UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Testování znalostí studentů - příprava ke zkoušce z předmětu Matematika 2: Parciální derivace a diferenciál funkce 2 proměnných

Vedoucí bakalářské práce:
Mgr. Iveta Bebčáková, Ph.D.
Rok odevzdání: 2014

Vypracovala:
Marcela Pokorná
MATEKO, III. ročník

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracovala samostatně pod vedením paní Mgr. Ivety Bebčákové, Ph.D. s použitím uvedené literatury.

V Olomouci dne 11. dubna 2014

Poděkování

Ráda bych na tomto místě poděkovala vedoucí bakalářské práce Mgr. Ivetě Bebčákové, Ph.D. za obětavou spolupráci, trpělivost i za čas, který mi věnovala při konzultacích.

Obsah

Úvod

Téma mé bakalářské práce je *Testování znalostí studentů - příprava ke zkoušce z předmětu Matematika 2: Parciální derivace a diferenciál funkce 2 proměnných.* Tato práce by měla sloužit studentům navštěvujícím předmět Matematika 2 vyučovaný na Katedře matematické analýzy a aplikací matematiky.

Cílem mé práce bylo vytvoření souboru testovacích otázek vztahujících se k tématu parciální derivace a diferenciál funkce 2 proměnných, které by byly vhodné pro testování znalostí studentů pomocí počítače. Součástí mé práce bylo také zpracování otázek do vhodné podoby k testování na síti UPOL. Zvládnutí testu sestaveného z těchto otázek by se mělo stát podmínkou pro připuštění k ústní zkoušce z matematiky. Studenti tak budou mít možnost si nejprve otestovat své znalosti, než budou připuštěni k ústní zkoušce. Testové otázky byly vytvářeny s předpokladem, že studenti již mají znalosti z předmětu Matematika 1.

Práce je rozdělena do pěti částí. První část je věnována teorii, kde si nejprve uvedeme a vysvětlíme parciální derivace 1. řádu, poznatky o parciální derivaci 1. řádu rozšíříme na derivaci vyšších řádů a směrovou derivaci. Poté se přesunem k diferenciálu. Teoretická část bude pro lepší pochopení souvislostí vysvětlena i na názorných příkladech.

V druhé části se seznámíme s již samotnými otázkami, kterými bude možné prověřit, zda studenti správně pochopili učivo.

Třetí a čtvrtá část se zabývá zpracováním otázek do internetové podoby. V třetí části se seznámíme s programem TEX, v kterém se otázky prvotně vytvářely - sepisovaly, aby následně mohly být vloženy do systému LMS Moodle. Poté přejdeme ke čtvrté části, která je věnována zpracování otázek na síti UPOL, kde se seznámíme s prostředím LMS Moodle a objasním systém známkování.

Závěrečná pátá část je věnována souhrnému vyhodnocení testu. V této části se podíváme a zhodnotíme výsledky studentů v testu.

Doufám, že testové otázky se stanou užitečnou pomůckou pro studenty a napomůžou jim se lépe připravit na zkoušku z matematiky.

Seznam použitého značení

Značení	**Význam**
$\mathbb{R}$	- množina reálných čísel
$\mathbb{N}$	- množina přirozených čísel
D_f	- definiční obor funkce f
D_g	- definiční obor funkce g
$f'_x(x_0, y_0)$ resp. $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$	- parciální derivace funkce f podle x v bodě (x_0, y_0)
$f'_y(x_0, y_0)$ resp. $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$	- parciální derivace funkce f podle y v bodě (x_0, y_0)
$\mathcal{U}(x_0, y_0)$	- okolí bodu (x_0, y_0)
$(x_0, y_0) \in D_f^o$	- bod (x_0, y_0) je vnitřním bodem definičního oboru
$D_{f'_x}$	- množina bodů z definičního oboru funkce f, v nichž existuje vlastní parciálni derivace funkce f podle x
$D_{f'_y}$	- množina bodů z definičního oboru funkce f, v nichž existuje vlastní parciálni derivace funkce f podle y
$d((x, y), (x_0, y_0))$	- vzdálenost bodů (x_0, y_0) a (x, y) na orientované přímce
l	- orientovaná přímka
$\mathrm{d}f(x_0, y_0)(x_0 + h, y_0 + k)$	- diferenciál funkce $f(x, y)$ v bodě (x_0, y_0)

1 Parciální derivace a diferenciál funkce

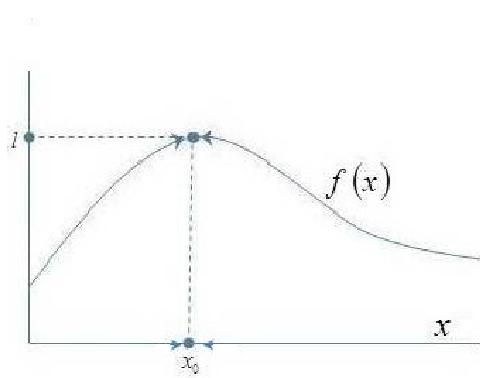
Než se vrhneme k samotným otázkám, nejprve si zopakujme definice, vlastnosti a vztahy pro výpočty, které se k této problematice vážou. Tyto informace jsou stěžejní pro porozumění učiva, abychom následně mohli úspěšně absolvovat test. V této kapitole předpokládám, že jsme již úspěšně absolvovali kurz Matematika 1.

V této kapitole jsem čerpala především materiál z [1], [5]. Konkrétně pak pro podkapitolu Parciální derivace 1.řádu z [1], [4], [5], [7], [8], v části Derivace vyšších řádu z [1], [3], [5]. Směrová derivace byla čerpána z [1], [5] a Diferenciál ze zdrojů [1], [2], [4], [5] uvedených na konci této práce.

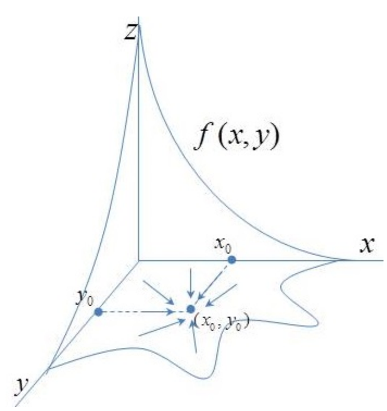
1.1 Parciální derivace 1. řádu

Parciální derivace funkce dvou proměnných je komplikovanějším pojmem než derivace funkce jedné proměnné. Proto, abychom lépe mohli pochopit parciální derivaci funkce dvou proměnných, připomeňme si zásadní rozdíl mezi limitou funkce jedné proměnné a limitou funkce dvou proměnných.

Zásadní rozdíl spočívá v tom, že u limity funkce jedné proměnné se k bodu x_0 můžeme blížit jen po přímce (ze dvou stran) (Obrázek 1). Zatímco při hledání limity funkce dvou proměnných v bodě (x_0, y_0) se k tomuto bodu můžeme blížit z nekonečně mnoha směrů (Obrázek 2).



Obrázek 1: funkce jedné proměnné



Obrázek 2: funkce dvou proměnných

Nyní se podívejme na srovnání obyčejné derivace funkce jedné proměnné a parciální derivace funkce dvou proměnných. Pomocí derivace funkce jedné proměnné zjišťujeme, jak se daná funkce chová v jednom pevně daném směru (ve směru osy x). Počítáme-li však parciální derivace funkce dvou proměnných podle proměnné x nebo y, můžeme popsat chování funkce v těchto vybraných směrech (ve směru osy x a směru osy y), ale nedovíme se nic o tom, jak se funkce chová v jiných směrech, které neodpovídají směrům os. To nám umožňuje až směrová derivace.

Definice 1.1. Nechť funkce $f(x,y)$ je definovaná na množině $D_f \subset \mathbb{R}^2$ a bod (x_0,y_0) je vnitřním bodem D_f, pak funkce $\varphi(x) = f(x,y_0)$ a $\psi(y) = f(x_0,y)$ jsou funkce jedné proměnné. Čísla $\varphi'(x_0)$ resp. $\psi'(y_0)$ nazýváme parciálními derivacemi funkce f podle proměnných x resp. y v bodě (x_0,y_0) a označujeme je $f'_x(x_0,y_0)$ resp. $f'_y(x_0,y_0)$. To znamená, že

$$f'_x(x_0,y_0) = \lim_{x\to x_0} \tfrac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0} \quad \text{resp.} \quad f'_y(x_0,y_0) = \lim_{y\to y_0} \tfrac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}$$

Poznámka 1.1. U této definice je důležité si uvědomit, že bod (x_0,y_0) musíme vždy volit tak, aby byl vnitřním bodem D_f.

Poznámka 1.2. Z této definice můžeme odvodit, že existuje-li limita

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0},$$

pak existuje i parciální derivace funkce f podle x v bodě (x_0,y_0) a analogicky existuje-li limita

$$\lim_{y\to y_0} \frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0},$$

pak existuje i parciální derivace funkce f podle y v bodě (x_0,y_0).

Poznámka 1.3. Kromě klasického označení pro parciální derivaci funkce f podle x v bodě (x_0,y_0), $f'_x(x_0,y_0)$, můžeme také v mnohých publikacích narazit na označení $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$. Obdobně tak můžeme označit i parciální derivaci funkce f podle y v bodě (x_0,y_0) ($f'_y(x_0,y_0)$ nebo $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$).

Poznámka 1.4. Můžeme si povšimnout, že již samotná Definice 1.1 nám dává návod, jak budeme postupovat při výpočtu. Budeme-li počítat parcialní derivaci funkce f např. podle proměnné x v bodě (x_0, y_0), budeme všechny ostatní proměnné považovat za konstanty.

Příklad 1.1. *Spočtěte parciální derivaci funkce $f(x, y) = 2xy + y$ v bodě (2,3):*
- budeme-li derivovat podle proměnné x

$$f'_x(2,3) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x,3) - f(2,3)}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{(2x \cdot 3 + 3) - (2 \cdot 2 \cdot 3 + 3)}{x-2} =$$
$$= \lim_{x \to 2} \frac{6x + 3 - 15}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{6(x-2)}{x-2} = 6$$

- budeme-li derivovat podle proměnné y

$$f'_y(2,3) = \lim_{y \to 3} \frac{f(2,y) - f(2,3)}{y-3} = \lim_{y \to 3} \frac{(2 \cdot 2y + y) - (2 \cdot 2 \cdot 3 + 3)}{y-3} =$$
$$= \lim_{y \to 3} \frac{4y + y - 15}{y-3} = \lim_{y \to 3} \frac{5(y-3)}{y-3} = 5$$

Testovou otázku na ověření teoretických znalostí parciální derivace v bodě uvádím v Příkladu 1.2.

Příklad 1.2. *Definujeme-li parciální derivaci funkce $f(x, y)$ v bodě (x_0, y_0) předpokládáme, že bod (x_0, y_0) je:*

a) hraničním bodem D_f
b) izolovaným bodem D_f
c) vnitřním bodem D_f
d) hromadným bodem D_f

Definice 1.2. *Nechť funkce f je definovaná na množině $D_f \subset R^2$ a nechť $D_{f'_x} \neq \emptyset$, $D_{f'_x} \subset D_f$ je množina všech bodů $(x, y) \in D_f$, v nichž existuje vlastní parciální derivace $f'_x(x, y)$. Funkce dvou proměnných definovaná na $D_{f'_x}$ předpisem $(x_0, y_0) \mapsto f'_x(x_0, y_0)$ se nazývá parciální derivace funkce f podle proměnné x a značí se f'_x nebo $\frac{\partial f}{\partial x}$.*

Nechť funkce f je definovaná na množině $D_f \subset R^2$ a nechť $D_{f'_y} \neq \emptyset$, $D_{f'_y} \subset D_f$ je množina všech bodů $(x, y) \in D_f$, v nichž existuje vlastní parciální derivace $f'_y(x, y)$. Funkce dvou proměnných definovaná na $D_{f'_y}$ předpisem $(x_0, y_0) \mapsto f'_y(x_0, y_0)$ se nazývá parciální derivace funkce f podle proměnné y a značí se f'_y nebo $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Nyní si vyzkoušejme spočítat zadání z Příkladu 1.1 pomocí Definice 1.2.

a) parciální derivace funkce f podle x bude vypadat:

$$f'_x(x, y) = 2y$$

Po dosazení bodu (2,3) dostaneme:

$$f'_x(2, 3) = 2 \cdot 3 = 6$$

b) parciální derivace funkce f podle y bude vypadat:

$$f'_y(x, y) = 2x + 1$$

Po dosazení bodu (2,3) dostaneme:

$$f'_y(2, 3) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$$

Zavedením Definice 1.2 nám umožňuje podstatně jednodušeji počítat parciální derivace.

Protože při výpočtu parciální derivace dvou proměnných považujeme jednu z proměnných za konstantu, můžeme se při výpočtu řídit stejnými pravidly, jako to bylo v případě derivace funkce jedné proměnné. Nyní si připomeňme základní pravidla součtu, rozdílu, součinu a podílu.

Věta 1.1. *Nechť funkce $f\colon D_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g\colon D_g \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mají parciální derivace podle x na množině $M \subset D_f \cap D_g$. Pak platí:*

1) Pravidlo pro derivování součtu resp. rozdílu dvou funkcí dvou proměnných

$$\frac{\partial}{\partial x}(f(x, y) \pm g(x, y)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \pm \frac{\partial g}{\partial x}(x, y)$$

2) Pravidlo pro derivování součinu dvou funkcí dvou proměnných

$$\frac{\partial}{\partial x}(f(x,y)\cdot g(x,y)) = \frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\cdot g(x,y) + f(x,y)\cdot \frac{\partial}{\partial x}g(x,y)$$

3) Pravidlo pro derivování podílu dvou funkcí dvou proměnných

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{f(x,y)}{g(x,y)}\Big) = \frac{\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\cdot g(x,y) - f(x,y)\cdot \frac{\partial}{\partial x}g(x,y)}{g^2(x,y)},$$

přičemž pravidlo o podílu derivací platí za předpokladu, že $g(x,y) \neq 0$

Nyní si uveďme použití pravidel na konkrétních příkladech.

Příklad 1.3. *Spočtěte parciální derivaci funkce f podle proměnné x:*

1) $f(x,y) = 3xy + x$

$f'_x(x,y) = 3y + 1$

2) $f(x,y) = \sin(xy)\cdot x^2$

$f'_x(x,y) = \cos(xy)\cdot y\cdot x^2 + \sin(xy)\cdot 2x$

3) $f(x,y) = \frac{y}{x}$

$f'_x(x,y) = \frac{0-y\cdot 1}{x^2} = \frac{-y}{x^2}$

Příklad 1.4. *Spočtěte parciální derivaci funkce* $f(x,y) = 3x^2 - y^2x$

a) podle x:

$f'_x = 6x - y^2$

b) podle y:

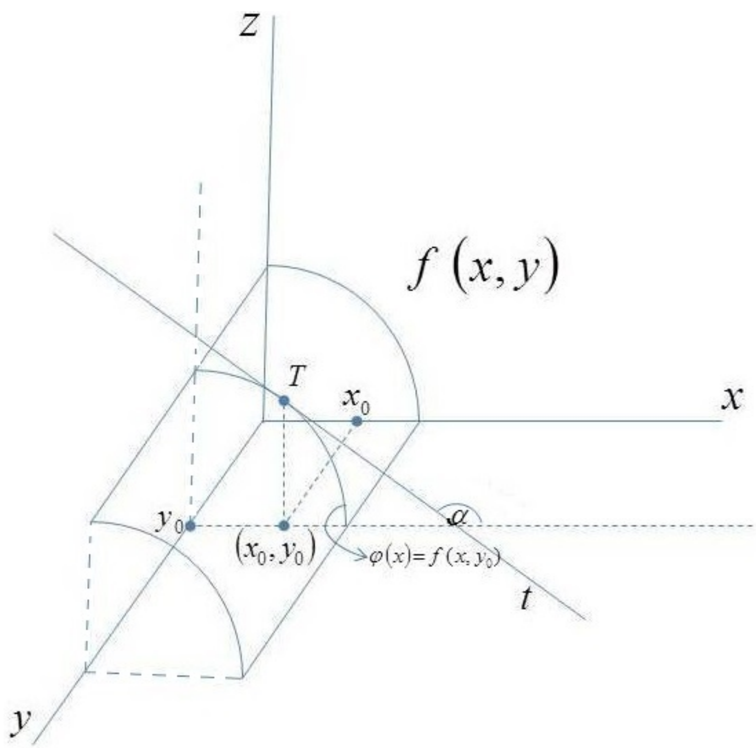
$f'_y = -2yx$

Geometrický význam parciální derivace funkce dvou proměnných

Parciální derivaci funkce dvou proměnných v konkrétním bodě lze snadno interpretovat. To učiníme s pomocí Obrázku 3.

Uvažujme funkci $f(x,y)$ definovanou na množině $D_f \subset \mathbb{R}^2$. Zvolme si libovolně bod (x_0, y_0) tak, aby byl vnitřním bodem D_f. Zafixujeme-li proměnnou y v bodě y_0 a měníme-li pouze hodnoty proměnné x, dostaneme funkci jedné proměnné $\varphi(x) = f(x, y_0)$, která je definovaná na okolí bodu x_0. Graf funkce $\varphi(x)$ vznikne jako průnik grafu funkce $f(x,y)$ a roviny $y = y_0$. Derivaci funkce $\varphi(x)$ v bodě x_0 nazýváme parciální derivací funkce $f(x,y)$ podle x v bodě (x_0, y_0). Parciální derivace $f'_x(x_0, y_0)$ udává směrnici tečny t ke křivce $\varphi(x)$ v rovině $y = y_0$ v bodě $T = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Parciální derivace se rovná číslu $\mathrm{tg}(\alpha)$, kde úhel α je úhel, který svírá tečna t s kladným směrem osy x.

Obdobně si můžeme zavést derivaci $f'_y(x_0, y_0)$, ponecháme-li pevnou hodnotu proměnné x_0 a měníme pouze hodnoty proměnné y.



Obrázek 3: Parciální derivace funkce $f(x,y)$ podle x

K závěru kapitoly si připomeňme ještě jeden důležitý poznatek o derivaci funkce jedné proměnné. Pro derivaci funkce jedné proměnné platilo, že jestliže funkce $f(x)$ měla vlastní derivaci v bodě x_0, pak byla v tomto bodě spojitá.

Tato skutečnost neplatí pro parciální derivaci funkce dvou proměnných, protože k danému bodu (x_0, y_0) se přibližujeme pouze ve směru souřadných os x a y.

1.2 Derivace vyšších řádů

Označme si $D_{f'_x}$ množinu všech bodů (x, y), v nichž existuje vlastní parciální derivace funkce $f(x, y)$ podle x.

Definice 1.3. Nechť bod $(x_0, y_0) \in D_{f'_x} \subset D_f \subset \mathbb{R}^2$.

Existuje-li parciální derivace funkce $f'_x(x, y)$ podle proměnné x v bodě (x_0, y_0) nazýváme tuto derivaci parciální derivací 2.řádu podle x funkce f v bodě (x_0, y_0) a značíme ji $f''_{xx}(x_0, y_0)$ nebo také $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$.

Existuje-li parciální derivace funkce $f'_x(x, y)$ podle proměnné y v bodě (x_0, y_0) nazýváme tuto derivaci smíšenou parciální derivací 2.řádu funkce f v bodě (x_0, y_0) a značíme ji $f''_{xy}(x_0, y_0)$ nebo také $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$.

Poznámka 1.5. Obdobným způsobem se dají definovat i derivace vyšších řádů.

Příklad 1.5. *Spočtěte smíšenou parciální derivaci druhého řádu $f''_{xy}(x, y)$ funkce*

$$f(x, y) = \sin(x) + xy^3$$

Nejdříve spočteme parciální derivaci prvního řádu podle x.

$$f'_x(x, y) = \cos(x) + y^3$$

Poté zderivujeme podle y a tím dostaneme výslednou smíšenou parciální derivaci druhého řádu.

$$f''_{xy}(x, y) = 3y^2$$

Testovou otázku na parciální derivace vyšších řádů jsem pro ukázku vybrala do Příkladu 1.6.

Příklad 1.6. *Kolik má funkce 2 proměnných parciálních derivací n-tého řádu?*

a) $2n$

b) n

c) $\frac{2}{n}$

d) 2^n

Věta 1.2 (Schwarzova)**.** *Jsou-li parciální derivace* $f''_{yx}(x,y)$ *a* $f''_{xy}(x,y)$ *v bodě* (x_0,y_0) *spojité, pak jsou si v tomto bodě rovny, tj.*

$$f''_{yx}(x_0,y_0) = f''_{xy}(x_0,y_0)$$

Poznámka 1.6. Tuto větu můžeme použít i pro spojité parciální derivace až do řádu $n \in \mathbb{N}$, které nám budou záviset pouze na tom, kolikrát jsme derivovali podle proměnné x a proměnné y. Pořadí v jakém jsme podle proměnných derivovali můžeme v tomto případě opominout.

Příklad 1.7. *Spočtěte parciální derivace druhého řádu funkce*

$$f(x,y) = 3x^2y + 2y^2.$$

Nejdříve opět spočteme parciální derivace prvního řádu.

$$f'_x(x,y) = 6xy \qquad f'_y(x,y) = 3x^2 + 4y$$

Poté můžeme počítat parciální derivace druhého řádu.

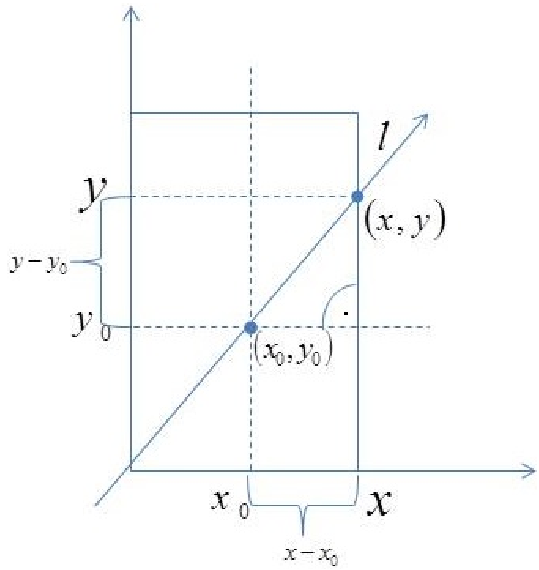
$$f''_{xx}(x,y) = 6y \qquad f''_{yy}(x,y) = 4$$

$$f''_{xy}(x,y) = 6x \quad = \quad f''_{yx}(x,y) = 6x$$

Obě smíšené parciální derivace jsou spojité, tudíž jsou si rovny.

1.3 Směrová derivace

Směrová derivace je zobecněním parciální derivace, kterou získáme zúžením definičního oboru funkce f na přímku procházející bodem (x_0,y_0). Přímku si označíme písmenem l a budeme ji vnímat jako orientovanou přímku, která bude procházet bodem $(x_0,y_0) \in D_f^o$. Vzdálenost mezi bodem (x_0,y_0) a $(x,y) \in l$ spočítáme pomocí znalostí Pythagorovy věty.



Obrázek 4: Výpočet vzdálenosti dvou bodů pomocí Pythagorovy věty

Vzdálenost tedy mezi bodem (x_0, y_0) a (x, y) spočítáme:

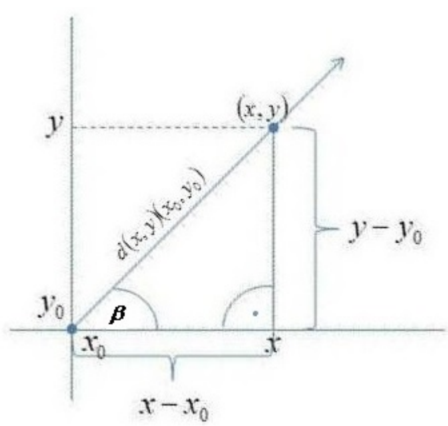
$$d(x, y), (x_0, y_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

Celou situaci máme vyobrazenou na Obrázku 4.

Poznámka 1.7. Budeme-li při výpočtu znát navíc i úhel β, který svírá orientovaná přímka s kladným směrem osy x, vzdálenost mezi dvěma body (x_0, y_0) a (x, y) spočítáme pomocí goniometrických funkcí dle Obrázku 5, tj:

$$\sin(\beta) = \frac{y - y_0}{d((x, y), (x_0, y_0))} \quad \text{odtud} \quad d((x, y), (x_0, y_0)) = \frac{y - y_0}{\sin(\beta)}$$

$$\cos(\beta) = \frac{x - x_0}{d((x, y), (x_0, y_0))} \quad \text{odtud} \quad d((x, y), (x_0, y_0)) = \frac{x - x_0}{\cos(\beta)}$$



Obrázek 5: Výpočet vzdálenosti dvou bodů pomocí goniometrických funkcí

Definice 1.4. Nechť funkce $f(x, y)$ (Obrázek 6) je definována na okolí bodu $(x_0, y_0) \in D_f$. Dále nechť l je orientovaná přímka, která prochází bodem (x_0, y_0) a (x, y) je libovolný bod na přímce l. Symbolem $d((x, y), (x_0, y_0))$ označíme orientovanou vzdálenost bodu (x_0, y_0) a (x, y), která je definována jako:

$$d((x, y), (x_0, y_0)) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

- přibližujeme-li se k bodu (x_0, y_0) z bodu (x, y) ve směru orientace přímky l

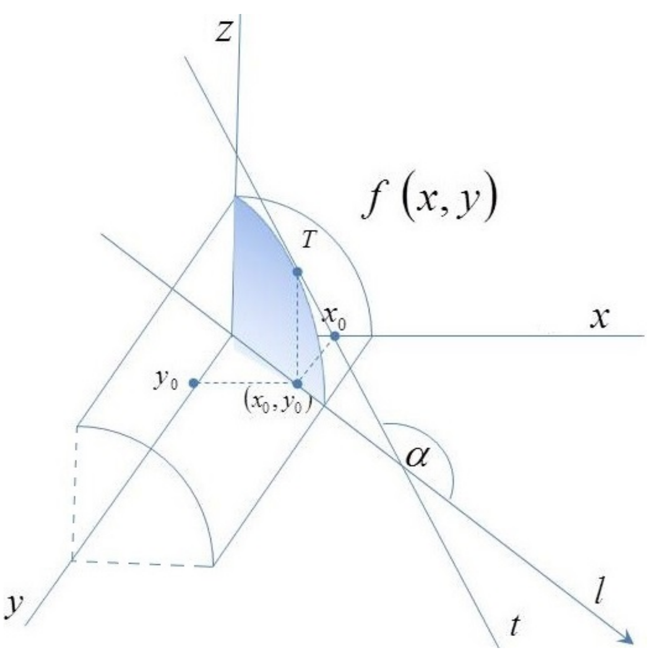
$$d((x, y), (x_0, y_0)) = -\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

- přibližujeme-li se k bodu (x_0, y_0) z bodu (x, y) proti směru orientace přímky l

Existuje-li limita

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0);(x,y)\in l} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0)}{d((x, y), (x_0, y_0))},$$

pak říkáme, že funkce $f(x, y)$ má v bodě (x_0, y_0) derivaci ve směru přímky l a značíme ji $\frac{\partial f}{\partial l}(x_0, y_0)$ nebo $f'_l(x_0, y_0)$.



Obrázek 6: Směrová derivace

Poznámka 1.8. Stejně jako u parciálních derivací i tady nám bude platit, že jestliže bude existovat limita, pak bude existovat směrová derivace, tj.

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0);(x,y)\in l} \frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)}{d(x,y),(x_0,y_0)} = \frac{\partial f}{\partial l}(x_0,y_0) = \mathrm{tg}(\alpha)$$

Výpočet směrové derivace pomocí parciálních derivací prvního řádu

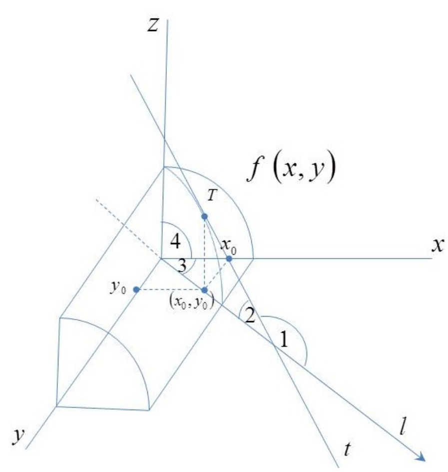
K výpočtu směrové derivace pomocí parciálních derivací využijeme Poznámky 1.7, kde s pomocí goniometrických funkcí vypočítáme vzdálenost bodů (x,y) a (x_0,y_0).

Věta 1.3. *Nechť funkce f je definována na okolí bodu $(x_0,y_0)\in D_f$ a nechť na tomto okolí má spojité parciální derivace prvního řádu. Nechť l je orientovaná přímka jdoucí bodem (x_0,y_0) a β je úhel, který svírá přímka l s kladným směrem osy x. Pak platí:*

$$\frac{\partial f}{\partial l}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cos(\beta) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\sin(\beta)$$

Na ukázku uvádím v Příkladu 1.8 testovou otázku týkající se směrové derivace.

