



# VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

## FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

## ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A BIOMECHANIKY

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

## VLIV ZBYTKOVÝCH NAPĚTÍ NA KONTAKTNÍ PORUŠOVÁNÍ KERAMICKÝCH LAMINÁTŮ

INFLUENCE OF THE RESIDUAL STRESSES ON THE CONTACT FAILURE OF CERAMIC LAMINATES

### DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

### AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. Roman German

### VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. Oldřich Ševeček, Ph.D.

BRNO 2018

# Zadání diplomové práce

Ústav:	Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Student:	<b>Bc. Roman German</b>
Studijní program:	Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor:	Inženýrská mechanika a biomechanika
Vedoucí práce:	<b>Ing. Oldřich Ševeček, Ph.D.</b>
Akademický rok:	2017/18

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

## **Vliv zbytkových napětí na kontaktní porušování keramických laminátů**

### **Stručná charakteristika problematiky úkolu:**

Keramické materiály jsou stále atraktivnější pro různé technické aplikace, kde je vyžadována velká odolnost vůči teplotám, opotřebením nebo je žádoucí snížení hmotnosti dané součásti (např. keramické náhrady dílů spalovacích motorů, ložisek apod.). Zásadní problém při nasazení těchto materiálů však spočívá v jejich křehkosti a odlišném lomově–mechanickém chování v porovnání s kovy. Specifickou oblastí je např. křehké porušení vlivem kontaktu s tuhým tělesem menších rozměrů, jako např. kulička nebo váleček, kde v okolí takového kontaktu mohou vznikat trhliny vedoucí až k neprovoznímu porušení povrchu součásti (oddělení části povrchu). Odolnost vůči takovému poškození mohou (pozitivně/negativně) ovlivňovat i zbytková napětí uvnitř struktury, které lze vyvolat například vrstvením různých keramických materiálů (o odlišných teplotních roztažnostech). Cílem práce by tedy bylo studium vlivu zbytkové napjatosti uvnitř struktury a tloušťky kontaktní vrstvy na vznik trhlin v okolí kontaktu s kulovým tělesem a nalezení optimálních hodnot těchto parametrů (z pohledu maximální možné provozní spolehlivosti a životnosti keramického povrchu). Úkolem studenta by bylo seznámit se se základy kontaktní mechaniky a modelováním kontaktu kulová plocha vs keramická deska/laminát se zbytkovými napětími (s využitím MKP softwaru Ansys a teoretických poznatků kontaktní mechaniky). Dále bude nutné osvojit si základy lomové mechaniky a přístupů k analýze podmínek nutných pro vznik a šíření trhliny v křehkých materiálech a analyzovat kritické podmínky pro vznik trhlin v okolí styku uvedených těles. V závěru práce budou získané poznatky porovnány s experimentálním pozorováním na reálných vzorcích.

**Cíle diplomové práce:**

- 1) Rešerše v oblasti modelování kontaktního porušování keramických materiálů.
- 2) Vytvoření 2D/3D MKP modelu kontaktního problému tuhá koule vs vícevrstvá keramická deska obsahující residuální napětí a jeho deformačně–napěťová analýza.
- 3) Porovnání výsledků MKP analýzy s analytickým modelem kontaktního problému.
- 4) Analýza zátěžných podmínek nutných pro vznik trhliny v okolí kontaktu a analýza jejího dalšího šíření.
- 5) Parametrická studie vlivu velikosti vtlačované kulové plochy, velikosti zbytkových napětí a tloušťky povrchové kontaktní vrstvy laminátu na vznik porušení.
- 6) Porovnání výsledků s dostupnými experimentálními pozorováními.

**Seznam doporučené literatury:**

JOHNSON, K.L. Contact mechanics, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1995

ANSYS Inc, ANSYS Release 18.1 User's manual, Pennsylvania, 2016.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2017/18

V Brně, dne

L. S.

---

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.  
ředitel ústavu

---

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.  
děkan fakulty

## Abstrakt

Prítomnosť tlakových či ťahových teplotných reziduálnych napätí vo vrstvách keramického laminátu, vznikajúcich dôsledkom rôznej objemovej zmeny materiálov jednotlivých vrstiev pri chladnutí z teploty slinovania, môže výrazne ovplyvniť odolnosť keramiky voči kontaktnému porušeniu. V rámci tejto práce boli vytvorené parametrické 2D MKP modely, na ktorých bol skúmaný vplyv hrúbky kontaktnej vrstvy, veľkosti zvyškových napätí a rozmerov vtláčovaného guľového indentoru na vznik a šírenie kónickej trhliny v povrchovej vrstve laminátu. Pre analýzu kritických podmienok vzniku trhliny bolo použité združené energeticko-napät'ové kritérium a pre určenie dráhy šírenia trhliny kritérium maximálneho tangenciálneho napätia. Výsledky výpočtov ukazujú, že tlakové teplotné napätia v povrchovej vrstve zvyšujú kritickú silu potrebnú pre vznik trhliny, znižujú jej vzdialenosť od kontaktnej plochy a vedú k vzniku kratších trhlín. Ďalej tieto tlakové napätia zvyšujú odklon smeru ďalšieho rastu trhliny, čo vedie k jej skoršiemu zastaveniu. Ťahové teplotné napätia v kontaktnej vrstve vykazujú presne opačný efekt. Výsledky výpočtov boli porovnané s experimentom, vďaka malému množstvu dostupných meraní je však ich verifikácia čiastočne obmedzená.

## Abstract

The presence of the compressive or tensile thermal residual stresses in layers of a ceramic laminate induced due to different volume change of each layer's material during the cooling from the sintering temperature can considerably affect resistivity of ceramics against contact damage. Within this work 2D parametric FEM models were created, in order to study the effect of the surface layer thickness, residual stress values and indenting body dimension on the initiation and propagation of the cone crack in the surface layer of the laminate. For the analysis of the critical conditions for the crack initiation, the coupled stress-energy criterion was used and for the determination of the direction of crack propagation we used the maximum tangential stress criterion. The results show that compressive thermal stresses in the surface layer increase the critical force for the crack initiation, shorten the crack distance from the contact area and shorten the occurred crack itself. Moreover, the compressive stresses enlarge the angle of the crack declination during the propagation process which cause an earlier crack arrest. The tensile thermal stresses have exactly the opposite effect. Results of simulations were compared to experimental results but due to lack of available measurements, the verification is partially limited.

## Kľúčové slová

keramický laminát, zvyškové napätia, kontaktné porušovanie, Hertzov kontakt, združené energeticko-napät'ové kritérium, MTS kritérium, iniciácia trhliny, šírenie trhliny, MKP

## Key words

ceramic laminate, residual stresses, contact damage, Hertzian contact, coupled stress-energy criterion, MTS criterion, crack initiation, crack propagation, FEM

## **Bibliografická citácia**

GERMAN, Roman. Vliv zbytkových napětí na kontaktní porušování keramických laminátů. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2018. 55 s. Vedúci diplomovej práce Ing. Oldřich Ševeček, Ph.D.

## **Prehlásenie**

Prehlasujem, že som diplomovú prácu na tému „Vliv zbytkových napětí na kontaktní porušování keramických laminátů“ vypracoval samostatne pod vedením Ing. Oldřicha Ševečka, Ph.D. s použitím odbornej literatúry a prameňov vymenovaných na zozname, ktorý je uvedený na konci tejto práce.

V Brne dňa 24. 5. 2018

.....

Roman German

## **Pod'akovanie**

Týmto sa chcem pod'akovať vedúcemu mojej práce Ing. Oldřichovi Ševečkovi, Ph.D. za cenné rady a pripomienky, ktoré mi pomohli k vyhotoveniu tejto práce a Dr. Raulovi Bermejovi za poskytnuté experimentálne výsledky.

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b> .....	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>Rešerš - keramické konštrukčné materiály</b> .....	<b>12</b>
2.1	Zloženie a štruktúra keramických materiálov .....	12
2.2	Výroba keramiky.....	13
2.3	Mechanické vlastnosti keramických materiálov .....	14
2.3.1	Nízka plasticita a krehkosť .....	14
2.3.2	Lomová húževnatosť a pevnosť .....	14
2.3.3	Zhúževnatenie keramiky pomocou fázovej transformácie $ZrO_2$ .....	15
2.4	Keramické lamináty .....	15
2.5	Kontaktné porušovanie keramiky.....	16
<b>3</b>	<b>Charakteristiky a veličiny podstatné pre riešenie problému</b> .....	<b>18</b>
3.1	Množina podstatných charakteristík problému .....	18
3.2	Systém podstatných veličín .....	19
<b>4</b>	<b>Mechanika kontaktu</b> .....	<b>20</b>
4.1	Hertzova teória neadhezívneho elastického kontaktu .....	20
4.1.1	Hertzova teória kontaktu dvoch guľových plôch .....	20
4.1.2	Kontakt vrstvených štruktúr .....	23
4.2	Kontaktný problém a metóda konečných prvkov .....	24
4.2.1	Využitie Hertzovej teórie pre linearizáciu výpočtu MKP .....	25
<b>5</b>	<b>Vznik a šírenie trhlín v keramike</b> .....	<b>26</b>
5.1	Iniciácia trhliny v keramike.....	26
5.1.1	Energetický prístup LELM a podmienka pre šírenie trhliny.....	26
5.1.2	Napäťový prístup LELM a podmienka pre šírenie trhliny .....	27
5.1.3	Združené energeticko-napäťové kritérium iniciácie trhliny.....	28
5.2	Šírenie trhliny.....	29
<b>6</b>	<b>Deformačne-napäťová MKP analýza kontaktu viacvrstvovej keramickej dosky s guľovým indentačným telesom</b> .....	<b>32</b>
6.1	Popis modelu .....	33
6.2	Výsledky výpočtu a porovnanie s analytickým riešením.....	35



<b>7</b>	<b>Predikcia vzniku prstencovej trhliny v keramickom lamináte .....</b>	<b>39</b>
7.1	Popis modelu .....	40
7.1.1	Voľba okrajovej podmienky simulujúcej kontakt .....	42
7.1.2	Konvergencia siete .....	43
7.2	Výsledky analýzy podmienok pre iniciáciu trhliny.....	44
<b>8</b>	<b>Analýza ďalšieho šírenia trhliny .....</b>	<b>47</b>
8.1	Popis modelu .....	47
8.2	Voľba kritéria pre určenie smeru šírenia trhliny .....	49
8.3	Porovnanie trajektórií trhliny .....	49
<b>9</b>	<b>Porovnanie simulácií s experimentom .....</b>	<b>52</b>
<b>10</b>	<b>Záver.....</b>	<b>55</b>
	<b>Zoznam použitej literatúry</b>	
	<b>Zoznam použitých symbolov a skratiek</b>	

# 1 Úvod

Keramické materiály sú dnes vďaka svojim vlastnostiam stále viac využívané pre výrobu súčastí, u ktorých vyžadujeme dobrú mechanickú odolnosť za vysokých teplôt, oteruvzdornosť, vysokú pevnosť v tlaku, vysokú tvrdosť alebo z nejakého dôvodu potrebujeme znížiť hmotnosť dielu a súčasne zachovať tuhosť a pevnostné charakteristiky. Medzi takéto aplikácie patria napríklad rôzne tvárniace a vytlačovacie nástroje, niektoré komponenty vznetrových spaľovacích motorov a turbodúchadiel, valivé ložiská atď.

Daňou, ktorú musíme zaplatiť za kladné vlastnosti keramiky, je jej krehkosť, veľký rozptyl pevnosti v dôsledku prítomnosti pórov a dutín v štruktúre a celkovo odlišné lomové chovanie v porovnaní s kovmi. Špecifickým problémom, ktorý nastáva pri nasadení keramiky ako konštrukčného materiálu pre vyššie uvedené aplikácie, je krehké porušenie povrchu súčasti vplyvom kontaktu s telesom menších rozmerov, ako napríklad guľička alebo valček v prípade valivých ložísk apod. To môže mať za následok až oddelenie časti povrchu, ktoré bráni schopnosti takejto súčasti ďalej vykonávať svoju funkciu.

Odolnosť voči kontaktnému porušovaniu môže pozitívne i negatívne ovplyvňovať prítomnosť zvyškových napätí v štruktúre, ktoré je možné vyvolať napríklad vrstvením keramických materiálov s rôznou teplotnou rozťažnosťou. Hlavným cieľom tejto práce je preto pomocou výpočtového modelovania metódou konečných prvkov preskúmať vplyv veľkosti týchto napätí, resp. hrúbky kontaktnej vrstvy na vznik a šírenie trhlin v okolí kontaktu keramického laminátu s guľovým telesom a nájsť optimálne hodnoty týchto parametrov z hľadiska životnosti keramického povrchu.



*Obr. 1.1: Príklady aplikácie keramiky [1,2]*

## 2 Rešerš - keramické konštrukčné materiály

Keramické materiály sú anorganické materiály, ktoré pozostávajú z kovových a nekovových prvkov viazaných iónovými alebo iónovo-kovalentnými väzbami. Konštrukčná keramika sa dnes prevažne vyrába z čistých, umelo pripravených práškových oxidov, nitridov alebo karbidov. Medzi najpoužívanejšie konštrukčné keramiky patrí oxid hlinitý ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ), nitrid kremíku ( $\text{SiN}$ ), karbid kremíku ( $\text{SiC}$ ) a oxid zirkoničitý ( $\text{ZrO}_2$ ). Pre svoje vlastnosti ako vysoká teplota tavenia, chemická stabilita, vysoká tvrdosť a pevnosť a nízka hustota sú keramické materiály dôležitými a často nenahraditeľnými konštrukčnými materiálmi [3].

### 2.1 Zloženie a štruktúra keramických materiálov

Štruktúra keramiky, rovnako ako akéhokoľvek iného materiálu, závisí na charaktere väzieb medzi atómami, z ktorých sa skladá. Atómy v keramických materiáloch sú viazané buď kovalentnou väzbou, iónovou väzbou, alebo najčastejšie ich kombináciou. Podiel zastúpenia jednotlivých väzieb v keramike určitého chemického zloženia závisí na rozdiel elektronegativít atómov, z ktorých sa skladá. Podiel kovalentnej väzby  $FC$  sa dá približne vyjadriť pomocou vzorca:

$$FC = e^{(-0.25 \cdot \Delta E^2)}, \quad (2.1)$$

kde  $\Delta E$  je rozdiel elektronegativít atómov podieľajúcich sa na väzbe. Podiely iónovej, resp. kovalentnej väzby pre niektoré keramické látky sú uvedené v tab. 2.1.

Tab. 2.1: Charakter väzby v niektorých keramických látkach.

Keramická látka	väzba	E	Iónový charakter	Kovalentný charakter
MgO	Mg-O	2.3	73 %	27 %
$\text{Al}_2\text{O}_3$	Al-O3	2	63 %	37 %
$\text{ZrO}_2$	Zr-O	2	63 %	37 %
$\text{SiO}_2$	Si-O	1.7	51 %	49 %
$\text{Si}_3\text{N}_4$	Si-N	1.2	30 %	70 %
SiC	Si-C	0.7	11 %	89 %

Z týchto hodnôt je patrné, že charakter väzby v jednoduchých keramických látkach sa značne líši. Zatiaľ čo napr. oxid horečnatý MgO má výrazne iónový charakter, karbid kremíku SiC je takmer kovalentná zlúčenina.

V kovalentnej väzbe sú elektróny zdieľané iba dvoma susednými atómami, takže táto väzba je vysoko smerová. Pre kovalentné keramiky je charakteristická vysoká tvrdosť, vynikajúca chemická stabilita, veľmi nízka tvárnosť, nízka tepelná rozťažnosť a dobrá elektrónová vodivosť. Iónová väzba vzniká prenosom jedného alebo viacerých elektrónov medzi susednými atómami. Tým vznikajú opačne nabité ióny, ktoré sú k sebe priťahované elektrostatickými silami. Iónové keramiky tvoria tesne usporiadanú kryštalickú štruktúru podobne ako kovy s tým rozdielom, že nemajú voľné elektróny a atómy majú rôznu veľkosť. Výsledkom je nízka tvárnosť, vysoká tepelná rozťažnosť a nízka elektrónová vodivosť [3].

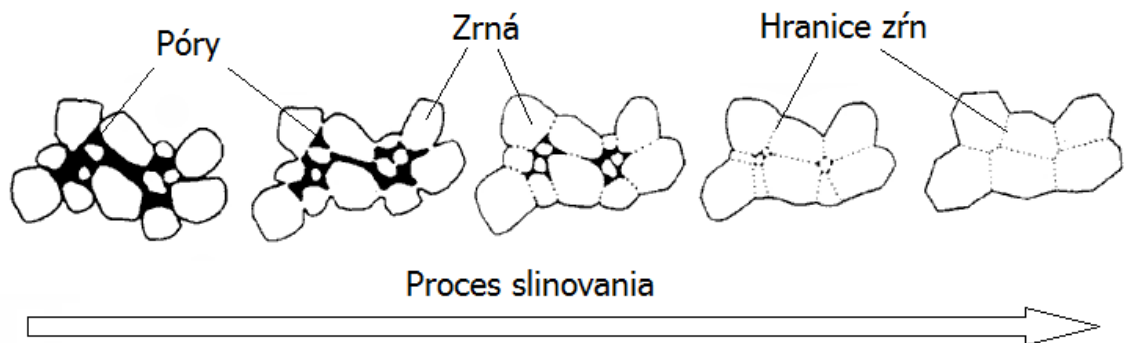
## 2.2 Výroba keramiky

Drvivá väčšina keramických súčastí sa vyrába slinovaním keramických práškových surovín. Základné fázy pri výrobe sú úprava práškového materiálu, tvarovanie, odstraňovanie pojiva a samotné slinovanie.

Úprava keramických práškov spočíva v aglomerácii, kde sa prášok zmieša s ďalšími prísadami ako sú spojivá a mazivá, prípadne zmáčadlá. Výsledkom je aglomerovaný prášok, ktorý sa tvaruje lepšie ako neaglomerovaný.

Tvarovanie môže prebiehať za studena, čo je najobvyklejší postup, ale výnimkou nie sú ani tvarovacie procesy za tepla. Najčastejšie využívanými metódami sú lisovanie, liatie suspenzií, vytlačovanie a injekčné vstrekovanie.

Ďalším krokom pri výrobe keramiky je tepelné spracovanie, ktoré môžeme rozdeliť na dve samostatné fázy – odstraňovanie spojiva (sušenie) a slinovanie. Účelom sušenia je odstrániť z plastického keramického dielu spojivo. Obvykle prebieha pri teplotách do 100 °C a môže trvať aj viac než 24 hodín. Niektoré organické spojivá vyžadujú dokonca dlhšie časy a vyššie teploty.



Obr. 2.1: Zmenšovanie pórov a rast zrn počas slinovania keramiky.

Pri slinovaní sa zrná keramiky spájajú do kompaktného celku. To sa deje prostredníctvom difúzie v tuhom stave, kedy dochádza k prenosu hmoty z obvodu zrn do miest s najvyšším zakrivením povrchu. Slinovanie prebieha za vysokých teplôt, avšak pod teplotou tavenia keramiky. Hnacou silou tohto procesu je znižovanie povrchovej energie sústavy. Veľká povrchová energia individuálnych častíc klesá v dôsledku zmenšenia povrchu slinutého produktu. Tým sa postupne keramický diel zmršťuje a znižuje sa jeho pórovitosť (obr. 2.1). Zároveň s tým však prebieha ďalší proces, rast zrn. Veľké častice rastú na úkor malých a nakoniec sa ustáli určitá rovnováha veľkosti zrn, ktorá rozhoduje o mechanických vlastnostiach hotového keramického dielu [3].

## 2.3 Mechanické vlastnosti keramických materiálov

Vďaka štruktúre odlišnej od kovov majú keramiky aj odlišné mechanické vlastnosti. Ide hlavne o nízku plasticitu, krehkosť, vysokú pevnosť a tvrdosť a nízku lomovú húževnatosť.

### 2.3.1 Nízka plasticita a krehkosť

Plasticita kovových materiálov je najčastejšie vyvolaná sklzom dislokácií po vhodných kryštálových rovinách. V dôsledku toho, že kovová väzba je nesmerová a všetky atómy podieľajúce sa na väzbe majú rovnaké rozdelenie elektrónových hustôt vo valenčných sférach, sa kovové dislokácie pohybujú už pri relatívne nízkych napätiach.

Kovalentná väzba je naopak vysoko smerová. Preto keď sú kryštály kovalentnej keramiky vystavené dostatočnému napätiu, dôjde k separácii elektrónových párov vo väzbách a dochádza ku krehkému lomu. Kovalentne viazané keramiky sú preto krehké aj ako monokryštály, aj v polykryštalickom stave.

Deformácia keramických monokryštálov s iónovou väzbou prebieha iným mechanizmom a za určitých podmienok môžu byť deformované aj plasticky. Počet sklzových systémov je však obmedzený, preto u iónovo viazanej polykryštalickej keramiky dochádza k tvorbe trhlín na hraniciach zŕn a následne ku krehkému lomu.

Povaha iónových a kovalentných väzieb má však za následok aj niektoré vlastnosti keramiky ktoré môžu byť často žiaduce, a to napríklad vysokú tvrdosť a vysokú tuhosť [3].

### 2.3.2 Lomová húževnatosť a pevnosť

Rozdiely medzi kovmi a keramikou sa výrazne prejavajú aj pri šírení trhlín. Plasticita kovov umožňuje absorpciu energie v plastickej zóne na čele trhliny a spôsobuje jej ťažšie šírenie. V koreni trhliny v keramickom materiáli je však plastická deformácia značne obmedzená a špička napätia je odbúravaná iba sieťou trhlín. Absorbovaná energia je preto malá a lomová húževnatosť nízka. Hodnoty  $K_{IC}$  sú až približne 15x nižšie ako u kovových materiálov a pohybujú sa medzi 1 a 12 MPa · m<sup>-1/2</sup> [4].

S tým súvisí aj pevnosť keramiky, ktorá je daná predovšetkým prítomnosťou rôznych štruktúrnych väd. Sú to povrchové trhliny vznikajúce pri dokončovacích operáciách, dutiny a póry, inklúzie a veľké zrná vznikajúce behom procesu slinovania. Tieto vady pôsobia ako koncentrátoři napätia a pri prekročení kritickej hodnoty napätia z nich vzniká trhlina, ktorá sa šíri nestabilne. Vďaka prítomnosti trhlín a nízkej lomovej húževnatosti je pevnosť keramiky relatívne nízka. Pevnosť konkrétnej súčasti z keramiky je daná veľkosťou najdlhšej a z hľadiska pôsobiaceho napätia vhodne orientovanej trhliny [4].

Pevnosť keramiky ovplyvňuje aj veľkosť zŕn, čím jemnejšie zrná, tým je pevnosť vyššia. Je to tak preto, lebo defekty na hraniciach zŕn majú menšiu veľkosť. Zvýšiť pevnosť keramiky je možné prakticky dvoma spôsobmi. Buď príslušnou technológiou výroby dosiahneme jemnejšie zrná a menšie množstvo väd, alebo zvýšime lomovú húževnatosť, napr. s využitím fázovej transformácie ZrO<sub>2</sub> [3,4].

Pevnosť keramiky má vďaka náhodnému rozmiestneniu väd a trhlín v objeme silne stochastickú povahu, ktorá sa v praxi štatisticky popisuje pomocou 2-parametrického Weibullovoho rozdelenia pravdepodobnosti. Pravdepodobnosť, že sa v súčasti nájde vada kritickej veľkosti, sa zvyšuje so zväčšujúcim sa objemom materiálu, takže pevnosť keramických súčastí tiež závisí na ich veľkosti [4].

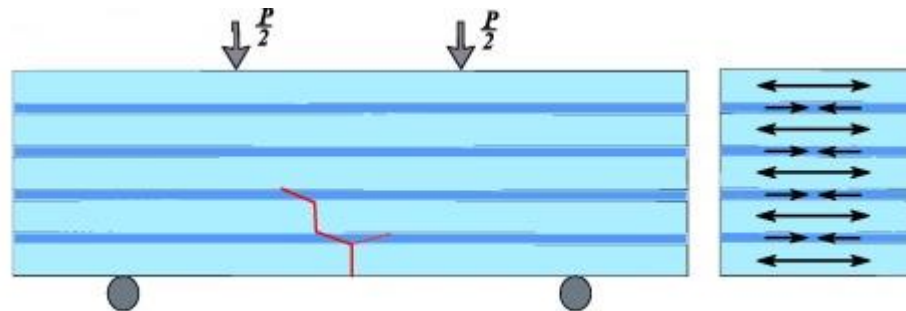
### 2.3.3 Zhúževnatenie keramiky pomocou fázovej transformácie ZrO<sub>2</sub>

Čistý oxid zirkoničitý existuje v troch kryštálových modifikáciách – monoklinickej (do 1170 °C), tetragonálnej (1170 - 2300 °C) a kubickej (nad 2300 °C). Pridaním vhodného množstva iného žiaruvzdorného oxidu, napr. CaO, MgO alebo Y<sub>2</sub>O<sub>3</sub>, sa tetragonálny ZrO<sub>2</sub> stabilizuje, takže môže existovať aj pri izbovej teplote [3].

Ak sa potom napríklad v Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> keramike s precipitátmi tetragonálnej formy ZrO<sub>2</sub> šíri trhlinka, vplyvom pôsobenia napätia tetragonálna fáza transformuje na monoklinickú. Táto transformácia je martenzitická s nárastom objemu asi 9 %, preto sa zväčšuje objem precipitátov, a to vedie k zastaveniu trhliny. Pevnosť, odolnosť voči teplotným rázom i oteruvzdornosť takejto keramiky je potom vyššia ako u čistého oxidu hlinitého.

### 2.4 Keramické lamináty

Jedným zo spôsobov, ako zlepšiť mechanické vlastnosti keramických materiálov je použitie vrstvených keramických štruktúr, teda keramických laminátov. Napríklad kompozity Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> - ZrO<sub>2</sub> s vrstvenou štruktúrou vykazujú zvýšenú lomovú húževnatosť a lepšiu absorpciu energie [5].



Obr. 2.2: Keramický laminát: zastavenie trhliny na vrstve s tlakovým reziduálnym napätím [6].

