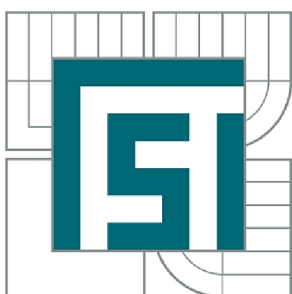


**VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ**

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



**FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ  
ÚSTAV KONSTRUOVÁNÍ**

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING  
INSTITUTE OF MACHINE AND INDUSTRIAL DESIGN

# **MKP SIMULACE ELASTOHYDRODYNAMICKÉHO KONTAKTU**

FEM SIMULATION OF ELASTOHYDRODYNAMIC CONTACT

**DIPLOMOVÁ PRÁCE**

MASTER'S THESIS

**AUTOR PRÁCE**

AUTHOR

**Bc. ROSTISLAV BRHLÍK**

**VEDOUcí PRÁCE**

SUPERVISOR

**Ing. DAVID NEČAS**

BRNO 2015



Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav konstruování

Akademický rok: 2014/2015

## ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

student(ka): Bc. Rostislav Brhlík

který/která studuje v **magisterském navazujícím studijním programu**

**obor: Konstrukční inženýrství (2301T037)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

### **MKP simulace elastohydrodynamického kontaktu**

v anglickém jazyce:

### **FEM simulation of elastohydrodynamic contact**

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Cílem práce je vytvořit funkční výpočtový model elastohydrodynamického kontaktu s využitím metody konečných prvků. Práce má obsahovat analýzu vlivu různých provozních podmínek na průběh kontaktního tlaku a tloušťku vrstvy maziva.

Cíle diplomové práce:

Diplomová práce musí obsahovat: (odpovídá názvům jednotlivých kapitol v práci)

1. Úvod
2. Přehled současného stavu poznání
3. Analýza problému a cíl práce
4. Metody
5. Výsledky
6. Diskuze
7. Závěr
8. Seznam použitých zdrojů

Forma práce: průvodní zpráva, digitální data

Typ práce: teoretická; Účel práce: výzkum a vývoj

Výstup práce: publikace; Projekt: Specifický vysokoškolský výzkum

Rozsah práce: cca 72 000 znaků (40 - 50 stran textu bez obrázků)

Zásady pro vypracování práce:

[http://dokumenty.uk.fme.vutbr.cz/BP\\_DP/Zasady\\_VSKP\\_2015.pdf](http://dokumenty.uk.fme.vutbr.cz/BP_DP/Zasady_VSKP_2015.pdf)

Šablona práce: [http://dokumenty.uk.fme.vutbr.cz/UK\\_sablona\\_praci.zip](http://dokumenty.uk.fme.vutbr.cz/UK_sablona_praci.zip)

Seznam odborné literatury:

1) VENNER, C a A LUBRECHT. Multilevel methods in lubrication. 1st ed. Amsterdam: Elsevier, 2000, xx, 379 s. ISBN 04-445-0503-2.

2) HABCHI, W., I. DEMIRCI, D. EYHERAMENDY, G. MORALES-ESPEJEL a P. VERGNE. A finite element approach of thin film lubrication in circular EHD contacts. Tribology International. 2007, vol. 40, 10-12, s. 1466-1473

Vedoucí diplomové práce: Ing. David Nečas

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2014/2015.

V Brně, dne 21.11.2014

L.S.

---

prof. Ing. Martin Hartl, Ph.D.  
Ředitel ústavu

---

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.  
Děkan fakulty

---

## ABSTRAKT

Tato diplomová práce se zabývá aplikací metody konečných prvků při simulacích elastohydrodynamického (EHD) mazání. Pro výpočet je použit komerčně dostupný software COMSOL, přičemž jsou detailně analyzovány dva rozdílné způsoby modelování EHD mazání v tomto programu. Jako první je zpracován nový přístup s využitím modulu Thin-Film Flow, kdy jsou zároveň podrobně popsány některé jeho nedostatky. Jedná se vůbec o první publikovanou práci věnující se komplexněji EHD simulacím v modulu Thin-Film Flow. S ohledem na limitace, které s modulem Thin-Film Flow souvisí, je v druhé části práce vytvořen model liniového kontaktu s využitím modulu pro zavádění parciálních diferenciálních rovnic (PDE). Na základě dostupné literatury je vytvořený model částečně verifikován s uvažováním různých hodnot vstupních parametrů. Následně je analyzován vliv rychlosti pohybu kontaktních povrchů na tlak a tloušťku maziva v kontaktu. V poslední části práce je zkoumán vliv hodnot některých parametrů na výsledné hodnoty kontaktního tlaku a tloušťky maziva, stejně tak i na numerickou stabilitu celého modelu.

## KLÍČOVÁ SLOVA

elastohydrodynamické mazání, liniový kontakt, mazací vrstva, metoda konečných prvků, COMSOL modul Thin-Film Flow, PDE

## ABSTRACT

This diploma thesis deals with an application of the finite element method on elastohydrodynamic (EHD) lubrication simulations. Commercially available software COMSOL is used for the computation, while two different modules for modeling EHD lubrication are described in a detail. Firstly, a new approach using the module Thin-Film Flow is developed, considering and describing some limitations of this approach. This is the very first published work dealing complex with EHD simulation in Thin-Film Flow module. In the second part of the thesis, there was created a model of line contact using the module for the introduction of partial differential equations (PDE). The model is partially verified with available works for different values of the input parameters. Subsequently, the velocity effect of the contact surfaces on the pressure and the lubricant thickness in contact is analyzed. Finally, the last part is examines the influence of the values of some parameters on the final value of the contact pressure and the lubricant thickness, as well as on numerical stability of the entire model.

## KEY WORDS

elastohydrodynamical lubrication, line contact, lubrication layer, finite element method, COMSOL Thin-Film Flow module, PDE

### **Bibliografická citace diplomové práce:**

BRHLÍK, R. *MKP simulace elastohydrodynamického kontaktu*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2015. 65 s. Vedoucí diplomové práce Ing. David Nečas.

---



---

## ČESTNÉ PROHLÁŠENÍ

Čestně prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci *MKP simulace elastohydrodynamického kontaktu* vypracoval samostatně pod odborným vedením Ing. Davida Nečase a v seznamu uvádím všechny použité literární, odborné i jiné zdroje.

V Brně, dne 22. 5. 2015

.....  
podpis

---





---

## PODĚKOVÁNÍ

Rád bych tímto poděkoval některým důležitým lidem, bez nichž by tato práce nikdy nevznikla. Nejprve bych rád vyjádřil své veliké díky mému vedoucímu práce, panu Ing. Davidu Nečasovi, za moudré rady, trpělivost a především za neuvěřitelně velkou podporu a motivaci. Jeho nepřekonatelně pozitivní přístup mě neustále posouval dále. Velké díky taky patří paní Ing. Ildikó Ficza za značné množství věnovaného času a zejména za cenné rady. Bez přispění jejich znalostí by nebylo dosaženo žádných rozumných výsledků. V další řadě bych rád poděkoval rodičům a celé mé rodině za podporu ve studiu, za důvěru, trpělivost a jejich lásku a modlitby. Bez nich bych nikdy na této škole nestudoval a jsem jim za vše neskutečně vděčný. Díky také patří panu Mgr. Ondřeji Lalinskému za technickou a morální podporu a krásná společně strávená studijní léta. V neposlední řadě bych rád vyjádřil díky všem těm, kteří mě motivovali a pomáhali překonávat občasnou nechuť nebo únavu. Jmenovitě bych rád zmínil Václava Slivku, Ing. Pavla Kříže, Mgr. Emílii Šmidovou a zejména Terezku Ptáčkovou. Zvláště posledně jmenované vděčím za víc, než komukoliv jinému, bez ní bych tuto práci nikdy nedokončil. Moje poděkování také směřuje úplně ke všem, kteří mě při tvorbě této diplomové práce jakkoliv podporovali, ať už to bylo radou, povzbuzujícím slovem nebo zejména modlitbou. Poslední a největší dík patří Bohu, neboť všechno dobré pochází od Něj, a všechno úžasné a krásné je Jeho dar.

---



<b>ÚVOD .....</b>	<b>13</b>
<b>1 PŘEHLED SOUČASNÉHO STAVU POZNÁNÍ.....</b>	<b>14</b>
1.1 Matematický model - rovnice.....	14
1.1.1 Reynoldsova rovnice .....	14
1.1.2 Rovnice elastických deformací.....	15
1.1.3 Rovnice silové rovnováhy .....	15
1.1.4 Rovnice změny viskozity v závislosti na tlaku.....	15
1.1.5 Rovnice změny hustoty v závislosti na tlaku .....	16
1.2 Přímé numerické metody.....	16
1.2.1 Gauss-Seidelova iterační metoda.....	16
1.2.2 Newton-Raphsonova metoda.....	16
1.3 Inverzní numerické metody .....	17
1.4 Vícevrstvé numerické metody .....	17
1.4.1 Vícevrstvá metoda .....	17
1.4.2 Víceúrovňová vícenásobná integrace .....	17
1.4.3 Metoda sdružených gradientů.....	17
1.5 Fully coupled .....	18
1.5.1 Diferenciálně-deformační metoda .....	18
1.5.2 Full system approach – Metoda konečných prvků .....	18
1.6 Computational fluid dynamics.....	19
1.7 Komerční MKP software a tribologie .....	20
1.8 Kontakt těles v software COMSOL .....	20
1.8.1 Základní kontaktní úlohy.....	21
1.8.2 Pokročilé numerické modely .....	22
<b>2 ANALÝZA PROBLÉMU A CÍL PRÁCE .....</b>	<b>25</b>
2.1 Formulace problému a jeho analýza.....	25
2.2 Cíle práce.....	25
2.3 Postup řešení.....	26
<b>3 MATERIÁL A METODY .....</b>	<b>27</b>
3.1 Modul Thin-Film Flow .....	27
3.2 Modul PDE.....	29
3.3 Okrajové podmínky .....	31
3.4 Počáteční aproximace tlaku a přiblížení těles.....	32
<b>4 VÝSLEDKY .....</b>	<b>34</b>
4.1 Moduly Thin-Film Flow + Solid Mechanics.....	34
4.2 Moduly PDE + Solid Mechanics.....	37
4.2.1 Model vycházející z práce Tana a kol. ....	37
4.2.2 Model vycházející z práce Kumara a kol. ....	39
<b>5 DISKUZE .....</b>	<b>47</b>
5.1 Moduly Thin-Film Flow + Solid Mechanics.....	47
5.1.1 Kavitace – spínací funkce.....	48
5.1.2 Závislost hustoty maziva na změně tlaku .....	48
5.1.3 Zadávání rovnice rovnováhy .....	48
5.1.4 Počáteční aproximace přiblížení těles .....	49
5.1.5 Stabilizace.....	49
5.1.6 Diskretizace tlaku v Reynoldsově rovnici .....	49

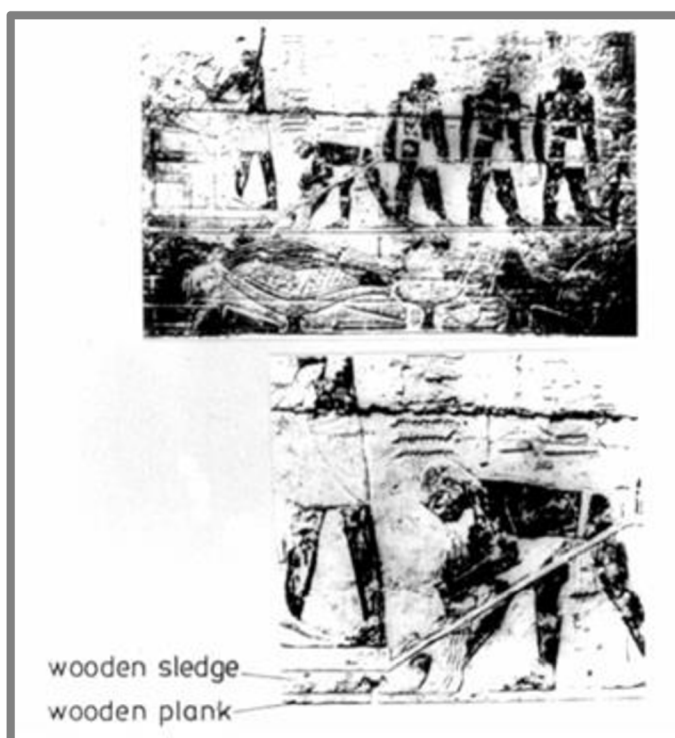
5.2 Moduly PDE + Solid Mechanics .....	50
5.2.1 Model vycházející z práce Tana a kol. ....	50
5.2.2 Model vycházející z práce Kumara a kol. ....	51
<b>6 ZÁVĚR .....</b>	<b>53</b>
<b>7 BIBLIOGRAFIE.....</b>	<b>55</b>
<b>8 SEZNAM POUŽITÝCH ZKRATEK, SYMBOLŮ A VELIČIN .....</b>	<b>60</b>
<b>9 SEZNAM OBRÁZKŮ A GRAFŮ .....</b>	<b>62</b>
<b>10 SEZNAM TABULEK.....</b>	<b>64</b>
<b>11 SEZNAM PŘÍLOH.....</b>	<b>65</b>

## ÚVOD

## ÚVOD

Tribologie je vědecký obor, který se zabývá procesy tření, opotřebení a mazání. Přesto však první důkazy práce tribologů lze nalézt ve formě maleb už např. v hrobě egyptského velkostatkáře Cuje datovaného okolo roku 2400 př. n. l. (viz obr. 0.1) [1]. V dnešní době, charakteristické zejména snahou o úsporu energie a finančních prostředků, má pak tribologický výzkum zásadní význam a nezastupitelnou roli.

Při elastohydrodynamickém (EHD) mazání dochází k oddělení dvou nekonformních povrchů tenkým mazacím filmem, charakteristické jsou elastické deformace povrchů. Zároveň se také mění s tlakem viskozita a hustota maziva [2]. EHD mazání byla v průběhu let věnována značná část teoretických i experimentálních prací, postupně se začaly objevovat i první numerické simulace. Jejich rozvoj byl urychlen rozvojem výpočetní techniky, většina z nich však staví na speciálně vytvořených programech. S rozšířením možností komerčně dostupných MKP software se nabízí využití těchto programů při řešení kontaktních úloh a vyloučení nutnosti hlubokých znalostí např. z oblasti programování. Obecně také stále častěji zaznívá požadavek numerického podložení výsledků experimentálních prací. Robustní výpočtový model realizovaný v prostředí některého komerčně dostupného MKP software může výrazným způsobem přispět k řešení této problematiky.



Obr. 0.1 Nalévání maziva (vody) do míst kontaktu dřevěné podložky a dřevěných saní při převážení sochy egyptského velkostatkáře Cuje [1]

# 1 PŘEHLED SOUČASNÉHO STAVU POZNÁNÍ

## 1.1

### 1.1 Matematický model - rovnice

Kontakt dvou nekonformních povrchů, mezi kterými nastává EHD mazání, lze popsat pomocí Reynoldsovy rovnice, rovnice elastických deformací a rovnice silové rovnováhy. V modelu je navíc nutné také uvažovat vliv tlaku na změnu viskozity a hustoty maziva.

#### 1.1.1

##### 1.1.1 Reynoldsova rovnice

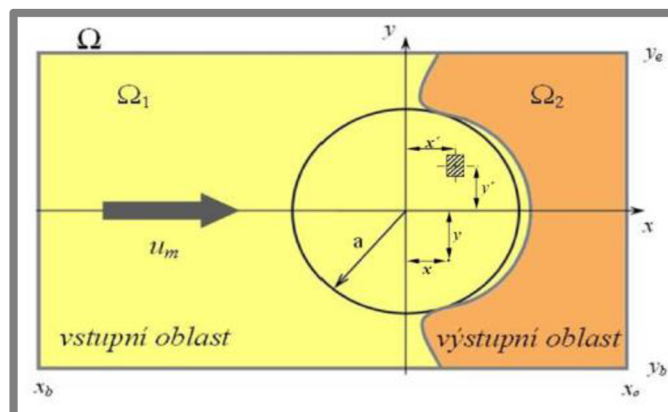
V roce 1886 představil Reynolds práci [3], ve které odvodil z Navier-Stokesových rovnic a rovnice kontinuity novou diferenciální rovnici. Ta popisuje rozložení tlaku v kapalinové mazací vrstvě při newtonském chování maziva. Výsledný vztah je známý jako Reynoldsova rovnice a sehrává podstatnou roli z hlediska teorie kapalinového mazání. Jejím řešením dostáváme průběh tlaku v oblasti ohraničené Dirichletovými okrajovými podmínkami. Výsledkem mohou být i záporné hodnoty tlaku, což je způsobeno kavitací. Jelikož z fyzikálního hlediska je tento jev nereálný, je nutné zavést kavitační podmínku, která tento problém eliminuje. Výslednou obecnou nestacionární rovnici lze pak psát ve tvaru [4]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\rho h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial y} \right) - u \frac{\partial(\rho h)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} = 0 \quad (x, y, t) \in \Omega_1 \quad (1.1)$$

a

$$p(x, y, t) \geq 0 \quad (x, y, t) \in \Omega_2 \quad (1.2)$$

První dva členy rovnice jsou tlakové, tzv. Poiseuillovy. Třetí člen, tzv. Couetteův, popisuje tok maziva v mezeře způsobený pohybem kontaktních povrchů. Poslední člen rovnice je nestacionární a popisuje chování kapaliny v důsledku jejího stlačení. Výpočtovou oblast, která je ohraničena nulovými okrajovými podmínkami, znázorňuje obr. 1.1. Sestává z oblasti  $\Omega_1$ , ve které řešením rovnice (1.1) získáme rozložení tlaku, a oblasti  $\Omega_2$ , v níž kavitační podmínka (1.2) způsobí nulovou hodnotu tlaku. Hranici oddělení obou oblastí je definována až během výpočtu, dopředu ji nelze určit.



Obr. 1.1 Znáornění výpočetní oblasti řešení  $\Omega$ , kruhově je vyznačena kontaktní oblast [4]

**1.1.2 Rovnice elastických deformací**

Charakteristickým znakem EHD mazání je elastická deformace povrchu těles. Ta má za následek změnu tvaru mezery, kterou proudí mazivo, a tím také tloušťky mazacího filmu [4]. Rovnici popisující tento jev, lze zapsat v obecném nestacionárním tvaru:

$$h(x, y, t) = h_0(t) + \frac{x^2}{2R_x} + \frac{y^2}{2R_y} + d(x, y, t) + \frac{2}{\pi E'} \iint_{\Omega} \frac{p(x', y', t) dx' dy'}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}} \quad (1.3)$$

Prvním členem rovnice je počáteční aproximace přiblížení kontaktních povrchů. Druhý a třetí člen popisují nedeformovanou kontaktní geometrii pomocí rotačního elipsoidu s ekvivalentními poloměry křivosti obou kontaktních těles. Čtvrtý člen rovnice popisuje geometrii povrchové nerovnosti, např. vtisku nebo výstupku. Poslední člen rovnice vyjadřuje elastickou deformaci způsobenou kontaktním tlakem rozloženým v mazací vrstvě.

**1.1.3 Rovnice silové rovnováhy**

Na celé oblasti řešení musí být v silové rovnováze výslednice tlaku v mazací vrstvě  $p(x, y, t)$  a vnější zatížení kontaktu  $w$ . Rovnice rovnováhy pak ve výpočtu slouží jako kontrola hodnot tloušťky vrstvy maziva i tlaku. Lze ji zapsat ve tvaru:

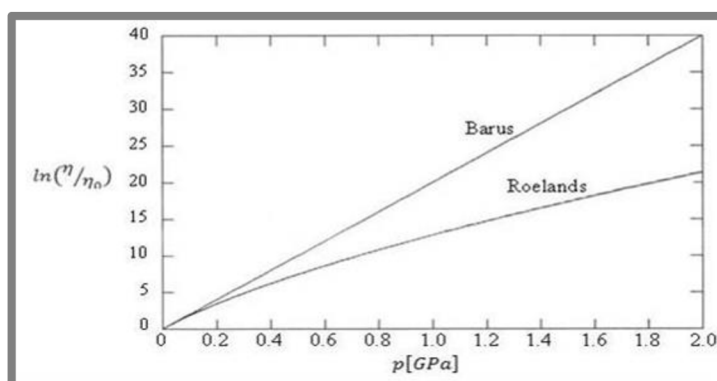
$$w = \iint_{\Omega} p(x', y', t) dx' dy' \quad (1.4)$$

**1.1.4 Rovnice změny viskozity v závislosti na tlaku**

Tlakově-viskózní chování maziva lze popsat nejjednodušeji pomocí Barusova vztahu [5]:

$$\eta(p) = \eta_0 \exp(\alpha p) \quad (1.5)$$

kde  $\eta_0$  je dynamická viskozita při atmosférickém tlaku a  $\alpha$  tlakově-viskózní koeficient pro danou teplotu a druh mazacího oleje.



Obr 1.2 Srovnání relativní viskozity  $\eta/\eta_0$  v závislosti na tlaku  $p$  pro Barusův a Roelandsův vztah [4]

Při řešení EHD mazání se však využívá složitější a přesnější (viz graf 1.1) Roelandsův vztah [6]:

$$\eta(p) = \eta_0 \exp \left( (\ln(\eta_0) + 9,67) \left( -1 + \left( 1 + \frac{p}{p_0} \right)^z \right) \right) \quad (1.6)$$

kde  $z$  je tlakově-viskózní index, který nabývá obvykle hodnoty 0,6 [4] a  $p_0$  konstantní hodnota tlaku o velikosti  $1,96 \cdot 10^8$  Pa [4].

### 1.1.5

#### 1.1.5 Rovnice změny hustoty v závislosti na tlaku

V EHD kontaktu dvou nekonformních povrchů nastávají vysoké tlaky, proto je nutné uvažovat vliv tlaku na hustotu maziva. Dowson a Higginson [7] stanovili pro tuto závislost vztah ve tvaru:

$$\rho(p) = \rho_0 \frac{5,9 \cdot 10^8 + 1,34 p}{5,9 \cdot 10^8 + p} \quad (1.7)$$

## 1.2

### 1.2 Přímé numerické metody

Přímé metody jsou charakteristické určováním hodnoty tlaku za daný odhad tloušťky mazací vrstvy. Na ověření správnosti výpočtu slouží rovnice silové rovnováhy (1.4).

### 1.2.1

#### 1.2.1 Gauss-Seidelova iterační metoda

V každém iteračním kroku Gauss-Seidelovy metody se stanovuje hodnota tlaku z Reynoldsovy rovnice (1.1) za danou aproximaci deformace. Hodnota deformace je po několika iteracích přepočítána, a pokud diskretizační chyba všech rovnic ve výpočtu nepřesáhne zvolenou toleranci, je výpočet ukončen. Pro řešení bodového kontaktu tuto metodu použili Hamrock a Dowson v roce 1976 [8], o 8 let později byl podán Hamrockem a Jacobsonem výpočet i pro liniový kontakt těles [9].

Gauss-Seidelova metoda se vyznačuje pomalou konvergencí a velkou výpočtovou náročností až  $O(n^3)$ , kde  $n$  je počet uzlových bodů a  $O$  vyjadřuje počet matematických operací (např. sčítání nebo násobení) v jednom kroku výpočtu pro jednu rovnici. Pozitivem této numerické metody jsou malé paměťové nároky a možnost přímočaré implementace modelu.

### 1.2.2

#### 1.2.2 Newton-Raphsonova metoda

U této metody jsou hodnoty derivací jednotlivých rovnic ukládány do Jacobiho matice. Poté je Jacobiho matice invertována a využita ve výpočtu nové aproximace. Newton-Raphsonovu metodu poprvé využil v roce 1982 Okamura k řešení soustavy nelineárních rovnic [10], čtyři roky na to prezentovali Houpert a Hamrock řešení liniového kontaktu [11]. Předností posledně jmenované práce byla možnost využití i pro vyšší zatěžovací tlaky.



Nevýhodou této metody je opět výpočetní náročnost až  $O(n^3)$ . Při vysokých zatíženích je také Jacobiho matice téměř singulární, což je velký problém při výpočtu jejího inverzního tvaru. S dobrou počáteční aproximací ale metoda konverguje již v průběhu několika iterací. Je vhodná především pro liniový kontakt těles.