Příklad 1.8. *Mějme funkci $f(x,y)$ vyobrazenou na obrázku. Chceme-li spočítat $f'_l(x_0,y_0)$ podle vzorce $f'_l(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)\cos(\beta) + f'_y(x_0,y_0)\sin(\beta)$, pak úhel β je:*



a) úhel 1

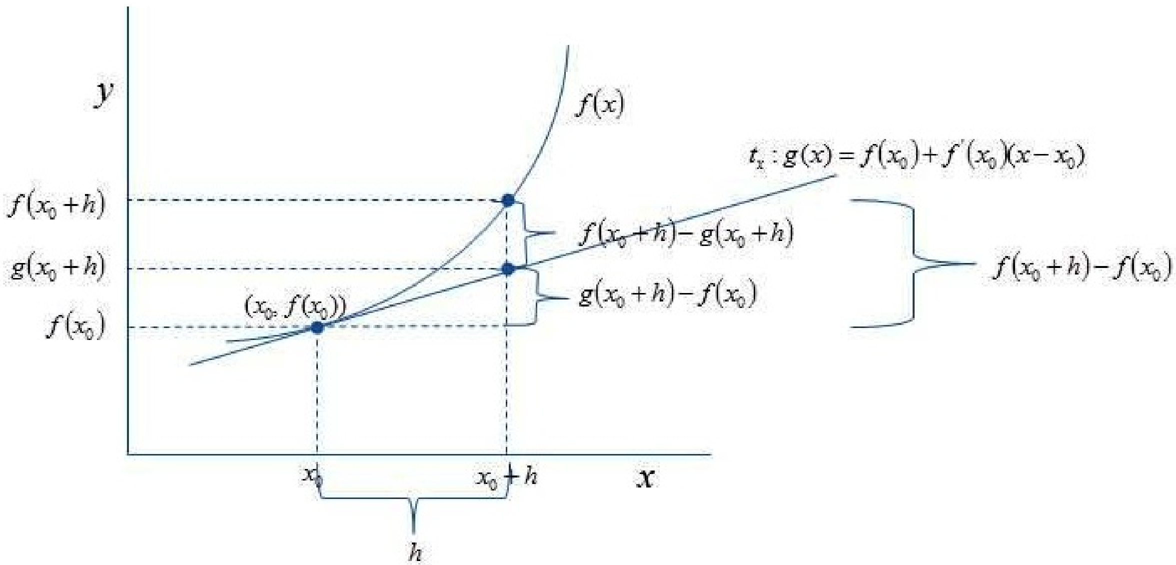
b) úhel 2

c) úhel 3

d) úhel 4

1.4 Diferenciál

Na začátek této kapitoly si připomeňme a ukažme na Obrázku 7 diferenciál funkce jedné proměnné $f(x)$. Funkci $f(x)$ aproximujeme na okolí bodu $x_0 \in D_f$ lineární funkcí $g(x)$ tak, aby funkce $g(x)$ protínala funkci $f(x)$ v bodě $(x_0, f(x_0))$. Nejlepší aproximací funkce $f(x)$ bude taková lineární funkce $g(x)$, která bude tečnou (t_x) ke grafu funkce $f(x)$ v bodě $(x_0, f(x_0))$.



Obrázek 7: Diferenciál funkce jedné proměnné

Z obrázku 7 je zřejmé, že bude platit:

$$f(x_0+h) - f(x_0) = \underbrace{f(x_0+h) - g(x_0+h)}_{\text{chyba}} + \underbrace{g(x_0+h) - f(x_0)}_{\text{diferenciál}},$$

kde h je libovolné reálné číslo a $g(x_0+h) - f(x_0)$ je funkce jedné proměnné h a značí se $\mathrm{d}f(x_0)(x_0+h)$.

Poznámka 1.9. V praktických výpočtech diferenciál využíváme k přibližnému výpočtu funkčních hodnot, tj. zanedbáním chyby dostaneme rovnici:

$$f(x_0+h) - f(x_0) \approx g(x_0+h) - f(x_0)$$
$$f(x_0+h) \approx f(x_0) + g(x_0+h) - f(x_0)$$
$$f(x_0+h) \approx g(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h = f(x_0) + df(x_0)(x_0+h)$$

Nyní, když jsme si zopakovali diferenciál funkce jedné proměnné, si zkusme nadefinovat diferenciál funkce dvou proměnných.

Definice 1.5. Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má na okolí bodu $(x_0, y_0) \in D_f$ definovány parciální derivace prvního řádu a nechť jsou tyto derivace v bodě (x_0, y_0) spojité. Pak diferenciál funkce f v bodě (x_0, y_0) dvou proměnných h a k je taková lineární funkce, pro kterou platí:

$$\mathrm{d}f(x_0, y_0)(x_0 + h, y_0 + k) = f'_x(x_0, y_0)h + f'_y(x_0, y_0)k$$

Geometrická interpretace totalního diferenciálu funkce dvou proměnných

Na Obrázku 8 máme funkci f definovanou na množině $D_f \subset \mathbb{R}^2$, kde jsme si zvolili libovolný bod $(x_0, y_0) \in D_f$. Parciální derivací v bodě (x_0, y_0) podle x resp. y dostaneme směrnici tečny t_x resp. t_y. Tyto dvě tečny procházející bodem $T = ((x_0, y_0), f(x_0, y_0))$ nám vytvářejí tečnou rovinu τ, která není rovnoběžná s osou z. Tečná rovina τ procházející bodem T je rovna funkci $g(x, y)$, kterou vypočteme součtem funkční hodnoty funkce f v bodě (x_0, y_0) a diferenciálu funkce f v bodě (x_0, y_0). Funkce $g(x, y)$ je nejlepší lineární aproximací funkce f v bodě (x_0, y_0).

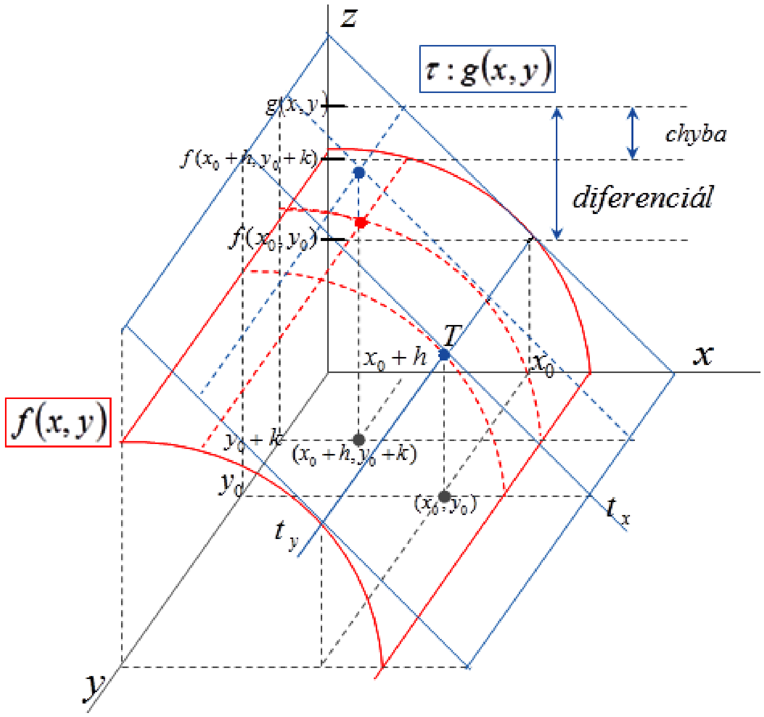
Rovnice tečné roviny τ v bodě T můžeme s pomocí Obrázku 8 zapsat jako:

$$g(x, y) = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Pro diferenciál funkce dvou proměnných budou platit následující věty:

Věta 1.4. *Má-li funkce f v bodě (x_0, y_0) spojité parciální derivace 1. řádu, pak má v tomto bodě také diferenciál.*

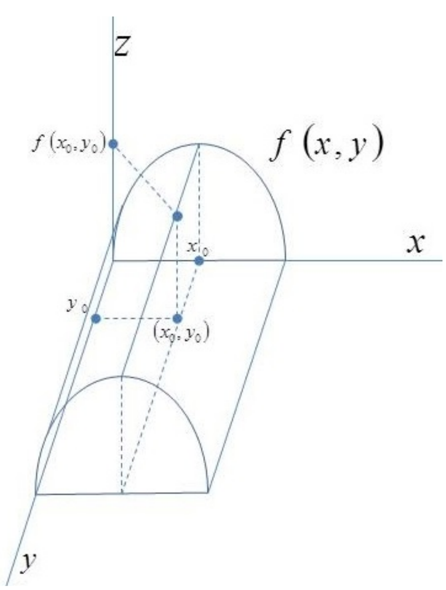
Věta 1.5. *Bude-li funkce f diferencovatelná v bodě (x_0, y_0), pak bude v tomto bodě spojitá.*



Obrázek 8: Diferenciál funkce f

Vhodnou testovou otázku k tématu diferenciál jsem vybrala na ukázku do Příkladu 1.9.

Příklad 1.9. *Pomocí obrázku určete, jakých hodnot bude nabývat diferenciál funkce* $f(x, y)$ *v bodě* (x_0, y_0) *pro bod* (x_0, y_0), *tj.* $df(x_0, y_0)(x_0, y_0)$



a) $df(x_0, y_0)(x_0, y_0) < 0$

b) $df(x_0, y_0)(x_0, y_0) > 0$

c) $df(x_0, y_0)(x_0, y_0) = 0$

d) diferenciál nebude existovat

2 Soubor testových otázek

Tato část se skládá ze 152 úloh, kde správnou odpověď vybíráme z předem daných možností. Každá z úloh může mít více správných odpovědí. Otázky jsou zaměřeny především na pochopení učiva. Některé jsou pro lepší představivost doplněny náčrtky grafů funkcí. U každé otázky jsou správné odpovědi označeny symbolem $\surd$.

2.1 Testové otázky

1) Definujeme-li parciální derivaci funkce $f(x, y)$ v bodě (x_0, y_0) předpokládáme, že bod (x_0, y_0) je:

   a) hraničním bodem D_f

   b) izolovaným bodem D_f

   c) vnitřním bodem D_f $\surd$

   d) hromadným bodem D_f

2) Kdy můžeme prohlásit, že funkce $f(x, y)$ má v bodě $(x_0, y_0) \in D_f^o$ parciální derivaci podle x?

   a) jestliže $\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$ $\surd$

   b) jestliže $\exists \lim_{y\to y_0} \frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}$

   c) jestliže $\exists\ \varphi(x) = f(x, y_0)$

   d) jestliže $\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x,y_0)-f(x,y)}{x-x_0}$

3) Definujeme - li parciální derivaci funkce $f(x, y)$ v bodě (x_0, y_0) předpokládáme, že funkce $f(x, y)$ je definována na:

   a) $D_f \subset \mathbb{R}$

   b) $D_f \subset \mathbb{R}^2$ $\surd$

   c) $D_f \subset \mathbb{R}^3$

   d) $D_f \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

4) Pokud do funkce $f(x, y)$ dosadíme za y pevnou hodnotu $y_0 \in \mathbb{R}$ dostaneme:

a) $\varphi(x) = f(x_0, y_0), x_0 \in \mathbb{R}$

b) $\varphi(x) = f(x, y_0)$ $\checkmark$

c) $\varphi(x) = f(x_0, y_0, y), x_0 \in \mathbb{R}$

d) $\varphi(y) = f(x_0, y), x_0 \in \mathbb{R}$

5) Definujeme-li parciální derivaci funkce $f(x, y)$ v bodě (x_0, y_0) předpokládáme, že:

a) $\exists \mathcal{U}(x_0, y_0) \subset D_f$ $\checkmark$

b) bod (x_0, y_0) je hromadným bodem D_f

c) bod (x_0, y_0) je vnitřním bodem D_f $\checkmark$

d) $\exists \mathcal{U}(x_0, y_0)$, která nepatří do D_f

6) Nechť $f(x, y)$ je funkce 2 proměnných na množině D_f. Jestliže (x_0, y_0) je vnitřním bodem D_f, pak platí:

a) $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ $\checkmark$

b) $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$

c) $(x_0, y_0) \in D_f$ $\checkmark$

d) $(x_0, y_0) \in H_f$

7) Nechť $f(x, y)$ je funkce 2 proměnných na množině $D_f \subset \mathbb{R}^2$, (x_0, y_0) je vnitřním bodem D_f. Parciální derivaci funkce $f(x, y)$ podle x v bodě (x_0, y_0) definujeme jako:

a) $\varphi(x) = f(x, y_0)$

b) $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0}$ $\checkmark$

c) $\lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0,y) - f(x_0,y_0)}{y - y_0}$

8) Parciální derivaci funkce $f(x, y)$ v bodě (x_0, y_0) podle y značíme:

a) $f'_x(x_0, y_0)$

b) $\frac{f(x,y)}{x}$

c) $f(x, y_0)$

d) $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ $\checkmark$

9) Parciální derivaci funkce $f(x, z)$ v bodě (x_0, z_0) podle z značíme:

a) $f'_z\ (x_0, y_0)$

b) $f'_x\ (x_0, y_0)$

c) $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, z_0)$ $\checkmark$

d) $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, z)$

10) Vyberte správné tvrzení:

a) Jestliže funkce f má v bodě (x_0, y_0) vlastní obě parciální derivace prvního řádu, tak je spojitá v bodě (x_0, y_0).

b) Jestliže funkce f má v bodě (x_0, y_0) vlastní obě parciální derivace prvního řádu, není spojitá v bodě (x_0, y_0).

c) Jestliže funkce f má v bodě (x_0, y_0) vlastní obě parciální derivace prvního řádu, může být spojitá v bodě (x_0, y_0). $\checkmark$

d) Ani jedna z uvedených možností neplatí.

11) Vyberte správné tvrzení:

a) Jestliže je funkce f spojitá v bodě (x_0, y_0), pak existuje vlastní parciální derivace funkce f podle x v bodě (x_0, y_0).

b) Jestliže je funkce f spojitá v bodě (x_0, y_0), pak neexistuje vlastní parciální derivace funkce f podle x v bodě (x_0, y_0).

c) Jestliže je funkce f spojitá v bodě (x_0, y_0), pak existuje vlastní parciální derivace funkce f podle y v bodě (x_0, y_0).

d) Ani jedno z uvedených tvrzení není správné. $\checkmark$

12) Dosadíme-li do funkce $f(x, y)$ za x pevnou hodnotu x_0, dostaneme:

a) parciální derivaci funkce f podle x

b) funkci proměnné y $\surd$

c) parciální derivaci funkce f podle y

d) funkci proměnné x

13) Nechť $f(x, y)$ je funkce 2 proměnných na množině $D_f \subset \mathbb{R}^2$, (x_0, y_0) je vnitřním bodem D_f. Existuje-li limita $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$, rovná se:

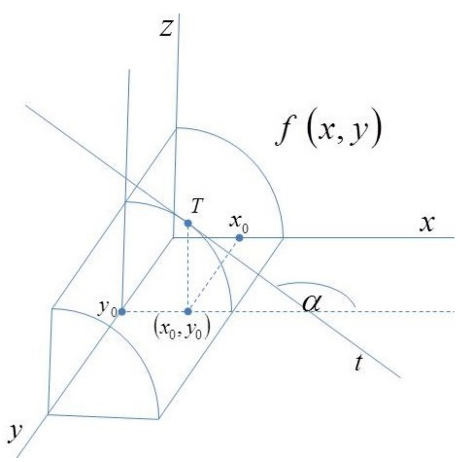
a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ $\surd$

b) $f(x, y)$

c) $\varphi(x) = f(x, y_0)$

d) $f'_x(x, y)$

14) Na obrázku je zakreslen graf funkce $f(x, y)$ a úhel α. Který z uvedených vztahů platí?



a) $\sin(\alpha) = f'_x(x_0, y_0)$

b) $\cos(\alpha) = f'_x(x_0, y_0)$

c) $\mathrm{tg}(\alpha) = f'_x(x_0, y_0)$ $\surd$

d) $\mathrm{tg}(\alpha) = f'_y(x_0, y_0)$

15) Kdy můžeme prohlásit, že funkce $f(x, y)$ má v bodě $(x_0, y_0) \in D_f^o$ parciální derivaci podle y?

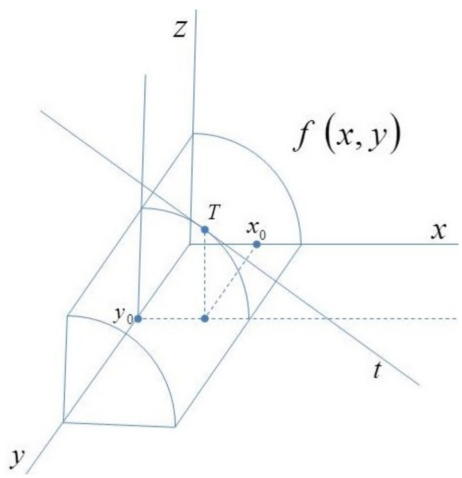
a) jestliže $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0}$

b) jestliže $\exists \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0,y) - f(x_0,y_0)}{y - y_0}$ $\checkmark$

c) jestliže $\exists\ \varphi(x) = f(x, y_0)$

d) jestliže $\exists\ \psi(y) = f(x_0, y)$

16) Chceme-li spočítat směrnici tečny t na obrázku, spočítáme:



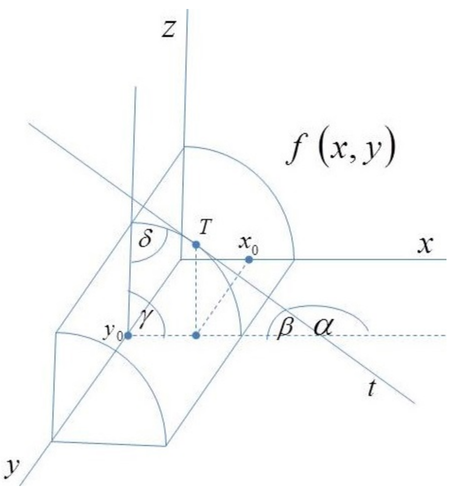
a) parciální derivaci funkce $f(x, y)$ podle x v bodě (x_0, y_0) $\checkmark$

b) parciální derivaci funkce $f(x, y)$ podle y v bodě (x_0, y_0)

c) směrovou derivaci funkce $f(x, y)$ v bodě (x_0, y_0) ve směru osy x $\checkmark$

d) parciální derivaci funkce $f(x, y)$ podle x v bodě $(0, 0)$

17) Nechť $f(x, y)$ je funkce, jejíž graf je znázorněn na obrázku. Spočítáme-li $f'_x(x_0, y_0)$, zjistíme:



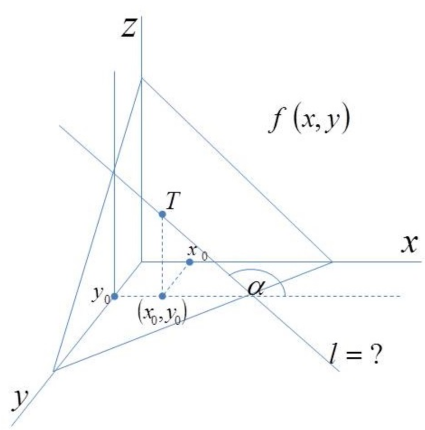
a) tg (α) ✓

b) tg (β)

c) tg (γ)

d) tg (δ)

18) Na obrázku je graf funkce $f(x, y)$ a přímka l je:



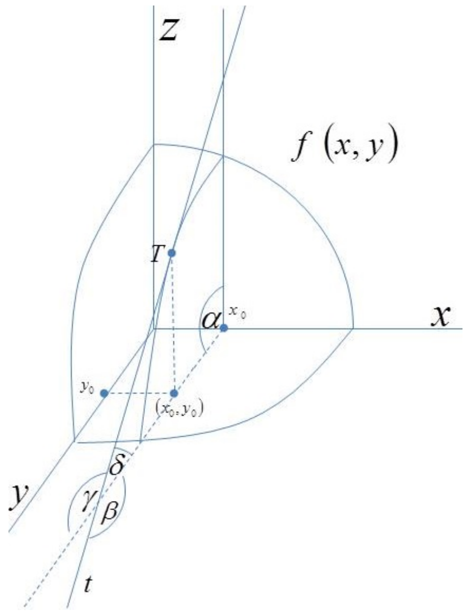
a) orientovaná přímka

b) funkce $\varphi(x) = f(x, y_0)$

c) tečna ke grafu funkce $f(x, y)$ v bodě (x_0, y_0) ve směru osy x ✓

d) funkce $\varphi(y) = f(x_0, y)$

19) Nechť $f(x, y)$ je funkce, jejíž graf je znázorněn na obrázku. Spočítáme-li $f'_y(x_0, y_0)$, zjistíme:



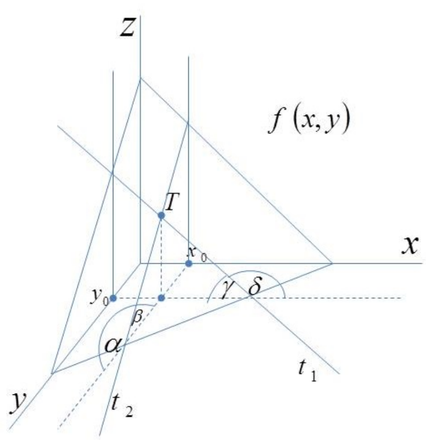
a) $\operatorname{tg}(\alpha)$

b) $\operatorname{tg}(\beta)$ √

c) $\operatorname{tg}(\gamma)$ √

d) $\operatorname{tg}(\delta)$

20) Nechť $f(x, y)$ je funkce, jejíž graf je znázorněn na obrázku. Spočítáme-li $f'_y(x_0, y_0)$, zjistíme:



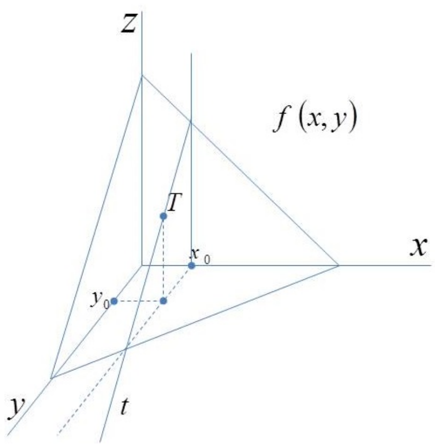
a) $\mathrm{tg}\,(\alpha)$ $\surd$

b) $\mathrm{tg}\,(\beta)$

c) $\mathrm{tg}\,(\gamma)$

d) $\mathrm{tg}\,(\delta)$

21) Chceme-li spočítat směrnici tečny t na obrázku spočítáme:



a) směrovou derivaci funkce $f(x, y)$ v bodě (x_0, y_0) ve směru osy x

b) parciální derivaci funkce $f(x, y)$ podle x v bodě (x_0, y_0)

c) parciální derivaci funkce $f(x, y)$ podle y v bodě (x_0, y_0) $\surd$

d) směrovou derivaci funkce $f(x, y)$ v bodě (x_0, y_0) ve směru osy y $\surd$

22) Vyberte správné tvrzení:

a) Jestliže funkce $f(x, y)$ má spojité smíšené parciální derivace f''_{xy}, f''_{yx} na intervalu I, pak vždy platí $f'_x = f'_y$ na intervalu I.

b) Jestliže funkce $f(x, y)$ má spojité smíšené parciální derivace f''_{xy}, f''_{yx} na intervalu I, pak vždy platí $f''_{xx} = f''_{yy}$ na intervalu I.

c) Ani jedno z tvrzení není správné. $\surd$

d) Jestliže funkce $f(x, y)$ má spojité smíšené parciální derivace f''_{xy}, f''_{yx} na intervalu I, pak vždy platí $f''_{xx} = f''_{yx}$ na intervalu I.

23) Vyberte správné tvrzení:

a) Jestliže funkce $f(x,y)$ má spojité smíšené parciální derivace f''_{xy}, f''_{yx} na intervalu I, pak vždy platí $f''_{xx} = f''_{yy}$ na intervalu I.

b) Ani jedno z tvrzení není správné.

c) Jestliže funkce $f(x,y)$ má spojité smíšené parciální derivace f''_{xy}, f''_{yx} na intervalu I, pak vždy platí $f''_{xy} = f''_{yx}$ na intervalu I. $\checkmark$

d) Jestliže funkce $f(x,y)$ má spojité smíšené parciální derivace f''_{xy}, f''_{yx} na intervalu I, pak vždy platí $f''_{xy} > f''_{yx}$ na intervalu I.

24) Které z následujících tvrzení je správné?

a) Jestliže funkce $f(x,y)$ má spojité smíšené parciální derivace f''_{xy}, f''_{yx} v bodě (x_0,y_0), pak $f''_{xy}(x_0,y_0) = f''_{yx}(x_0,y_0)$. $\checkmark$

b) Jestliže $\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$, pak funkce 2 proměnných $f(x,y)$ má v bodě $(x_0,y_0) \in D_f^o$ parciální derivace podle x. $\checkmark$

c) Jestliže $f''_{xy} = f''_{yx}$, potom smíšené parciální derivace f''_{xy} a f''_{yx} funkce $f(x,y)$ jsou v bodě (x_0,y_0) spojité.

d) Jestliže existují smíšené parciální derivace f''_{xy}, f''_{yx} funkce f v bodě (x_0,y_0), pak $f''_{xy}(x_0,y_0) = f''_{yx}(x_0,y_0)$.

25) Kolik má funkce 2 proměnných parciálních derivací n-tého řádu?

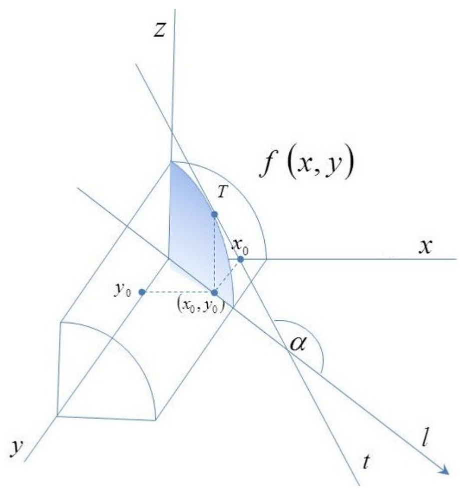
a) $2n$

b) n

c) $\frac{2}{n}$

d) 2^n $\checkmark$

26) Chceme-li spočítat směrnici tečny t funkce $f(x,y)$ na obrázku, spočítáme:



a) parciální derivaci funkce $f(x, y)$ v bodě (x_0, y_0) podle x

b) parciální derivaci funkce $f(x, y)$ v bodě (x_0, y_0) podle y

c) směrovou derivaci funkce $f(x, y)$ v bodě (x_0, y_0) ve směru orientované přímky l $\surd$

d) $\mathrm{tg}\,(\alpha)$ $\surd$

27) Ve kterém z následujících bodů lze počítat směrovou derivaci funkce $f(x, y)$ v bodě (x_0, y_0)?

a) v bodě $(x_0, y_0) \in D_f^o$ $\surd$

b) v bodě (x_0, y_0), který nepatří do D_f

c) ani jedna z možností není správná

d) v každém hromadném bodě D_f

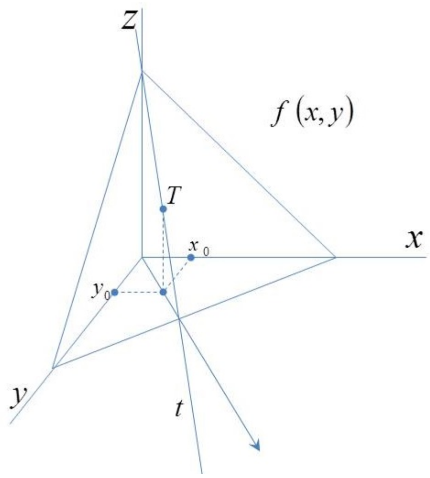
28) Nechť $f(x, y)$ je funkce 2 proměnných a $\frac{\partial f}{\partial l}(x_0, y_0)$ je směrová derivace funkce $f(x, y)$ v bodě (x_0, y_0) ve směru přímky l. Kde leží přímka l?

a) v rovině (xz)

b) v rovině (zy)

c) v rovině (xy) $\surd$

29) Na obrázku máme graf funkce 2 proměnných $f(x, y)$. Co znázorňuje písmeno T?



a) T je označení bodu o souřadnicích (x_0, y_0)

b) T je označení bodu o souřadnicích $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ $\surd$

c) T je bodem dotyku grafu funkce $f(x, y)$ a přímky t $\surd$

d) T je funkční hodnota funkce $f(x, y)$ v bodě (x_0, y_0)

30) Vyberte správné tvrzení:

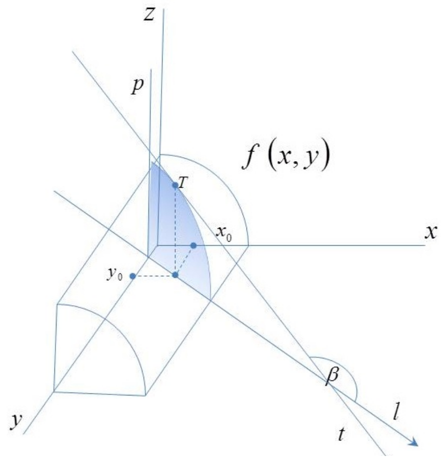
a) Jestliže funkce $f(x, y)$ má spojité smíšené parciální derivace f''_{xy} , f''_{yx} na intervalu I, pak platí $f''_{xy} = f''_{yx}$ na intervalu I. $\surd$

b) Jestliže funkce $f(x, y)$ má spojité smíšené parciální derivace f''_{xy} , f''_{yx} na intervalu I, pak platí $f''_{xx} = f''_{yy}$ na intervalu I.

c) Jestliže funkce $f(x, y)$ je spojité v bodě (x_0, y_0), pak existují vlastní parciální derivace funkce f v bodě (x_0, y_0).

d) Jestliže funkce $f(x, y)$ je spojité v bodě (x_0, y_0), pak neexistují vlastní parciální derivace funkce f v bodě (x_0, y_0).