Často využívanou metódou výroby takýchto laminátov je kombinácia dvoch typov vrstiev s rôznymi zmenami objemu počas ochladzovania z teploty sintrovania. Výsledkom je štruktúra, v ktorej jednotlivých vrstvách je prítomná rovnomerná dvojsová zvyšková napätosť orientovaná v rovinách rovnobežných s materiálovým rozhraním. Alternujú vrstvy s kladnými a zápornými zvyškovými napätiami – ťahové napätia sú v materiáli s vyššou hodnotou koeficientu teplotnej rozťažnosti, tlakové naopak v materiáli s menšou rozťažnosťou. Tieto napätia závisia na koeficientoch teplotnej rozťažnosti  $\alpha_i$ , moduloch pružnosti  $E_i$ , rozdielu teploty sintrovania a prevádzkovej teploty  $\Delta T$ , počtu vrstiev jednotlivých typov  $n$ , resp.  $(n - 1)$  a hrúbke jednotlivých vrstiev  $t_i$ :

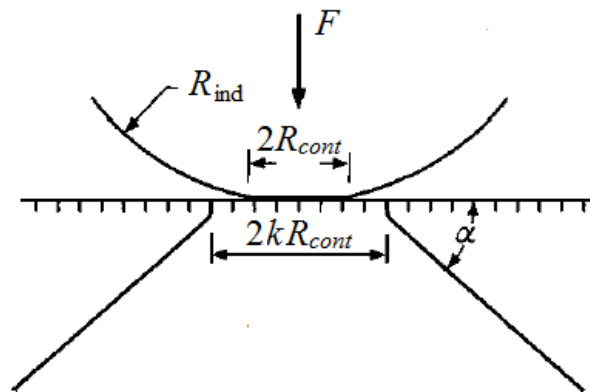
$$\begin{cases} \sigma_{Res}^{(1)} = E^{*(1)} \frac{(\alpha^{(2)} - \alpha^{(1)}) \cdot \Delta T}{1 + \frac{E^{*(1)} \cdot n \cdot t^{(1)}}{E^{*(2)} \cdot (n - 1) \cdot t^{(2)}}}, \\ \sigma_{Res}^{(2)} = -E^{*(2)} \frac{(\alpha^{(2)} - \alpha^{(1)}) \cdot \Delta T}{1 + \frac{E^{*(2)} \cdot (n - 1) \cdot t^{(2)}}{E^{*(1)} \cdot n \cdot t^{(1)}}}, \end{cases} \quad \text{kde } E^{*(i)} = \frac{E^{(i)}}{1 - \nu^{(i)2}} \text{ pre } i = 1, 2. \quad (2.2)$$

Vrstvy s tlakovými reziduálnymi napätiami môžu byť umiestnené na povrchu alebo uprostred, záleží na tom, aké vlastnosti chceme dosiahnuť. Ak sú tlakové napätia v povrchových vrstvách, výsledkom je zvýšená zdanlivá lomová húževnatosť a zvýšená pevnosť, teda aj spoľahlivosť. Naproti tomu vrstva s tlakovými napätiami umiestnená pod povrchom je schopná zastaviť prakticky akúkoľvek trhlinu potenciálne sa šíriacu z povrchovej vrstvy, nezávisle na jej pôvodnej veľkosti (obr. 2.2). Pevnosť takto navrhutej súčasti sa tak stáva nezávislou na veľkosti defektov (pokiaľ nejde o veľmi veľké trhliny) a jej spoľahlivosť sa značne zvyšuje.

Konkrétnou možnosťou, ako docieľiť podobnú štruktúru, je skombinovať vrstvy dvoch keramických materiálov, použitých napr. v [7] a nazvaných ATZ, resp. AMZ. Keramika ATZ pozostáva z  $\text{Al}_2\text{O}_3$  s 5 obj. %  $\text{Y}_2\text{O}_3$ -stabilizovaným teragonálnym  $\text{ZrO}_2$  (t- $\text{ZrO}_2$ ). Stabilizovaný oxid zinočnatý v tomto prípade riadi veľkosť zŕn  $\text{Al}_2\text{O}_3$  počas procesu slinovania. Druhý materiál, keramika AMZ, obsahuje tiež  $\text{Al}_2\text{O}_3$ , ale tentokrát s 30 obj. % monoklinickej formy  $\text{ZrO}_2$ , bez stabilizátoru (m- $\text{ZrO}_2$ ). Obsah tohto nestabilizovaného oxidu zinočnatého vo vrstvách AMZ podporuje vznik vysokých reziduálnych tlakových napätí, ako bolo zistené v prácach [8, 9].

## 2.5 Kontaktné porušovanie keramiky

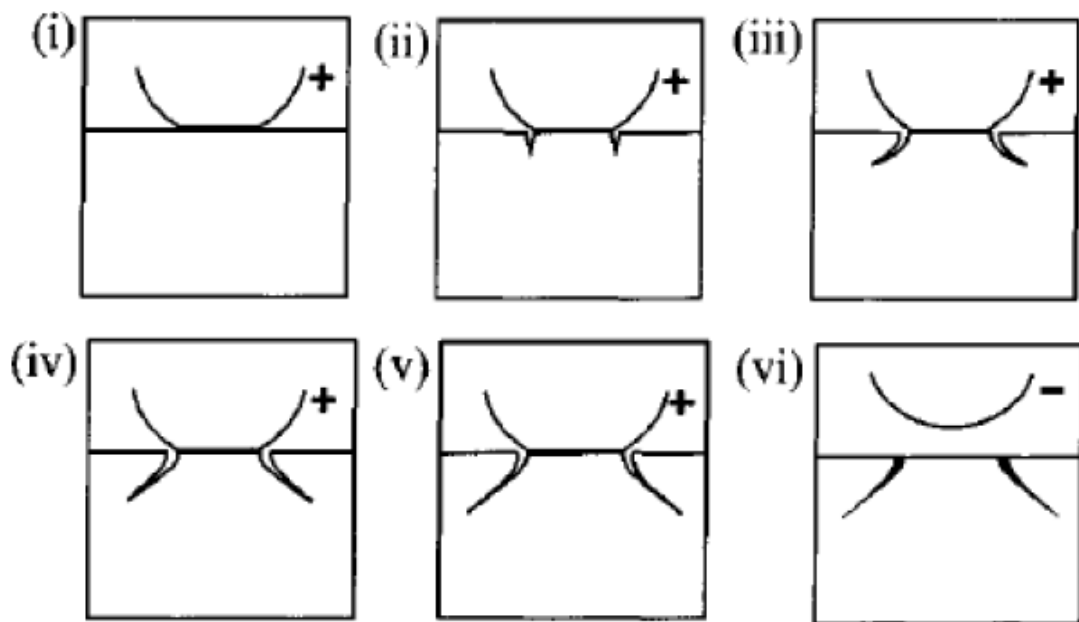
Častým problémom, ktorý sa v praxi objavuje v súvislosti s využitím keramiky ako konštrukčného materiálu, je porušenie povrchu v dôsledku kontaktu s iným telesom. Tento typ poškodenia zásadne obmedzuje životnosť keramiky v rôznych aplikáciách, ako sú napríklad ložiská [10] či komponenty motorov [11]. Styk telies môžeme v týchto prípadoch považovať za kontakt Hertzovho typu [12].



Obr. 2.3: Hertzova kónická trhlina [14].

Vezmime si častý prípad kontaktu guľovej plochy indentačného telesa s rovnou stenou keramickej súčasti. Dva úplne odlišné mechanizmy porušenia keramiky vplyvom takéhoto kontaktu Hertzovho typu, ktoré môžu nastať, sú vznik kužeľovitej trhliny (angl. *cone crack*) a vznik kvázi-plastickej deformácie v oblasti pod kontaktnou plochou. Tieto prejavy sú silne závislé na mikroštruktúre keramického materiálu [13]. Zatiaľ čo vznik kónickej trhliny (obr. 2.3) je typický pre materiály s jemnozrnnou štruktúrou, kvázi-plastická deformácia sa objaví skôr v hrubozrnnnej keramike. Táto práca sa obmedzuje na vznik kónickej trhliny a kvázi-plastickej deformácie v oblasti pod kontaktom sa ďalej zaoberať nebude.

Kónická trhlinka vzniká z defektov, ktoré sa nachádzajú na povrchu súčasti, mechanizmus jej vzniku je znázornený na obr. 2.4. V počiatočnej fáze je indenter guľového tvaru vtláčovaný do keramickej súčasti a dochádza k zdeformovaniu oboch telies. V oblasti priamo pod kontaktnou plochou vznikajú v materiáli tlakové napätia, ktoré vznik trhlíny nevyvolajú. Naopak v oblasti mimo kontakt vznikajú v radiálnom smere relatívne vysoké ťahové napätia. Vďaka tomu sa v druhej fáze začnú z vhodne orientovaných defektov v týchto miestach šíriť trhlínky, ktoré nakoniec prerastú do trhliny v tvare prstenca okolo kontaktu (angl. *ring crack*). Vplyvom ďalšieho zaťažovania sa trhlinka šíri najskôr smerom kolmo dolu, a potom sa vplyvom poľa napätí pod kontaktom stáča do tvaru kužeľa. Postupne sa smer šírenia ustáli a po odstránení zaťaženia sa trhlinka uzavrie [14].



Obr. 2.4: Fázy vzniku Hertzovej kónickej trhliny [13].



### 3 Charakteristiky a veličiny podstatné pre riešenie problému

Hlavným cieľom tejto práce je posúdiť vplyv zvyškovej napätosti na kontaktné porušovanie keramických laminátov na základe výsledkov parametrickej analýzy s využitím metódy konečných prvkov. V prvom rade je však potrebné zostaviť množinu charakteristík, ktoré sú pre riešenie tohto problému podstatné. Z tejto množiny je potom možné pre daný problém vytvoriť systém podstatných veličín a následne posúdiť vhodnosť výberu MKP ako nástroja pre jeho riešenie.

#### 3.1 Množina podstatných charakteristík problému

*Objektom záujmu* je v našom prípade keramický laminát. Preň, rovnako ako aj pre každý objekt, je charakteristické, že má určité *okolie*, určitú *geometriu* a že v okolí zaujíma nejakú určitú polohu (*topológiu*). S okolím má určité *väzby*, cez ktoré s okolím *interaguje* a ktoré ho *aktivujú* a *ovplyvňujú*. To v ňom vyvoláva *procesy*, ktoré menia jeho *stavy*. Objekt sa potom do svojho okolia *prejavuje*, čo má určité *dôsledky* [15]. Z uvedených charakteristík je teraz potreba vybrať iba tie, ktoré sú pre riešenie problému podstatné.

Jediným podstatným prvkom okolia je indentačné teleso a jeho topologické a štruktúrne vlastnosti. Indentor považujeme za guľu buď dokonale tuhú, alebo z homogénneho lineárne pružného materiálu. Žiadne podmienky plasticity či porušenia materiálu indentoru určite nie je potrebné definovať, pretože jeho deformačne-napäťové stavy sú pre riešenie problému nepodstatné.

Čo sa týka štruktúry, budeme uvažovať laminát ako rovinnú dosku zloženú z troch na sebe ležiacich vrstvách materiálu, pričom prostredná vrstva bude mať vždy odlišné materiálové charakteristiky ako zvyšné dve. Pomer hrúbok jednotlivých vrstiev bude jedným z parametrov, ktoré budú vstupom do parametrickej štúdie. Budú uvažované dva druhy keramického materiálu, AMZ a ATZ (viď. kap. 2.4). Oba tieto materiály budú vzhľadom na vlastnosti keramiky považované za lineárne elastické a krehké, pričom zvolenou podmienkou krehkého porušenia bude združené energeticko-napäťové kritérium, ktoré bude ďalej predstavené. Nebude uvažovaný žiadny iný typ možného porušenia, ako napr. delaminácia alebo porušenie z vnútornej štruktúrnej vady. Vady v materiáli ani stochastická povaha pevnosti keramiky či iných veličín nebudú uvažované vôbec, pretože pre posúdenie vplyvu zvyškovej napätosti na kontaktné porušovanie laminátu nie sú smerodajné.

Topológia sústavy je určená vzájomnou polohou indentoru a laminátu; indentor je vtlačovaný do povrchovej vrstvy laminátu. Vzhľadom na to, že vznikajúca trhlinka má podľa experimentálnych pozorovaní kónický tvar a indentačné teleso je guľové, môžeme úlohu považovať za rotačne symetrickú.

Podstatnou väzbou na okolie je pochopiteľne mechanický kontakt medzi laminátom a indentorom. Tento kontakt bude považovaný za elastický, neadhezívny a bez trenia. Hoci trenie medzi kontaktnými plochami môže ovplyvňovať odozvu telesa na zaťaženie kontaktom, posúdenie jeho vplyvu nie je predmetom tejto práce. Keďže ide o styk guľovej a rovinatej plochy, ponúka sa využitie Hertzovej teórie kontaktu. Tá však platí len pre homogénny materiál, preto skôr ako ju použijeme bude potrebné porovnať numerické riešenie pre vrstvenú štruktúru s analytickým riešením pre homogénny materiál podľa Hertza.

Aktivácia z okolia v našom prípade prichádza od mechanického zaťaženia indentoru, ktoré môže byť reprezentované tlakovou silou s nositeľkou kolmou na povrch laminátu a prechádzajúcou cez geometrický stred guľovej plochy indentoru. Táto sila sa po elastickej deformácii povrchov oboch telies prenáša cez kontakt prostredníctvom kontaktného tlaku.

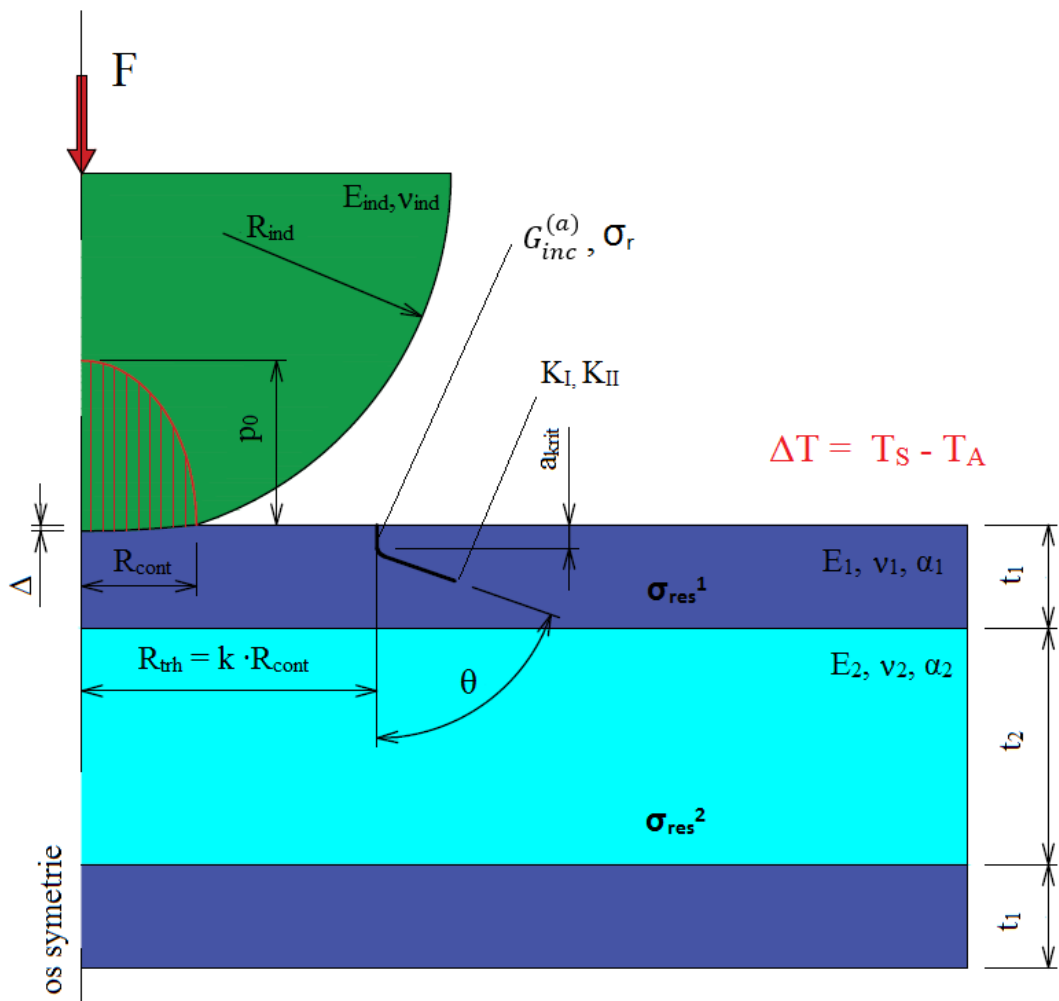
Charakteristikou zásadne ovplyvňujúcou odozvu laminátu na zaťaženie mechanickým kontaktom je zvyšková napätosť v jednotlivých vrstvách. Tá je do laminátu vnášaná už pri jeho výrobe, a to v dôsledku rôznej objemovej zmeny materiálov pri ochladení z teploty slinovania. Je preto nutné uvažovať teplotnú rozťažnosť použitých materiálov a rozdiel medzi teplotou slinovania a teplotou okolia.

Fyzikálne procesy prebiehajúce v materiáli sú na danej úrovni riešenia problému nepodstatné, podstatné sú až ich prejavy. Týmito prejavmi sú deformácia a napätosť vyvolané jednak mechanickým a jednak teplotným zaťažením. Dôsledkom týchto prejavov môže byť vznik a následné šírenie kónickej trhliny.

### 3.2 Systém podstatných veličín

Systém podstatných veličín tvoria tie veličiny, ktoré spolu dokážu popísať všetky skutočnosti uvedené v predchádzajúcej podkapitole. Tento systém je znázornený na obr. 3.1 a jednotlivé veličiny sú vysvetlené v zozname použitých skratiek a symbolov uvedenom na konci tejto práce.

Na základe rozboru takto vytvoreného systému podstatných veličín môžeme konštatovať, že metóda konečných prvkov je vhodná pre riešenie zadaného problému a dokáže postihnúť všetky skutočnosti, ktoré sú pre jeho riešenie podstatné.



Obr. 3.1: Systém podstatných veličín.

## 4 Mechanika kontaktu

Za kontakt môžeme v mechanike telies považovať stav, kedy sa povrchy dvoch rôznych telies, prípadne dva povrchy toho istého telesa, vzájomne dotýkajú. Pre kontakt je charakteristické, že telesá sú vzájomne neprešupné a dokážu medzi sebou prenášať normálové tlakové sily a tangenciálne trecie sily [16.]. Telesá často nie sú schopné prenášať normálové ťahové sily, takže sa od seba môžu oddeliť. Vtedy hovoríme o neadhezívnom kontakte (angl. *non-adhesive contact*).

### 4.1 Hertzova teória neadhezívneho elastického kontaktu

Keď ľubovoľné dve telesá so zakrivenými povrchmi prídu do kontaktu, v počiatocnom nezaťaženom stave sa teoreticky dotýkajú iba v jednom bode alebo pozdĺž jednej čiary. V skutočnosti však pri aplikovaní akokoľvek malého zaťaženia dochádza k elastickej deformácii povrchov telies, čo spôsobuje, že z bodu či čiary kontaktu sa stávajú kontaktné plochy, na ktorých je vonkajšie zaťaženie prerozdelené do kontaktného tlaku. Prvú analýzu tohto fenoménu predstavil Hertz na konci 19. storočia [12]. Jeho teória neadhezívneho elastického kontaktu stojí na nasledujúcich základných predpokladoch:

- i. povrchy telies sú spojitú, nekonformné, dokonale hladké a bez trenia,
- ii. veľkosť kontaktnej plochy je malá v porovnaní s veľkosťou telies, tzn. pretvorenia spojené s deformáciou povrchov sú malé,
- iii. každé z telies môže byť v blízkosti kontaktnej oblasti považované za elastický polpriestor.

Za viac ako storočie od uvedenia Hertzovej teórie nastal v teórii kontaktnej mechaniky veľký pokrok a analytické riešenie s pôvodnými obmedzeniami je dnes možné rozšíriť, napríklad s uvažovaním plasticity telies či trecích síl v kontakte, vid' napr. [17]. V tejto práci však vystačíme s klasickou Hertzovou teóriou a riešením pre prípad kontaktu dvoch guľových plôch, resp. guľovej plochy s nekonečnou doskou.

#### 4.1.1 Hertzova teória kontaktu dvoch guľových plôch

Majme dve pružné telesá v tvare guľí, prvé s polomerom  $R_1$  a druhé s polomerom  $R_2$ , ktoré sa voľne dotýkajú. Ak na telesá nepôsobí žiadne vonkajšie zaťaženie, ich kontakt sa realizuje v jedinom bode, a to v priesečníku spojnice stredov oboch guľových plôch s ich povrchmi. Zavedieme si valcový súradnicový systém s počiatkom v tomto bode, v ktorom os  $z$  bude totožná so spojnicou stredov telies. Ak telesá zaťažíme normálovou silou  $F$  v smere osi  $z$ , dochádza v okolí bodu styku k elastickej deformácii povrchov oboch telies. Výsledná kontaktná plocha má tvar kruhu s polomerom [17]:

$$R_{cont} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot F \cdot \left(\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2}\right)}{4 \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)}}, \quad (4.1)$$

kde  $E_1$ , resp.  $E_2$  sú moduly pružnosti materiálov jednotlivých telies,  $\nu_1$ , resp.  $\nu_2$  sú Poissonove pomery a  $R_1$ , resp.  $R_2$  sú polomery guľových plôch.

Sila  $F$  sa tak medzi telesami prenáša prostredníctvom kontaktného tlaku, ktorý má v rovine  $r$ - $z$  eliptický priebeh [17]:

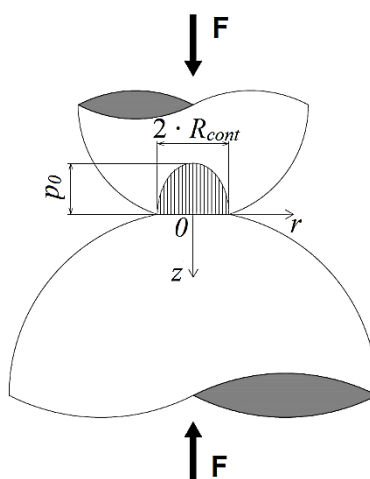
$$p(r) = p_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{r^2}{R_{cont}^2}}, \quad (4.2)$$

kde:

$$p_0 = \frac{3 \cdot F}{2 \cdot \pi \cdot R_{cont}^2}. \quad (4.3)$$

Celá situácia je znázornená na obr. 4.1.

V prípade kontaktu guľovej plochy s rovinnou doskou je situácia úplne rovnaká. Jediné, čo sa zmení, je polomer krivosti  $R_2$ , za ktorý v tomto prípade dosadíme hodnotu  $\infty$ .



Obr. 4.1: Hertzov elastický kontakt dvoch guľových telies.

Ďalej uvažujme prípad kontaktu guľového telesa a rovinnnej dosky. Hertzova teória umožňuje pomocou analytických vzťahov určiť napätosť od zaťaženia vyvolaného kontaktom v ľubovoľnom bode rovinného telesa. Pre valcový súradnicový systém, ktorý sme definovali vyššie, platia nasledujúce vzťahy pre napätia v radiálnom smere  $\sigma_r$ , v tangenciálnom smere  $\sigma_\theta$  a v smere osi  $z$   $\sigma_z$  [17]:

$$\frac{\sigma_r(r^*, z^*)}{p_0} = -\frac{L^3 r^{*2} z^*}{(L^4 + z^{*2})(1 + L^2)^2} - (1 - 2\nu) \left[ \frac{z^*}{L(1 + L^2)} - \frac{1}{3r^{*2}} \left( 1 - \frac{z^{*3}}{L^3} \right) \right] + \frac{z^*}{L} \left[ L(1 + \nu) \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{L} \right) - (1 - \nu) \frac{L^2}{1 + L^2} - 2\nu \right], \quad (4.4)$$

$$\frac{\sigma_{\theta}(r^*, z^*)}{p_0} = -\frac{1-2\nu}{3r^{*2}} \left( 1 - \frac{z^{*3}}{L^3} \right) + \frac{z^*}{L} \left[ L(1+\nu) \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{L} \right) - (1-\nu) \frac{L^2}{1+L^2} - 2\nu \right], \quad (4.5)$$

$$\frac{\sigma_z(r^*, z^*)}{p_0} = -\frac{z^{*3}}{L(L^4 + z^{*2})}, \quad (4.6)$$

kde  $\nu$  je Poissonov pomer materiálu dosky a:

$$r^* = \frac{r}{R_{cont}}, \quad (4.7)$$

$$z^* = \frac{z}{R_{cont}}, \quad (4.8)$$

$$L = \sqrt{\frac{1}{2} \left( r^{*2} + z^{*2} - 1 + \sqrt{(r^{*2} + z^{*2} - 1)^2 + 4z^{*2}} \right)}. \quad (4.9)$$

Pre napätosť na povrchu dosky ( $z = 0$ ) platia zjednodušené vzťahy:

$$\frac{\sigma_z(r^*)}{p_0} = -\sqrt{1-r^{*2}}, \quad (4.10)$$

$$\frac{\sigma_{\theta}(r^*)}{p_0} = -\frac{1-2\nu}{3r^{*2}} \left[ 1 - (1-r^{*2})^{\frac{3}{2}} \right] - 2\nu\sqrt{1-r^{*2}}, \quad \text{pre } r \leq R_{cont} \quad (4.11)$$

$$\frac{\sigma_r(r^*)}{p_0} = \frac{1-2\nu}{3r^{*2}} \left[ 1 - (1-r^{*2})^{\frac{3}{2}} \right] - \sqrt{1-r^{*2}}, \quad \text{pre } r \leq R_{cont} \quad (4.12)$$

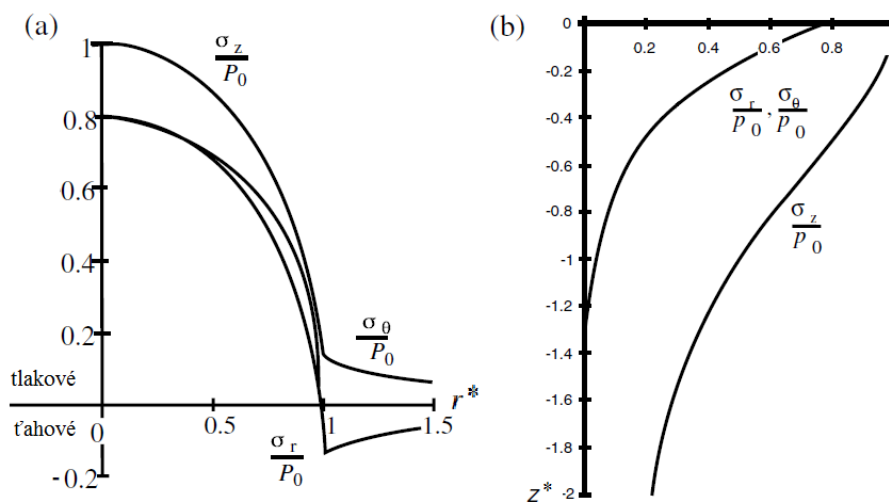
$$\frac{\sigma_r(r^*)}{p_0} = -\frac{\sigma_{\theta}(r^*)}{p_0} = \frac{1-2\nu}{3r^{*2}}, \quad \text{pre } r > R_{cont}, \quad (4.13)$$

a pre napätosť pozdĺž osi  $z$  ( $r = 0$ ) platí:

$$\frac{\sigma_r(z^*)}{p_0} = \frac{\sigma_{\theta}(z^*)}{p_0} = -(1+\nu) \left( 1 - z^* \cdot \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{z^*} \right) \right) + \frac{1}{2} (1+z^{*2})^{-1}, \quad (4.14)$$

$$\frac{\sigma_z(z^*)}{p_0} = -(1+z^{*2})^{-1}. \quad (4.15)$$

Napätia vyjadrené pomocou rovníc (4.10) až (4.15) sú zároveň hlavnými napätiami. Ich priebeh je vyjadrený na obr. 4.2.

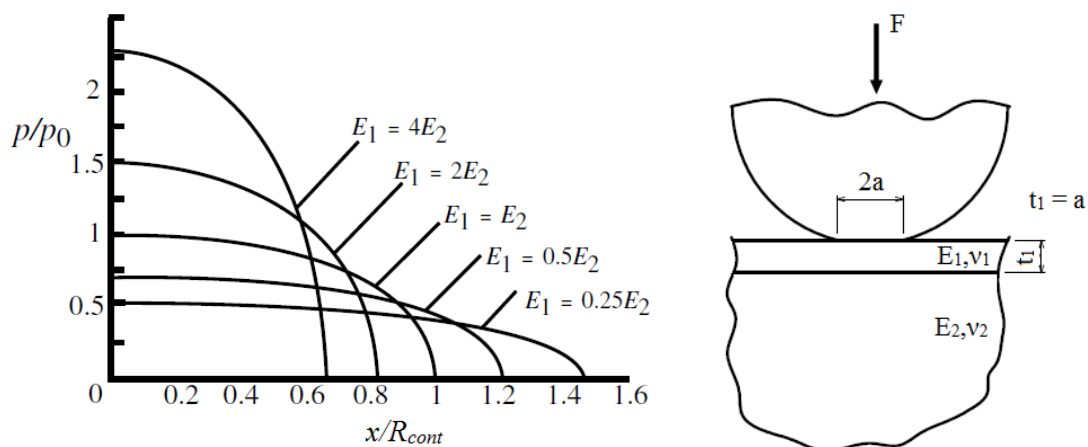


Obr. 4.2: Priebeh hlavných napätí pod kontaktom guľa-doska: a) na povrchu dosky ( $z = 0$ ); b) pozdĺž osi  $z$  ( $r = 0$ ) [18].

