UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Fibonacciho posloupnost

Vedoucí bakalářské práce:
RNDr. Martina Pavlačková, Ph.D.
Rok odevzdání: 2014

Vypracovala:
Nikola Buriánová
ME, III. ročník

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vytvořila samostatně pod vedením paní RNDr. Martiny Pavlačkové, Ph.D., a že jsem v seznamu literatury uvedla všechny zdroje použité při zpracování práce.

V Olomouci dne 7. dubna 2014

Poděkování

Ráda bych poděkovala své vedoucí bakalářské práce, paní RNDr. Martině Pavlačkové, Ph.D., za odbornou spolupráci, cenné rady a neustálou ochotu a za čas, který mi věnovala. Poděkování patří rovněž i mé rodině a příteli, kteří mě po celou dobu studia podporovali.

Obsah

Úvod

Téma Fibonacciho posloupnost jsem si zvolila, protože se jedná o velmi zajímavou problematiku, která je do učebních osnov zahrnuta jen velmi okrajově. Nejčastěji je spojována s úlohou o králících, kterou si představíme v první kapitole. Stěžejní pojmy mé bakalářské práce, Fibonacciho čísla a zlatý řez, fascinovaly matematiky, architekty a jiné umělce již od starověku.

Hlavním cílem mé bakalářské práce je shromáždit poznatky o Fibonacciho posloupnosti, dokázat některé její vlastnosti a ukázat nejen souvislosti s jinými matematickými pojmy ale i to, kde se Fibonacciho čísla vyskytují kolem nás. V práci bude proto mj. zaměřena pozornost i na bližší spojitost Fibonacciho čísel a rostlin.

Text práce je rozdělen do tří kapitol. První kapitola se věnuje definování samotného pojmu Fibonacciho posloupnost, jeho vlastnostem a výskytu v přírodě. V závěru první kapitoly se zaměříme na spojitost Fibonacciho čísel a čísla π.

Druhá kapitola pojednává o souvislostech Fibonacciho posloupnosti se zlatým řezem a o geometrickém významu zlatého čísla.

V poslední kapitole jsou ve třech podkapitolách studovány útvary související s Fibonacciho posloupností - zlatý trojúhelník, zlatý obdélník a zlatá spirála. Zlatou spirálu si představíme i v oblastech botaniky a zoologie, kde si na jednotlivých příkladech spirály ukážeme a dozvíme se něco o fylotaxi rostlin.

Práce je ilustrována obrázky vytvořenými v programu AutoCAD a vlastními fotografiemi.

1 Fibonacciho posloupnost

V úvodu této kapitoly bych ráda řekla pár slov o jednom z nejvýznačnějších matematiků středověké Evropy, po němž je posloupnost pojmenována. Leonardo Fibonacci, také nazývaný Leonardo Pisánský, se narodil okolo roku 1170 v rodině Bonacci v Pise. Umění počtů se naučil v alžírském městě Béjaïi. Zde mu bylo poskytnuto vzdělání a byl zasvěcen do indo-arabského číslicového systému a techniky jeho počítání. V dospělosti často obchodně cestoval do Egypta, Sýrie, Řecka, Francie a Konstantinopole, kde studoval aritmetické systémy. Je autorem mnoha knih, např. Knihy počtů (Liber Abaci), Geometrie v praxi (Practica Geometriae), Květenství (Flos) nebo Knihy čtverců nad čísly (Liber Quadratorum). Jeho poznatky zachycené v knihách hrály významnou roli například v nahrazení nepraktického římského číslicového systému.

Při tvorbě této kapitoly byly využity zejména zdroje [2], [3], [6], [8], [12] a [13].

1.1 Definice Fibonacciho posloupnosti

Nejprve si představme známou úlohu o králících, vedoucí na posloupnost, která byla později nazvána Fibonacciho posloupností. Tato úloha vznikla ve 12. století.