31) Nechť funkce $f(x, y)$ má graf znázorněný na obrázku. Co vyjadřuje směrová derivace funkce $f(x, y)$ ve směru přímky l v bodě (x_0, y_0)?



a) $\mathrm{tg}\,(\beta)$ √

b) směrnici přímky l

c) směrnici přímky t √

d) směrnici přímky p

32) Chceme-li spočítat směrovou derivaci funkce $f(x, y)$ v bodě (x_0, y_0) podle orientované přímky l pomocí parciálních derivací v bodě (x_0, y_0) podle x a podle y, pak platí:

a) $\frac{\partial f}{\partial l}(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0) + f'_y(x_0, y_0)$

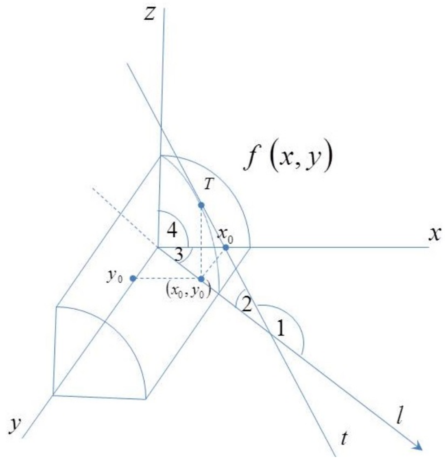
b) $\frac{\partial f}{\partial l}(x_0, y_0) = \cos\alpha + \sin\alpha$, kde α je úhel, který svírá přímka l s kladným směrem osy x

c) $\frac{\partial f}{\partial l}(x_0, y_0) = f''{}_{xy}(x_0, y_0) + f''{}_{yx}(x_0, y_0)$

d) $\frac{\partial f}{\partial l}(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\cos\alpha + f'_y(x_0, y_0)\sin\alpha$, kde α je úhel, který svírá přímka l s kladným směrem osy x √

e) $\frac{\partial f}{\partial l}(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\cos\alpha + f'_y(x_0, y_0)\sin\alpha$, kde α je úhel, který svírá tečna ke grafu funkce $f(x, y)$ v bodě $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ s kladným směrem přímky l

33) Mějme funkci $f(x, y)$ vyobrazenou na obrázku. Chceme-li spočítat $f'_l(x_0, y_0)$ podle vzorce $f'_l(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\cos\alpha + f'_y(x_0, y_0)\sin\alpha$, pak úhel α je:



a) úhel 1

b) úhel 2

c) úhel 3 √

d) úhel 4

34) Nechť $(x_0, y_0) \in D_f^o$ a na $\mathcal{U}(x_0, y_0)$ má funkce $f(x, y)$ spojité parciální derivace. Dále nechť l je orientovaná přímka jdoucí bodem (x_0, y_0) a α je úhel, který svírá přímka l s kladným směrem osy x. Pak pomocí vzorce $f'_x(x_0, y_0) \cos\alpha + f'_y\ (x_0, y_0) \sin\alpha$ vypočítáme:

a) směrnici tečny t dotýkající se grafu funkce $f(x, y)$ v bodě $T = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ve směru orientace přímky l √

b) směrnice tečny t, dotýkající se grafu funkce $f(x, y)$ v bodě $T = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, svírající s přímkou l úhel α

c) směrovou derivaci funkce $f(x, y)$ v bodě (x_0, y_0) ve směru orientace přímky l √

d) ani jedna z uvedených možností

35) Mějme funkci 2 proměnných $f(x, y)$. Dosadíme-li za x pevnou hodnotu $x_0 \in \mathbb{R}$, dostaneme:

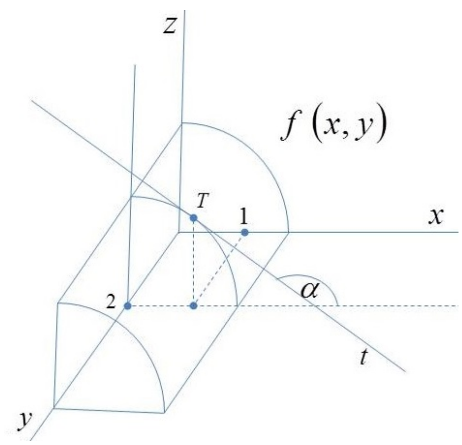
a) funkci proměnných x,y

b) funkci $\psi(y) = f(x_0, y)$ $\surd$

c) funkci proměnné y $\surd$

d) funkci proměnné x

36) Chceme-li spočítat směrnici tečny t na obrázku, spočítáme:



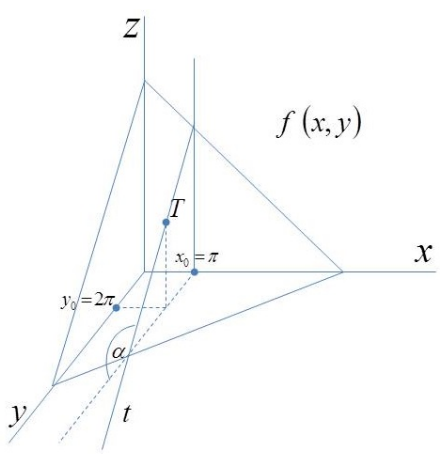
a) parciální derivaci funkce $f(x, y)$ podle x v bodě (x_0, y_0)

b) parciální derivaci funkce $f(x, y)$ podle x v bodě $(1, 2)$ $\surd$

c) parciální derivaci funkce $f(x, y)$ podle x v bodě $(2, 1)$

d) parciální derivaci funkce $f(x, y)$ podle y v bodě (x_0, y_0)

37) Při výpočtu směrnice tečny t na obrázku, budeme počítat:



a) parciální derivaci funkce $f(x, y)$ podle y v bodě $(0, 0)$

b) parciální derivaci funkce $f(x,y)$ podle x v bodě $(\pi, 2\pi)$ $\checkmark$

c) parciální derivaci funkce $f(x,y)$ podle x v bodě $(2\pi, \pi)$

d) parciální derivaci funkce $f(x,y)$ podle x v bodě (x_0, y_0) $\checkmark$

38) Definujeme - li totální diferenciál funkce $f(x,y)$ v bodě $(x_0,y_0) \in D_f$ předpokládáme, že funkce $f(x,y)$ má parciální derivace:

a) na $\mathcal{U}(x_0,y_0) \in D_f$ $\checkmark$

b) v bodě $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}$

c) f'_x a f'_y v bodě (x_0,y_0) spojité $\checkmark$

d) f'_x a f'_y v bodě (x_0,y_0) nespojité

39) Nechť funkce $f(x,y)$ má parciální derivace prvního řádu na $\mathcal{U}(x_0,y_0) \in D_f$ a nechť jsou f'_x a f'_y v bodě (x_0,y_0) spojité. Diferenciál funkce $f(x,y)$ na D_f v bodě (x_0,y_0) definujeme jako:

a) lineární funkci $df(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)dx + f'_y(x_0,y_0)dy$ dvou proměnných dx, dy $\checkmark$

b) lineární funkci $df(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)dx + f'_y(x_0,y_0)dy$ dvou proměnných x_0, y_0

c) lineární funkci $df(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)dx + f'_y(x_0,y_0)dy$ čtyř proměnných x_0, y_0, dx, dy

d) lineární funkci $df(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)dx + f'_y(x_0,y_0)dy$ dvou proměnných f'_x, f'_y

40) Je-li funkce $f(x,y)$ diferencovatelná v bodě (x_0,y_0), pak v bodě (x_0,y_0):

a) je spojitá $\checkmark$

b) není spojitá

c) má parciální derivace prvního řádu $\checkmark$

d) nemusí být spojitá

41) Vyberte správné tvrzení:

a) Je-li funkce $f(x,y)$ diferencovatelná v bodě $(x_0,y_0) \in D_f$, pak $\exists$ tečná rovina τ plochy $z = f(x,y)$ v bodě $T = (x_0,y_0)$

b) Je-li funkce $f(x,y)$ diferencovatelná v bodě $(x_0,y_0) \in D_f$, pak $\exists$ tečná rovina τ plochy $z = f(x,y)$ v bodě $T = (x_0,y_0,f(x_0,y_0))$, která není rovnoběžná s osou z $\surd$

c) Je-li funkce $f(x,y)$ diferencovatelná v bodě $(x_0,y_0) \in D_f$, pak $\exists$ tečná rovina τ plochy $z = f(x,y)$ v bodě $T = (x_0,y_0,f(x_0,y_0))$, která je rovnoběžná s osou z

d) Je-li funkce $f(x,y)$ diferencovatelná v bodě $(x_0,y_0) \in D_f$, pak $\exists$ tečná rovina τ plochy $z = f(x,y)$ v bodě $T = (x_0,y_0,f(x_0,y_0))$, která je rovnoběžná s rovinou (xy)

42) Nechť funkce $f(x,y)$ má obě parciální derivace f'_x a f'_y spojité v bodě $(x_0,y_0) \in D_f$. Rovnice tečny roviny τ plochy $z = f(x,y)$ v bodě $T = (x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ je dána vztahem:

a) $z(x,y) = f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)$

b) jako součet funkční hodnoty funkce $f(x,y)$ v bodě (x_0,y_0) a diferenciálu funkce $f(x,y)$ v bodě (x_0,y_0) $\surd$

c) $z(x,y) = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)$ $\surd$

d) ani jedna z uvedených možností

43) Která z následujících podmínek je postačující pro existenci totálního diferenciálu n-tého řádu funkce $f(x,y)$ v bodě (x_0,y_0) ?

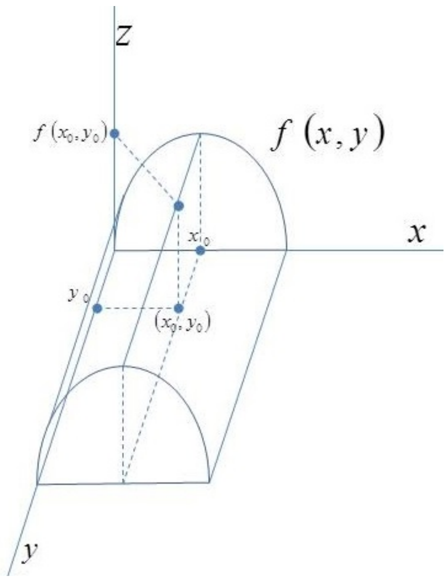
a) parciální derivace funkce $f(x,y)$ n-tého řádu jsou nespojité na $\mathcal{U}(x_0,y_0)$

b) $\exists$ parciální derivace n-tého řádu funkce $f(x,y)$ na $\mathcal{U}(x_0,y_0)$

c) $\exists$ parciální derivace n-tého řádu funkce $f(x,y)$ a jsou spojitá na $\mathcal{U}(x_0,y_0)$ $\surd$

d) ani jedna z uvedených možností

44) Pomocí obrázku určete, jakých hodnot bude nabývat diferenciál funkce $f(x, y)$ v bodě (x_0, y_0) pro bod (x_0, y_0), tj. $df(x_0, y_0)(x_0, y_0)$



a) $df(x_0, y_0)(x_0, y_0) < 0$

b) $df(x_0, y_0)(x_0, y_0) > 0$

c) $df(x_0, y_0)(x_0, y_0) = 0$ ✓

d) diferenciál nebude existovat

45) Kolik smíšených parciálních derivací 4. řádu může mít funkce 2 proměnných?

a) 16

b) 14 ✓

c) 8

d) 4

46) Předpokládejme, že funkce $f(x, y)$ má v bodě (x_0, y_0) spojité smíšené parciální derivace 2. řádu. Kolik různých parciálních derivací 2.řádu funkce $f(x, y)$ v bodě (x_0, y_0) můžeme najít?

a) 4

b) 3 √

c) 2 √

d) 1 √

47) Nechť je dána funkce $f(x, y) = y \sin x$. Jak bude vypadat její parciální derivace podle x?

a) $f'_x(x, y) = y \cos x$ √

b) $f'_x(x, y) = \cos x$

c) $f'_x(x, y) = \sin x$

d) ani jedna z možností

48) Kolik má funkce dvou proměnných parciálních derivací 4. řádu?

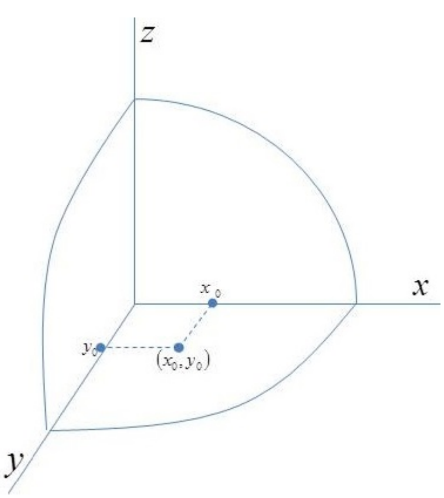
a) 8

b) 16 √

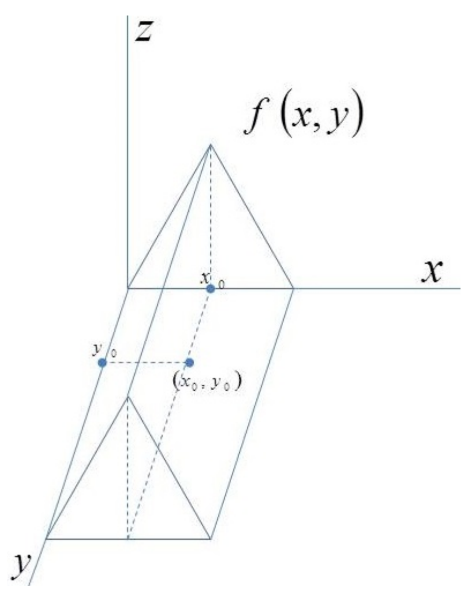
c) 4

d) 2

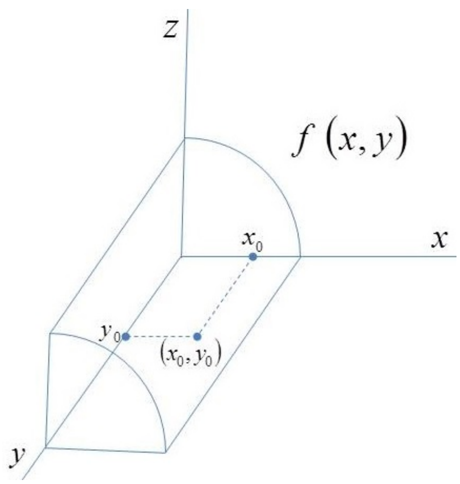
49) Na obrázcích jsou grafy funkcí dvou proměnných. Která z těchto funkcí nemá parciální derivaci v bodě (x_0, y_0) podle x?



a)



b) √

c) 

d) všechny funkce mají parciální derivaci v (x_0, y_0) podle x

50) Nechť je dána funkce $f(x, y) = y \sin x$. Jak bude vypadat její parciální derivace podle y?

a) $f'_y(x, y) = y \cos x$

b) $f'_y(x, y) = \cos x$

c) $f'_y(x, y) = \sin x$ ✓

d) $f'_y(x, y) = 0$

51) Nechť je dána funkce $f(x, y) = e^x \ln y$. Parciální derivace podle x je funkce $f'_x(x, y)$ daná předpisem:

a) $f'_x(x, y) = e^x \ln y$ ✓

b) $f'_x(x, y) = xe^x \ln y$

c) $f'_x(x, y) = \ln y$

d) $f'_x(x, y) = e^x \frac{1}{y}$

52) Nechť je dána funkce $f(x, y) = y^2 + 2^y e^x$. Jak bude vypadat její parciální derivace podle y?

a) $f'_y(x, y) = 2y + 2^y \ln 2 e^x$ ✓

b) $f'_y(x, y) = 2y + 2^y e^x$

c) $f'_y(x, y) = 2y + y 2^{y-1} e^x$

d) $f'_y(x,y) = y^2 + 2^y e^x$

53) Nechť je dána funkce $f(x,y) = x^y + 2$. Parciální derivací podle x funkce $f(x,y)$ dostaneme:

a) $f'_x(x,y) = yx^{y-1} + 2$

b) $f'_x(x,y) = yx^{y-1}$ $\surd$

c) $f'_x(x,y) = x^y \ln x$

d) $f'_x(x,y) = x^y \ln x + 2$

54) Nechť je dána funkce $f(x,y) = \cos(\frac{y}{x})$. Parciální derivace funkce $f(x,y)$ podle y dostaneme:

a) $f'_y(x,y) = -\sin(\frac{y}{x})$

b) $f'_y(x,y) = -\sin(\frac{y}{x})\frac{1}{x}$ $\surd$

c) $f'_y(x,y) = \sin(\frac{y}{x})\frac{1}{x}$

d) $f'_y(x,y) = -\sin(\frac{y}{x})\frac{xy-1}{x}$

55) Nechť je dána funkce $f(x,y) = y\sin x + y^2$. Budeme-li funkci $f(x,y)$ derivovat podle x a poté podle y dostaneme funkci $f''_{xy}(x,y)$ danou předpisem:

a) $f''_{xy}(x,y) = \cos x$ $\surd$

b) $f''_{xy}(x,y) = y\cos x + 2y$

c) $f''_{xy}(x,y) = \cos x + 2y$

d) $f''_{xy}(x,y) = -\cos x$

56) Nechť definiční obor funkce $f(x,y)$ je množina $D_f = \{(x,y) \in R^2, x^2+y^2 \leq 9\}$. Parciální derivaci funkce $f(x,y)$ podle x můžeme počítat v bodě:

a) $(0,0)$ $\surd$

b) $(1,0)$ $\surd$

c) $(4,0)$

d) $(3,0)$

57) Nechť definiční obor funkce $f(x,y)$ je množina $D_f = \{(x,y) \in R^2, 1 \leq x < 3, 0 \leq y < 4\}$. Parciální derivaci funkce $f(x,y)$ podle x můžeme počítat v bodě:

a) $(3,0)$

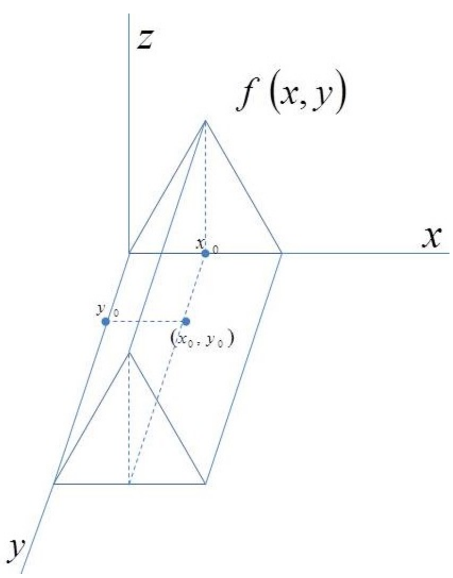
b) $(1,0)$

c) $(1,4)$

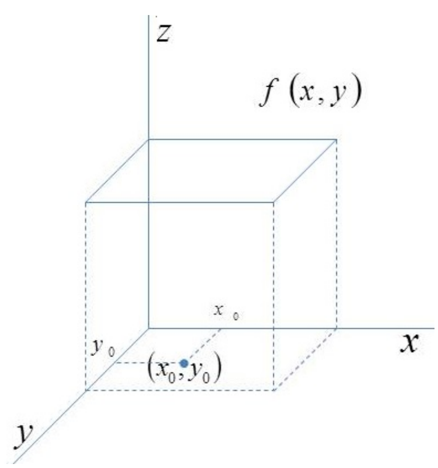
d) $(3,4)$

e) $(2,2)$ √

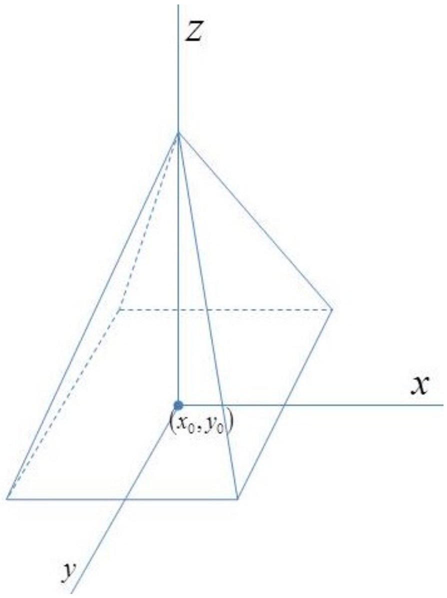
58) Na obrázcích jsou grafy funkcí dvou proměnných. Která z těchto funkcí má obě parciální derivace 1.řádu v bodě (x_0, y_0)?



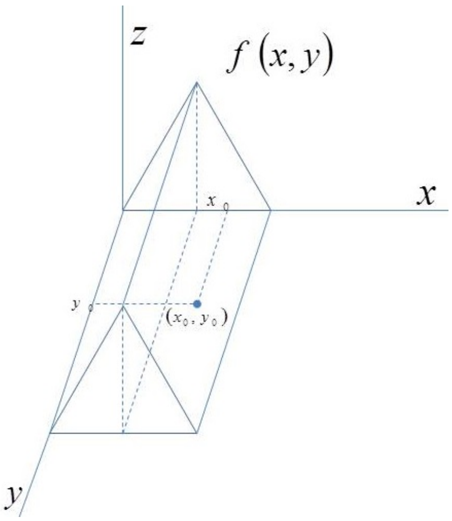
a)



b) √

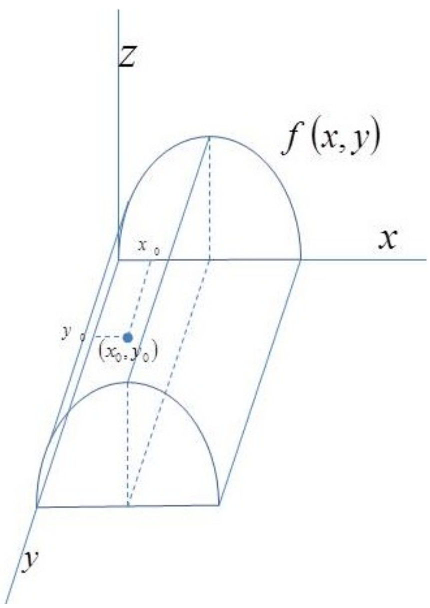


c)



d) √

59) Na obrázku je graf funkce $f(x, y)$. Které z následujících tvrzení je správné?



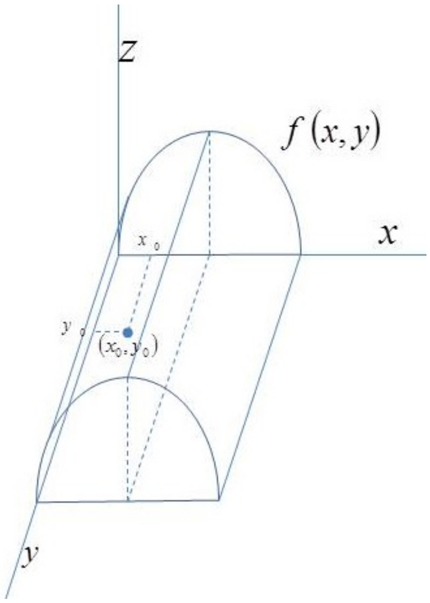
a) $f'_x(x_0, y_0) > 0$ √

b) $f'_x(x_0, y_0) < 0$

c) $f'_x(x_0, y_0) = 0$

d) parciální derivace v bodě (x_0, y_0) podle x neexistuje

60) Na obrázku je graf funkce $f(x, y)$. Které z následujících tvrzení je správné?



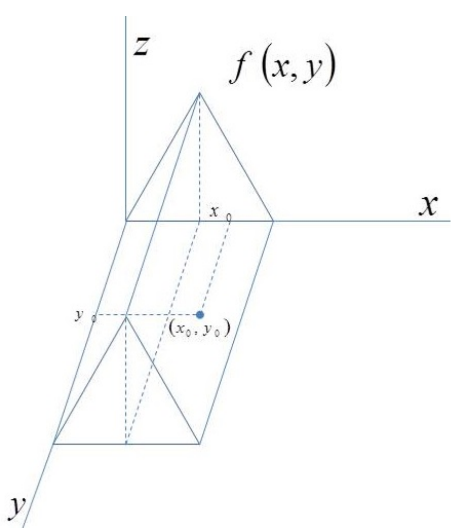
a) $f'_y(x_0, y_0) > 0$

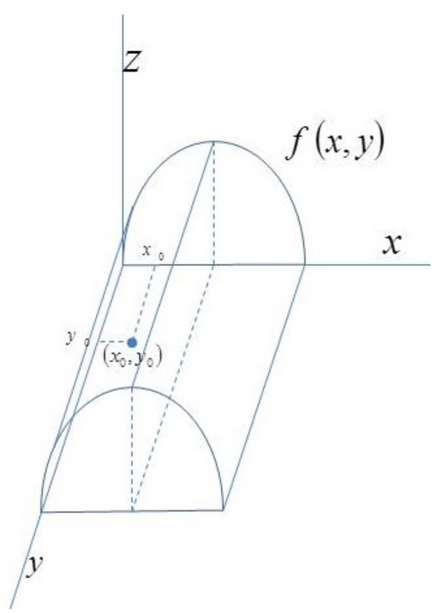
b) $f'_y(x_0, y_0) < 0$

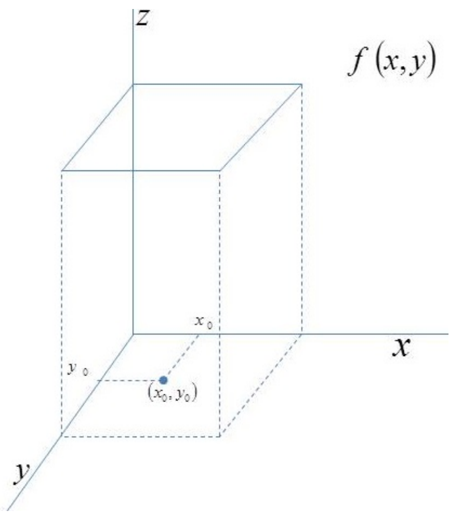
c) $f'_y(x_0, y_0) = 0$ √

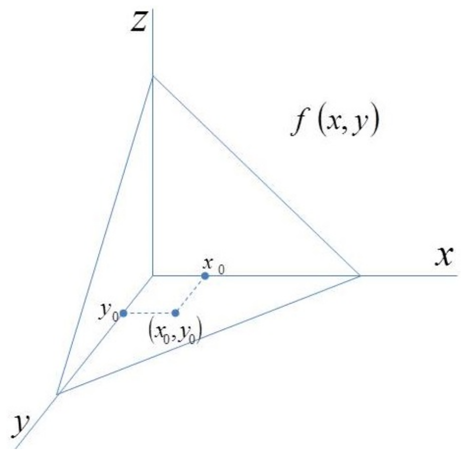
d) $f'_y(x_0, y_0)$ neexistuje

61) Na obrázcích jsou grafy funkcí dvou proměnných. Pro kterou z těchto funkcí platí $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$?

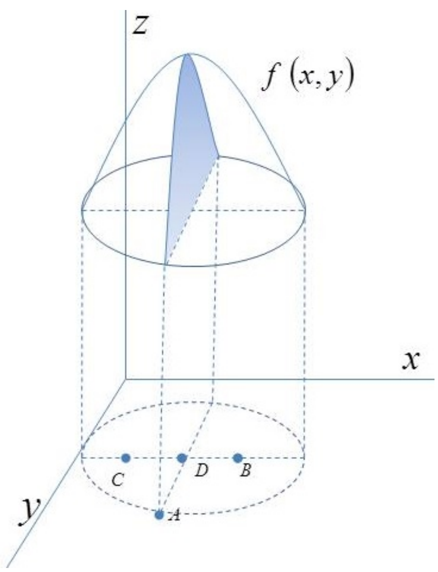
a) 

b) 

c) 

d) ✓ 

62) Nechť máme funkci $f(x, y)$ vyobrazenou na obrázku. Ve kterém bodě se parciální derivace funkce $f(x, y)$ podle x rovná 0?



