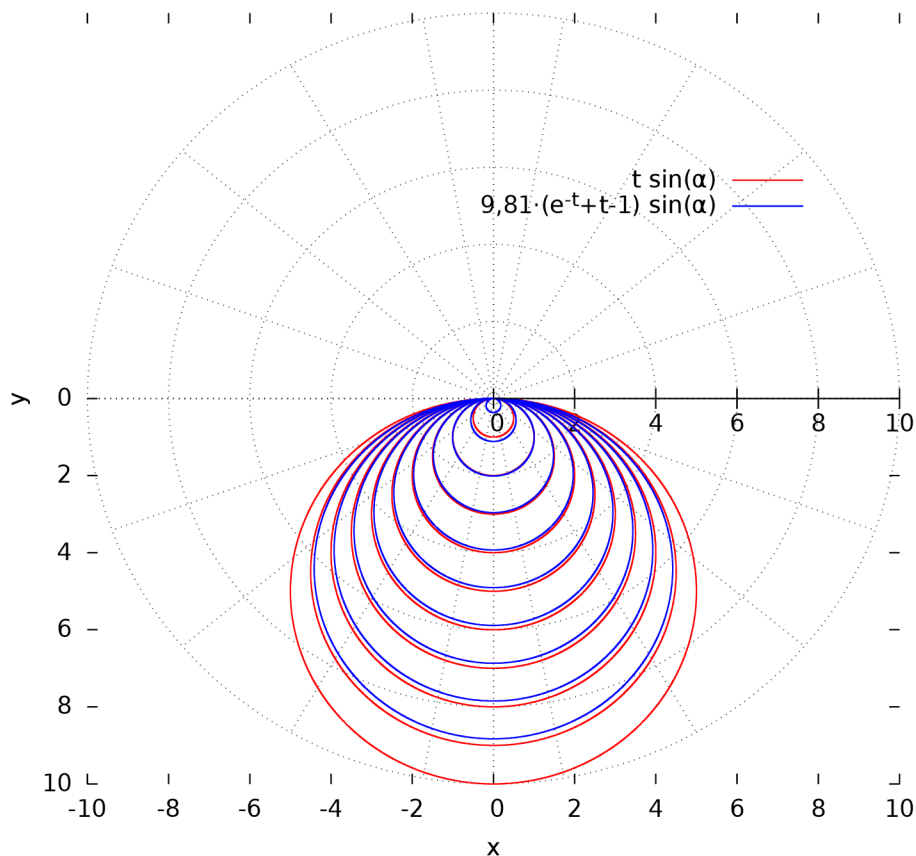
$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \dot{P}(t) = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \dot{P}(t) = \frac{g}{k}.$$



Obrázek 2.6: Průběh funkce $\dot{P}(t)$ pro $k=1$

Smyslem následujícího grafu je demonstrovat rychlost nárůstu poloměru, která je zanesena do grafu v 2.6 na ekvitemporálních kružnicích.



Obrázek 2.7: Porovnání lineárně rostoucího průměru a průměru v (2.11) pro $k=1$; $g \approx 9,81$; $t = \{1, 2, \dots, 10\}$

Inverzní Díky tomu, že je dán direktní problém, se můžeme bavit o inverzním problému. V tomto případě půjde o kauzální problém, kdy bude otázkou zjistit, zda obecná odporová funkce $f(\dot{s})$ pro ekvitemporální křivky, kterými jsou kružnice

$$s = P(t) \sin \alpha$$

s poloměrem $P(t)$ má nutně tvar $f(\dot{s}) = k\dot{s}$; $k \in \mathbb{R}^+$.