Uvažujme nově narozený pár králíků, uzavřený ze všech stran plotem. Chceme vědět, kolik párů králíků budeme mít po uplynutí jednoho roku. Přitom máme tyto předpoklady:

- každému dospělému páru se každý měsíc narodí jeden pár (tj. sameček a samička)
- králíci dospějí po uplynutí jednoho měsíce a od druhého měsíce jsou také produktivní
- králíci v průběhu roku neumírají

Pro jednoduchost řekněme, že původní pár králíků se narodil 1. ledna. Králíci dospějí po měsíci, tím pádem prvního února máme stále jen jeden pár. Po dvou měsících od narození jsou produktivní a narodí se nová smíšená dvojice (sameček, samička).

Celkově máme dva páry. Pokud bychom postupovali tímto způsobem, tak na začátku dubna budeme mít páry tři a prvního května párů pět.

Počet párů	Leden	Únor	Březen	Duben	Květen	Červen	Červenec	Srpen
Dospělí	0	1	1	2	3	5	8	13
Potomci	1	0	1	1	2	3	5	8
Celkem	1	1	2	3	5	8	13	21

Tab. 1.1: Růst králičí populace.

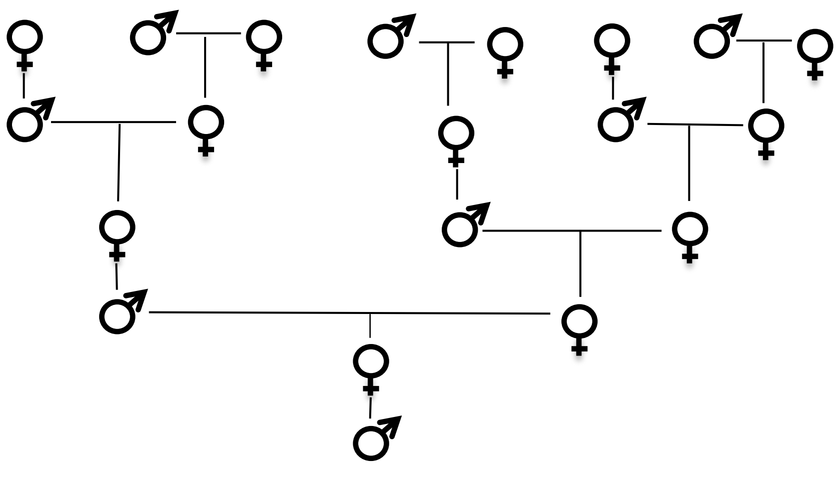
Tento problém můžeme vyjádřit také matematicky. Označíme-li F_n počet párů na konci *n*-tého měsíce je zřejmé, že platí:

$$F_1 = F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, \; F_6 = 8, \; F_7 = 13, F_8 = 21.$$

Pokud bychom takto postupovali, zjistili bychom, že počet F_{12} párů králíků po roce je 144. Podíváme-li se na posloupnost obecněji, všimneme si, že počet párů králíků na konci *n*-tého měsíce je roven počtu párů králíků na konci měsíce (*n*-1) zvětšeného o počet párů, které v *n*-tém měsíci přibyly. Jelikož v *n*-tém měsíci přibylo tolik párů, kolik párů králíků bylo v měsíci (*n*-2), pro posloupnost králičích párů platí:

$$F_n = F_{n-2} + F_{n-1}.$$

Růst králičích párů, lze zachytit i pomocí následujícího schéma, kde ♂ značí neproduktivní pár a ♀ produktivní pár.



Obr.1.1: Králičí páry znázorněné pomocí schématu.

Definice 1.1 Fibonacciho posloupnost je nekonečná posloupnost přirozených čísel, definovaných jako součet dvou předchozích čísel, přičemž první dva členy jsou rovny jedné.

Fibonacciho posloupnost lze tedy zadat rekurentně následujícím vztahem

$$F_n = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad n = 1 \\ 1 & \text{pro} \quad n = 2 \\ F_{n-2} + F_{n-1} & \text{jinak.} \end{cases}$$

Příklad 1.1 Dle rekurentního vzorce je prvních 10 členů Fibonacciho posloupnosti rovno 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89.