### 1.3 Inverzní numerické metody

1.6

---

Charakteristikou těchto metod je výpočet tloušťky mazací vrstvy za daný odhad tlaku. Pro liniový kontakt předložili řešení již v roce 1959 Dowson a Higginson [12], dva roky na to rozšířil metodu i pro bodový kontakt Evans [13].

Stejně jako u klasických přímých numerických metod i metoda inverzní vykazuje velkou výpočtovou náročnost  $O(n^3)$ . Další nevýhodou je nutnost dobrého počátečního odhadu řešení. Na druhou stranu je zde jednoduchá implementace kavitační podmínky a malé nároky na paměť.

### 1.4 Vícevrstvé numerické metody

1.4

---

Problémem prvotních numerických metod byla především pomalá konvergence a vysoká výpočtová náročnost. Tyto problémy postupně začaly překonávat s rozvojem výpočetní techniky nové dokonalejší přímé metody.

#### 1.4.1 Vícevrstvá metoda

1.4.1

---

Průlomem byla v roce 1987 Lubrechtem prezentovaná metoda vícevrstvá, tzv. *multigridní* [14]. Základem je Gauss-Seidelova (kap. 1.2.1) nebo Jacobiho metoda, avšak je využito vícero výpočtových sítí. Podle rychlosti konvergence se výpočet přesouvá pomocí operátorů restrikce a interpolace mezi jemnou a hrubou výpočtovou sítí.

Použití většího počtu sítí má za následek zrychlení konvergence. Vícevrstvá metoda také dosahuje výpočtové náročnosti  $O(n \ln(n))$ , která je mnohem nižší, než u předchozích numerických metod. Na základě tohoto faktu lze vícevrstvou metodu považovat u simulací EHD kontaktů za velmi rozšířenou.

#### 1.4.2 Víceúrovňová vícenásobná integrace

1.4.2

---

V roce 1991 vícevrstvou metodu (kap. 1.2.1) doplnil Venner [15] o vícenásobnou numerickou integraci (*multi-level multi integration*) elastických deformací v rovnici (1.9). Tím bylo dosaženo dalšího urychlení výpočtu a zároveň bylo umožněno použití většího počtu diskretních bodů. Výpočtová náročnost je stejná jako u vícevrstvé metody, tedy  $O(n \ln(n))$ .

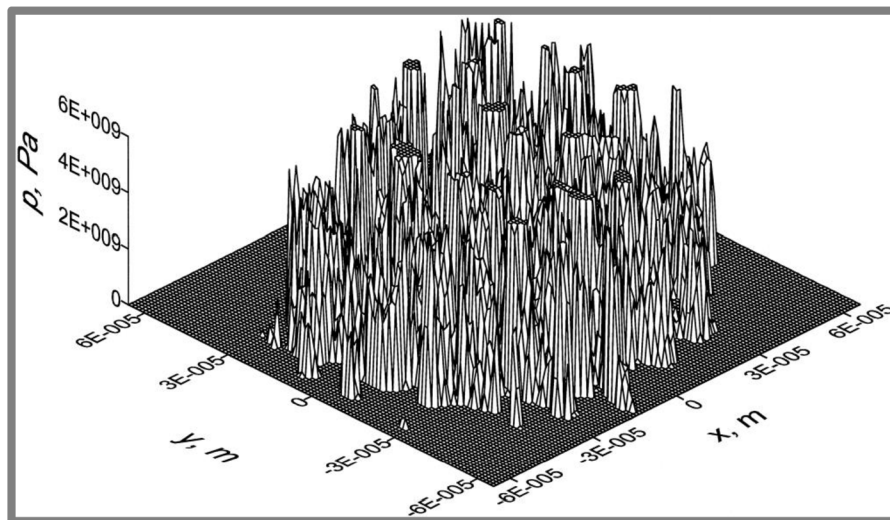
#### 1.4.3 Metoda sdružených gradientů

1.4.3

---

Polonsky a Keer [16] nahradili ve vícevrstvé metodě Gauss-Seidelovu iteraci (kap. 1.2.1) metodou sdružených gradientů. Ta se používá pro řešení systému lineárních algebraických rovnic, kde matice systému je symetrická a pozitivně definitivní.

Výhoda metody spočívá především v její konvergenci i pro modely s povrchovými nerovnostmi, jak je patrné např. na obr. 1.3.



Obr. 1.3 Rozložení tlaku v kontaktu nehladkých povrchů určené pomocí metody sdružených gradientů (výpočetní oblast o velikosti 121 x 103 uzlových bodů) [16]

## 1.5

### 1.5 Fully coupled

Tyto numerické metody jsou význačné tím, že Reynoldsova rovnice (1.1) je řešena spolu s rovnicí elastických deformací (1.2) simultánně.

#### 1.5.1

##### 1.5.1 Diferenciálně-deformační metoda

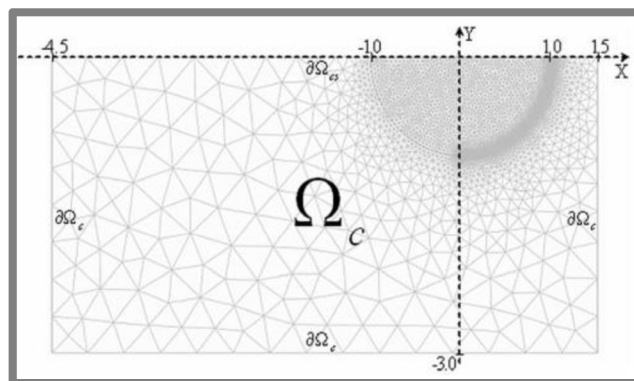
Diferenciálně deformační metodu (*differential deflection method* – DDM) představili v roce 2000 Evans a Hughes [17]. Souběžné řešení Reynoldsovy rovnice (1.1) a rovnice elastických deformací (1.2) vede k zaplnění matice koeficientů elastických deformací. Tento problém pak řeší právě DDM, protože jejím použitím dochází v matici koeficientů k eliminaci velkého množství nenulových členů. Správnost metody ve své práci úspěšně ověřili Holmes a kol. pro stacionární i přechodové děje [18, 19].

#### 1.5.2

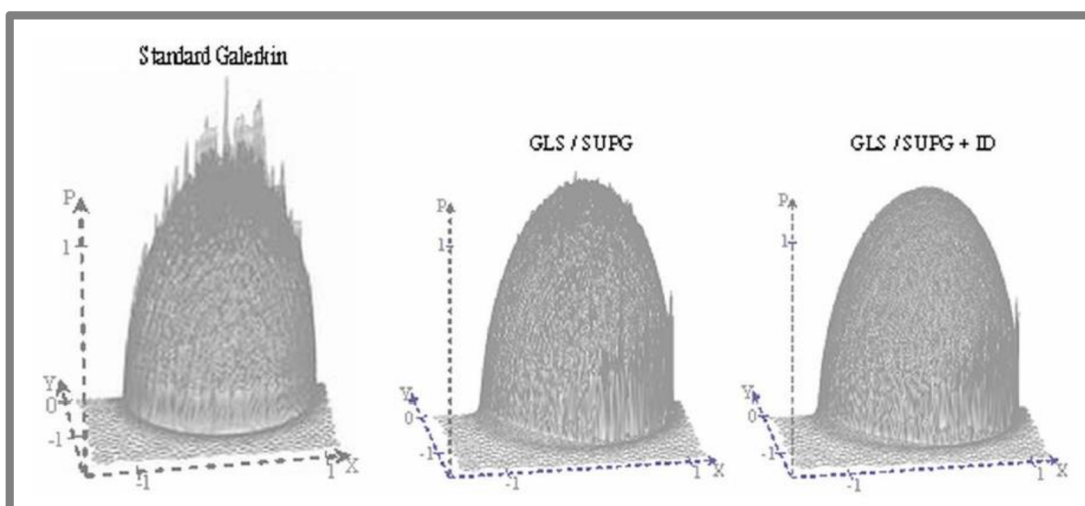
##### 1.5.2 Full system approach – Metoda konečných prvků

Řešení rovnic (1.1) a (1.2) probíhá ve full system approach přístupu v jednom iteračním kroku Newton-Raphsonovou metodou. Ta používá diskretizační schéma metody konečných prvků (MKP). Na začátku výpočtu je provedena aproximace přiblížení těles, výsledek se po jednotlivých iteracích vždy ověří podle podmínky silové rovnováhy. Není-li tato podmínka splněna, je provedena další iterace s novým odhadem přiblížení těles.

Poprvé prezentovali výpočet EHD kontaktu těles pomocí MKP v roce 2007 Habchi a kol. [20]. Z práce plyne hned několik výhod zvolené metody. Je to jak především výrazná redukce počtu stupňů volnosti, tak také možnost zjemnění sítě v oblasti kontaktu těles (obr. 1.4).

Obr. 1.4 Konečnoprvková síť v kontaktní oblasti  $\Omega_C$  [20]

Porovnání různých MKP formulací pro EHD kontakt lze nalézt v [21]. Konkrétně jde o tzv. formulaci Garlekinovu, která je následně zkombinována s metodou nejmenších čtverců a upwind diskretizací (GLS/SUPG), resp. jsou přidány difúzní členy (GLS/SUPG+ID). Posledně jmenovaná formulace je vhodná pro bodový kontakt (obr. 1.5), pro liniový stačí GLS/SUPG formulace [21].



Obr. 1.5 Kontaktní tlak v bodovém kontaktu s použitím různých MKP formulací: Garlekinovy, GLS/SUPG a GLS/SUPG+ID [21]

Na rozdíl od jiných numerických metod je u tohoto přístupu Jacobiho matice řídká, čímž dochází ke snížení výpočtového času. Další výhodou je již zmíněná variabilita při tvorbě konečnoprvkové sítě v místech strategických pro výpočet, viz obr. 1.4. Předností je také dostupnost komerčních MKP software a implementovaných vyspělých fyzikálních modelů.

## 1.6 Computational fluid dynamics

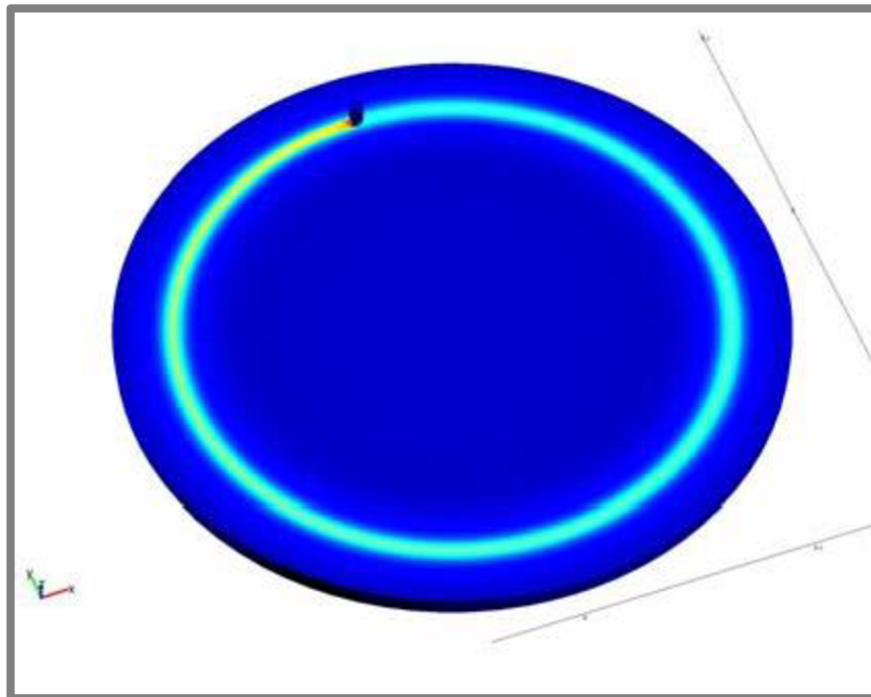
Pojmem *Computational fluid dynamics* (CFD) rozumíme problematiku matematického modelování a numerického řešení úloh proudění tekutin. Využití metod CFD u modelování EHD jeví se poměrně novodobou záležitostí a zatím existuje jen malé množství prací k tomuto tématu.

Almqvist a Larsson využili tuto metodu při tvorbě termálního liniového kontaktu dvou hladkých těles [22]. Při modelování je použito místo Reynoldsovy rovnice (1.1) rovnic Navier-Stokesových. Dále ve výpočtu figuruje rovnice kontinuity a v případě rozšíření modelu o termální vliv také rovnice zachování energie. Bylo zjištěno, že pro liniový kontakt dvou těles s hladkým povrchem je tato metoda vhodná do tlaku o maximální velikosti jen 0,7 GPa [22]. Mezi další nedostatky patří například vysoká výpočtová náročnost. Naopak velkou výhodou je možnost rozšíření výpočtové oblasti a modelování toku maziva i v okolí kontaktu.

## 1.7

### 1.7 Komerční MKP software a tribologie

Franek a kol. ve své práci [23] podávají přehled několika komerčně dostupných simulačních software ve vztahu k tribologii a jejím specifickým problémům. Je brán zřetel na geometrii, materiálové charakteristiky i chemické procesy a pro jednotlivé simulační software byly komplexně zmapovány jejich možnosti. Software COMSOL se jeví jako schopný a intuitivní nástroj pro numerickou analýzu EHD kontaktu, jeho využití je demonstrováno na výpočtu teplotních změn v disku při experimentální konfiguraci pin-on-disk (obr. 1.6).



Obr. 1.6 Změna teploty v disku při experimentální konfiguraci pin-on-disk [23]

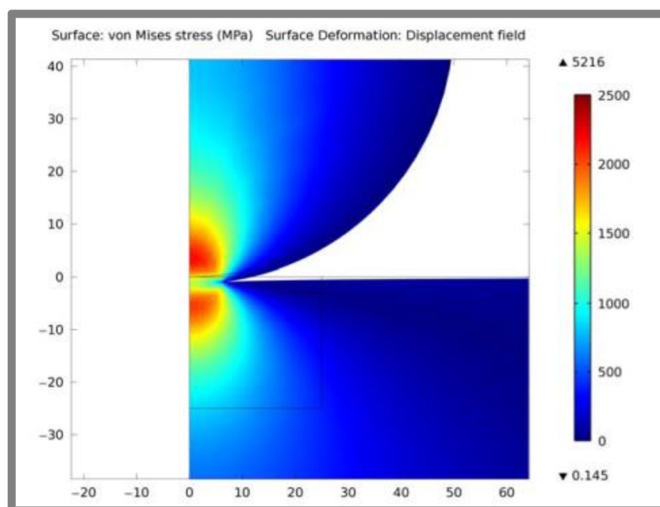
## 1.8

### 1.8 Kontakt těles v software COMSOL

S rozvojem MKP software se objevily postupně první jednoduché simulace v software COMSOL zaměřené na kontaktní úlohy, později je následovaly komplexnější výpočty.

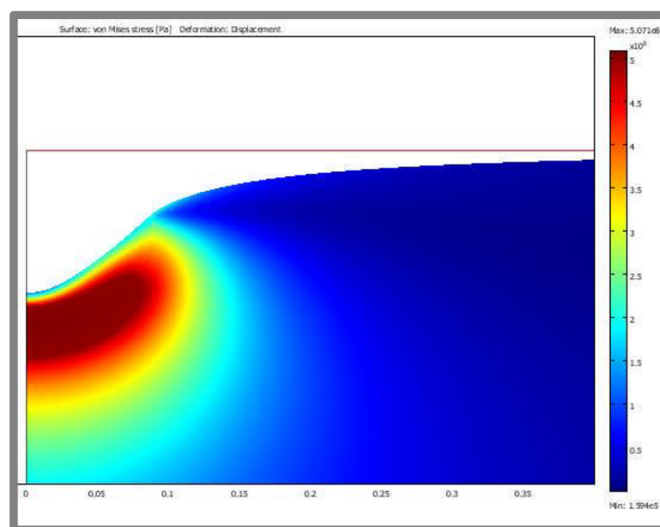
### 1.8.1 Základní kontaktní úlohy

Pennec a kol. ve své práci z roku 2007 [24] podávají první ověření možnosti modelování kontaktních úloh v software COMSOL, verze 3.3. Výpočet je proveden pro statický Hertzův liniový kontakt válce a desky, pro styk rigidního a deformovatelného tělesa a pro jednoduchou multifyzikální úlohu s vedením elektrického proudu. V těchto nenáročných aplikacích se ukazuje relativně dobrá shoda s analytickým výpočtem, avšak starší verze programu nepodporovala například využití axiální symetrie nebo zavedení elasto-platického modelu materiálu pro kontaktní úlohy [24]. Stejná triviální úloha statického liniového Hertzova kontaktu je řešena v COMSOLU i v novější verzi 4.2 v rámci oficiálních kontrolních modelů pro strukturální mechanický modul, viz obr. 1.7 [25].



Obr. 1.7 Napětí v kontaktu desky a válce [25]

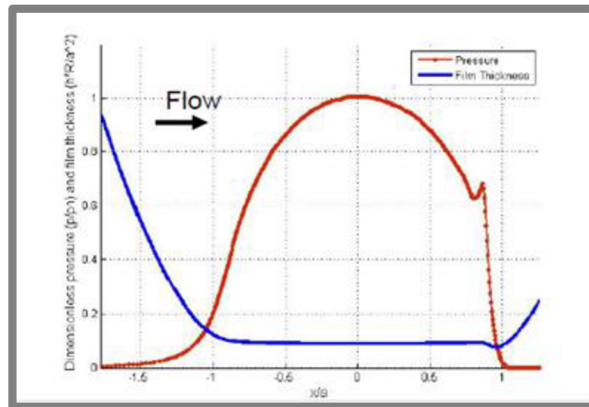
Jednoduché kontaktní úlohy řešené v programu COMSOL lze nalézt na webových stránkách Hartfordské univerzity. Jedná se například o 2D model tělesa zatíženého tuhým razníkem, viz obr. 1.8 [26]. Jejich autorem je Shi a byly vypracovány v rámci podpor pro předmět Friction and Wear of Materials.



Obr. 1.8 Napětí v tělese po zatížení tuhým razníkem [26]

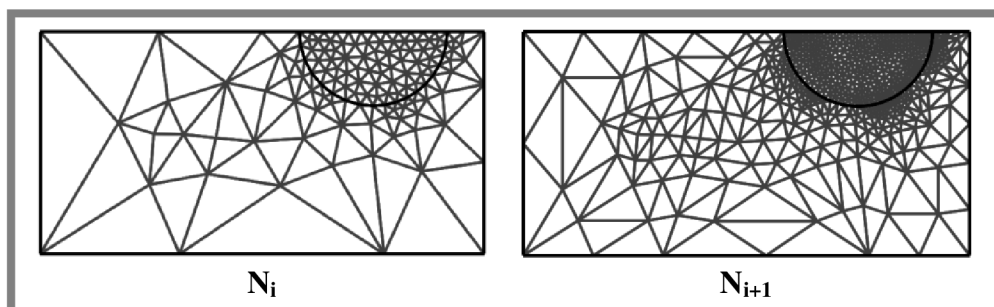
**1.8.2 Pokročilé numerické modely**

První významnější výpočet kontaktní úlohy v software COMSOL byl předložen na COMSOL Conference 2009 v Miláně [27]. Jedná se o simulaci bodového EHD kontaktu koule a desky (viz obr 1.9). Reynoldsova rovnice je do modelu zavedena pomocí tzv. PDE modulu, který umožňuje implementaci parciálních diferenciálních rovnic.

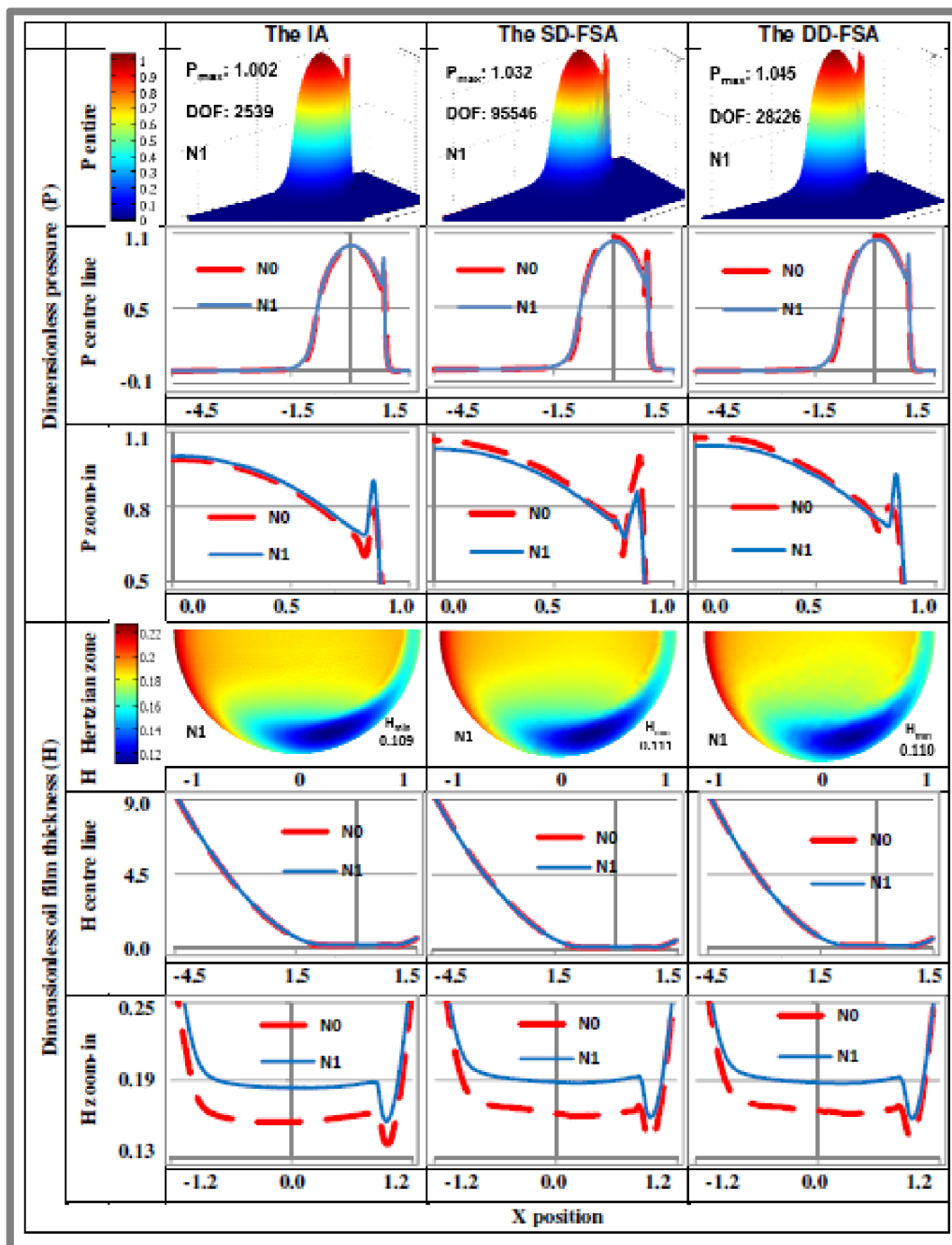


**Obr. 1.9** Rozložení tlaku a tloušťka maziva v bodovém kontaktu – simulace provedená Fillotem, Doki-Thononem a Habchim v software COMSOL [27]

Významný posun pak znamenala v roce 2012 práce Tana a kol. [28]. Jedná se o dosud nejkompaktnější studii EHD kontaktu v software COMSOL. Je porovnáváno několik přístupů k výpočtu deformace: pod zkratkou IA víceúrovňová vícenásobná integrace (viz kap. 1.4.2) a s ní tzv. *single domain full-system approach* (SD-FSA), resp. *double domain full-system approach* (DD-FSA). V obou případech se jedná o přístup popsany v kapitole 1.5.2, u prvně jmenovaného SD-FSA je však užita jen jedna výpočtová oblast pro pevné těleso, zatímco u DD-FSA je spolu s ní využita i zvláštní druhá výpočtová oblast pro mazivo. Byl vytvořen statický model pro bodový i liniový kontakt dvou těles, transientní výpočtový model pak zahrnuje pouze liniový kontakt. Ukazuje se, že všechny metody vedou k uspokojivým výsledkům, avšak zejména pro bodový kontakt vykazují ve srovnání s liniovým odlišnou časovou náročnost výpočtu. Na obrázku 1.11 je srovnání výsledků výpočtů jednotlivými přístupy pro bodový EHD kontakt dvou těles. Výpočty byly realizovány pro různě hustou konečnoprvkovou síť, viz obr. 1.10. Z práce pak také vyplývá nutnost stanovení velmi přesných hodnot parametrů vstupujících na počátku do výpočtu.