Prvním krokem je zjistit, jak $f(\dot{s})$ závisí na $\sin \alpha$ (předpokládejme, že $f(0) = 0$). Jinak řečeno, musíme ukázat, že (sub.: $\sin \alpha = \sigma$)

$$f(\sigma \dot{P}(t)) = \sigma f(\dot{P}(t)), \quad (2.12)$$

kde $\sigma \in \langle 0, 1 \rangle$, jelikož $\alpha \in \langle 0, \pi \rangle$. Pohybovou rovnici tedy přepíšeme do tvaru

$$\ddot{P}(t)\sigma = g\sigma - f(\dot{P}(t)\sigma),$$

odtud (sub.: $\dot{P}(t) = z$)

$$g - \dot{z} = \frac{f(z\sigma)}{\sigma},$$

což ale platí pouze pro $\sigma \in (0, 1)$. Vidíme, že $\frac{f(z\sigma)}{\sigma}$ je nezávislé na σ a díky tomu je možné psát

$$\frac{f(z\sigma)}{\sigma} = \frac{\sigma f(z)}{\sigma} = f(z),$$

čímž jsme dokázali (2.12) pro libovolné z (v případě kdy $\sigma = 0$ je důkaz triviální).

Také můžeme zavést $\sigma = \frac{w}{z} \Rightarrow w = \sigma z (= \dot{s})$, kde $w \in (0, z)$ a pomocí již dokázaného vztahu (2.12) je možné psát

$$\frac{f(z)}{z} = \frac{f(z)}{z} \frac{\sigma}{\sigma} = \frac{f(\sigma z)}{\sigma z} = \frac{f(w)}{w},$$

z čehož vyplývá, že $\frac{f(z)}{z} = k$, kde k je kladná konstanta. To znamená, že odporová funkce je úměrná rychlosti, tedy že $f(\dot{s}) \propto \dot{s}$. Ukázali jsme, že pro případ, kdy mají být ekvitemporální křivky kruhy a odporová funkce je závislá na rychlosti, je skutečně ve tvaru $f(\dot{s}) = k\dot{s}$, $k \in \mathbb{R}^+$.

Odpor závislý na dráze

Direktní Ve druhém direktním problému se budeme bavit o odporové funkci ve tvaru $f(s) = ks$; $k \in \mathbb{R}^+$, α zůstává stejným úhlem.

Pohybová rovnice pak již dle očekávání vypadá takto:

$$\ddot{s} = g \sin \alpha - ks \Rightarrow \ddot{s} + ks = g \sin \alpha.$$

*Jedná se o znak úměrnosti, který nám říká, že $y \propto x \Leftrightarrow y = kx$, $k \in \mathbb{R}$.

Spolu s podmínkami $\dot{s}(0) = 0; s(0) = 0$ tvoří počáteční úlohu, jejímž řešením je funkce

$$s = P(t) \sin \alpha,$$

kde $P(t) = \frac{g}{k}(1 - \cos(\sqrt{kt}))$ (k nalezení obecného řešení lze opět využít metodu speciálních pravých stran obdobně jako v kapitole 2.2.2. [Odpor závislý na rychlosti](#)) a opět se jedná o poloměr ekvitemporálního kruhu.

Stejně jako u minulého problému je třeba ověřit, zda pro $k \rightarrow 0^+$ poloměr odpovídá realitě, tedy zda konverguje k hodnotě bez odporu, která je dána Galileiho zákonem volného pádu. Takže obdobně jako u předchozího problému

$$\lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{g}{k}(1 - \cos(\sqrt{kt})) \stackrel{\text{IH}}{=} \frac{gt}{2} \lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{\sin(\sqrt{kt})}{\sqrt{k}} = \frac{gt^2}{2} \lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{\sin(\sqrt{kt})}{\sqrt{kt}} = \frac{gt^2}{2},$$

což zase odpovídá.