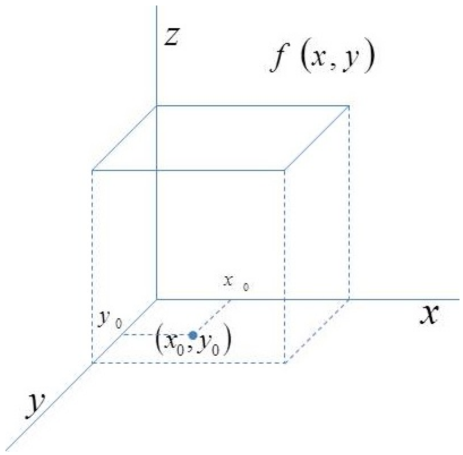
a) v bodě A

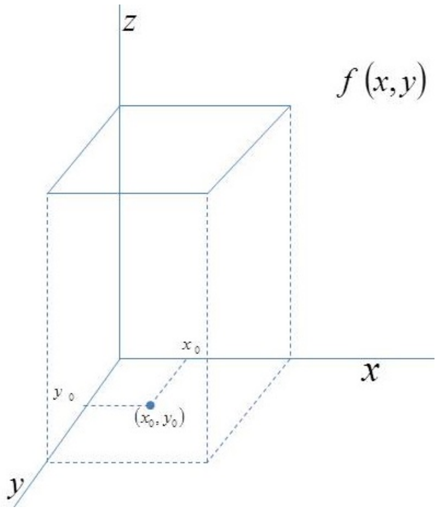
b) v bodě B

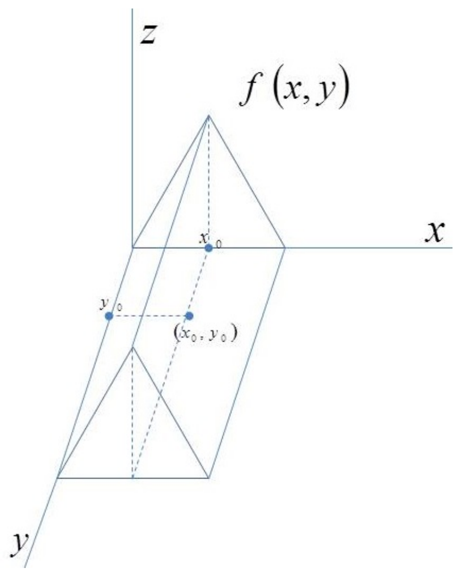
c) v bodě C

d) v bodě D ✓

63) Na obrázcích jsou grafy funkcí dvou proměnných. Pro kterou funkci platí, že její parciální derivace v bodě (x_0, y_0) podle y neexistuje?

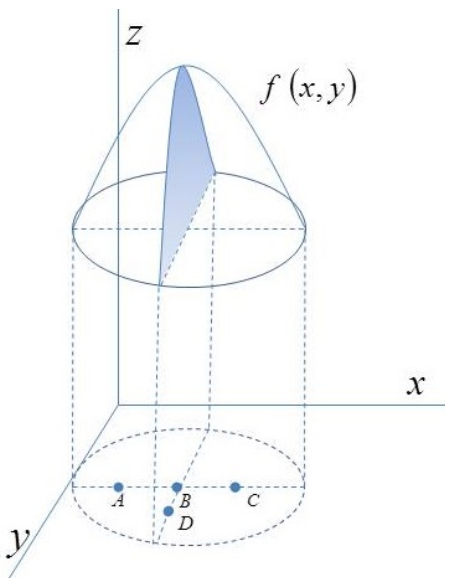
a) 

b) 

c) 

d) ani jedna z možností √

64) Nechť máme funkci $f(x, y)$, jejíž graf je zobrazený na obrázku. Ve kterém bodě se parciální derivace funkce $f(x, y)$ podle y rovná 0?



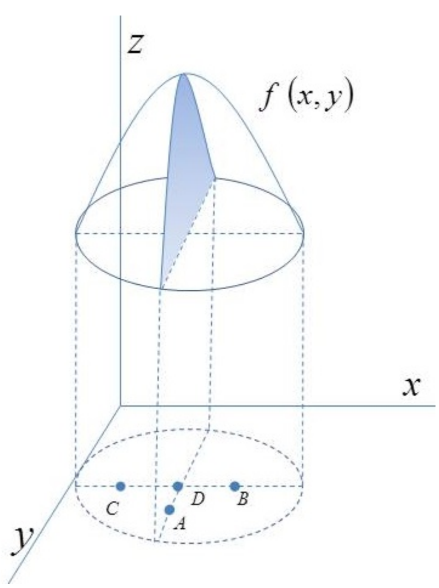
a) v bodě A $\surd$

b) v bodě B $\surd$

c) v bodě C $\surd$

d) v bodě D

65) Nechť máme funkci $f(x, y)$, jejíž graf je zobrazený na obrázku. Ve kterém bodě je parciální derivace funkce $f(x, y)$ podle y nenulová?



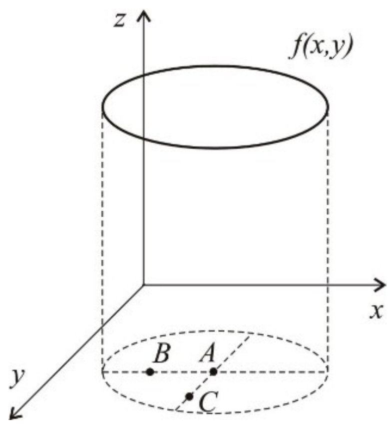
a) v bodě A $\surd$

b) v bodě B

c) v bodě C

d) v bodě D

66) Nechť máme funkci $f(x, y)$, jejíž graf je zobrazený na obrázku. Ve kterém bodě je parciální derivace funkce $f(x, y)$ podle y nenulová?



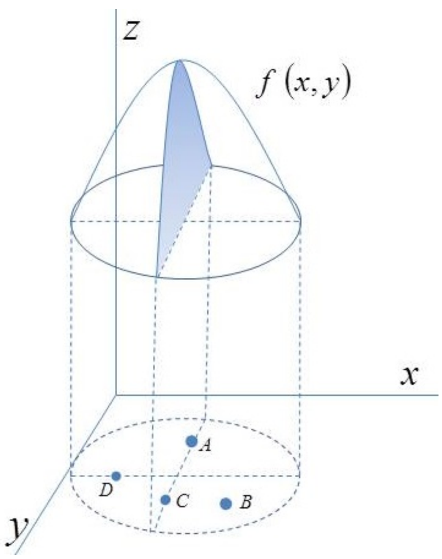
a) v bodě A

b) v bodě B

c) v bodě C

d) ani jedna z možností ✓

67) Nechť máme funkci $f(x, y)$, jejíž graf je zobrazený na obrázku. Ve kterém bodě se parciální derivace funkce $f(x, y)$ podle x nerovná 0?



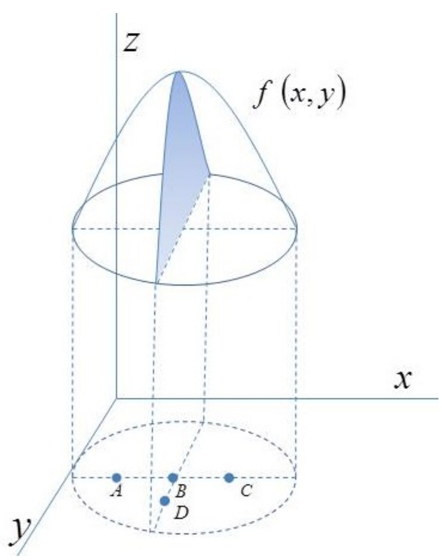
a) v bodě A

b) v bodě B $\surd$

c) v bodě C

d) v bodě D $\surd$

68) Nechť máme funkci $f(x, y)$, jejíž graf je zobrazený na obrázku. Ve kterém bodě je parciální derivace funkce $f(x, y)$ podle x kladná?



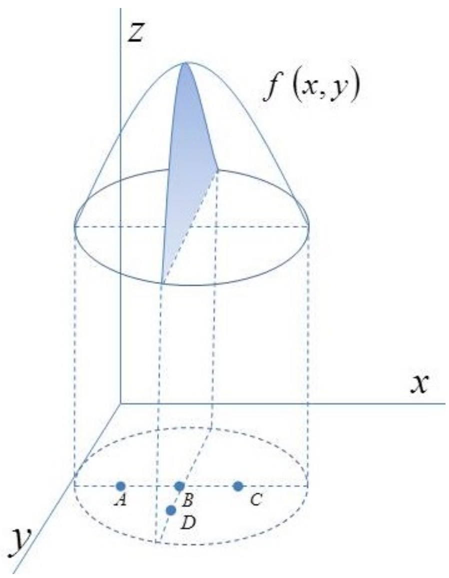
a) v bodě A $\surd$

b) v bodě B

c) v bodě C

d) v bodě D

69) Nechť máme funkci $f(x, y)$, jejíž graf je zobrazený na obrázku. Ve kterém bodě je parciální derivace funkce $f(x, y)$ podle x záporná?



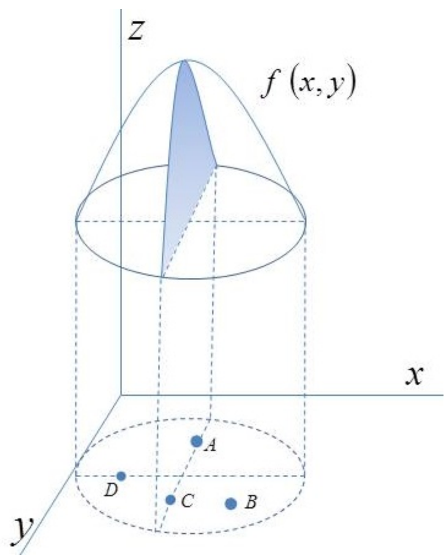
a) v bodě A

b) v bodě B

c) v bodě C ✓

d) v bodě D

70) Nechť máme funkci $f(x, y)$, jejíž graf je zobrazený na obrázku. Ve kterém bodě je parciální derivace funkce $f(x, y)$ podle y záporná?



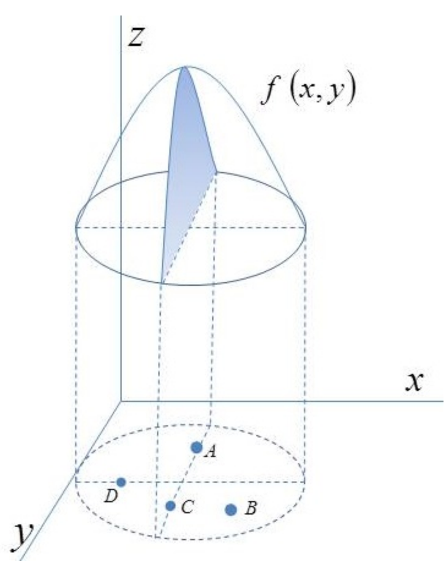
a) v bodě A

b) v bodě B ✓

c) v bodě C ✓

d) v bodě D

71) Nechť máme funkci $f(x, y)$, jejíž graf je zobrazený na obrázku. Ve kterém bodě je parciální derivace funkce $f(x, y)$ podle y kladná?



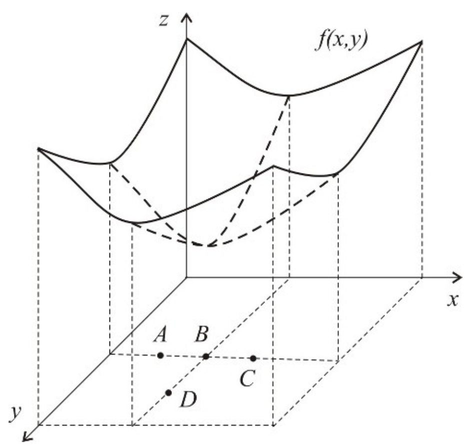
a) v bodě A ✓

b) v bodě B

c) v bodě C

d) v bodě D

72) Nechť máme funkci $f(x, y)$, jejíž graf je zobrazený na obrázku. Ve kterém bodě je parciální derivace funkce $f(x, y)$ podle x kladná?



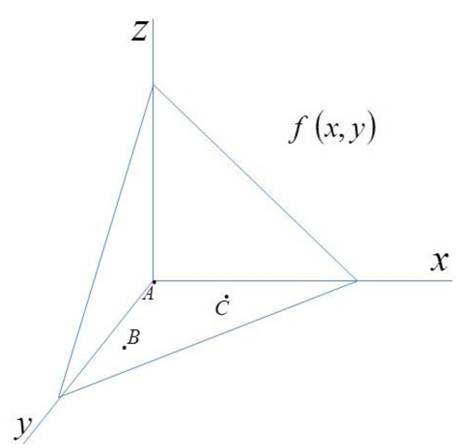
a) v bodě A

b) v bodě B

c) v bodě C ✓

d) v bodě D

73) Nechť máme funkci $f(x, y)$, jejíž graf je zobrazený na obrázku. Ve kterém bodě neexistuje parciální derivace funkce $f(x, y)$ podle x?



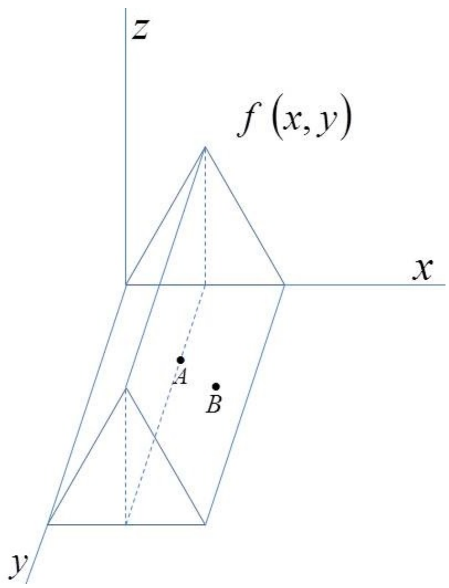
a) v bodě A ✓

b) v bodě B

c) v bodě C

d) ani jedna z možností

74) Nechť máme funkci $f(x, y)$, jejíž graf je zobrazený na obrázku. Které z následujících tvrzení je správné?



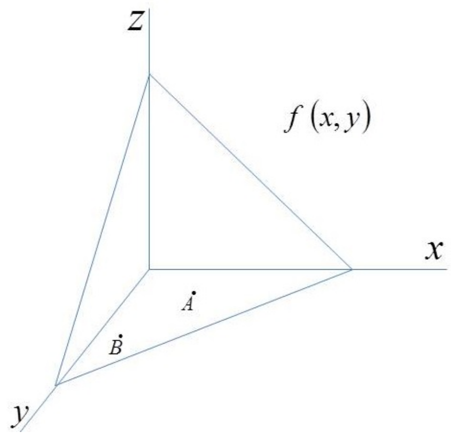
a) $f'_y(A) = 0$ ✓

b) $f'_y(B) = 0$ ✓

c) $f'_y(A)$ neexistuje

d) $f'_y(B) < 0$

75) Nechť máme funkci $f(x, y)$, jejíž graf je zobrazený na obrázku. Které z následujících tvrzení není správné?



a) $f'_y(A) < 0$

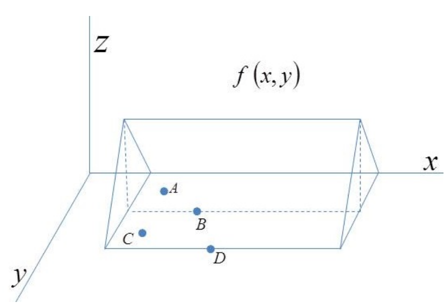
b) $f'_x(A) < 0$

c) $f'_x(B) < 0$

d) $f'_y(B) < 0$

e) ani jedna z možností $\surd$

76) Na obrázku je dán graf funkce $f(x, y)$. Ve kterém bodě neexistuje parciální derivace funkce $f(x, y)$ podle y?



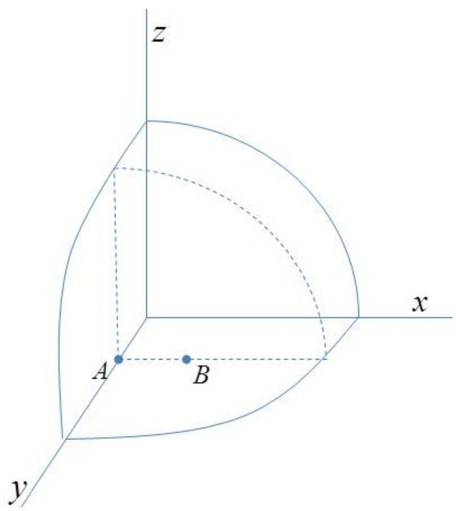
a) v bodě A

b) v bodě B $\surd$

c) v bodě C

d) v bodě D $\surd$

77) Na obrázku je graf funkce $f(x, y)$. Které z následujících tvrzení je správné?



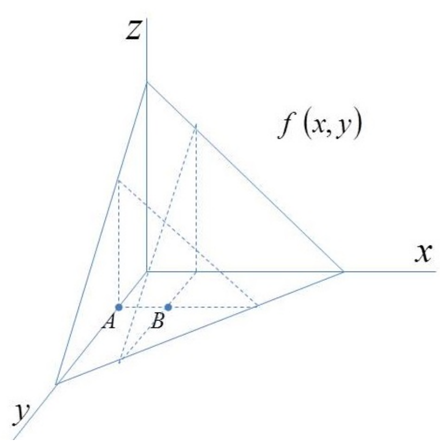
a) $f'_x(B) < 0$ √

b) $f'_x(A) = 0$

c) $f'_x(A)$ neexistuje √

d) $f'_x(B) > 0$

78) Na obrázku je graf funkce $f(x, y)$. Které z následujících tvrzení je správné?



a) $f'_x(B) < 0$ a $f'_y(B) < 0$ √

b) $f'_x(B) < 0$ a $f'_y(B) > 0$

c) $f'_x(A)$ ani $f'_y(A)$ neexistuj9 √

d) $f'_x(A) = 0$ a $f'_y(A)$ neexistuje

79) Nechť definiční obor funkce $f(x,y)$ je množina $D_f = \{(x,y) \in R^2, 0 \leq y \leq 3, y \leq 3-x, 0 \leq x \leq 3\}$. Parciální derivaci funkce $f(x,y)$ podle x můžeme počítat v bodě:

a) $(0,1)$

b) $(1,0)$

c) $(2,1)$

d) $(1,1)$ $\checkmark$

80) Nechť definiční obor funkce $f(x,y)$ je uzavřený trojúhelník s vrcholy v bodě $[0,0],[0,3],[4,0]$. Parciální derivaci funkce $f(x,y)$ podle x můžeme počítat v bodě:

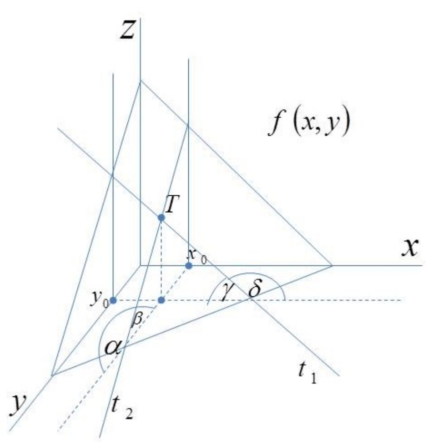
a) $(3,4)$

b) $(4,2)$

c) $(1,3)$

d) $(1,1)$ $\checkmark$

81) Nechť $f(x,y)$ je funkce, jejíž graf je znázorněn na obrázku. Spočítáme-li $f'_x\,(x_0,y_0)$, zjistíme:



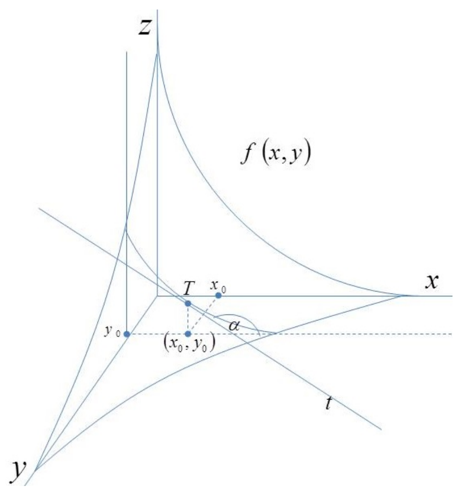
a) $\operatorname{tg}(\alpha)$

b) $\operatorname{tg}(\beta)$

c) $\mathrm{tg}\,(\gamma)$

d) $\mathrm{tg}\,(\delta)$ $\checkmark$

82) Na obrázku je zachycen graf funkce $f(x, y)$ a úhel α. Který z uvedených vztahů platí?



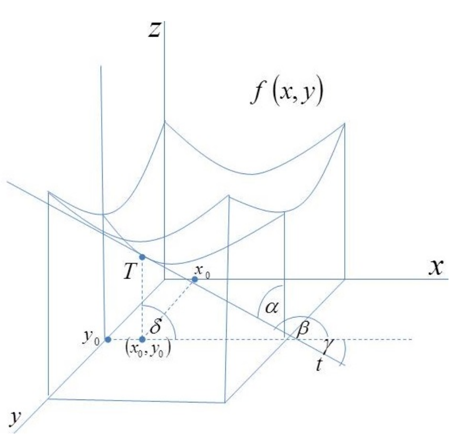
a) $\sin(\alpha) = f'_x(x_0, y_0)$

b) $\cos(\alpha) = f'_x(x_0, y_0)$

c) $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = f'_x(x_0, y_0)$ $\checkmark$

d) $\mathrm{tg}\,(\alpha) = f'_x(x_0, y_0)$ $\checkmark$

83) Nechť $f(x, y)$ je funkce, jejíž graf je znázorněn na obrázku. Spočítáme-li $f'_x(x_0, y_0)$, zjistíme:



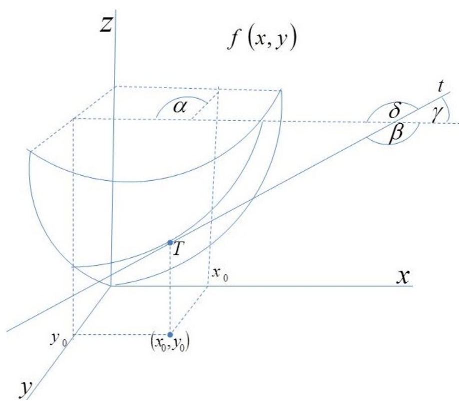
a) $\operatorname{tg}(\alpha)$

b) $\operatorname{tg}(\beta)$ ✓

c) $\operatorname{tg}(\gamma)$

d) $\operatorname{tg}(\delta)$

84) Nechť $f(x, y)$ je funkce, jejíž graf je znázorněn na obrázku. Spočítáme-li $f'_x(x_0, y_0)$, zjistíme:



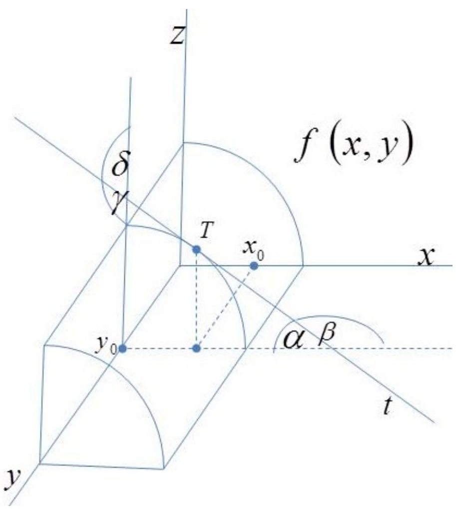
a) $\operatorname{tg}(\alpha)$

b) $\operatorname{tg}(\beta)$

c) $\operatorname{tg}(\gamma)$ ✓

d) $\operatorname{tg}(\delta)$

85) Chceme-li spočítat směrnici tečny t funkce $f(x, y)$ na obrázku, spočítáme:



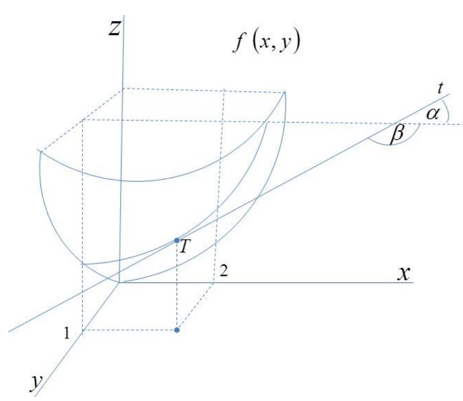
a) tg (α)

b) tg (β) √

c) tg (γ)

d) tg (δ)

86) Chceme-li spočítat směrnici tečny t funkce $f(x, y)$ na obrázku, spočítáme:



a) parciální derivaci funkce $f(x, y)$ podle x v bodě $(1, 2)$

b) parciální derivaci funkce $f(x, y)$ podle x v bodě $(2, 1)$ √

c) tg (β)

d) tg (α) √

87) Kolik má funkce dvou proměnných parciálních derivací 3.řádu?

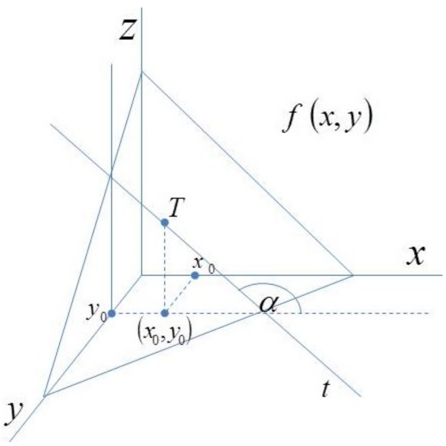
a) 8 ✓

b) 6

c) 4

d) 12

88) Na obrázku je zachycen graf funkce $f(x, y)$ a úhel α. Který z uvedených vztahů platí pro úhel α funkce $f(x, y)$?



a) $\sin(\alpha) = f'_x(x_0, y_0)$

b) $\cos(\alpha) = f'_x(x_0, y_0)$

c) $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = f'_x(x_0, y_0)$ ✓

d) ani jedna z uvedených možností

89) Předpokládejme, že funkce $f(x, y)$ má v bodě (x_0, y_0) spojité smíšené parciální derivace 2.řádu. Kolika různých parciálních derivací 2.řádu funkce $f(x, y)$ v bodě (x_0, y_0) mužeme maximálně najít?

a) 4

b) 3 ✓

c) 2

d) 1

90) Kolik různých parciálních derivací 2.řádu funkce $f(x, y)$ v bodě (x_0, y_0) můžeme najít?

a) 6

b) 5

c) 4 $\surd$

d) 3 $\surd$

91) Předpokládejme, že funkce $f(x, y)$ má v bodě (x_0, y_0) parciální derivace 2.řádu. Kolika různých parciálních derivací 2.řádu funkce $f(x, y)$ v bodě (x_0, y_0) mužeme maximálně najít?

a) 6

b) 4 $\surd$

c) 3

d) 2

92) Nechť je dána funkce $f(x, y) = \frac{x}{y} \ln(x)$. Jak bude vypadat její parciální derivace podle x?

a) $f'_x(x, y) = \frac{1}{y}\frac{1}{x}$

b) $f'_x(x, y) = \frac{1}{y} \ln(x) + \frac{1}{x}$

c) $f'_x(x, y) = \frac{1}{y} \ln(x) + \frac{1}{y}$ $\surd$

d) $f'_x(x, y) = \frac{1}{y} \ln(x) + \frac{1}{yx}$

93) Nechť definiční obor funkce $f(x, y)$ je množina $D_f = \{(x, y) \in R^2, y \leq x - 1, 1 \leq y < 4, 2 < x \leq 5\}$. Parciální derivaci funkce $f(x, y)$ podle x můžeme počítat v bodě:

a) $(3, 2)$

b) $(5, 2)$

c) $(4, 2)$ $\surd$

d) $(2,4)$

94) Nechť je dána funkce $f(x,y)=\ln(x-y)$. Budeme-li funkci $f(x,y)$ derivovat podle y a poté podle x dostaneme funkci $f''_{yx}(x,y)$ danou předpisem:

a) $f''_{yx}(x,y)=\frac{1}{(x-y)^2}$ $\surd$

b) $f''_{yx}(x,y)=\frac{-1}{(x-y)^2}$

c) $f''_{yx}(x,y)=\frac{-1}{(x-y)}$

d) $f''_{yx}(x,y)=\frac{1}{(x-y)}$

95) Kolik smíšených parciálních derivací 3. řádu může mít funkce 2 proměnných?

a) 8

b) 6 $\surd$

c) 4

d) 2

96) Nechť je dána funkce $f(x,y)=e^{x^2+\ln y}$. Jak bude vypadat její parciální derivace podle x?

a) $f'_x(x,y)=e^{x^2+\ln y}\frac{1}{y}$

b) $f'_x(x,y)=e^{x^2+\ln y}2x$ $\surd$

c) $f'_x(x,y)=e^{x^2+\ln y}(2x+\frac{1}{y})$

d) $f'_x(x,y)=e^{x^2+\ln y}$

97) Nechť je dána funkce $f(x,y)=e^{x^2+\ln y}$. Jak bude vypadat její parciální derivace podle y?

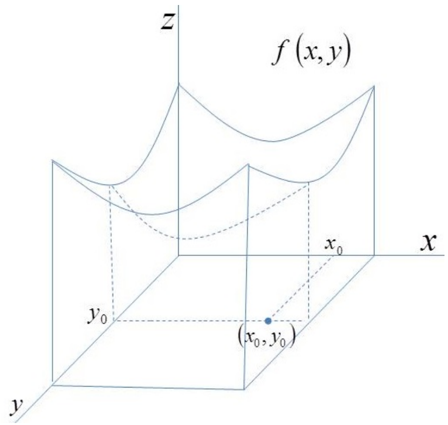
a) $f'_y(x,y)=e^{x^2+\ln y}\frac{1}{y}$ $\surd$

b) $f'_y(x,y)=e^{x^2+\ln y}2x$

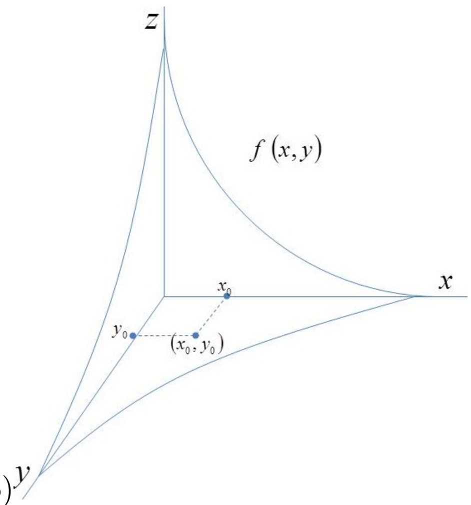
c) $f'_y(x,y)=e^{x^2+\ln y}(2x+\frac{1}{y})$

d) $f'_y(x,y) = e^{x^2+\ln y}$

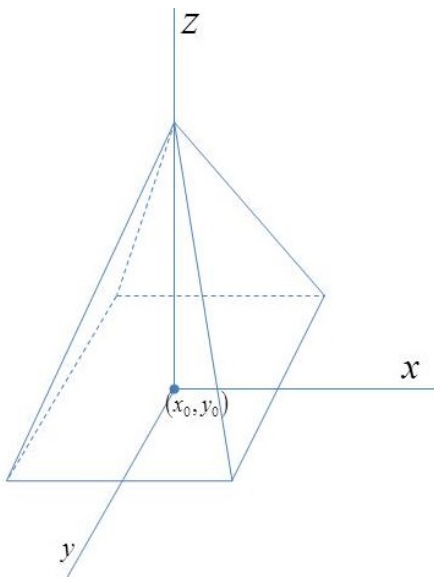
98) Na obrázcích jsou grafy funkcí dvou proměnných. Pro kterou funkci platí, že se její parciální derivace v bodě (x_0, y_0) podle x rovná 0 ?