**Obr. 1.10** Různě hustá konečnoprvková síť pro statický výpočtový model v [28]

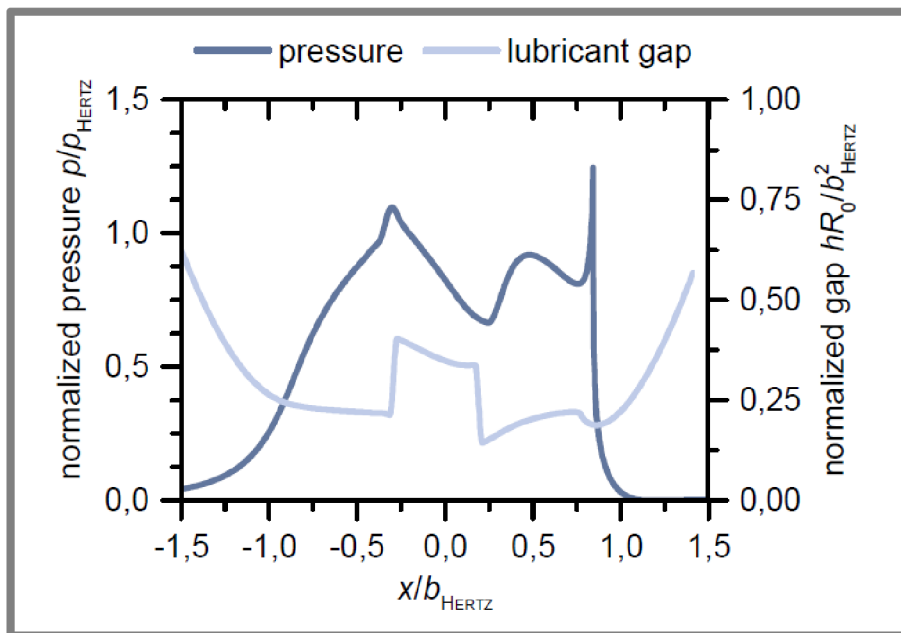


Obr. 1.11 Srovnání bezrozměrného tlaku a tloušťky maziva v bodovém kontaktu pro různé hustoty konečnoprvkovou síť a různé přístupy: IA, SD-FSA a DD-FSA [28]

Další obsáhlou publikovanou prací z oblasti tribologie, která byla vypracována v software COMSOL, je diplomová práce Råfolske z roku 2013 [29]. Ta byla vytvořena pod vedením profesora Larssona a zabývá se modelováním chování maziva v radiálním kluzném ložisku spalovacího motoru. Zde se však už nejedná o EHD kontakt, ale o hydrodynamické mazání. Práce však poskytuje dobrý vhled na problematiku implementace jevů jako je nelineární chování maziva nebo kavitace do výpočtového modelu.

V dubnu roku 2014 byla vydána také práce Szávaiho a Kovácse [30]. Autoři uvádějí výpočet liniového kontaktu, avšak kvůli numerické nestabilitě se nepodařilo dosáhnout konvergence řešení. Hodnota Hertzova tlaku také neodpovídá kontaktu liniovému, ale bodovému. Veškeré vstupní parametry jsou stanovovány s přesností na šest desetinných míst. Vypovídající hodnota této práce tedy tkví především spíše v informaci o zjevné náchylnosti numerického výpočtu na přesnost jednotlivých parametrů.

Poslední významný posun v řešení problematiky EHD mazání v software COMSOL přinesla nejnovější práce Weschty a kol. publikovaná na konci roku 2014 [31]. S využitím modelu z [27] byla provedena simulace kontaktu s upravenou topologií povrchu, viz graf na obr. 1.12.



Obr. 1.12 Bezrozměrný tlak a tloušťky maziva v liniovém kontaktu při čistém valení; mikrostruktura ve středu kontaktu [31]



## 2 ANALÝZA PROBLÉMU A CÍL PRÁCE

2

### 2.1 Formulace problému a jeho analýza

2.1

Z rešeršní studie vyplývá, že existuje mnoho numerických metod a přístupů k řešení EHD kontaktu dvou těles. Tyto metody se vyznačují různou náročností a také omezeními, zejména co se týče velikosti zatížení (viz např. Newton-Raphsonova metoda kap. 4.2.2 nebo CFD kap. 4.6).

Nejjednodušší přímé metody (kap. 4.2) mají malé paměťové nároky a jsou lehce implementovatelné. Na druhou stranu je pro ně typická vysoká výpočtová náročnost, proto se samostatně nepoužívají.

Inverzní metody (kap. 4.3) se vyznačují zejména jednoduchým zavedením kavitační podmínky a nevelkými nároky na paměť. Nevýhodou je nutnost dobrého počátečního odhadu řešení a opět velká výpočtová náročnost.

Využitím většího počtu výpočtových sítí vznikly vícevrstvé metody (kap. 4.4). Přinesly zrychlení konvergence i rapidní snížení výpočtové náročnosti. Jejich postupný vznik znamenal spolu s rozvojem výpočetní techniky výrazný posun v oblasti numerických simulací tribologických dějů. Zvláště efektivní a stabilní je víceúrovňová vícenásobná integrace (kap. 4.4.2).

Spolu s rozvojem MKP a nárůstem výkonu počítačů mohly také vzniknout fully coupled metody (kap. 4.5), z nichž vyniká *full system approach* (kap. 4.5.2). Je v něm použito diskretizační schéma metody konečných prvků a výhodou je především řešení tlaku i tloušťky mazací vrstvy v jednom kroku, nízká výpočtová náročnost a možnost adaptace konečnoprvkové sítě.

Existují i první CFD simulace, které umožňují modelovat tok maziva i v okolí EHD kontaktu (kap. 4.6). Vyznačují se ale vysokou výpočtovou náročností a omezením maximální velikostí kontaktního tlaku.

Základem této práce byl *full system approach*. Lze ho s úspěchem využít spolu s komerčně dostupnými MKP software. Odpadají tak problémy související s programováním a nutností rozsáhlých znalostí z oblastí matematiky.

Pro tvorbu výpočtového modelu byl v této diplomové práci vybrán MKP software COMSOL, jehož licencí Ústav konstruování FSI disponuje. Na základě další rešerše bylo zjištěno, že tento program umožňuje implementaci Reynoldsovy rovnice (viz. [27]), tvorbu kontaktu bodového i liniového a modelu statického i transientního (viz. [28]). Stejně tak lze do numerického modelu zavést dynamické zatížení, kavitační podmínku, newtonské chování maziva i vliv nerovností povrchu [29, 31].

### 2.2 Cíle práce

2.2

Cílem práce tedy je vytvoření výpočtového modelu elastohydrodynamického kontaktu s využitím metody konečných prvků v programu COMSOL. V rámci práce byla provedena analýza vlivu některých provozních podmínek na průběh kontaktního tlaku a tloušťku vrstvy maziva. Dále bylo analyzováno využití modulu PDE (viz kap. 1.8.2) a nově dostupného modulu Thin-Film Flow, ve kterém jsou již Reynoldsova rovnice (1.1) i rovnice elastických deformací (1.3) přímo implementovány.

### 2.3 Postup řešení

V první fázi proběhlo detailnější seznámení se softwarem COMSOL. Bylo absolvováno množství odborných seminářů a školení ve firmě HUMUSOFT s.r.o., která tento software distribuuje v České republice. Tato prvotní fáze byla velmi důležitá, neboť byl utvořen přehled funkcí daného software, na základě kterého vyplynul i další postup řešení problematiky diplomové práce.

Nová verze programu obsahuje v rámci knihovny Fluid Flow modul Thin-Film Flow, do kterého jsou přímo zavedeny Reynoldsova rovnice (1.1) i rovnice elastických deformací (1.3) a který je dle popisu určen přímo pro simulace mazání, elastohydrodynamického kontaktu a tlumení při uvažování tenkého mazacího filmu. Jelikož prostředí tohoto modulu je relativně intuitivní a dosud nebyla publikována žádná práce s jeho využitím, byl nejprve sestaven výpočetní model, ve kterém byl tento modul aplikován. Spolu s modulem Solid Mechanics byl vytvořen 3D model bodového kontaktu a 2D model liniového kontaktu. U bodového kontaktu bylo využito okrajových podmínek pro symetrii. Při určování výchozích hodnot jednotlivých parametrů výpočtu je užitečné vycházet z údajů získaných na základě rešeršní studie. Z výsledků, které byly následně důkladně analyzovány, vyplynuly určité problémy, které znemožnily další postup v práci, viz dále kap. 4.

Z tohoto důvodu byl následně vytvořen 3D model bodového kontaktu a 2D model liniového kontaktu s využitím modulu PDE. Ukázalo se, že výpočet bodového kontaktu v dostatečném časovém rozpětí není možný z důvodu příliš velkých výpočetních nároků, pozornost tedy byla zaměřena na liniový kontakt. Bylo provedeno množství numerických simulací s cílem verifikovat výpočtový model na dosud publikovaných pracích a analyzovat tloušťku vrstvy maziva a průběh kontaktního tlaku při různých provozních podmínkách. Důraz byl také kladen na modifikovatelnost modelu, aby jej bylo v budoucnu možné i dále rozšiřovat.

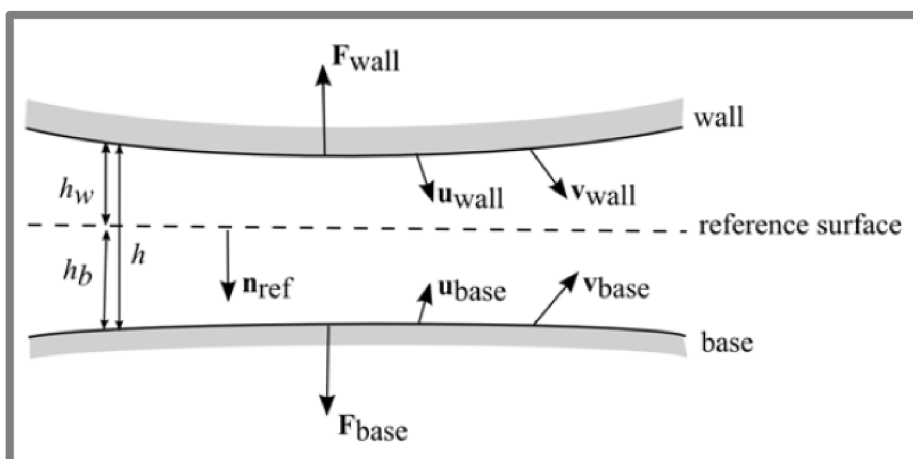
### 3 MATERIÁL A METODY

Od verze 5.0 nabízí COMSOL dva různé způsoby modelování elasto-hydrodynamického mazání. Prvním je použití modulu Thin-Film Flow určeného k řešení této problematiky, druhým je zavádění Reynoldsovy rovnice pomocí modulu PDE. Všechny rovnice v této kapitole jsou uváděny ve stacionárním tvaru.

#### 3.1 Modul Thin-Film Flow

V knihovně modulů pro modelování proudění tekutin se modul Thin-Film Flow objevuje již od verze programu 4.4, avšak až od verze 5.0 je doplněn i o kavitační podmínku.

Na obr. 3.1 je znázorněno označení proměnných vstupujících do výpočtu tak, jak jsou v modulu Thin-Film Flow nadefinovány. Jako *wall* a *base* jsou označeny jednotlivé povrchy těles, mezi nimi je umístěna referenční rovina. Každé ploše je přidělena jedna normála  $n$ , povrchům těles pak také silové zatížení  $F$  a rychlost  $v$ . Vzdálenost obou povrchů je potom označena jako  $h$  a skládá se ze součtu vzdáleností povrchů od referenční roviny.



Obr. 3.1 Označení proměnných vstupujících do výpočtu při použití modulu Thin-Film Flow [32]

Proložením jednotlivých ploch referenčním válcem, jehož osa je kolmá k referenční rovině, lze pak proudění v ohraničené oblasti v referenční ploše popsat pomocí rovnice:

$$\frac{d}{dt}(\rho h) = -\nabla_t \cdot (\rho h v_{av}) \quad (3.1)$$

Jedná se o zápis Reynoldsovy rovnice (1.1), kde  $v_{av}$  je průměrná rychlost maziva v referenční ploše,  $\rho$  hustota maziva a  $h$  celková tloušťka mazací vrstvy. Ta se spočítá jako:

$$h = h_w + h_b \quad (3.2)$$

kde  $h_w$  a  $h_b$  jsou vzdálenosti jednotlivých povrchů od referenční plochy, viz obr. 3.1.

Obě dvě vzdálenosti jsou nadefinovány pomocí počátečních hodnot  $h_{w1}$  a  $h_{b1}$  a normálových vektorů (viz obr. 3.1) dle vztahů:

$$h_w = h_{w1} - u_{wall} \cdot n_{ref} - u_{wall} \cdot \nabla_t h_{w1} \quad (3.3)$$

$$h_b = h_{b1} - u_{base} \cdot n_{ref} - u_{base} \cdot \nabla_t h_{b1} \quad (3.4)$$

Jako  $u$  je označena příslušná deformace povrchu. Rovnice (3.3) a (3.4) tedy popisují společně tloušťku maziva a jejich součet dává stejný výsledek jako rovnice elastických deformací (1.3).

Rychlost proudění maziva  $v_{av}$  je v modulu Thin-Film Flow nadefinována jako:

$$v_{av} = \frac{1}{2}(v_{wall,t} + v_{base,t}) - g \frac{h^2}{12\mu} \nabla_t p_f \quad (3.5)$$

kde  $\mu$  je viskozita dle Barusova (1.5) nebo Roelandsova vztahu (1.6) a  $p_f$  hodnota kontaktního tlaku. Ta po přičtení hodnoty atmosférického tlaku dává celkovou hodnotu absolutního tlaku  $p_A$ .

Jako  $g$  je označena tzv. spínací funkce, pomocí níž je ošetřena ve výpočtu kavitační podmínka (1.2). Ta vychází z modifikované verze Elrodova algoritmu [33] a automaticky predikuje místa, kde ke kavitaci dochází. V této oblasti je následně hodnota druhého členu v rovnici (3.5) nulová. Spínací funkce je zapsána v modulu Thin-Film Flow ve tvaru:

$$g = flch2(p_f, \Delta p_{sw}) \quad (3.6)$$

kde  $\Delta p_{sw}$  je šířka kavitačního přechodu, pomocí níž lze působení kavitační podmínky upravovat a řídit. Implicitně je její hodnota nastavena na 1 MPa. Jako  $flch2$  je označena vyhlazená verze Heavisideovy funkce se spojitou druhou derivací [32]. První člen v argumentu udává počáteční hodnotu proměnné, druhý člen velikost kroku k další hodnotě dané proměnné. V modulu Thin-Film Flow je Heavisideova funkce definována na intervalu  $-\Delta p_{sw} < p_f < \Delta p_{sw}$  polynomem šestého řádu. Pro  $p_f < -\Delta p_{sw}$  nabývá tato funkce hodnoty 0, a pro  $p_f > \Delta p_{sw}$  hodnoty 1 [32].

V kavitační podmínce je v modulu Thin-Film Flow implementován vztah pro změnu hustoty v závislosti na tlaku ve tvaru:

$$\rho = \rho_c e^{\beta p_f} \quad (3.7)$$

kde  $\beta$  je kompresibilita a  $\rho_c$  hustota při kavitačním tlaku. Obě veličiny jsou zvlášť dané pro každé mazivo. Tato rovnice (3.7) se diametrálně liší od běžně využívaného vztahu (1.7).

Rovnice změny viskozity v závislosti na tlaku (1.6) je do výpočtového modelu zavedena pomocí proměnných. Pro implementaci rovnice silové rovnováhy (1.4) je využito v COMSOLu tzv. globální rovnice neboli *global equation*. Pomocí ní lze jakýkoliv výpočtový model modifikovat o další rovnice, okrajové podmínky nebo zatížení. Elastická deformace povrchu a vnější zatížení jsou do modelu

zavedeny pomocí modulu Solid Mechanics. Aby došlo ke zmenšení výpočtové náročnosti modelu, bylo vytvořeno pouze jedno těleso, na které bylo následně aplikováno pouze vnější zatížení. Pro kompenzaci rozdílné hodnoty Youngova modulu  $E$  a Poissonova poměru  $\nu$  obou těles je v modelu využito tzv. ekvivalentního Youngova modulu:

$$E' = \frac{2E_1E_2}{E_1(1 - \nu_2^2) + E_2(1 - \nu_1^2)} \quad (3.8)$$

Ve výpočtu je také nutné kvůli stanovení počáteční aproximace tlaku (viz dále kap. 3.4) určit hodnotu Hertzova tlaku pro statický kontakt těles. K tomu je použito proměnných. Hertzův tlak pro bodový kontakt je vyjádřen vztahem [34]:

$$p_h = \frac{3F}{2\pi a^2} \quad (3.9)$$

Pro výpočet Hertzova tlaku v liniovém kontaktu platí vztah [34]:

$$p_h = \frac{2F}{\pi a l} \quad (3.10)$$

kde  $l$  délka kontaktní oblasti a  $a$  polovina šířky kontaktní oblasti. U 2D modelu liniového kontaktu je zatížení definováno v ( $\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$ ) a proměnná  $l$  ze vzorce vypadne.

### 3.2 Modul PDE

Při implementaci Reynoldsovy rovnice (1.1) pomocí modulu PDE je s výhodou využíváno tzv. slabé formulace parciálních diferenciálních rovnic, neboli *weak form*. Použitím slabé formulace dochází k převodu rovnice z diferenciálního do integrálního tvaru. Hlavním důvodem této úpravy je následné snížení výpočtové náročnosti algoritmu při vyčíslování derivací [35]. Diferenciální rovnici v integrálním tvaru je dále tedy nutné integrovat přes určité meze. Hodnoty v jednotlivých částech této oblasti se ale mohou zásadně lišit svou velikostí, proto je nutné provést vzorkování na celém integračním intervalu. To může být provedeno vynásobením integrované funkce váhovou funkcí, která je netriviální pouze v úzkém rozmezí hodnot. Tato váhová funkce je v PDE modulu označena jako tzv. testovací funkce (*test function*) a dochází pomocí ní tedy k integraci po částech a redukci diferenciálního řádu [35]. Testovací funkci lze zapsat ve tvaru [36]:

$$b = \text{test}(u) \quad (3.11)$$

kde  $u$  je hledaná proměnná a  $b$  je testovací funkce, která je její derivací. Parciální derivaci testovací funkce je pak možno zapsat jako:

$$\frac{\partial b}{\partial x} = \text{test}(ux) \quad (3.12)$$

Při použití modulu PDE také lze pro zjednodušení výpočtu využívat přednostně bezrozměrného parametru souřadnice  $X$  a hledaných proměnných tlaku  $P$  a tloušťky maziva  $H$  [37]. Ty jsou vztaženy k tlaku  $p$  a tloušťce maziva  $h$  z rovnic (1.1) a (1.3), k hodnotě Hertzova tlaku pro jednotlivé typy kontaktu  $p_h$ , poloměru Hertzova kontaktu  $a$ , redukovanému poloměru křivosti  $R_x$  a jsou dány dle [37] vztahy:

$$X = \frac{x}{a} \quad (3.13)$$

$$P = \frac{p}{p_h} \quad (3.14)$$

$$H = \frac{hR_x}{a^2} \quad (3.15)$$

Redukovaný poloměr křivosti  $R_x$  v sobě zahrnuje poloměr křivosti obou kontaktních povrchů ve směru osy  $x$  a je vyjádřen dle [37] vztahem:

$$\frac{1}{R_x} = \frac{1}{R_{1x}} + \frac{1}{R_{2x}} \quad (3.16)$$

Hodnotu bezrozměrného tlaku  $P$  je pak následně nutné ještě v rovnicích pro změnu viskozity (1.6) a hustoty (1.7) v závislosti na tlaku vynásobit hodnotou Hertzova tlaku  $p_h$ . Obě tyto rovnice jsou do modelu zavedeny pomocí proměnných.

Vydeme-li z těchto poznatků a zápisu Reynoldsovy rovnice (3.1), můžeme následně pro 2D model liniového kontaktu popsat proudění maziva Reynoldsovou rovnicí zapsanou ve tvaru:

$$-\int_{\Omega} \varepsilon \nabla P \cdot \nabla \text{test}(P) d\Omega + \int_{\Omega} (\rho H) \cdot \frac{\partial \text{test}(P)}{\partial X} d\Omega = 0 \quad (3.17)$$

kde  $P$  je bezrozměrná hodnota tlaku,  $H$  bezrozměrná tloušťka maziva,  $\rho$  hustota maziva dle vztahu (1.7) a  $\Omega$  výpočetní oblast (viz obr. 1.1, kap. 1.1.1). Parametr  $\varepsilon$  je vyjádřen dle [37] jako:

$$\varepsilon = \frac{\rho H^3}{\eta \lambda} \quad (3.18)$$

Bezrozměrný parametr rychlosti  $\lambda$  je pak nadefinován dle [37] jako:

$$\lambda = \frac{6\eta_0 u_s R_x^2}{a^3 p_h} \quad (3.19)$$

kde  $u_s$  je suma rychlostí pohybu obou kontaktních povrchů.

Kavitační podmínku je vhodné zavést pomocí tzv. penalty faktoru, jehož lze s výhodou pro elastohydrodynamické mazání využít. Tuto metodu popisuje

ve své práci Wu [37] a příslušná podmínka je platná pouze v oblasti, kde se díky kavitaci objevují záporné hodnoty tlaku  $P$ . Zvětšováním hodnoty penalty faktoru  $P_f$  je zmenšována absolutní hodnota záporného tlaku, avšak při jeho příliš velké velikosti je numerický výpočet špatně podmíněn [37]. Na základě rešerše byla jeho hodnota volena z intervalu  $[10^4; 10^8]$ . Zavedením penalty faktoru do rovnice (3.17) získáme Reynoldsovu rovnici ve tvaru:

$$-\int_{\Omega} \varepsilon \nabla P \cdot \nabla \text{test}(P) d\Omega + \int_{\Omega} (\rho H) \cdot \frac{\partial \text{test}(P)}{\partial X} d\Omega - \int_{\Omega} P_f \cdot P_{\min} \text{test}(P) d\Omega = 0 \quad (3.20)$$

kde

$$P_{\min} = \min(0, P) \quad (3.21)$$

Protože samotná Reynoldsova rovnice je pro vysoké tlaky nestabilní a v průběhu tlaku  $P$  lze pozorovat oscilace (viz kap. 1.5.2 a obr. 1.5), je vhodné doplnit ji o isotropickou difuzi popsanou v [21], která povede k její stabilizaci. Modifikací dle [28] dostáváme výslednou Reynoldsovu rovnici ve tvaru:

$$-\int_{\Omega} \varepsilon \nabla P \cdot \nabla \text{test}(P) d\Omega + \int_{\Omega} (\rho H) \cdot \frac{\partial \text{test}(P)}{\partial X} d\Omega - \int_{\Omega} P_f \cdot P_{\min} \text{test}(P) d\Omega - \int_{\Omega} C_s h_e \eta \nabla P \cdot \nabla \text{test}(P) d\Omega = 0 \quad (3.22)$$

kde  $h_e$  je bezrozměrná velikost prvku konečnoprvkové sítě a  $C_s$  konstantní ladící parametr, jehož velikost se pohybuje v rozmezí  $< 10^{-5}; 10^{-7} >$ .

