UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Příklady z funkcionální analýzy

Vedoucí diplomové práce:
doc. Mgr. Karel Pastor, Ph.D.
Rok odevzdání: 2014

Vypracovala:
Kamila Dvorská
MAP, II. ročník

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem vytvořila tuto diplomovou práci samostatně za vedení pana doc. Mgr. Karla Pastora, Ph.D. a že jsem v seznamu použité literatury uvedla všechny zdroje použité při zpracování práce.

V Olomouci dne 19. března 2014

Poděkování

Děkuji panu doc. Mgr. Karlu Pastorovi, Ph.D. za pomoc při psaní této diplomové práce.

Obsah

Použité značení

$\mathbb{N}$	přirozená čísla
$\mathbb{Z}$	celá čísla
$\mathbb{Q}$	racionální čísla
$\mathbb{R}$	reálná čísla
$\mathbb{C}$	komplexní čísla
$C[a,b]$	spojité funkce na intervalu $[a,b]$
$B(x,r)$	uzavřená koule o poloměru r a středu x
$f_n \rightharpoonup f$	slabá konvergence

Úvod

Cílem práce je vytvořit sbírku příkladů z teorie Funkcionální analýzy, neboť: *Ve funkcionální analýze, právě tak jako v ostatních oblastech matematiky, se nové myšlenky stávájí pro studenty srozumitelnými pouze tehdy, když si je osvojí v praxi. Podobně se vyložené popisy konstrukcí nebo speciální početní postupy stanou použitelnými jen po určitém počtu zkusmých tápání.* [1]

Téměř žádná sbírka úloh nemůže čtenáři zcela přesně říct, co všechno by měl znát, než se do řešení úloh pustí. Můžeme snad říci, že řešení uvedených příkladů vyžaduje znalosti srovnatelné s učebním textem předmětu *Funkcionální analýza 1*, který je vyučován v současné době na Univerzitě Palackého v Olomouci pod zkratkou KMA\FA1.

Sbírka by pak měla primárně sloužit studentům předmětů *Funkcionální analýza 2* (KMA\FA2N) a *Nelineární funkcionální analýza*(KMA\NLFA), podle čehož je volena úroveň řešených příkladů.

V první kapitole této práce je připomenuto několik fundamentálních poznatků, s kterými bude dále v textu pracováno. První kapitola obsahuje též definice, které mají studentům ulehčit práci při samostatném zpracovávání příkladů. Definice jsou zde uvedeny i z důvodu nejednotnosti matematického značení. Veskrze jsou zde uváděny definice z knihy *Zápisky z funkcionální analýzy* od Jaroslava Lukeše(viz. [6]).

Protože je v práci využito poznatků matematika a fyzika J.W.S. Rayleigho, je v druhé kapitole krátce popsán jeho život a dílo.

V třetí a poslední kapitole jsou již vypracovány samotné příklady. Pro přehlednost je před většinou příkladů uváděna věta či lema, které se využívá při řešení samotného příkladu.

Áčkoliv důkazy jsou v matematice velice důležité, věty a lemata zde uvádíme

[1]Převzato z knihy *Rozpracovaná řešení z vyšší algebry*, Academia, Praha, 1987 a upraveno.

bez důkazů s ohledem na standardní rozsah práce a také proto, že uvádění důkazů není hlavním cílem práce.

Při zpracování tohoto textu bylo využito příkladů z knihy *Functional Analysis and Infinite-Dimenzional Geometry,* (viz. [3]), zvláště příkladů 3.20 a 3.21. Dále bylo využito u některých dalších příkladů řešení naznačené na přednáškách, zvláště pak příklady 3.9, 3.11 a 3.16.

Konce příkladů jsou označeny symbolem ♣.

1 Úvodní kapitola

Uveďme nyní několik základních definic a vět, bez jejichž znalosti bychom nemohli začít.

Definice 1.1. ***Úplným metrickým prostorem*** *rozumíme takový metrický prostor, ve kterém je každá cauchyovská posloupnost konvergentní.*

Definice 1.2. *Nechť X je metrický prostor s metrikou ϱ. Zobrazení $h : X \to X$ se nazývá* ***kontrakcí****, jestliže existuje $k \in [0, 1)$ tak, že platí*

$$\varrho(h(x), h(y)) \leq k\varrho(x, y)$$

pro každé $x, y \in X$.

Definice 1.3. ***Normovaným lineárním prostorem*** *rozumíme každý vektorový prostor W nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$ vybavený navíc normou $\| \cdot \|$, což je nezáporná funkce na $\mathbb{R}$ či $\mathbb{C}$ splňující následující podmínky:*

(a) $\|x\| \geq 0$, *přičemž* $\|x\| = 0$, *právě když* $x = 0$,

(b) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$,

(c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,

pro každé $x, y \in W$ a $\lambda \in \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$. Nerovnost (c) nazýváme ***trojúhelníková nerovnost. Banachovým prostorem***[2] *rozumíme každý normovaný lineární prostor, který je úplný.*

Poznámka 1.1. *Označení $L(X, Y)$ používáme pro prostor všech omezených lineárních zobrazení z X do Y. Je-li $X = Y$ používáme pro jednoduchost označení $L(X)$, což značí prostor $L(X, X)$. Prostor X^* značí duál k X.*

[2]Stefan Banach je pokládán za zakladatele funkcionální analýzy.

Definice 1.4. *Nechť X je normovaný lineární prostor. Řekneme, že množina $M \subset X$ je **relativně kompaktní**, jestliže z každé posloupnosti prvků M lze vybrat konvergentní podposloupnost v X.*

Definice 1.5. *Nechť M, N jsou normované lineární prostory. Řekneme, že lineární zobrazení z M do N je **kompaktní**, jestliže zobrazuje omezené množiny z M na množiny relativně kompaktní v N.*

Definice 1.6. *Množina M v metrickém prostoru se nazývá **prekompaktní**[3], jestliže ke každému $\epsilon > 0$ existuje v M konečná ϵ-síť, tedy konečná množina $x_1, ..., x_n \in M$ s vlastností $\cup_{i=1}^{n} U(x_i, \epsilon) \supset M$.* [4]

Definice 1.7. *Nechť $T \in L(X, Y)$, kde X, Y jsou normované lineární prostory. Definujme normu*

$$\|T\| := sup\{\|Tx\|_Y, \|x\|_X \leq 1\}.$$

Definice 1.8. ***Prostorem se skalárním součinem*** *rozumíme každý vektorový prostor H nad $\mathbb{R}$ či $\mathbb{C}$, v němž pro každé dva prvky x, y je definovám skalární součin (x, y) jakožto prvek $\mathbb{R}$ či $\mathbb{C}$ splňující následující podmínky:*

(a) $(x, x) \geq 0$, *přičemž* $(x, x) = 0$, *právě když* $x = 0$,

(b) $(x, y) = \overline{(y, x)}$, [5]

(c) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$, $(x, \lambda y) = \overline{\lambda}(x, y)$, $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$,

*kde $\lambda \in \mathbb{R}$ či $\mathbb{C}$ a $x, y, z \in H$. **Hilbertův prostor** je každý prostor se skalárním součinem, který je úplný.*

Definice 1.9. *Nechť H je prostor se skalárním součinem. Pak*

$$\|x\| := \sqrt{(x, x)}, \quad \forall x \in H.$$

[3]Někdy též totálně omezená.
[4]Symbolem $U(x_i, \epsilon)$ značíme uzavřenou kouli o středu x_i a poloměru ϵ.
[5]Symbolem $\overline{w}$ rozumíme komplexně sdružené číslo k číslu w.

Věta 1.1. *Nechť H je prostor se skalárním součinem. Pak zobrazení $x \to \|x\|$ je norma na H, kde $\|x\|$ bereme z předchozí definice.*

Důkaz: [6], str. 7.