Inverzní *Opět ukážeme velmi podobným způsobem jako u předchozího direktního problému, že $f(s) \propto s$.*

Rozdíl oproti předchozímu přístupu je, že ukážeme

$$f(\sigma P(t)) = \sigma f(P(t)); \sigma \in \langle 0, 1 \rangle, \text{ protože } a \in \langle 0, \pi \rangle \quad (2.13)$$

a přirozeně tedy i v myšlence použijeme sub.: $P(t) = z$. Pišme tedy analogicky předchozí inverzní úloze

$$g - \ddot{z} = \frac{f(z\sigma)}{\sigma},$$

opět na základě nezávislosti na σ pišme

$$\frac{f(z\sigma)}{\sigma} = \frac{\sigma f(z)}{\sigma} = f(z).$$

Tímto jsme dokázali (2.13). Naprosto stejnými úvahami jako v předchozím problému ukážeme, že $f(s) \propto s$. Vidíme tedy, že námi zvolený tvar odporové funkce zase zajišťuje kruhový tvar ekvitemporálních křivek a naopak.

Odpor závislý na dráze i rychlosti

Nyní již můžeme přejít k řešení komplexnějšího inverzního problému. Tím bude nalezení odporové funkce, která však bude závislá jak na dráze, tak na rychlosti, zapsáno $f(s, \dot{s})$, z rovnice ekvitemporální křivky

$$s = g(1 - (1 + t)e^{-t}) \sin \alpha.$$

Budeme vycházet z obecného tvaru pohybové rovnice pro náš případ a po napočítání \ddot{s} a dosazení do něj získáváme rovnici ve tvaru

$$g \sin \alpha (e^{-t} - te^{-t}) = g \sin \alpha - f(s, \dot{s}).$$

Tu upravíme na tvar

$$f(s, \dot{s}) = g \sin \alpha (1 - (1 - t)e^{-t}),$$

což lze šikovně rozepsat na tvar

$$f(s, \dot{s}) = g(1 - (1 + t)e^{-t}) \sin \alpha + 2gte^{-t} \sin \alpha$$

a odtud již zřejmě

$$f(s, \dot{s}) = s + 2\dot{s}.$$

2.2.3. S nelineárním odporem

V této kapitole se budeme věnovat stále stejnému typu problémů, pouze s tím rozdílem, že odporová funkce bude nelineární vzhledem k s , \dot{s} ...

Direktní Musíme začít direktním problémem, ve kterém bude řeč o odporové funkci tvaru $f(\dot{s}) = k\dot{s}^2$. Úkolem je nalézt tvar ekvitemporálních křivek.

Zde začneme stejně jako v předchozích problémech, vyjdeme z obrázku 2.5 a vytvoříme pohybovou rovnici ve tvaru

$$\ddot{s} = g \sin \alpha - f(\dot{s}), \quad (2.14)$$

odtud

$$\ddot{s} + k\dot{s}^2 = g \sin \alpha.$$

Tato rovnice společně s podmínkami $s(0) = 0$ $\dot{s}(0) = 0$ tvoří počáteční úlohu.

Nyní zavedeme substituci $v = \dot{s}$ (v je také funkcí času), rovnice pak nabývá tvaru

$$\dot{v} + kv^2 = g \sin \alpha,$$

tu vyřešíme například metodou separace proměnných,

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= g \sin \alpha - kv^2, \\ \frac{dv}{g \sin \alpha - kv^2} &= dt, \\ \frac{1}{g \sin \alpha} \frac{dv}{1 - \left(\frac{\sqrt{kv}}{\sqrt{g \sin \alpha}}\right)^2} &= dt. \end{aligned}$$

Obě strany rovnice integrujeme pomocí substituční metody, kdy substituujeme $b = \frac{\sqrt{kv}}{\sqrt{g \sin \alpha}}$. Pak na základě tabulky primitivních funkcí ze [16, s.96]

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{kg \sin \alpha}} \frac{db}{1 - b^2} &= dt, \\ \operatorname{argtgh}(b) &= (t + C_1) \sqrt{kg \sin \alpha}; C_1 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Obecné řešení má tvar

$$v = \frac{\sqrt{g \sin \alpha}}{\sqrt{k}} \operatorname{tgh} \left[(t + C_1) \sqrt{g \sin \alpha k} \right]; C_1 \in \mathbb{R}.$$