Pokud bychom chtěli vyjádřit Fibonacciho posloupnost vzorcem pro *n*-tý člen (explicitně), můžeme postupovat například následovně:

Lze dokázat, že pro posloupnost $\{a_n\}$ určenou prvními dvěma členy $a_{1,}a_2$ a rekurentním vzorcem

$$a_{n+2} + k_1 a_{n+1} + k_2 a_n = 0\,, \text{ kde } k_1, k_2 \in R,\; k_2 \neq 0,$$

platí pro *n*-tý člen

$$a_n = c_1 x_1^{n-1} + c_2 x_2^{n-1},$$

kde $x_{1,}x_2$ jsou různé kořeny rovnice

$$x^2 + k_1 x + k_2 = 0$$

a c_1, c_2 jsou konstanty, které jsou jednoznačně určeny počátečními podmínkami posloupnosti $\{a_n\}$.

Abychom dané tvrzení dokázali, ukážeme nejprve, že člen

$$a_n = c_1 x_1^{n-1} + c_2 x_2^{n-1}$$

vyhovuje rekurentnímu vzorci dané posloupnosti a to tak, že do levé strany tohoto rekurentního vzorce dosadíme a poté dostaneme:

$$(c_1 x_1^{n+1} + c_2 x_2^{n+1}) + k_1(c_1 x_1^n + c_2 x_2^n) + k_2(c_1 x_1^{n-1} + c_2 x_2^{n-1})$$

$$= (c_1 x_1^{n+1} + c_2 x_2^{n+1}) + c_1 x_1^{n-1}(k_1 x_1 + k_2) + c_2 x_2^{n-1}(\,k_1 x_2 + k_2). \qquad (1)$$

Pro kořeny x_1, x_2 rovnice $x^2 + k_1 x + k_2 = 0$, platí

$$k_1 x_1 + k_2 = -x_1^2$$

$$k_1 x_2 + k_2 = -x_2^2.$$

Po dosazení do (1) získáme následující:

$$(c_1 x_1^{n+1} + c_2 x_2^{n+1}) + c_1 x_1^{n-1}(-x_1^2) + c_2 x_2^{n-1}(-x_2^2) = 0.$$

Nyní se přesvědčíme, že konstanty c_1, c_2 jsou jednoznačně určeny počátečními podmínkami a_1, a_2. To přímo vyplývá z toho, že soustava rovnic

$$a_1 = c_1 + c_2$$

$$a_2 = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

s neznámými c_1, c_2, za předpokladu $x_1 \neq x_2$, má jediné řešení.

Na základě vztahu mezi rekurentním vzorcem a vzorcem pro *n*-tý člen posloupnosti, který jsme výše dokázali, lze snadno odvodit vzorec pro *n*-tý člen Fibonacciho posloupnosti.

Fibonacciho posloupnost je definována podmínkami

$$F_1 = F_2 = 1,\ F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0.$$

Protože rovnice $x^2 + k_1 x + k_2 = 0$ pro $k_1,\ k_2 = -1$ má dva různé kořeny

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

pro *n*-tý člen Fibonacciho posloupnosti platí, že

$$F_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \quad c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}.$$

Ze soustavy rovnic o dvou neznámých vyjádříme c_1 (resp. c_2) a dopočítáme hodnotu c_2 (resp. c_1) následujícím způsobem:

$F_1 = 1 \qquad 1 = c_1 + c_2 \qquad => \quad c_1 = 1 - c_2$

$F_2 = 1 \qquad 1 = c_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + c_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$$1 = (1 - c_2)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \quad =>$$

$$2 = 1 + \sqrt{5} - c_2 - c_2\sqrt{5} + c_2 - c_2\sqrt{5}$$

$$1 - \sqrt{5} = -2\sqrt{5}c_2$$

$$c_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \qquad => \quad c_1 = 1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}.$$

Pro *n*-tý člen Fibonacciho posloupnosti tedy platí

$$F_n = \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}} \quad .$$

Poznámka 1.1 Přestože se ve vzorci pro *n*-tý člen Fibonacciho posloupnosti vyskytují odmocniny, jsou všechny členy této posloupnosti přirozená čísla.

Se členy Fibonacciho posloupnosti se setkáváme velmi často, aniž si to uvědomujeme. Např. u mnoha rostlin se můžeme setkat s tím, že počet jejich okvětních lístků je roven některému z Fibonacciho čísel.