#### 4.1.2 Kontakt vrstvených štruktúr

Vyššie uvedené vzťahy pre popis polí napätosti, ako aj pre výpočet polomeru kontaktnej plochy a maximálneho kontaktného tlaku, platia iba za predpokladu, že obidve telesá môžu byť v okolí kontaktu považované za nekonečný elastický polpriestor. Ak sa však jedná o vrstvenú štruktúru, akou je napríklad keramický laminát, tieto vzťahy už nemusia byť použiteľné.

Deformačne- napät'ové analýzy prípadov, keď tuhý či pružný, valcový či sférický indenter tlačí na štruktúru s jednou či viacerými povrchovými vrstvami, ktorých mechanické vlastnosti sú odlišné od vlastností zvyšku telesa, boli prevedené mnohými autormi, napr. [19-23] a ďalšími. Obr. 4.3 je z práce [23], kde sa autori venovali prípadu tuhého guľového indentoru, ktorý tlačí na štruktúru s jednou povrchovou vrstvou. Je na ňom zobrazené, ako sa mení priebeh kontaktného tlaku s rôznym pomerom modulov pružnosti povrchovej vrstvy a zvyšku telesa, ak je polomer kontaktnej oblasti rovný hrúbke vrstvy.

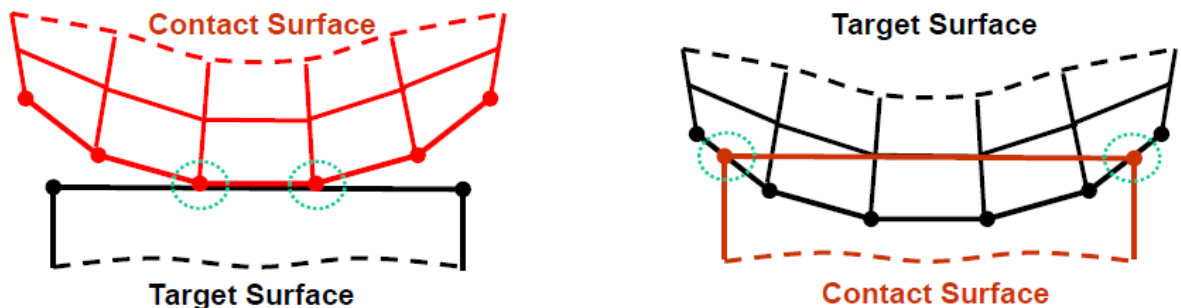


Obr. 4.3: Priebeh kontaktného tlaku pod kontaktom tuhého guľového indentoru s elastickým vrstveným polpriestorom [23].

## 4.2 Kontaktný problém a metóda konečných prvkov

Metóda konečných prvkov (ďalej len MKP) je v súčasnosti vo svete asi najrozšírenejším nástrojom pre numerické riešenie úloh z oblasti mechaniky telies, mechaniku kontaktu nevynímajúc. V tejto práci je pre riešenie kontaktného problému využitý MKP softvér ANSYS, preto aj nasledujúci text bude písaný s ohľadom na možnosti a špecifiká tohto softvéru.

Kontakt dvoch telies vnáša do deformačne-napät'ovej analýzy pomocou MKP nelinearitu tým, že tuhosť systému závisí na „stave“ kontaktu, teda na tom, či sa súčasti (prvky) dotýkajú alebo nie. Z fyzikálneho hľadiska telesá, ktoré sú v kontakte, nemôžu jedno do druhého preniknúť. Aby toto bolo zaistené, používa softvér ANSYS k reprezentácii kontaktu špeciálne kontaktné prvky typu „target“ s označením TARGE169 a TARGE170 a prvky typu „contact“ označené CONTA171- CONTA178 [24], ktoré je treba vytvoriť na povrchu telies, podieľajúcich sa na kontakte. Vždy sa tak teda vytvorí jeden pár povrchov, kde jeden je vysieťovaný prvkami typu *contact* a druhý typom *target*. Pre tieto prvky platí, že prvok typu *contact* nemôže preniknúť cez prvok *target* (obr. 4.3).



Obr. 4.3: Prvky typu *contact* a *target* [16].

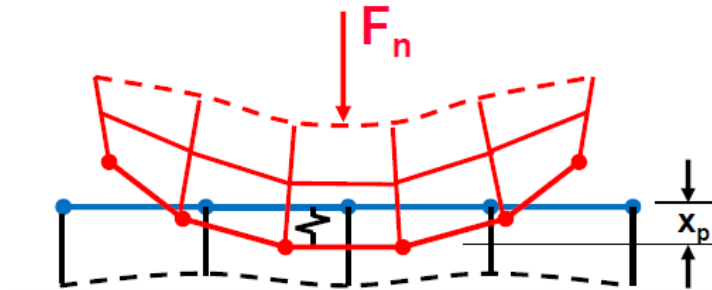
Výrobca softvéru ANSYS odporúča dodržiavať určité zásady pri určovaní *contact* a *target* povrchov. Pri kontakte konvexnej plochy s rovinnou alebo konkávnou plochou by mali byť *target* prvky na rovnej či konkávnej ploche. Pri rozdielnej hustote a kvalite siete konečných prvkov by mali byť *target* prvky na povrchu s menej kvalitnou sieťou. Pri rozdielnej tuhosti telies by mali byť prvky typu *target* na povrchu tuhšieho telesa, pri výrazne rozdielnej veľkosti telies na väčšom z nich apod. [16]

Aby telesá v kontakte do seba skutočne neprenikali, ponúka ANSYS rôzne formulácie kontaktu. Najjednoduchšou z nich je penalizačná metóda (angl. *Pure Penalty Formulation*). Táto metóda definuje normálovú kontaktnú tuhosť, ktorá sa skokovo mení z nuly pre prvky, ktoré medzi sebou nie sú v kontakte, na nejakú predom definovanú hodnotu  $k_n$  pre prvky, ktoré v kontakte sú. Potom pre konečnú normálovú kontaktnú silu  $F_n$  platí [16]:

$$F_n = k_n \cdot x_p, \quad (4.16)$$

kde  $x_p$  je penetrácia medzi prvkami. Čím vyššia je teda kontaktná tuhosť, tým menšia je penetrácia a pre teoreticky nekonečnú tuhosť by bol prienik telies nulový. To ale numericky nie je možné, preto je vždy nutné dovoliť určitý malý prienik telies (obr. 4.4), čo je v rozpore s kinematikou reálneho kontaktu a je to zároveň aj hlavnou nevýhodou tejto metódy. Čím

menšiu hodnotu penetrácie telies povolíme, tým horšie riešenie konverguje, preto je treba hľadať rozumný kompromis medzi presnosťou riešenia a dobou výpočtu, resp. vôbec jeho realizovateľnosťou. Výhodou naopak je, že kontakt sa v riešení prejaví iba zmenou v matici tuhosti sústavy a neprináša žiadne zvýšenie počtu stupňov voľnosti.



Obr. 4.4: Prienik telies pri penalizačnej metóde [16].

Ďalšou možnosťou je použitie metódy Lagrangeových multiplikátorov (angl. *Normal Lagrange Formulation*). Táto formulácia nedefinuje silu pomocou kontaktnej tuhosti a penetrácie, ale pridáva kontaktný tlak ako ďalší stupeň voľnosti. Dôsledkom toho telesá neprenikajú jedno do druhého a kontaktnú tuhosť vôbec nie je potrebné zavádzať. Veľkou nevýhodou tejto metódy je však fakt, že v riešení figurujú dve veličiny s odlišným fyzikálnym rozmerom, čo spôsobuje zlú numerickú stabilitu riešenia. Zmenou kontaktnej plochy sa navyše mení rozsah sústavy rovníc. V praxi táto metóda preto funguje len pre jednoduché úlohy.

Softvér ANSYS ponúka aj tzv. rozšírenú Lagrangeovu formuláciu (angl. *Augmented Lagrange formulation*). Tá je vo svojej podstate kombináciou predchádzajúcich dvoch metód. Nie je tak citlivá na výbere hodnoty kontaktnej tuhosti ako penalizačná metóda a často konverguje lepšie ako klasická metóda Lagrangeových multiplikátorov [16].

#### 4.2.1 Využitie Hertzovej teórie pre linearizáciu výpočtu MKP

Keďže riešenie kontaktného problému pomocou MKP je vo svojej podstate nelineárne, výpočet prebieha iteračne a je často omnoho časovo náročnejší ako lineárny výpočet. Preto je na mieste otázka, či neexistuje spôsob, ako sa nelineárnemu výpočtu vyhnúť.

Takýto spôsob existuje a spočíva v nahradení jedného z telies podieľajúcich sa na kontakte okrajovou podmienkou. Touto podmienkou môže byť buď známy priebeh kontaktného tlaku (silová podmienka), alebo známy priebeh posuvov bodov na kontaktnom povrchu (deformačná podmienka). Pri obecnom tvare kontaktných plôch a obecnom zaťažení tieto tlaky či posuvy nemusia byť známe, avšak napríklad pre styk guľového telesa s rovinnou doskou na ktorý pôsobí normálová sila a ktorý je riešený v rámci tejto práce, môžu byť tlaky aj posuvy pod kontaktom určené analyticky pomocou Hertzovej teórie. Je ale nutné podotknúť, že tento prístup nepočíta s tangenciálnymi silami v kontakte, a teda nezohľadňuje prípadné trenie, ktoré by medzi telesami mohlo vzniknúť.



## 5 Vznik a šírenie trhlín v keramike

V tejto kapitole budú popísané niektoré prístupy k posudzovaniu podmienok vzniku a šírenia trhlín v krehkom materiáli, akým je keramika.

### 5.1 Iniciácia trhliny v keramike

Ako už bolo spomenuté v kapitole 1, keramické materiály sú inherentne krehké, pretože na špici trhliny nevzniká potrebná plastická deformácia, ktorá by absorbovala energiu a bránila šíreniu trhliny, ako je tomu u kovov. Pre popis chovania keramiky s trhlinou je preto postačujúca lineárne elastická lomová mechanika (LELM). Táto oblasť mechaniky však vychádza z predstavy telesa ako kontinua s už prítomnou trhlinou, otázkami vzniku tejto trhliny sa nezaobrá [25]. Základné koncepcie LELM ale môžu pomôcť k vytvoreniu kritéria, ktoré by bolo schopné podmienky vzniku trhliny kvantifikovať.

#### 5.1.1 Energetický prístup LELM a podmienka pre šírenie trhliny

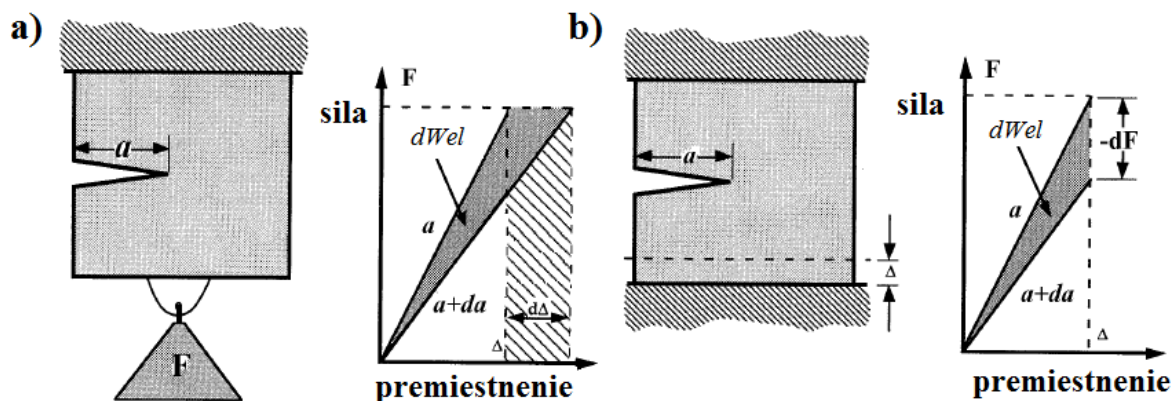
Energetický prístup lineárne elastickej lomovej mechaniky [26] vychádza z prvého termodynamického zákona, ktorý hovorí, že sústava môže prejsť z jedného stavu do druhého iba vtedy, keď jej celková energia klesá. Predpokladá, že práca potrebná k prírastku lomovej plochy je uhradená uvoľnením elastickej energie napätosti naakumulovanej v okolí rastúcej trhliny. Ďalej bola zavedená nová veličina, hnacia sila trhliny  $G$  [27], ktorá je definovaná ako:

$$G = -\frac{dW_{el}}{dA}, \quad (5.1)$$

kde  $W_{el}$  je celková energia napätosti a  $A$  je veľkosť lomovej plochy. Ak táto veličina dosiahne svoju kritickú hodnotu  $G_c$ , ktorá je známa ako lomová húževnatosť materiálu, nastane medzný stav nestabilného šírenia trhliny. Aby mohla byť lomová húževnatosť považovaná za materiálovú charakteristiku, musí byť dokázané, že nesmie závisieť na podmienkach zaťažovania. Tento dôkaz je uvedený napr. v [28] a je založený na porovnaní zmeny energie napätosti v závislosti na raste lomovej plochy v súčasťi s trhlinou pre pre dva extrémne prípady: mäkké zaťažovanie (s riadenou silou, obr. 5.1a) a tvrdé zaťažovanie (s riadeným posuvom, obr. 5.1b). Vo výsledku dostaneme vzťah:

$$\left(\frac{dW_{el}}{dA}\right)_{F=konšt.} = -\left(\frac{dW_{el}}{dA}\right)_{\Delta=konšt.}, \quad (5.2)$$

kde  $F$  je zaťažujúca sila a  $\Delta$  je premiestnenie tejto sily. Pri pôsobení konštantnej sily energia napätosti s prírastkom trhliny rastie, v prípade konštantnej deformácie je to presne naopak. Hnacia sila trhliny  $G$  je ale v oboch prípadoch rovnaká, preto môžeme medznú hodnotu tejto veličiny  $G_c$  nezávisle na zaťažovacích podmienkach považovať za lomovú húževnatosť materiálu.



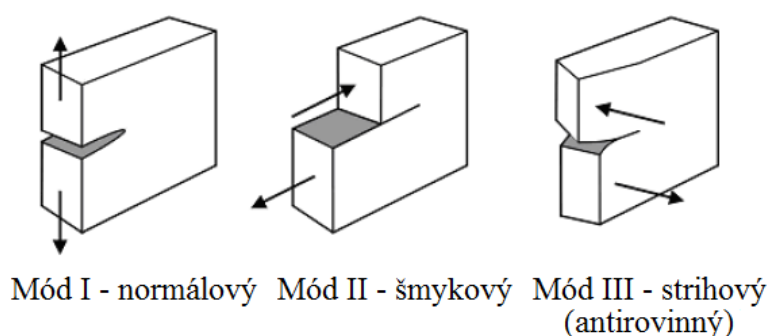
Obr. 5.1: Hnacia sila trhliny. a) mäkké zaťažovanie, b) tvrdé zaťažovanie [28].

### 5.1.2 Napät'ový prístup LELM a podmienka pre šírenie trhliny

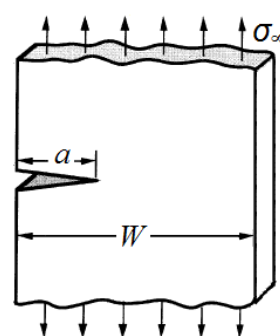
V inžinierskej praxi je energetická koncepcia LELM ťažko použiteľná, preto bol vyvinutý alternatívny prístup založený na popise napätosti v blízkosti čela ostrej trhliny. Túto napätosť je potom možné kvantifikovať jedinou veličinou, ktorou je faktor intenzity napätia  $K_i$ , kde  $i = I, II, III$  pre 3 základné zaťažovacie módy na obr. 5.2. Pre šírenie trhliny je najnebezpečnejšie namáhanie módom I a faktor intenzity napätia  $K_I$  sa dá v tomto prípade zapísať v tvare [28]:

$$K_I = \sigma_\infty \sqrt{\pi a} \cdot f\left(\frac{a}{W}\right), \quad (5.3)$$

kde  $\sigma_\infty$  je nominálne napätie ďaleko od špica trhliny,  $a$  je dĺžka trhliny a  $f(a/W)$  je bezrozmerný člen, ktorý je funkciou tvaru súčasti a tvaru trhliny (obr. 5.3).



Obr. 5.2: Základné módy zaťažovania [29].



Obr. 5.3: Teleso s trhlinou [30]

Podobne ako je to pre hnaciu silu trhliny, existuje aj pre faktor intenzity napätia kritická hodnota (lomová húževnatosť)  $K_{IC}$ , po ktorej prekročení nastáva v súčasnosti medzný stav nestabilného šírenia trhliny.  $K_{IC}$  je takisto materiálovou charakteristikou. Pre lineárne elastický materiál sú parametre  $G$  a  $K_I$  ľubovoľne zameniteľné a existuje medzi nimi jednoznačná závislosť:

$$G = \frac{K_I^2}{E^*}, \quad (5.4)$$

kde  $E^* = E$  pre rovinnú napätosť a  $E^* = \frac{E}{1-\nu^2}$  pre rovinnú deformáciu.

### 5.1.3 Združené energeticko-napät'ové kritérium iniciácie trhliny

Teraz sa pozrieme na teleso bez trhliny a podmienky, za akých trhlina na jeho povrchu môže vzniknúť. Základné napät'ové kritérium krehkého porušenia povrchu je založené na kritickej hodnote ťahového alebo šmykového napätia (pevnosť  $\sigma_c$ ,  $\tau_c$ ), po ktorej prekročení vznikne trhlina [31]:

$$\sigma \geq \sigma_c \quad (\tau \geq \tau_c), \quad (5.5)$$

Zoberme si príklad iniciácie trhliny z ostrého vrubu. Ak by sme skúsili aplikovať Griffithovo energetické kritérium z LELM, hnacia sila trhliny by úplne vymizla a nikdy by nedosiahla lomovú húževnatosť  $G_c$ , tým pádom by nikdy nemalo dôjsť k porušeniu. Skúsme teda nasadiť napät'ové kritérium. V koreni vrubu je singularita a pole napätia sa v okolí tohto bodu limitne blíži k nekonečnu. To znamená, že normálové aj šmykové zložky napätia sú vždy vyššie ako pevnosť materiálu, a to pri ľubovoľne malom zaťažení. To znamená, že aj nekonečne malé zaťaženie by malo viesť k porušeniu. Ani jeden z týchto záverov samozrejme nie je v súlade s experimentmi. Podľa pozorovaní je takýto vrub vhodným miestom pre nukleáciu trhliny, ale nie pri ľubovoľne malom zaťažení [31].

Ako druhý príklad nám poslúži lom homogénnej izotropnej lineárne pružnej krehkej tyče vystavenej tvrdému zaťaženiu s postupne sa zvyšujúcim osovým pretvorením  $\varepsilon_a$ . Pri určitej hodnote zaťaženia sa tyč rozlomí na dve časti a potenciálna energia pružnosti vymizne. Zmena potenciálnej energie podľa (5.1) je teda v tomto prípade rovná energii napätosti v tyči v okamihu pred zlomením [31]:

$$-\delta W_{el} = dW_{el} = \frac{1}{2} S l \frac{\sigma_a^2}{E}, \quad (5.6)$$

kde  $S$  je prierez tyče,  $l$  je jej dĺžka,  $E$  je modul pružnosti materiálu a  $\sigma_a$  je normálové osové napätie. Potom podľa Griffitha dostaneme kritérium porušenia:

$$\frac{1}{2} l \frac{\sigma_a^2}{E} \geq G_c \quad \Rightarrow \quad \sigma_a \geq \sqrt{\frac{2EG_c}{l}}. \quad (5.7)$$

Táto nerovnica je splnená pre určitú dostatočne veľkú dĺžku  $l$ . To by viedlo k záveru, že dostatočne dlhá tyč sa poruší bez ohľadu na veľkosť zaťaženia, čo samozrejme nie je pravda. V tomto prípade to bolo zanedbanie napäťového kritérium porušenia, čo viedlo k mylnému konštatovaniu [31].

Tieto úvahy viedli k formulácii nového kritéria vzniku trhliny v krehkom materiáli, a to združeného energeticko-napäťového kritéria [31]. Toto kritérium vyžaduje súčasné splnenie dvoch podmienok:

$$\begin{aligned}\sigma &\geq \sigma_c, \\ G_{inc} &\geq G_c.\end{aligned}\quad (5.8)$$

Prvá, napäťová podmienka, hovorí, že v mieste potenciálneho vzniku trhliny musí byť dosiahnutá kritická hodnota normálového ťahového napätia  $\sigma$  zodpovedajúca pevnosti v ťahu daného materiálu  $\sigma_c$  [32]. Druhá podmienka je energetická a hovorí, že inkrementálna hnacia sila trhliny  $G_{inc}$  musí presiahnuť lomovú húževnatosť materiálu  $G_c$ . Inkrementálna hnacia sila trhliny je miesto klasickej hnacej sily  $G$  použitá preto, že trhlina v tomto prípade nevzniká postupným rastom, ale skokovou zmenou z nulovej dĺžky na určitú kritickú dĺžku  $a_c$ . Je to najmenšia dĺžka trhliny, pre ktorú sú súčasne splnené obe kritériá z (5.8). Vzťah medzi  $G$  a  $G_{inc}$  pre určitú dĺžku trhliny  $a_1$  je potom nasledovný:

$$G_{inc}(a = a_1) = \frac{1}{a_1} \int_0^{a_1} G(a) da = -\frac{W(0) - W(a_1)}{A}, \quad (5.9)$$

kde  $W(0)$  je potenciálna energia telesa bez trhliny,  $W(a_1)$  je potenciálna energia telesa s trhlinou dĺžky  $a_1$  a  $A$  je veľkosť vzniknutej lomovej plochy. Aplikácia združeného kritéria na problém predikcie vzniku trhliny v krehkých materiáloch sa ukazuje ako efektívna a preukazuje dobrú zhodu s experimentálnymi meraniami [32-34].

## 5.2 Šírenie trhliny

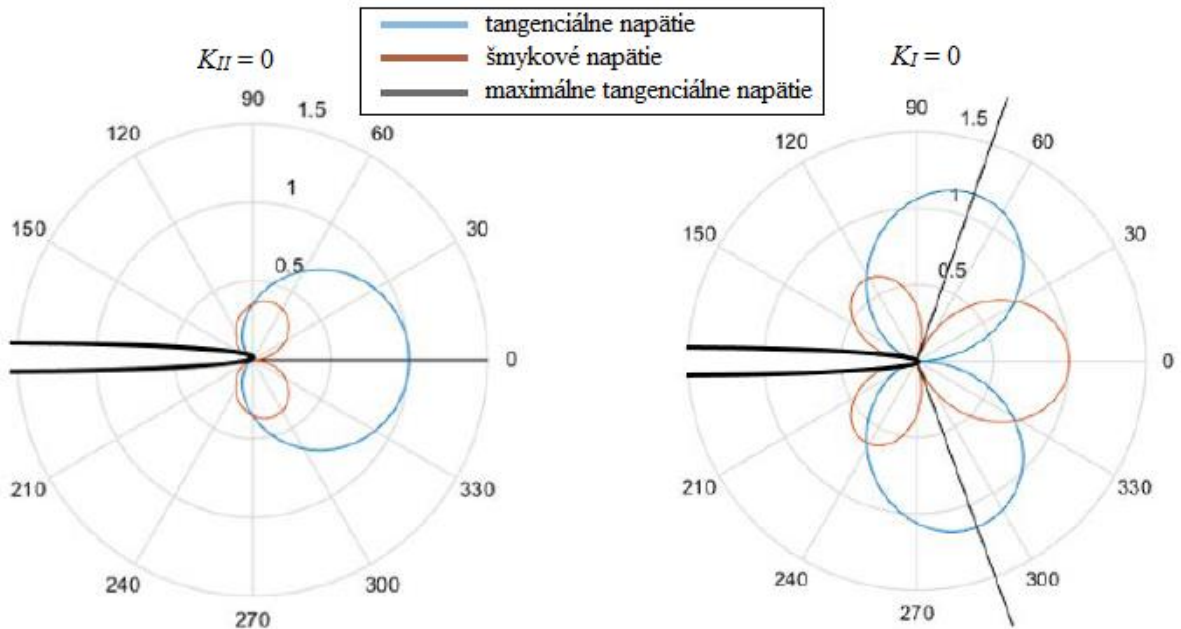
Podmienky k tomu, aby sa vzniknutá trhlina ďalej nestabilne šírila, sú popísané v kap. 5.1.1 a 5.1.2., nie je tu však pojednané o smere jej rastu. V prípade kombinácie viacerých módov zaťaženia (angl. *mixed-mode loading*) sa smer šírenia mení v závislosti na hodnotách faktorov intenzity napätia  $K_I$  a  $K_{II}$ , prípadne  $K_{III}$ . Ďalej budeme uvažovať kombináciu módov I a II a faktor  $K_{III}$  budeme považovať za nulový. Predstavíme dve kritériá pre určenie smeru ďalšieho šírenia trhliny založené na odlišných princípoch.

Jedno kritérium predstavili Erdogan a Sih [35]. Zakladali na predpoklade, že trhlina sa bude ďalej šíriť v smere, kde pôsobí maximálne tangenciálne napätie a šmykové napätie je nulové. Zložky tangenciálneho a šmykového napätia v polárnych súradniciach sú dané vzťahmi:

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi}} \left[ 3 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] - \frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi}} \left[ 3 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right], \quad (5.10)$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi}} \left[ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] + \frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi}} \left[ 3 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + 3 \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right]. \quad (5.11)$$

Radiálne napätie nehrá v smere šírenia trhliny rolu, preto nebude brané do úvahy. Obr. 5.4 ukazuje normalizované priebehy napätí v polárnom grafe. Vľavo sú napätia pre normálový mód ( $K_{II} = 0$ ) a vpravo pre šmykový mód ( $K_I = 0$ ).



Obr. 5.4: Tangenciálne a šmykové napätie pre mód I a mód II [36].