V tomto okamžiku navrátíme do rovnice \dot{s} skrze substituční podmínku (tedy za v dosadíme \dot{s}):

$$\dot{s}(t) = \frac{\sqrt{g \sin \alpha}}{\sqrt{k}} \operatorname{tgh} \left[(t + C_1) \sqrt{g \sin \alpha k} \right]; C_1 \in \mathbb{R}. \quad (2.15)$$

Rovnici vyřešíme, využijeme k tomu vztahu $\int \operatorname{tgh}(x) dx = \ln(2 \cosh(x)) + c; c \in \mathbb{R}$,

který lze odvodit ze skutečnosti $\operatorname{tgh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$,

$$\int ds(t) = \frac{\sqrt{g \sin \alpha}}{\sqrt{k}} \int \operatorname{tgh} \left[(t + C_1) \sqrt{g \sin \alpha k} \right] dt; \quad C_1 \in \mathbb{R},$$

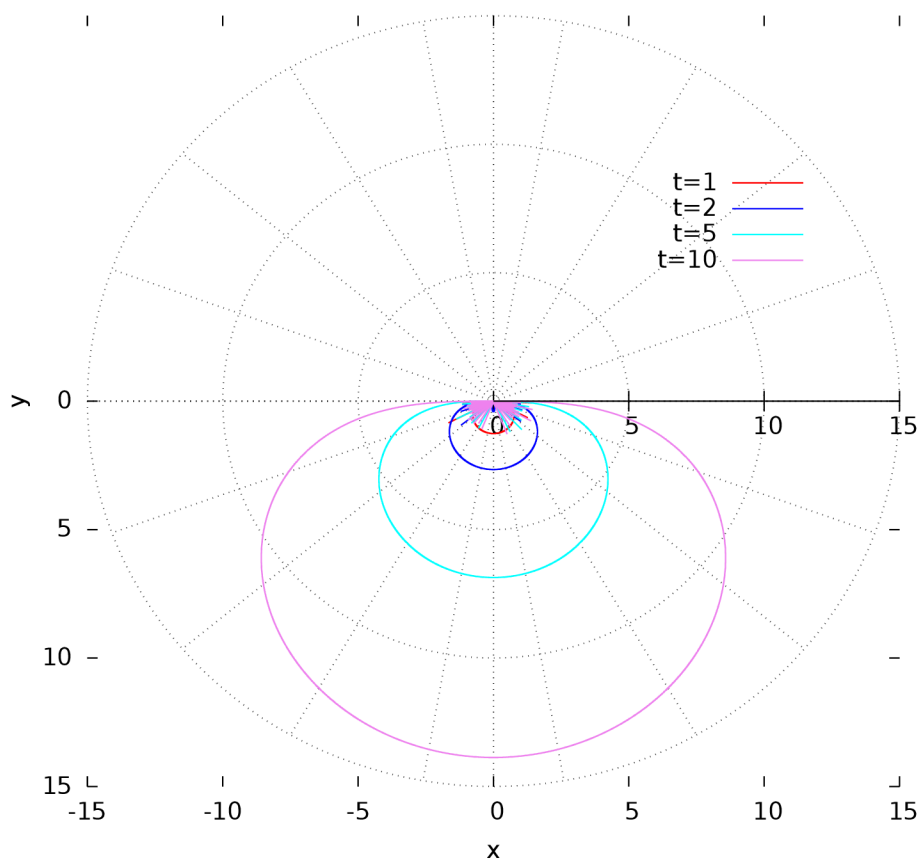
$$\int ds(t) = \frac{1}{k} \int \operatorname{tgh}(u); \quad u = (t + C_1) \sqrt{g \sin \alpha k}; \quad C_1 \in \mathbb{R},$$

$$s(t) = \frac{1}{k} \ln \left[\cosh \left((t + C_1) \sqrt{g \sin \alpha k} \right) \right] + C_2; \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Využitím počátečních podmínek dostáváme řešení naší počáteční úlohy

$$s(t) = \frac{1}{k} \ln \left[\cosh(t \sqrt{g \sin \alpha k}) \right], \quad (2.16)$$

což je tvar ekvitemporálních křivek při odporové funkci, která je závislá na čtverci rychlosti.