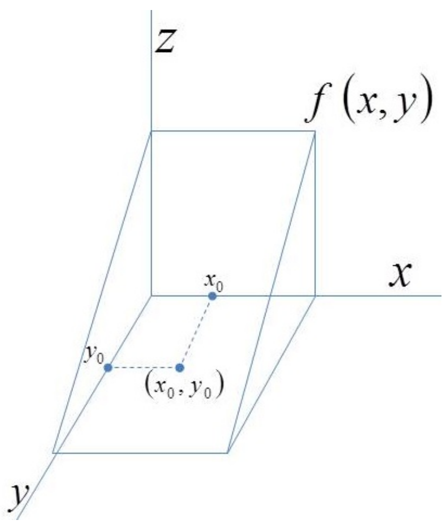
a)



b)

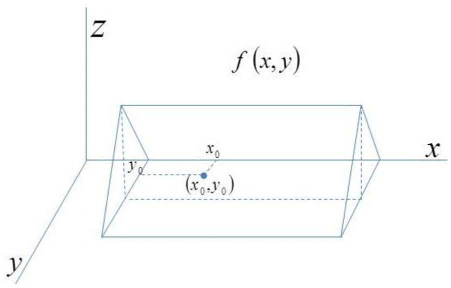


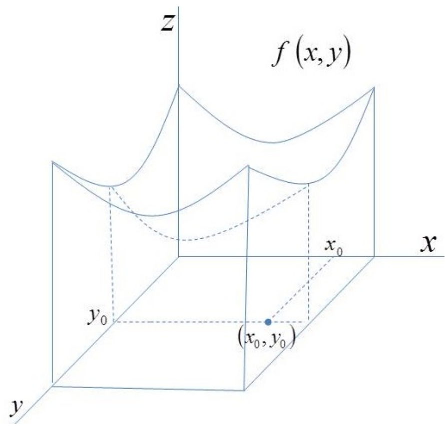
c)

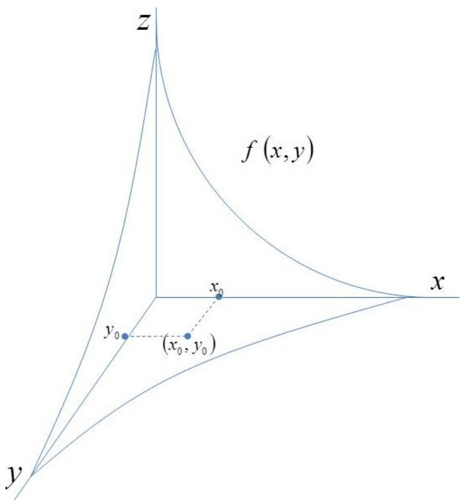


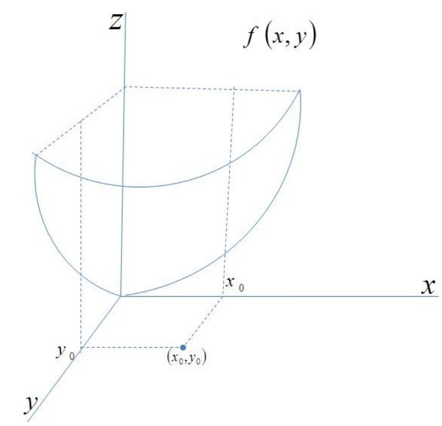
d) √

99) Na obrázcích jsou grafy funkcí dvou proměnných. Pro kterou z nich platí, že její parciální derivace v bodě (x_0, y_0) podle x je větší jak 0 ?

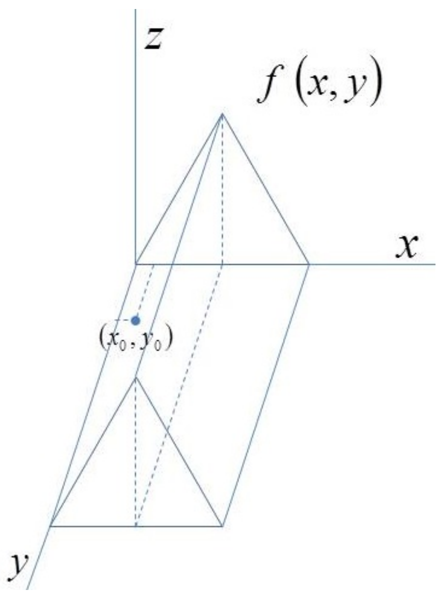
a) 

b) $\surd$ 

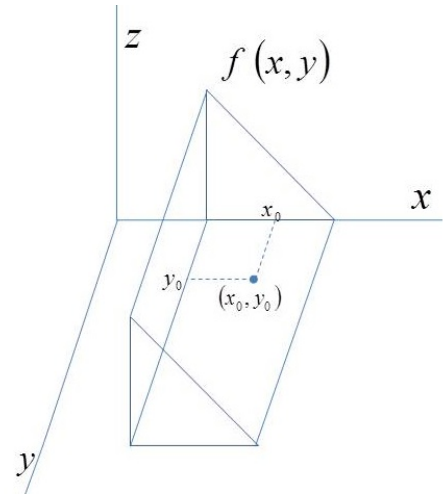
c) 

d) $\surd$ 

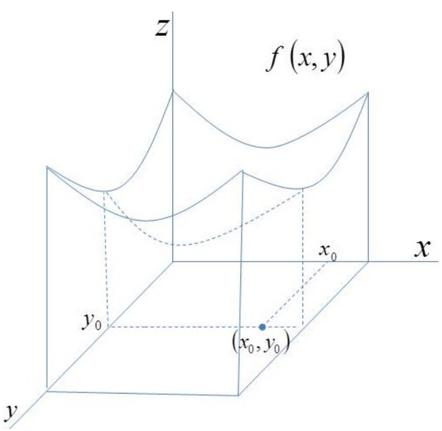
100) Na obrázcích jsou grafy funkcí dvou proměnných. Pro kterou z nich platí, že její parciální derivace v bodě (x_0, y_0) podle x je menší jak 0 ?



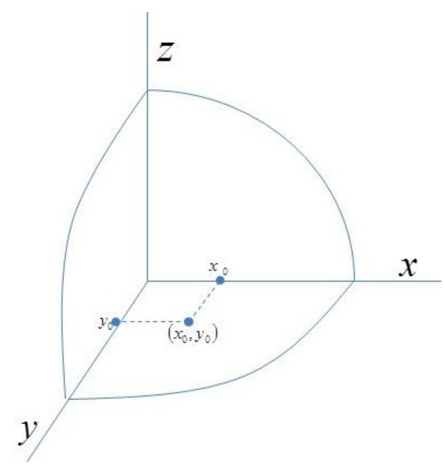
a)



b) √

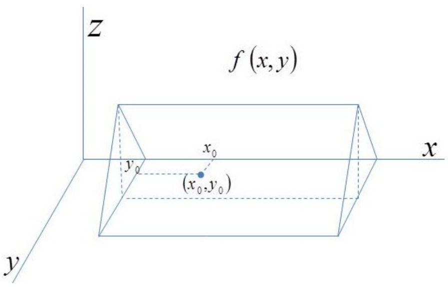


c)

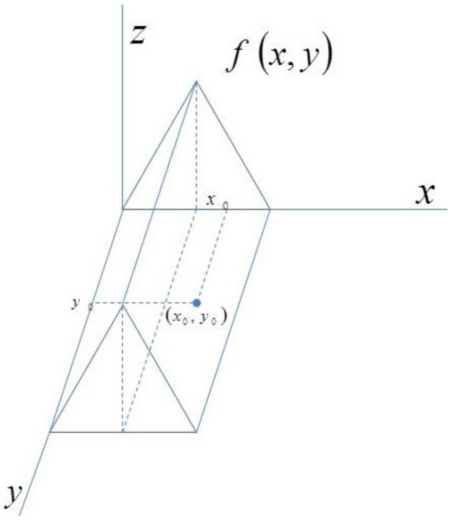


d) √

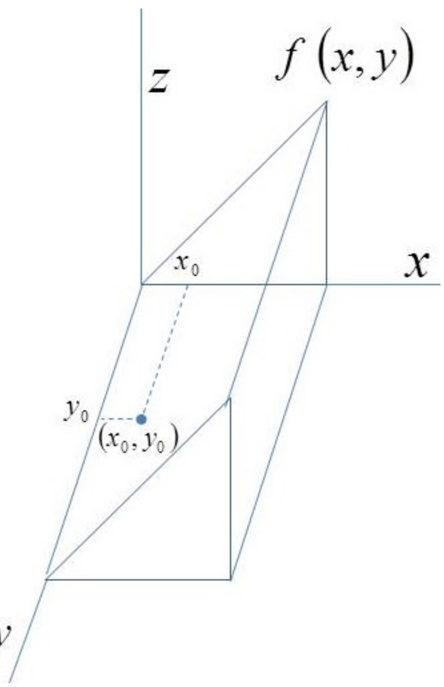
101) Na obrázcích jsou grafy funkcí dvou proměnných. Pro kterou z nich platí, že její parciální derivace v bodě (x_0, y_0) podle y je větší jak 0 ?



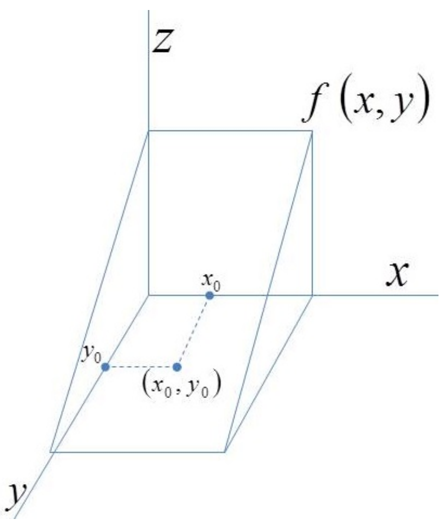
a) √



b)

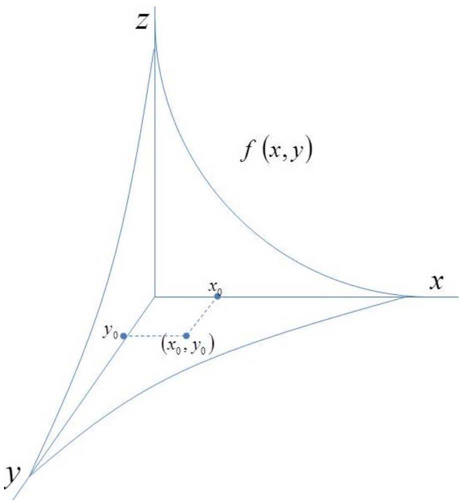


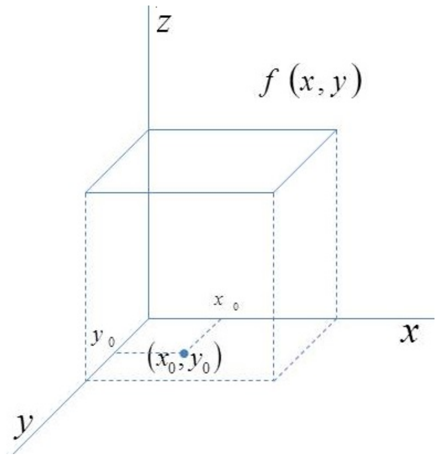
c)

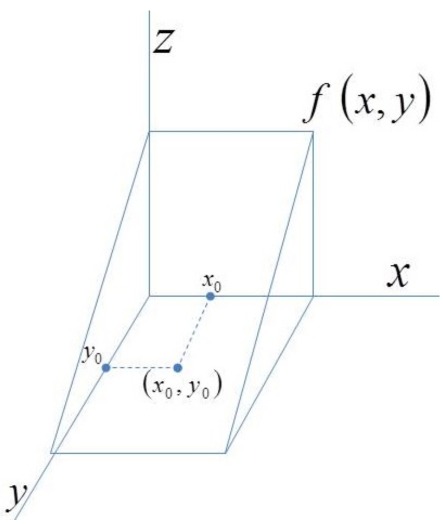


d)

102) Na obrázcích jsou grafy funkcí dvou proměnných. Pro kterou z nich platí, že její parciální derivace v bodě (x_0, y_0) podle y je menší jak 0 ?

a) √ 

b) 

c) √ 

d) ani jedna z uvedených možností

103) Vyberte správné tvrzení:

a) Jestliže funkce $f(x, y)$ je spojitá v bodě (x_0, y_0), existují vlastní parciální derivace 1. řádu v bodě (x_0, y_0).

b) Jestliže funkce $f(x, y)$ je spojitá v bodě (x_0, y_0), pak neexistují vlastní parciální derivace 1. řádu v bodě (x_0, y_0).

c) Jestliže funkce $f(x, y)$ má vlastní parciální derivace 1. řádu v bodě (x_0, y_0), tak není spojitá v bodě (x_0, y_0).

d) Jestliže funkce $f(x, y)$ má vlastní parciální derivace 1. řádu v bodě (x_0, y_0), tak může být spojitá v bodě (x_0, y_0).

104) Definujeme - li totální diferenciál funkce $f(x,y)$ v bodě $(x_0,y_0) \in D_f$ předpokládáme, že funkce $f(x,y)$ má parciální derivace:

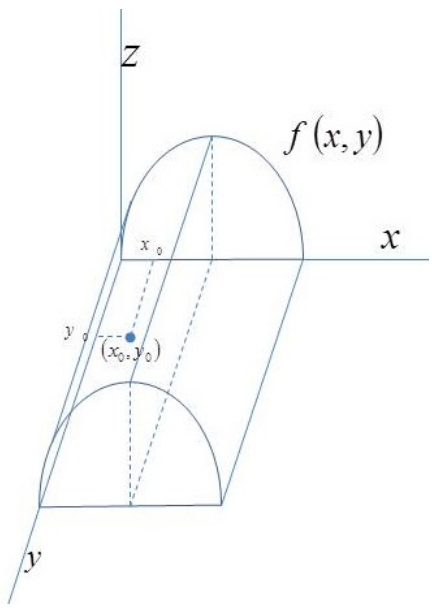
a) na $\mathcal{U}(x_0,y_0) \subset D_f$ $\surd$

b) v bodě $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}$

c) v bodě $(x_0,y_0) \in D'_f$

d) v bodě $(x_0,y_0) \in H_f$

105) Na obrázku je graf funkce $f(x,y)$. Které z následujících tvrzení je správné?



a) $f'_x(x_0,y_0) > 0$ $\surd$

b) $f'_x(x_0,y_0) < 0$

c) $f'_y(x_0,y_0) > 0$

d) $f'_y(x_0,y_0) = 0$ $\surd$

106) Nechť definiční obor funkce $f(x,y)$ je množina $D_f = \{(x,y) \in R^2; x^2 \leq 16 - y^2\}$. Parciální derivaci funkce $f(x,y)$ podle x nemůžeme počítat v bodě:

a) $(2,2)$

b) $(3,2)$

c) $(4, 0)$ ✓

d) $(1, 2)$

107) Nechť definiční obor funkce $f(x, y)$ je množina $D_f = \{(x, y) \in R^2; 0 \leq x \leq 4; 1 \leq y < 4, x + y \leq 4\}$. Parciální derivaci funkce $f(x, y)$ podle x můžeme počítat v bodě:

a) $(2, 1)$

b) $(1, 2)$ ✓

c) $(1, 3)$

d) $(2, 2)$

108) Nechť je dána funkce $f(x, y) = 2y\,\mathrm{tg}(x^2+2)$. Jak bude vypadat její parciální derivace podle x?

a) $f'_x(x, y) = \frac{4yx}{\cos^2(x^2+2)}$ ✓

b) $f'_x(x, y) = 2y\frac{1}{\cos^2(x^2+2)}$

c) $f'_x(x, y) = y\frac{1}{\cos^2(x^2+2)}$

d) $f'_x(x, y) = \frac{2x}{\cos^2(x^2+2)}$

109) Nechť je dána funkce $f(x, y) = 2y\,\mathrm{tg}(x^2 + 2)$. Budeme-li funkci $f(x, y)$ derivovat podle x a poté podle y dostaneme funkci $f''_{xy}(x, y)$ danou předpisem:

a) $f''_{xy}(x, y) = \frac{2}{\cos^2(x^2+2)}$

b) $f''_{xy}(x, y) = \frac{4x}{\cos^2(x^2+2)}$ ✓

c) $f''_{xy}(x, y) = \frac{xy}{\cos^2(x^2+2)}$

d) $f''_{xy}(x, y) = \frac{x}{\cos^2(x^2+2)}$

110) Nechť definiční obor funkce $f(x, y)$ je množina $D_f = \{(x, y) \in R^2; x^2 + (y-2)^2 \leq 4\}$. Parciální derivaci funkce $f(x, y)$ podle x můžeme počítat v bodě:

a) $(2, 4)$

b) $(2, 0)$

c) $(2, 1)$

d) $(1, 2)$ $\checkmark$

111) Parciální derivaci funkce $f(x, y)$ v bodě (x_0, y_0) podle y značíme:

a) $f'_y(x_0, y_0)$ $\checkmark$

b) $f'_y(x, y)$

c) $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$

d) $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ $\checkmark$

112) Parciální derivaci funkce $f(x, y)$ v bodě (x_0, y_0) podle x značíme:

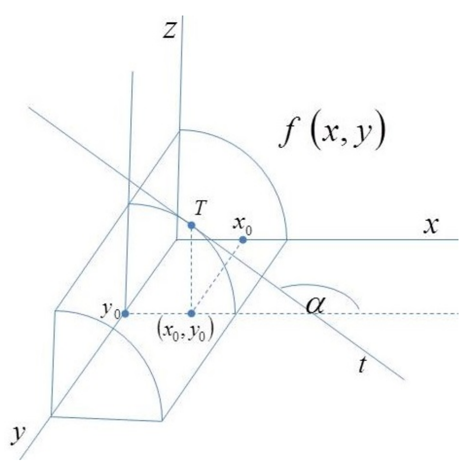
a) $f'_y(x_0, y_0)$

a) $f'_x(x, y)$

c) $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ $\checkmark$

d) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$

113) Na obrázku je zachycen graf funkce $f(x, y)$ a úhel α. Který z uvedených vztahů platí?



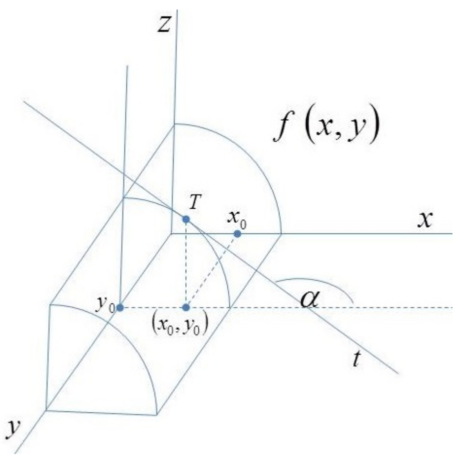
a) $\mathrm{tg}\,(\alpha) = f'_y(x_0, y_0)$

b) $\mathrm{tg}\,(\alpha) = f'_x(x, y)$

c) $\operatorname{tg}(\alpha) = f'_x(x_0, y_0)$ ✓

d) $\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ ✓

114) Na obrázku je zachycen graf funkce $f(x, y)$ a úhel α. Který z uvedených vztahů platí?



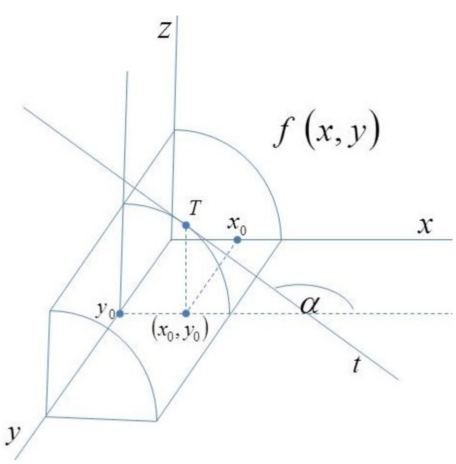
a) $\operatorname{tg}(\alpha) = f'_y(x_0, y_0)$

b) $\operatorname{tg}(\alpha) = f'_x(x, y)$

c) $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = f'_x(x_0, y_0)$ ✓

d) $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = f'_x(x_0, y_0)$

115) Nechť na obrázku je graf funkce $f(x, y)$. Které z tvrzení je pravdivé?



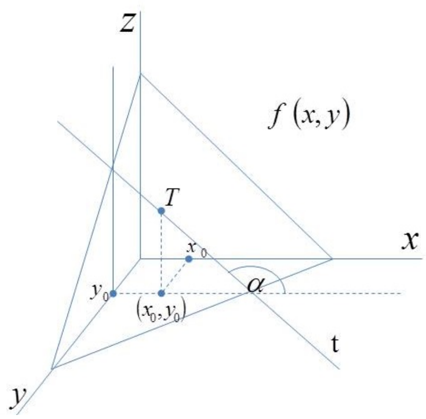
a) $f'_x(x_0, y_0) = \operatorname{tg}(\alpha)$ ✓

b) $f'_y(x_0, y_0) = \mathrm{tg}\,(\alpha)$

c) $f'_y(x_0, y_0) = 0$ ✓

d) $f'_x(x_0, y_0) = 0$

116) Nechť na obrázku je graf funkce $f(x, y)$. Které z uvedených tvrzení je pravdivé?



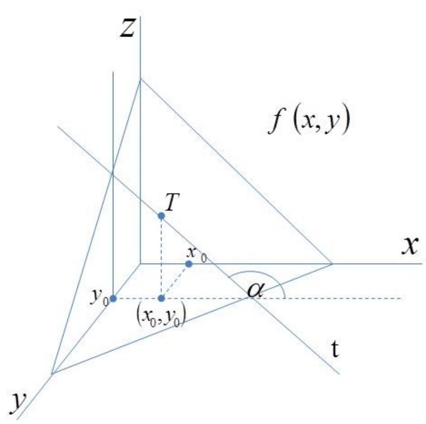
a) $f'_x(x_0, y_0) = \cos(\alpha)$

b) $f'_x(x_0, y_0)$ neexistuje

c) $f'_x(x_0, y_0) = 0$

d) $f'_x(x_0, y_0) = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ ✓

117) Nechť na obrázku je graf funkce $f(x, y)$. Které z uvedených tvrzení je pravdivé?



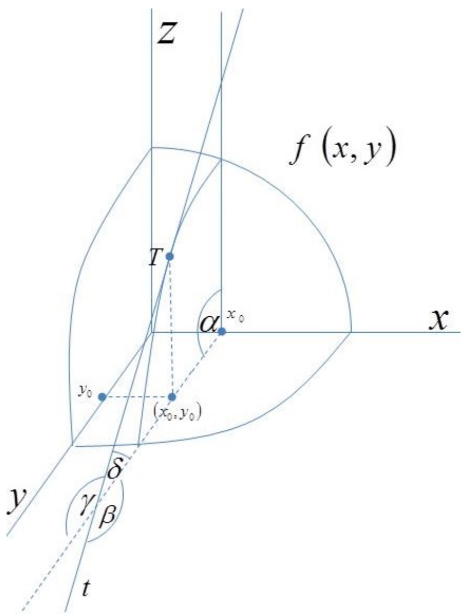
a) $f'_x(x_0, y_0) > 0$

b) $f'_x(x_0, y_0) = \sin(\alpha)$

c) $f'_y(x_0, y_0) = \mathrm{tg}(\alpha)$

d) $f'_y(x_0, y_0) < 0$ ✓

118) Nechť na obrázku je graf funkce $f(x, y)$. Který z uvedených vztahů platí?



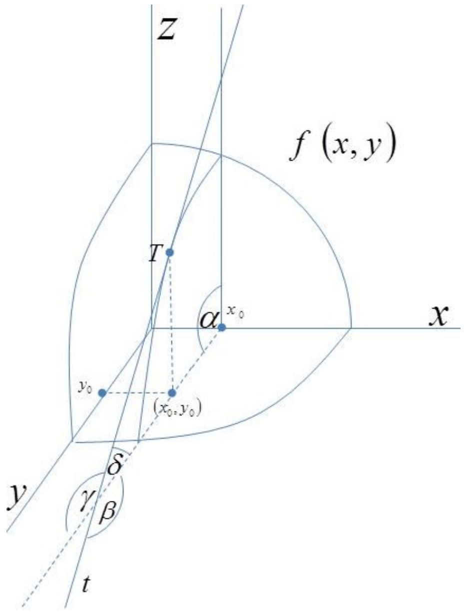
a) $f'_y(x_0, y_0) > 0$

b) $f'_y(x_0, y_0) < 0$ ✓

c) $f'_x(x_0, y_0)$ neexistuje

d) $f'_x(x_0, y_0) = \mathrm{tg}(\gamma)$

119) Nechť na obrázku je graf funkce $f(x, y)$. Který z uvedených vztahů platí?



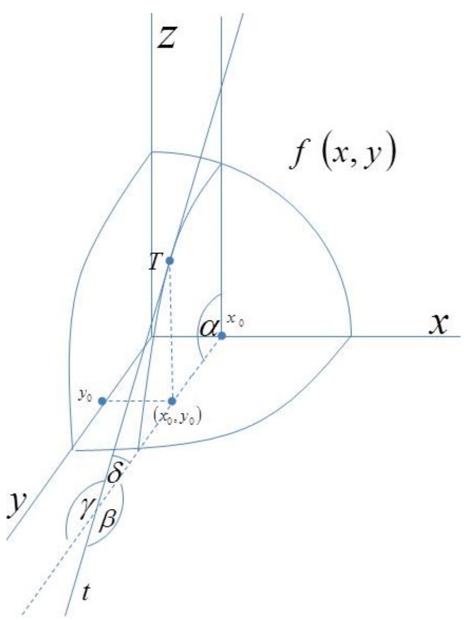
a) $f'_y(x_0, y_0) = \mathrm{tg}\,(\gamma)$ $\surd$

b) $f'_y(x, y) = \frac{\sin\beta}{\cos\beta}$

c) $f'_y(x_0, y_0) = \frac{\sin\beta}{\cos\gamma}$ $\surd$

d) $f'_y(x, y) = \mathrm{tg}\,(\gamma)$

120) Nechť na obrázku je graf funkce $f(x, y)$. Který z uvedených vztahů neplatí?



a) $f'_x(x_0, y_0) < 0$

b) $f'_x(x_0, y_0)$ neexistuje $\surd$

c) $f'_y(x_0, y_0) = \operatorname{tg}(\beta)$

d) $f'_y(x_0, y_0) < 0$

121) Chceme-li spočítat směrovou derivaci funkce $f(x, y)$ v bodě (x_0, y_0) ve směru orientované přímky l pomocí parciálních derivací 1. řádu v bodě (x_0, y_0), pak platí:

a) ani jedna z uvedených možností

b) $\frac{\partial f}{\partial l}(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\sin(\alpha) + f'_y(x_0, y_0)\cos(\alpha)$, kde α je úhel, který svírá přímka l s kladným směrem osy x

c) $\frac{\partial f}{\partial l}(x_0, y_0) = f'_x(x, y)\cos(\alpha) + f'_y(x, y)\sin(\alpha)$, kde α je úhel, který svírá přímka l s kladným směrem osy x

d) $\frac{\partial f}{\partial l}(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\cos(\alpha) + f'_y(x_0, y_0)\sin(\alpha)$, kde α je úhel, který svírá přímka l s kladným směrem osy x $\surd$

122) Chceme-li spočítat směrovou derivaci funkce $f(x, y)$ v bodě (x_0, y_0) ve směru orientované přímky l pomocí parciálních derivací 1. řádu v bodě (x_0, y_0), pak platí:

a) ani jedna z uvedených možností

b) $\frac{\partial f}{\partial l}(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\sin(\alpha) + f'_y(x_0, y_0)\cos(\alpha)$, kde α je úhel, který svírá přímka l s kladným směrem osy x

c) $\frac{\partial f}{\partial l}(x_0, y_0) = f'_x(x, y)\cos(\alpha) + f'_y(x, y)\sin(\alpha)$, kde α je úhel, který svírá přímka l s kladným směrem osy x

d) $\frac{\partial f}{\partial l}(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\cos(-\alpha) + f'_y(x_0, y_0)\cos(\alpha)\operatorname{tg}(\alpha)$, kde α je úhel, který svírá přímka l s kladným směrem osy x $\surd$

123) Chceme-li spočítat směrovou derivaci funkce $f(x, y)$ v bodě (x_0, y_0) ve směru orientované přímky l pomocí parciálních derivací 1. řádu v bodě (x_0, y_0), pak platí:

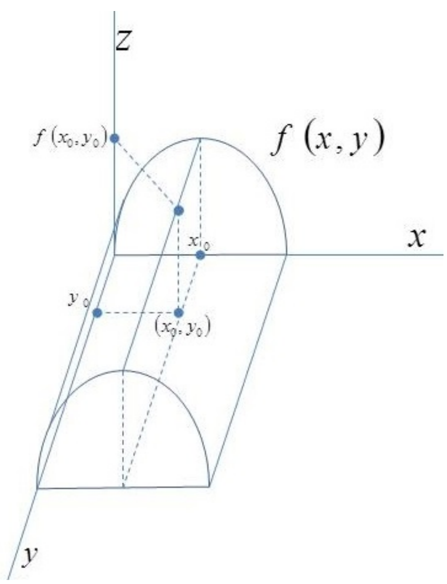
a) ani jedna z uvedených možností

b) $\frac{\partial f}{\partial l}(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\cos(\alpha) + f'_y(x_0, y_0)\cos(-\alpha)$, kde α je úhel, který svírá přímka l s kladným směrem osy x

c) $\frac{\partial f}{\partial l}(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\cos(-\alpha) + f'_y(x_0, y_0)\sin(\alpha)$, kde α je úhel, který svírá přímka l s kladným směrem osy x $\surd$

d) $\frac{\partial f}{\partial l}(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\cos(-\alpha) + f'_y(x_0, y_0)\cos(\alpha)\,\mathrm{tg}(\alpha)$, kde α je úhel, který svírá přímka l s kladným směrem osy x $\surd$

124) Na obrázku je graf funkce $f(x, y)$. Které z následujících tvrzení je správné?