Podľa vzťahov (5.10) a (5.11) pre normálový mód vychádza uhol šírenia  $\theta = 0^\circ$  a pre šmykový mód  $\theta = 70,5^\circ$ . Z grafov na obr. 5.4 je naozaj vidieť, že v miestach maximálneho tangenciálneho napätia má šmykové napätie  $\sigma_{r\theta}$  nulovú hodnotu. Po dosadení nuly na ľavú stranu rovnice (5.11) a príslušných úpravách dostaneme vzťah pre uhol šírenia trhliny:

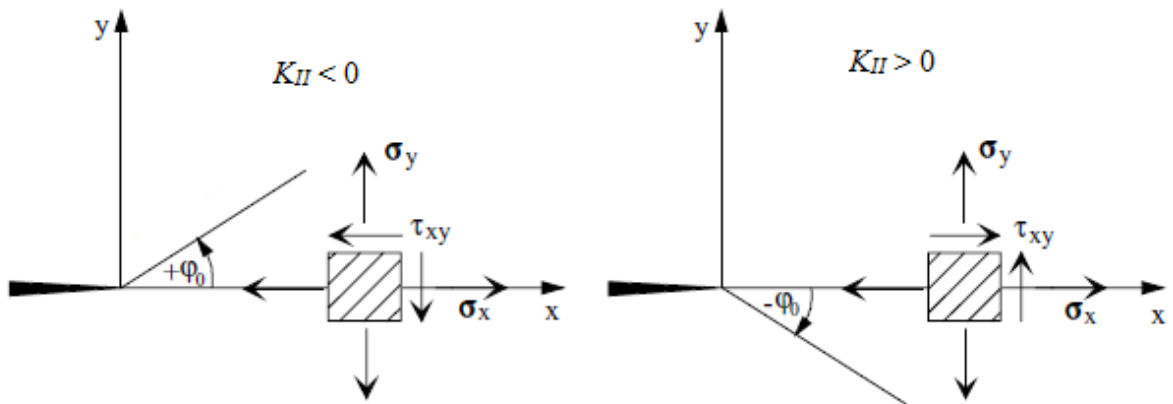
$$\theta_0 = -\arccos \frac{3K_{II}^2 + K_I \sqrt{K_I^2 + 8K_{II}^2}}{K_I^2 + 9K_{II}^2}. \quad (5.12)$$

Toto svoje kritérium Erdogan a Sih nazvali MTS (podľa angl. *Maximum Tangential Stress*).

Iné kritérium pre určenie smeru šírenia trhliny predstavili Richard et al. [37]. Tentokrát autori vychádzali z veľkého množstva experimentálnych dát a pre uhol šírenia zostavili nasledujúci empirický vzťah:

$$\theta_0 = \mp 155,5^\circ \left[ \frac{|K_{II}|}{|K_I| + |K_{II}|} \right] - 83,4^\circ \left[ \frac{|K_{II}|}{|K_I| + |K_{II}|} \right]^2. \quad (5.13)$$

Podľa tohto vzťahu je uhol šírenia  $\theta = 0^\circ$  pre čisto normálový mód a  $\theta = 72,1^\circ$  pre čisto šmykový mód. V prípade obidvoch kritérií je normálové napätie vždy kladné, ale šmykové namáhanie podľa módu II môže dosahovať ako pozitívne, tak aj negatívne hodnoty v závislosti na smere, v ktorom pôsobí. Na tom závisí aj znamienko pred uhlom šírenia trhliny (obr. 5.5).

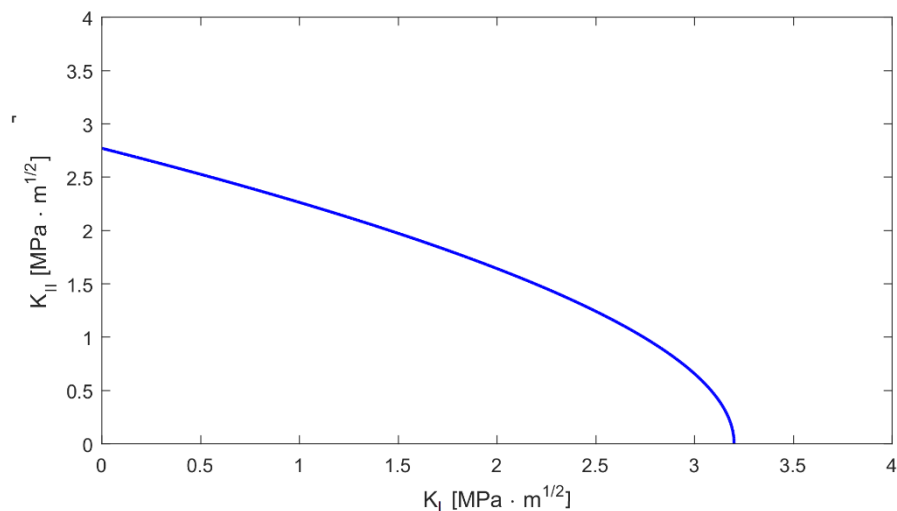


Obr. 5.5: Znamienko uhlu šírenia trhliny v závislosti na znamienku  $K_{II}$  [37].

Na záver treba ešte zadefinovať kritérium dosiahnutia medzného stavu nestabilného šírenia trhliny pre kombináciu zaťažovacích módov I a II. Ak je totiž teleso namáhané iba prvým módom, t. j. keď napätie pôsobí kolmo na trhlinu, jasne platí, že medzný stav nastane v okamihu, kedy faktor intenzity napätia  $K_I$  dosiahne medznej hodnoty  $K_{Ic}$ , pri súčasnom pôsobení veľkého zaťaženia v zmysle módu II však môže k porušeniu dôjsť skôr. Sih a Erdogan preto v svojej práci odvodili pre kombinované namáhanie v rovine a krehký materiál medznú podmienku šírenia trhliny [35]:

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ K_I \cdot \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{3}{2} K_{II} \cdot \sin(\theta) \right] = K_{Ic}. \quad (5.14)$$

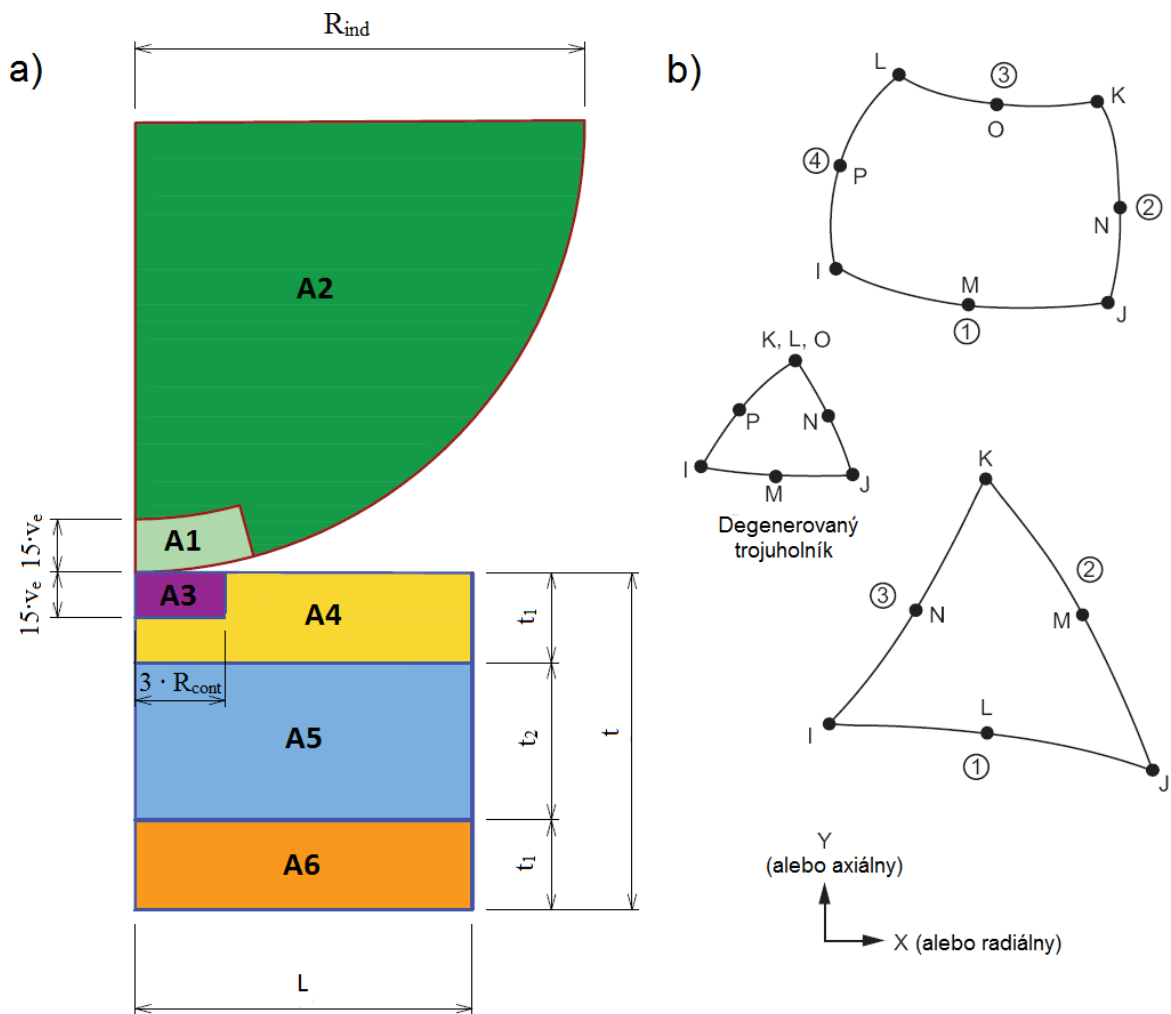
Pre  $K_{II} = 0$  potom samozrejme platí podmienka  $K_I = K_{Ic}$  a pre  $K_{II} = 0$  potom dostaneme kritérium  $K_{II} = 0.87 \cdot K_{Ic}$ . Grafické znázornenie kritéria v rovine  $K_I$ - $K_{II}$  je na obr. 5.6.



Obr. 5.6: Podmienka šírenia trhliny v rovine  $K_I$ - $K_{II}$

## 6 Deformačne-napät'ová MKP analýza kontaktu viacvrstvovej keramickej dosky s guľovým indentačným telesom

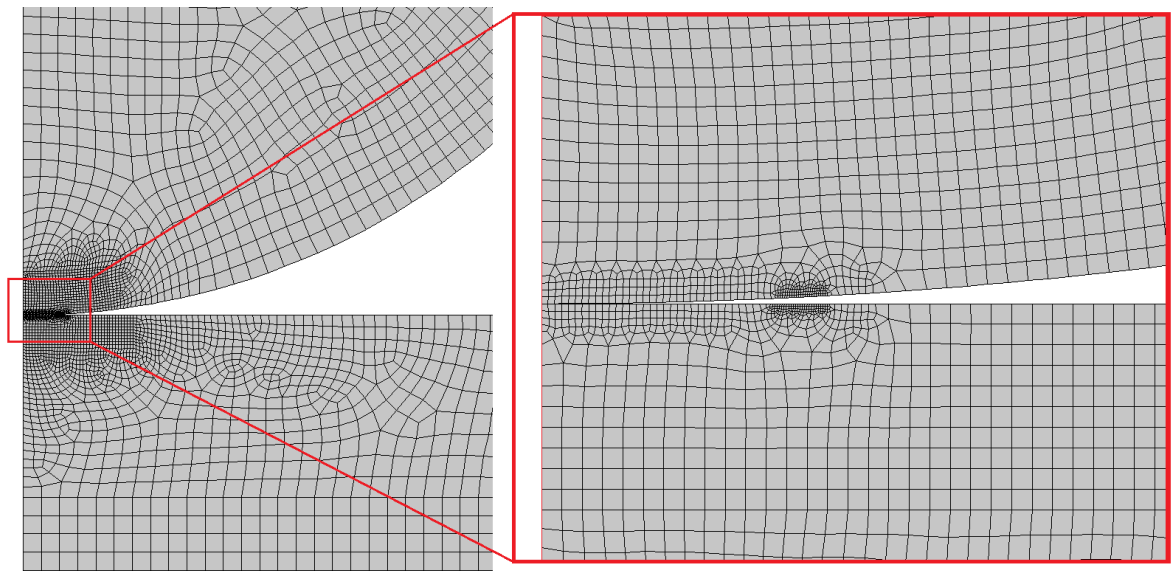
Parametrická MKP štúdia, ktorá má porovnať podmienky pre vznik Hertzovej kónickej trhliny v keramickom lamináte pre rôzne vzdialenosti od kontaktnej plochy, rôzne hodnoty zaťaženia, rôzne hrúbky vrstiev materiálu apod. je značne časovo náročná, preto akákoľvek možnosť vyhnúť sa nelineárnemu výpočtu by mala byť braná do úvahy a ak je to možné aj využitá. V tejto práci je pre linearizáciu MKP výpočtu použitá Hertzova teória neadhezívneho elastického kontaktu, ako je to popísané v kap. 4.2.1. Analytické vzťahy pre veľkosť kontaktnej plochy, priebeh kontaktného tlaku a posuvov a polia napätia pod kontaktom, ktoré táto teória poskytuje, však platia pre homogénny materiál nekonečnej hrúbky. Za účelom overiť platnosť, resp. mieru odchýlky týchto rovníc od popisu reality v prípade keramického laminátu konkrétnych rozmerov a elastických vlastností, bol najskôr vytvorený konečnoprvkový model obsahujúci nelinearitu typu kontakt, na ktorom bola prevedená deformačno-napät'ová analýza. Výsledky z tejto analýzy boli následne porovnané s analytickým riešením podľa Hertza.



Obr. 6.1: a) 2D model geometrie,  $v_e$  značí veľkosť prvku v oblastiach A1 a A3; b) 2D osemuzlový prvok PLANE183 [24].

## 6.1 Popis modelu

Pre všetky MKP výpočty v tejto práci bol použitý program Mechanical APDL 17.2 (ďalej len Ansys). S využitím rotačnej symetrie úlohy z hľadiska geometrie, zaťaženia i väzieb bol vytvorený dvojrozmerný model geometrie na obr. 6.1a. Pre vytvorenie siete konečných prvkov boli použité prvky typu PLANE183 [24], čo je rovinný osemuzlový prvok s kvadratickými bázovými funkciami posuvov, znázornený na obr. 6.1b. Rotačná symetria bola prvkom nastavená pomocou príkazu KEYOPT [24]. Polomer guľičky  $R_{ind}$  bol 2 mm a hrúbka laminátu  $t$  bola 1,5 mm. Rozmer  $L$  v radiálnom smere bol rovný hrúbke, čiže tiež 1,5 mm. Na obr. 6.1a je znázornených 6 oblastí A1-A6. V oblastiach A1 a A3, ktoré sa nachádzajú v mieste styku telies bola jemná mapovaná sieť, v ostatných miestach je postačujúca sieť hrubšia. Kvalita siete v oblastiach A1 a A3 bola ešte vylepšená lokálnym zjemnením pomocou príkazu EREFINE [38] na povrchu oboch telies, kde dochádza ku kontaktu. Najjemnejšia sieť je v mieste predpokladaného okraja stykovej plochy, pretože tu očakávame extrém radiálneho napätia. Detail výslednej siete je na obrázku 6.2.



Obr. 6.2: Siet' konečných prvkov v mieste kontaktu.

V úlohe boli uvažované 3 druhy materiálu, pre indentor oceľ a pre vrstvy laminátu keramiky AMZ a ATZ (viď kap. 2.4). Pre všetky 3 boli použité lineárne pružné modely s príslušnými hodnotami modulu pružnosti a Poissonovho pomeru. U AMZ a ATZ bolo potrebné zadať okrem elastických konštánt aj model teplotnej rozťažnosti, aby sme dokázali modelovať zvyškovú napätosť v lamináte. Hodnoty parametrov použitých v týchto modeloch sú zhrnuté v tab. 6.1.

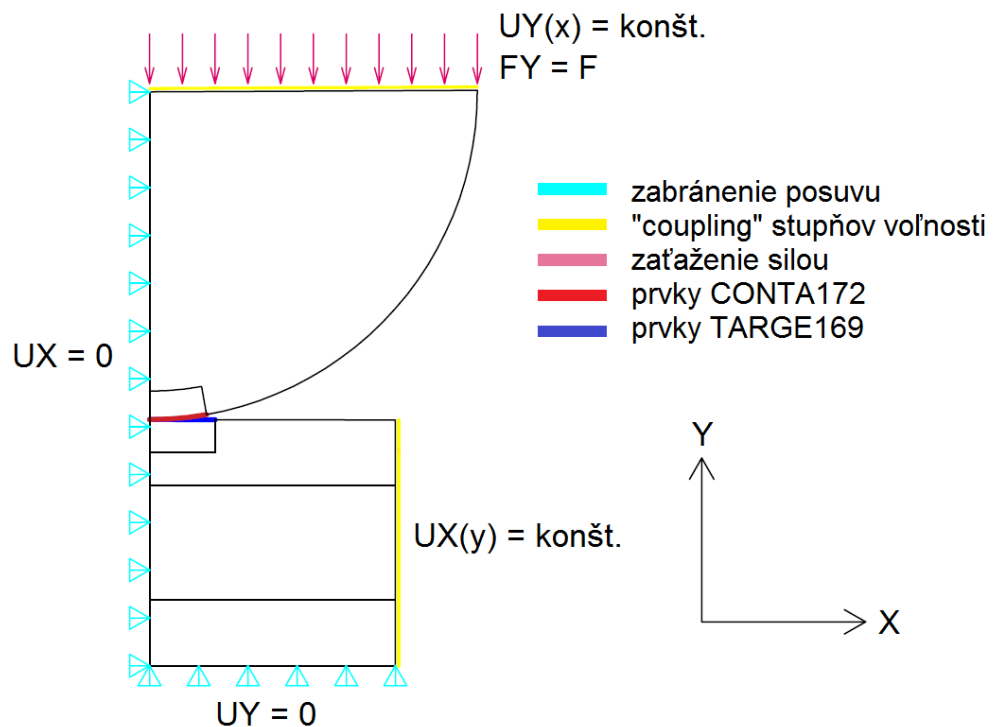
Tab. 6.1: Použité materiálové charakteristiky.

Materiál	lineárna elasticita		teplotná rozťažnosť	Pevnosť v ťahu	Lomová húževnatosť
	E [GPa]	$\nu$	$\alpha$ [ $K^{-1}$ ]	$\sigma_c$ [MPa]	$K_{Ic}$ [ $MPa \cdot m^{1/2}$ ]
Oceľ	210	0.30	-	-	-
ATZ	390	0.22	$9.8 \cdot 10^{-6}$	422	3,2
AMZ	280	0.22	$8.0 \cdot 10^{-6}$	90	2,6



Použité okrajové podmienky sú znázornené na obr. 6.3. Na ose symetrie je predpísané zabránenie posuvov v radiálnom smere a na spodnej hrane laminátu je zabránené posuvu v zvislom smere, aby nedochádzalo k pohybu telies ako tuhých celkov. Kontakt telies je realizovaný pomocou prvkov CONTA172 na povrchu indentoru a prvkov TARGE169 [24] na povrchu laminátu. Zaťažujúca sila 100 N pôsobí na indentor kolmo zhora a je rovnomerne rozpočítaná medzi uzly na príslušnej hrane. Tieto uzly majú navyše predpísanú podmienku rovnakého posuvu v zvislom smere („coupling“). Aby model vystihoval, že laminátová doska pokračuje ďalej smerom radiálne od osi symetrie a aby riešenie nebolo ovplyvnené nerovnomernosťami v napätosti a deformácii vznikajúcimi na okraji laminátu vplyvom rozdielnych reziduálnych napätí v jednotlivých vrstvách, je potrebné aj na zvislú hranu laminátu predpísať všetkým uzlom rovnaké posuvy. Iným riešením by bolo modelovať väčšiu časť laminátu a tým dostať oblasť ovplyvnenú okrajom ďalej od miesta kontaktu, znamenalo by to však zbytočné zvýšenie počtu stupňov voľnosti v rovnici MKP.

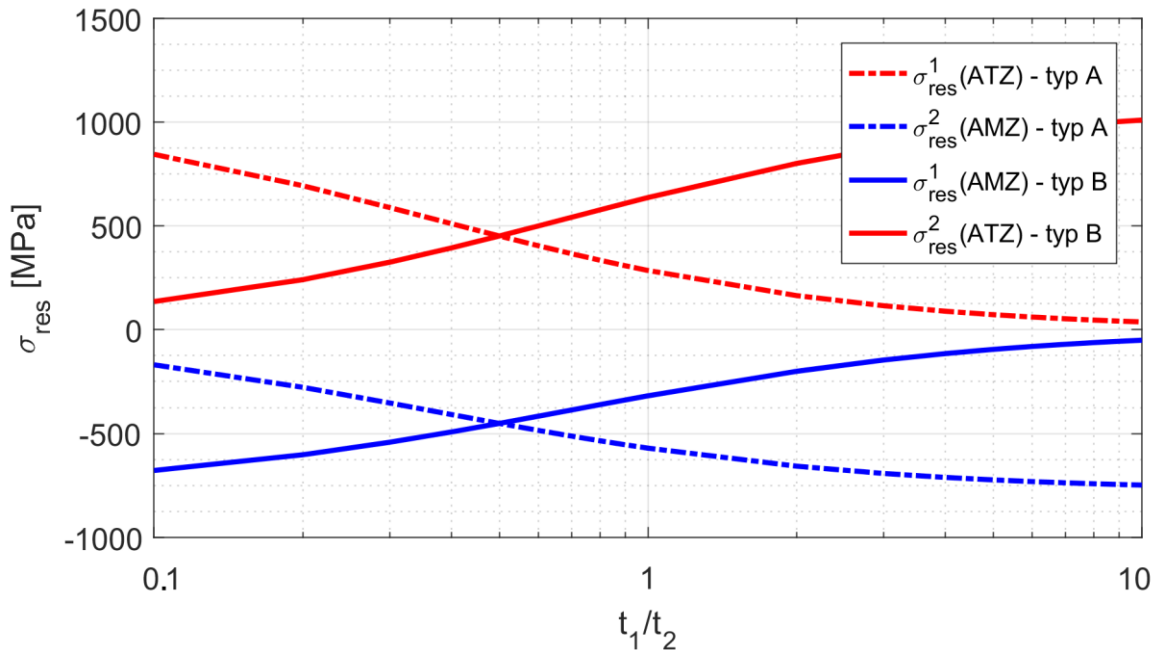
Posledná podmienka sa týka teplotného zaťaženia, bola predpísaná zmena teploty  $\Delta T = -1200\text{ }^{\circ}\text{C}$ , ktorá simuluje ochladenie laminátu z teploty slinovania na izbovú teplotu.



Obr. 6.3: Použité okrajové podmienky.

## 6.2 Výsledky výpočtu a porovnanie s analytickým riešením

V princípe boli vo výpočtoch brané do úvahy dva typy laminátu: jeden s vrstvou AMZ medzi dvoma vrstvami ATZ (typ A) a druhý s jednou vrstvou ATZ medzi dvoma vrstvami AMZ (typ B). Po dosadení materiálových parametrov a počtu vrstiev laminátu do rovníc (2.2) sa dá spočítať hodnota reziduálnych napätí vznikajúcich v jednotlivých vrstvách vplyvom teplotnej zmeny  $\Delta T$  pre rôzne hrúbky  $t_1$  a  $t_2$ . Na obr. 6.4 je znázornený priebeh týchto napätí pre pomer  $t_1/t_2$  v rozmedzí od 0,1 po 10 pre oba typy laminátu, os x má logaritmickú mierku.



Obr. 6.4: Zvyškové napätia v trojvrstvovom lamináte AMZ/ATZ a AMZ/ATZ.

Pre každý typ laminátu boli spočítané tri prípady pomeru  $t_1/t_2$ , a to 0,1, 0,5 a 1. Aby sme mohli výsledky považovať za dôveryhodné, treba najskôr overiť konvergenciu siete, resp. preskúmať citlivosť výsledkov na zmenu jej hustoty. Tab. 6.2 obsahuje výsledky takejto citlivostnej analýzy, ktorá bola prevedená pre laminát typu B a pomer hrúbok 0,1. Parameter  $v_e$  predstavuje veľkosť prvku v zjemnených oblastiach v okolí kontaktu (A1 a A3 z obr. 6.1a) a skúmanými veličinami sú maximálna a minimálna hodnota radiálneho napätia a maximálna hodnota kontaktného tlaku. Je vidieť, že po viac ako zdvojnásobení počtu uzlov sú zmeny na týchto veličinách zanedbateľné, preto môžeme sieť s veľkosťou prvku 8  $\mu\text{m}$  považovať za dostatočne jemnú a použijeme ju pre všetky kombinácie vstupných parametrov.

Na obr. 6.5 a 6.6 sú vykreslené priebehy kontaktných tlakov získané pomocou výpočtu MKP a z analytických vzťahov pre homogénny materiál (4.1) až (4.3). Do analytických vzťahov vstupovali vždy elasticke konštanty materiálu, ktorý bol na povrchu laminátu. U oboch typov laminátu sú priebehy pre rôzny pomer  $t_1/t_2$  takmer totožné. Odlišnosť od analytického riešenia je najviac viditeľná v blízkosti hranice kontaktnej plochy  $r = R_{cont}$ , v oboch prípadoch sú krivky z MKP nad analytickou krivkou a polomer kontaktnej plochy je o málo väčší.

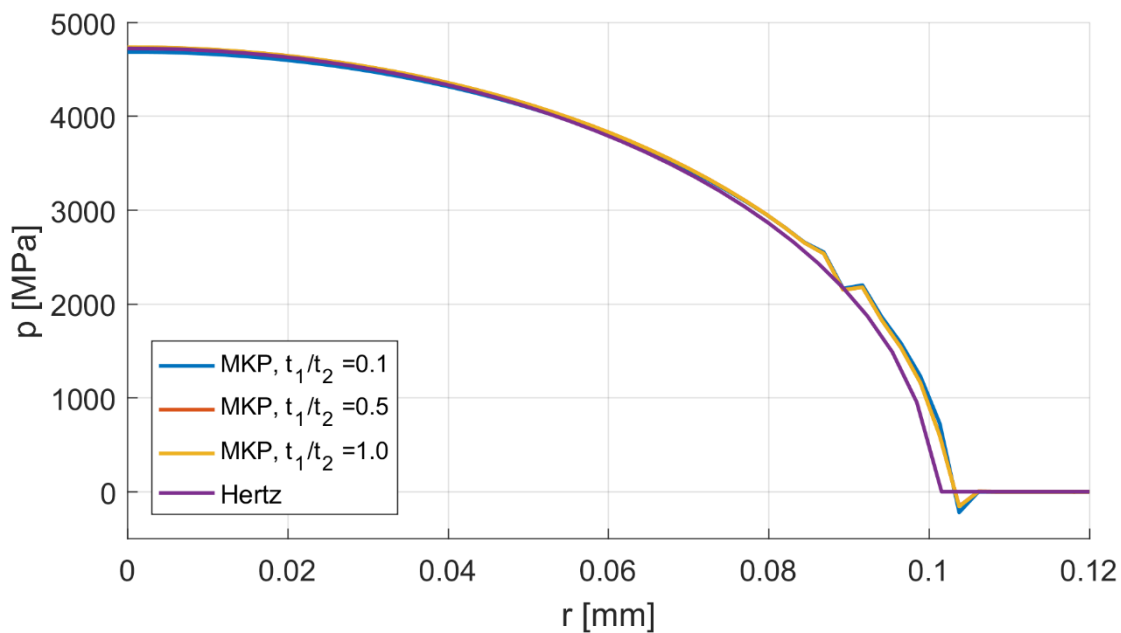
Priebehy radiálneho napätia na povrchu laminátu ( $z = 0$ ) sú zobrazené na obr. 6.7 a 6.8. Od výsledkov z MKP výpočtu sú odčítané veľkosti zvyškových napätí podľa rovníc (2.1), aby mohli byť tieto opäť porovnané s analytickým riešením podľa Hertza (rov. 4.12 a 4.13). Zameriame sa na oblasť  $r > R_{cont}$ , teda mimo kontaktnej plochy, pretože napätosť v týchto miestach zásadne ovplyvňuje podmienky vzniku trhliny. Tu vidíme medzi riešeniami pre homogénny materiál a laminát typu B markantnejší rozdiel, v extrémnom prípade  $t_1/t_2 = 0,1$  približne 110 MPa. Tento maximálny rozdiel je však tesne za hranicou kontaktnej plochy a s vzrastajúcou vzdialenosťou  $r$  sa znižuje. V oblasti tesne mimo kontaktu je kritická záťažová sila veľmi vysoká [39] a k porušeniu nakoniec dôjde väčšinou v miestach o niečo ďalej od hranice kontaktu, kde sú podmienky vzniku trhliny splnené skôr.