Obrázek 2.8: Příslušné ekvitemporální křivky pro $k=5$ při různých časech

Inverzní Po zavedení direktního problému se budeme věnovat kauzálnímu problému. Musíme ukázat, že odporová funkce, která je závislá pouze na rychlosti, pro ekvitemporální křivky ve tvaru (2.16), je úměrná čtverci rychlosti.

Dosazením (2.16) do rovnice (2.14) dostáváme rovnici ve tvaru

$$\frac{g \sin \alpha}{\cosh^2(\sqrt{kg \sin \alpha} t)} = g \sin \alpha - f(\dot{s}).$$

Z této rovnice ekvivalentními úpravami dostáváme tvar odporové funkce

$$f(\dot{s}) = k \cdot \frac{kg \sin \alpha}{k^2} \operatorname{tgh}^2(\sqrt{kg \sin \alpha} t)$$

a odtud již zřejmě porovnáním s (2.15)

$$f(\dot{s}) = k\dot{s}^2.$$

Závěr

Ve své práci jsem se snažil ukázat širokou škálu využití inverzních problémů. Dle mého názoru se při studiu na inverzní problémy často zapomíná a to je velká škoda.

Mým cílem bylo přiblížit v této práci problematiku inverzních problémů běžnému studentovi. Této problematice se věnovala první kapitola, ve níž jsem uvedl inverzní problémy z různých oborů (astronomie, mechaniky či magnetismu). Inverzní problémy byly vybrány z variace oborů, jelikož jsem se chtěl, aby každý našel jemu blízký a případně v něm objevil další zajímavé inverzní problémy.

Praktická část této práce byla věnována řešení a rozvíjení inverzních problémů pro dva zvolené modely tak, jak jsem naznačil v úvodu. Zprvu zavedená teorie daného problému byla následně problémy rozvíjena.

U prvního modelu dobře promíchané kapaliny jsme došli ke zjištění, jaké veličiny je možné odvodit ze dvou a tří naměřených hodnot koncentrace nečistot v nádobě. Dále jsme se potom přiblížili reálnému řešení tím, že jsme vytvořili aproximaci pro časově proměnnou koncentraci nečistot v přitékající kapalině. U posledního problému jsme pak zjistili, s jakou přesností nám tato aproximace udává hodnotu koncentrace v přitékající kapalině vzhledem k přesnosti měření koncentrace v nádobě. Pokud bychom problém dále rozváděli, směřovalo by se s největší pravděpodobností k problému měnícího se objemu kapaliny v nádobě v čase.

Nakloněná rovina byl model, jež nám umožňoval pracovat s ekvitemporálními křivkami. Zde jsme pozornost věnovali především odporu, který působí na těleso pohybující se po nakloněné rovině. V této podkapitole byla snaha o demonstraci

toho, že ke každému inverznímu problému existuje problém direktní. Direktní problémy se zabývaly určením tvaru ekvitemporálních křivek při různých odporových funkcích (pouze u prvního případu, kdy jsme uvažovali pohyb bez odporu, tomu bylo jinak). Zpočátku se tyto křivky neustále jevily jako kružnice, viz. obr. 2.7, avšak poté při nelineární odporové funkci se ukázalo, že ani toto není pravidlem, viz. obr. 2.8. Inverzní problémy poté dávaly za úkol určit odporové funkce právě z tvaru těchto ekvitemporálních křivek, respektive z jejich rovnic.

Závěrem bych se rád zmínil o velké výzvě, kterou pro mě tato práce představovala, u řešení některých problémů jsem strávil opravdu mnoho času. Doufám tedy, že kdokoli si tuto práci přečte, bude mít trápení s počty usnadněno a vpluje bez velkých obtíží do mnou demonstrovaných problémů.