Rovnice silové rovnováhy (1.4) je do výpočtového modelu zaváděna v bezrozměrném tvaru pro 2D výpočet dle [37]:

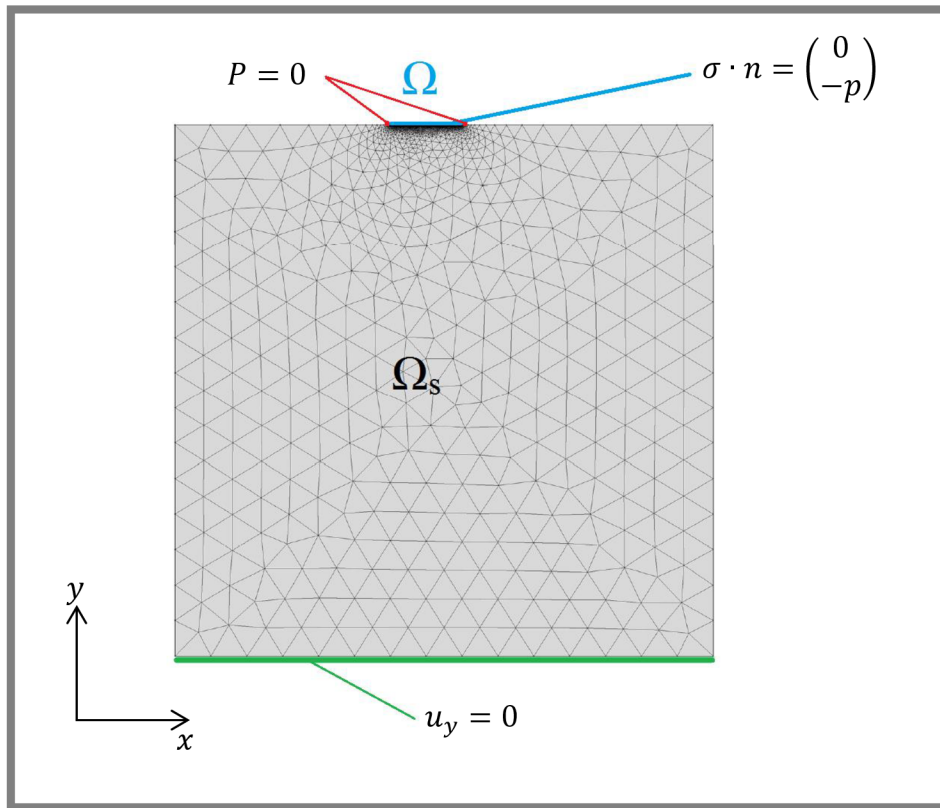
$$\int_{\Omega} P d\Omega - \frac{\pi}{2} = 0 \quad (3.23)$$

Elastická deformace povrchu a vnější zatížení jsou do modelu opět implementovány pomocí modulu Solid Mechanics. V modelu je znovu využito ekvivalentního Youngova modulu (3.8).

### 3.3 Okrajové podmínky

Pro Reynoldsovu rovnici (1.1) je jediná aplikovaná okrajová podmínka pro tlak  $P = 0$  na okrajích výpočetní oblasti s mazivem  $\Omega$ . Ve výpočetní oblasti  $\Omega$  je také definováno normálové napětí  $\sigma$  vznikající od tlaku  $p$ , viz obr. 3.2. Jako  $n$  je označen normálový vektor směřující ven, tedy v kladném směru osy  $y$ . Na spodní hranici

výpočtové oblasti pevného tělesa  $\Omega_s$  je použito podmínky  $u_y = 0$  zamezující posuv ve vertikálním směru, tedy ve směru osy  $y$ , viz opět obr. 3.2.



Obr. 3.2 Okrajové podmínky pro 2D model liniového kontaktu

V případě 3D modelu bodového kontaktu byla navíc na dělicí rovinu aplikována podmínka symetrie.

### 3.4

#### 3.4 Počáteční aproximace tlaku a přiblížení těles

Aby bylo dosaženo konvergence a stability numerického výpočtu, je nutné zvolit vhodný počáteční odhad hodnoty tlaku  $p$ . Stejně tak je nutné zvolit vhodné počáteční přiblížení kontaktních povrchů  $h_0$ , které následně figuruje v rovnici elastických deformací (1.3).

Pro počáteční aproximaci tlaku lze dle Vennera a Lubrechta [37] využít profilu Hertzova tlaku. Výchozí průběh tlaku je pak v COMSOLu při použití bezrozměrných parametrů (3.11) a (3.12) popsán v 2D modelu liniového kontaktu rovnicí:

$$P = if \left( X \leq 1, \sqrt{1 - X^2}, 0 \right) \quad (3.22)$$

Alternativní možnost počátečního přiblížení tlaku představuje vztah dle [28]:

$$P = 0,368e^{1-(2X)^3} \quad (3.23)$$



Pro volbu výchozí hodnoty bezrozměrného prvotního přiblížení těles  $H_0$  použili Lubrecht a Venner [37] vztah:

$$H_0 = 1,67 \left( M^{-\frac{1}{9}} \right) - 1,897 + \left( 0,2 \frac{L}{50} \right) \quad (3.24)$$

$M$  a  $L$  v rovnici (3.24) představují Moesovy bezrozměrné parametry zatížení a materiálu definované rovnicemi:

$$M = W(U)^{-0,75} \quad (3.25)$$

$$L = G(U)^{0,25} \quad (3.26)$$

$W$  je bezrozměrný parametr vnějšího zatížení,  $U$  bezrozměrný parametr rychlosti a  $G$  bezrozměrný materiálový parametr:

$$W = \frac{w}{E' R_x^2} \quad (3.27)$$

$$U = \frac{\eta_0 u_m}{E' R_x^2} \quad (3.28)$$

$$G = \alpha E' \quad (3.29)$$

Jako  $u_m$  je označena střední rychlost pohybu kontaktních povrchů:

$$u_m = \frac{v_w + v_b}{2} \quad (3.30)$$

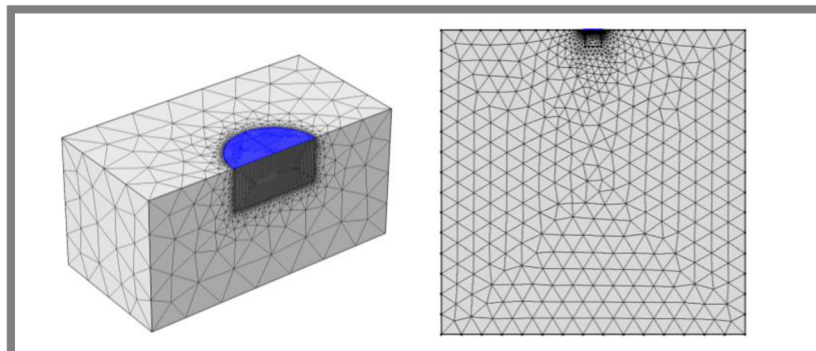
Bezrozměrnou počáteční aproximaci přiblížení kontaktních povrchů  $H_0$  lze také volit dle [28] přímo z intervalu hodnot  $\langle -0,5; 0,5 \rangle$ .

## 4 VÝSLEDKY

### 4.1

#### 4.1 Moduly Thin-Film Flow + Solid Mechanics

S použitím modulů Thin-Film Flow a Solid Mechanics byl dle kap. 3.1 vytvořen 3D model bodového kontaktu a 2D model liniového kontaktu (obr. 4.1).



Obr. 4.1 3D model bodového kontaktu a 2D model liniového kontaktu

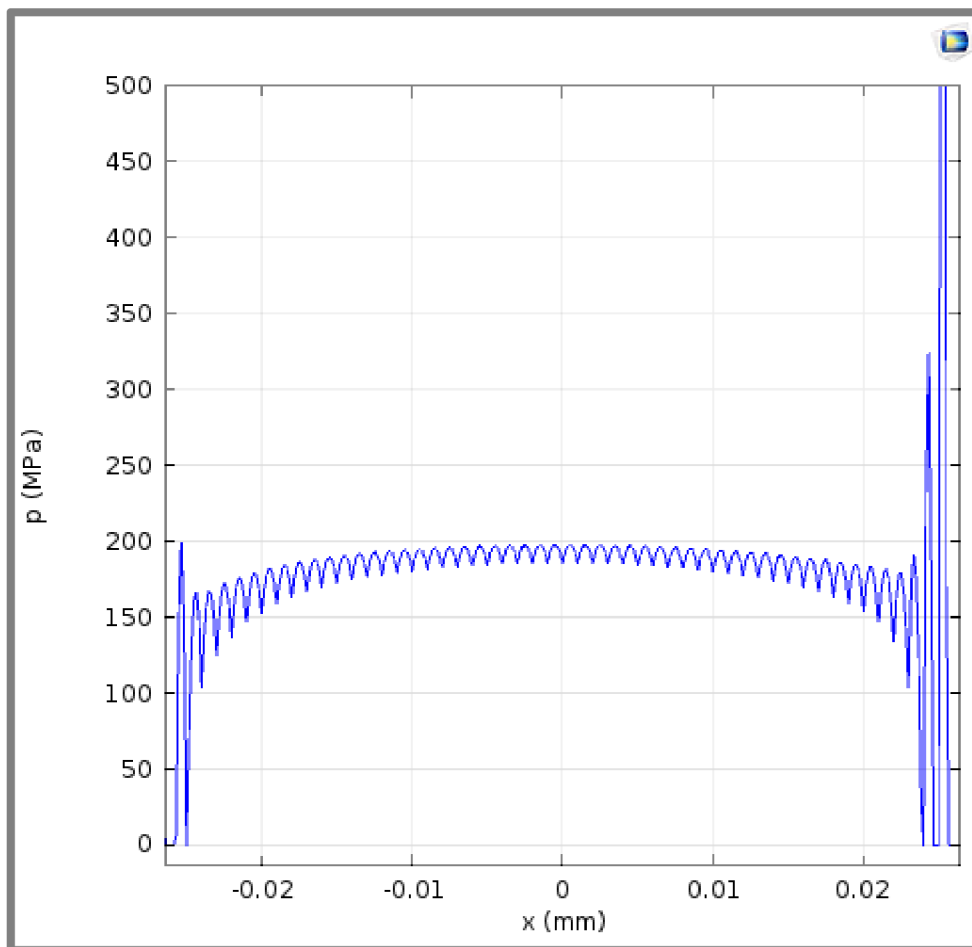
Okrajové podmínky byly stanoveny dle kap. 3.3. Při stanovování počátečních hodnot jednotlivých veličin bylo využito publikovaných prací [27], [28] a [30].

U modelu bodového kontaktu nebylo dosaženo výsledků, které by měly relevantní vypovídající hodnotu, zejména kvůli výpočtové náročnosti 3D modelu (viz kap. 5).

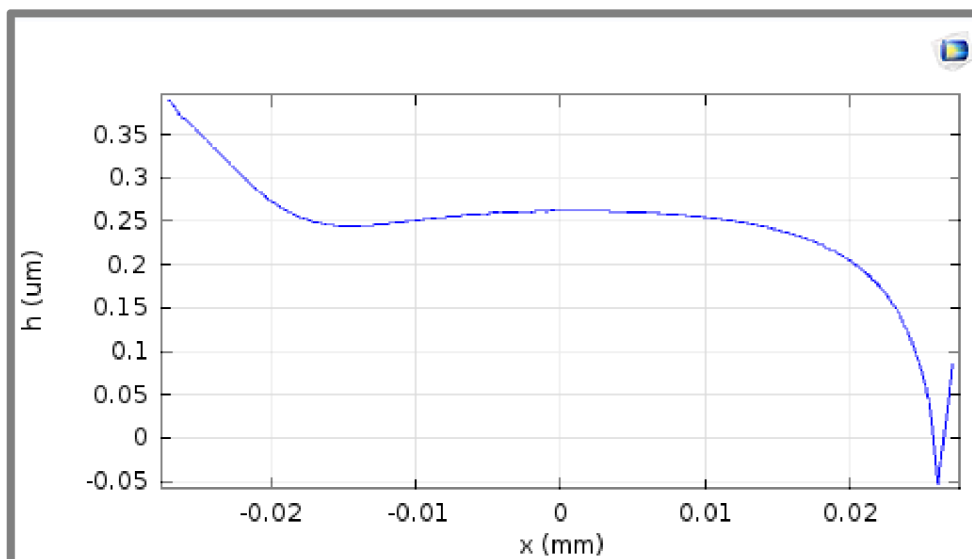
Pro 2D model liniového kontaktu byl získán průběhu tlaku (obr 4.2) i tloušťky maziva (obr 4.3) při použití parametrů uvedených v tab. 1 (čerpány z [28]). Rovnice (3.7) pro výpočet hustoty v závislosti na tlaku byla přes rozhraní *equation view* nahrazena vztahem dle Dowsona a Higginsona (1.6). Správnost hodnoty tlaku v centrální části kontaktu byla verifikována s využitím vztahu (3.10). Stanovená hodnota maximálního Hertzova tlaku je uvedena v tab. 1.

Tab. 1 Modul Thin-Film Flow; 2D model liniového kontaktu - počáteční hodnoty parametrů

veličina	označení	počáteční hodnota
zatižení	$F_{wall}$ (N)	500
redukovaný poloměr křivosti	$R_x$ (mm)	30,031035
rychlost pohybu povrchu desky	$v_b$ ( $m \cdot s^{-1}$ )	1,588530
rychlost pohybu povrchu válce	$v_w$ ( $m \cdot s^{-1}$ )	0
počáteční aproximace přiblížení kontaktních povrchů	$h_0$ ( $\mu m$ )	0,228127
počáteční aproximace tlaku	$p$ (Pa)	dle rovnic (3.10) a (3.22)
viskozita maziva	$\mu_0$ ( $Pa \cdot s$ )	$1,539 \cdot 10^{-2}$
hustota maziva	$\rho$ ( $kg \cdot m^{-3}$ )	858,44
modul pružnosti desky	$E$ (Pa)	$109,9 \cdot 10^9$
Poissonův poměr desky	$\nu$ (–)	0,285
tlakově-viskózní index	$z$ (–)	0,641910
šířka kavitačního přechodu	$\Delta p_{sw}$ (MPa)	1,0
Hertzův tlak	$p_h$ (MPa)	196,1
<b>mesh – free triangular – 4417 prvků</b>		

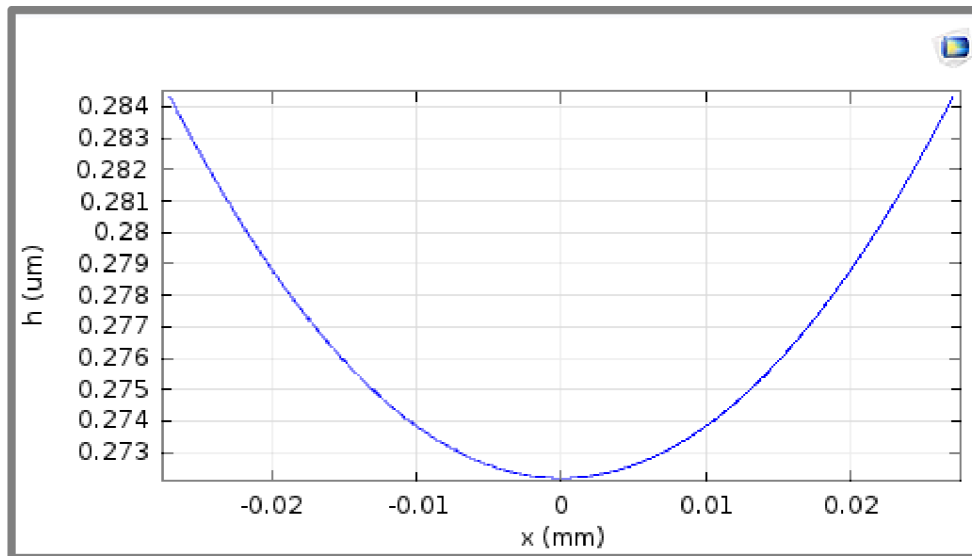


Obr. 4.2 Průběh tlaku  $p$  v liniovém kontaktu; 2D model; modul Thin-Film Flow; velikost parametrů výpočtu dle tab. 1

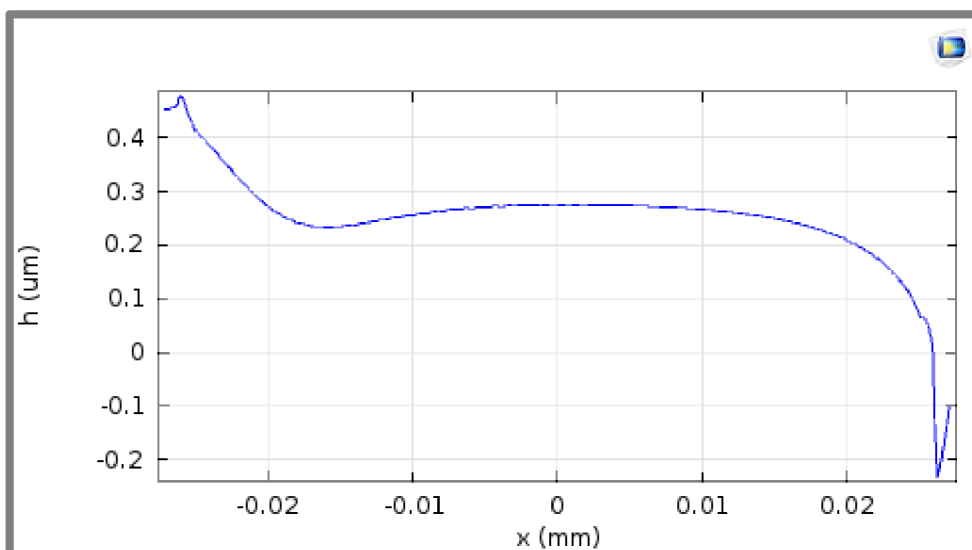


Obr. 4.3 Průběh tloušťky maziva  $h$  v liniovém kontaktu; 2D model; modul Thin-Film Flow; velikost parametrů výpočtu dle tab. 1

Výpočtový model 2D liniového kontaktu s využitím modulu Thin-Film Flow se vyznačoval značnou numerickou nestabilitou a náchylností na přesné určení počátečních parametrů. V rámci analýzy tohoto problému byl zkoumán vliv počáteční aproximace přiblížení kontaktních povrchů  $h_0$  na vypočtenou hodnotu tloušťky maziva  $h$ . Výpočet je totiž z podstaty Newton-Raphsonovy metody na tuto hodnotu citlivý (viz kap. 1.2.2 a 1.5.2). Hodnota přiblížení kontaktních povrchů  $h_0$  byla měněna o  $0,01\mu\text{m}$ . Výsledky jsou shrnuty na grafech na obr. 4.4 a 4.5. Již na první pohled je zcela patrné, že malá změna počátečního přiblížení těles vedla k nesprávným výsledkům.



Obr. 4.4 Průběh tloušťky maziva  $h$  v liniovém kontaktu; 2D model; modul Thin-Film Flow; velikost parametrů výpočtu dle tab. 1;  $h_0 = 0.218127\mu\text{m}$



Obr. 4.5 Průběh tloušťky maziva  $h$  v liniovém kontaktu; 2D model; modul Thin-Film Flow; velikost parametrů výpočtu dle tab. 1;  $h_0 = 0.238127\mu\text{m}$

## 4.2 Moduly PDE + Solid Mechanics

Z důvodu omezení, spojených s použitím modulu Thin-Film Flow, vyplynula nutnost zavést do výpočtu Reynoldsovu rovnici (1.1) pomocí modulu PDE. K tomuto účelu bylo z možností COMSOLu využito tzv. slabé formulace parciálních diferenciálních rovnic (viz kap. 3.2). Hodnoty elastických deformací povrchu byly při simulacích opět získávány s užitím modulu Solid Mechanics.

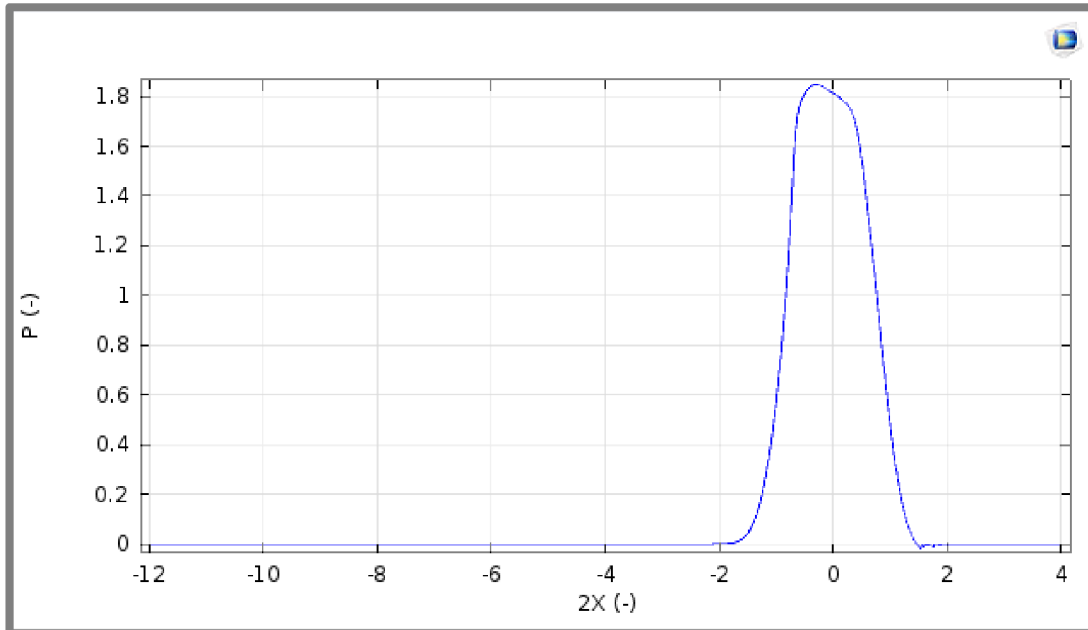
Byly vytvořeny dva 2D modely liniového kontaktu dle kap. 3.2 (viz také obr. 4.1). Hodnoty počátečních parametrů výpočtu byly pro první model voleny na základě práce Tana a kol. [28] uvedené v kap. 1.8.2., hodnoty parametrů pro druhý model byly stanovovány na základě publikace od Kumara a kol. [38]. Následně mohla proběhnout verifikace získaných hodnot průběhu tlaku a tloušťky maziva, na kterou navázaly další výpočty. Protože jsou obecně v dostupných pracích uváděny hodnoty jen pro některé parametry, byly hodnoty neuvedených parametrů stanoveny na základě testovacích výpočtů.

### 4.2.1 Model vycházející z práce Tana a kol.

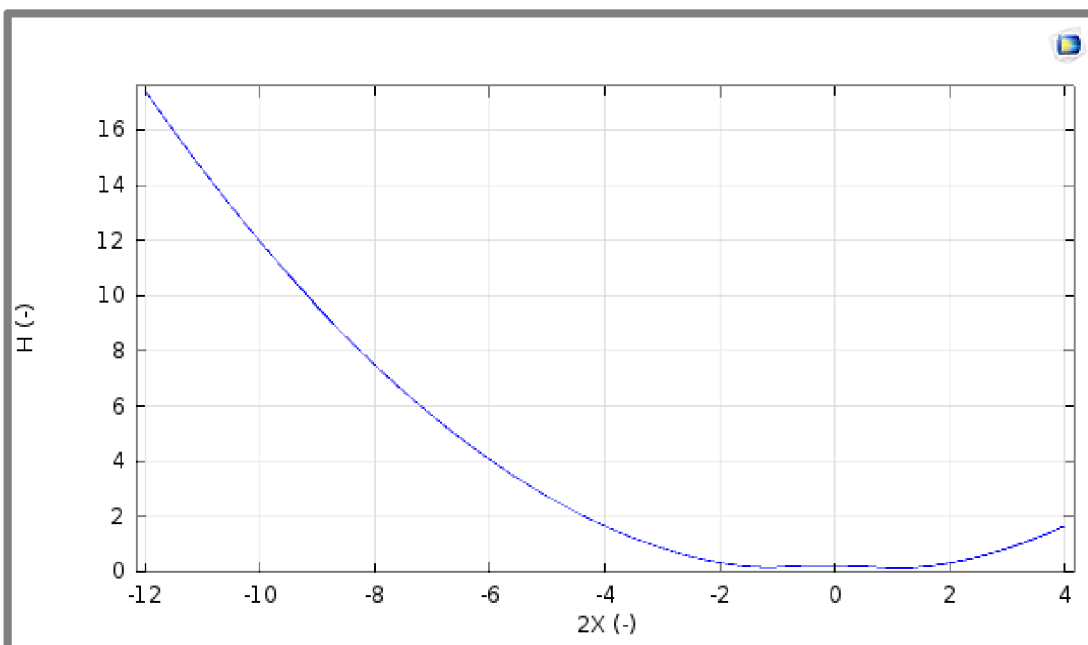
Nejprve bylo rozhodnuto o využití údajů z dosud nejkomplexnější publikované práce týkající se simulací EHD mazání v COMSOLu od Tana a kol. [28] (viz také kap. 1.8.2). Z této publikace byly převzaty hodnoty počátečních parametrů, které jsou uvedeny v tab. 1. Z intervalu hodnot uvedeného v této práci vycházela i počáteční aproximace přiblížení těles  $H_0$ . Okrajové podmínky byly do modelu zavedeny podle kap. 3.3. Počáteční aproximace tlaku byla provedena dle vztahu (3.23). Průběhy bezrozměrného tlaku  $P$  a tloušťky maziva v kontaktu  $H$  jsou uvedeny na grafech na obr. 4.6 a 4.7. Pro srovnání s původní prací je hodnota bezrozměrného parametru souřadnice  $X$  vynásobena na ose  $x$  dvěma.