Tab. 6.2: Zmena extrémnych hodnôt napätí so zmenou veľkosti prvku.

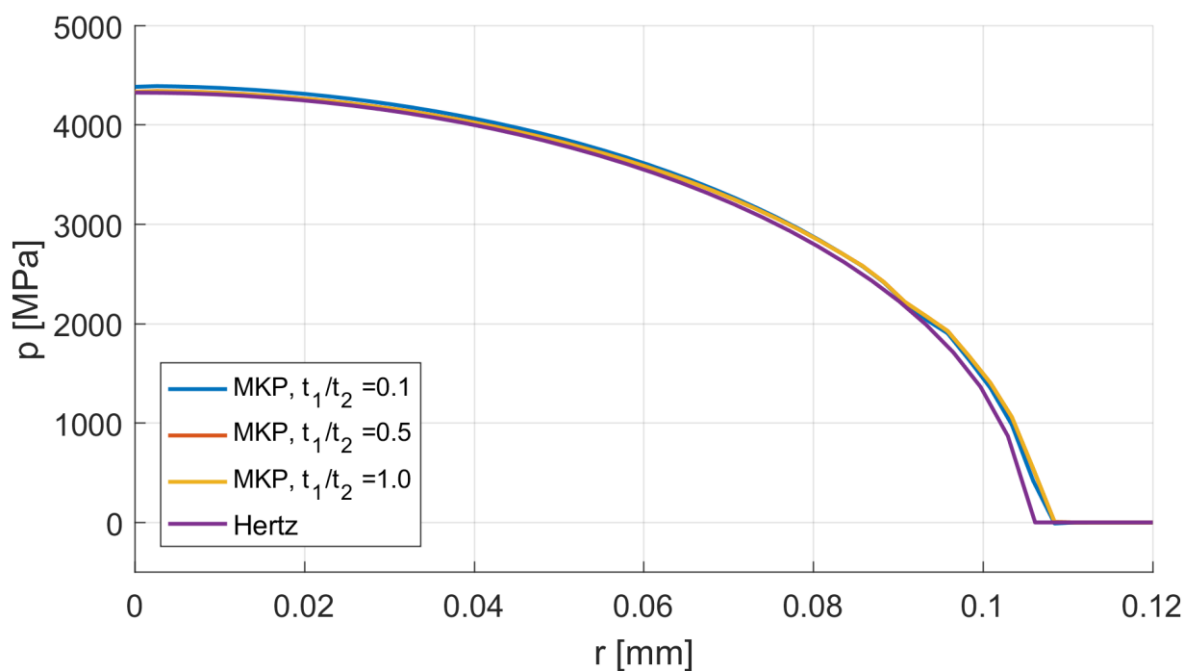
$v_e$ [ $\mu\text{m}$ ]	počet prvkov	počet uzlov	$\sigma_r^{\min}$ [MPa]	$\sigma_r^{\max}$ [MPa]	$p_{cont}^{\max}$ [MPa]
11	2917	8269	-3642	459	4392
<b>8</b>	<b>4628</b>	<b>13320</b>	<b>-3642</b>	<b>466</b>	<b>4391</b>
6	7874	22990	-3643	470	4394
5	10123	29631	-3645	479	4397

Extrémne výkyvy hodnôt v priebehu kontaktných tlakov i radiálneho napätia v oblasti hranice kontaktnej plochy sú spôsobené tým, prvok nachádzajúci sa v tomto mieste má jeden povrchový uzol v kontakte s indentorom a druhý nie. Tým na tomto prvku vzniká veľké ťahové napätie, ktoré nezodpovedá realite. Tento jav by mohla potlačiť extrémne jemná sieť pod kontaktom, to však pre riešenie problému, ktorým sa táto práca zaoberá, nie je dôležité. Druhý výkyv vo vzdialenosti približne  $r = 0,9$  mm od stredu kontaktnej plochy je dôsledkom zmeny hustoty siete v týchto miestach.

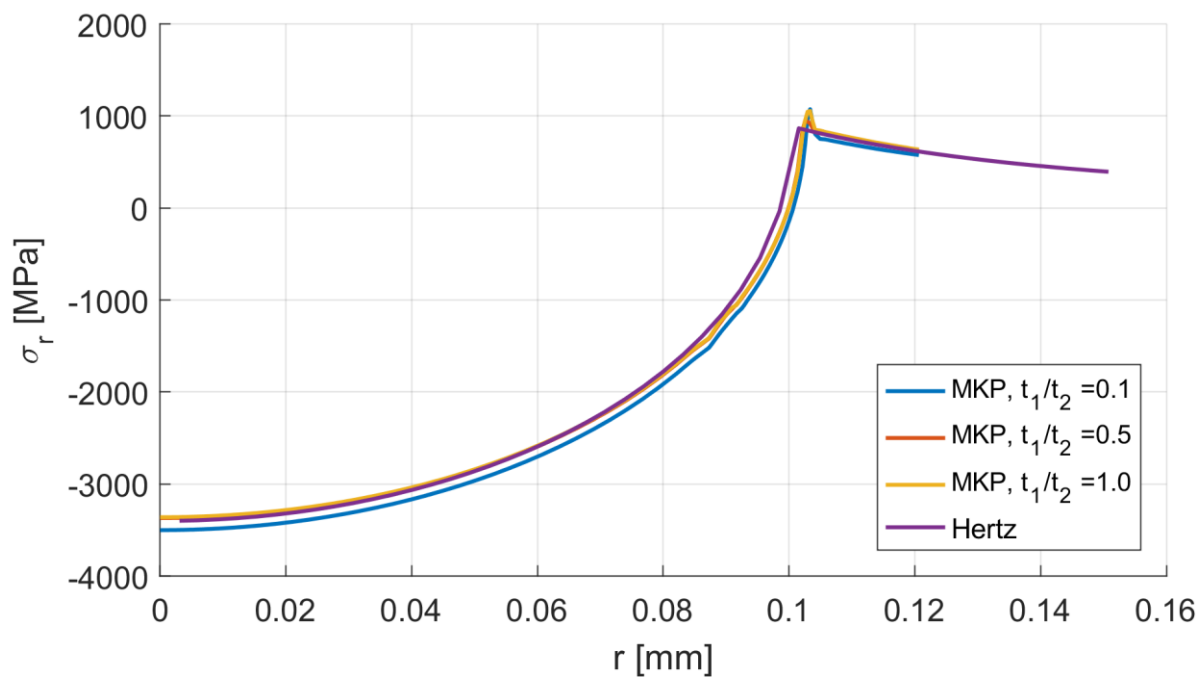
Na základe týchto výsledkov sa dá usúdiť, že v ďalšej analýze si môžeme dovoliť model zjednodušiť nahradením kontaktu telies silovou okrajovou podmienkou, ktorá uzlom na povrchu laminátu v mieste kontaktu predpíše povrchové zaťaženie tlakom podľa rovníc (4.1) až (4.3).



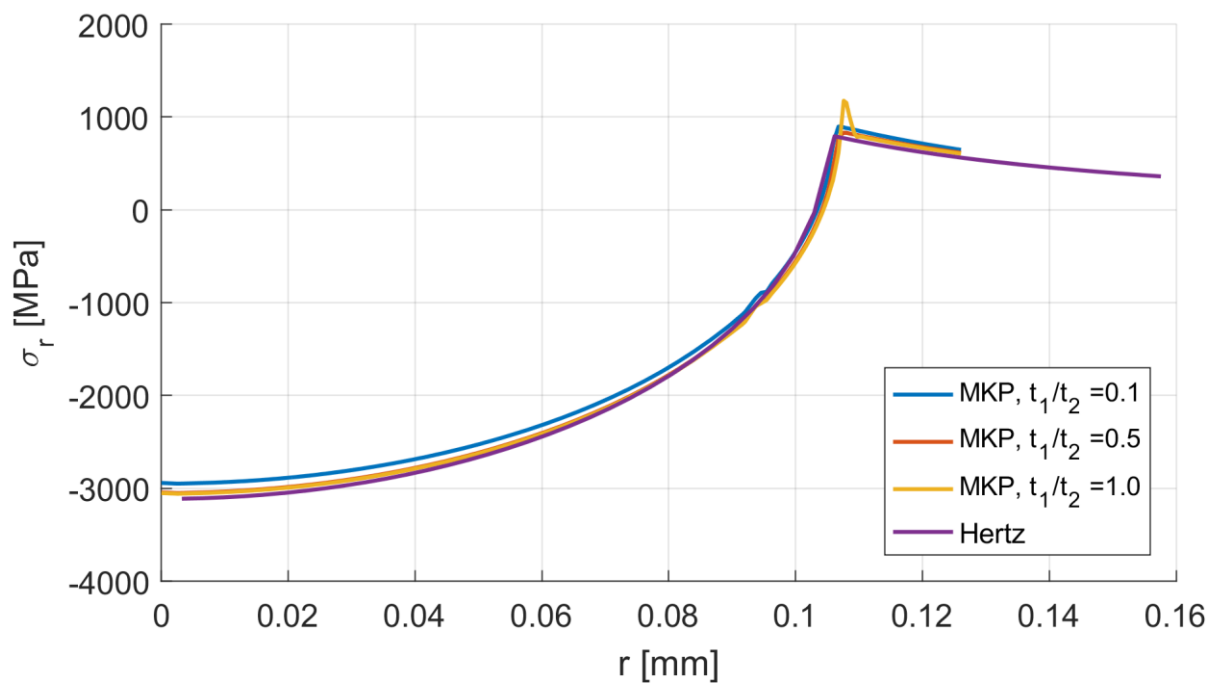
Obr. 6.5: Laminát typu A: porovnanie priebehu kontaktného tlaku z MKP výpočtu laminátu s analytickým riešením pre homogénny materiál.



Obr. 6.6: Laminát typu B: porovnanie priebehu kontaktného tlaku z MKP výpočtu laminátu s analytickým riešením pre homogénny materiál.



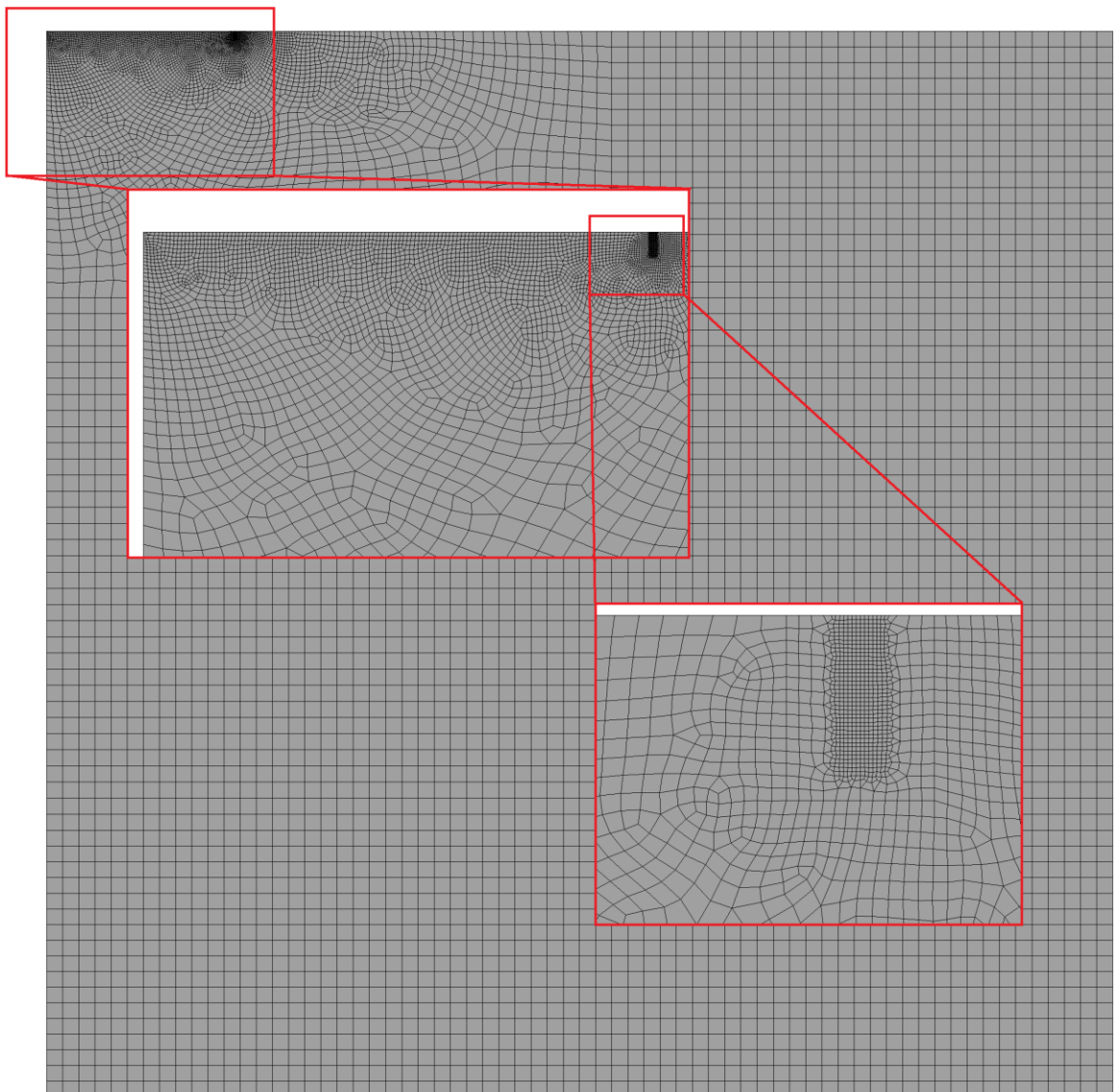
Obr. 6.7: Laminát typu A: porovnanie priebehu radiálneho napätia z MKP výpočtu laminátu s analytickým riešením pre homogénny materiál.



Obr. 6.8: Laminát typu B: porovnanie priebehu radiálneho napätia z MKP výpočtu laminátu s analytickým riešením pre homogénny materiál.

## 7 Predikcia vzniku prstencovej trhliny v keramickom lamináte

V tejto kapitole je popísaný MKP model, ktorý bol vytvorený za účelom analýzy záťažových podmienok nutných pre vznik prstencovej trhliny na povrchu vrstvenej keramickej štruktúry. Podľa [34, 39] táto trhlina nevzniká v miestach s najvyšším ťahovým napätím ( $r = R_{cont}$ ), pretože z energetického hľadiska vznikajú v intervale 1- až 1,5-násobku  $R_{cont}$  omnoho vhodnejšie podmienky k jej iniciácii. Preto bolo využité združené energeticko-napät'ové kritérium (kap. 5.1.3), pomocou ktorého sa hľadala kritická sila nutná pre iniciáciu trhliny v tomto intervale vzdialeností od miesta kontaktu. Analýza bola prevedená pre obidva typy laminátu (A aj B) s rôznymi hodnotami pomeru hrúbok vrstiev  $t_1/t_2$ . Nakoniec boli vybrané dva konkrétne prípady laminátu pre posúdenie vplyvu veľkosti indentačného telesa.



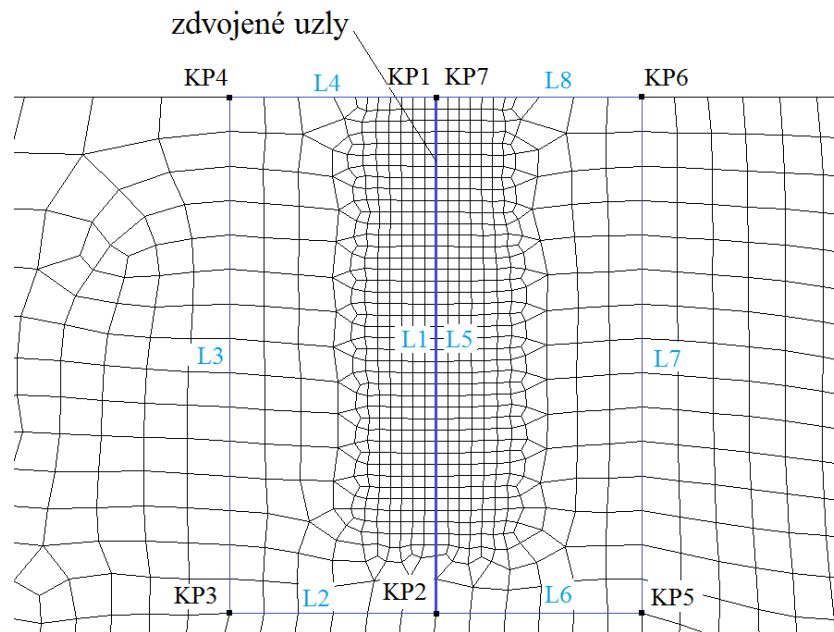
Obr. 7.1: Sieť konečných prvkov pre analýzu podmienok vzniku trhliny.

## 7.1 Popis modelu

Použitý model geometrie bol opäť dvojrozmerný s využitím osovej symetrie, podobne ako v kapitole 6. Rozdiel oproti predchádzajúcemu modelu spočíval v tom, že geometria kontaktného guľového telesa bola nahradená priamo zadanými okrajovými podmienkami. Pri diskretizácii sme tentokrát úplne vystačili so štvoruholníkovými rovinnými kvadratickými prvkami PLANE183. Veľkosť prvkov finálnej siete (obr. 7.1) sa pohybovala od globálneho rozmeru  $23\ \mu\text{m}$  po  $0,33\ \mu\text{m}$  v mieste potenciálneho vzniku trhliny. Použité modely materiálu boli identické s predošlou úlohou.

Okrajové podmienky viažuce teleso v priestore boli prevzaté z predchádzajúceho modelu; nulový radiálny posuv na ose symetrie a nulový vertikálny posuv na spodnej hrane. Rovnako bol použitý aj „coupling“ radiálnych posuvov na pravej hrane. Teplotné zaťaženie ostalo takisto nezmenené a pribudlo zaťaženie (kontaktným) tlakom podľa rovníc (4.1) až (4.3), ktoré je aplikované na jednotlivé povrchové uzly nachádzajúce sa v mieste simulovaného kontaktu v závislosti na ich radiálnej vzdialenosti od osi symetrie.

Miesto potenciálneho vzniku trhliny sa nachádza vo vzdialenosti  $k \cdot R_{cont}$ , pričom parameter  $k$  sa mení v intervale 1 až 1,5. V tomto mieste je geometria rozpojená a nachádzajú sa tu zdvojené uzly s rovnakými súradnicami, kde vždy každý z dvojice uzlov patrí inej geometrickej entite (čiare L1 alebo L5 na obr. 7.2). Pomocou APDL príkazu NUMMRG [38] sa niektoré z uzlov zjednotia, čím vznikne trhlina požadovanej dĺžky.



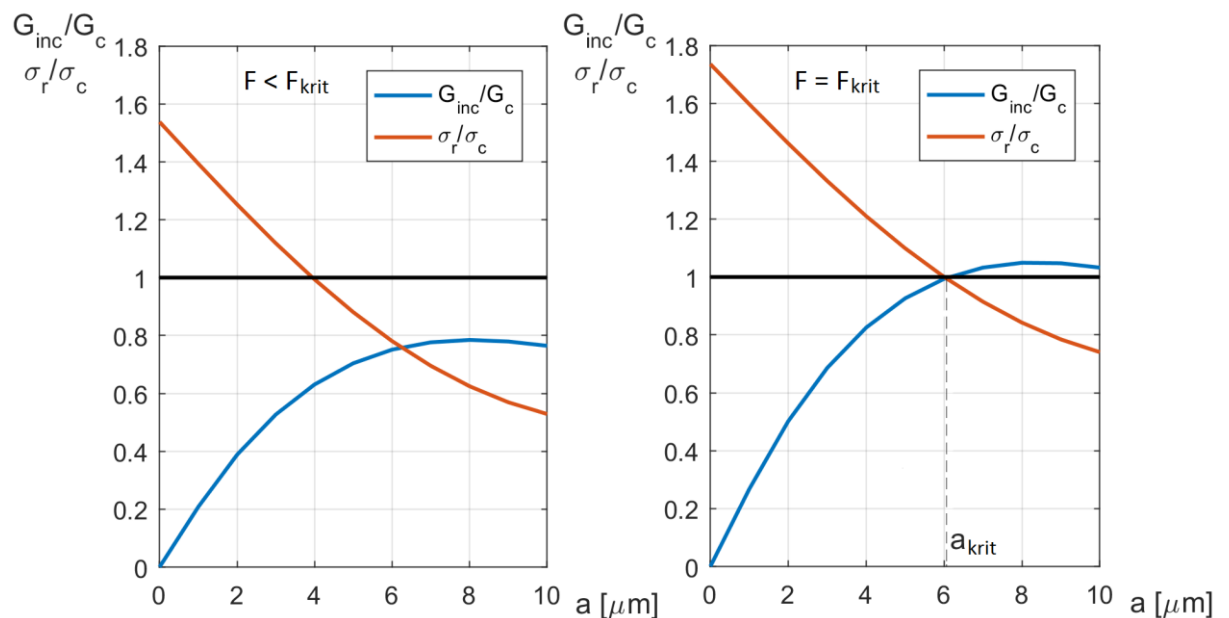
Obr. 7.2: Zdvojené uzly v mieste potenciálneho vzniku trhliny.

Celý princíp analýzy vzniku trhliny potom spočíva v tom, že pre určitú počiatočnú záťažovú normálovú tlakovú silu  $F_1$  program vypočíta polomer kontaktnej plochy  $R_{cont}$  a rozloženie kontaktného tlaku  $p(r)$ . Potom vytvorí príslušnú geometriu, kde podľa hodnoty parametra  $k$  určí polohu konfigurácie pre vytvorenie trhliny podľa obr. 6.2. Následne vytvorí sieť konečných prvkov a zlúči potrebné zdvojené uzly. Ďalej každému uzlu na povrchu laminátu, ktorý sa nachádza vo vzdialenosti  $r \in (0, R_{cont})$ , predpíše zaťaženie príslušnou hodnotou sily podľa spočítaného priebehu  $p(r)$  a aplikuje ostatné vyššie uvedené okrajové podmienky.

Začína sa s trhlinou nulovej dĺžky (zlúčené všetky zdvojené uzly), program danú úlohu vyrieši a následne spočíta a uloží hodnotu celkovej energie napätosti systému  $W_{(0)}$ . Ďalej spočíta a uloží hodnoty radiálneho napätia vo všetkých uzloch v mieste potenciálneho vzniku trhliny, až do hĺbky  $20 \mu\text{m}$  pod povrchom. Potom sa sieť konečných prvkov zmaže a vytvorí nanovo a zdvojené uzly sa zlúčia tak, aby vznikla trhlina určitej dĺžky (v našom prípade  $1 \mu\text{m}$ ). Program opäť úlohu vyrieši a vyčísli hodnotu energie napätosti  $W_{(a)}$ . Z rozdielu energií napätosti je potom možné spočítať inkrementálnu hnaciu silu trhliny ako funkciu dĺžky trhliny:

$$G_{(a)}^{inc} = \pm \frac{\Delta W}{\Delta A} = \pm \frac{W_{(a)} - W_{(0)}}{2\pi \cdot k \cdot R_{cont}}. \quad (7.1)$$

Hodnotu  $G_{inc}$  porovná s kritickou hodnotou  $G_c$  a hodnotu radiálneho napätia z prvého výpočtu (bez trhliny) v mieste koreňa potenciálne vzniknutej trhliny danej dĺžky (v hĺbke  $1 \mu\text{m}$ ) porovná s hodnotou pevnosti  $\sigma_c$  – vid' rovnica (5.8). Ak sú obe podmienky splnené súčasne, našli sme kritickú hodnotu záťažovej sily a kritickú dĺžku trhliny. V opačnom prípade postupne zvyšujeme veľkosť trhliny s krokom  $1 \mu\text{m}$  až po konečných  $20 \mu\text{m}$  a v každom kroku kontrolujeme splnenie podmienok (5.8). Ak ani pri  $20 \mu\text{m}$  nie sú obe podmienky splnené súčasne, zvýši sa záťažová sila a proces sa opakuje. Po nájdení kritickej hodnoty sily program zapíše hodnotu tejto sily a príslušnú dĺžku trhliny do poľa výsledkov a zvýši hodnotu pomeru  $k$ . Vo finále súbor s výsledkami obsahuje hodnoty kritickej sily a dĺžky trhliny pre všetky zvolené pomery  $k$ . Analyzovať podmienky vzniku pre trhliny dlhšie ako  $20 \mu\text{m}$  nemá význam, pretože v tejto hĺbke pod povrchom je už hodnota napätia spravidla príliš nízka k splneniu napät'ového kritéria.



Obr. 7.3: Grafické znázornenie združeného energeticko-napät'ového kritéria: vľavo kritérium nie je splnené pre žiadnu dĺžku  $a$  – trhlina nevzniká, vpravo je kritérium splnené – vzniká trhlina dĺžky  $a_{krit}$

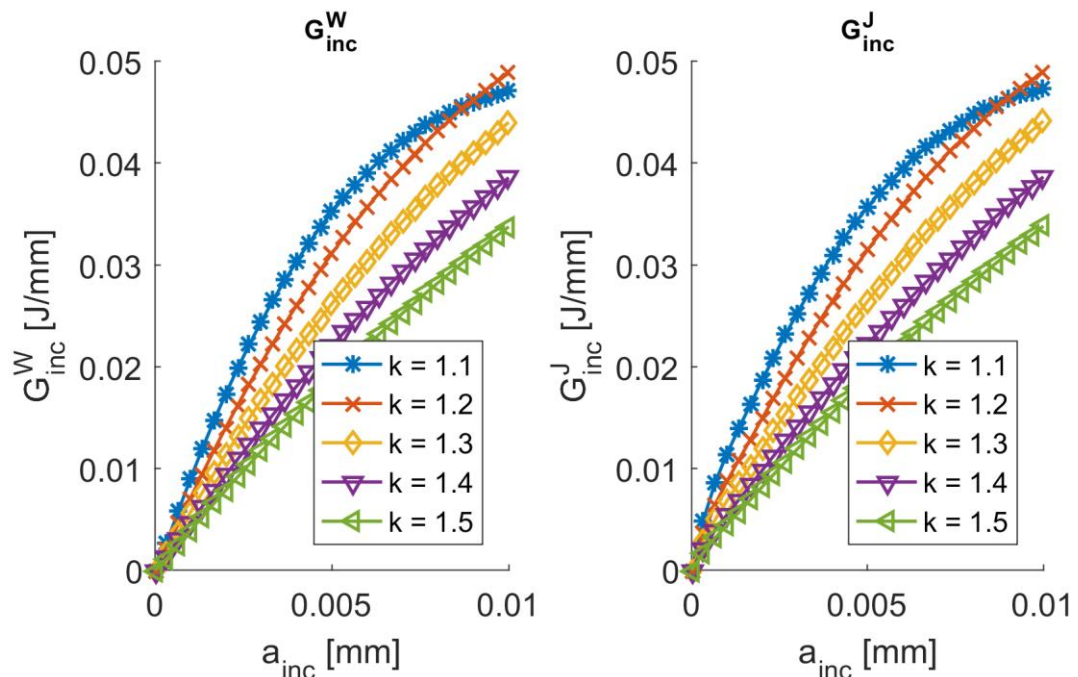
Na obr. 7.3 je znázornený priebeh radiálneho napätia  $\sigma_r$  a inkrementálnej hnacej sily trhliny  $G_{inc}$  v závislosti na dĺžke  $a$  potenciálne vznikajúcej trhliny, pričom obe tieto veličiny sú



normalizované k svojim kritickým hodnotám. Vľavo je vykreslený stav, kedy je pôsobiaca sila nižšia ako kritická. V takom prípade napäťové a energetické kritérium, ktoré sú z hľadiska požiadavky na dĺžku trhliny navzájom protichodné, nie sú súčasne splnené pre žiadnu hodnotu  $a$ , tým pádom trhlina vzniknúť nemôže. Vpravo je naproti tomu situácia, keď zaťažujúca sila práve dosiahla svojej kritickej hodnoty. Vtedy je združené kritérium splnené pre jediné  $a$ , čo je práve dĺžka trhliny  $a_{krit}$ , ktorá vznikne pri pôsobení tejto kritickej sily.