Definice 1.10. *Prostor c_0 definujeme jako prostor všech číselných posloupností, které konvergují k nule.*

Definice 1.11. *Pro $p \in \langle 1, \infty)$ značíme l^p prostor všech číselných posloupností $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, které splňují nerovnost $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < +\infty$. Na prostoru l^p uvažujeme normu*

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Prostor l^∞ je prostor všech omezených číselných posloupností s normou

$$\|x\|_\infty = sup \{|x_i|, i \in \mathbb{N}\}.$$

Definice 1.12. ***Algebrou*** *A nad tělesem $\mathbb{C}$ rozumíme vektorový prostor, kde je navíc definováno vnitřní násobení, které je asociativní, distributivní vůči sčítání a splňuje rovnosti*

$$\lambda(ab) = (\lambda a)b = (\lambda b)a$$

pro $\lambda \in \mathbb{C}$, $a, b \in A$. ***Jednotka algebry*** *je takový její prvek e, pro nějž*

$$xe = ex = x$$

pro každé $x \in A$. ***Banachova algebra*** *A je navíc opatřena normou, v níž A je Banachův prostor a násobení je svázáno s normou podmínkou*

$$\|ab\| \leq \|a\| \|b\|.$$

Řekneme, že prvek x náležící Banachově algebře A je ***invertibilní****, existuje-li takové $z \in A$, pro něž platí*

$$xz = zx = e.$$

Prvek z značíme symbolem x^{-1}.

Poznámka 1.2. *Prostor $L(X)$ všech lineárních omezených operátorů na Banachově prostrou X tvoří Banachovu algebru, definujeme-li násobení jako skládání zobrazení.*

Věta 1.2. *Nechť $T \in L(H_1, H_2)$, kde H_1, H_2 jsou Hilbertovy prostory. Potom existuje právě jedno zobrazení $T^* : H_2 \to H_1$ tak, že*

$$(Tx, y) = (x, T^*y) \text{ pro každé } x \in H_1, y \in H_2.$$

Přitom $T^* \in L(H_2, H_1)$ a $\|T^*\| = \|T\|$.

Důkaz: [6], str. 74, 8.5.

Definice 1.13. *Zobrazení T^* z předchozí věty se nazývá* ***hermiteovsky adjungované*** *k zobrazení T. Zobrazení $T \in L(H)$ se nazve hermiteovské, jestliže $T = T^*$. Pokud*

$$TT^* = T^*T,$$

říkáme, že T je ***normální****.*

Definice 1.14. *Nechť X je Banachův prostor. Komplexní číslo λ se nazývá vlastní hodnotou operátoru $T \in L(X)$, existuje-li $x \neq 0$, pro něž platí $Tx = \lambda x$. Množinu všech vlastních hodnot operátoru T značíme $\sigma_p(T)$ a nazýváme* ***bodovým spektrem*** *operátoru T. Řekneme, že komplexní číslo λ leží ve* ***spektru*** *$\sigma(T)$ operátoru T, jestliže buď operátor $T - \lambda I$ není prostý nebo obor hodnot operátoru $(T - \lambda I)$ je různý od X.*

Definice 1.15. *Nechť X je Banachův prostor, $x \in X$ a $\sum x_i$ je řada v X. Řekneme, že řada $\sum x_i$ je* ***bezpodmínečně konverguje k*** *x, jestliže*

$$\sum x_{\Pi(i)} = x$$

pro každou permutaci přirozených čísel Π.

2 John William Strutt, třetí baron Rayleigh

Popišme nyní krátce život jedné uznávané osobnosti historie:

2.1 Studium

John William Strutt, narozený v roce 1842, byl synem druhého barona Rayleigh z Terlingu, Withamu, v kraji Essexe. Jako dítě měl John William Strutt chatrné zdraví. V mládí musel studia několikrát přerušit, neboť mu zdraví nedovolovalo účastnit se výuky. Později navštěvoval internátní školu ve Warnerově a v té době se u něho začalo objevovat matematické nadání, ovšem nic nenaznačovalo tomu, že by toto nadání bylo až tak významné, jak se později ukázalo.

Od roku 1861 studoval Rayleigh na univerzitě v Cambridge, kde získal v roce 1865 cenu za nejlepšího studenta v oboru matematiky.

Během studií se seznámil s Edwardem Routhem, který byl vynikajícím matematikem. Rayleigh se od něho učil, že *matematika je něčím víc než jen jakousi nudnou vědou.* Routh učil Rayleigha, jak volit co nejvhodnějším metody pro řešení nejrůznějších matematických problémů.V této době se už začalo ukazovat, že Rayleigh byl odpravdu neuvěřitelně nadaným žákem.

Bylo zvykem, že mladí britští mužové se vydávali po studiích na cestu po Evropě. Rayleigh se vydal též na cestu, avšak překvapivě se vydal do Spojených států.

Po návratu z Ameriky si koupil vybavení k vědeckým experimentům. Ačkoliv udělal mnoho významných objevů nelze tento fakt přičítat jeho drahému vybavení; naopak, Rayleigh získal významné výsledky právě s levným vybavením.

V době studií na Cambridge se seznámil s dívkou, kterou si vzal za manželku. Brzy po svatbě však dostal revmatické horečky, které málem ukončily jeho vědeckou činnost. Naštestí nemoc přestál a byla mu doporučena cesta do Egypta. Vydal se na ni. Během cesty se plavil i po Nilu.

Bylo zajímavé, že právě po návratu z této cesty začal Rayleigh zpracovávat hlavní část své práce o teorii zvuku.

2.2 Univerzita v Cambridge

V roce 1879 nastoupil Rayleigh na univerzitu v Cambridge, kde až do roku 1884 byl druhým profesorem experimentální fyziky.

V roce 1884 se Rayleigh vzdal místa na univerzitě a pokračoval ve výzkumu doma. Miloval vědecký výzkum, ale neměl příliš v lásce náročnou administrativu, což přispělo k jeho rozhodnutí opustit univerzitu, ačkoliv na druhé straně stáli jeho kolegové, kteří se snažili ho přemluvit, aby neodcházel. Přemluvit Rayleigho se jim nepodařilo, protože on přesně věděl, co od života chtěl; *chtěl dělat vědu a jenom vědu, nic jiného.*

Jednou z výhod privilegovaného Rayleighova postavení byl bezesporu fakt, že si nepotřeboval svojí akademickou pozicí vydělávat na živobytí.

Samotou po odchodu z Cambridge v žádném případě netrpěl. Navštěvoval Londýn, kde učil a také navštěvoval mnoho věděckých společností.

2.3 Dílo a životní úspěchy

Většina historiků a přírodovědců oceňuje jeho vědeckou důkladnost a přesnost, která mu vynesla celou řadu ocenění.

Rayleigh se stal členem Královské společnosti v roce 1873. Dostal královské vyznamenání od společnosti v roce 1882 a stal se tajemníkem společnosti v roce 1885 a dostal Copleyho medaili v roce 1899. Rayleigh byl prezidentem Londýnské matematické společnosti v letech 1876 až 1878 a byla mu udělena De Morganova medaile v roce 1890.

Kompletní seznam Rayleigho prací čítá na 446 vědeckých prací, které pokrývají až neuvěřitelně široké spektum témat v aplikované matematice a fyzice. Z matematických děl se zmiňme o pracích zabývajících se Besselovými funkcemi, vztahem Besselových funkcí a Laplaceových funkcí a Legendreovými funkcemi.

Jeho práce z roku 1871 o teorii rozptylu podává vysvětlení, proč je obloha modrá.

Nejvýznamější objev učinil ve fyzice. Objev argonu mu v roce 1904 vynesl Nobelovu cenu za fyziku. Protože plyn odmítal chemicky reagovat, byl nazván argonem od řeckého slova pro neaktivní.

Rayleigh byl skromný a velkorysý muž. Daroval výtěžek Nobelovy ceny univerzitě v Cambridge.

Zemřel v roce 1919.

Na zdi kaple svatého Ondřeje ve Westminsterském opatství byla v roce 1921 na jeho počest odhalena mramorová deska s tímto nápisem: *An Unerring Leader in the Natural Knowledge* [6]

[6] Neomylný vůdce v rozvoji přírodního poznání.

3 Řešené příklady

3.1 Uzavřenost množin

Začněme zkoumáním uzavřenosti množin. V topologickém prostoru je množina uzavřená, je-li její doplněk množinou otevřenou. Ekvivalentní podmínka potom říká, že množina je uzavřená v topologickém prostoru právě tehdy, když se rovná svému uzávěru. Platnost této podmínky je zřejmá. Zúžíme-li naše úvahy na metrické prostory, je ekvivalentní podmínka pro uzavřenost množiny taková: množina M je uzavřená v metrickém prostoru právě tehdy, když každá konvergentní posloupnost prvků množiny M má limitu ležící zase v množině M. Důkaz [7], str.77.

Příklad 3.1. *Dokažme, že množina* $M := \{f \in C[0,1], f(0) = 0\}$ *je uzavřeným podprostorem prostoru* $C[0,1]$*. Uvažujme normu*

$$\|x - y\| = sup_{t\in[0,1]}|x(t) - y(t)|$$

pro každé $x, y \in C[0,1]$.