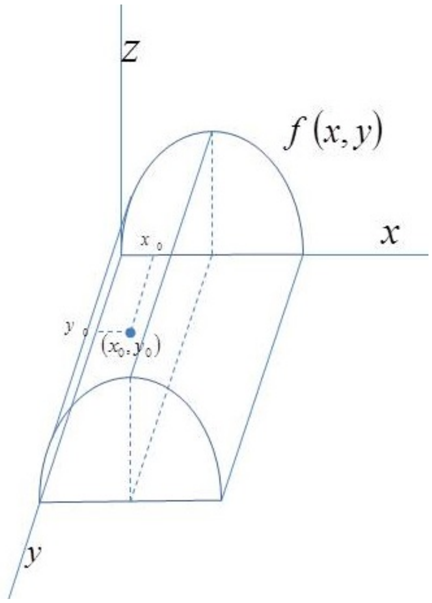
a) $f'_x(x_0, y_0)$ neexistuje

b) $f'_x(x_0, y_0) > 0$

c) $f'_y(x_0, y_0) < 0$

d) $f'_y(x_0, y_0) = 0$ $\surd$

125) Na obrázku je graf funkce $f(x, y)$. Které z následujících tvrzení je správné?



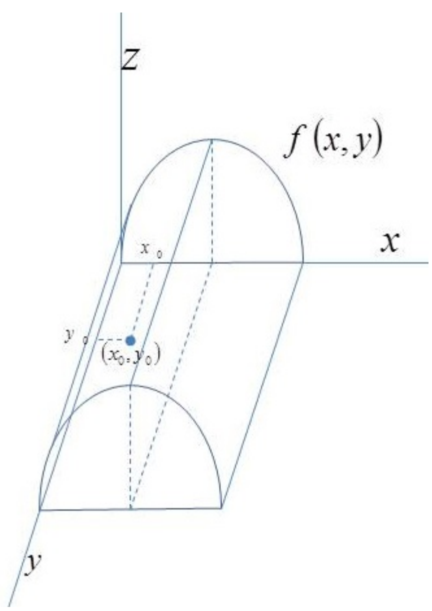
a) $f'_x(x_0, y_0) < 0$

b) $f'_y(x_0, y_0) > 0$

c) $f'_x(x_0, y_0) = 0$

d) ani jedna z možností není správná $\surd$

126) Na obrázku je graf funkce $f(x, y)$. Které z následujících tvrzení je správné?



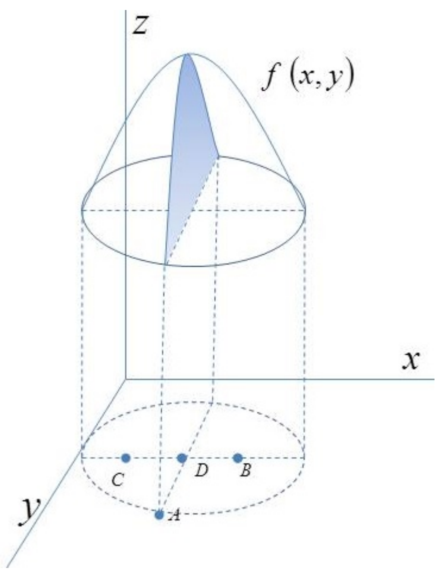
a) $f'_x(x_0, y_0) > 0$ $\surd$

b) $f'_x(x_0, y_0) < 0$

c) $f'_y(x_0, y_0)$ neexistuje

d) $f'_y(x_0, y_0) = 0$ $\surd$

127) Na obrázku je graf funkce $f(x, y)$. Které z následujících tvrzení je nesprávné?



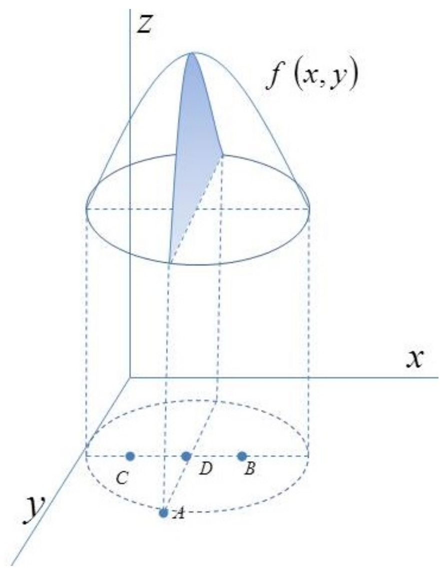
a) $f'_x(A) = 0$ $\surd$

b) $f'_x(D)$ neexistuje $\surd$

c) $f'_x(C) > 0$

d) $f'_x(B) < 0$

128) Na obrázku je graf funkce $f(x, y)$. Které z následujících tvrzení je správné?



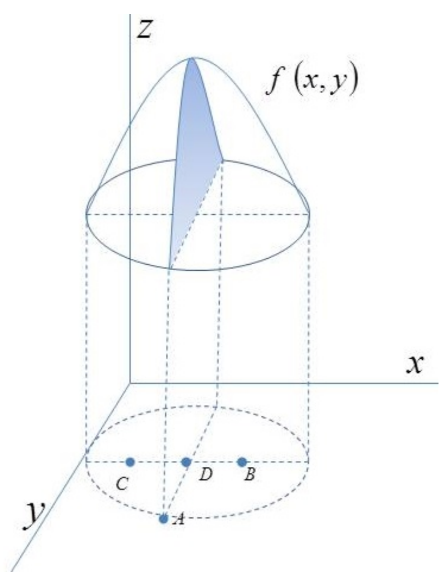
a) $f'_y(A) < 0$

b) $f'_y(D)$ neexistuje

c) $f'_y(D) = 0$ $\checkmark$

d) $f'_y(B) > 0$

129) Na obrázku je graf funkce $f(x, y)$. Které z následujících tvrzení je správné?



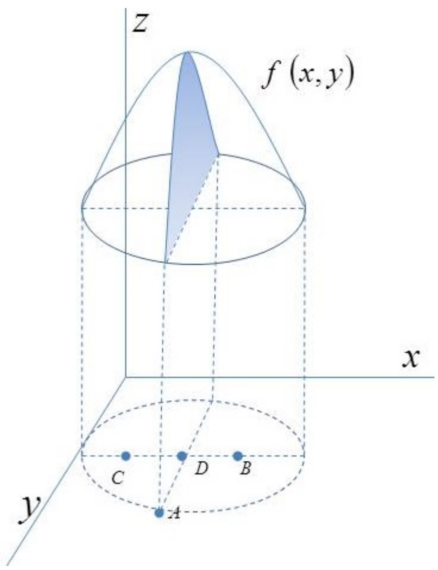
a) $f'_x(C) < 0$

b) $f'_x(B) < 0$ $\checkmark$

c) $f'_y(B) > 0$

d) $f'_y(A) = 0$

130) Na obrázku je graf funkce $f(x, y)$. Který z následujících vztahů platí pro funkci $f(x, y)$?



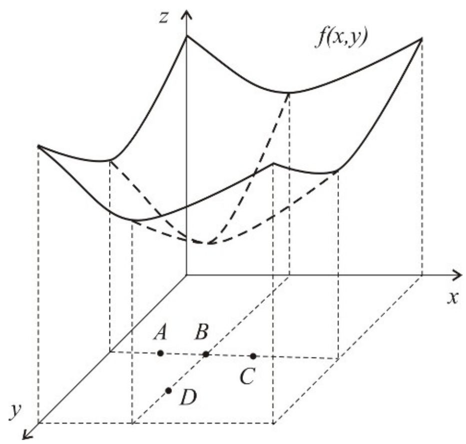
a) $f'_y(C) = f'_y(B)$ √

b) $f'_x(A) = f'_x(C)$

c) $f'_y(B) = f'_y(A)$

d) $f'_y(C) = f'_x(A)$

131) Na obrázku je graf funkce $f(x, y)$. Které z následujících tvrzení je nesprávné?



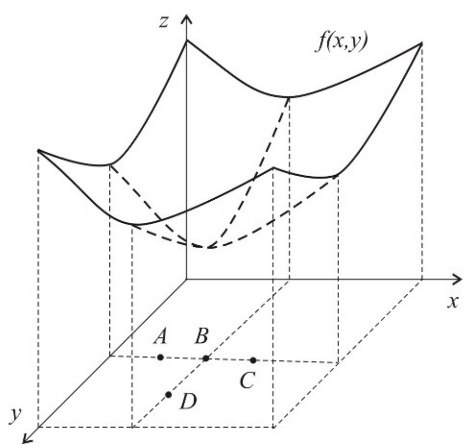
a) $f'_x(D) > 0$

b) $f'_x(C) > 0$

c) $f'_x(A) < 0$

d) $f'_x(B)$ neexistuje √

132) Na obrázku je graf funkce $f(x, y)$. Které z následujících tvrzení je správné?



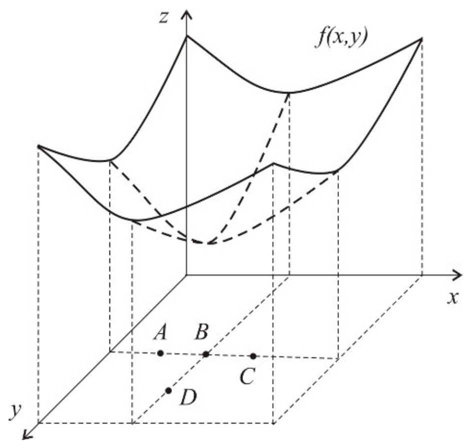
a) $f'_x(C) < 0$

b) $f'_y(A) > 0$

c) $f'_y(C) = f'_x(D)$ √

d) $f'_y(B)$ neexistuje

133) Na obrázku je graf funkce $f(x, y)$. Který z následujících vztahů platí pro funkci $f(x, y)$?



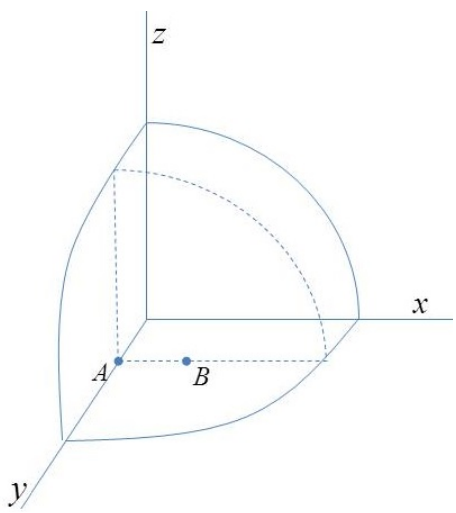
a) $f'_x(B) = f'_y(B)$ ✓

b) $f'_y(A) = f'_x(D)$ ✓

c) $f'_y(A) = f'_y(D)$

d) ani jedna z možností neplatí

134) Na obrázku je graf funkce $f(x, y)$. Které z následujících tvrzení je správné?



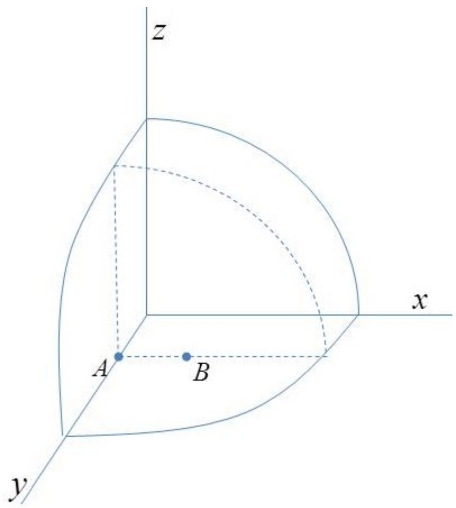
a) $f'_y(A) = 0$

b) $f'_y(A) = f'_y(B)$

c) $f'_y(A)$ neexistuje ✓

d) $f'_y(B) = 0$

135) Na obrázku je graf funkce $f(x,y)$. Které z následujících tvrzení je správné?



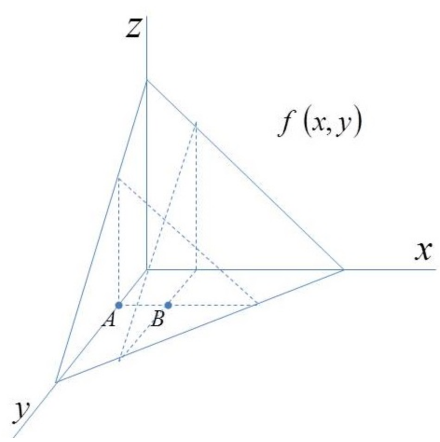
a) $f'_y(A) = f'_x(B)$

b) $f'_y(B) = f'_x(B)$ ✓

c) $f'_x(B) > 0$

d) $f'_y(B) < 0$ ✓

136) Na obrázku je graf funkce $f(x,y)$. Které z následujících tvrzení je správné?



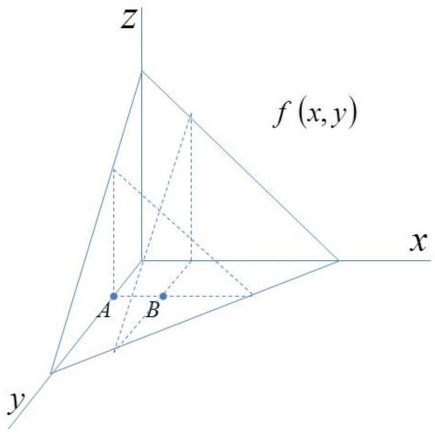
a) $f'_y(A) = 0$

b) $f'_y(A) = f'_y(B)$

c) $f'_y(B) = 0$

d) $f'_y(B) < 0$ ✓

137) Na obrázku je graf funkce $f(x, y)$. Které z následujících tvrzení je správné?



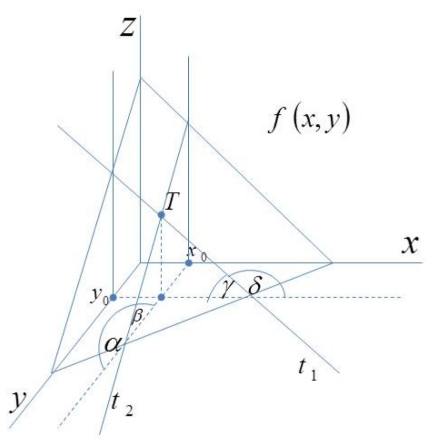
a) $f'_x(B) < 0$ $\checkmark$

b) $f'_x(B) = 0$

c) $f'_y(A) = 0$

d) $f'_y(B) < 0$ $\checkmark$

138) Nechť $f(x, y)$ je funkce, jejíž graf je znázorněn na obrázku. Spočítáme-li $f'_x\ (x_0, y_0)$, zjistíme:



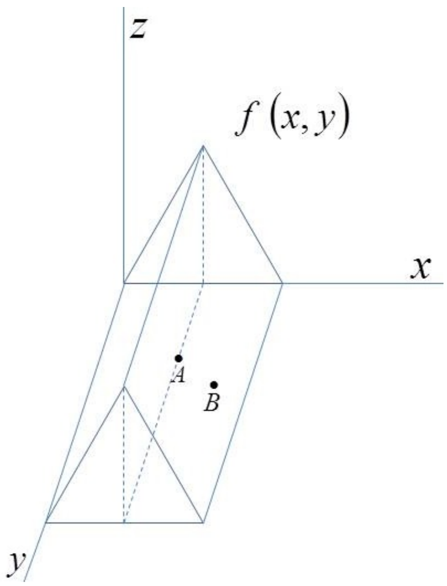
a) $\frac{\sin\delta}{\cos\delta}$ $\checkmark$

b) $\operatorname{tg}(\gamma)$

c) $\operatorname{tg}(\alpha)$

d) $\frac{\cos\beta}{\sin\beta}$

139) Nechť máme funkci $f(x, y)$ vyobrazenou na obrázku. Které z následujících tvrzení je správné?



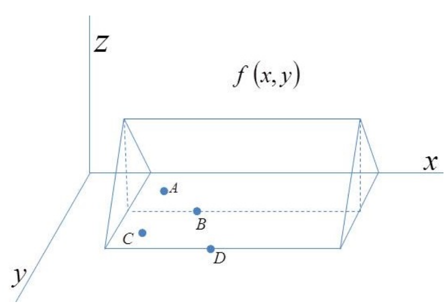
a) $f'_y(A) = f'_y(B)$ ✓

b) $f'_x(A) = f'_x(B)$

c) $f'_x(A)$ neexistuje ✓

d) $f'_y(A) = f'_x(A)$

140) Na obrázku je dán graf funkce $f(x, y)$. Které z následujících tvrzení je správné?



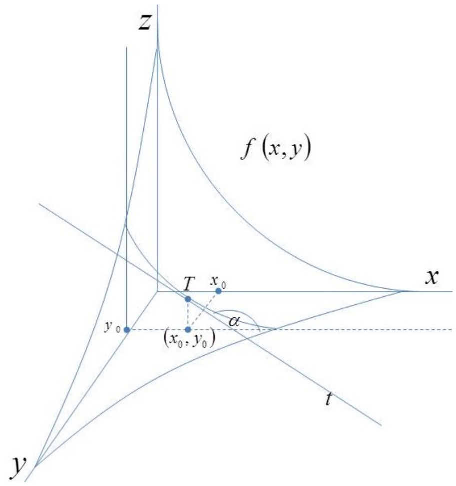
a) $f'_x(B) = f'_x(C)$ ✓

b) $f'_x(A) = f'_x(D)$

c) $f'_y(B) = f'_x(A)$

d) $f'_y(B) = 0$

141) Na obrázku je zachycen graf funkce $f(x, y)$. Který z uvedených vztahů platí?



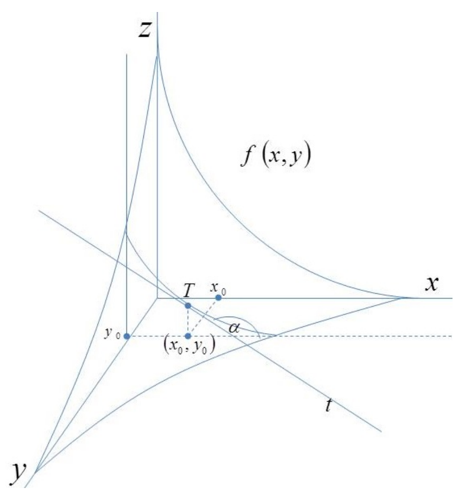
a) $f'_y(x_0, y_0) < 0$ ✓

b) $\mathrm{tg}\,(\alpha) = f'_y(x_0, y_0)$

c) $\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = f'_x(x_0, y_0)$ ✓

d) $f'_x(x_0, y_0) = 0$

142) Na obrázku je zachycen graf funkce $f(x, y)$. Který z uvedených vztahů platí?



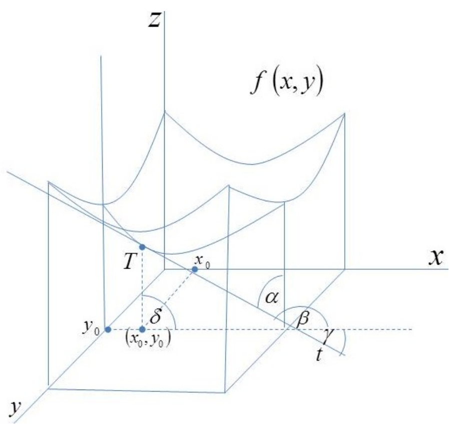
a) $f'_x(x_0, y_0) < 0$ ✓

b) $f'_y(x_0, y_0) > 0$

c) $\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = f'_x(x_0, y_0)$ $\checkmark$

d) $\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = f'_x(x_0, y_0)$

143) Nechť $f(x, y)$ je funkce, jejíž graf je znázorněn na obrázku. Spočítáme-li $f'_x(x_0, y_0)$, zjistíme:



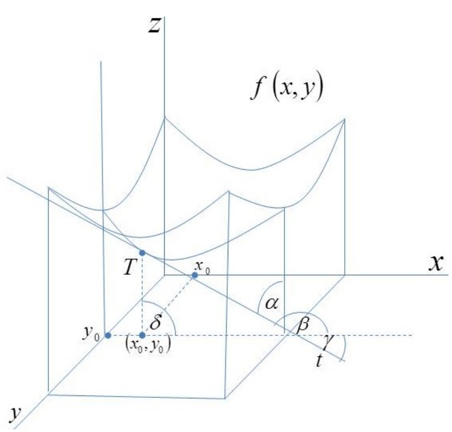
a) funkci dvou proměnných x a y

b) rovnici tečny t

c) směrnici tečny t $\checkmark$

d) rovnici tečné roviny ke grafu funkce $f(x, y)$ v bodě T

144) Nechť $f(x, y)$ je funkce, jejíž graf je znázorněn na obrázku. Spočítáme-li $f'_x(x_0, y_0)$, zjistíme:



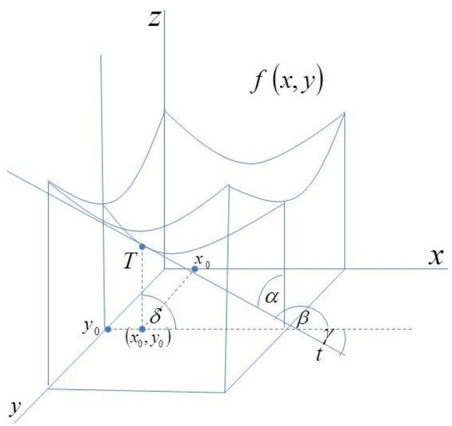
a) $\mathrm{tg}\,(\alpha)$

b) směrnici tečny t $\surd$

c) $\frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)}$ $\surd$

d) rovnici tečny t

145) Nechť $f(x, y)$ je funkce, jejíž graf je znázorněn na obrázku. Spočítáme-li $f'_x(x_0, y_0)$, zjistíme:



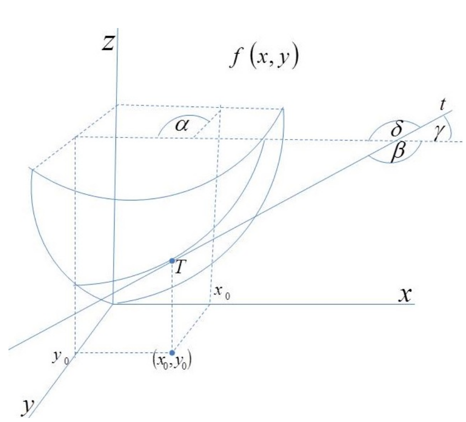
a) $\frac{\cos(\beta)}{\sin(\beta)}$

b) $\mathrm{tg}\,(\gamma)$

c) rovnici tečné roviny ke grafu funkce $f(x, y)$ v bodě T

d) směrnici tečny t $\surd$

146) Nechť $f(x, y)$ je funkce, jejíž graf je znázorněn na obrázku. Spočítáme-li $f'_x(x_0, y_0)$, zjistíme:



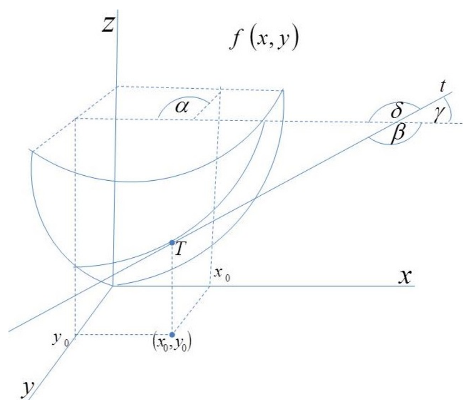
a) funkci dvou proměnných x a y

b) rovnici tečny t

c) směrnici tečny t $\checkmark$

d) rovnici tečné roviny ke grafu funkce $f(x, y)$ v bodě T

147) Nechť $f(x, y)$ je funkce, jejíž graf je znázorněn na obrázku. Spočítáme-li $f'_x(x_0, y_0)$, zjistíme:



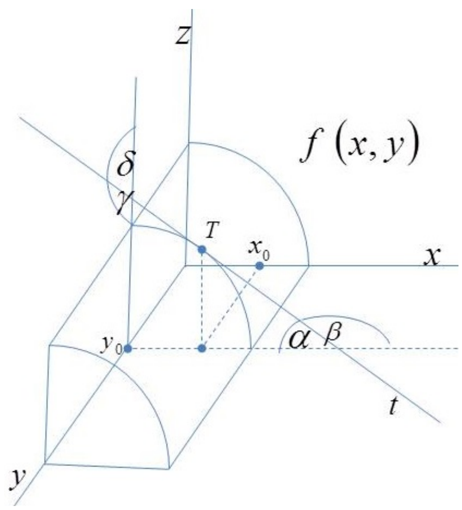
a) tg (γ) $\checkmark$

b) tg (δ)

c) rovnici tečny t

d) rovnici tečné roviny ke grafu funkce $f(x, y)$ v bodě T

148) Chceme-li spočítat směrnici tečny t funkce $f(x, y)$ na obrázku, spočítáme:



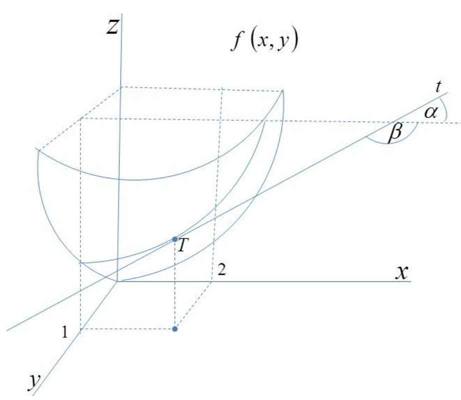
a) $\operatorname{tg}(\alpha)$

b) $\frac{1}{cotg(\beta)}$ ✓

c) $\frac{\cos(\gamma)}{\sin(\gamma)}$

d) $\frac{\sin(\delta)}{\cos(\delta)}$

149) Chceme-li spočítat směrnici tečny t ke grafu funkce $f(x, y)$ na obrázku, spočítáme:



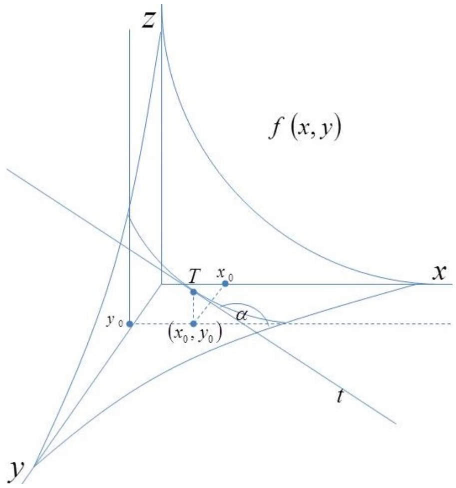
a) $\operatorname{tg}(\beta)$

b) $\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$

c) $\frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta}$

d) $\frac{1}{cotg(\alpha)}$ ✓

150) Na obrázku je zachycen graf funkce $f(x, y)$ a úhel α. Který z uvedených vztahů platí?



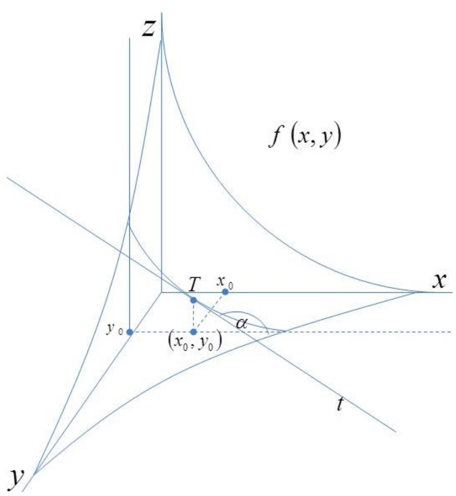
a) $\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = f'_x(x_0, y_0)$

b) $\sin(\alpha) = f'_x(x_0, y_0)$

c) $\cos(\alpha) = f'_x(x_0, y_0)$

d) $\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = f'_x(x_0, y_0)$ ✓

151) Na obrázku je zachycen graf funkce $f(x, y)$ a úhel α. Který z uvedených vztahů neplatí pro úhel α funkce $f(x, y)$?