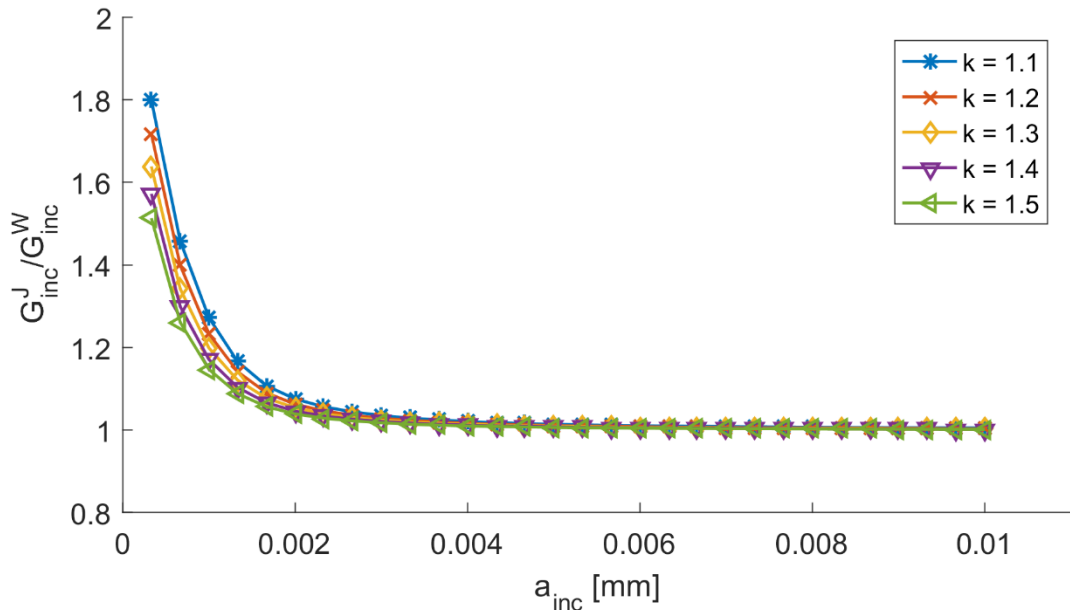
### 7.1.1 Voľba okrajovej podmienky simulujúcej kontakt

Vo vzťahu (7.1) vystupuje znamienko  $\pm$ , ktoré súvisí s tvrdým a mäkkým zaťažovaním zmieným v kapitole 5.1.1. Pri mäkkom zaťažovaní totižto s rastúcou, resp. vznikajúcou trhlinou celková elastická energia sústavy rastie, zatiaľ čo pri tvrdom móde zaťažovania naopak klesá. Pri výpočte pre homogénny materiál by tento fakt zrejme nestál za zmienku, s kritickou hodnotou by sa proste porovnala absolútna hodnota  $G_{inc}$ . Iná situácia však nastáva v prípade laminátu, kde zvyškové napätia zavádzame prostredníctvom zmeny teploty. Zmena rozmerov v dôsledku teplotnej rozťažnosti je z hľadiska statickej štruktúrálnej analýzy analogická s tvrdým (deformačným) módom zaťaženia. Pri lamináte s trhlinou, ktorý má v povrchovej vrstve prítomné ťahové zvyškové napätia (typ A), dochádza k roztváraniu trhliny a energia napätosti sústavy tak vplyvom týchto napätí klesá. Ak by sme však aplikovali (mäkké) zaťaženie kontaktným tlakom a porovnali laminát s trhlinou a bez trhliny, energia napätosti sústavy by vplyvom takéhoto zaťaženia narástla. Tieto dva javy by teda zdanlivo pôsobili protichodne a výsledná energia napätosti by podľa princípu superpozície, ktorý v lineárnom výpočte platí, bola ich rozdielom. V skutočnosti však oba typy zaťaženia vzniku trhliny prospievajú a výsledná energia napätosti sústavy vypočítaná softvérom Ansys by nezodpovedala hodnote, ktorú treba dosadiť do energetickej podmienky.



Obr. 7.4: Výsledky výpočtu  $G_{inc}$  pomocou energie napätosti ( $G_{inc}^W$ ) a pomocou J-integrálu ( $G_{inc}^J$ ) pre rôzne dĺžky trhliny a vzdialenosti od hranice kontaktnej oblasti. Laminát typu A,  $F = 400 \text{ N}$ ,  $t_1/t_2 = 0,5$ .

Treba preto použiť deformačnú okrajovú podmienku a uzlom pod simulovaným kontaktom predpísať posuv v smere kolmom na povrch laminátu (smer  $y$ ). Toto bolo v našom prípade realizované tak, že v prvom výpočte bez trhliny bola použitá silová okrajová podmienka a program po prevedení výpočtu uložil posuvy uzlov v mieste kontaktu. Tieto posuvy boli následne aplikované ako okrajová podmienka pre výpočty s trhlínami všetkých nenulových dĺžok. Správnosť nášho predpokladu bola pre pomer  $t_1/t_2 = 0,5$ , záťažovú silu  $F = 400$  N a pre rôzne pomery  $k$  overená pomocou výpočtu J-integrálu na čele trhliny (v APDL príkaz CINT), ktorého hodnota sa rovná hnacej sile trhliny  $G$ . Z tej bola následne numerickou integráciou podľa vzťahu (5.9) vyčíslená hodnota  $G_{inc}^W$  a porovnaná s hodnotami vypočítanými z energie napätosti (obr. 7.4).



Obr. 7.5: Porovnanie hodnôt  $G_{inc}^W/G_{inc}^J$ . Laminát typu A,  $F = 400$  N,  $t_1/t_2 = 0,5$ .

Obr. 7.5 ukazuje pomer týchto hodnôt pre rôzne dĺžky trhliny. Vidíme, že pre krátke trhliny je hodnota z J-integrálu výrazne vyššia, čo je spôsobené nedostatočne jemnou sieťou v okolí trhliny. Pre trhliny od 2  $\mu\text{m}$  je však táto zhoda veľmi dobrá. Pri použití silovej okrajovej podmienky boli výsledky výrazne odlišné -  $G_{inc}$  získaná pomocou energie napätosti bola nižšia - čo nášmu predpokladu dáva za pravdu. V prípade laminátu s tlakovými reziduálnymi napätiami v povrchovej vrstve tento problém odpadá, pretože trhlina sa vplyvom týchto napätí zaviera. Stačí tu teda použitie silovej okrajovej podmienky.

### 7.1.2 Konvergencia siete

Pre zaistenie dôveryhodnosti výsledkov MKP výpočtu treba opäť skontrolovať, či je sieť konečných prvkov dostatočne jemná. Citlivosť na zmenu hustoty siete bola skúmaná najmä u veličín, ktoré priamo vstupujú do podmienok iniciácie trhliny z rovníc (5.8), menovite ide o radiálne napätie  $\sigma_r$  v mieste potenciálneho koreňa trhliny a zmenu energie napätosti systému  $\Delta W$ . Výsledky citlivostnej analýzy pre laminát typu A,  $t_1/t_2 = 1$ ,  $F = 300$  N a  $k = 1,1$  sú zhrnuté v tab. 7.1. Pre parametrickú analýzu bola na základe týchto výsledkov zvolená globálna veľkosť prvku 23  $\mu\text{m}$  (stĺpec  $v_{e,2}$  v tabuľke) a veľkosť 0,33  $\mu\text{m}$  pre prvky v okolí trhliny (stĺpec  $v_{e,1}$ ).

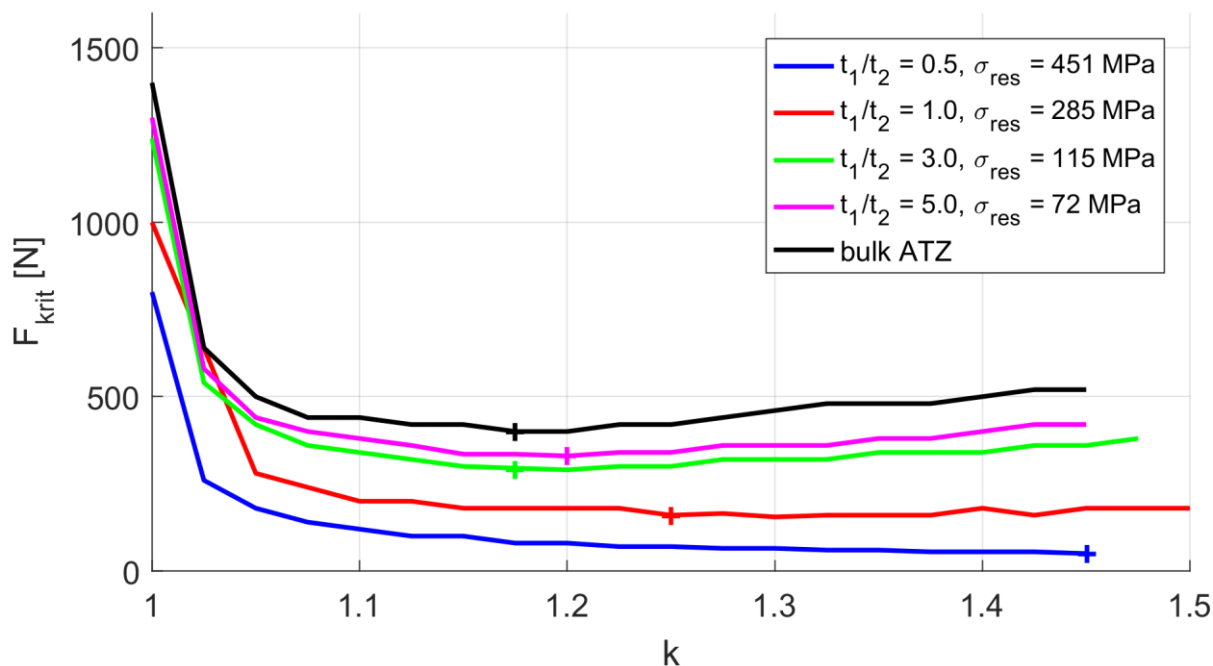
Tab. 7.1: Zmena energetických veličín a napätia v koreni trhliny so zmenou hustoty siete.

$v_{e,1}$ [ $\mu\text{m}$ ]	$v_{e,2}$ [ $\mu\text{m}$ ]	prvky	uzly	$W_{(0)}$ [J]	$W_{(5\mu\text{m})}$ [J]	$\Delta W$ [ $\cdot 10^{-4}$ J]	$G_{inc}$ [ $\text{J}\cdot\text{m}^{-2}$ ]	$\sigma_r$ [MPa]
0,67	23	7065	21638	3,374900	3,374796	-1,04	19,912	1152
0,5	23	7650	23421	3,378934	3,378814	-1,20	22,925	1158
0,4	23	7902	24203	3,380532	3,380414	-1,18	23,027	1161
<b>0,33</b>	<b>23</b>	<b>8552</b>	<b>26177</b>	<b>3,381167</b>	<b>3,381046</b>	<b>-1,21</b>	<b>23,080</b>	<b>1162</b>
0,25	15	19126	58151	3,381063	3,380942	-1,21	23,143	1162

## 7.2 Výsledky analýzy podmienok pre iniciáciu trhliny

Pre posúdenie vplyvu veľkosti zvyškových napätí a hrúbky kontaktnej vrstvy na vznik prstencovej trhliny v keramickom lamináte bolo zvolených celkovo 11 rôznych prípadov štruktúry s rovnakou celkovou hrúbkou 1,5 mm. Dva zahŕňajú homogénne keramické dosky AMZ, resp. ATZ bez reziduálnych napätí a zvyšok tvoria laminované štruktúry tvorené kombináciou alternujúcich dosiek AMZ a ATZ, vyššie označené ako lamináty typu A a typu B. U oboch typov boli postupne analyzované pomery hrúbok vrstiev  $t_1/t_2 = 0,5, 1, 3$  a  $5$  a u typu B so zápornými reziduálnymi napätiami navyše pomer  $0,2$ . Cieľom bolo nájsť hodnotu kritickej sily potrebnej pre iniciáciu prstencovej trhliny podľa združeného energeticky-napäťového kritéria vo vzdialenosti  $1$  až  $1,5$ -násobku polomeru kontaktnej plochy  $R_{cont}$ .

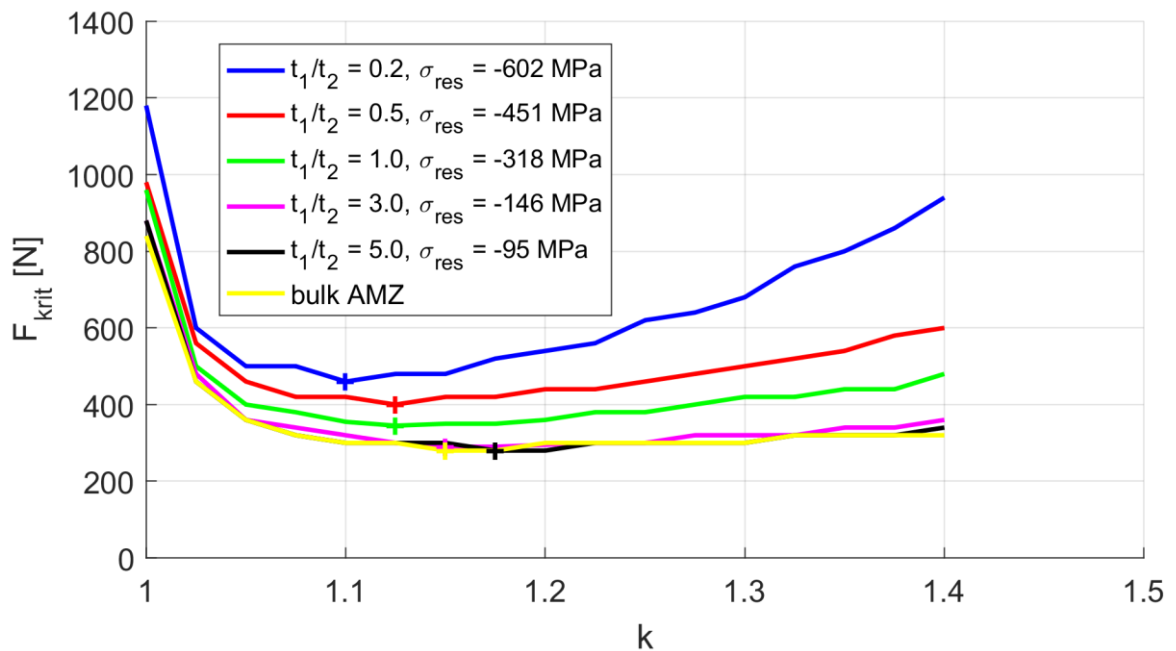
Hodnoty kritickej sily v závislosti na vzdialenosti od kontaktu pre lamináty ATZ-AMZ-ATZ (typ A) s kladnými, ťahovými zvyškovými napätiami sú znázornené v grafe na obr. 7.6. Pre porovnanie sú do grafu vynesené aj hodnoty pre homogénny ATZ materiál. Vo všetkých prípadoch pozorujeme, že sila potrebná pre vznik prstencovej trhliny na okraji kontaktnej plochy ( $k = 1$ ) je neporovnateľne vyššia ako vo vzdialenosti  $1,1$ - až  $1,3$ -násobku  $R_{cont}$ . Je to spôsobené tým, že hoci je v týchto miestach najvyššie radiálne napätie, z energetického hľadiska tu vhodné podmienky pre nukleáciu trhliny nie sú.



Obr. 7.6: Kritická sila pre iniciáciu trhliny v závislosti na vzdialenosti od kontaktnej oblasti pre lamináty typu A a homogénnu dosku ATZ.

Z grafu je zjavné, že s klesajúcou hrúbkou kontaktnej vrstvy, resp. s rastúcim reziduálnym napätím v tejto vrstve sa schopnosť materiálu odolávať kontaktnému porušeniu znižuje, pretože kritická sila potrebná pre vznik trhliny klesá. Zo 400 N pre homogénny materiál táto kritická hodnota postupne klesne až na 50 N pre laminát s pomerom hrúbok vrstiev 0,5. Takisto s rastúcim zvyškovým napätím pozorujeme mierny posun minima krivky  $F_{krit} = f(k)$ , ktoré zodpovedá najvhodnejšiemu miestu pre vznik trhliny, k vyšším hodnotám pomeru  $k$ . Dôvodom je fakt, že prítomnosť kladných napätí uľahčuje splnenie napäťovej podmienky, tým pádom má pri určovaní kritickej hodnoty väčšiu „váhu“ podmienka energetická, ktorá je skôr splnená vo väčšej vzdialenosti od kontaktu.

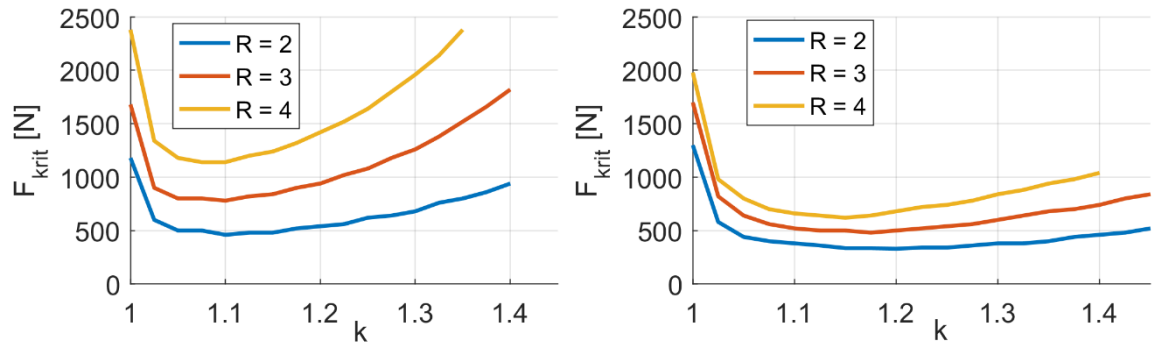
Rovnaký graf pre lamináty AMZ-ATZ-AMZ (typ B) so zápornými, tlakovými reziduálnymi napätiami a homogénny AMZ materiál je na obr. 7.7. Tu pozorujeme presne opačný trend, kritická sila sa s klesajúcou hrúbkou kontaktnej vrstvy zvyšuje. Je to logické, pretože zatiaľ čo ťahové napätia trhlinu otvárajú a pomáhajú k jej vzniku a ďalšiemu šíreniu, tlakové napätia naopak trhlinu zavierajú a porušeniu skôr bránia. Opačný trend má aj posuv minima kriviek  $F_{krit} = f(k)$ , čo rovnako nie je prekvapujúce. Zaujímavé je, že pri pomere hrúbok  $t_1/t_2$  väčším ako 1 sú krivky takmer rovnaké, na rozdiel od predchádzajúceho prípadu. To znamená, že prítomnosť malých záporných zvyškových napätí nemá na odolnosť voči kontaktnému porušeniu laminátu príliš veľký pozitívny vplyv, ale kladné napätia porovnateľnej veľkosti naopak preukazujú výrazný negatívny efekt.



Obr. 7.7: Kritická sila pre iniciáciu trhliny v závislosti na vzdialenosti od kontaktnej oblasti pre lamináty typu B a homogénnu dosku AMZ.

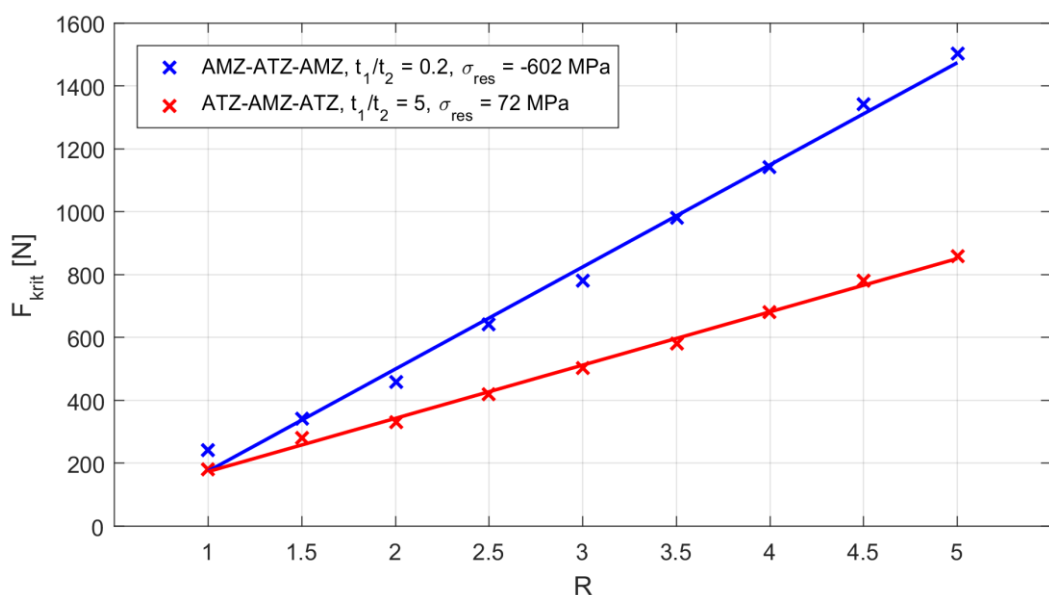
Za povšimnutie stojí aj rozdiel medzi krivkami homogénneho ATZ a AMZ. Hodnoty pevnosti v ťahu týchto dvoch keramik použité v materiálovom modeli sú diametrálne odlišné: 422 MPa u ATZ oproti 90 MPa u AMZ. Krivka kritickej sily pre AMZ získaná z nášho výpočtu je síce posunutá nižšie ako krivka pre ATZ, ale rozdiel nie je taký markantný, ako by sme možno očakávali. Jedným z dôvodov môže byť odlišný modul pružnosti, čo má za dôsledok, že styk guľového indentačného telesa s tuhším materiálom ATZ vyvoláva v okolí kontaktu vyššie max. radiálne napätie ako styk s poddajnejším AMZ.

Ak si ďalej porovnáme hodnoty lomovej húževnatosti  $K_{IC}$ , resp.  $G_C$  týchto dvoch keramik, zistíme, že medzi nimi rozhodne nie je taký veľký rozdiel ako v prípade pevnosti  $\sigma_c$ . Ďalšia príčina toho, že odolnosť voči kontaktnému porušeniu medzi homogénnym AMZ a ATZ nie je tak výrazne odlišná, môže preto spočívať v dôležitosti energetického hľadiska pri posudzovaní kritických podmienok vzniku trhliny v krehkom materiáli, akým keramika určite je.



Obr. 7.8: Kritická sila pre iniciáciu trhliny v závislosti na vzdialenosti od kontaktnej oblasti pre rôzne polomery indentoru. Vľavo laminát typu B s  $t_1/t_2 = 0,2$ , vpravo typ A s  $t_1/t_2 = 5$ .

Vplyv polomeru vtláčovaného guľového telesa na veľkosť kritickej sily bol posudzovaný na dvoch laminátoch: typ A s pomerom hrúbok  $t_1/t_2 = 5$  a typ B s pomerom  $t_1/t_2 = 0.2$ . Boli skúmané polomery indentoru od 1 do 5 mm. Grafy na obr. 7.8 ukazujú, že v oboch prípadoch zväčšenie polomeru guľičky vedie k posunu krivky  $F_{krit} = f(k)$  k vyšším hodnotám. Opäť to nie je prekvapujúce, pretože v súlade s rovnicami (4.1), (4.3) a (4.13) vedie zväčšenie polomeru guľičky k výraznému poklesu maximálneho kontaktného tlaku aj radiálneho napätia. Na obr. 7.9 je vykreslený graf závislosti kritickej sily vzniku trhliny na polomere guľičky. Pre oba lamináty je táto závislosť približne lineárna.



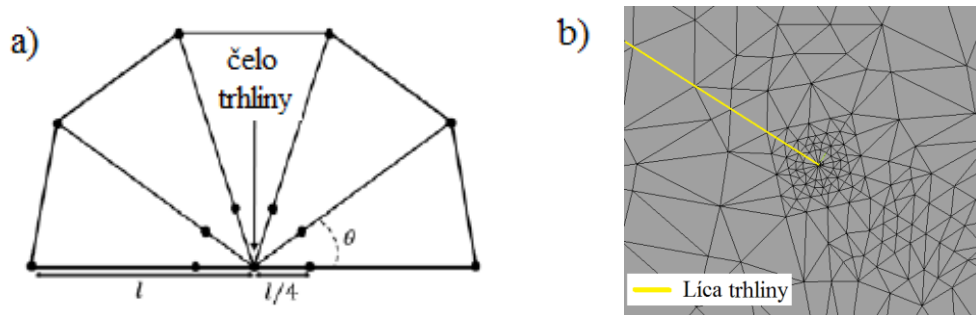
Obr. 7.9: Kritická sila pre iniciáciu trhliny v závislosti na polomere indentoru.

## 8 Analýza ďalšieho šírenia trhliny

Vznik trhliny na povrchu keramickej súčasti nemusí znamenať stratu jej funkčnosti, rozhodujúce je to, či sa trhlina bude alebo nebude ďalej šíriť. Výstupom z predchádzajúceho výpočtu pre každú konfiguráciu laminátu bola kritická hodnota sily potrebná pre vznik trhliny, dĺžka trhliny vznikajúcej pri pôsobení tejto sily a vzdialenosť od miesta kontaktu, kde sú podmienky pre iniciáciu trhliny splnené najskôr. Tieto veličiny, plynúce z aplikácie energeticko-napäťového kritéria pre iniciáciu trhliny (viď kap. 5.1.3), sú vstupmi do nasledujúceho MKP modelu, ktorého cieľom je analyzovať splnenie podmienok ďalšieho šírenia trhliny, a po ich prípadnom splnení podľa kritéria maximálneho tangenciálneho napätia (kap. 5.2) určiť trajektóriu trhliny.