Řešení: Dokázat, že množina M je podprostorem prostoru $C[0,1]$ je zřejmé, neboť $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall f, g \in M$ platí $(\alpha f + \beta g)(0) = \alpha f(0) + \beta g(0) = 0$.

Zabývejme se nyní uzavřeností. Pro každou konvergentní posloupnost funkcí z množiny M musíme dokázat, že konverguje k prvku z množiny M, tj.

$$\forall \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M : f_n \to f \text{ platí, že } f \in M.$$

Zvolme libovolně $\epsilon > 0$, pak vzhledem k tomu, že $f_n \to f$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $n \geq n_0$ platí

$$|f_n(0) - f(0)| \leq sup_{t\in[0,1]}|f_n(t) - f(t)| = \|f_n - f\| < \varepsilon.$$

Protože $f_n \in M$, pak $f_n(0) = 0$ a pak $|f(0)| < \varepsilon$. Vzhledem k libovolné volbě $\varepsilon > 0$ dostáváme $f(0) = 0$, a proto $f \in M$. Celkově tedy M je uzavřený podpostor prostoru M. ♣

Stejný myšlenkový postup použijeme i u dalšího příkladu.

Příklad 3.2. *Ukažme, že prostor* $M = \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^1, \sum_{n=0}^{\infty} x_n = 0\}$ *je uzavřený v* l^1.

Řešení: Uvažujme posloupnost posloupností $\{\{x_n^k\}_{n=1}^{\infty}\}_{k=1}^{\infty} \in M$ takovou, že

$$\{x_n^k\}_{n=1}^{\infty} \to \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$$

pro $k \to +\infty$. Dokažme, že pak $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in M$. Pro libovolné $\epsilon > 0$ existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ tak, že pro každé $k \geq k_0$ platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n - x_n^k) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - x_n^k| < \varepsilon,$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} x_n = -\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - x_n^k) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n^k - x_n| < \varepsilon,$$

pak $-\varepsilon < \sum_{n=1}^{\infty} x_n < \varepsilon$.
Vzhledem k libovolné volbě $\epsilon > 0$, dostáváme $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = 0$. Tedy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in M$ a tím je dokázána uzavřenost množiny M v prostoru l^1. ♣

Příklad 3.3. *Nechť* X *je Banachův prostor,* Y *je normovaný lineární prostor a nechť* $T \in L(X, Y)$. *Jestliže existuje* $\delta > 0$ *tak, že*

$$\|T(x)\| \geq \delta \|x\|$$

pro každé $x \in X$, *pak* $T(X)$ *je uzavřená množina v* Y. *Dokažte.*

Řešení: Nechť $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \in T(X)$ a nechť $lim_{n=\infty} z_n = z$. Najděme $x_n \in X$ tak, že $Tx_n = z_n$. Pak

$$\|x_n - x_k\| \leq \frac{1}{\delta} \|Tx_n - Tx_k\| = \frac{1}{\delta} \|z_n - z_k\|.$$

tudíž z cauchyovskosti posloupnosti $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ plyne, že posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je také cauchyovská, a díky úplnosti prostorů pak platí, že $lim_{n=\infty} x_n = x$. Z jednoznačnosti existence limity dostáváme $Tx = z$, a proto $z \in T(X)$, čímž dostáváme uzavřenost množiny $T(X)$ v Y. ♣

Předchozí příklad zobecňuje lema uvedené v literatuře [6], str.50, 5.2.

3.2 Spojitý a lineární operátor

V dalším budeme zjišťovat, zda operátor, případně funkcionál, je lineární a spojitý.

Příklad 3.4. *Zjistěte, zda operátor $Lf(t) := f(t^3)$ je lineární a spojitý na prostoru $C\,[0,1]$, kde uvažujeme normu $\|f\| = sup\{|f(t)|; t \in [0,1]\}$. Pokud je, určete jeho normu.*

Řešení: Zjišťovat linearitu je triviální. Platí totiž, že

$$L(af(t) + bf(t)) = aLf(t) + bLf(t),\ t \in [0,1]$$

a to pro $\forall a, b \in \mathbb{R}$ a pro každé $f, g \in C[0,1]$. Dále platí

$$L(f+g)(t) = (f+g)(t^3) = f(t^3) + g(t^3) = Lf(t) + Lg(t),$$

a to všechno pro $\forall f, g \in C\,[0,1]$.
Zabývejme se spojitostí.

Platí

$$\begin{aligned} \|L\| &= sup\{|Lf(t)|, f \in B, t \in [0,1]\} \\ &= sup\{|f(t^3)|, f \in B, t \in [0,1]\} \\ &\leq 1, \forall t \in C\,[0,1]\,. \end{aligned}$$

Tedy operátor je spojitý. Spočtěme jeho normu. Pokud $f \equiv 1$, pak $Lf = 1$, potom $\|Lf\| = 1$ a proto $\|L\| = 1$. ♣

Naskýtá se otázka, zdalipak pro jinou volbu normy bude operátor L také spojitý. Pro jinou volbu normy bychom museli spojitost znovu vyšetřit. Jednodušší případ však nastane v konečně dimenzionálních prostorech, kde jsou všechny normy ekvivalentní([6], str. 2, 1.7), a proto spojitost operátoru v těchto prostorech nezávisí na volbě normy.

Příklad 3.5. *Určete, zda následující funkcionál $F : \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n^2}$ je na prostoru c_0 lineární a spojitý. Pokud je, určete jeho normu.*

Řešení: Ukažme namísto linearity a spojitosti zadaného funkcionálu F, tyto vlastnosti u obecněji zadaného funkcionálu T, kde T má tvar $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$, kde posloupnost $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \in (c_0)^* = l^1$(Viz. [3], str. 44.) a posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in c_0$.

Linearita funkcionálu T je zřejmá. Spojitost plyne z odhadu

$$|Tx| = |\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n| \leq \|x\| \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| = \|x\| \|\alpha\|.$$

Navíc $\|T\| \leq \|\alpha\|$.

Položíme-li $x = (sign\alpha_1, \ldots, sign\alpha_k, 0, 0, \ldots)$, je určitě $x \in c_0$ a $\|x\| \leq 1$ a $Tx = |\alpha_1| + \ldots |\alpha_k|$, proto $\|T\| = \|\alpha\|$. Vzhledem k tomu, že funkcionál F je zvláštním případem obecněji zadaného funkcionálu T, je i F lineární a spojitý a navíc platí $\|F\| = \|\alpha\|$. Pro nás je $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{n^2}\}_{n=1}^{\infty}$, potom

$$\|\alpha\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Sečíst tuto sumu můžeme například pomocí Fourierovy řady. Vyjde $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, viz. například [1], str. 696. ♣

Obecnější věty nalezneme v [7], str.187 až 195, kde dokonce charakterizujeme spojité lineární funkcionály na prostorech l^p, kde $1 \leq p < \infty$, nebo na prostoru $C\,[a, b]$. Jde o to pochopit, že v daných prostorech hledáme reprezentaci spojitých lineárních funkcionálů, kde daná reprezentace obvykle obsahuje nekonečnou řadu nebo integrál.

3.3 Pevné body

V dalším příkladě využijeme Banachovu větu, která platí v úplných metrických prostorech. Podobnou větou v Banachových prostorech je Schauderova věta([6], str. 183, 23.13). Nevýhodou Banachovy věty je předpoklad, že zobrazení f musí být kontrakcí. Splnění tohoto předpokladu bývá často problémem. Teorie pevných bodů je popsána například v literatuře [4] .

Věta 3.1. *(Banachova věta o kontrakci) Je-li X úplný metrický prostor a zobrazení $f : X \to X$ kontrakce, potom existuje právě jeden pevný bod zobrazení f.*

Důkaz: [6], str. 179, 23.3.

Příklad 3.6. *Nechť B je uzavřená jednotková koule Banachova prostoru X a zobrazení $f : B \to X$ je kontrakce s konstantou k, kde $k \in (0, 1)$. Jestliže $f(\partial B) \subset B$, pak má zobrazení f pevný bod.*

Řešení: Využijeme nejznámější větu o pevném bodě, Banachovu větu o kontrakci(Věta 3.1). Předpoklady Banachovy věty naše zobrazení f nesplňuje. Uvažujme tedy pomocné zobrazení

$$h(x) = \frac{x + f(x)}{2},$$

kde $x \in B$. Jestliže bod x je pevným bodem zobrazení h, pak je určitě pevným bodem zobrazení f.