Literatura

- [1] ALMASY, Andrea. *Inverse Problems in Classical and Quantum Physics* [online]. Mainz, 2007 [cit. 2021-10-10]. Dostupné z: . Disertace. Johannes Gutenberg-Universität Mainz.
- [2] BARROW-GREEN, June. *Poincaré and the Three Body Problem*. United States of America: American Mathematical Society, 1997. ISBN 0-8218-0367-0.
- [3] FIALA, Jiří. Můžeme slyšet tvar bubnu? *Vesmír* [online]. 1995, **74**(12), 665 [cit. 2021-10-4]. ISSN 0042-4544. Dostupné z: <https://vesmir.cz/cz/casopis/archiv-casopisu/1995/cislo-12/muzeme-slyset-tvar-bubnu.html>
- [4] GROETSCH, Charles W. *Inverse problems: activities for undergraduates*. Washington: Mathematical Association of America, 1999. ISBN 0-88385-716-2.
- [5] GOODE, Stephen W. a Scott A. ANNIN. *Differential equations and linear algebra*. 3rd ed. Upper Saddle River, USA: Pearson Education, c2007. ISBN 978-0-13-045794-3.
- [6] HANSEN, Per Christian. *Discrete Inverse Problems: Insight and Algorithms*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2010. ISBN 978-0-898716-96-2.
- [7] HERMAN, Gabor. Image Reconstruction From Projections. *Real-Time Imaging* [online]. 1995, 1(1), 3-18 [cit. 2021-10-11]. ISSN 1077-2014. Dostupné z: <https://doi.org/10.1006/rtim.1995.1002>
- [8] JARNÍK, Vojtěch. *Diferenciální počet (II)*. Vyd. 4. Praha: Academia, 1984.
- [9] LADMA, Vladimír. Konjunkce, nerovnosti. *Stopované nápady (ve vědě)* [online]. c2005-2018 [cit. 2022-05-10]. Dostupné z: <http://www.traced-ideas.cz/cycles/cconjunctions.html>

- [10] LADMA, Vladimír. Obálkové funkce. *Stopované nápady (ve vědě)* [online]. c2005-2018 [cit. 2022-03-23]. Dostupné z: <http://www.traced-ideas.cz/solar/solarshapes.html>
- [11] LANDSCHEIDT, Theodor. New Little ICE Age Instead of Global Warming?. *Energy & Environment* [online]. 2003, 14(2-3), 327-350 [cit. 2022-03-24]. Dostupné z: [doi:https://doi.org/10.1260/095830503765184646](https://doi.org/10.1260/095830503765184646)
- [12] MOURA NETO, Francisco Duarte a Antônio J. SILVA NETO. *An introduction to inverse problems with applications*. New York: Springer, c2013. ISBN 978-3-642-32557-1.
- [13] PIKE, Roy. What is an inverse problem? *Physics World* [online]. Bristol: IOP Publishing, 30 Sep 2014 [cit. 2021-10-6]. Dostupné z: <https://physicsworld.com/a/what-is-an-inverse-problem/>
- [14] PORUBSKÝ, Štefan. Bachmann-Landau Asymptotic Notation. *Interactive Information Portal for Algorithmic Mathematics* [online]. Prague: Institute of Computer Science of the Czech Academy of Sciences, 24th November 2006 [cit. 2022-04-27]. Dostupné z: <http://www.cs.cas.cz/portal/AlgoMath/MathematicalAnalysis/Inequalities/BachmannLandauNotation.htm>
- [15] RYBNÍČKOVÁ, Jana. Galileiho studium volného pádu. *Školská fyzika* [online]. 2001, 7(2), 10-16 [cit. 2022-03-29]. ISSN 2336-2774. Dostupné z: https://sf.zcu.cz/data/2001/sf2001_02_2.pdf
- [16] TRÁVNÍČEK, Stanislav, Pavel CALÁBEK a Jaroslav ŠVRČEK. *Matematická analýza I a II (pro učitelské obory)*. UP Olomouc, 2017. Dostupné také z: <https://kag.upol.cz/data/upload/20/MAI+II.pdf>