### 8.1 Popis modelu

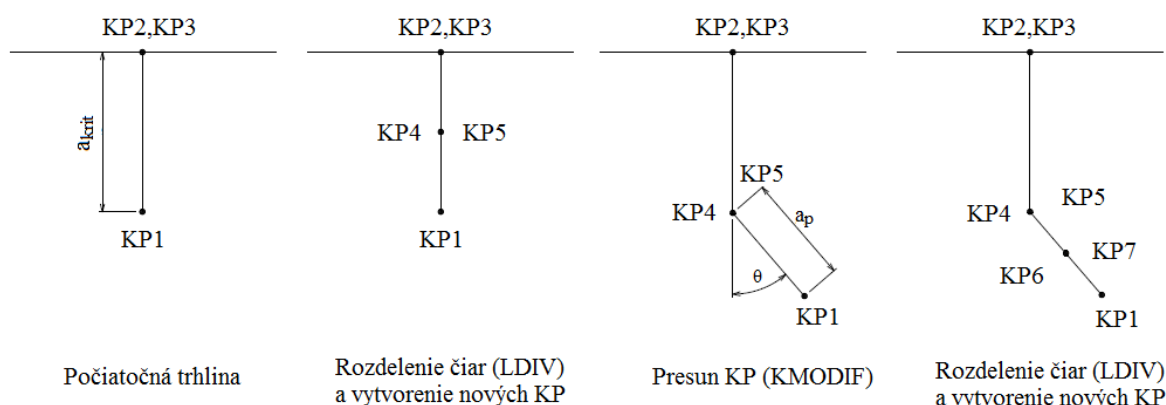
Geometria aj okrajové podmienky v tomto MKP modeli prakticky rovnaké ako v tom predchádzajúcom. Úvahy o mäkkom a tvrdom zaťažovaní rozoberané v súvislosti s energiou napätosti tu strácajú význam, pretože s energetickými veličinami ďalej pracovať nebudeme. Pre vytvorenie siete konečných prvkov boli použité opäť rovinné kvadratické prvky PLANE183 s rovinnou symetriou. Kvôli problému s automatickým vytváraním siete, spôsobených postupne sa meniacou geometriou sieťovaných plôch, bolo nutné v časti modelu použiť trojuholníkový tvar prvku, a to práve v blízkosti trhliny. V okolí čela trhliny boli navyše použité špeciálne trhlinové prvky, vytvorené pomocou APDL príkazu KSCON [38]. Tieto prvky, taktiež trojuholníkového tvaru, majú prostredný uzol posunutý do  $\frac{1}{4}$  dĺžky strany (obr. 8.1a), čo umožňuje získať lepšie výsledky s ohľadom na singularitu poľa napätia na čele trhliny [41]. Detail siete v okolí šíriacej sa trhliny je vidieť na obr. 8.1b.



Obr. 8.1: a) Trhlinové prvky [41], b) sieť v okolí trhliny.

Samotné šírenie trhliny je realizované na princípe delenia čiar reprezentujúcich líca trhliny a následnom presune geometrických bodov (v Ansyse *keypoints*). Tento proces je znázornený na obr. 8.2. V materiáli je na začiatku podobne ako v predošlom modeli pomocou zdvojených čiar vytvorená trhlina počiatkovej dĺžky. Po tom, ako program vyrieši MKP rovnicu úlohy so zadanými okrajovými podmienkami, prebehne výpočet faktorov intenzity napätia  $K_I$  a  $K_{II}$  na čele trhliny. Následne je z týchto veličín podľa zvoleného kritéria vypočítaný uhol  $\theta$ , určujúci smer ďalšieho rastu trhliny. Aplikovaním APDL príkazu LDIV [38] sa potom čiary predstavujúce líca trhliny sa rozdelia napoly, čím vzniknú dva nové body (na obr. 8.2 sú to body KP4 a KP5). Bod na čele trhliny (KP1) sa pod uhlom  $\theta$  presunie o prírastok trhliny  $a_p$  na novú pozíciu a jeho pôvodné miesto zaujmú novovzniknuté body KP4 a KP5.

Na takto upravenej geometrii sa opäť vytvorí sieť konečných prvkov, aplikujú sa rovnaké okrajové podmienky a prevedie sa ďalší výpočet. Znovu sa spočítajú aktuálne faktory intenzity napätia a uhol šírenia a celý proces sa opakuje až do chvíle, keď podmienka šírenia (5.14) prestane byť splnená. Súradnice bodu na čele trhliny sú v každom kroku zaznamenávané, takže sme schopní vykresliť trajektóriu trhliny pre rôzne kombinácie vstupných parametrov a výsledky vzájomne porovnať.



Obr. 8.2: Schéma tvorby prírastku trhliny pomocou delenia čiar a presunu bodov.

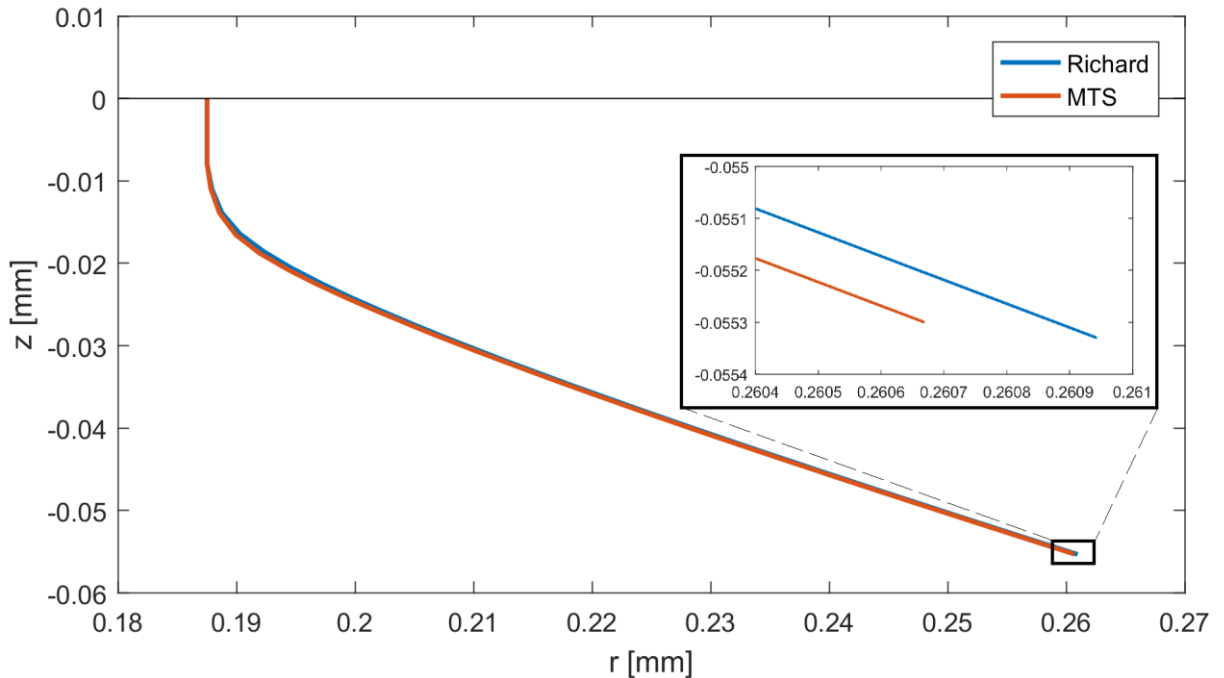
Pre analýzu citlivosti výsledkov na hustotu siete bol použitý model homogénneho materiálu, s trhlinou počiatočnej dĺžky trhliny  $5 \mu\text{m}$  vo vzdialenosti 1,1 násobku polomeru kontaktnej plochy. Veľkosť zaťaženia bola zvolená na 400 N a predmetom záujmu boli hodnoty faktorov intenzity napätia  $K_I$  a  $K_{II}$  na čele trhliny a z nich spočítaný počiatočný uhol šírenia trhliny  $\theta$ . Faktory  $K_I$  a  $K_{II}$  boli pre kontrolu spočítané dvoma spôsobmi [40]: raz pomocou APDL príkazu KCALC [38], ktorý využíva vzťahy medzi faktormi intenzity napätia a posuvmi bodov v blízkosti čela trhliny a druhýkrát pomocou J-integrálu (príkaz CINT). Na základe výsledkov tejto analýzy, ktoré sú zhrnuté v tab. 8.1, bola zvolená v širšom okolí trhliny veľkosť prvku  $2 \mu\text{m}$  (najväčšie prvky na obr. 8.1b). Najmenšie prvky na čele trhliny majú pri takom nastavení dĺžky strán približne  $0,25$  až  $0,5 \mu\text{m}$ .

Tab. 8.1: Citlivosť lomovo-mechanických parametrov na hustotu siete.

$v_e$ [ $\mu\text{m}$ ]	prvkov	$K_I$ [ $\text{MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$ ]		$K_{II}$ [ $\text{MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$ ]		$\theta$ [ $^\circ$ ]
		KCALC	CINT	KCALC	CINT	
5	3786	4,465	4,274	0,2778	0,3882	-9,4
4	4396	4,601	4,443	0,2364	0,2235	-7,8
3	5114	4,413	4,302	0,3160	0,3142	-10,8
<b>2</b>	<b>6147</b>	<b>4,271</b>	<b>4,206</b>	<b>0,3777</b>	<b>0,3814</b>	<b>-13,2</b>
1,5	7677	4,291	4,248	0,3744	0,3781	-13,0
1	10800	4,265	4,239	0,3879	0,3924	-13,5
0,75	15296	4,268	4,249	0,3877	0,3921	-13,5
0,5	24494	4,314	4,300	0,3709	0,3749	-12,8
0,4	33079	4,314	4,302	0,3701	0,3740	-12,8
0,3	52154	4,248	4,238	0,3948	0,3989	-13,8

## 8.2 Voľba kritéria pre určenie smeru šírenia trhliny

Za účelom zrovnania dvoch rôznych kritérií pre určenie uhlu šírenia trhliny boli pre homogénnu (monolitickú) ATZ dosku prevedené dve simulácie rastu trhliny, pričom raz bola pre určenie uhla použitá Richardova podmienka (rovnica 5.13) a druhýkrát podmienka od Siha a Erdogana (rovnica 5.12). Trajektórie trhliny zo simulácií s použitím oboch kritérií, Richardovho aj MTS, sú vykreslené na obr. 8.3. Krivky sa v grafe prakticky prekrývajú, rozdiel je viditeľný až v detaile, kde takisto pozorujeme, že aj miesto zastavenia trhliny je pre obe kritériá takmer rovnaké. Pre ďalšie simulácie bolo teda vybraté kritérium MTS.

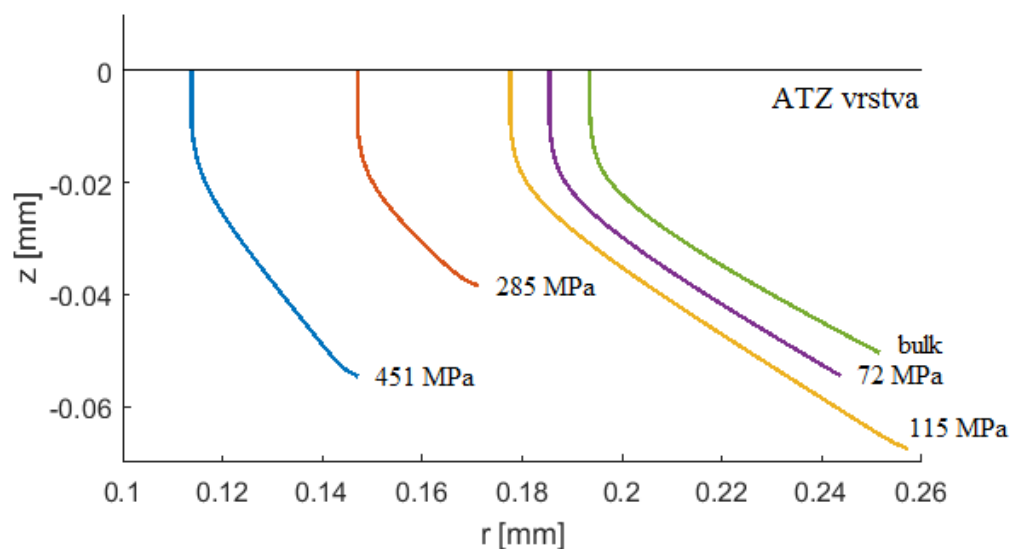


Obr. 8.3: Porovnanie trajektórií trhliny pre Richardovo kritérium a kritérium MTS.

## 8.3 Porovnanie trajektórií trhliny

Obr. 8.4 znázorňuje trajektórie trhliny v lamináte typu A (vrstva AMZ medzi dvomi vrstvami ATZ) s rôznymi hodnotami ťahových zvyškových napätí pri zaťažení 1,1-násobkom kritickej sily pre vznik trhliny. Smer šírenia pôvodnej prstencovej trhliny sa vždy odkloní smerom preč od kontaktu s cudzím telesom, čím trhlina dostáva svoj typický kónický tvar. Vidíme, že čím vyššia je hodnota zvyškového napätia v materiáli, tým menší je uhol odklonu trhliny od jej pôvodnej orientácie. Je to dané tým, že s rastúcim zvyškovým napätím pôsobiacim v rovinách kolmých na pôvodný smer rastu trhliny sa zvyšuje vplyv zaťažovacieho módu I na úkor módu II. Uhol šírenia trhliny pre prípad materiálu bez zvyškových napätí bol približne  $64,5^\circ$ , naproti tomu v lamináte s najvyšším  $\sigma_{res}$  bol uhol šírenia cca.  $42^\circ$ .



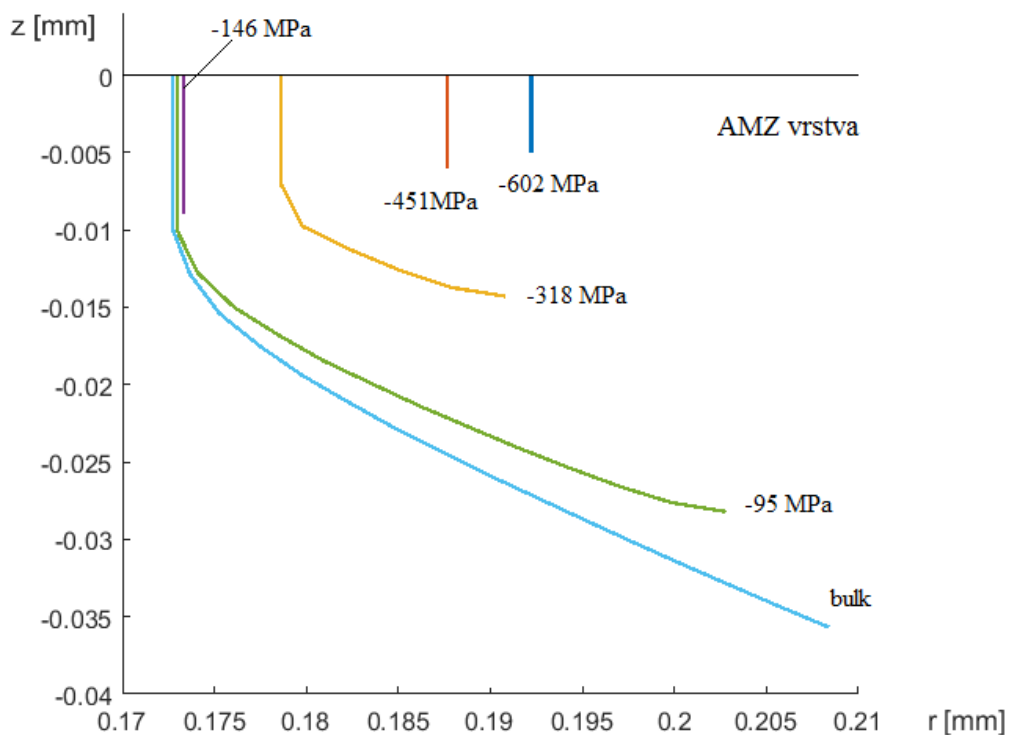


Obr. 8.4: Porovnanie trajektórií trhliny pre rôzne hodnoty ťahových reziduálnych napätí.

Na obrázku 8.5 pozorujeme rovnaký efekt v prípade tlakových zvyškových napätí v kontaktnej vrstve laminátu typu B A (vrstva ATZ medzi dvomi vrstvami AMZ). K zastaveniu trhliny za prítomnosti záporných reziduálnych napätí dochádza skôr, v troch prípadoch sa prstencová trhlina pri danom zaťažení dokonca vôbec ďalej nešírila. Pre jeden z nich, s pomerom hrúbok 3:1 a zvyškovým napätím  $-146$  MPa bola preskúmaná kritická sila potrebná k ďalšiemu šíreniu tejto trhliny. Výsledky sú zhrnuté v tab. 8.2. S rastúcim zaťažením sa zväčšuje kontaktná plocha a s ňou aj oblasť, kde je pole napätia ovplyvnené kontaktom. Radiálne napätie roztvárajúce trhlinu sa tak posúva k nižším hodnotám a hodnota veličiny  $K_I$  klesá. Zväčšením tlakového zaťaženia sa ale zároveň zvyšuje efekt módu II a faktor intenzity  $K_{II}$  narastá. Podmienka šírenia trhliny (posledný riadok tabuľky) je splnená až pre 1,5-násobok kritической sily pre iniciáciu. V takom prípade je hodnota faktoru intenzity napätia  $K_I$  malá a rozhodujúci vplyv má práve faktor pre mód II. Tomu zodpovedá aj veľký uhol šírenia  $67,6^\circ$ .

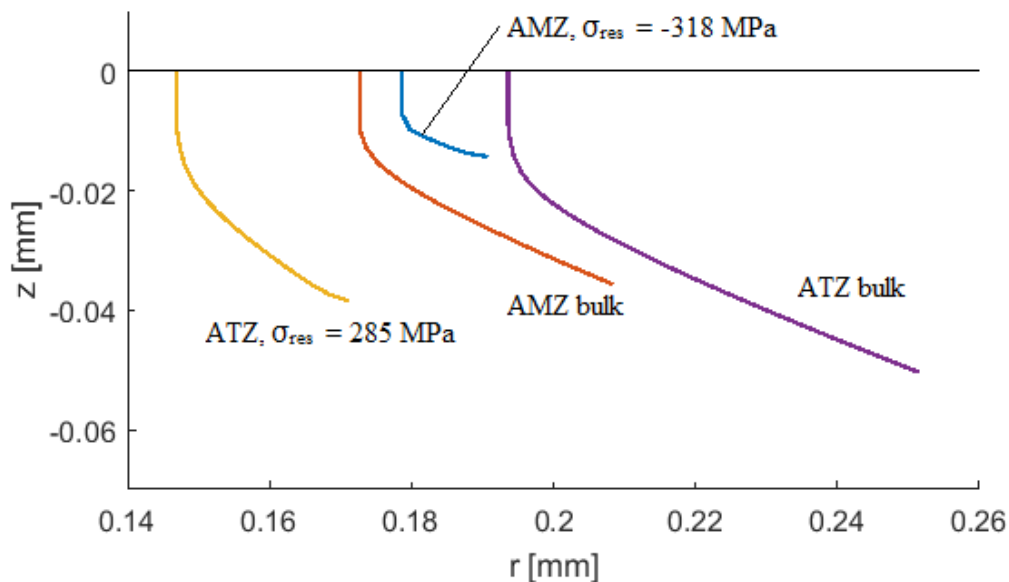
Tab. 8.2: Lomovo-mechanické charakteristiky pri postupnom zvyšovaní zaťaženia.

Sila	$F_{krit}$	$1,1 \cdot F_{krit}$	$1,2 \cdot F_{krit}$	$1,3 \cdot F_{krit}$	$1,5 \cdot F_{krit}$
$K_I [MPa \cdot m^{1/2}]$	2.10	2.05	1.88	1.38	0.41
$K_{II} [MPa \cdot m^{1/2}]$	0.23	0.36	0.54	0.94	2.65
$\vartheta [^\circ]$	-12.2	-18.9	-28.0	-46.5	-67.6
$K_{ekv} [MPa \cdot m^{1/2}]$	2.13	2.14	2.09	2.00	3.29
$K_{ekv}/K_{Ic}$	0.67	0.67	0.65	0.63	<b>1.03</b>



Obr. 8.5: Porovnanie trajektórií trhliny pre rôzne hodnoty tlakových reziduálnych napätí.

Pre ilustráciu je priložený obrázok 8.6, kde sú medzi sebou porovnané dráhy trhliny pre oba druhy keramiky v povrchovej vrstve, so zvyškovými napätiami aj bez nich.

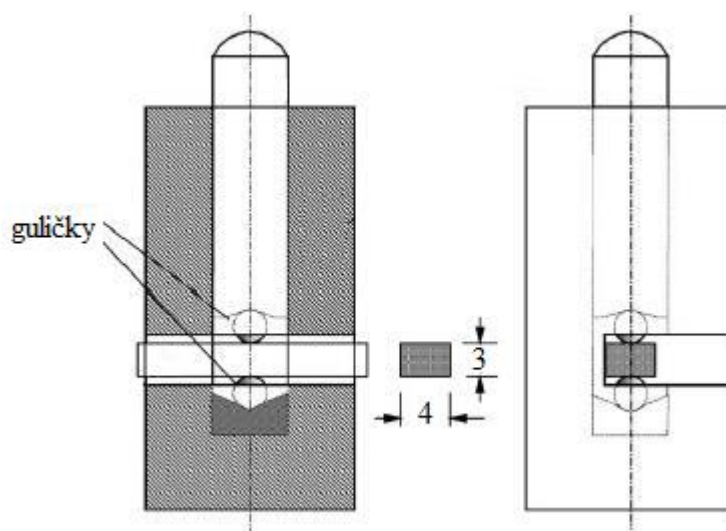


Obr. 8.6: Porovnanie trajektórií trhliny pre rôzne hodnoty reziduálnych napätí.

## 9 Porovnanie simulácií s experimentom

Pre overenie schopnosti modelov vytvorených v rámci tejto práce správne popisovať realitu kontaktného porušovania v keramike a na základe toho predikovať vznik a šírenie trhlín kontaktom spôsobených, je žiaduce výsledky porovnať s dostupnými experimentálnymi meraniami. Pre tento účel boli využité experimentálne výsledky poskytnuté Dr. Raulom Bermejom z inštitúcie *Institut für Struktur- und Funktionskeramik* rakúskej *Montanuniversität Leoben*. Tieto pochádzajú z meraní kontaktnej pevnosti monolitckej keramiky ATZ a laminátov ATZ/AMZ.

Schéma experimentu je znázornená na obr. 9.1 Prizmatické skúšobné tyče s rozmermi 3 mm x 4 mm x 15 mm z oboch typov materiálu boli podrobené tlaku, ktorý bol zo skúšobného stroja Lloyd Instr LR5K na vzorky prenášaný pomocou dvoch guľčiek z tvrdenej ocele s polomerom 2,75 mm. Rýchlosť posuvu bola nastavená na 1 mm/min. Sila vyvinutá skúšobným strojom bola pomocou Hertzovej teórie prepočítaná na maximálne radiálne ťahové napätie vznikajúce v mieste prechodu kontaktnej oblasti na voľný povrch vzorky.

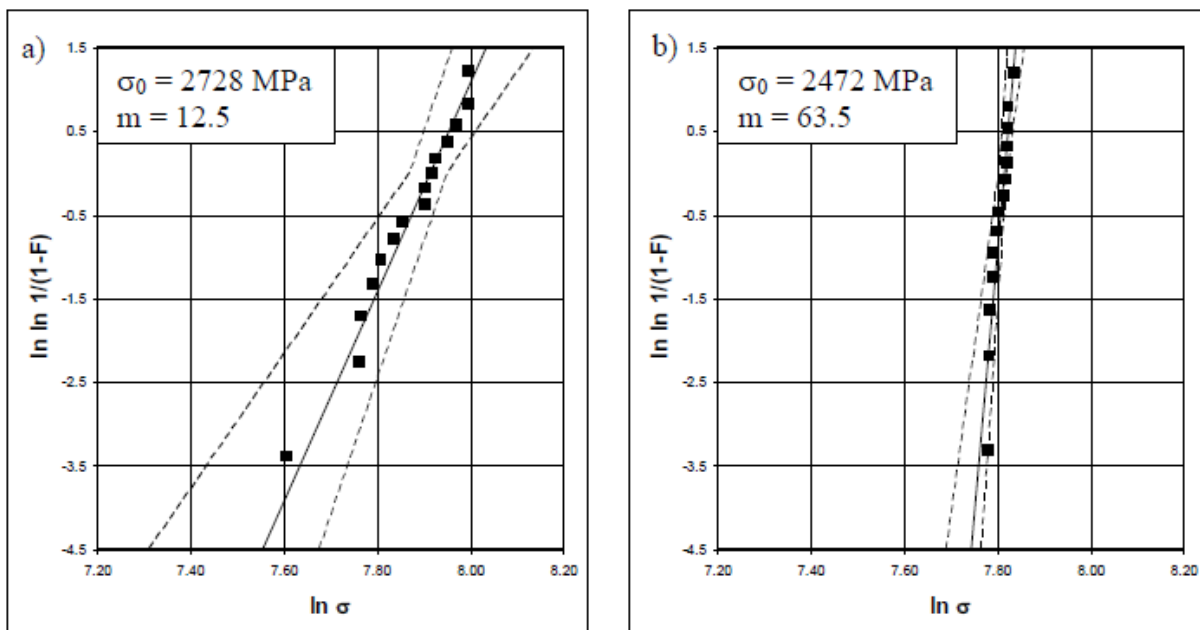


Obr. 9.1: Schéma experimentu.

Výsledky kontaktnej pevnosti pre oba typy materiálu sú vykreslené v grafoch na obrázku 9.2. Pravdepodobnosť poruchy  $P_f$  pri pôsobení napätia  $\sigma$ , sa podľa Weibullovoho rozdelenia, ktoré sa pre pevnosť keramiky bežne využíva, dá vyjadriť vzťahom [4]:

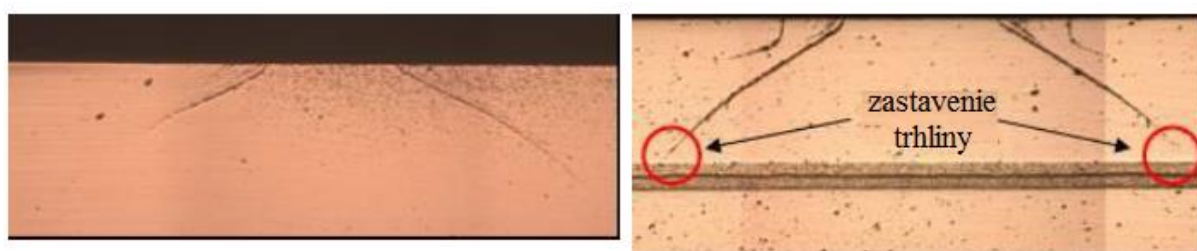
$$P_f(\sigma) = 1 - e^{-\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m}, \quad (9.1)$$

kde  $\sigma_0$  je „stredná“ kontaktná pevnosť a  $m$  je tzv. Weibullov modul, charakterizujúci rozptyl skutočne nameraných hodnôt pevnosti. Oproti monolitckej ATZ keramike vykazuje laminát s ťahovými zvyškovými napätiami v kontaktnej vrstve nižšie hodnoty pevnosti, pretože tieto napätia prispievajú k jeho porušeniu. Rozptyl hodnôt vyjadrený parametrom  $m$  je ale v prípade laminátu nižší, čo je dané schopnosťou zastavenia trhliny na vnútornej vrstve s tlakovými reziduálnymi napätiami. Z hľadiska spoľahlivosti súčasti je preto takýto laminát lepšou voľbou ako monolitická keramika.



Obr. 9.2: Weibullove rozdelenie zo skúšok kontaktnej pevnosti. a) monolitická ATZ keramika, b) ATZ-AMZ laminát.