- 1 okvětní lístek: calla, anturie,…
- 2 okvětní lístky: euforbia,…
- 3 okvětní lístky: kosatec, trillium,…
- 5 okvětních lístků: pomněnka, azalka, orlíček, kakost, blatouch, ibišek, mochna,…
- 8 okvětních lístků: celandine, krásenka, krevnice kanadská,…
- 13 okvětních lístků: třapatka,…
- 21 okvětních lístků: čekanka, astra,…
- 34 okvětních lístků: jitrocel,…
- 55, 89 okvětních lístků: čeleď Hvězdicovitých

Obr.1.2: Calla.

Velké množství květin má 5 okvětních plátků pravidelně rozmístěných okolo středu, jak lze vidět na těchto obrázcích.

Obr.1.3: Azalka.

Obr.1.4: Ibišek.

Obr.1.5: Barvínek.

Obr.1.6: Kakost luční.

Na následující fotografii můžeme vidět příklad květinu s 8 okvětními lístky, kterou je například krásenka. Kopretiny mají podle mnoha zdrojů 34 okvětních plátků, což je ovšem poněkud sporné. Na obrázcích níže si ukážeme dva druhy kopretin s rozdílným počtem korunních plátů, avšak také odpovídajícím členům Fibonacciho posloupnosti. Kopretina polní na obrázku má obvykle 13 okvětních lístků a kopretina žlutá, která patří mezi zahradní květiny, má většinou lístků 21.

Do květin, jejichž počet korunních plátků odpovídá Fibonacciho číslům, se často řadí i sedmikrásky. Avšak po provedení „experimentu“, tomuto tvrzení odpovídala pouze jedna sedmikráska z padesáti zkoumaných.

Obr.1.7: Krásenka.

Obr.1.8: Kopretina polní.

Obr.1.9: Kopretina žlutá.

Na posledním snímku je zachycena jiřina , která má nejčastěji 55 nebo 89 okvětních lístků a která patří do čeledi Hvězdicovitých, kam řadíme například i pampelišky a astry.

Obr.1.10: Jiřina.

I v zoologii lze najít příklad Fibonacciho posloupnosti. Fibonacciho čísla například úzce souvisí s rodokmenem včely medonosné.

Ve včelí kolonii existuje zvláštní samice, které říkáme královna. Podobně jako u dalšího hmyzu se včelí samečkové (trubci) vyvíjejí z neoplodněných vajíček dělnic, a proto nemají rodiče samčího pohlaví. Mají pouze matku, ale žádného otce. Trubci ale oplodňují vajíčka včelí královny, z nichž se rodí včely (buď dělnice, nebo královny). Včelí samička má tedy oba rodiče. Podívejme se nyní na rodokmen samce včely medonosné - trubce.

- Má jednoho rodiče (matku).
- Má dva prarodiče (rodiče matky).
- Má tři praprarodiče (dva rodiče babičky a matku dědečka).

Počty členů v jednotlivých generacích rodokmenu jsou 1, 1, 2, 3, 5, …, tedy opět členy Fibonacciho posloupnosti. Rodokmen včely medonosné si můžeme názorně představit (viz Obr.1.1).

1.2 Vlastnosti Fibonacciho posloupnosti

V této podkapitole si odvodíme některé základní vlastnosti Fibonacciho posloupnosti a také se budeme zabývat dělitelností Fibonacciho čísel.

Věta 1.1 Pro součet prvních *n* Fibonacciho čísel platí

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1.$$

Důkaz Tvrzení dokážeme tak, že do rovnosti $F_{t+2} = F_{t+1} + F_t$ dosadíme

$t = 1,2,3,4, \dots n.$

$$F_3 = F_2 + F_1 \;\; => \;\; F_1 = F_3 - F_2,$$

$$F_4 = F_3 + F_2 \;\; => \;\; F_2 = F_4 - F_3,$$

$$F_5 = F_4 + F_3 \;\; => \;\; F_3 = F_5 - F_4,$$

$$F_6 = F_5 + F_4 \;\; => \;\; F_4 = F_6 - F_5,$$

...

$$F_{n-1} = F_{n+1} - F_n,$$

$$F_n = F_{n+2} - F_{n+1}.$$

Poté sečteme pravé i levé strany a získáme

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - F_2 = F_{n+2} - 1.$$

Věta 1.2 Pro součet prvních *n* Fibonacciho čísel s lichými indexy platí

$$\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} = F_1 + F_3 + F_5 + F_7 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}.$$