Ověřme nyní předpoklady Banachovy věty pro funkci h. Zjistěme, zda je B úplný metrický prostor. Jednotková koule B je dle předpokladů uzavřená, tudíž každá konvergentní posloupnost prvků z B má limitu ležící zase v B. Ukažme, že zobrazení h je kontrakcí. Platí totiž

$$\begin{aligned}
\|h(x) - h(y)\| &= \|\frac{x + f(x)}{2} - \frac{y + f(y)}{2}\| \\
&\leq \frac{1}{2}(\|x - y\| + k\|x - y\|) \\
&= \frac{1}{2}(1 + k)\|x - y\|, \forall x, y \in B, \text{ kde } \frac{1}{2}(1 + k) \in (0, 1).
\end{aligned}$$

Ukažme nyní, že $h : B \to B$. Protože dle předpokladů $f(\partial B) \subset B$, pak určitě pro $y \in \partial B$ platí, že $\|f(y)\| \leq 1$. Nejprve zjistíme, zda $h(0) \in B$, to je ekvivalentní podmínce, že $\|h(0)\| \leq 1$. Tedy

$$\begin{aligned}
\|h(0)\| &= \|\frac{0 + f(0)}{2}\| \\
&= \frac{1}{2}\|f(0) - f(y) + f(y)\| \\
&\leq \frac{1}{2}\left[\|f(0) - f(y)\| + \|f(y)\|\right] \\
&\leq \frac{1}{2}\|f(0) - f(y)\| + \frac{1}{2} \\
&\leq \frac{1}{2}k\|y\| + \frac{1}{2} \\
&< 1,
\end{aligned}$$

proto platí $h(0) \in B$.

Nyní dokažme, že $h(x) \in B$ pro $x \in B$, $x \neq 0$, to je zase ekvivalentní podmínce, že $\|h(x)\| \leq 1$. Platí

$$\begin{aligned}
\|h(x)\| &= \frac{1}{2}\|f(x) - f(\frac{x}{\|x\|}) + f(\frac{x}{\|x\|})\| + \frac{1}{2}\|x\| \\
&\leq \frac{1}{2}\|f(\frac{x}{\|x\|})\| + \frac{1}{2}\|f(x) - f(\frac{x}{\|x\|})\| + \frac{1}{2}\|x\| \\
&\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}k\|x - \frac{x}{\|x\|}\| + \frac{1}{2}\|x\| \\
&\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}k|\|x\| - 1| + \frac{1}{2}\|x\| \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}k(1 - \|x\|) + \frac{1}{2}\|x\| \\
&\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - \|x\|) + \frac{1}{2}\|x\| \\
&= 1, \text{ kde } x \in B
\end{aligned}$$

a kde jsme využili toho, že $\frac{x}{\|x\|} \in B$. Proto lze využít Banachovu větu o kontrakci pro zobrazení h. Tím je důkaz hotov. ♣

Příklad 3.7. *Nechť* (P, ϱ) *je úplný metrický prostor. Zobrazení* $f : P \to P$ *nazveme expandujícím, existuje-li taková konstanta* $\beta > 1$*, že*

$$\varrho(f(x), f(y)) \geq \beta\varrho(x, y), \ \forall x, y \in P.$$

Nechť f *je expandující zobrazení na* P *a* $f(P) = P$*. Ukažte, že* f *má právě jeden pevný bod.*

Řešení: Použijeme zase Banachovu větu o pevném bodě. Protože zobrazení f nesplňuje předpoklady této věty, zjistěme, zda tyto předpoklady splňuje inverzní zobrazení f^{-1}. Nejprve dokažme, že f^{-1} existuje, tedy dokažme, že zobrazení f je bijektivní. Injekce plyne z expanze, tedy z nerovností

$$\varrho(f(x), f(y)) \geq \beta\varrho(x, y) > 0, \text{ pro } \forall x \neq y,$$

které implikují $f(x) \neq f(y)$. Surjekce plyne z toho, že $f : P \to P$. Ukážeme postupně, že zobrazení f^{-1} je kontrakcí. Platí

$$\varrho(f(x), f(y)) \geq \beta\varrho(x, y).$$

Místo x uvažujme nyní $f^{-1}(x)$ a místo y uvažujme $f^{-1}(y)$

$$\varrho(f(f^{-1}(x)), f(f^{-1}(y))) \geq \beta\varrho(f^{-1}(x), f^{-1}(y)).$$

Jelikož platí, že $f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x))$ a $f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x))(f$ je bijektivní), můžeme psát

$$\begin{aligned} \varrho(f^{-1}(f(x)), f^{-1}(f(y))) &\geq \beta\varrho(f^{-1}(x), f^{-1}(y)), \\ \frac{1}{\beta}\varrho(x, y) &\geq \varrho(f^{-1}(x), f^{-1}(y)), \text{ pro } \forall x, y \in P, \end{aligned}$$

kde $\frac{1}{\beta} < 1$, protože $\beta > 1$. Je-li bod x pevným bodem zobrazení f^{-1}, pak je určitě pevným bodem zobrazení f, neboť platí

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) &= x, \\ f(f^{-1}(x)) &= f(x), \\ x &= f(x). \end{aligned}$$

Tím je dokázana existence pevného bodu. ♣

3.4 Rovnoběžníkové pravidlo, normy

Příklad 3.8. *Nechť X je normovaný lineární prostor. Dokažte, že pro každé x, y platí:*

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|.$$

Řešení: Rozepsáním se zbavme absolutní hodnoty:

$$-\|x - y\| \leq \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|.$$

Předchozí nerovnosti odvodíme následovně:

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|, \text{ tedy } \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|,$$
$$\|y\| = \|y - x + x\| \leq \|x - y\| + \|x\|, \text{ tedy } -\|x - y\| \leq \|x\| - \|y\|. \clubsuit$$

Věta 3.2. *V prostoru se skalárním součinem X platí tzv. rovnoběžníkové pravidlo, tj. rovnost*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

pro každé $x, y \in X$.

Důkaz: Zřejmý. Výpočtem.

Příklad 3.9. *Ukažme, že platí-li v reálném normovaném lineárním prostoru X pro normu rovnoběžníkové pravidlo, pak je vztahem*

$$(x, y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2), \tag{1}$$

kde $x, y \in X$, určen skalární součin.

Řešení: Dokažme postupně, že jsou splněny všechny vlastnosti skalárního součinu. Protože jsme v reálném normovaném lineárním prostoru X, platí, že $(x, y) = \overline{(y, x)} = (y, x)$ pro každé $x, y \in X$, a samozřejmě $\overline{\lambda} = \lambda$, kde $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Dokažme, že $(x,x) \geq 0$ pro každé $x \in X$. To, že $(x,x) = 0$ právě tehdy, když $x = 0$, je zřejmé. Napišme tedy

$$(x,x) = \frac{1}{4}(\|x+x\|^2 - \|x-x\|^2) = \frac{1}{4}\|2x\|^2 = \|x\|^2 \geq 0.$$

2. Nyní ukažme, že $(x,y) = (y,x)$ pro každé $x, y \in X$. Vzhledem k tomu, že

$$\|x-y\|^2 = \|(-1)(y-x)\|^2 = |-1|\|y-x\|^2 = \|y-x\|,$$

je splněna druhá podmínka skalárního součinu.

3. Dokažme nyní, že platí $(x+y,z) = (x,z) + (y,z)$ pro každé $x, y, z \in X$. Využitím rovnoběžníkového pravidla postupně dostáváme:

$$\begin{aligned}
\|x+y+z\|^2 + \|x-y+z\|^2 &= 2(\|x+z\|^2 + \|y\|^2),\\
\|x+y-z\|^2 + \|x-y-z\|^2 &= 2(\|x-z\|^2 + \|y\|^2),\\
\|x+y+z\|^2 + \|y-x+z\|^2 &= 2(\|y+z\|^2 + \|x\|^2),\\
\|x+y-z\|^2 + \|y-x-z\|^2 &= 2(\|y-z\|^2 + \|x\|^2).
\end{aligned}$$

Sečtením první a třetí rovnosti a od nich odečtením druhé a čtvrté rovnosti dostaneme:

$$\begin{aligned}
&\|x+y+z\|^2 + \|x-y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2 - \|\ x\ -y-z\|^2 +\\
&+\|x+y+z\|^2 + \|y-x+z\|^2 - \|x+y-z\|^2 - \|\ y\ -x-z\|^2 =\\
&= 2(\|x+z\|^2 + \|y\|^2 - \|x-z\|^2 - \|y\|^2 + \|y+z\|^2 + \|x\|^2 - \|y-z\|^2 - \|x\|^2),
\end{aligned}$$

a odečtením dostaneme

$$\|x+y+z\|^2 - \|x+y-z\|^2 = \|x+z\|^2 - \|x-z\|^2 + \|y+z\|^2 - \|y-z\|^2,$$

což ale není nic jiného než

$$\begin{aligned}
4(x+y,z) &= 4(x,z) + 4(y,z),\\
(x+y,z) &= (x,z) + (y,z).
\end{aligned}$$

Podařilo se nám tedy dokázat třetí podmínku skalárního součinu.