Tab. 2 Modul PDE; první 2D model liniového kontaktu - počáteční hodnoty parametrů

veličina	označení	počáteční hodnota
zatížení	$w$ ( $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$ )	$5 \cdot 10^4$
redukovaný poloměr křivosti	$R_x$ (mm)	12,5
rychlost pohybu povrchu desky	$v_b$ ( $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ )	0,1
rychlost pohybu povrchu válce	$v_w$ ( $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ )	0,1
bezrozměrné počáteční přiblížení těles	$H_0$ (–)	0,1
bezrozměrná počáteční aproximace tlaku	$P$ (–)	dle rovnice (3.23)
viskozita maziva	$\eta_0$ ( $\text{Pa} \cdot \text{s}$ )	$5,7226 \cdot 10^{-2}$
hustota maziva	$\rho$ ( $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ )	858,44
modul pružnosti desky	$E$ (MPa)	$200 \cdot 10^9$
Poissonův poměr desky	$\nu$ (–)	0,285
tlakově-viskózní index	$z$ (–)	0,641910
penalty faktor	$P_f$ (–)	$1 \cdot 10^6$
ladící parametr	$C_s$ (–)	$1 \cdot 10^{-6}$
<b>mesh – free triangular – 12118 prvků</b>		

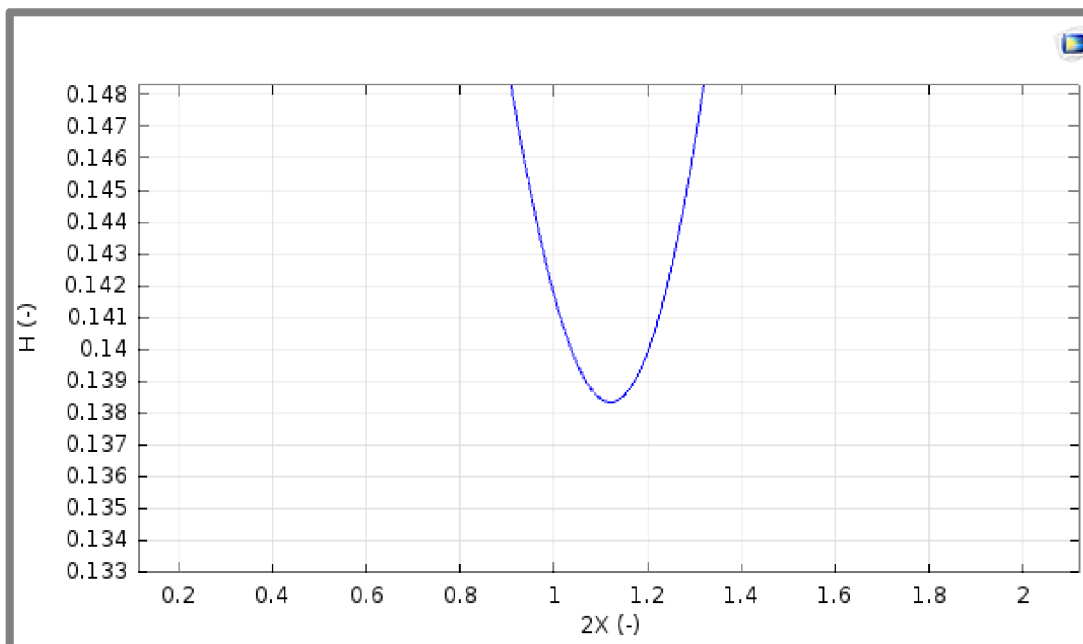


Obr. 4.6 Průběh bezrozměrného tlaku  $P$  v liniovém kontaktu; první 2D model; modul PDE; velikost parametrů výpočtu dle tab. 2



Obr. 4.7 Průběh bezrozměrné tloušťky maziva  $H$  v liniovém kontaktu; první 2D model; modul PDE; velikost parametrů výpočtu dle tab. 2

Na následující straně se na grafu na obr. 4.8 nachází detail minima tloušťky mazacího filmu. Tento grafický průběh bylo nutné stanovit kvůli následnému srovnání výsledků s prací Tana a kol. [28]. V této publikaci totiž není uvedena hodnota minimální tloušťky maziva číselně, ale pouze graficky.



Obr. 4.8 Detail minima průběhu bezrozměrné tloušťky maziva  $H$  v liniovém kontaktu; první 2D model; modul PDE; velikost parametrů výpočtu dle tab. 2

Vytvořený výpočtový model 2D liniového kontaktu se vyznačoval příliš velkými hodnotami tlaku, tloušťka maziva odpovídala uvedené publikaci (viz detailní srovnání s výsledky z práce [28] v kap. 5.2).

#### 4.2.2 Model vycházející z práce Kumara a kol.

4.2.2

Jako druhý byl vytvořen výpočtový model 2D liniového kontaktu, přičemž velikost parametrů byla volena dle údajů uvedených v práci Kumara a kol. [38]. Obecně se totiž publikace tohoto autora vyznačují poměrně značným množstvím údajů týkajících se hodnot vstupních parametrů výpočtu. Všechny hodnoty parametrů jsou uvedeny v tab. 3. Okrajové podmínky byly stejné jako u předchozího výpočtového modelu (viz kap. 3.3), pro počáteční aproximaci tlaku byl opět použit vztah (3.23). Hodnoty počátečního přiblížení kontaktních povrchů  $H_0$ , ladícího parametru  $C_s$  a penalty faktoru  $P_f$  byly stanoveny verifikací pomocí experimentálních výpočtů. Průběhy bezrozměrného tlaku  $P$  a tloušťky maziva v kontaktu lze nalézt na grafech na obr. 4.9 a 4.10. Tloušťka maziva byla kvůli následnému srovnání výsledků s prací [38] určována v bezrozměrném tvaru dle Hamrocka a Dowsona (viz [36]):

$$H_{HD} = \frac{h}{R_x} \quad (4.1)$$

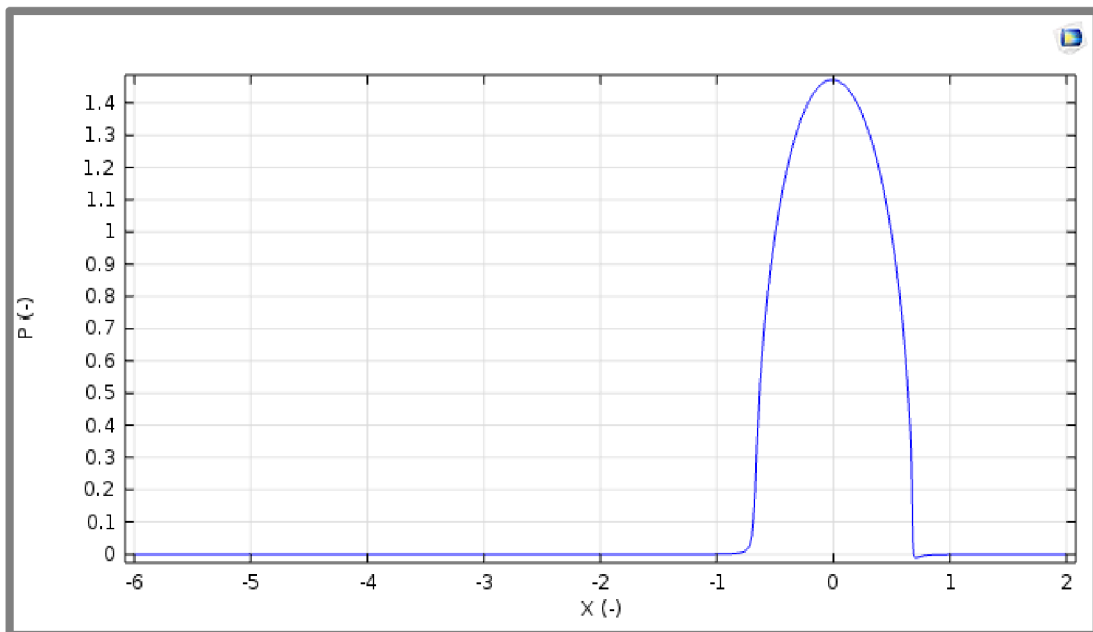
Dosazení hodnot do tohoto vztahu probíhalo s využitím rovnice (3.15). Vztah mezi bezrozměrnou tloušťkou maziva  $H$  a bezrozměrnou tloušťkou maziva dle Hamrocka a Dowsona  $H_{HD}$  je:

$$H = H_{HD} \frac{R_x^2}{a^2} \quad (4.2)$$

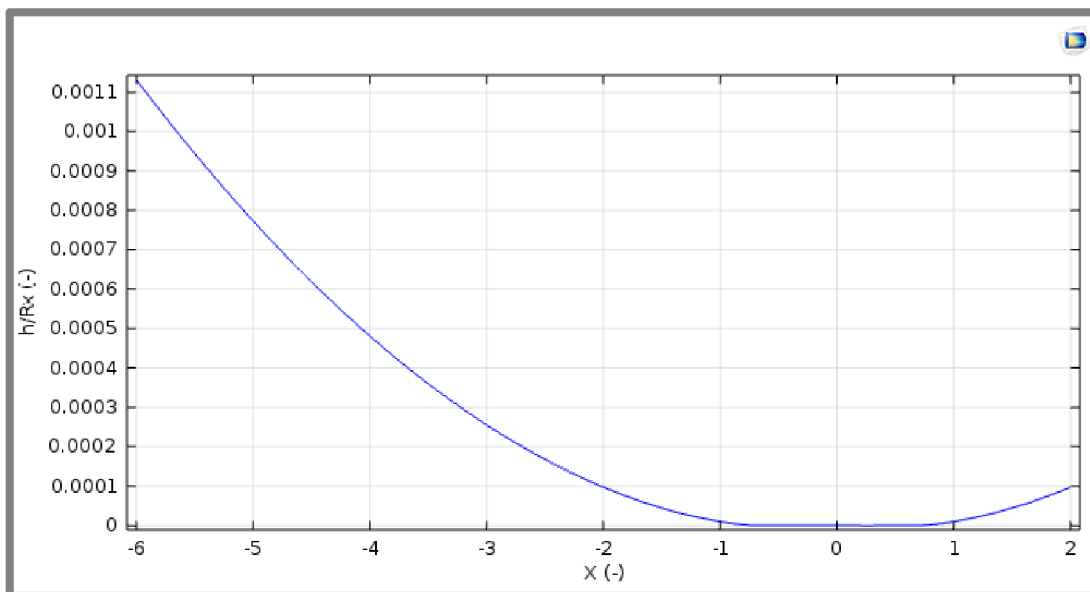
Tab. 3 Modul PDE; druhý 2D model liniového kontaktu - počáteční hodnoty parametrů

veličina	označení	počáteční hodnota
bezrozměrný parametr vnějšího zatížení	$W (-)$	$2,58 \cdot 10^{-5}$
redukovaný poloměr křivosti	$R_x (\text{mm})$	19
rychlost pohybu povrchu desky	$v_b (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	1
rychlost pohybu povrchu válce	$v_w (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$	1
bezrozměrné počáteční přiblížení těles	$H_0 (-)$	0,5
bezrozměrná počáteční aproximace tlaku	$P (-)$	dle rovnice (3.23)
viskozita maziva	$\eta_0 (\text{Pa} \cdot \text{s})$	0,86
hustota maziva	$\rho (\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	858,4
ekvivalentní modul pružnosti	$E' (\text{MPa})$	$224 \cdot 10^9$
Poissonův poměr desky	$\nu (-)$	0,285
tlakově-viskózní index	$z (-)$	0,641910
penalty faktor	$P_f (-)$	$1 \cdot 10^5$
ladící parametr	$C_s (-)$	$4 \cdot 10^{-9}$
bezrozměrný materiálový parametr	$G (-)$	4000

**mesh – free triangular – 19744 prvků**

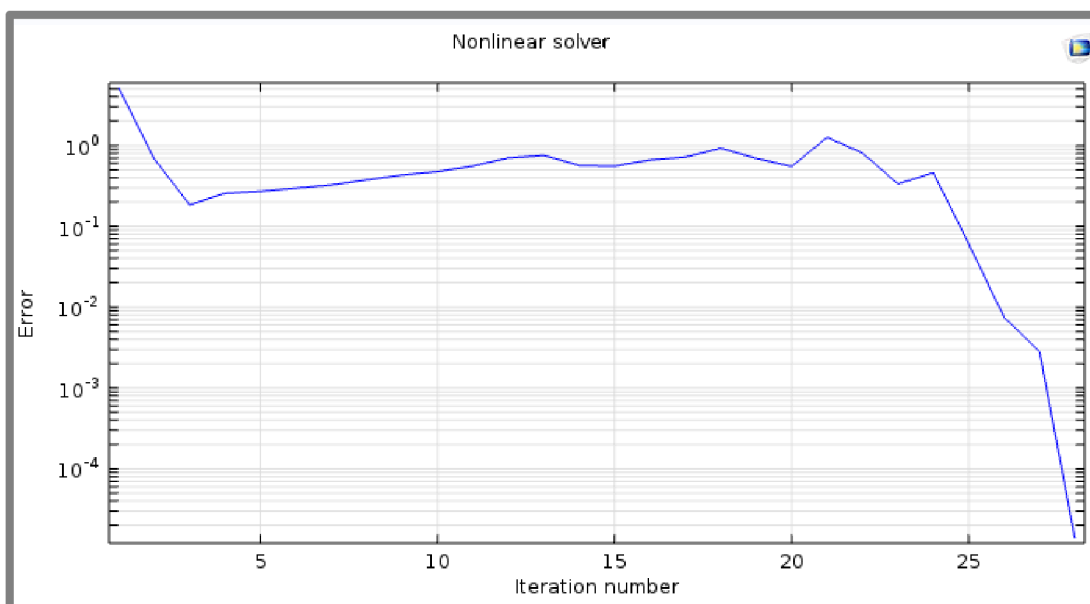
Obr. 4.9 Průběh bezrozměrného tlaku  $P$  v liniovém kontaktu; druhý 2D model; modul PDE; velikost parametrů výpočtu dle tab. 3





Obr. 4.10 Průběh bezrozměrné tloušťky maziva dle Hamrocka a Dowsona v liniovém kontaktu; druhý 2D model; modul PDE; velikost parametrů výpočtu dle tab. 3

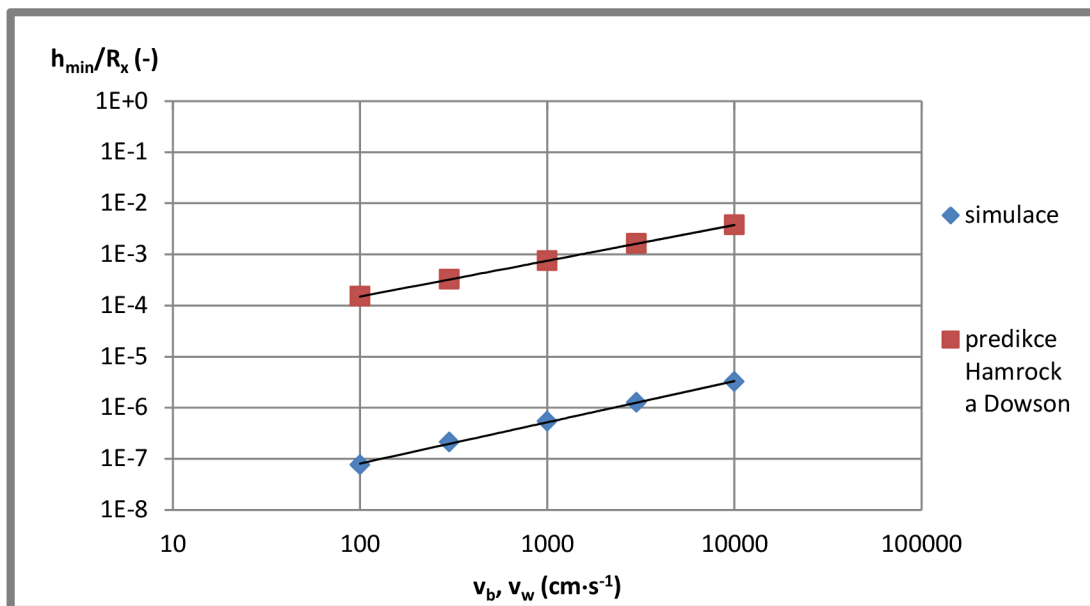
Druhý 2D model liniového kontaktu se vyznačoval dobrou numerickou stabilitou, výpočet probíhal vždy v řádu desítek sekund s konvergencí dle grafu na obr. 4.11.



Obr. 4.11 Graf konvergence; druhý 2D model; modul PDE; velikost parametrů výpočtu dle tab. 3

Na základě těchto výsledků byl s použitím tohoto numerického modelu vyšetřován vliv rychlosti pohybu kontaktních těles na minimální tloušťku maziva  $h_{min}$ . Výsledky byly poté porovnány s predikcí bezrozměrné minimální tloušťky maziva v liniovém kontaktu  $H_{minHD}$  dle Hamrocka a Dowsona [39] a jsou shrnuty v grafu na obr. 4.12:

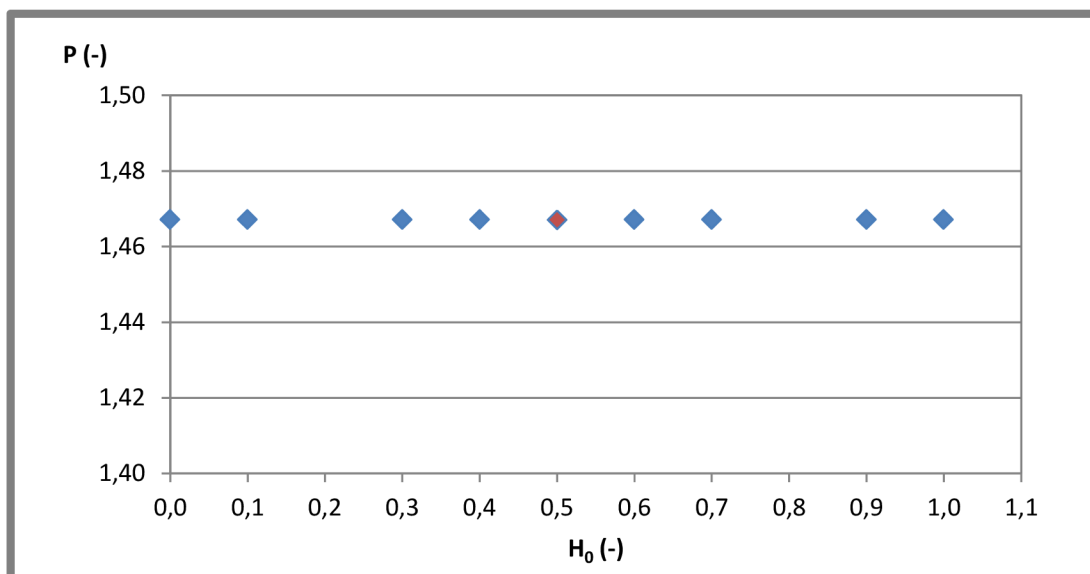
$$H_{minHD} = 1,6G^{0,6}U^{0,7}W^{-0,13} \quad (4.3)$$



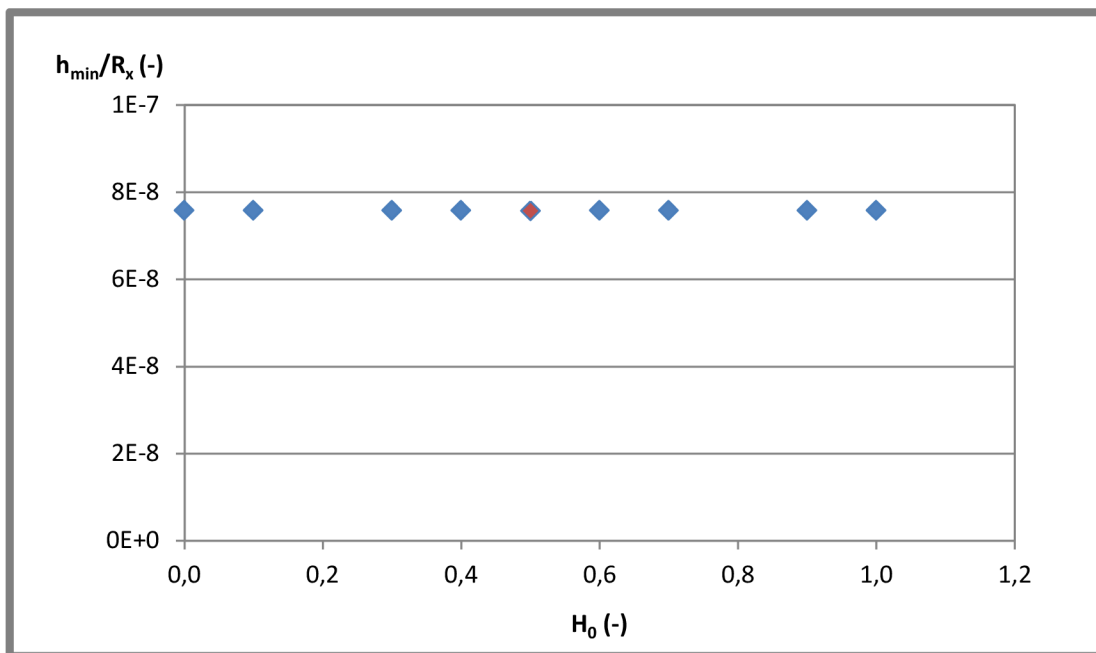
Obr. 4.12 Srovnání závislosti minimální tloušťky maziva na rychlosti pohybu kontaktních povrchů pro predikci dle Hamrocka a Dowsona [39] a pro data získaná simulací; druhý 2D model; modul PDE; velikost parametrů výpočtu dle tab. 3

Příliš vysoká hodnota bezrozměrného tlaku  $P$  a naopak velice malé hodnoty minimální tloušťky maziva  $h_{min}$  vedly k dalším výpočtům, ve kterých byl zkoumán vliv velikosti experimentálně zvolených parametrů, tedy počátečního přiblížení kontaktních povrchů  $H_0$ , penalty faktoru  $P_f$  a ladícího parametru  $C_s$ .

Na obr. 4.13 a 4.14 je graficky znázorněna závislost maximální hodnoty bezrozměrného tlaku  $P$  a bezrozměrné minimální tloušťky maziva dle Hamrocka a Dowsona  $H_{HD}$  na velikosti počátečního přiblížení kontaktních povrchů  $H_0$ . Grafy průběhu bezrozměrného tlaku, bezrozměrné tloušťky maziva i konvergence pro všechny simulace lze nalézt v příloze 1.