Čo nás však najviac zaujíma, je hodnota zaťaženia, pri ktorom v keramike dôjde k iniciácii prstencovej trhliny, jej polomer a uhol, pod ktorým sa ďalej šíri do materiálu. Cieľom predloženého experimentu bolo určenie pevnosti keramiky, čo vyžaduje totálnu deštrukciu skúšobných telies. Preto máme bohužiaľ k dispozícii iba dve fotografie rozrezaných vzoriek (obr. 9.3), ktoré boli pôvodne vytvorené za účelom demonštrácie zastavenia trhliny na tenkej vrstve AMZ uprostred vrstvenej štruktúry, navyše bez mierky. Silu, pri ktorej trhlina vznikla, z nich určiť nedokážeme, ale sme schopní určiť uhol, pod ktorým sa trhlina šíri do materiálu a v prípade laminátu so známou hrúbkou vrstiev aj polomer počiatočného prstenca.



Obr. 9.3: Šírenie trhliny materiálom skúšobných telies: a) monolitický ATZ, b) laminát ATZ/AMZ.

Použitý laminát pozostával zo 4 vrstiev AMZ o hrúbke cca. 100  $\mu\text{m}$ , ktoré sú obklopené 5 vrstvami ATZ o hrúbke cca. 520  $\mu\text{m}$ . Z týchto známych údajov môžeme pomocou softvéru AutoCAD približne zmerať polomer prstencovej trhliny. Treba však podotknúť, že takýto spôsob merania nezaručuje presnosť, pretože skutočná hrúbka vrstiev nemusí byť dodržaná, čím môže byť výpočet mierne skreslený. Každopádne je podľa výpočtu touto metódou polomer trhliny rovný asi 260 - 270  $\mu\text{m}$ . Aby bolo možné porovnať tento údaj s MKP výpočtom 3-vrstvého laminátu, je nutné prepočítať hrúbky vrstiev tak, aby bol zachovaný objemový podiel

ATZ/AMZ, a tým aj hodnoty zvyškových napätí v jednotlivých vrstvách. Tento podiel je pre skúšobnú vzorku rovný 6,5, čo vo výpočte zodpovedá pomeru hrúbok  $t_1/t_2 = 3,25$ . Zvyškové napätia sú potom 110 MPa v kontaktnej ATZ vrstve a -716 MPa vo vnútornej AMZ vrstve – vid' rovnice 2.2.

Kritická sila pre vznik trhliny pre laminát s týmto pomerom hrúbok, určená MKP výpočtom pomocou modelu iniciácie trhliny popísaným v kap. 7, je rovná 400 N. Z výpočtu tiež vyšlo, že táto sila, s odchýlkou  $\pm 10$  N, je dostatočná pre vznik trhliny s pomerne širokým rozsahom polomerov, zodpovedajúcim 1,15- až 1,275-násobku polomeru kontaktnej plochy. Ak by sme počítali s maximálnou hodnotou  $k = 1,275$ , dostaneme polomer prstenca 226  $\mu\text{m}$ , čo je približne o 13 % nižšia hodnota ako z experimentu. Tento rozdiel môže byť spôsobený rozptylom materiálových charakteristík  $K_{Ic}$  a  $\sigma_c$  keramiky daný veľkosťou defektov prítomných v štruktúre a pre dôkladné overenie výsledkov výpočtu by bolo v budúcnosti určite nutné tieto porovnať s väčším počtom experimentálnych meraní.

Čo sa týka uhlu šírenia trhliny, zhoda výpočtu s experimentom je veľmi dobrá. Z fotografií na obr. 9.3 boli pomocou softvéru AutoCAD namerané uhly cca.  $64^\circ$  pre monolit ATZ a  $58,5^\circ$  pre laminát ATZ/AMZ, čo takmer presne zodpovedá uhlom zisteným MKP výpočtom. Lepší súlad výsledkov oproti predchádzajúcemu prípadu je zrejme daný tým, že uhol šírenia trhliny nezávisí na pevnosti ani na lomovej húževnatosti materiálu, ale výhradne na stave napätosti v okolí čela trhliny, resp. na hodnotách faktorov intenzity napätia  $K_I$  a  $K_{II}$ .

Pre detailnejšiu analýzu vplyvu zvyškovej napätosti na trajektóriu kónickej trhliny by však bolo taktiež potrebné previesť experimenty na väčšom počte vzoriek, s rôznymi úrovňami tlakových i ťahových reziduálnych napätí v povrchovej vrstve. Tieto experimentálne dáta v súčasnej dobe autorovi nie sú k dispozícii a trajektórie trhliny predikované MKP simuláciou teda nie je s čím porovnať.

## 10 Záver

Cieľom tejto práce bolo preskúmať dopad teplotnej zvyškovej napätosti v povrchovej vrstve keramického laminátu na jeho odolnosť voči kontaktnému poškodeniu. Za týmto účelom bola spracovaná rešerš v oblasti keramických materiálov a ich porušovania vplyvom kontaktu s telesom malých rozmerov. Ďalej bol vytvorený plne parametrický 2D MKP model kontaktu keramického laminátu s indentorom guľového tvaru a bola prevedená jeho deformačne-napät'ová analýza. Jej výsledky boli následne porovnané s analytickým riešením kontaktu guľová plocha vs. nekonečný homogénny elastický polpriestor podľa Hertza a bola preukázaná použiteľnosť Hertzovej teórie aj pre ďalšie modelovanie kontaktu guľičky s vrstvenou štruktúrou.

Na základe tohto zistenia bol styk telies vo vyššie uvedenom MKP modeli nahradený okrajovou podmienkou predpisujúcou príslušným povrchovým uzlom priamo kontaktný tlak vypočítaný z Hertzovho riešenia. Takto upravený model bol podrobený parametrickej analýze, ktorej cieľom bolo s využitím združeného energeticko-napät'ového kritéria nájsť na povrchu laminátu najvhodnejšie miesto pre iniciáciu prstencovej trhliny pre rôzne hodnoty zvyškových napätí v kontaktnej vrstve a rôzne polomery indentoru. Výstupom z tejto analýzy bola zároveň dĺžka vznikajúcej trhliny a kritická sila pre jej vznik potrebná.

Výsledky výpočtov ukázali, že tlakové zvyškové napätia kritickú silu pre vznik trhliny zvyšujú a napomáhajú tak odolnosti materiálu voči kontaktnému porušeniu, zatiaľ čo ťahové napätia majú presne opačný efekt. So zmenou úrovne teplotnej napätosti sa mení aj miesto najpravdepodobnejšieho vzniku trhliny - čím vyššie napätie, tým ďalej od kontaktnej oblasti trhlina vznikne. Sila pre iniciáciu trhliny tiež lineárne narastala s polomerom indentoru.

Posledný model bol vytvorený za účelom simulácie ďalšieho rastu trhliny a posúdenie vplyvu teplotných napätí na jej trajektóriu. K určeniu smeru rastu trhliny boli využité dve kritériá, ktoré dávali prakticky rovnaké výsledky. Tu sa opäť ukázala výhoda prítomnosti tlakových napätí v povrchovej vrstve – trhlina sa od pôvodného smeru odklonila o väčší uhol a zastavila sa skôr, prípadne sa vôbec nezačala šíriť.

Nakoniec boli výsledky MKP výpočtov porovnané s experimentálnym meraním, avšak kvôli obmedzenému množstvu dostupných údajov bolo možné porovnať iba polomery vzniknutej trhliny a uhol jej šírenia, navyše len na dvoch vzorkách. Zhoda uhlu bola v oboch prípadoch takmer dokonalá, polomer prstencovej trhliny sa však od výsledku výpočtu líšil o cca. 13 %. Príčina môže byť v rozptyle materiálových charakteristík keramiky a pre dôkladné overenie výsledkov tejto práce by bolo v budúcnosti určite potrebné realizovať viacero experimentov.

## Zoznam použitej literatúry

- [1] Full Ceramic bearings from Boca. In: *The Electric Chronicles: Power in Flux* [online]. Ted Dillard, ©2009 [cit. 2018-05-01]. Dostupné z: <https://evmc2.files.wordpress.com/2015/04/full-ceramic-bearings-1.jpg>
- [2] Hoca Minarelli Big Bore Racing Kit - 10 mm Pin. In: *Partsforscooters.com* [online]. Largo, FL: PartsForScooters.com, ©2016 [cit. 2018-05-01]. Dostupné z: <http://www.partsforscooters.com/img169-331-400.jpg>
- [3] PTÁČEK, Luděk, Cihlář JAROSLAV, Foret RUDOLF, et al. *Nauka o materiálu II*. 2. opr. a rozš. vyd. Brno: CERM, 2002. ISBN 80-720-4248-3.
- [4] VLACH, Bohumil. Lomové chování keramiky. *VUT v Brně* [online]. Brno: VUT v Brně, ©2018 [cit. 2018-04-18]. Dostupné z: [http://ime.fme.vutbr.cz/images-/umvi/vyuka/mezni\\_stavy/podklady/10%20-%20Keramika.pdf](http://ime.fme.vutbr.cz/images-/umvi/vyuka/mezni_stavy/podklady/10%20-%20Keramika.pdf)
- [5] VIRKAR, Anil V., Jow Lay HUANG a Raymond A. CUTLER. Strengthening of Oxide Ceramics by Transformation-Induced Stress. *Journal of the American Ceramic Society*. 1987, **70**(3), 164-170. DOI: 10.1111/j.1151-2916.1987.tb04952.x. ISSN 0002-7820. Dostupné z: <http://doi.wiley.com/10.1111/j.1151-2916.1987.tb04952.x>
- [6] NÁHLÍK, Luboš, Kateřina ŠTEGNEROVÁ, Bohuslav MÁŠA a Pavel HUTAŘ. A failure scenario of ceramic laminates with strong interfaces. *Engineering Fracture Mechanics*. 2016, **167**, 56-67. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2016.04.022. ISSN 00137944. Dostupné z: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S001379441630-1783>
- [7] BERMEJO, Raul, Yadir TORRES, Antonio J. SANCHEZ-HERENCIA, Carmen BAUDIN, Marc ANGLADA a Luis LLANES. Residual stresses, strength and toughness of laminates with different layer thickness ratios. *Acta Materialia*. 2006, **54**(18), 4745-4757. DOI: 10.1016/j.actamat.2006.06.008. ISSN 13596454. Dostupné z: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1359645406004290>
- [8] SÁNCHEZ-HERENCIA, Antonio J., Jose S MOYA a Antoni P TOMSIA. Microstructural Design in Alumina-Alumina/Zirconia Layered Composites. *Scripta Materialia*. 1997, **38**(1), 1-5. DOI: 10.1016/S1359-6462(97)00443-0. ISSN 13596462. Dostupné z: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1359646297004430>
- [9] SÁNCHEZ-HERENCIA, Antonio J., C. PASCUAL, Ju HE a Fred F. LANGE. ZrO<sub>2</sub>/ZrO<sub>2</sub> Layered Composites for Crack Bifurcation. *Journal of the American Ceramic Society*. 1999, **82**(6), 1512-1518. DOI: 10.1111/j.1151-2916.1999.tb01949.x. ISSN 00027820. Dostupné z: <http://doi.wiley.com/10.1111/j.11512916.1999.tb019-49.x>
- [10] NATHAN KATZ, R. a James G. HANNOOSH. Ceramics for high performance rolling element bearings: A review and assessment. *International Journal of High Technology Ceramics*. 1985, **1**(1), 69-79. DOI: 10.1016/0267-3762(85)90025-6. ISSN 02673762. Dostupné z: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0267376285900256>
- [11] RICHERSON, David W. *Modern ceramic engineering: properties, processing, and use in design*. 3rd ed. Boca Raton, FL: Taylor and Francis, 2006. 29. ISBN 15-744-4693-2.
- [12] HERTZ, Heinrich. *Miscellaneous papers*. Londýn: Macmillan, 1896.

- [13] LAWN, Brian R. Indentation of Ceramics with Spheres: A Century after Hertz. *Journal of the American Ceramic Society*. 1998, **81**(8), 1977-1994. DOI: 10.1111/j.1151-2916.1998.tb02580.x. ISSN 00027820. Dostupné z: [http://doi.wiley.com/10.1111-j.1151-2916.1998.tb02580.x](http://doi.wiley.com/10.1111/j.1151-2916.1998.tb02580.x)
- [14] LAWN, Brian R. *Fracture of brittle solids*. 2nd ed. New York: Cambridge University Press, 1993. ISBN 05-214-0176-3.
- [15] JANÍČEK, Přemysl. *Systémová metodologie: brána do řešení problémů*. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2014. ISBN 978-80-7204-887-8.
- [16] ANSYS Mechanical Structural Nonlinearities: Lecture 3, Introduction to Contact. In: *Inside mines* [online]. Golden, IL: Colorado School of Mines, 2010 [cit. 2018-03-19]. Dostupné z: [http://inside.mines.edu/~apetrell/ENME442/Labs/1301\\_ENME442\\_lab6\\_lecture.pdf](http://inside.mines.edu/~apetrell/ENME442/Labs/1301_ENME442_lab6_lecture.pdf)
- [17] JOHNSON, Kenneth L. *Contact mechanics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1985. ISBN 05-213-4796-3.
- [18] WILLIAMS, John A. a Rob S. DWYER-JOYCE. Contact between solid surfaces. *Modern tribology handbook*. II. Series. Boca Raton, FL: CRC Press, 2001, s. 121-162. ISBN 08-493-8403-6.
- [19] BURMISTER, D. M. The General Theory of Stresses and Displacements in Layered Systems. I. *Journal of Applied Physics*. 1945, **16**(2), 89-94. DOI: 10.1063/1.1707558. ISSN 0021-8979. Dostupné z: <http://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.1707558>
- [20] HANNAH, Margaret. Contact stress and deformation in a thin elastic layer. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*. 1951, **4**(1), 94-105. DOI: 10.1093/qjmam/4.1.94. ISSN 0033-5614. Dostupné z: <https://academic.oup.com/qjmam/article-lookup/doi/10.1093/qjmam/4.1.94>
- [21] CHEN, William T. Computation of stresses and displacements in a layered elastic medium. *International Journal of Engineering Science*. 1971, **9**(9), 775-800. DOI: 10.1016/0020-7225(71)90072-3. ISSN 0020-7225. Dostupné z: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0020722571900723>
- [22] GLADWELL, G. M. L. On Some Unbonded Contact Problems in Plane Elasticity Theory. *Journal of Applied Mechanics*. 1976, **43**(2), 263-267. DOI: 10.1115/1.3423821. ISSN 0021-8936. Dostupné z: <http://AppliedMechanics.asmedigitalcollection.asme.org/article.aspx?articleid=1402925>
- [23] O'SULLIVAN, T. C. a R. B. KING. Sliding Contact Stress Field Due to a Spherical Indenter on a Layered Elastic Half-Space. *Journal of Tribology*. 1988, **110**(2), 235-240. DOI: 10.1115/1.3261591. ISSN 0742-4787. Dostupné z: <http://Tribology.asmedigitalcollection.asme.org/article.aspx?articleid=1459225>
- [24] ANSYS Mechanical APDL Element Reference [online]. Release 15.0. Canonsburg, PA: ANSYS, 2013 [cit. 2018-03-28]. Dostupné z: <https://www.researchgate.net/file.PostFileLoader.html?id=567c42a25f7f71f83b8b4567&assetKey=AS%3A310263939567616%401450984095215>
- [25] VLK, Miloš a Zdeněk FLORIAN. *Mezní stavy a spolehlivost* [online]. Brno: Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky Fakulty strojního inženýrství VUT v Brně, 2007 [cit. 2018-02-12]. Dostupné z: <http://www.zam.fme.vutbr.cz/~vlk/meznistavy.pdf>



- [26] GRIFFITH, Alan A. The Phenomena of Rupture and Flow in Solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 1921, **221**(582-593), 163-198. DOI: 10.1098/rsta.1921.0006. ISSN 1364-503X. Dostupné z: <http://rsta.royalsocietypublishing.org/cgi/doi/10.1098/rsta.1921.0006>
- [27] IRWIN, George R. Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate. *Journal of Applied Mechanics*. 1957, **24**( 9), 361-364.
- [28] VLACH, Bohumil. Základy lomové mechaniky. In: *VUT v Brně: ÚMVI, FSI* [online]. Brno: VUT v Brně, ©2018 [cit. 2018-04-18]. Dostupné z: [http://ime.fme.vutbr.cz/images/umvi/vyuka/mezni\\_stavy/podklady/06%20-%20Lomova%20mechanika.pdf](http://ime.fme.vutbr.cz/images/umvi/vyuka/mezni_stavy/podklady/06%20-%20Lomova%20mechanika.pdf)
- [29] Brittle Fracture. *University of Cambridge: Online Materials Science Learning Resources DoITPoMS* [online]. Cambridge, UK: University of Cambridge, 2011 [cit. 2018-04-04]. Dostupné z: [https://www.doitpoms.ac.uk/tlplib/brittle\\_fracture/print-all.php](https://www.doitpoms.ac.uk/tlplib/brittle_fracture/print-all.php)
- [30] ANDERSON, Ted L. *Fracture mechanics: Fundamentals and Applications*. Second Edition. Boca Raton, FL: CRC Press, 1995. ISBN 978-14-200-5821-5
- [31] LEGUILLON, Dominique. Strength or toughness? A criterion for crack onset at a notch. *European Journal of Mechanics - A/Solids*. 2002, **21**(1), 61-72. DOI: 10.1016/S0997-7538(01)01184-6. ISSN 0997-7538. Dostupné z: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0997753801011846>
- [32] LEGUILLON, Dominique, Eric MARTIN, Oldřich ŠEVEČEK a Raul BERMEJO. Application of the coupled stress-energy criterion to predict the fracture behaviour of layered ceramics designed with internal compressive stresses. *European Journal of Mechanics - A/Solids*. 2015, **54**, 94-104. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2015.06.008. ISSN 0997-7538. Dostupné z: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0997753-815000686>
- [33] ŠEVEČEK, Oldřich, Michal KOTOUL, Dominique LEGUILLON, Eric MARTIN a Raul BERMEJO. Modelling of edge crack formation and propagation in ceramic laminates using the stress–energy coupled criterion. *Engineering Fracture Mechanics*. 2016, **167**, 47-55. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2016.03.039. ISBN 10.1016/j.engfracmech.2016.03.039. ISSN 0013-7944. Dostupné z: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S001379441630145X>
- [34] PARVIZI, A., K. W. GARRETT a J. E. BAILEY. Constrained cracking in glass fibre-reinforced epoxy cross-ply laminates. *Journal of Materials Science*. 1978, **13**(1), 195-201. DOI: 10.1007/BF00739291. ISSN 0022-2461. Dostupné z: <http://link.springer.com/10.1007/BF00739291>
- [35] ERDOGAN, Fazil a George C. SIH. On the Crack Extension in Plates Under Plane Loading and Transverse Shear. *Journal of Basic Engineering*. 1963, **85**(4), 519-525. DOI: 10.1115/1.3656897. ISSN 0021-9223. Dostupné z: <http://Fluids-Engineering.asmedigitalcollection.asme.org/article.aspx?articleid=1431534>
- [36] WESTERGREN JENSEN, Bo Ernst. *Numerical Analysis of Crack Propagation and Lifetime Estimation* [online]. Esbjerg, 2015 [cit. 2018-04-20]. Dostupné z: [https://projekter.aau.dk/projekter/files/214866965/Master\\_Thesis.pdf](https://projekter.aau.dk/projekter/files/214866965/Master_Thesis.pdf). M.Sc. Master Thesis. Aalborg University Esbjerg. Vedúci práce Prof. Dr. Lars Damkilde.

- [37] RICHARD, Hans A., Markus FULLAND a Manuela SANDER. Theoretical crack path prediction. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*. 2005, **28**(1-2), 3-12. DOI: 10.1111/j.1460-2695.2004.00855.x. ISBN 10.1111/j.1460-2695.2004.00855.x. ISSN 8756-758X. Dostupné z: [http://doi.wiley.com/10.1111-j.1460-2695.2004.00855.x](http://doi.wiley.com/10.1111/j.1460-2695.2004.00855.x)
- [38] *ANSYS Mechanical APDL Command Reference* [online]. Release 15.0. Canonsburg, PA: ANSYS, 2013 [cit. 2018-04-22]. Dostupné z: Ansys Customer Portal
- [39] OHGUSHI, Kohji a Masahiro ICHIKAWA. Fracture Mechanics Study of Ring Crack Initiation in Ceramics by Sphere Indentation. *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers Series A*. 1995, **61**(585), 953-958. DOI: 10.1299/kikaia.61.953. ISSN 0387-5008. Dostupné z: <http://joi.jlc.jst.go.jp/JST.Journalarchive/kikaia1979-61.953?from=CrossRef>
- [40] *Theory Reference for the Mechanical APDL and Mechanical Applications* [online]. Release 12.0. Canonsburg, PA: ANSYS, 2009 [cit. 2018-03-29]. Dostupné z: <https://www.researchgate.net/file.PostFileLoader.html?id=5687835e5cd9e345098b4568&assetKey=AS%3A313357117132800%401451721566538>
- [41] COOK, Robert Davis., David S MALKUS, Michael E. PLESHA a Robert J. WITT. *Concepts and applications of finite element analysis*. 4th ed. New York, NY: Wiley, 2001. ISBN 978-0-471-35605-9.

## Zoznam použitých symbolov a skratiek

$a$	[ $\mu\text{m}$ ]	dĺžka trhliny
$A$	[ $\mu\text{m}^2$ ]	obsah lomovej plochy
A1-A6		oblasti A1-A6 v modeli geometrie
$a_{krit}$	[ $\mu\text{m}$ ]	kritická dĺžka trhliny
AMZ		$\text{Al}_2\text{O}_3$ s 5 obj. % $\text{Y}_2\text{O}_3$ -stabilizovaným teragonálnym $\text{ZrO}_2$
$a_p$	[ $\mu\text{m}$ ]	prírastok trhliny
ATZ		$\text{Al}_2\text{O}_3$ s 30 obj. % monoklinickým $\text{ZrO}_2$
$E$	[MPa]	Modul pružnosti v ťahu
$E^*$	[MPa]	Efektívny modul pružnosti pre podmienky rovinnej napätosti, resp. rovinnej deformácie
$E_{ind}$	[MPa]	Modul pružnosti indentoru
$F$	[N]	zaťažujúca sila
$f(a/W)$	[-]	tvarový faktor pre výpočet faktoru intenzity napätia
$FC$	[N]	podiel kovalentnej väzby v keramike
$F_{krit}$	[N]	kritická sila pre iniciáciu trhliny
$F_n$	[N]	normálová kontaktná sila
$F_Y$	[N]	sila v smere y (okrajová podmienka pre MKP výpočet)
$G$	[ $\text{J}\cdot\text{m}^{-2}$ ]	hnacia sila trhliny
$G_c$	[ $\text{J}\cdot\text{m}^{-2}$ ]	lomová húževnatosť materiálu – kritická hnacia sila trhliny
$G_{inc}$	[ $\text{J}\cdot\text{m}^{-2}$ ]	inkrementálna hnacia sila trhliny
$G_{inc}^J$	[ $\text{J}\cdot\text{m}^{-2}$ ]	inkrementálna hnacia sila trhliny určená pomocou J-integrálu
$G_{inc}^W$	[ $\text{J}\cdot\text{m}^{-2}$ ]	inkrementálna hnacia sila trhliny určená z rozdielu energií napätosti
$k$	[-]	pomer polomeru prstencovej trhliny k polomeru kontaktnej oblasti
$K_{ekv}$	[MPa $\cdot\text{m}^{-1/2}$ ]	ekvivalentný faktor intenzity napätia pre namáhanie kombináciou módov I a II
$K_I, K_{II}, K_{III}$	[MPa $\cdot\text{m}^{-1/2}$ ]	faktory intenzity napätia pre zaťažovacie módy I, II a III
$K_{Ic}$	[MPa $\cdot\text{m}^{-1/2}$ ]	lomová húževnatosť materiálu – kritická hodnota faktoru intenzity napätia
$k_n$	[MPa]	normálová kontaktná tuhosť
KP1-KP7		body v modeli geometrie
$l$		dĺžka tyče
$L$	[-]	pomocná premenná pre vyjadrenie zložiek tenzoru napätia pod kontaktom

L1-L7		čiar v modeli geometrie
LELM		lineárne elastická lomová mechanika
MKP		metóda konečných prvkov
$n$	[-]	počet vrstiev laminátu
$p$	[MPa]	tlak
$p_0$	[MPa]	maximálny kontaktný tlak
$p_{cont}$	[MPa]	kontaktný tlak
$R, R_1, R_2$	[MPa]	polomer guľových plôch telies v kontakte
$r$	[mm]	radiálna vzdialenosť od stredu kontaktnej plochy
$r^*$	[-]	pomocná premenná pre vyjadrenie zložiek tenzoru napätia pod kontaktom
$R_{cont}$	[mm]	polomer kontaktnej plochy
$R_{ind}$	[mm]	polomer indentoru
$S$	[mm <sup>2</sup> ]	obsah plochy prierezu tyče
$t$	[mm]	hrúbka laminátu
$t_1, t_2$	[mm]	hrúbka jednotlivých vrstiev laminátu
$T_A$	[°C]	teplota okolia
$T_S$	[°C]	slinovacia teplota keramiky
$UX$	[mm]	posuv v smere osi x (okrajová podmienka pre MKP výpočet)
$UY$	[mm]	posuv v smere osi y (okrajová podmienka pre MKP výpočet)
$v_e$	[μm]	veľkosť prvku
$W$	[mm]	rozmer telesa v smere šírenia trhliny
$W_{(0)}$	[J]	energia napätosti telesa bez trhliny
$W_{(a)}$	[J]	energia napätosti telesa s trhlinou dĺžky $a$
$W_{el}$	[J]	energia napätosti
$x_p$	[mm]	penetrácia prvkov v kontakte
$z$	[-]	kolmá vzdialenosť od povrchu telesa v kontakte s indentorom
$z^*$	[-]	pomocná premenná pre vyjadrenie zložiek tenzoru napätia pod kontaktom
$\alpha$	[K <sup>-1</sup> ]	súčiniteľ teplotnej rozťažnosti
$\Delta$	[mm]	priblíženie stredov guľových telies v kontakte po zaťažení normálovou tlakovou silou
$\Delta E$	[-]	rozdiel elektronegativít atómov tvoriacich chemickú väzbu
$\Delta T$	[°C]	rozdiel medzi slinovacou teplotou a teplotou okolia
$\Delta W$	[J]	rozdiel energií napätosti v telese s trhlinou a bez trhliny
$\varepsilon_a$	[-]	osové pretvorenie

$\theta$	[° ]	uhol šírenia trhliny
$\nu$	[-]	Poissonov pomer
$\nu_{ind}$	[-]	Poissonov pomer indentoru
$\sigma$	[MPa]	napätie
$\sigma_{\infty}$	[MPa]	nominálne napätie
$\sigma_a$	[MPa]	osové napätie
$\sigma_c$	[MPa]	kritické ťahové napätie (medza pevnosti materiálu v ťahu)
$\sigma_r$	[MPa]	radiálne napätie vo valcovom súr. systéme s počiatkom v počiatočnom bode styku telies v kontakte
$\sigma_{res}$	[MPa]	zvyškové napätie
$\sigma_{r\theta}$	[MPa]	šmykové napätie v polárnom súr. systéme s počiatkom na čele trhliny
$\sigma_z$	[MPa]	axiálne napätie vo valcovom súr. systéme s počiatkom v počiatočnom bode styku telies v kontakte
$\sigma_{\theta}$	[MPa]	tangenciálne napätie vo valcovom súr. systéme s počiatkom v počiatočnom bode styku telies v kontakte
$\sigma_{\theta\theta}$	[MPa]	tangenciálne napätie v polárnom súr. systéme s počiatkom na čele trhliny
$\tau$	[MPa]	šmykové napätie
$\tau_c$	[MPa]	kritické šmykové napätie