4. Naposledy dokažme $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ pro každé $x, y \in X$ a $\lambda \in \mathbb{R}$:

   i. Pro $\lambda = 0$ dostáváme:

   $$(0x, y) = (0, y) = \frac{1}{4}(\|0 + y\|^2 - \|0 - y)\|^2) = 0 = 0(x, y).$$

   ii. Pro $\lambda \in \mathbb{Z}$ dostáváme:

   $$(x, y) + (-x, y) = (x - x, y) = (0, y) = 0,$$

   proto $(-x, y) = -(x, y)$.

   iii. Pro $\lambda \in \mathbb{N}$ dostáváme:

   $$(\lambda x, y) = (\underbrace{x + x + \cdots + x}_{\lambda\text{–krát}}, y) = (x, y) + \cdots + (x, y) = \lambda(x, y),$$
   $$(-\lambda x, y) = (\underbrace{-x - x - \cdots - x}_{\lambda\text{–krát}}, y) = -(x, y) - \cdots - (x, y) = -\lambda(x, y).$$

   iv. Pro $\lambda \in \mathbb{Q}$, $\lambda = \frac{m}{n}$, kde $m, n \in \mathbb{Z}$ dostáváme:

   $$n(\lambda x, y) = (n\lambda x, y) = (mx, y) = m(x, y),$$
   $$(\lambda x, y) = \frac{m}{n}(x, y) = \lambda(x, y).$$

   v. Pro $\lambda \in \mathbb{R}$ platí, že existuje posloupnost $\{\lambda_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset \mathbb{Q}$ taková, že platí $\lambda_n \to \lambda$ pro $n \to +\infty$. Potom dostáváme:

   $$(\lambda x, y) = (lim_{n\to+\infty}\lambda_n x, y) = lim_{n\to+\infty}\lambda_n(x, y) = \lambda(x, y),$$

   kde jsme využili toho, že skalární součin je spojitou funkcí v obou složkách. ♣

3.5 Příklady v Hilbertových prostorech

Věta 3.3. *(Rayleighova věta) Je-li $T \in L(X)$ hermiteovský, je*

$$\|T\| = sup\{|(Tx, x)|, \|x\| \leq 1\}.$$

Důkaz: [6], str. 75, 8.9.

Příklad 3.10. *Nechť $T \in L(H)$ je hermiteovský operátor, kde H je Hilbertův prostor, pak $\|T^2\| = \|T\|^2$. Dokažte.*

Řešení: Je-li operátor T hermiteovský, pak je i operátor T^2 hermiteovský. Jsou splněny předpoklady Rayleighovy věty(Věta 3.3), lze tedy psát:

$$\|T\|^2 = sup\{(Tx, Tx), \|x\| \leq 1\} = sup\{(T^2x, x), \|x\| \leq 1\} = \|T^2\|.$$

Tím je tvrzení dokázáno. ♣

Platí, že každý hermiteovský operátor je normální. Zobecněme proto nyní poslední příklad na normální operátory.

Příklad 3.11. *Nechť $T \in L(H)$ je normální operátor, kde H je Hilbertův prostor, pak $\|T^2\| = \|T\|^2$. Dokažte.*

Řešení: Rovnost dokažme dvěma nerovnostmi:

1. První dokažme nerovnost $\|T^2\| \leq \|T\|^2$. Vzhledem k tomu, že $L(X)$ je Banachova algebra(Pozn.1.2), můžeme psát

   $$\|T^2\| \leq \|T\|\|T\| = \|T\|^2.$$

   Tím je nerovnost dokázána.

2. Nerovnost $\|T^2\| \geq \|T\|^2$ platí, neboť

$$\begin{aligned}
\|T\|^2 &= sup\{(Tx, Tx), \|x\| \leq 1\} \\
&= sup\{(T^*Tx, x), \|x\| \leq 1\} \\
&\leq sup\{\|T^*T\|\|x\|^2, \|x\| \leq 1\} \\
&= \|T^*T\| \\
&= sup\{\sqrt{(T^*Tx, T^*Tx)}, \|x\| \leq 1\} \\
&= sup\{\sqrt{(Tx, TT^*Tx)}, \|x\| \leq 1\} \\
&= sup\{\sqrt{(Tx, T^*TTx)}, \|x\| \leq 1\} \\
&= sup\{\sqrt{(TTx, TTx)}, \|x\| \leq 1\} \\
&= \|T^2\|, \text{ proto pak} \\
\|T\|^2 &\leq \|T^2\|,
\end{aligned}$$

kde jsme využili Cauchy-Schwartzovu nerovnost, tj. $|(T, T^*)| \leq \|T\|\|T^*\|$ pro každé $T, T^* \in L(H)$, a toho, že T je normální operátor. Více Věta 1.2.♣

Příklad 3.12. *Nechť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost prvků Hilbertova prostoru. Jestliže $x_n \rightharpoonup x$ a jestliže $\|x_n\| \to \|x\|$ pro $n \to \infty$, pak $x_n \to x$.*

Řešení: Protože v Hilbertových prostorech platí $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$, lze dále psát

$$\begin{aligned}
\|x_n - x\|^2 &= (x_n - x, x_n - x) \\
&= (x_n, x_n) - (x_n, x) - (x, x_n) + (x, x) \\
&= \|x_n\|^2 - (x_n, x) - \overline{(x_n, x)} + \|x\|^2
\end{aligned}$$

a pro $n \to \infty$ dostáváme

$$\|x_n - x\|^2 \to \|x\|^2 - (x, x) - (x, x) + \|x\|^2 = 0,$$

kde jsme využili toho, že v Hilbertově prostoru X platí podle Riezovy věty([6], str. 19, 2.9.) pro každou $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$: $x_n \rightharpoonup x$ právě tehdy, když $(x_n, y) \to (x, y)$ pro $\forall y \in X$.♣

Dokažme v následujícím příkladě uvedenou nerovnost:

Příklad 3.13. *Nechť M je podprostor reálného Hilbertova prostoru H a $x \in H$. Ukažte, že x je kolmé na H právě tehdy, když platí*

$$\|x\| \leq \|x - m\| \tag{2}$$

pro každé $m \in M$.

Řešení: " $\Rightarrow$ " Nechť x je kolmé na M, tj. $(x, m) = 0$ pro každé $m \in M$. Poté $\|x - m\|^2 = (x - m, x - m) = (x, x) + (m, m) - 2(x, m) = \|x\|^2 + \|m\|^2$ a nakonec

$$\begin{aligned} \|x - m\|^2 &= \|x\|^2 + \|m\|^2, \\ \|x - m\|^2 &\geq \|x\|^2, \\ \|x - m\| &\geq \|x\|. \end{aligned}$$

" $\Leftarrow$ " Dokažme druhou implikaci. Nechť platí $\|x\| \leq \|x - m\|$ pro $\forall m \in M$ pevné. Poté

$$\begin{aligned} \sqrt{(x, x)} &\leq \sqrt{(x - m, x - m)}, \\ (x, x) &\leq (x, x) + (m, m) - 2(x, m), \\ 2(x, m) &\leq (m, m). \end{aligned}$$

i. Pro $\lambda > 0$ platí, že pro $m \in M$ platí $\lambda m \in M$ a že

$$\begin{aligned} 2(x, \lambda m) &\leq (\lambda m, \lambda m), \\ 2\lambda(x, m) &\leq \lambda^2 (m, m), \\ 2(x, m) &\leq \lambda(m, m) \end{aligned}$$

a pro $\lambda \to 0^+$ máme $(x, m) \leq 0$.

ii. Pro $\lambda < 0$ platí, že pro $m \in M$ platí $\lambda m \in M$ a že

$$\begin{aligned}
2(x, \lambda m) &\leq (\lambda m, \lambda m), \\
2\lambda(x, m) &\leq \lambda^2(m, m), \\
2(x, m) &\geq \lambda(m, m)
\end{aligned}$$

a pro $\lambda \to 0^-$ máme $(x, m) \geq 0$.