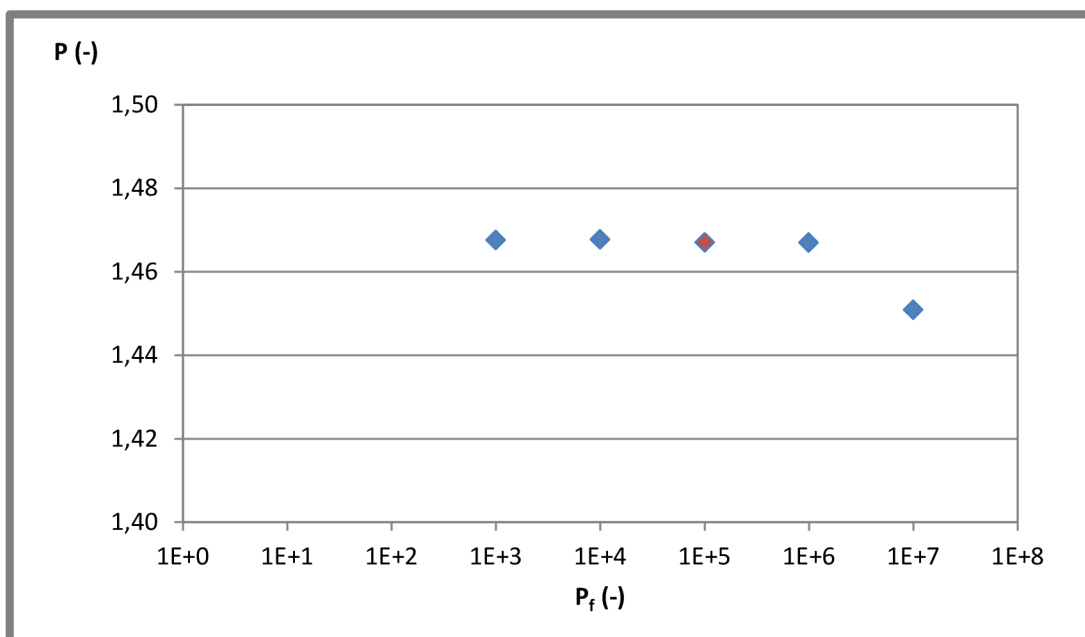


Obr. 4.13 Závislost bezrozměrného maximálního tlaku  $P$  na velikosti počátečního přiblížení kontaktních povrchů  $H_0$ ; druhý 2D model; modul PDE; velikost parametrů výpočtu dle tab. 3; červeně zvýrazněna hodnota  $H_0$  dle tab. 3

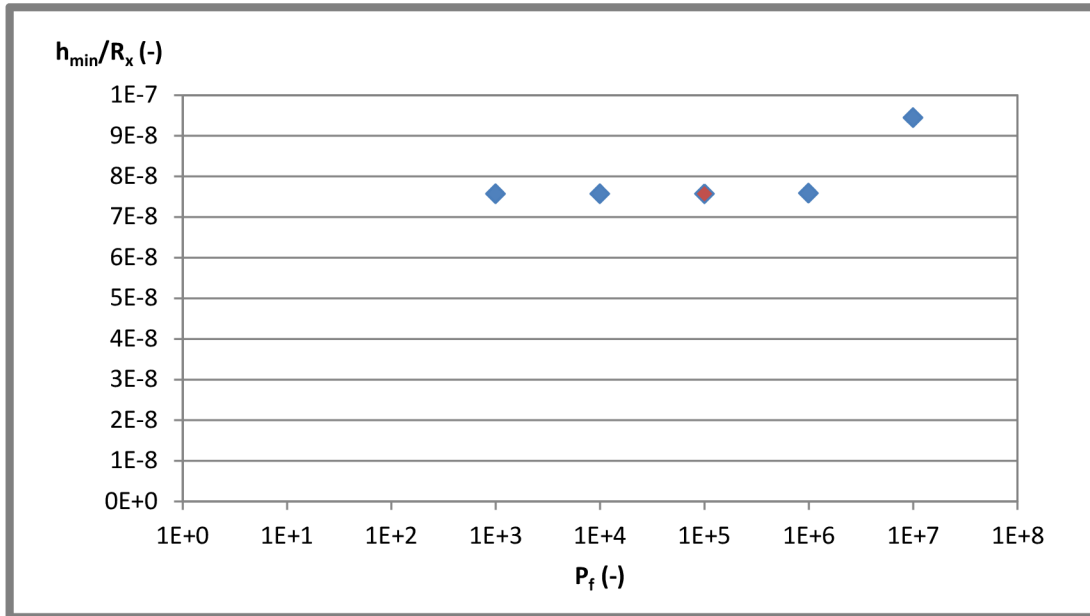


**Obr. 4.14** Závislost bezrozměrné minimální tloušťky maziva dle Hamrocka a Dowsona  $H_{HD}$  velikosti počátečního přiblížení kontaktních povrchů  $H_0$ ; druhý 2D model; modul PDE; velikost parametrů výpočtu dle tab. 3; červeně zvýrazněna hodnota  $H_0$  dle tab. 3

Na obr. 4.15 a 4.16 je graficky znázorněna závislost maximální hodnoty bezrozměrného tlaku  $P$  a bezrozměrné minimální tloušťky maziva dle Hamrocka a Dowsona  $H_{HD}$  na velikosti penalty faktoru  $P_f$ . Grafy průběhu bezrozměrného tlaku, bezrozměrné tloušťky maziva i konvergence pro všechny simulace jsou uvedeny v příloze 2.

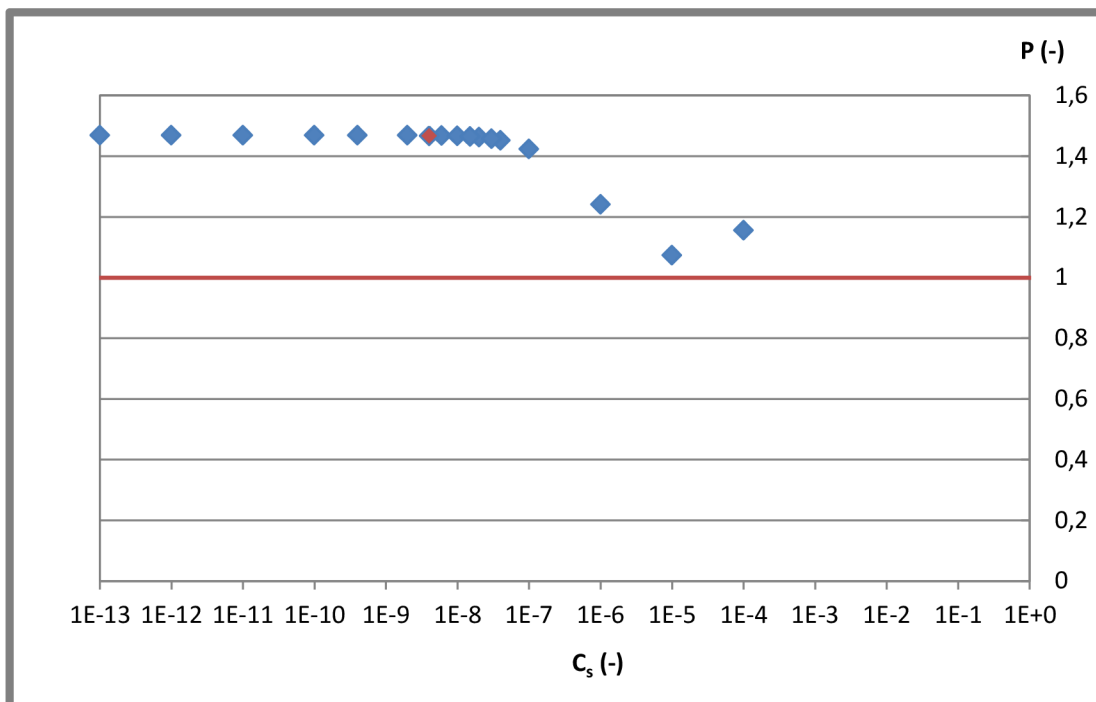


**Obr. 4.15** Závislost bezrozměrného maximálního tlaku  $P$  na velikosti penalty faktoru  $P_f$ ; druhý 2D model; modul PDE; velikost parametrů výpočtu dle tab. 3; červeně zvýrazněna hodnota  $P_f$  dle tab. 3

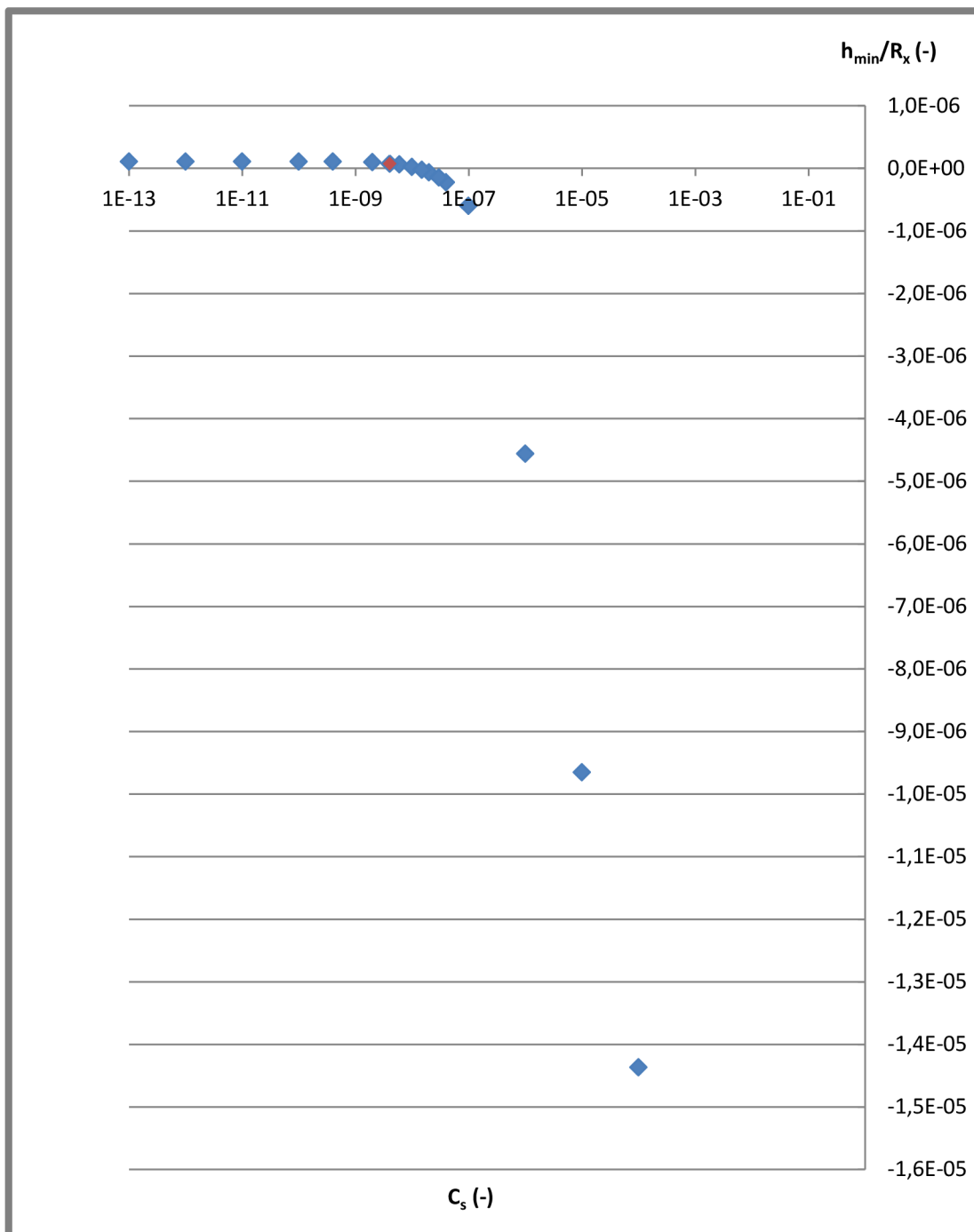


**Obr. 4.16** Závislost bezrozměrné minimální tloušťky maziva dle Hamrocka a Dowsona  $H_{HD}$  na velikosti penalty faktoru  $P_f$ ; druhý 2D model; modul PDE; velikost parametrů výpočtu dle tab. 3; červeně zvýrazněna hodnota  $P_f$  dle tab. 3

Grafická závislost maximální hodnoty bezrozměrného tlaku  $P$  a bezrozměrné minimální tloušťky maziva dle Hamrocka a Dowsona  $H_{HD}$  na velikosti ladícího parametru  $C_s$  je uvedena na obr. 4.17 a 4.18. Grafy průběhu bezrozměrného tlaku, bezrozměrné tloušťky maziva i konvergence pro všechny simulace jsou uvedeny v příloze 3.



**Obr. 4.17** Závislost bezrozměrného maximálního tlaku  $P$  na velikosti ladícího parametru  $C_s$ ; druhý 2D model; modul PDE; velikost parametrů výpočtu dle tab. 3; červeně zvýrazněna hodnota  $C_s$  dle tab. 3 a korektní hodnota tlaku  $P$

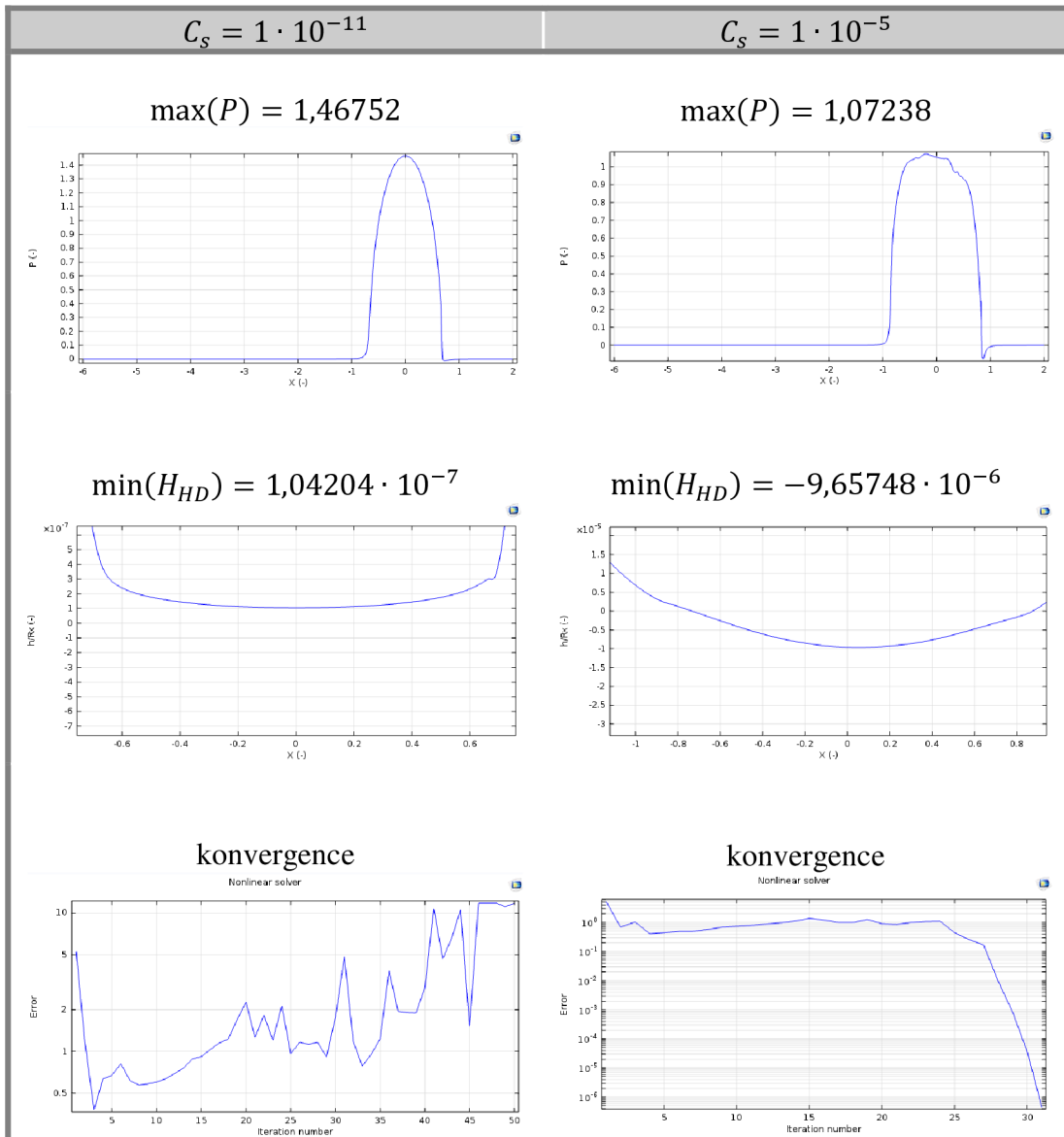


**Obr. 4.18** Závislost bezrozměrné minimální tloušťky maziva dle Hamrocka a Dowsona  $H_{HD}$  na velikosti na velikosti ladícího parametru  $C_s$ ; druhý 2D model; modul PDE; velikost parametrů výpočtu dle tab. 3; červeně zvýrazněna hodnota  $C_s$  dle tab. 3

Dle predikce Hamrocka a Dowsona (4.3) nabývá bezrozměrná minimální hodnota tloušťky maziva  $H_{minHD}$  hodnoty  $1,4986 \cdot 10^{-4}$ .

Pro další porovnání a analýzu je v tab.4 uvedeno krátké grafické srovnání bezrozměrné tloušťky maziva  $H_{HD}$ , bezrozměrného tlaku  $P$  a konvergence pro dvě diametrálně rozdílné hodnoty ladícího parametru  $C_s$ .

**Tab. 4** Modul PDE; druhý 2D model liniového kontaktu; grafické porovnání bezrozměrné tloušťky maziva  $H_{HD}$ , bezrozměrného tlaku  $P$  a konvergence pro dvě rozdílné hodnoty ladícího parametru  $C_s$

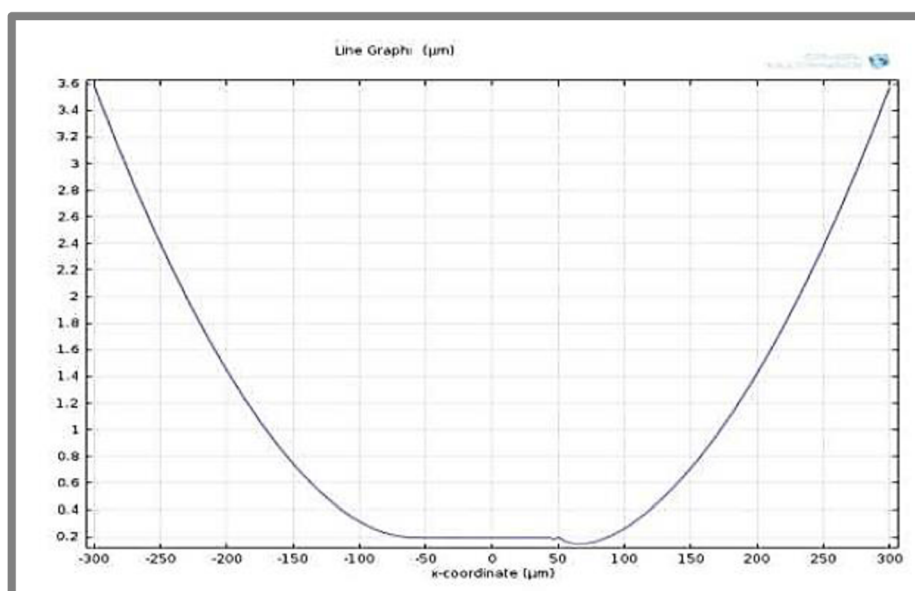


### 5.1 Moduly Thin-Film Flow + Solid Mechanics

Výpočet s použitím modulu Thin-Film Flow se za všech okolností vyznačoval značnou numerickou nestabilitou a ke konvergenci docházelo s celkovou diskretizační chybou v řádu jednotek.

3D model bodového kontaktu nezkonvergoval k výsledkům s přijatelnou vypovídací hodnotou. Vyznačoval se také velmi vysokou výpočtovou náročností, jeden výpočet trval řádově desítky minut až hodiny.

Při tvorbě 2D modelu liniového kontaktu se podařilo získat hodnoty uvedené v grafech na obr. 4.2 a 4.3. Hodnota maximálního Hertzova tlaku souhlasí s vypočtenou hodnotou (tab. 1). Hodnota tloušťky maziva (graf na obr 4.3) se blíží hodnotám určeným v práci [30], ze které byly hodnoty vstupních parametrů čerpány (graf na obr. 5.1). Simulací byla stanovena centrální tloušťka maziva přibližně  $0,27\mu\text{m}$  (graf na obr. 4.3), v publikaci [28] dosahuje centrální tloušťka mazacího filmu přibližně  $0,20\mu\text{m}$  (graf na obr. 5.1).



Obr. 5.1 Průběh tloušťky maziva  $h$  v liniovém kontaktu, velikost parametrů výpočtu dle tab. 1 [28]

Zejména v grafu průběhu tlaku (graf na obr. 4.2) jsou patrné značné oscilace, především na výstupu z kontaktu. Tyto oscilace mají za následek ostrý hrot v minimu tloušťky maziva (graf na obr. 4.3), který zasahuje až do záporných hodnot. Z tohoto důvodu nebyla minimální tloušťka mazacího filmu správně určena. Tyto oscilace a numerickou nestabilitu má za následek zřejmě hned několik skutečností. Z těch vyplývají některé závažné nedostatky modulu Thin-Film Flow při výpočtu EHD mazání.

Po analýze všech těchto zjištění byla vypracována odborná zpráva (viz příloha), která byla přijata centrální společností COMSOL. Na základě následujících zjištění bude potom modul Thin-Film Flow postupně modifikován výrobcem tak, aby v budoucích verzích již umožňoval úspěšně simulovat i EHD mazání.

## 5.1.1

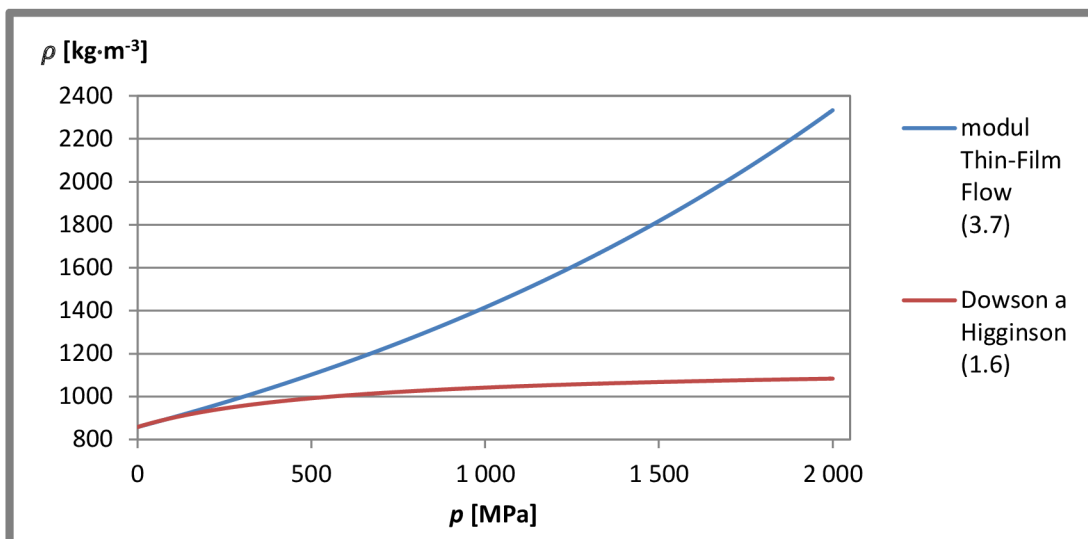
**5.1.1 Kavitaace – spínací funkce**

Zásadním problémem modulu Thin-Film Flow je kavitační algoritmus vycházející z modifikované verze Elrodova algoritmu [33], viz vztah (3.6). Důkladnějším zkoumáním tohoto algoritmu bylo zjištěno, že je vhodný pouze pro hydrodynamické mazání. Jsou-li totiž elastické deformace těles významné, způsobuje tento kavitační algoritmus nestabilitu výpočtu (zmněno také v [32]). Ačkoliv je modul Thin-Film Flow dle svého popisu určen i pro EHD simulace, tento kavitační algoritmus jej činí k tomu nezpůsobitelným. Kavitační podmínku také nelze v modulu Thin-Film Flow modifikovat na penalty faktor (3.20) a (3.21), obvykle užívaný u EHD simulací.