Důkaz Součet dostaneme tak, že k rovnosti $F_2 = F_1$ přičteme všechny rovnosti $F_{2t} = F_{2t-2} + F_{2t-1}$ => $F_{2t-1} = F_{2t} - F_{2t-2}$, do nichž dosadíme $t = 2,3,4,\dots n$.

$$F_1 = F_2,$$

$$F_3 = F_4 - F_2,$$

$$F_5 = F_6 - F_4,$$

$$F_7 = F_8 - F_6,$$

$$\dots$$

$$F_{2n-1} = F_{2n} - F_{2n-2}.$$

Po sečtení všech *n* rovností získáme požadovaný součet.

Věta 1.3 Pro součet prvních *n* Fibonacciho čísel se sudými indexy platí

$$\sum_{i=1}^{n} F_{2i} = F_2 + F_4 + F_6 + F_8 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1.$$

Důkaz Součet získáme z předchozích dvou tvrzení a to tak, že od prvního součtu (modifikovaného pro prvních 2*n* Fibonacciho čísel) odečteme součet druhý:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{2i} = \sum_{i=1}^{2n} F_i - \sum_{i=1}^{n} F_{2i-1}$$

$$= (F_{2n+2} - 1) - F_{2n}$$

$$= (F_{2n+2} - F_{2n}) - 1$$

$$= F_{2n+1} - 1\,.$$

Věta 1.4 Pro všechna přirozená čísla $n \geq 2$ platí

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n.$$

Důkaz Tvrzení dokážeme pomocí matematické indukce:

- Pro $n = 2$ tvrzení platí, jelikož po dosazení získáme

$$F_1F_3 - F_2^2 = 2 - 1^2 = (-1)^2 .$$

- Předpokládejme, že tvrzení platí pro $n-1$, tj. že platí

$$F_{n-2}F_n - F_{n-1}^2 = (-1)^{n-1} \Rightarrow F_{n-1}^2 = F_{n-2}F_n - (-1)^{n-1} \Rightarrow$$
$$F_{n-1}^2 = F_{n-2}F_n + (-1)^n.$$

Nyní dokážeme platnost tvrzení pro n a to tak, že k oběma stranám předchozí rovnosti přičteme $F_{n-1}F_n$ a úpravami dostaneme

$$\begin{aligned}
F_{n-1}^2 + F_{n-1}F_n &= F_{n-1}F_n + F_{n-2}F_n + (-1)^{n-2} \\
F_{n-1}(F_{n-1} + F_n) &= F_n(F_{n-1} + F_{n-2}) + (-1)^{n-2} \\
F_{n-1}F_{n+1} &= F_n^2 + (-1)^{n-2} \\
F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 &= (-1)^{n-2} \\
F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 &= (-1)^n.
\end{aligned}$$

Tímto jsme dokázali platnost věty.

Věta 1.5 Pro všechna přirozená čísla *n* platí

$$F_{n+1}F_{n+2} - F_nF_{n+3} = (-1)^{n+2}. \tag{2}$$

Důkaz Úpravou levé strany rovnice obdržíme

$$F_{n+1}F_{n+2} - F_nF_{n+3} = F_{n+1}F_{n+2} - F_n(F_{n+1} + F_{n+2}) =$$

$$F_{n+1}(F_{n+2} - F_n) - F_nF_{n+2} = F_{n+1}^2 - F_nF_{n+2}.$$

Podle toho, co už víme z Věty 1.4, je rozdíl roven $-(-1)^{n+1} = (-1)^{n+2}$, čímž je věta dokázána.

Poznámka 1.2 Z rovnosti (2) lze vypočítat, že

$$F_{n+3} = \frac{[F_{n+1}F_{n+2} - (-1)^{n+2}]}{F_n} = \frac{[F_{n+1}F_{n+2} + (-1)^{n+3}]}{(F_{n+2} - F_{n+1})}.$$

Položíme-li $n = 2t - 1$, pak

$$F_{2t+2} = \frac{F_{2t}F_{2t+1} + 1}{F_{2t+1} - F_{2t}}.$$

Tohoto vztahu využijeme v následující podkapitole pro odvození vztahu mezi členy Fibonacciho posloupnosti a číslem π.