Nerovnosti $(x, m) \leq 0$ a $(x, m) \geq 0$ dávají kolmost prvků x a m. Dohromady tedy dostáváme, že x je kolmé na M. ♣

3.6 Spektrum, norma a kompaktnost operátoru

Než přejdeme k příkladům, uveďme větu:

Věta 3.4. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory. Pak*

$$L_f(X,Y) \subset\subset L_c(X,Y),$$

kde $L_f(X,Y)$ značí množinu všech konečně dimenzionálních operátorů z X do Y a $L_c(X,Y)$ značí množinu všech kompaktních operátorů z X do Y .

Důkaz: [6], str. 30, 2.47.

Věta 3.5. *Každý nenulový prvek spektra kompaktního operátoru $T \in L(X)$ je jeho vlastním číslem, tj.*

$$\sigma(T) \subset \{0\} \cup \sigma_p(T).$$

Důkaz: [6], str. 56, 5.29.

Příklad 3.14. *Uvažujme operátor $T \in L(C\,[0,1])$, který je dán předpisem*

$$Tf(x) = x^2 f(x).$$

Určete normu $\|T\|$, bodové spektrum $\sigma_p(T)$, spektrum $\sigma(T)$ a zjistěte, zda T je kompaktní operátor.

Řešení:

1. Určeme normu

   $$\|T\| = sup\{\|Tf\|, \|f\| \leq 1\} = sup\{max\left\{|x^2 f(x)|, x \in [0,1]\right\}, \|f\| \leq 1\} = 1.$$

2. Dále určeme bodové spektrum $\sigma_p(T)$. Pokud by existovalo $\lambda \in \sigma_p(T)$, pak bychom mohli najít $f \neq 0$ tak, že

   $$\begin{aligned} (T - \lambda I)f &= 0, \\ Tf(x) - \lambda f(x) &= 0, \quad \forall x \in [0,1]\,, \\ x^2 f(x) - \lambda f(x) &= 0, \quad \forall x \in [0,1]\,, \\ (x^2 - \lambda) f(x) &= 0, \quad \forall x \in [0,1]\,. \end{aligned}$$

Protože $f(x_0) \neq 0$ pro nějaké $x_0 \in [0,1]$ a protože $x^2 - \lambda \neq 0$ alespoň pro nějaké $x \in [0,1]$, dostáváme spor s tím, že $(x^2 - \lambda)f(x) = 0$ pro každé $x \in [0,1]$. Proto neexistuje $\lambda \in \sigma_p(T)$, a tudíž $\sigma_p(T) = \emptyset$.

3. Určeme spektrum $\sigma(T)$. Ukažme, že operátor $T - \lambda I$ není surjektivní. Ukažme to sporem.

   Protože $\|T\| = 1$, pak pro $\lambda \in \sigma(T)$ platí $|\lambda| \leq \|T\| = 1$. Nechť $T - \lambda I$ je tedy surjektivní operátor, tj. pro každé $g \in C([0,1])$ existuje $f \in C([0,1])$ tak, že

$$\begin{aligned} Tf(x) - \lambda f(x) &= g(x), \ \forall \ x \in [0,1], \\ x^2 f(x) - \lambda f(x) &= g(x), \\ (x^2 - \lambda) f(x) &= g(x), \\ f &= \frac{g}{x^2 - \lambda}. \end{aligned}$$

   Pro $\lambda \in [0,1]$ existuje $x \in [0,1]$ tak, že rovnost $x^2 - \lambda = 0$ implikuje $g(x) = 0$. Což je však spor.

   Proto $\sigma(T) = [0,1]$.

4. Ukažme, že operátor T není kompaktní. Pokud by operátor T byl kompaktní, muselo by platit podle věty 3.5, že

$$\begin{aligned} \sigma(T) &\subset \{0\} \cup \sigma_p(T), \quad \text{tedy} \\ [0,1] &\subset \{0\} \cup \emptyset, \end{aligned}$$

   Což očividně není splněno. Proto operátor T není kompaktní.♣

Příklad 3.15. *Uvažujme operátor $T \in L(C[0,1])$, který je dán předpisem*

$$Tf(x) = x^2 f(0).$$

Určete normu $\|T\|$, bodové spektrum $\sigma_p(T)$, spektrum $\sigma(T)$ a zjistěte, zda T je kompaktní operátor.

Řešení:

1. Určeme normu

   $$\|T\| = sup\{\|Tf\|, \|f\| \leq 1\} = sup\{max\left\{|x^2 f(0)|, x \in [0,1]\right\}, \|f\| \leq 1\} = 1.$$

2. Dále určeme bodové spektrum $\sigma_p(T)$ prvně pro $\lambda \neq 0$: pro $\lambda \in \sigma_p(T)$ existuje $f \neq 0$ tak, že

   $$\begin{aligned} (T - \lambda I)f &= 0, \\ x^2 f(0) - \lambda f(x) &= 0, \quad \forall x \in [0,1], \\ f(x) &= \frac{x^2 f(0)}{\lambda}, \quad \forall x \in [0,1] \end{aligned}$$

   a pro $x = 0$ dostáváme $f(0) = 0$, pak dostáváme, že $f(x) = 0$.

   Nyní pro $\lambda = 0$: pro $\lambda \in \sigma_p(T)$ existuje $f \neq 0$ tak, že

   $$\begin{aligned} Tf &= 0, \\ x^2 f(0) &= 0. \end{aligned}$$

   Proto existuje f takové, že $\lambda \in \sigma_p(T)$. Tedy $\{0\} \subset \sigma_p(T)$.

3. Učeme spektrum $\sigma(T)$. Ukažme, že operátor $T - \lambda I$ není surjektivní, tj. pro každé $g \in C([0,1])$ existuje $f \in C([0,1])$ tak, že

   $$\begin{aligned} Tf(x) - \lambda f(x) &= g(x), \ \forall \ x \in [0,1], \\ x^2 f(0) - \lambda f(x) &= g(x), \ \forall \ x \in [0,1]. \end{aligned}$$

   Pro $\lambda \neq 0$ máme tvar funkce $f(x) = \frac{x^2 f(0) - g(x)}{\lambda}$. Tedy funkci f nalezneme. Pro $\lambda = 0$ dostáváme $x^2 f(0) = g(x)$ a neexistuje pro každou funkci g funkce f, tedy operátor není surjektivní pro $\lambda = 0$. Tedy $\sigma(T) = \{0\}$.

4. Využitím věty 3.4 ukážeme, že operátor T je kompaktní. Chceme tedy ukázat, že T je konečně dimenzionální operátor, protože pak je T určitě kompaktní. Vzhledem k tomu, že

   $$Tf(x) = x^2 f(0) = ax^2, \text{ kde } a \in \mathbb{R}.$$

   Jediným bázovým prvkem je zde x^2, potom ale je T konečně dimenzionální.♣

3.7 Invertibilní prvky

Hlavní myšlenkou následující podkapitoly je otevřenost množiny všech invertibilních prvků.

Věta 3.6. *Množina všech invertibilních prvků s operací násobení tvoří grupu s jednotkou e.*

Důkaz: [6], str. 61, 6.7.

Věta 3.7. *Množina všech invertibilních prvků je otevřená.*

Důkaz: [6], str. 61, 6.10.

Příklad 3.16. *Nechť $C\,[z]$ je algebra všech polynomů s komplexními koeficienty. Definujeme-li*

$$\|p\| = sup\{|p(z)|, |z| \leq 1\},$$

je $\|\cdot\|$ norma na $C\,[z]$. S ní tvoří $C\,[z]$ normovaný lineární prostor, který není úplný. Ukažte, že množina všech invertibilních prvků $C\,[z]$ není otevřená.

Řešení: Sporem. Uvažujme $x = 1$ a najděme k tomuto prvku posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ takovou, že $x_n \to x$ pro $n \to +\infty$.

Uvažujme posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\left(1 + \frac{z}{n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$.