## 5.1.2

**5.1.2 Závislost hustoty maziva na změně tlaku**

V modulu Thin-Film Flow je zavedena rovnice (3.7) pro změnu hustoty v závislosti na tlaku. Jak již bylo konstatováno dříve, je tento vztah odlišný od vztahu definovaného Dowsonem a Higginsonem [7] (1.6). Na grafu na obr. 5.2 je zobrazeno srovnání obou těchto vztahů pro hustotu maziva z tab. 1.



Obr. 5.2 Srovnání hustoty maziva  $\rho$  v závislosti na tlaku  $p$  pro vztah dle Dowsona a Higginsona [7] (1.6) a vztah implementovaný v modulu Thin-Film FLOW (3.7), počáteční hustota  $\rho_0 = 858,44 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  (dle tab. 1),  $\beta = 5 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$

Je zcela zřejmé, že rovnice (3.7) vykazuje rozdílné hodnoty hustoty maziva a přispívá tak k nesprávným výsledkům simulací. Tuto rovnici lze v modulu Thin-Film Flow změnit přes tzv. *equation view*.

## 5.1.3

**5.1.3 Zadávání rovnice rovnováhy**

Aby byla hodnota tlaku kontrolována v každém iteračním kroku výpočtu, musí být rovnice silové rovnováhy (1.4) zadávána při použití modulu Thin-Film Flow pomocí rozhraní *global equation* jako:

$$f(p) = 0 \quad (4.1)$$



Tato rovnost ale způsobuje výskyt nuly na diagonále v matici při numerickém řešení. Krátce je tento problém zmiňován již v práci [27]. Z tohoto důvodu nelze použít iterativní multigradní řešič a je nutné přistoupit k použití přímého řešiče. Zásadně negativně je tak ovlivněna rychlost celého výpočtu i nároky na použitý hardware.

#### 5.1.4 Počáteční aproximace přiblížení těles

5.1.4

Použití Newton-Raphsonovy metody vyžaduje dobrou počáteční aproximaci přiblížení kontaktních povrchů  $h_0$  (kap. 1.2.2). V modulu Thin-Film Flow je tato hodnota zadávána jako součet vzdáleností jednotlivých kontaktních povrchů od referenční roviny, viz (3.2). Z grafů na obr. 4.4 a 4.5 jednoznačně vyplývá velmi vysoká náchylnost výpočtu na velikost této hodnoty. Zmenšením hodnoty  $h_0$  o  $0,01\mu\text{m}$  se z průběhu tloušťky maziva vytratilo globální minimum u výstupu maziva z kontaktu (obr. 4.4). Zvětšením hodnoty  $h_0$  o  $0,01\mu\text{m}$  došlo k posunutí nežádoucího ostrého hrotu v místě lokálního minima ještě hlouběji do záporných hodnot (obr. 4.5). V práci [28] je počáteční hodnota přiblížení těles udávána v bezrozměrném tvaru a zároveň je konstatováno, že její změna v intervalu  $\langle -0,5; 0,5 \rangle$  má za následek jen velmi malou změnu konvergence. Výsledky prezentované na grafech na obr. 4.4 a 4.5 jsou zcela v rozporu s tímto tvrzením. Na jejich základě lze usuzovat, že rovnice tloušťky mazacího filmu (1.3) není v modulu Thin-Film Flow implementována v ideálním tvaru, který by umožňoval spolehlivý výpočet EHD mazání. Tuto rovnici, stejně jako Reynoldsovu rovnici (1.1) nelze také v modulu Thin-Film Flow dostatečně modifikovat, např. na tvar (1.3).

#### 5.1.5 Stabilizace

5.1.5

Protože je Reynoldsova rovnice pro vysoké tlaky nestabilní, je nutné zavádět do výpočtu stabilizaci (viz kap. 1.5.2), která vede k eliminaci oscilací. V modulu Thin-Film Flow je zavedena možnost stabilizace pomocí isotropické difuze, resp. ladicího parametru. Ani v podrobném manuálu [32] však nelze dohledat žádné bližší informace o jeho implementaci. Stejně tak se s využitím *equation view* překvapivě neobjevuje ani v žádné z rovnic modulu Thin-Film Flow. Jeho hodnota byla měněna nejprve dle [28] v intervalu  $\langle 10^{-5}; 10^{-7} \rangle$ , avšak získané hodnoty tlaku a tloušťky mazacího filmu byly nesmyslné. Poté byla jeho velikost zmenšována až do dosažení hodnoty 1 uvedené v tab. 1, kdy bylo dosaženo výsledků prezentovaných v kap. 4.1. Na jejich základě lze usuzovat, že stabilizační člen nemusí být v modulu Thin-Film Flow implementován vhodným způsobem. Tuto skutečnost však kvůli jeho absenci v rovnicích i manuálu nelze nijak ověřit.

#### 5.1.6 Diskretizace tlaku v Reynoldsově rovnici

5.1.6

Řád diskretizace má vliv na náročnost výpočtu i na jeho přesnost. Obecně platí, že čím hrubší je konečnoprvková síť, tím vyšší řád diskretizace je pro dosažení správných výsledků potřeba. S použitím hrubé konečnoprvkové sítě v kombinaci s nízkým řádem diskretizace dochází k oscilacím. V pracích [28] či [29] je použito diskretizace pátého řádu, modul Thin-Film Flow umožňuje pouze diskretizaci maximálně čtvrtého řádu. Zároveň je EHD simulace s tímto modulem limitována nutností použití přímého řešiče (kap. 1.5.3), kdy je nutné kvůli snížení výpočetních

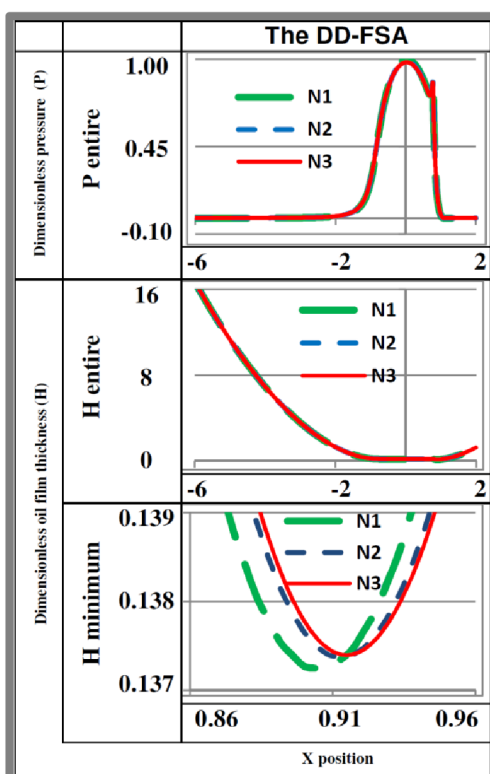
nároků a času volit hrubší konečnoprvkovou síť. Na základě těchto faktů lze usuzovat, že omezení diskretizace na čtvrtý řád může mít také jistý negativní vliv zejména na oscilace ve výpočtu, viz grafy na obr. 4.2 a 4.3.

## 5.2 Moduly PDE + Solid Mechanics

### 5.2.1 Model vycházející z práce Tana a kol.

První 2D výpočtový model liniového kontaktu realizovaný s použitím modulu PDE rovněž nevykazoval příliš dobrou numerickou stabilitu a diskretizační chyba se opět pohybovala v řádu jednotek.

Získaný bezrozměrný kontaktní tlak  $P$  má asi 2x větší hodnotu, než je předpoklad. Nedochází také k vytvoření tzv. *pressure spike*, tedy lokálního maxima v místě výstupu maziva z kontaktu, viz obr. 4.6. Průběh bezrozměrné tloušťky maziva  $H$  koresponduje dobře s prací Tana a kol. [28], viz srovnání obr. 4.7 a 4.8 s obr. 5.3. Hodnota stanovené bezrozměrné minimální tloušťky maziva se od hodnoty v publikaci liší pouze o 0,001. Globální minimum je však u výpočtu posunuté o 0,1 v kladném směru osy  $x$ . Tuto skutečnost lze přisuzovat částečné numerické nestabilitě modelu.

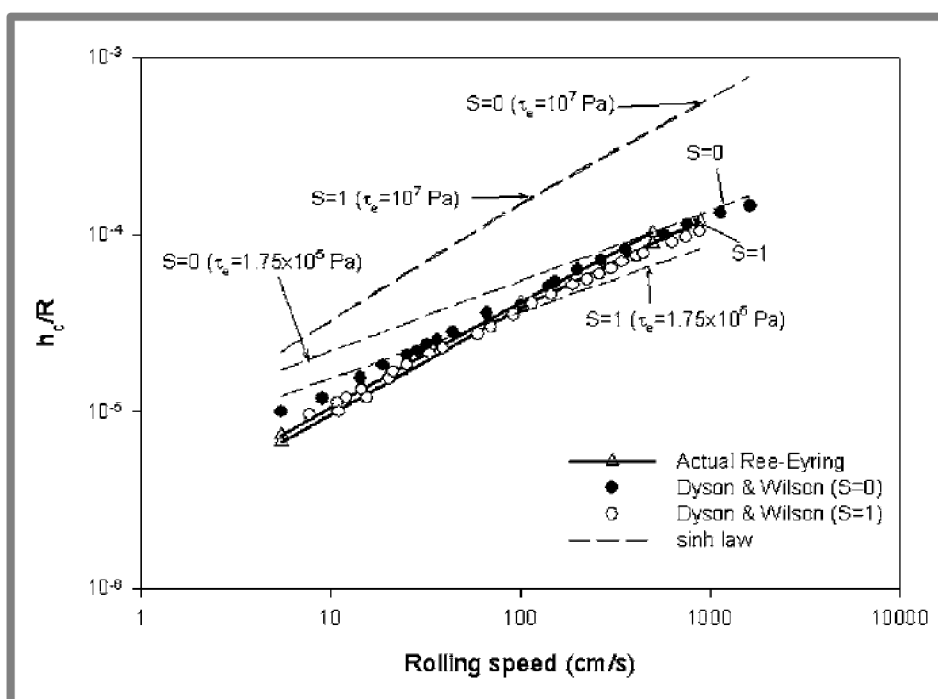


Obr. 5.3 Bezrozměrný tlak  $P$  a bezrozměrná tloušťka maziva  $H$  pro liniový kontakt; hodnoty parametrů dle tab. 1; Tan a kol. [28]

Nesrovnalosti v průběhu tlaku se i přes značnou snahu nepodařilo odhalit. Z tohoto důvodu bylo přistoupeno k tvorbě dalšího 2D modelu liniového kontaktu, mohla být tato skutečnost analyzována.

### 5.2.2 Model vycházející z práce Kumara a kol.

Druhý 2D model liniového kontaktu vytvořený s použitím modulu PDE byl již numericky stabilní a vyznačoval se také dobrou konvergencí, viz obr. 4.11. Stejně jako v případě předchozích popsaných modelů, i zde bezrozměrný tlak  $P$  nabýval hodnoty větší než 1 (obr. 4.9). Zároveň se ve většině případů opět neobjevoval *pressure spike*. Průběh bezrozměrné tloušťky maziva v kontaktu dle Hamrocka a Dowsona  $H_{HD}$  měl očekávaný tvar (viz obr. 4.10 a příloha 1, 2 a 3), avšak hodnoty byly posunuty o tři řády. Na obr. 4.12 byla tato skutečnost jednoznačně prokázána. Zároveň však z grafu na obr. 4.12 vyplývá, že hodnoty minimální tloušťky maziva získané simulací narůstají pod stejnou směrnicí, jako predikované. Tento fakt lze ověřit také srovnáním výsledků simulace s hodnotami publikovanými Kumarem a kol. v práci [38], viz obr. 5.4. Výpočtový model také ve všech případech zkonvergoval v krátké době.



Obr. 5.4 Srovnání závislosti centrální tloušťky mazacího filmu na rychlosti pohybu kontaktních povrchů pro data získaná experimentálně Dysonem a Wilsonem a pro numerickou simulaci; velikost vstupních parametrů dle tab. 3; Kumar a kol. [38]

Protože ani několikanásobná kontrola rovnic i jednotlivých parametrů neodhalila žádnou chybu při jejich zavádění do modelu, bylo rozhodnuto následně prošetřit vliv velikosti samotných vstupních parametrů. Pro tuto analýzu bylo vybráno bezrozměrné počáteční přiblížení kontaktních povrchů  $H_0$ , penalty faktor  $P_f$  a ladící parametr  $C_s$ . Velikost všech tří parametrů byla ve všech dostupných pracích popsána pouze pomocí intervalů a nikdy nebyla uvedena konkrétní hodnota.

Z grafické závislosti uvedené na obr. 4.13 a 4.14 jednoznačně vyplývá, že pro danou konfiguraci nemá počáteční aproximace přiblížení těles  $H_0$  zásadnější vliv na výsledky simulace. V práci Tana a kol. [28] je uvedeno, že lze brát hodnotu  $H_0$  z intervalu o velikosti 1, aniž by došlo ke zdatelnému ovlivnění výpočtu.

V simulacích (viz kap. 4.2.2 a obr. 4.13 a 4.14) byl analyzován interval hodnot o stejném rozpětí a výsledky plně korespondovaly s tímto tvrzením.

Grafy na obr. 4.15 a 4.16 dokazují, že vhodná změna velikosti penalty faktoru  $P_f$  může vést k znatelnější změně bezrozměrné tloušťky maziva  $H_{HD}$  (graf 4.17). Přesto však stále tato změna není příliš markantní. Hodnota bezrozměrného tlaku  $P$  se opět změnila pouze zanedbatelně, viz obr. 4.18. Změna velikosti penalty faktoru  $P_f$  tedy ve zvolené konfiguraci zásadnější roli nehraje.

To ovšem neplatí pro ladící parametr  $C_s$ . Z grafu na obr. 4.17 vyplývá, že změnou tohoto parametru se lze značně přiblížit k hodnotě bezrozměrného tlaku, která je predikována na základě Hertzovy teorie (viz vztahy (3.9), (3.10) a (3.14)). Zároveň však dochází v tomto případě k deformaci závislosti průběhu tloušťky maziva v kontaktu (tab. 4) a zejména k posunutí minima tloušťky mazacího filmu až do záporných hodnot (obr. 4.18). Čím blíže je hodnota bezrozměrného tlaku  $P$  predikované hodnotě, tím nesmyslnějších hodnot nabývá bezrozměrná tloušťka maziva  $H_{HD}$ . V tab. 4 (viz také příloha 3) lze také vysledovat, že se změnou ladícího parametru  $C_s$  dochází zároveň ke vzniku záporných hodnot bezrozměrného tlaku  $P$  v místě výstupu maziva z kontaktu. Tento parametr tudíž může negativně ovlivňovat kavitační podmínku a zřejmě mezi ním a penalty faktorem  $P_f$  existuje korelace.

Lze se tudíž oprávněně domnívat, že problém uvedeného numerického modelu tkví ve velikosti jednotlivých vstupních parametrů, zejména penalty faktoru  $P_f$  a ladícího parametru  $C_s$ . Nabízí se také otázka, zda by nebylo vhodnější zvolit jinou formu ošetření kavitační podmínky nebo stabilizace. Tato problematika si však žádá hlubší analýzu, která je nad rámec této diplomové práce.

## 6 ZÁVĚR

Cílem této diplomové práce bylo vytvořit funkční numerický model elastohydrodynamického (EHD) mazání s využitím metody konečných prvků (MKP). Na základě kritické rešerše (viz kap. 1.7 a 1.8) byl pro realizaci zvolen komerčně dostupný software COMSOL.

Protože software od verze 5.0 nově disponuje samostatným modulem Thin-Film Flow, byl nejprve vytvořen 2D liniový EHD kontakt s využitím tohoto modulu. V kap. 3.1 byl detailně rozebrán způsob, jakým je do modulu Thin-Film Flow implementována Reynoldsova rovnice (1.1) spolu s kavitační podmínkou (1.2) a rovnicí elastických deformací (1.3). Poté byl analyzován průběh tlaku a tloušťky maziva pro liniový kontakt, jehož parametry byly převzaty z dříve publikované práce [30] a následně porovnány s výsledky v této publikaci. Podařilo se stanovit odpovídající průběh tlaku (obr. 4.2), stejně tak byla dosažena velmi dobrá korelace kontaktního tlaku v centrální oblasti kontaktu s predikovanou hodnotou dle Hertzovy teorie, viz tab. 1 a obr. 4.2. Výsledky však vykazují značné oscilace, zejména v oblasti výstupu maziva z kontaktu. Centrální tloušťka maziva také dosahovala podobných hodnot jako v publikaci [30], avšak v globálním minimu se kvůli zmíněným oscilacím objevuje ostré minimum zasahující až do záporných hodnot. Tyto skutečnosti byly analyzovány a bylo zjištěno několik závažných nedostatků modulu Thin-Film Flow. Zásadní vliv na výsledky má špatně formulovaná kavitační podmínka (kap. 3.2 a kap. 5.1.1). V modelu je také implementován vztah pro závislost hustoty maziva na tlaku (3.7), který vykazuje rozdílné hodnoty oproti klasické rovnici (1.6) definované Dowsonem a Higginsonem, viz. kap. 5.1.2 a obr. 5.2. Nevhodný způsob zavádění rovnice rovnováhy (1.4) vylučuje použití rychlého multigradního iterativního řešiče (kap. 5.1.3) a defakto znemožňuje efektivní výpočet zejména v případě 3D bodového kontaktu. Model vytvořený v modulu Thin-Film Flow také vykazuje až příliš velkou citlivost na velikost počáteční aproximace přiblížení povrchů těles, což vede k domněně nevhodně implementované rovnici elastických deformací (kap. 5.1.4). Neefektivní stabilizace (kap. 5.1.5) a omezený řád diskretizace také přispívají k neefektivnímu řešení problematiky EHD mazání s využitím modulu Thin-Film Flow. Zmíněné nedostatky modulu nebylo možné predikovat, neboť dosud nebyla přímo k této problematice vydána žádná publikace nebo článek. Všechna závažná zjištění z této diplomové práce byla shrnuta do zprávy zaslané prostřednictvím distributora společnosti vyvíjející software COMSOL, kde následně budou brána v potaz při vývoji nové verze software.

V souvislosti se zmíněnými komplikacemi spojenými s modulem Thin-Film Flow bylo v druhé části diplomové práce přistoupeno k použití modulu umožňujícího zavádění parciálních diferenciálních rovnic (PDE). Nejprve byl podrobně rozebrán způsob implementace Reynoldsovy rovnice v tzv. *weak form* (kap. 3.2), poté bylo přistoupeno k vytvoření dvou 2D modelů liniového kontaktu.

První model liniového kontaktu byl vytvořen na základě hodnot publikovaných Tanem a kol. [28]. Byl získán odpovídající průběh bezrozměrné tloušťky maziva (kap. 4.2.1 a 5.2.1), která se na rozdíl od předchozího modelu shodovala i v případě minimální hodnoty tloušťky maziva (obr. 4.8 a obr. 5.3). Bezrozměrný tlak však nabýval hodnot dvojnásobných oproti predikci dle Hertzovy teorie (obr. 4.6) a nevznikal tzv. *pressure spike*. Tyto skutečnosti byly přisuzovány částečné numerické nestabilitě modelu.

Na závěr byl vytvořen druhý 2D model liniového kontaktu, který se již vyznačoval robustní numerickou stabilitou umožňující stanovit vlivy vybraných vstupních proměnných. Pro stanovení výchozích parametrů bylo využito práce Kumara a kol. [38], která obsahuje přesně definované hodnoty téměř všech počátečních parametrů výpočtu. Získaná hodnota bezrozměrného tlaku  $P$  byla v tomto případě asi o polovinu vyšší než predikovaná dle Hertzovy teorie asi o polovinu (obr. 4.9). Hodnoty tloušťky maziva se lišily od predikce dle Hamrocka a Dowsona (4.3) o tři řády, narůstají však se stejnou směrnicí (obr. 4.12), i jako hodnoty publikované v práci Kumara a kol. (obr. 5.4). Jelikož nebylo odhaleno žádné pochybení při zavádění rovnic do výpočtového modelu, byl následně analyzován vliv velikosti vstupních parametrů, jejichž konkrétní hodnoty nejsou v dostupných pracích uváděny. Z výsledků simulací bylo zjištěno, že velikost bezrozměrného počátečního přiblížení těles  $H_0$  nemá v případě zvolené konfigurace v intervalu o velikosti 1 zásadní vliv na výsledné hodnoty tlaku a tloušťky maziva (obr. 4.13 a 4.14). Byl tak ověřen předpoklad formulovaný v publikaci [28]. Z dalších výsledků vyplývá, že největší vliv na velikost tlaku a tloušťky maziva má ladící parametr  $C_s$  sloužící k stabilizaci Reynoldsovy rovnice (1.1). Zároveň tento parametr zřejmě koreluje s hodnotou penalty faktoru  $P_f$  (viz tab. 4) a společně tak přispívají k nepřesným výsledkům. Detailní citlivostní analýza vlivu změn jednotlivých vstupních parametrů a jejich kombinací na výsledné hodnoty však představuje mimořádně náročný úkol přesahující možnosti řešení této diplomové práce.

Hlavním přínosem předložené diplomové práce je především analýza modulu Thin-Film Flow ve spojitosti s řešením EHD mazání. Jedná se o první publikovanou komplexní práci na toto téma. Dále byl úspěšně vytvořen robustní výpočtový model a byl analyzován vliv některých parametrů. Tento model je zároveň jednoduše modifikovatelný a lze tak předpokládat jeho další rozvoj. Diplomová práce zároveň nastiňuje další možnosti analýz v souvislosti s parametry vystupujícími v kavitačním a stabilizačním členu Reynoldsovy rovnice.

**7 BIBLIOGRAFIE**

- [1] DOWSON, Duncan. *History of Tribology*. 2nd ed. London: Professional Engineering Publishing, 1998, 768 s. ISBN 18-605-8070-X.
- [2] HAMROCK, Bernard J. *Fundamentals of Fluid Film Lubrication*. 2nd ed. New York: McGraw-Hill, c1988, 690 s. ISBN 00-702-5956-9.
- [3] REYNOLDS, O.: On the Theory of Lubrication and its Application to Mr. Beauchamp Tower's Experiments, including an Experimental Determination of the Viscosity of Olive Oil. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 1886, p. 157-234.
- [4] URBANEC, L.: Numerická simulace elasto-hydrodynamicky mazaného kruhového kontaktu nehladkých povrchu. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2007. 81 s.
- [5] BARUS, C.: Isothermals, Isopiestic and Isometrics relative to Viscosity. *Am. J. of Science*, 1893, vol. 45, p. 87-96.
- [6] ROELANDS, C.J.A.: Correlational Aspects of the Viscosity-Temperature-Pressure Relationship of Lubricating Oils. *Ph.D. Thesis*, Technical University Delft, Delft, The Netherlands, 1966.
- [7] DOWSON, D., HIGGINSON, G.R.: *Elastohydrodynamic Lubrication, The Fundamentals of Roller and Gear Lubrication*. Pergamon Press, Oxford, Great Britain, 1966.
- [8] HAMROCK, B. J., D. DOWSON, D. EYHERAMENDY, G. MORALES-ESPEJEL a P. VERGNE. Isothermal Elastohydrodynamic Lubrication of Point Contacts. *Journal of Lubrication Technology* [online]. 1976, vol. 98, issue 2, s. 223- [cit. 2014-04-07]. DOI: 10.1115/1.3452801. Dostupné z: <http://Tribology.asmedigitalcollection.asme.org/article.aspx?articleid=1463255>
- [9] HAMROCK, Bernard J., Bo O. HAMROCK, D. EYHERAMENDY, G. MORALES-ESPEJEL a P. VERGNE. Elastohydrodynamic Lubrication of Line Contacts. *A S L E Transactions* [online]. 1984, vol. 27, issue 4, s. 275-287 [cit. 2014-04-07]. DOI: 10.1080/05698198408981572. Dostupné z: <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/05698198408981572>
- [10] OKAMURA, H.: A contribution to the numerical analysis of isothermal elastohydrodynamic lubrication. Proc. 9th Leeds-Lyon Symp. on Tribology, Leeds, 1982, p. 313-320.