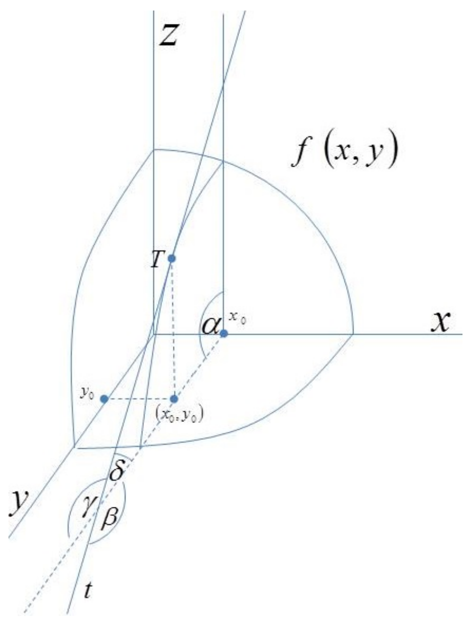
a) $\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = f'_x(x_0, y_0)$

b) $\frac{1}{cotg(\alpha)} = f'_x(x_0, y_0)$

c) $\mathrm{tg}\,(\alpha) = f'_x(x_0, y_0)$

d) $\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = f'_x(x_0, y_0)$ $\surd$

152) Nechť na obrázku je graf funkce $f(x, y)$. Který z uvedených vztahů platí?



a) $f'_y(x_0, y_0) = \frac{\sin(\beta)}{\cos(\gamma)}$ $\surd$

b) $f'_y(x_0, y_0) = \frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)}$ $\surd$

c) $f'_y(x_0, y_0) = \mathrm{tg}\,(\alpha)$

d) $f'_y(x_0, y_0) > 0$

3 Vytváření otázek v programu TEX

V předchozích kapitolách jsme si vysvětlili problematiku parciální derivace funkce a diferenciálu a na základě nabytých znalostí byly vytvořeny testové otázky. Nyní se podívejme, jak takové otázky vznikaly.

Pro zpracování otázek pro LMS Moodle bylo nezbytné napsat práci v programu TEX. Z tohoto důvodu jsem absolvovala základní kurz psaní v TEXu. Tento předmět mi dal dané základy, od kterých jsem se mohla později odrazit a nadále se postupem času zdokonalovat.

TEX je program určený především pro úhledné psaní matematických znaků. Pomocí příkazů zde můžeme psát matematické rovnice a vzorce.

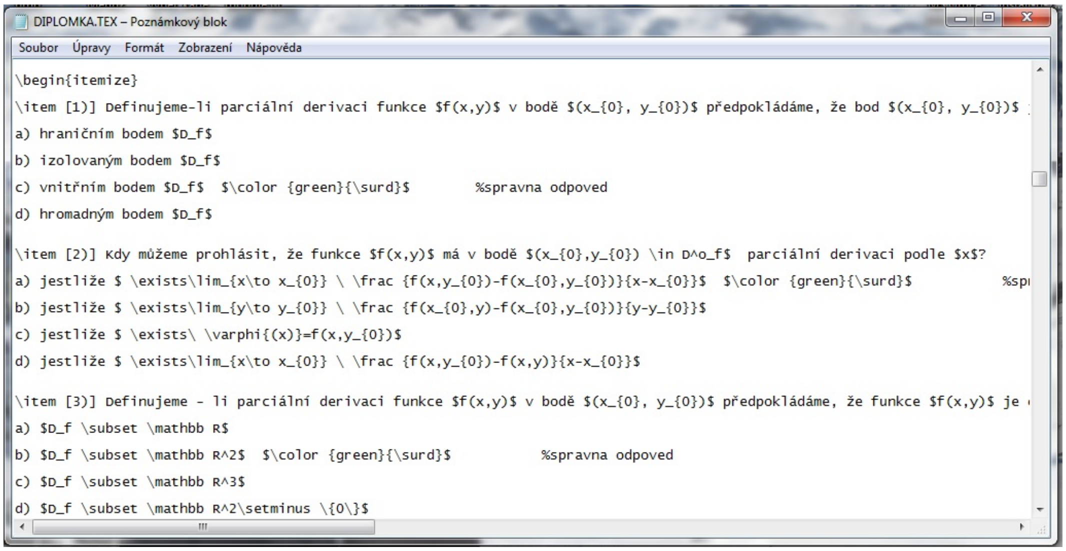
Při vytváření otázek v TEXu jsem čerpala informace z knihy [5] a internetové příručky [9] uvedené v literatuře na konci mé práce.

3.1 Tvorba dokumentu

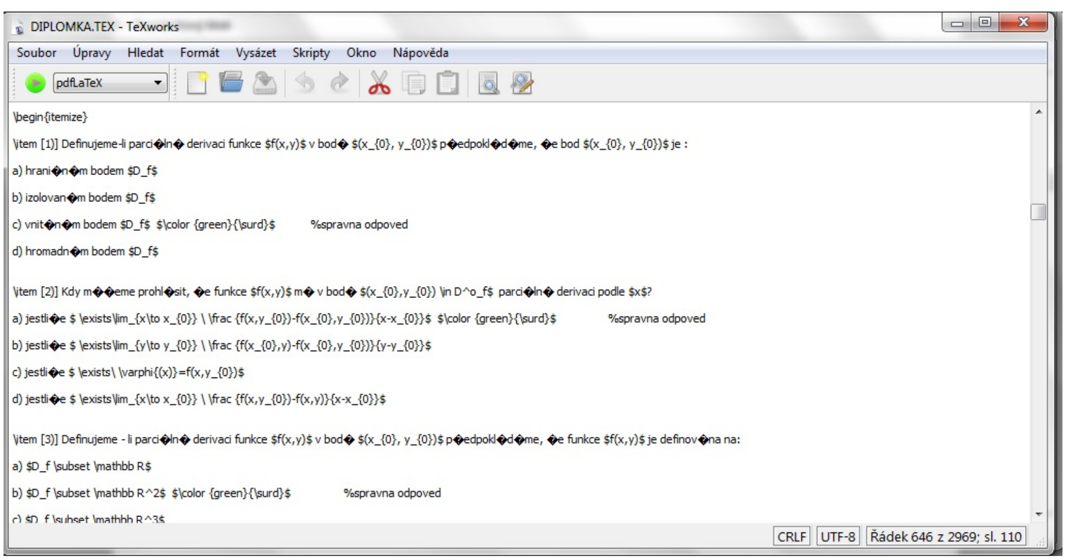
Nejpoužívanější textové editory pro tvorbu dokumentu ve formátu `*.tex` jsou:

- Poznámkový blok
- TEXworks
- TEXniC Center

Celá bakalářská práce je napsaná v programu TEX , kde jsem primárně k psaní využívala Poznámkového bloku, ale pro konečnou práci a tisk jsem využila i TEXworksu, ve kterém bylo velmi pohodlné převést dokument do formátu pdf. Pro ukázku uvádím na Obrázku 9 a Obrázku 10 obě tato prostředí.



Obrázek 9: Prostředí v Poznámkovém bloku



Obrázek 10: Prostředí v TEXworks

3.2 Pravidla pro sazbu matematického textu

Pro sazbu matematického textu bylo nutné mít na paměti několik základních zásadních pravidel:

1) Pro sazbu matematického textu je nezbytné mít načtený balík maker `ansmath`.

2) Pro vysázení matematického textu uvnitř odstavce použijeme znak `$` na začátku i na konci textu. Můžeme použít také pro začátek znak `\(` a pro konec `\)` a nebo také použít příkaz `\begin{math}` a `\end{math}`.

3) Pro sazbu matematických vztahů na samostatný řádek používáme na začátku i na konci dva dolary.

4) Každé písmeno v matematickém prostředí je považováno za proměnnou. Chceme-li uvnitř matematického textu sázet normální text, použijeme příkaz `\mbox{...}`, popřípadě `\textrm{...}`

5) V matematické sazbě nám TEX automaticky sám vkládá mezery. Chceme-li mezeru zvětšit použijeme příkaz`\,`, pro ještě větší mezeru použijeme příkaz `\quad`.

6) Matematické funkce (jako je např. cosinus, sinus, logaritmus,...) se sazejí vzpřímeným písmem.

7) Funkce tg se v americké literatuře odlišuje od české literatury. Je proto nezbytné si ji dodefinovat pomocí příkazu `\mathop`, tj. do preambule uvedeme `\mbox{\newcommand{\tg}{\mathop{\rm tg}\nolimits}`

8) Příkaz v matematickém textu má vliv pouze na bezprostředně následující znak. Chceme-li, aby příkaz ovlivnil i ostatní znaky v textu, použijeme složenou závorku.

3.3 Příklady sazby matematických znaků a symbolů

Nyní si ukažme pár příkladů psaní základních matematických znaků, které jsou doplněny názornými příklady. Nalevo máme uvedený výsledek zpracovaný LaTeXem a vpravo podobu textu zadanou pomocí příkazů v dokumentu.

Příklad 3.1. *Exponenty se zadávají pomocí znaku* `^` *a indexy pomocí znaku* `_`.

2^x	`2^x`
(x_0, y_0)	`(x_0,y_0)`

Příklad 3.2. *Odmocnina se sází pomocí příkazu* `\sqrt`

$\sqrt{6-x}$	`\sqrt{6-x}`

Příklad 3.3. *Zlomek sázíme pomocí příkazu* `\frac{...}{...}`, *kde do první závorky píšeme čitatele a do druhé jmenovatele.*

$\frac{x-2}{3}$	`\frac{x-2}{3}`

Příklad 3.4. *Znak derivace sázíme pomocí znaku apostrof ' a nebo pomocí příkazu* `\partial`.

$f'_y(x_0, y_0)$	`f'_y (x_{0},y_{0})`
$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$	`\frac { \partial f}{\partial y}(x_{0}, y_{0})`

Jak si můžeme povšimnout, matematické znaky i symboly se sazí stejným principem. Stačí pouze znát znak k danému matematickému symbolu a řídit se obecnými pravidly. Proto již jen v příloze uvádím tabulku ostatních matematických symbolů použitých v této práci.

Vybrané matematické symboly:

α	`\alpha`	ψ	`\psi`
β	`\beta`	$\leftarrow$	`\leftarrow`
γ	`\gamma`	$\Rightarrow$	`\Rightarrow`
δ	`\delta`	$\longrightarrow$	`\longrightarrow`
τ	`\tau`	$\subset$	`\subset`
φ	`\varphi`	$\in$	`\in`

$\leq$	`\leq`	$\surd$	`\surd`
$\geq$	`\geq`	$\exists$	`\exists`
$\approx$	`\approx`	∂	`\partial`
$\neq$	`\neq`	$\sum$	`\sum`
$\cdot$	`\cdot`	$\int$	`\int`
$\cap$	`\cap`		
$\cup$	`\cup`	$\lim$	`\lim`

3.4 Vkládání obrázků

Při vkládání obrázků do TEXu je zapotřebí mít obrázky ve formátu eps, jpg nebo png a mít načtený balík maker `graphicx`. Nesmíme také zapomenout, že zvolený obrázek musí být uložen na stejném místě jako hlavní dokument. Samotné vložení obrázků se provádí pomocí příkazu
`\includegraphics[parametr=hodnota]{nazev obrazku}`. Mezi základní parametry patří `width`, který udává šířku obrázku a parametr `height`, který udává výšku obrázku.

Poznámka 3.1. Náčrtky obrázků funkcí byly vytvářeny v programu Microsoft Office PowerPoint, kde byly pak následně uloženy ve formátu jpg.

4 Zpracování otázek na síti UPOL

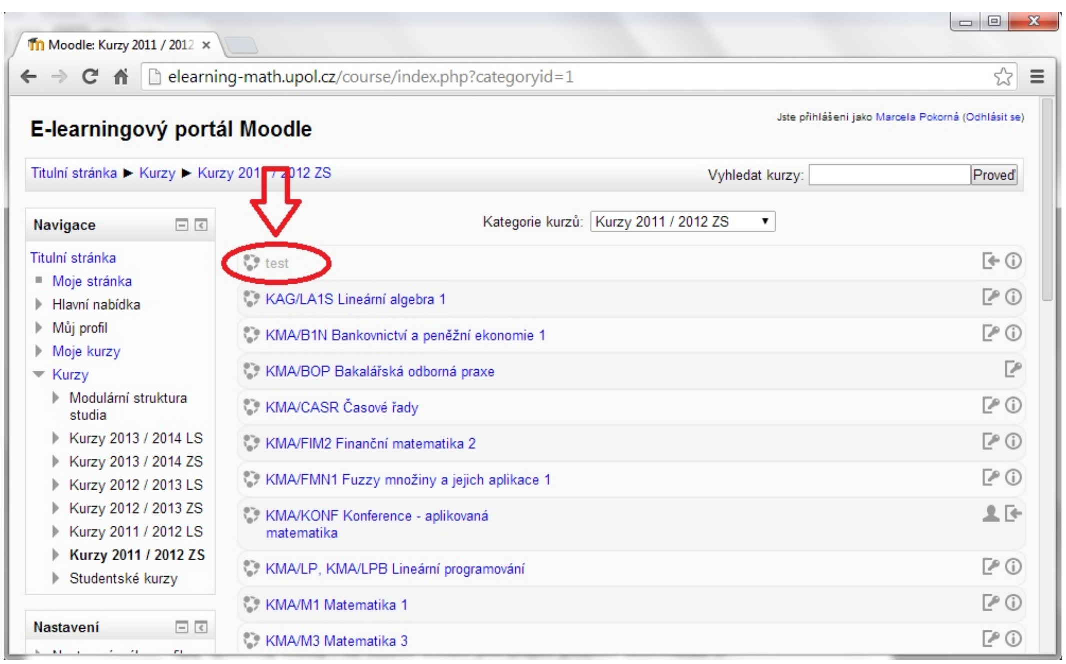
Po zpracování otázek v TEXu následovalo vkládání otázek na síť UPOL - konkrétně do prostředí LMS Moodlu, kde studentům v kurzu Matematika 2 byly zpřístupněny testové otázky.

Obrázky v této části mé práce jsem čerpala z portálu LMS Moodle.

Poznámka 4.1. LMS Moodle je nástroj pro správu a řízení elektronických kurzů. Vyučující zde se studenty sdílejí studijní opory a materiál k některým předmětům vyučovaných na Univerzitě Palackého.

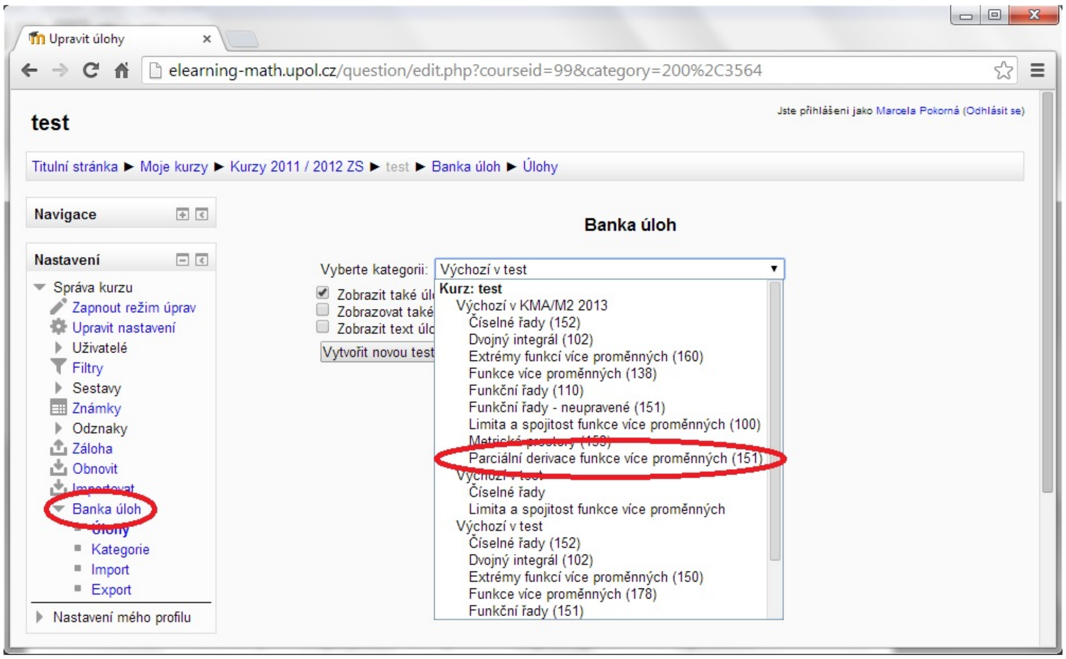
4.1 Vkládání otázek na LMS Moodle

Po přihlášení do LMS Moodlu mi byl poskytnut přístup pro vkládání otázek do uměle vytvořeného cvičného předmětu "test", kterého si můžeme povšimnout vyznačeného na obrázku 11. Tento cvičný předmět "test" sloužil pouze pro vložení otázek na LMS Moodle.



Obrázek 11: Předmět test na LMS Moodlu

Po přihlášení se do předmětu "test" jsem se nadále s pomocí odkazu banka úloh přesměrovala k výběru kategorie, kde jsem zvolila téma Parciální derivace funkce více proměnných.

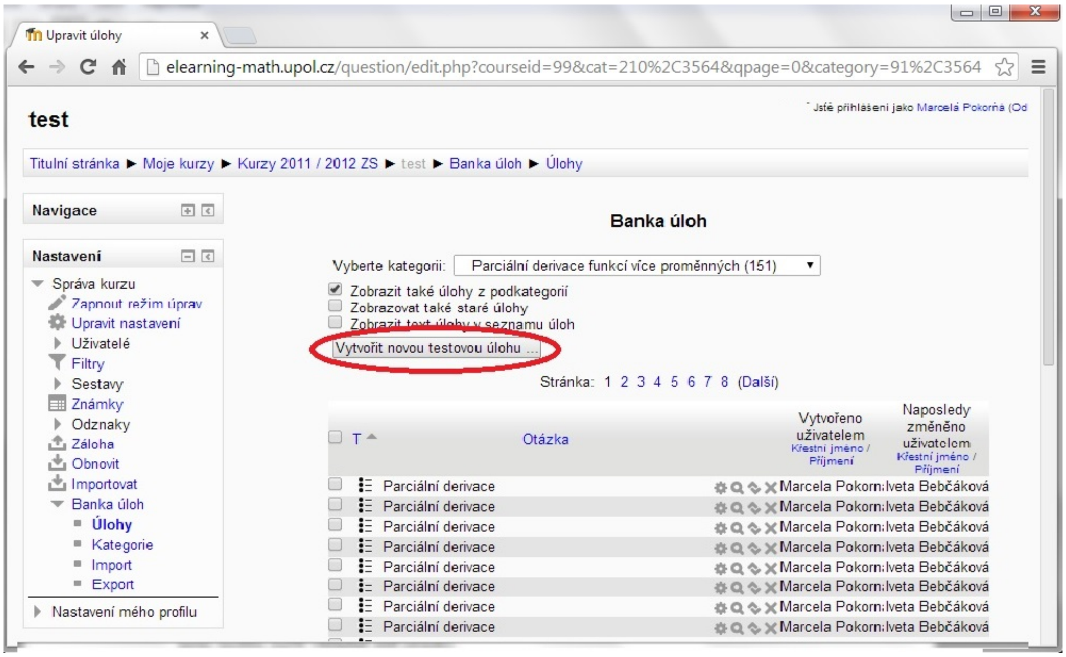


Obrázek 12: Banka úloh a volba kategorie

Poznámka 4.2. Ve výběru kategorie se zobrazila jednotlivé témata, které se probíraly v předmětu Matematika 2. Celkem bylo na výběr z osmi témat - Metrické prostoru, Limita a spojitost, Funkce více proměnných, Parciální derivace, Extrémy funkce, Dvojný integrál, Funkční řady a Číselné řady. Na všechna tato témata byly také vytvářeny testové otázky.

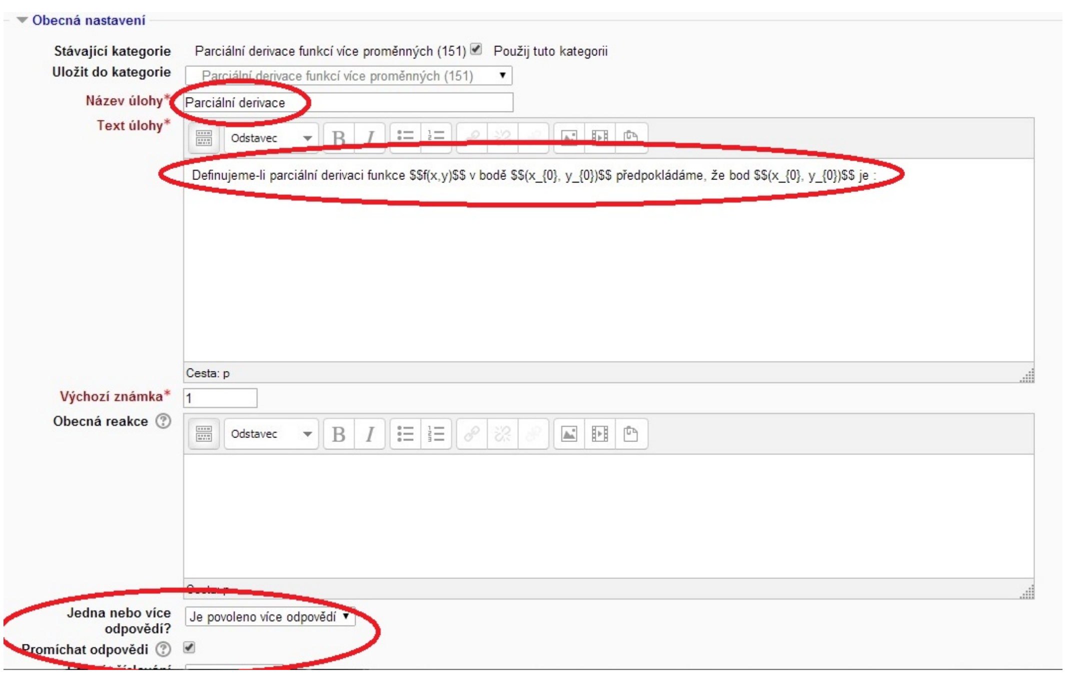
Po výběru kategorie jsem mohla pomocí odkazu zvýrazněném na Obrázku 13 *Vytvořit novou testovou úlohu* začít vkládat své otázky.

Předpřipravené otázky vytvořené v TEXu se vkládaly postupným kopírováním na portál LMS Moodle. Nejdříve bylo zapotřebí (viz Obrázek 14), u každé otázky zvlášť nastavit zakladní nastavení, kde bylo nutností vyplnit název úlohy, který se volil podle zpracovávaného tématu a text úlohy, kde se vkládala otázka. Protože otázky mohly mít i více správných odpovědí, bylo nezbytné povolit zaškrtnutí i



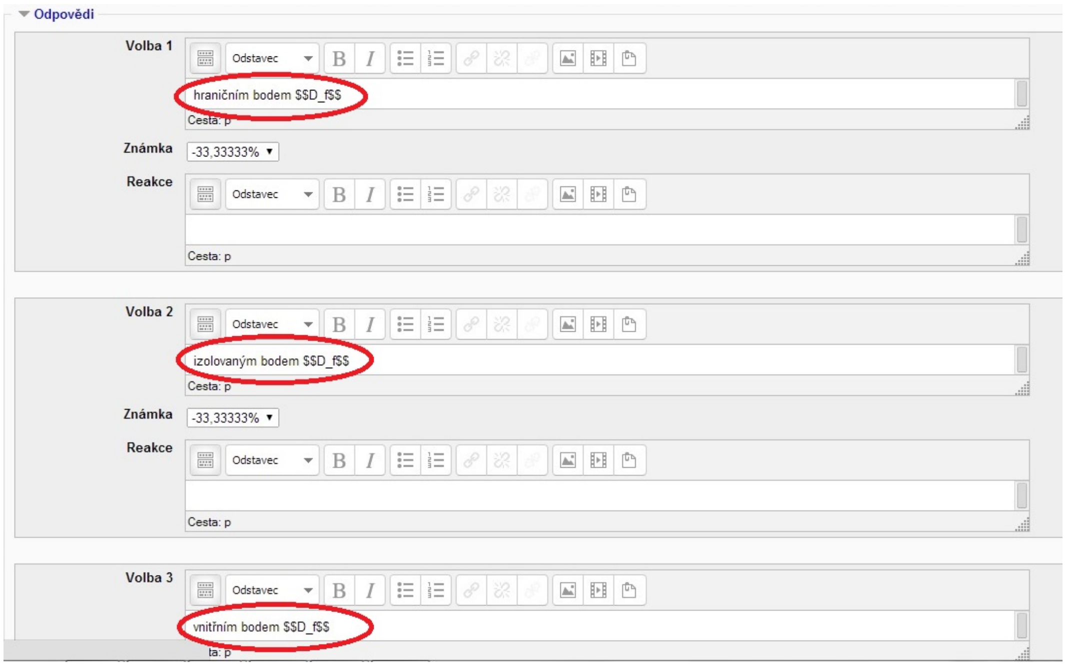
Obrázek 13: odkaz na vytvoření nové testové úlohy

více odpovědí. A aby se zamezilo možnosti zapamatovat si správné odpovědi k jednotlivým otázkám při opakování testu, bylo nastaveno promíchávání odpovědí.



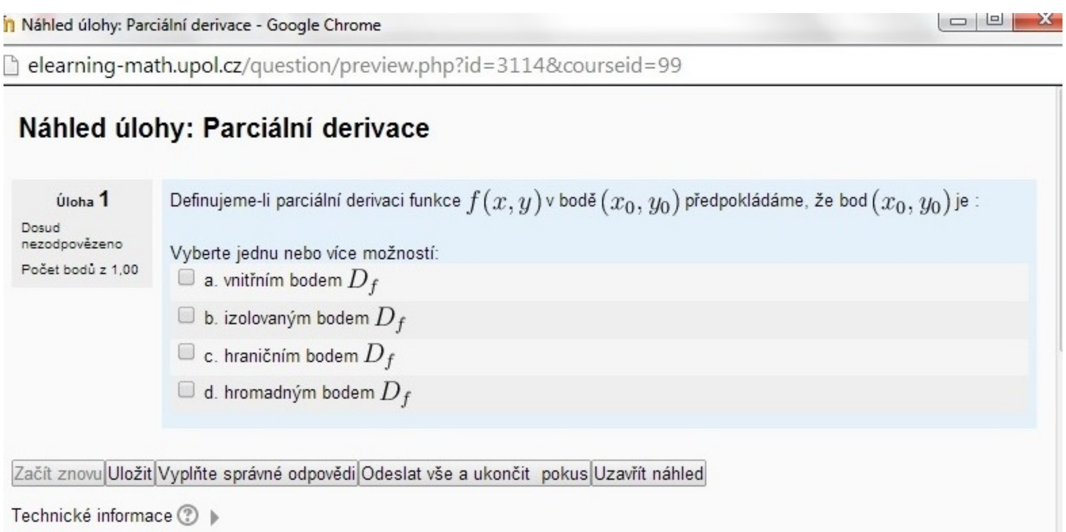
Obrázek 14: Tvorba otázky - základní nastavení

V dalším kroku (Obrázek 15) se do přednastavených políček vkládaly odpovědi.



Obrázek 15: Tvorba otázky - vkládání odpovědí

Pro kontrolu takto nastavené otázky sloužil náhled otázky (Obrázek 16), který zobrazoval otázku v takové formě, v jaké ji později viděli studenti na testu.



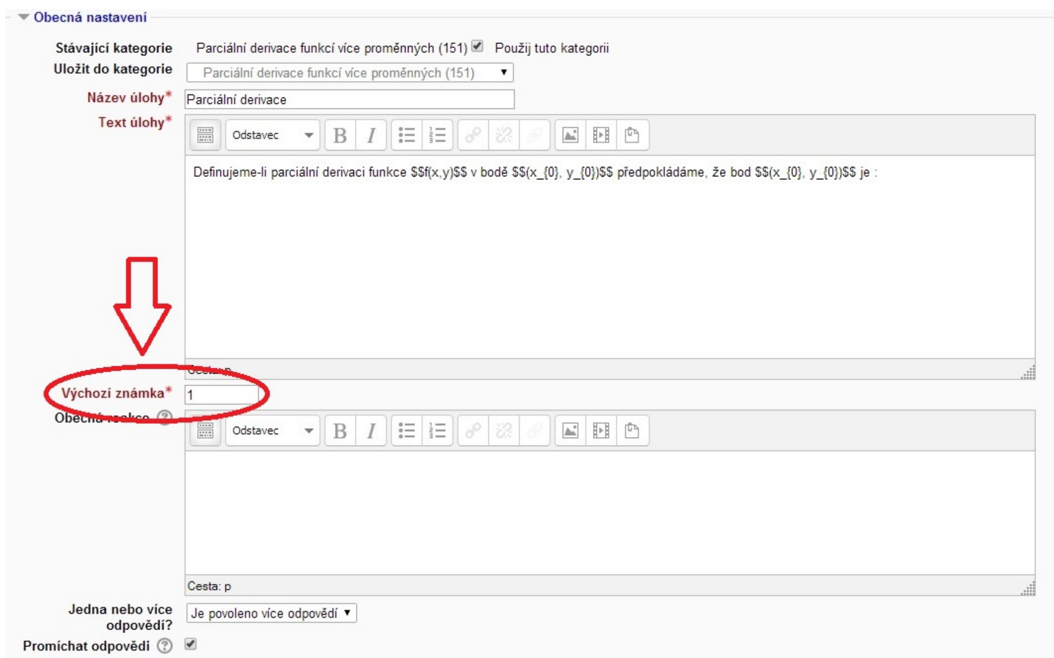
Obrázek 16: Náhled otázky

Vložené zpracované otázky se po překontrolování přesunuly do předmětu Matematika 2, kde z nich byl vytvořen test zpřístupněný studentům.