Rozepíšeme-li $\{x_n^{-1}\}_{n=1}^{\infty} = \{a_n z^n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n \in \mathbb{C}$, pro $\forall n \in \mathbb{N}$, máme

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)\left(a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + ... + a_0\right) = 1,$$

$$a_k z^k + a_{k-1} z^{k-1} + ... + a_0 + \frac{a_k}{n} z^{k+1} + \frac{a_{k-1}}{n} z^k + ... + \frac{a_0}{n} z = 1,$$

$$a_k \frac{z^{k+1}}{n} + z^k \left(a_k + \frac{a_{k-1}}{n}\right) + z^{k-1}\left(a_{k-1} + \frac{a_{k-2}}{n}\right) + ... + a_0 = 1.$$

Porovnáním koeficientů u z^k získáme soustavu

$$\begin{aligned} a_k &= 0, \\ a_k + \frac{a_{k-1}}{n} &= 0, \\ &\vdots \\ a_1 + \frac{a_0}{n} &= 0, \\ a_0 &= 1, \end{aligned}$$

z které získáme $a_1 = 0$, ..., $a_{k-1} = 0$ a z rovnosti $a_1 + \frac{a_0}{n} = 0$ pak dostáváme, že $\frac{1}{n} = 0$, což nelze, proto tato soustava nemá řešení. Tudíž nenajdeme inverzní prvek k x_k.

Ukažme ještě, že $x_n \to 1$ pro $n \to +\infty$. Tedy

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \|x_n - 1\| &= \lim_{n\to+\infty} \| \left(1 + \frac{z}{n}\right) - 1\| \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\|z\| \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} sup\{|z|, |z| \leq 1\} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Nalezli jsme posloupnost, která konverguje k 1, ale která není posloupností invertibilních prvků, což ale musí být, jestliže konverguje k invertibilnímu prvku a jestliže množina všech invertibilních prvků je otevřená(Věta 3.7). Dostáváme spor. Proto množina všech invertibilních prvků $C\,[z]$ není otevřená. ♣

Příklad 3.17. *Nechť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost prvků komutativní Banachovy algebry A a nechť $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$. Není-li x invertibilní, pak*

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_n^{-1}\| = +\infty. \tag{3}$$

Dokažte.

Řešení: Dokažme, že jestliže

$$\lim_{n \to +\infty} \|x_n^{-1}\| \neq +\infty, \tag{4}$$

pak x je invertibilní.

Nechť je tedy splněno (4), pak existuje $K > 0$ a $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, že $\|x_{n_k}^{-1}\| \leq K$. Rozepišme a označme $a_k = \left(e + x_{n_k}^{-1}(x - x_{n_k})\right)$

$$\begin{aligned} x &= x_{n_k}\left(e + x_{n_k}^{-1}(x - x_{n_k})\right), \\ x &= x_{n_k} a_k, \\ x a_k^{-1} x_{n_k}^{-1} &= e, \end{aligned}$$

pak x je invertibilní, pokud je $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ invertibilní.

Víme, že množina všech invertibilních prvků je otevřená(Věta 3.7), proto platí, že konverguje-li posloupnost $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ k prvku e, jsou od jistého indexu prvky posloupnosti $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ také invertibilní.

Dokažme, že $a_k \to e$ pro $k \to +\infty$:

$$\begin{aligned} \|a_k - e\| &= \|\left(e + x_{n_k}^{-1}(x - x_{n_k})\right) - e\| \\ &\leq \|x_{n_k}^{-1}\| \|x - x_{n_k}\|, \end{aligned}$$

Dostáváme $\|a_k - e\| \to 0$ pro $k \to +\infty$. Tedy $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ je invertibilní a potom i x je invertibilní. Tím je dokázáno, že není-li prvek x invertibilní, pak platí (3).$\clubsuit$

3.8 Princip stejnoměrné omezenosti

Nyní uveďme jednu za základních vět funkcionální analýzy:

Věta 3.8. *(Princip stejnoměrné omezenosti) Nechť X je Banachův prostor, E normovaný lineární prostor a $G \subset L(X, E)$. Následující výroky jsou ekvivalentní:*

(i) $sup\{\|T\|, T \in G\} < +\infty$,

(ii) $sup\{\|Tx\|, T \in G\} < +\infty$ *pro každé* $x \in X$.

Důkaz: [6], str. 41, 4.2.

Poznámka 3.1. *Prostor c_{00} není úplný. Stačí uvažovat posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, 0, 0 \dots\}$. Ta je cauchyovská, ale určitě není konvergentní, neboť posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$ neleží v prostoru c_{00}.*

Příklad 3.18. *Vektorový prostor c_{00} se sestává ze všech posloupností, které jsou od jistého indexu rovny nule. Uvažujeme-li na c_{00} suprémovou normu, je c_{00} podprostorem c_0. Protože však c_{00} není uzavřený v c_0, není prostor c_{00} úplný. Na příkladu funkcionál definovaného na c_{00} ukažte, že princip stejnoměrné omezenosti(Věta 3.8) neplatí v neúplných prostorech:*

$$T_n : \{\alpha_j\}_{n=1}^{\infty} \longmapsto n\alpha_n, \quad kde\ n \in \mathbb{N}.$$

Řešení: Ukažme, že neplatí princip stejnoměrné omezenosti pro posloupnost funkcionálů $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$. Ukažme, že $T_n \in L(c_{00}, \mathbb{R})$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Linearita plyne triviálně. Spojitost plyne z odhadu

$$\|T_n(x_j)\| = \|nx_n\| = n|x_n| \leq nsup\{|x_j|, j \in \mathbb{N}\} = n\|\{x_j\}\|.$$

Dále platí

$$\begin{aligned} sup\{\|T_n\|, n \in \mathbb{N}\} &= sup\{sup\{n\|\{x_j\}\|, \|\{x_j\}\| \leq 1\}, n \in \mathbb{N}\} \\ &= sup\{n, n \in \mathbb{N}\} \\ &= +\infty. \end{aligned}$$

Spočtěme dále

$$\begin{aligned} sup\{\|T_n(\{x_j\})\|, n \in \mathbb{N}\} &= sup\{|T_n(\{x_j\})|, n \in \mathbb{N}\} \\ &= sup\{|nx_n|, n \in \mathbb{N}\} < +\infty. \end{aligned}$$

Poslední nerovnost je splněna vzhledem k tomu, že $\{x_j\} \subset c_{00}$. Je vidět, že není splněno tvrzení principu stejnoměrné omezenosti. ♣

3.9 Prekompaktní množina

Příklad 3.19. *Množina M je prekompaktní právě tehdy, když z každé její posloupnosti můžeme vybrat cauchyovskou posloupnost. Dokažte.*

Řešení: " $\Rightarrow$ " Nechť M je prekompaktní množina, tj. $\forall \epsilon > 0\ \exists \{x_1, x_2, ..., x_n\} \supset M$ taková, že $\cup_{i=1}^{n} B(x_i, \epsilon) \supset M$, kde $B(x_i, \epsilon)$ je koule se středem x_i a poloměrem ϵ.

Uvažujme libovolnou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Existuje nekonečně mnoho koulí s poloměrem 1 v M takových, že jejich sjednocení pokrývá M.

Existuje podposloupnost posloupnosti $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ obsažená v některé z těchto koulí; označme ji $\{X_{11}, X_{12}, ...\}$.

Uvažujme kouli o poloměru $\dfrac{1}{2}$ a příslušná podposloupnost posloupnosti $\{X_{11}, X_{12}, ...\}$ bude $\{X_{21}, X_{22}, ...\}$.

Další posloupnosti $\{X_{k1}, X_{k2}, ...\}, k = 1, 2, ...,$ jsou obsaženy v koulích o poloměrech $\dfrac{1}{k}$.

Posloupnost $\{X_{11}, X_{22}, X_{33}, ...\}$ je pak cauchyovská a platí, že $\{X_{11}, X_{22}, X_{33}, ...\} \subset \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Viz. [7], str.85.

" $\Leftarrow$ " Sporem. Předpokládejme, že M není prekompaktní množina, tedy existuje $\epsilon > 0$ takové, že nemůžeme najít konečnou množinu prvků z M takovou, že ϵ-koule se středem z konvexní množiny pokryjí M.

Zvolme libovolně $y_1 \in M$, pak M není podmnožinou $B(y_1, \epsilon)$.

Dále zvolme $y_2 \in M \setminus B(y_1, \epsilon)$, pak M není podmnožinou $\cup_{i=1}^{2} B(y_i, \epsilon)$.

Analogicky zvolme $y_3 \in M \setminus \cup_{i=1}^{2} B(y_i, \epsilon)$, pak M není podmnožinou $\cup_{i=1}^{3} B(y_i, \epsilon)$.