Věta 1.6 Nechť $m, n \in$ N. Potom platí, že:

1) Číslo m je dělitelné číslem n právě tehdy, když je F_m dělitelné F_n.
2) Každá dvě sousední Fibonacciho čísla jsou nesoudělná.
3) $(F_m, F_n) = F_{(m,n)}$, kde (m, n) značí největší společný dělitel čísel m, n.

Důkaz lze nalézt např. v [8].

Poznámka 1.3 Z Věty 1.6 plyne, že se můžeme zabývat dělitelností Fibonacciho čísel pomocí jejich indexů, např.:

- Fibonacciho číslo je sudé právě tehdy, když je index dělitelný třemi.
- Fibonacciho číslo je dělitelné třemi právě tehdy, když je index dělitelný čtyřmi.
- Fibonacciho číslo je dělitelné čtyřmi právě tehdy, když je index dělitelný šesti.
- Fibonacciho číslo je dělitelné pěti právě tehdy, když je index dělitelný pěti.
- Fibonacciho číslo je dělitelné sedmi právě tehdy, když je index dělitelný osmi.

1.3 Fibonacciho posloupnost a číslo π

Nyní si vysvětlíme souvislost mezi Fibonacciho posloupností a číslem π. Ke každé funkci, která je na určitém intervalu prostá, existuje na tomto intervalu funkce inverzní. Funkce cotg x je prostá na intervalu $(0, \pi)$, na tomto intervalu k ní tedy existuje funkce inverzní a značí se $arccotg\, x$. Její definiční obor je $D_f = (-\infty, \infty)$ a obor hodnot $H_f = (0, \pi)$.

Protože

$$arccotg(-x) = \pi - arccotg\ x$$

a

$$arccotg\ x + arccotg\ y = arccotg\ \frac{xy-1}{x+y} + \pi, \quad \text{pro} \quad x < -y$$

(viz např. [1], [11]), platí pro všechna $x_2 > x_1$, že

$$arccotg\, x_1 - arccotg\, x_2 = arccotg\left(\frac{x_2 x_1 + 1}{x_2 - x_1}\right).$$

Nechť $t \in N$. Položíme-li $x_1 = F_{2t},\ x_2 = F_{2t+1}$, je splněna podmínka $x_2 > x_1$ a platí

$$arccotg\, F_{2t} - arccotg\, F_{2t+1} = arccotg\left(\frac{F_{2t}F_{2t+1}+1}{F_{2t+1}-F_{2t}}\right).$$

Pravá strana je rovna $arccotg\, F_{2t+2}$ (viz Poznámka 1.2), a tudíž

$$arccotg\, F_{2t+2} = arccotg\, F_{2t} - arccotg\, F_{2t+1}.$$

Dosadíme-li za $t = 1,2, \dots, n$, vznikne (n) rovností:

$t = 1 \quad arccotg\, F_4 = arccotg\, F_2 - arccotg\, F_3$

$t = 2 \quad arccotg\, F_6 = arccotg\, F_4 - arccotg\, F_5$

…

$t = n \quad arccotg\, F_{2n+2} = arccotg\, F_{2n} - arccotg\, F_{2n+1}.$

Sečteme-li dané rovnosti, získáme

$$arccotgF_{2n+2} = arccotgF_2 - (arccotgF_3 + arccotgF_5 + \cdots + arccotgF_{2n+1})$$

$$= \frac{\pi}{4} - \sum_{t=1}^{n} arccotgF_{2t+1}\,,$$

protože $arccotgF_2 = \frac{\pi}{4}$.