4.2 Systém známkování otázek

Po zkopírování otázky a jejích odpovědí bylo zapotřebí ohodnotit jednotlivé odpovědi.

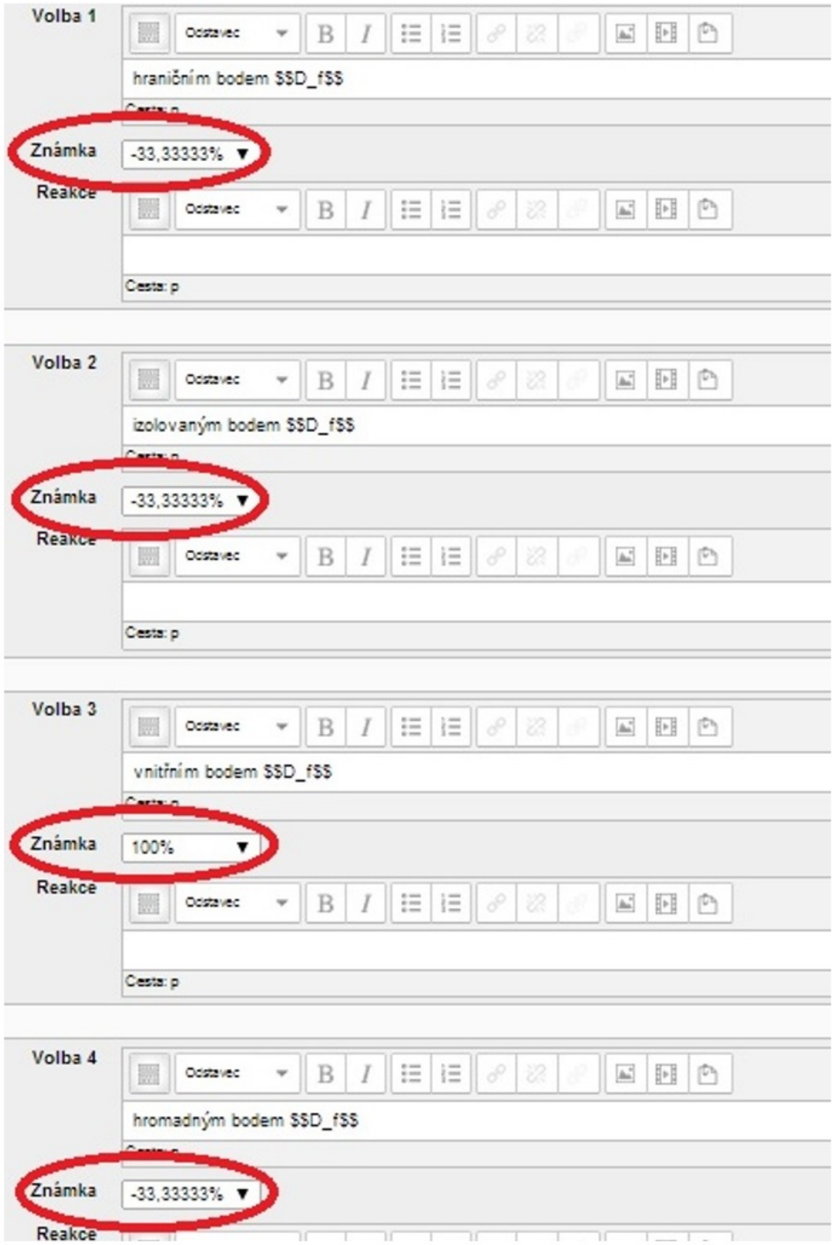
Každý ze studentů musel uspět v testu minimálně na 80 %, přičemž opakování testu bylo neomezené. Za každou správnou otázku bylo možné získat 1b. Bod se v každé otázce přiřazoval v základním nastavení. (Obrázek 17)



Obrázek 17: Přiřazení bodu otázce

Hodnocení jednotlivých odpovědí se nastavovalo v části u odpovědí. Vyskytlo-li se v otázce více správných odpovědí, bod (v podobě procent) se dělil rovným dílem mezi správné odpovědi. Za každou chybnou odpověď se body odečítaly. Správné odpovědi nám vždy v součtu musely dát 100 % a špatné odpovědi -100 %. Zaškrtnul-li student u otázky všechny odpovědi, nezískal ani neztratil žádné body. Pokud však student zaškrtnul jenom špatné odpovědi, body se mu neodčítaly.

Jinými slovy, pokud součet kladných bodů byl menší než součet záporných bodů, tak student získal nulu.



Obrázek 18: Hodnocení odpovědí

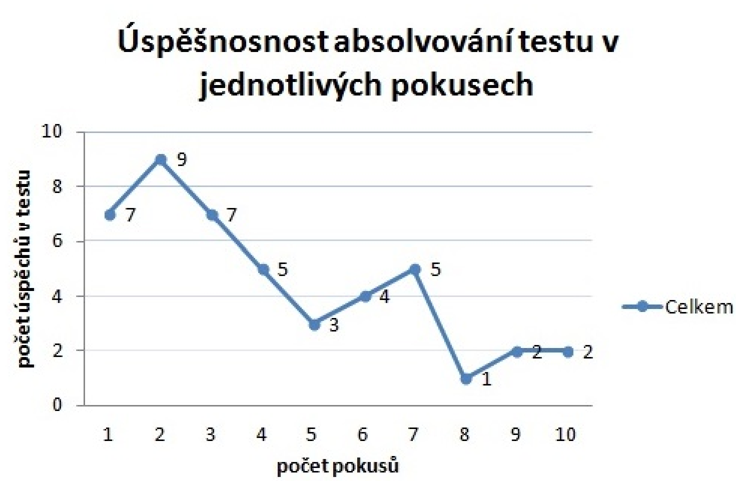
Na Obrázku 18 máme uvedenou otázku s výběrem ze 4 možných odpovědí. Jediná správná odpověď je pouze volba 3 se známkou 100 %. Zbývající tři odpovědi s nastavenou známkou -33,33 % jsou chybné.

5 Souhrnné hodnocení testu

5.1 Úspěšnost absolvování testu Parciální derivace

Nyní se podívejme a zhodnoťme úspěšnost absolvování testu. V testu neuspěli 4 studenti, kteří i přes neomezené opakování test vzdali. Dalších 5 studentů test pouze otevřeli a nedokončili a 45 studentů v testu uspělo. K úspěšnému absolvování testu bylo zapotřebí správně odpovědět na 20 otázek z 25 (tj. uspět minimálně na 80 %). Tuto hranici nejvíce se dařilo studentům překonat ve druhém pokusu. Shrnutá a vyhodnocená data jsou vykreslena v grafu na Obrázku 19.

Počet pokusů	Počet úspěchů
1	7
2	9
3	7
4	5
5	3
6	4
7	5
8	1
9	2
10	2
Celkem	45



Obrázek 19: Graf úspěšnosti studentů v testu v jednotlivých pokusech

5.2 Průměrný počet dosažených bodů v testu v 1 pokusu a v ostatních pokusech

V této podkapitole zjistíme, jestli se studenti oproti předcházejícím pokusům zlepšovali, nebo zhoršovali. A o kolik bodů získali více či méně.

Tabulka na Obrázku 20 nám ukazuje počet dosažených bodů u studentů v jednotlivých pokusech. Studenti jsou v tabulce uvedeni pod kódy. Shrnutí na pravém okraji tabulky nám říká, jaký byl průměrný výsledek studenta. Zatímco shrnutí na konci tabulky popisuje, jakého průměrného hodnocení studenti dosáhli v jednotlivých pokusech.

Počet bodů	Počet pokusů										Celkový
Kód studenta	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	průměr
684	23										23
241	22,33										22,33
650	22,17										22,17
619	22,00										22
729	21										21
674	20,33										20,33
590	20,50										20,50
658	5										5
246	7,5	7,5									7,5
262	3,67	21									12,33
431	16,50	20									18,25
642	19,67	21,33									20,50
647	15,83	20,5									18,17
659	2,17	23,17									12,67
662	19,33	24,17									21,75
672	15,67	21,33									18,5
673	14,33	23,17									18,75
757	16,67	20									18,33
687	1	0	0								0,17
91	7,67	19,5	23,5								16,89
103	12,17	19,25	20,67								17,36
438	17,83	14	21,83								17,89
616	17,17	18,25	20,83								18,75
621	18,5	18,17	22,83								19,83
630	14,17	14	20,50								16,22
634	14,5	19,17	19,25	22							18,73
644	5,83	13,5	21								13,44
665	12,83	9	11,5	20,5							13,46
675	0	0	0	21,5							5,38
683	16	18,17	19,67	21,67							18,88
698	13,67	17	19,42	18	23,5						18,32
667	17,67	16,5	15,33	19,5	22						18,2
629	16	19,33	18,83	21,5							18,92
211	13,67	14,75	14,33	17,5	22,5						16,55
178	11,83	13,17	19	15,17	19,5	20,5					16,53
134	9,17	16,5	18,50	17,5	18,67	22,17					17,08
622	14,83	16,5	16,17	16,83	18,83	21,5					17,44
649	0	0	3	11	19,33	21,17					9,08
722	0	0	16,58	18,83	6,5	12,5	20,83				10,75
652	8,5	11,17	14,67	14,83	19,17	18,17	20,50				15,29
635	11,33	16,67	15,67	17,33	17,67	17	22				16,81
195	8,83	14,33	16,67	12,17	16,17	17,5	21				15,24
43	12	16,5	15	17,5	16,33	19,33	20,33				16,71
735	0	0	0	0,67	19,33	2,67	2,33	23,17			6
749	0	0	0	0	0	0	0	0	0		0
689	3	0	0	0	0	0	0	5	20,67		3,19
617	13,50	5	1	16,08	14,67	18,50	2,5	7,33	21,08		11,07
678	14,17	2	0	6	2,33	5,67	0,5	0	0	21	5,17
725	2	2,67	0	0,67	1	1,5	0	1	0	24,5	3,28
Celkový průměr	**12,14**	**13,35**	**13,09**	**14,21**	**14,28**	**13,21**	**10,00**	**6,08**	**8,35**	**22,75**	**12,75**

Obrázek 20: Tabulka dosažených bodů v jednotlivých pokusech u jednotlivých studentů

Z tabulky je patrné, že 4 studenti test nedokončili vůbec. Za povšimnutí také stojí průměrné dosažení bodů u studentů - přestože někteří studenti test absolvovali úspěšně (tj. překonali 20 bodovou hranici), jejich průměrný dosažený počet bodů se mnohdy pohyboval pouze okolo hranice 5 bodů. Zkusme si nyní vysvětlit, co tento jev mohlo zapříčinit. Na tento jev se zkusím podívat blíže s pomocí další informace - délky trvání testu.

Poznámka 5.1. *Protože studenti měli možnost absolvovat test z pohodlí domova, mohl být tento jev mimo jiné i způsoben nesamostatnou prácí studenta.*

Z analýzy délky trvání testu vyplynulo, že někteří studenti své pokusy promrhali rychlým "proklikaním" a nebo naopak někteří studenti ukončili test až o pár dnů, hodin později. Další skupinkou byly pokusy studentů, kteří test začali a nedokončili vůbec.

Pro další zpracování dat bylo nezbytné data z tabulky očistit od těchto pokusů, které by nám ve výsledku mohly zkreslovat údaje. Po podrobnějším prozkoumání bylo patrné, že samotná délka trvaní jednotlivých pokusů není dostačující pro úpravu dat. V testu se našly i takové pokusy, u kterých nebyly zaznačené žádné odpovědi.

Z dat proto vyřadíme:

- pokusy studentů, kteří test otevřeli a nedokončili
- pokusy studentů, kteří test absolvovali rychlým "proklikáním". Tj. studenti, kteří absolvovali test za méně než 4,5 min.
- pokusy studentů, jejíž délka trvání testu trvala více jak 1,5h
- pokusy studentů, kteří v testu nezaznačili žádnou, popřípadě zaznačili jen jednu odpověď.

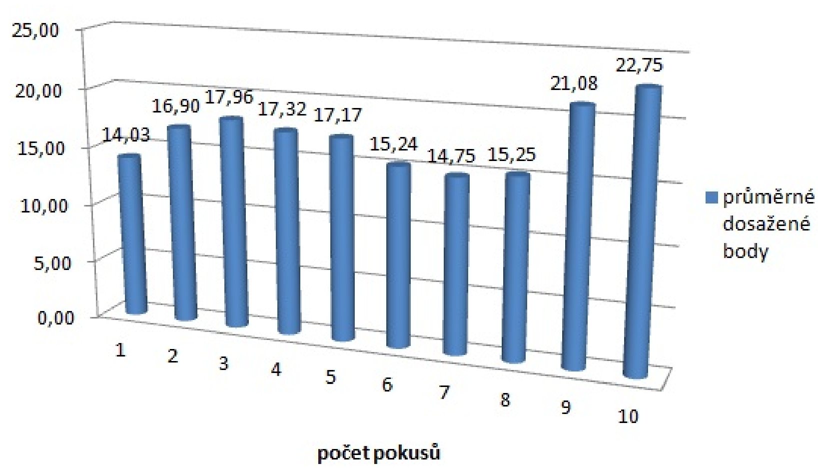
Takto poupravenou tabulku uvádím na Obrázku 21.

Počet bodů	Počet pokusů										Celkový
Kód studenta	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**průměr**
684	23,00										23
241	22,33										22,33
650	22,17										22,17
619	22										22
729	21										21
590	20,5										20,5
658	5										5
757	16,67	20									18,33
673	14,33	23,17									18,75
672	15,67	21,33									18,5
662	19,33	24,17									21,75
659		23,17									23,17
647	15,83	20,5									18,17
642	19,67	21,33									20,50
431	16,5	20									18,25
262	3,67	21									12,3
246	7,5	7,5									7,50
91	7,67	19,5	23,5								16,89
103	12,17	19,25	20,67								17,36
438	17,83	14	21,83								17,89
616		18,25	20,83								19,54
621	19	18,17	22,83								19,83
630	14,17	14	20,5								16,22
644	5,83	13,5	21								13,44
683		18,17	19,67	21,67							19,83
675				21,5							21,50
665	12,83	9		20,5							14,11
634			19,25	22							20,63
629	16	19,33	18,83	21,50							18,92
211	13,67	14,75	14,33	17,5	22,5						16,55
667	17,67		15,33	19,5	22						18,63
698		17	19,42	18	23,5						19,48
649			3	11	19,33	21,17					13,63
622	14,83	16,5		16,83	18,83	21,5					17,7
195		14,33	16,67			17,5					16,17
178	11,83	13,17	19	15,17	19,5	20,5					16,53
134	9,17	16,5	18,5	17,5	18,67	22,17					17,08
689	3										3,0
43	12	16,5	15	17,5	16,33	19,33	20,33				16,71
635		16,67	15,67	17,33	17,67	17	22				17,72
652	8,5	11,17	14,67	14,83	19,17	18,17	20,5				15,29
722			16,58		6,5	12,5	20,83				14,1
735					19,33	2,67	2,33	23,17			11,88
617		5		16,08	14,67	18,5	2,5	7,33	21,08		12,17
678	14,17			6	2,33	5,67				21	9,83
725	2					1,5				24,50	9,33
Celkový průměr	**14,03**	**16,90**	**17,96**	**17,32**	**17,17**	**15,24**	**14,75**	**15,25**	**21,08**	**22,75**	**16,28**

Obrázek 21: Očištěná tabulka dosažených bodů v jednotlivých pokusech u jednotlivých studentů

Na výsledný graf průměrně dosažených bodů v jednotlivých pokusech, vytvořený z poupravených dat, se můžeme podívat na obrázku 22.

počet pokusů	průměrné dosažené body
1	14,03
2	16,90
3	17,96
4	17,32
5	17,17
6	15,24
7	14,75
8	15,25
9	21,08
10	22,75



Obrázek 22: Průměrný počet bodů dosažených v jednotlivých pokusech

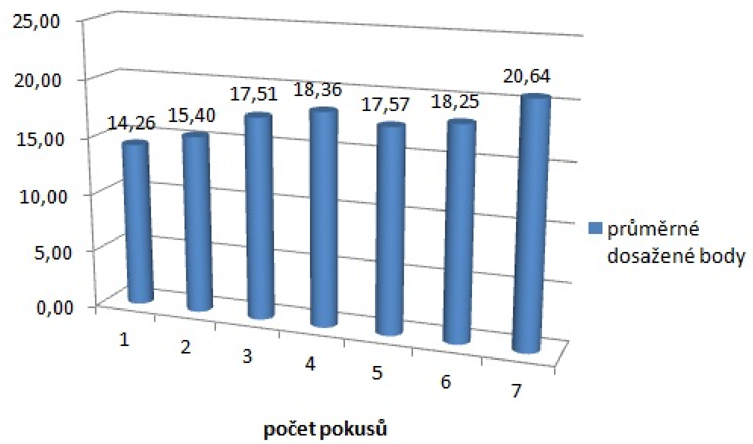
Z grafu můžeme vypozorovat, že studenti s přibývajícími pokusy se zlepšovali až do výše pokusu 3.

V tabulce na Obrázku 21 nám vlivem očištění vznikly mezi jednotlivými pokusy prázdné políčka. Nyní si vyzkoušíme, jak by vypadal graf, kdybychom tyto prázdné pokusy nepočítali. To znamená, že jako první pokus budeme počítat první bodově ohodnocený pokus, jako druhý pokus budeme počítat druhý bodově ohodnocený pokus, atd. Takto budeme postupovat až do desátého pokusu. Tímto nám vznikne tabulka na Obrázku 23. Vykreslené data z tabulky jsou zachycena v grafu na Obrázku 24.

Počet bodů	**Počet pokusů**							**Celkový**
Kód studenta	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**průměr**
659	23,17							23,17
684	23,00							23
241	22,33							22,33
650	22,17							22,17
619	22							22
729	21							21
675	21,5							21,50
590	20,5							20,5
658	5							5
689	3							3,0
662	19,33	24,17						21,75
673	14,33	23,17						18,75
634	19,25	22						20,63
642	19,67	21,33						20,50
672	15,67	21,33						18,5
262	3,67	21						12,3
616	18,25	20,83						19,54
647	15,83	20,5						18,17
757	16,67	20						18,33
431	16,5	20						18,25
246	7,5	7,5						7,50
725	2	1,5	24,50					9,33
91	7,67	19,5	23,5					16,89
621	19	18,17	22,83					19,83
438	17,83	14	21,83					17,89
683	18,17	19,67	21,67					19,83
644	5,83	13,5	21					13,44
103	12,17	19,25	20,67					17,36
630	14,17	14	20,5					16,22
665	12,83	9	20,5					14,11
195	14,33	16,67	17,5					16,17
698	17	19,42	18	23,5				19,48
735	19,33	2,67	2,33	23,17				11,88
667	17,67	15,33	19,5	22				18,63
629	16	19,33	18,83	21,50				18,92
649	3	11	19,33	21,17				13,63
722	16,58	6,5	12,5	20,83				14,1
211	13,67	14,75	14,33	17,5	22,5			16,55
622	14,83	16,5	16,83	18,83	21,5			17,7
678	14,17	6	2,33	5,67	21			9,83
134	9,17	16,5	18,5	17,5	18,67	22,17		17,08
635	16,67	15,67	17,33	17,67	17	22		17,72
178	11,83	13,17	19	15,17	19,5	20,5		16,53
617	5	16,08	14,67	18,5	2,5	7,33	21,08	12,17
652	8,5	11,17	14,67	14,83	19,17	18,17	20,5	15,29
43	12	16,5	15	17,5	16,33	19,33	20,33	16,71
Celkový průměr	**14,26**	**15,40**	**17,51**	**18,36**	**17,57**	**18,25**	**20,64**	**16,28**

Obrázek 23: Tabulka bez neplatných pokusů

počet pokusů	průměrné dosažené body
1	14,26
2	15,40
3	17,51
4	18,36
5	17,57
6	18,25
7	20,64



Obrázek 24: Průměrný počet bodů dosažených v jednotlivých pokusech po úpravě tabulky

5.3 Úspěšnost studentů v testu Parciální derivace v porovnání s ostatními testy v předmětu Matematika 2

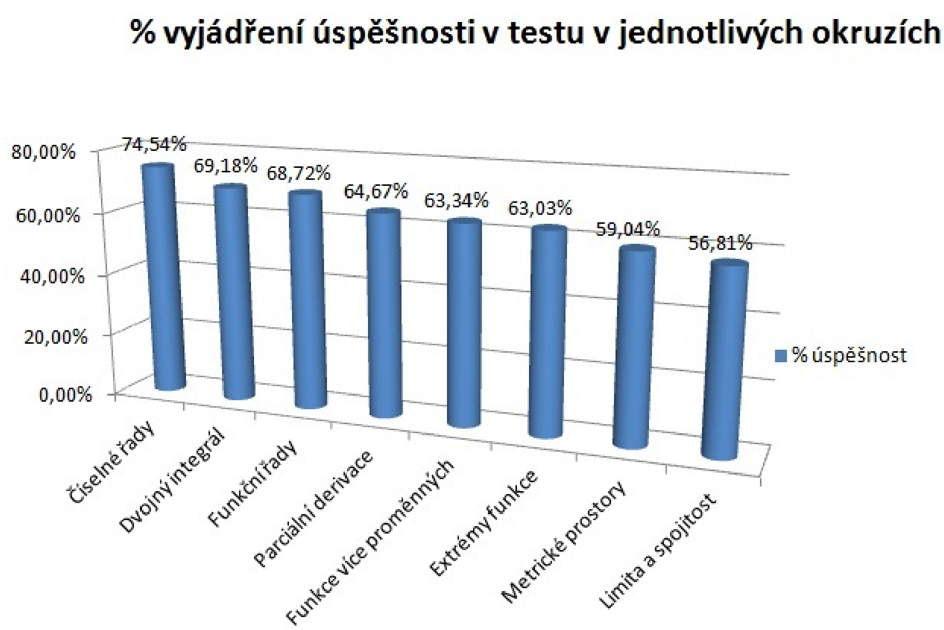
V předmětu Matematika 2 bylo vytvořeno celkem 8 testů pokrývající učivo tohoto předmětu. Studenti museli absolvovat každý z těchto testů zvlášť. Protože v jednotlivých testech byl odlišný počet otázek, uvádím úspěšnost v testech přepočtenou na procenta.

Poznámka 5.2. *Abych předešla zkreslování dat, při vytváření grafu jsem se omezila na časový interval trvání testu 4,5-90 min a nezapočítávala jsem pokusy studentů, kteří test nedokončili.*

Graf na Obrázku 25 nám ukazuje procentuální vyjádření úspěšnosti v testu v jednotlivých okruzích.

Nejméně se studentům dařil test Limita a spojitost, kde průměrně dosahovali 52,76 % úspěšnosti. Naopak nejvíce se studentům dařilo v testu Číselné řady, který se jim dařil v průměru plnit na 71,06 %.

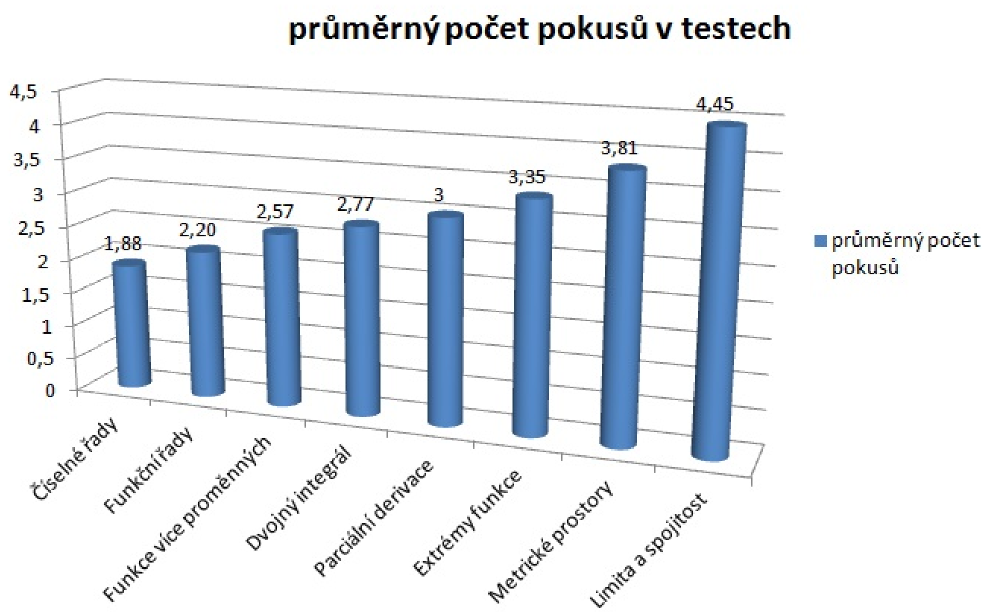
název testu	% úspěšnost
Číselné řady	74,54%
Dvojný integrál	69,18%
Funkční řady	68,72%
Parciální derivace	64,67%
Funkce více proměnných	63,34%
Extrémy funkce	63,03%
Metrické prostory	59,04%
Limita a spojitost	56,81%



Obrázek 25: % vyjádření úspěšnosti v testu v jednotlivých okruzích

Porovnáme-li množství pokusů potřebné k dosažení vyhovujícího výsledku (viz graf na Obrázku 26), zjistíme, že studenti nejvíce opakovali test na téma Limita a spojitost. Průměrně si tento test každý student musel zopakovat 4-5 krát. Naopak nejméně opakovali test (v průměru 1-2 krát) na téma Číselné řady.

název testu	průměrný počet pokusů
Číselné řady	1,88
Funkční řady	2,20
Funkce více proměnných	2,57
Dvojný integrál	2,77
Parciální derivace	3
Extrémy funkce	3,35
Metrické prostory	3,81
Limita a spojitost	4,45



Obrázek 26: Průměrný počet pokusů v testech

Závěr

Mým hlavním úkolem bylo vytvořit testové otázky na téma Parciální derivace a zpracovat je do vhodné podoby k testování studentů na síti UPOL.

Než jsem se pustila do vytváření otázek, bylo nezbytné si nejdříve zopakovat danou problematiku, o které pojednávala první kapitola mé práce. Poté jsem mohla začít tvořit otázky. Některé z nich, jak jsme si mohli povšimnout v druhé kapitole, byly pro lepší pochopení souvislostí doplněny náčrtky funkcí zpracované v programu Microsoft Office PowerPoint. Celkem tak vzniklo 152 otázek. Aby otázky mohly být vloženy na síť UPOLu - konkrétně na portál LMS Moodle, bylo nezbytné otázky psát v programu TEX. S programem TEX a portálem LMS Moodle jsme měli možnost se blíže seznámit ve třetí a čtvrté kapitole. V závěrečné kapitole své práce jsem se ohlédla za výsledky z testu, které jsem nadále zpracovávala v tabulkách v Excelu. Výstupem mé práce v této části byla interpretace výsledků v grafech a tabulkách.

Velkým bojem se pro mě v mé práci stal program TEX. I přes úspěšné absolvování základního kurzu psaní textů v TEXu, mě ne vždy tento program poslouchal, tak jak jsem potřebovala. Nakonec jsem nejen otázky, ale i celou svou práci vytvořila v tomto programu. Tuto zkušenost s TEXem hodnotím za velice přínosnou.

Velkým přínosem se pro mě v této práci stala také zkušenost s tvorbou testu na odborné téma a zpracování dat v tabulkách v Excelu.

Literatura

[1] Došlá, Z., Došlý, O.: Diferenciální počet funkce více proměnných, 3.vydání. Masarykova univerzita, Brno, 2006.

[2] Zajíček, L.: Vybrané partie z matematické analýzy pro 1. a 2. ročník, 1.vydání. Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha, 2003.

[3] Rektorys, K. a spol.: Přehled užité matematiky I, 6.vydání. Prometheus, Praha, 1995.

[4] Jarník, V.: Diferenciální počet (I), 6.vydání. Academia, Praha, 1974.

[5] Rybička, J.: LaTeX pro začátníky, 3.vydání. Brno, 2003.

[6] KMA/M2 Matematika 2 - přednášky č. 9-10 [online], dostupné z:
`http://elearning-math.upol.cz/course/view.php?id=37`
[citováno: 12.11.2013]

[7] Volný, P.: Matematika II.[online], dostupné z:
`http://homen.vsb.cz/~kre40/esfmat2/`
[citováno: 14.11.2013]

[8] Průcha, L.: Matematika 3B - přednášky [online], dostupné z:
`http://math.feld.cvut.cz/prucha/m3bp/m3bp.html`,
[citováno: 21.12.2013]

[9] Kočer, M., Sýkora, P.: Ne příliš stručný úvod do systému LaTeX [online], dostupné z:
`http://mant.upol.cz/soubory/LocalTeX/lshort2e-cz.pdf`
[citováno: 12.4.2014]