Pro posloupnost $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí, že $\|y_n - y_m\| \geq \epsilon$ pro $\forall m \neq n$.

Proto ale nelze z posloupnosti $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ vybrat cauchyovskou podposloupnost. ♣

3.10 Řady

Příklad 3.20. *Nechť $M \subset X$ je uzavřená množina v X, kde X je Banachův prostor. Dokažte, že pro každé $x \in X \setminus \{0\}$ existuje $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in M$ tak, že $x = \sum x_k$ a že platí následující nerovnost*

$$\|x_k\| \leq \frac{3}{2^k}\|x\|, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Řešení: Uvažujme $x_1 \in M$ tak, že $\|x - x_1\| \leq \frac{\|x\|}{2}$. Obdobně postupujme dále, tedy $x_k \in M$ uvažujeme tak, aby $\|x - (x_1 + ... + x_{k-1}) - x_k\| \leq \frac{\|x\|}{2^k}$. Dále platí, že $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$, neboť

$$\|x - \sum_{i=1}^{k} x_i\| \to 0$$

pro $k \to +\infty$. Navíc

$$\begin{aligned} \|x_k\| &= \| \left(x - \sum_{n=1}^{k-1} x_n \right) - \left(x - \sum_{n=1}^{k} x_n \right) \| \\ &\leq \frac{\|x\|}{2^{k-1}} + \frac{\|x\|}{2^k} \\ &= \frac{3\|x\|}{2^k}, \end{aligned}$$

kde jsme využili trojúhelníkovou nerovnost.♣

Následující příklad udává ekvivalentní podmínku pro to, aby řada bezpodmínečně konvergovala. Poznamenejme, že bezpodmínečná konvergence řady obecně neimplikuje absolutní konvergenci řady; např. $\sum \frac{1}{i} e_i$ v prostoru l^2, kde e_i jsou prvky mající na i-tém místě jedničku. Viz. [3], str.27.

Příklad 3.21. *Nechť X je Banachův prostor, $x \in X$ a $\sum x_i$ je řada v X. Ukažte, že následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) pro $\forall \epsilon > 0$ existuje konečná množina $F \subset \mathbb{N}$ taková, že

$$\|x - \sum_{i \in F^{\triangle}} x_i\| < \epsilon,$$

kde $F^{\triangle}$ je konečná množina a $F^{\triangle} \subset \mathbb{N}$ splňující $F^{\triangle} \supset F$,

(ii) řada $\sum x_i$ je bezpodmínečně konvergentní k x.

Řešení: " $\Rightarrow$ " Nechť platí (i). Pro $\forall \epsilon > 0$ dostáváme konečnou množinu F takovou, že

$$\| \sum_{i \in F^{\triangle}} x_i - x\| < \epsilon,$$

kde $F^{\triangle}$ je konečná množina v $\mathbb{N}$ taková, že $F^{\triangle} \supset F$. Vzhledem ke konečnosti množiny F existuje pro nějaké $n_0 \in \mathbb{N}$ množina $\{\Pi(1), \Pi(2), ..., \Pi(n_0)\} \supset F$. Potom

$$\|x - \sum_{i=1}^{n} x_{\Pi(i)}\| < \epsilon,$$

pro $n \geq n_0$, $n \in \mathbb{N}$ a vzhledem k libovolnosti $\epsilon > 0$ platí, že $x = \sum x_{\Pi(i)}$ pro každou permutaci přirozených čísel Π.

" $\Leftarrow$ " Uvažujme posloupnost $\{n_k\}_{k=1}^{+\infty}$ takovou, že platí:

$$\| \sum_{i=1}^{n_k} x_i - x\| < \frac{1}{k}$$

a dále uvažujme posloupnost konečných množin M_k takovou, že $n_{k+1} > max(M_k) \geq min(M_k) > n_k$. Poté lze psát

$$\| \sum_{i=1}^{n_k} x_i + \sum_{M_k} x_i - x\| \geq \epsilon.$$

Vskutku, neboť *(i)* neplatí pro množinu $F = \{1, 2, ..., n_k\}$. Dále nalezneme množinu $F^{\triangle}$ a množinu $M_k = F^{\triangle} \diagdown F$. Budeme-li uvažovat permutaci Π takovou, že

$$\Pi(\{1, 2, ..., n_k + |M_k|\}) = \{1, 2, ...\} \cup M_k,$$

nebude řada $\sum x_{\Pi(i)}$ bezpodmínečně konvergentní. ♣

3.11 Ostatní příklady

Příklad 3.22. *Uvažujme posloupnost prvků* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = (1, 1, ..., 1, 0, 0...)$ *prostoru* l^{∞}*, kde* 1 *je až do* n*-tého místa. Ukažte, že posloupnost* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *nemůže konvergovat v normě prostoru* l^{∞}*.*

Řešení: Budeme chtít ukázat, že posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ není cauchyovská, poté bude platit, že $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ není konvergentní.

Uvažujme metriku

$$\varrho(x, y) = sup\{|x_n - y_n|, n \in \mathbb{N}\}.$$

Pro libovolná $m, n \in \mathbb{N}$, kde $m \neq n$, platí, že

$$\varrho(x_n, x_m) = 1,$$

tedy posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ není cauchyovská. ♣

Příklad 3.23. *Nechť* X, Y *jsou normované lineární prostory a nechť* $T \in L(X, Y)$*. Jestliže* $x_n \rightharpoonup x$*, pak* $Tx_n \rightharpoonup Tx$*. Dokažte.*

Řešení: To je zřejmé z definice slabé konvegrence, tj. $x_n \rightharpoonup x$, jestliže platí $Dx_n \to Dx$ pro $\forall D \in X^*$. Budeme-li uvažovat $\varphi \in Y^* = L(Y, \mathbb{R})$, tak vzhledem k tomu, že $T \in L(X, Y)$, platí, že $\varphi T \in X^* = L(X, \mathbb{R})$. Tedy $\varphi(Tx_n) \to \varphi(Tx)$. Vzhledem k libovolné volbě $\varphi \in Y^*$ je $Tx_n \rightharpoonup Tx$. ♣

Dokazovali jsme v posledním příkladu, že libovolný spojitý lineární operátor převádí slabě konvergentní posloupnost opět na slabě konvergentní posloupnost. Budeme-li chtít, abychom převáděli slabě konvergentní posloupnost na silně konvergentní posloupnost, musel by být operátor L kompaktní. Viz. [6], str. 44, 4.11.

Závěr

Skrytou nevýhodou každé sbírky příkladů je její necelistvost. Ačkoliv jsme se snažili tomuto jevu vyhnout, nevyhli jsme se mu.

Přínosem práce je bezesporu sepsání a vyřešení uvedených příkladů, ať už byly řešeny mnou, řešeny na cvičeních či přeloženy z anglického jazyka a dořešeny.

Na trhu je nedostatek české literatury pojednávající o funkcionální analýze, zvláště pokud se bavíme o sbírkách úloh. Přisuďme tuto skutečnost faktu, že funkcionální analýza, jako podobor matematické analýzy, je poněkud nová disciplína; jako samostatný obor byla chápána až od poloviny dvacátého století.

Doufám, že se mi touto prací podařilo rozšířit odbornou literaturu o další dílo, které bude srozumitelné českým studentům.

Literatura

[1] Bartsch, H.-J., *Matematické vzorce.* Praha: Academia, 2006.

[2] Drábek, P., Milota, J., *Lectures on Nonlinear Analysis.* Plzeň: Vydavatelský servis, 2004.

[3] Fabián, M., a kol. *Functional Analysis and Infinite-Dimenzional Geometry.* New York: Springer, 2001.

[4] Kirk, W.A., Sims, B.(eds.), *Handbook of Metric Fixed Point Theory*. Dordrecht: Kluwer, 2001.

[5] Kolmogorov, A.N., Fomin, S.V., *Základy teorie funkcí a funkcionální analýzy.* Praha: SNTL, 1975.

[6] Lukeš, J., *Zápisky z funkcionální analýzy*. Praha: Karolinum, 2001.

[7] Taylor, A.E., *Úvod do funkcionální analýzy*. Praha: Academia, 1973.

[8] Baron Rayleihg [online], dostupné z: http://cs.wikipedia.org/wiki/John_William_Strutt%2C_3._baron_Rayleigh, citováno dne [17.3.2014].

[9] Baron Rayleihg [online], dostupné z: http://canov.jergym.cz/objevite/objev/ray.htm, citováno dne [17.3.2014].