- [11] HOUPERT, L. G., B. J. HAMROCK, D. EYHERAMENDY, G. MORALES-ESPEJEL a P. VERGNE. Fast Approach for Calculating Film Thicknesses and Pressures in Elastohydrodynamically Lubricated Contacts at High Loads. *Journal of Tribology* [online]. 1986, vol. 108, issue 3, s. 539- [cit. 2014-04-07]. DOI: 10.1115/1.3261220. Dostupné z: <http://Tribology.asmedigitalcollection.asme.org/article.aspx?articleid=1458811>
- [12] DOWSON, D., HIGGINSON, G.R.: A Numerical Solution to the Elastohydrodynamic Problem. *J. of Mech. Eng. Sci.*, 1959, vol. 1, p.6.
- [13] EVANS, H. P., L.M. KEER, D. EYHERAMENDY, G. MORALES-ESPEJEL a P. VERGNE. Inverse Solution of Reynolds' Equation of Lubrication Under Point-Contact Elastohydrodynamic Conditions. *Journal of Tribology* [online]. 1981-10-01, vol. 103, issue 4, s. 539- [cit. 2014-04-07]. DOI: 10.1115/1.3251733. Dostupné z: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0043164899001131>
- [14] LUBRECHT, A.A.: The numerical solution of the elastohydrodynamically lubricated line and point contact problem, using multigrid techniques. *Ph.D. Thesis*, University Enschede, The Netherlands, 1987.
- [15] VENNER, C. H.: Multilevel solution of the EHL line and point contact problems. *Thesis*, University Enschede, The Netherlands, 1991.
- [16] POLONSKY, I.A., L.M. KEER, D. EYHERAMENDY, G. MORALES-ESPEJEL a P. VERGNE. A numerical method for solving rough contact problems based on the multi-level multi-summation and conjugate gradient techniques. *Wear* [online]. 1999, vol. 231, issue 2, s. 206-219 [cit. 2014-04-07]. DOI: 10.1016/S0043-1648(99)00113-1. Dostupné z: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0043164899001131>
- [17] EVANS, H P, T G HUGHES, D. EYHERAMENDY, G. MORALES-ESPEJEL a P. VERGNE. Evaluation of deflection in semi-infinite bodies by a differential method. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science* [online]. 2000-1-1, vol. 214, issue 4, s. 563-584 [cit. 2014-04-07]. DOI: 10.1243/0954406001523911. Dostupné z: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0301679X07000242>
- [18] HOLMES, M J A, H P EVANS, T G HUGHES a R W SNIDLE. Transient elastohydrodynamic point contact analysis using a new coupled differential deflection method Part 2: results. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology* [online]. 2003-1-1, vol. 217, issue 4, s. 305-322 [cit. 2014-04-07]. DOI: 10.1243/135065003768618650. Dostupné z: <http://pij.sagepub.com/lookup/doi/10.1243/135065003768618650>



- [19] HOLMES, M J A, H P EVANS, T G HUGHES a R W SNIDLE. Transient elastohydrodynamic point contact analysis using a new coupled differential deflection method Part 1: theory and validation. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology* [online]. 2003-1-1, vol. 217, issue 4, s. 289-304 [cit. 2014-04-07]. DOI: 10.1243/135065003768618641. Dostupné z: <http://pij.sagepub.com/lookup/doi/10.1243/135065003768618641>
- [20] HABCHI, W., I. DEMIRCI, D. EYHERAMENDY, G. MORALES-ESPEJEL a P. VERGNE. A finite element approach of thin film lubrication in circular EHD contacts: theory and validation. *Tribology International* [online]. 2007, vol. 40, 10-12, s. 1466-1473 [cit. 2014-04-07]. DOI: 10.1016/j.triboint.2007.01.017. Dostupné z: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0301679X07000242>
- [21] HABCHI, W., D. EYHERAMENDY, P. VERGNE, G. MORALES-ESPEJEL a M. A. WALKLEY. A Full-System Approach of the Elastohydrodynamic Line/Point Contact Problem: Part 1—Theoretical Formulation. *Journal of Tribology*[online]. 2008, vol. 130, issue 2, s. 021501- [cit. 2014-04-07]. DOI: 10.1115/1.2842246. Dostupné z: <http://Tribology.asmedigitalcollection.asme.org/article.aspx?articleid=1463255>
- [22] ALMQVIST, T. a R. LARSSON. The Navier–Stokes approach for thermal EHL line contact solutions. *Tribology International* [online]. 2002, vol. 35, issue 3, s. 163-170 [cit. 2014-05-13]. DOI: 10.1016/S0301-679X(01)00112-8. Dostupné z: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0301679X01001128>
- [23] FRANEK, Friedrich, et al. Simulation of Tribo systems and Tribometry. *Tribology in Industry*, 2007, 29.1-2: 3-12.
- [24] PENNEC, Fabienne, et al. Verification of contact modeling with COMSOL multiphysics software. 2007. Dostupné z: [http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/18/02/57/PDF/FP\\_Final\\_Paper\\_EUROSIM07.pdf](http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/18/02/57/PDF/FP_Final_Paper_EUROSIM07.pdf)
- [25] COMSOL. *Structural Mechanics Module Verification Models* [online]. 2011, 166 s. [cit. 2014-04-07]. Dostupné z: <http://www.cae-club.ru/sites/default/files/users/files/252/structuralmechanicsmoduleverificationmodels.pdf>
- [26] SHI, Jun. *Contact Mechanics* [online]. 2009, 11 s. [cit. 2014-04-07]. Dostupné z: <http://www.ewp.rpi.edu/hartford/users/papers/engr/ernesto/shij/FWM/homework/HW3.pdf>
- [27] FILLOT, Nicolas; DOKI-THONON, Thomas; HABCHI, Wassim. The Full-System Approach for Elastohydrodynamic Lubrication. 2009. Dostupné z: <http://www.comsol.kr/papers/6966/download/Fillot.pdf>

- [28] TAN, X., C. E. GOODYER, P. K. JIMACK, R. I. TAYLOR a M. A. WALKLEY. Computational approaches for modelling elasto-hydrodynamic lubrication using multiphysics software. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology* [online]. 2012-05-14, vol. 226, issue 6, s. 463-480 [cit. 2014-04-07]. DOI: 10.1177/1350650111428028. Dostupné z: <http://pij.sagepub.com/lookup/doi/10.1177/1350650111428028>
- [29] RÀFOLS, Francesc Pérez. *Modeling of Combustion Engine Bearing Lubrication* [online]. Luleå, 2013 [cit. 2014-04-07]. Dostupné z: <http://pure.ltu.se/portal/files/43747180/LTU-EX-2013-43369046.pdf>. Master's thesis. Luleå University of Technology. Vedoucí práce Prof. Roland Larsson, M.Sc., Ph.D.
- [30] SZÁVAI, S. a S. KOVÁCS. Development of calculating process for elasto-hydrodynamic spot contact by P-FEM. *Design of Machines and structures* [online]. 2014-04-30, vol. 4, issue 1, s. 87-98 [cit. 2015-04-20]. Dostupné z: [http://www.matarka.hu/koz/ISSN\\_1785-6892/vol\\_4\\_no1\\_2014/ISSN\\_1785-6892\\_vol\\_4\\_no1\\_2014\\_087-098.pdf](http://www.matarka.hu/koz/ISSN_1785-6892/vol_4_no1_2014/ISSN_1785-6892_vol_4_no1_2014_087-098.pdf)
- [31] WESCHTA, M.; TREMMEL, S.; WARTZACK, S. Simulation of Microstructured Rolling-Sliding Contacts. 2014. Dostupné z: [http://www.comsol.com/paper/download/194565/weschta\\_paper.pdf](http://www.comsol.com/paper/download/194565/weschta_paper.pdf)
- [32] COMSOL. *CFD Module User's Guide*. 2014, 624 s.
- [33] ELROD, H. G. 1981. A Cavitation Algorithm. *Journal of Lubrication Technology* [online]. 103(3): 350- [cit. 2015-03-08]. DOI: 10.1115/1.3251669. ISSN 00222305. Dostupné z: <http://Tribology.asmedigitalcollection.asme.org/article.aspx?articleid=1464730>
- [34] SHIGLEY, Joseph Edward, Charles R MISCHKE a Richard G BUDYNAS. *Konstruování strojních součástí*. 1. vyd. Editor Miloš Vlk. Překlad Martin Hartl. V Brně: VUTIUM, 2010, xxv, 1159 s. Překlady vysokoškolských učebnic. ISBN 978-80-214-2629-0.
- [34] LIU, Chien. A Brief Introduction to the Weak Form. In: *COMSOL* [online]. 19.11.2014 [cit. 2015-03-08]. Dostupné z: <http://www.comsol.com/blogs/brief-introduction-weak-form/>
- [35] SCHIECHE, Bettina. The Strength of the Weak Form. In: *COMSOL* [online]. 29.4.2014 [cit. 2015-03-08]. Dostupné z: <https://www.comsol.co.in/blogs/strength-weak-form/>
- [36] VENNER, C a A LUBRECHT. *Multilevel methods in lubrication*. 1st ed. New York: Elsevier, 2000, xx, 379 p. ISBN 0444505032-

- [37] WU, S.R. A penalty formulation and numerical approximation of the Reynolds-Hertz problem of elastohydrodynamic lubrication. *International Journal of Engineering Science* [online]. 1986, vol. 24, issue 6, s. 1001-1013 [cit. 2015-03-08]. DOI: 10.1016/0020-7225(86)90032-7.
- [38] KUMAR, Punit, M. M. KHONSARI a Scott BAIR. Full EHL Simulations Using the Actual Ree-Eyring Model for Shear-Thinning Lubricants. *Journal of Tribology* [online]. 2009, vol. 131, issue 1 [cit. 2015-05-06]. DOI: 10.1115/1.3002328.
- [39] LUBRECHT, A A, C H VENNER a F COLIN. Film thickness calculation in elasto-hydrodynamic lubricated line and elliptical contacts: the Dowson, Higginson, Hamrock contribution. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology* [online]. 2009, vol. 223, issue 3, s. 511-515 [cit. 2015-05-06]. DOI: 10.1243/13506501jet508.

**8 SEZNAM POUŽITÝCH ZKRATEK, SYMBOLŮ A VELIČIN**

mm	- jednotka délky
MPa	- jednotka tlaku
$O$	- počet matematických operací v jednom kroku výpočtu pro jednu rovnici
$\Omega$	- výpočtová oblast kontaktu, ve které se vyskytuje mazivo
$\Omega_1$	- vstupní oblast maziva do kontaktu
$\Omega_2$	- výstupní oblast maziva z kontaktu, kde dochází ke kavitaci
$\Omega_s$	- výpočtová oblast pevného tělesa (kap. 3)
$b$	- testovací (váhová) funkce (kap. 3)
$n$	- počet uzlových bodů (kap. 1)
$\hat{n}$	- normálový vektor (kap. 3)
$\alpha$ ( $\text{Pa}^{-1}$ )	- tlakově-viskózní koeficient
$\beta$ ( $\text{Pa}^{-1}$ )	- kompresibilita
$\Delta p_{sw}$ (MPa)	- šířka kavitačního přechodu
$\varepsilon$ (—)	- bezrozměrný parametr v Reynoldsově rovnici
$\eta, \mu$ ( $\text{Pa} \cdot \text{s}$ )	- dynamická viskozita maziva
$\eta_0, \mu_0$ ( $\text{Pa} \cdot \text{s}$ )	- dynamická viskozita maziva při atmosférickém tlaku
$\lambda$ (—)	- bezrozměrný parametr rychlosti
$\rho$ ( $\text{kg} \cdot \text{m}^3$ )	- hustota maziva
$\rho_c$ ( $\text{kg} \cdot \text{m}^3$ )	- hustota maziva při kavitačním tlaku
$\rho_0$ ( $\text{kg} \cdot \text{m}^3$ )	- počáteční hustota maziva
$\sigma$ (MPa)	- normálové napětí
$\nu$ (—)	- Poissonův poměr
$a$ (mm)	- polovina šířky kontaktní oblasti
$E$ (MPa)	- Youngův modul
$E'$ (MPa)	- ekvivalentní Youngův modul
$F, w$ ( $\text{N}, \text{N} \cdot \text{m}^{-1}$ )	- vnější silové zatížení
$G$ (—)	- bezrozměrný parametr materiálu
$h$ ( $\mu\text{m}$ )	- tloušťka maziva v kontaktu
$h_0$ ( $\mu\text{m}$ )	- počáteční aproximace přiblížení povrchů těles
$h_{min}$ (mm)	- minimální tloušťka maziva
$h_w, h_b$ (mm)	- vzdálenosti povrchů kontaktních těles od referenční roviny
$H$ (—)	- bezrozměrná tloušťka mazacího filmu
$H_0$ (—)	- bezrozměrná počáteční aproximace přiblížení povrchů těles
$H_{HD}$ (—)	- bezrozměrná tloušťka mazacího filmu dle Hamrocka a Dowsona

$H_{minHD}$ (–)	- predikce bezrozměrné minimální tloušťky maziva v liniiovém kontaktu dle Hamrocka a Dowsona
$l$ (mm)	- délka kontaktní oblasti
$L$ (–)	- Moesův bezrozměrný parametr deformace
$M$ (–)	- Moesův bezrozměrný parametr zatížení
$p, p_f$ (MPa)	- kontaktní tlak
$p_A$ (Pa)	- hodnota absolutního tlaku
$p_h$ (MPa)	- Hertzův tlak pro jednotlivý typ kontaktu
$P$ (–)	- bezrozměrný tlak
$P_f$ (–)	- penalty faktor
$R_x, R_y$ (mm)	- redukovaný poloměr křivosti těles pro směr osy $x$ a $y$
$t$ (s)	- čas
$u$ (mm)	- deformace povrchu kontaktního tělesa
$u_m$ (–)	- střední rychlost pohybu kontaktních povrchů
$u_s$ (–)	- suma rychlostí pohybu kontaktních povrchů
$U$ (–)	- bezrozměrný parametr rychlosti
$v$ ( $m \cdot s^{-1}$ )	- rychlost pohybu povrchu kontaktního tělesa
$v_{av}$ ( $m \cdot s^{-1}$ )	- rychlost pohybu maziva v referenční rovině
$W$ (–)	- bezrozměrný parametr vnějšího zatížení
$x, y$ (mm)	- kartézské souřadnice
$X$ (–)	- bezrozměrná souřadnice v ose $x$
$z$ (–)	- tlakově-viskózní index
2D	- dvojdimenzionální
3D	- trojdimenzionální
CFD	- computational fluid dynamics
DD-FSA	- double domain full-system approach
DDM	- diferenciálně deformační metoda
EHD	- elastohydrodynamické
GLS/SUPG	- Galerkinova MKP formulace zkombinovaná s metodou nejmenších čtverců a upwind diskretizací
ID	- isotropická difuze
MKP	- metoda konečných prvků
PDE	- partial differential equation
SD-FSA	- single domain full-system approach

## 9 SEZNAM OBRÁZKŮ A GRAFŮ

<b>Obr. 0.1</b> Nalévání maziva (vody) do míst kontaktu dřevěné podložky a dřevěných saní při převážení sochy egyptského velkostatkáře Cuje [1]	13
<b>Obr. 1.1</b> Znázornění výpočetní oblasti řešení $\Omega$ , kruhově je vyznačena kontaktní oblast [4]	14
<b>Obr. 1.2</b> Srovnání relativní viskozity $\eta/\eta_0$ v závislosti na tlaku $p$ pro Barusův a Roelandsův vztah [4]	15
<b>Obr. 1.3</b> Rozložení tlaku v kontaktu nehladkých povrchů určené pomocí metody sdružených gradientů (výpočetní oblast o velikosti 121 x 103 uzlových bodů) [16]	18
<b>Obr. 1.4</b> Konečnoprvková síť v kontaktní oblasti $\Omega_C$ [20]	19
<b>Obr. 1.5</b> Kontaktní tlak v bodovém kontaktu s použitím různých MKP formulací: Garlekinovy, GLS/SUPG a GLS/SUPG+ID [21]	19
<b>Obr. 1.6</b> Změna teploty v disku při experimentální konfiguraci pin-on-disk [23]	20
<b>Obr. 1.7</b> Napětí v kontaktu desky a válce [25]	21
<b>Obr. 1.8</b> Napětí v tělese po zatížení tuhým razníkem [26]	21
<b>Obr. 1.9</b> Rozložení tlaku a tloušťka maziva v bodovém kontaktu – simulace provedená Fillotem, Doki-Thononem a Habchim v software COMSOL [27]	22
<b>Obr. 1.10</b> Různě hustá konečnoprvková síť pro statický výpočtový model v [28]	22
<b>Obr. 1.11</b> Srovnání bezrozměrného tlaku a tloušťky maziva v bodovém kontaktu pro různě hustou konečnoprvkovou síť a různé přístupy: IA, SD-FSA a DD-FSA [28]	23
<b>Obr. 1.12</b> Bezrozměrný tlak a tloušťky maziva v liniovém kontaktu při čistém valení; mikrostruktura ve středu kontaktu [31]	24
<b>Obr. 3.1</b> Označení proměnných vstupujících do výpočtu při použití modulu Thin-Film Flow [32]	27
<b>Obr. 3.2</b> Okrajové podmínky pro 2D model liniového kontaktu	32
<b>Obr. 4.1</b> 3D model bodového kontaktu a 2D model liniového kontaktu	34
<b>Obr. 4.2</b> Průběh tlaku $p$ v liniovém kontaktu; 2D model; modul Thin-Film Flow; velikost parametrů výpočtu dle tab. 1	35
<b>Obr. 4.3</b> Průběh tloušťky maziva $h$ v liniovém kontaktu; 2D model; modul Thin-Film Flow; velikost parametrů výpočtu dle tab. 1	35
<b>Obr. 4.4</b> Průběh tloušťky maziva $h$ v liniovém kontaktu; 2D model; modul Thin-Film Flow; velikost parametrů výpočtu dle tab. 1; $h_0 = 0.218127\mu\text{m}$	36
<b>Obr. 4.5</b> Průběh tloušťky maziva $h$ v liniovém kontaktu; 2D model; modul Thin-Film Flow; velikost parametrů výpočtu dle tab. 1; $h_0 = 0.238127\mu\text{m}$	36
<b>Obr. 4.6</b> Průběh bezrozměrného tlaku $P$ v liniovém kontaktu; první 2D model; modul PDE; velikost parametrů výpočtu dle tab. 2	38
<b>Obr. 4.7</b> Průběh bezrozměrné tloušťky maziva $H$ v liniovém kontaktu; první 2D model; modul PDE; velikost parametrů výpočtu dle tab. 2	38
<b>Obr. 4.8</b> Detail minima průběhu bezrozměrné tloušťky maziva $H$ v liniovém kontaktu; první 2D model; modul PDE; velikost parametrů výpočtu dle tab. 2	39
<b>Obr. 4.9</b> Průběh bezrozměrného tlaku $P$ v liniovém kontaktu; druhý 2D model; modul PDE; velikost parametrů výpočtu dle tab. 3	40
<b>Obr. 4.10</b> Průběh bezrozměrné tloušťky maziva dle Hamrocka a Dowsona v liniovém kontaktu; druhý 2D model; modul PDE; velikost parametrů výpočtu dle tab. 3	41

- Obr. 4.11** Graf konvergence; druhý 2D model; modul PDE; velikost parametrů výpočtu dle tab. 3 41
- Obr. 4.12** Srovnání závislosti minimální tloušťky maziva na rychlosti pohybu kontaktních povrchů pro predikci dle Hamrocka a Dowsona [39] a pro data získaná simulací; druhý 2D model; modul PDE; velikost parametrů výpočtu dle tab. 3 42
- Obr. 4.13** Závislost bezrozměrného maximálního tlaku  $P$  na velikosti počátečního přiblížení kontaktních povrchů  $H_0$ ; druhý 2D model; modul PDE; velikost parametrů výpočtu dle tab. 3; červeně zvýrazněna hodnota  $H_0$  dle tab. 3 42
- Obr. 4.14** Závislost bezrozměrné minimální tloušťky maziva dle Hamrocka a Dowsona HHD velikosti počátečního přiblížení kontaktních povrchů  $H_0$ ; druhý 2D model; modul PDE; velikost parametrů výpočtu dle tab. 3; červeně zvýrazněna hodnota  $H_0$  dle tab. 3 43
- Obr. 4.15** Závislost bezrozměrného maximálního tlaku  $P$  na velikosti penalty faktoru  $P_f$ ; druhý 2D model; modul PDE; velikost parametrů výpočtu dle tab. 3; červeně zvýrazněna hodnota  $P_f$  dle tab. 3 43
- Obr. 4.16** Závislost bezrozměrné minimální tloušťky maziva dle Hamrocka a Dowsona HHD na velikosti penalty faktoru  $P_f$ ; druhý 2D model; modul PDE; velikost parametrů výpočtu dle tab. 3; červeně zvýrazněna hodnota  $P_f$  dle tab. 3 44
- Obr. 4.17** Závislost bezrozměrného maximálního tlaku  $P$  na velikosti ladícího parametru  $C_s$ ; druhý 2D model; modul PDE; velikost parametrů výpočtu dle tab. 3; červeně zvýrazněna hodnota  $C_s$  dle tab. 3 a korektní hodnota tlaku  $P$  44
- Obr. 4.18** Závislost bezrozměrné minimální tloušťky maziva dle Hamrocka a Dowsona HHD na velikosti ladícího parametru  $C_s$ ; druhý 2D model; modul PDE; velikost parametrů výpočtu dle tab. 3; červeně zvýrazněna hodnota  $C_s$  dle tab. 3 45
- Obr. 5.1** Průběh tloušťky maziva  $h$  v liniovém kontaktu, velikost parametrů výpočtu dle tab. 1 [28] 47
- Obr. 5.2** Srovnání hustoty maziva  $\rho$  v závislosti na tlaku  $p$  pro vztah dle Dowsona a Higginsona [7] (1.6) a vztah implementovaný v modulu Thin-Film FLOW (3.7), počáteční hustota  $\rho_0 = 858,44 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  (dle tab. 1),  $\beta = 5 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$  48
- Obr. 5.3** Bezrozměrný tlak  $P$  a bezrozměrná tloušťka maziva  $H$  pro liniový kontakt; hodnoty parametrů dle tab. 1; Tan a kol. [28] 50
- Obr. 5.4** Srovnání závislosti centrální tloušťky mazacího filmu na rychlosti pohybu kontaktních povrchů pro data získaná experimentálně Dysonem a Wilsonem a pro numerickou simulaci; velikost vstupních parametrů dle tab. 3; Kumar a kol. [38] 51

**10** **10 SEZNAM TABULEK**

<b>Tab. 1</b> Modul Thin-Film Flow; 2D model liniového kontaktu - počáteční hodnoty parametrů .....	34
<b>Tab. 2</b> Modul PDE; první 2D model liniového kontaktu - počáteční hodnoty parametrů .....	37
<b>Tab. 3</b> Modul PDE; druhý 2D model liniového kontaktu - počáteční hodnoty parametrů .....	40
<b>Tab. 4</b> Modul PDE; druhý 2D model liniového kontaktu; grafické porovnání bezrozměrné tloušťky maziva HHD, bezrozměrného tlaku P a konvergence pro dvě rozdílné hodnoty ladícího parametru Cs .....	46



**11 SEZNAM PŘÍLOH****11**

---

**Příloha 1** – 2D liniový kontakt dle Kumara a kol., grafické výsledky simulací pro různé hodnoty počátečního přiblížení kontaktních povrchů  $H_0$

**Příloha 2** – 2D liniový kontakt dle Kumara a kol., grafické výsledky simulací pro různé hodnoty penalty faktoru  $P_f$

**Příloha 3** – 2D liniový kontakt dle Kumara a kol., grafické výsledky simulací pro různé hodnoty ladícího parametru  $C_s$

**Příloha 4** – 2D\_line\_contact\_Thin-Film\_Flow.mph

**Příloha 5** – 2D\_line\_contact\_PDE\_Tan.mph

**Příloha 6** – 2D\_line\_contact\_PDE\_Kumar.mph

**Příloha 7** – Technical report of using Thin-Film Flow module for EHD lubrication