Pokud bychom spočítali limitu levé i pravé strany, dostaneme

$$\lim_{n\to\infty} arccotg\, F_{2n+2} = \frac{\pi}{4} - \lim_{n\to\infty} \sum_{t=1}^{n} arccotgF_{2t+1}\,.$$

Protože

$$\lim_{n\to\infty} arccotg\, F_{2n+2} = 0$$

a

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{t=1}^{n} arccotgF_{2t+1} = \sum_{t=1}^{\infty} arccotgF_{2t+1}\ ,$$

získáme, že

$$\sum_{t=1}^{\infty} arccotgF_{2t+1} = arccotgF_3 + arccotgF_5 + arccotgF_7 + \cdots = \frac{\pi}{4},$$

neboli

$$\frac{\pi}{4} = arccotg2 + arccotg5 + arccotg13 + arccotg34 + \cdots$$

Číslo $\frac{\pi}{4}$ lze tedy vypočítat jako součet nekonečné číselné řady, v níž je t-tý člen roven $arccotg$ čísla, které je $2t+1$ $-$vým členem Fibonacciho posloupnosti.

2 Zlatý řez

O zlatém řezu, o němž se mluví jako o zlatém nebo božském poměru, průměru, proporci či čísle, se zmiňují již staří Egypťané před pěti tisíci lety při stavbě pyramid. Mezi fenomény patří Cheopsova pyramida v Gíze. První, kdo zlatý řez popsal, byl Eukleides, který sepsal dílo „Základy“, kde uvádí konstrukci zlatého řezu. Zlatý řez dále využívali například sochař Feidías při stavbě Parthenonu na Akropoli či Leonardo da Vinci při svých malbách. Zlatý řez je všude kolem nás. Můžeme se s ním setkat v přírodě, umění, architektuře, fotografii, plastické chirurgii, dokonce i poměr velikostí částí lidského těla se mu často blíží.

Základní literaturou pro tuto kapitolu byly především zdroje [3], [5], [9] a [10].

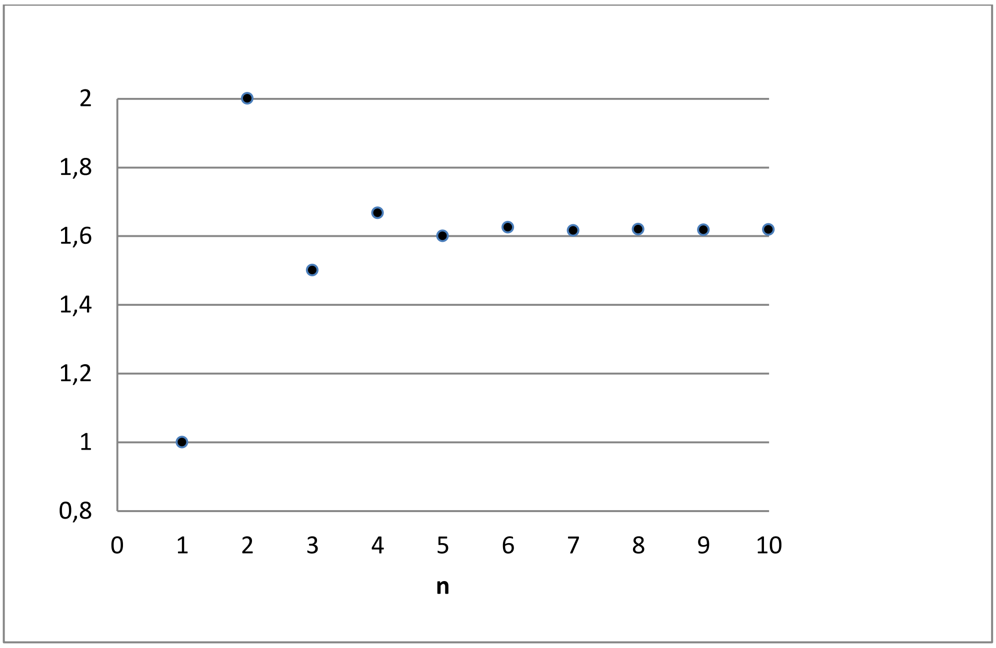
2.1 Zlaté číslo a Fibonacciho posloupnost

Mějme posloupnost $\left\{\frac{F_{n+1}}{F_n}\right\}$, kde F_n je pro každé $n \in N$ n-tý člen Fibonacciho posloupnosti, tedy posloupnost tvořenou podíly dvou po sobě jdoucích čísel Fibonacciho posloupnosti.

n	F_{n+1}/F_n
1	$1/1 = 1{,}000000000$
2	$2/1 = 2{,}000000000$
3	$3/2 = 1{,}500000000$
4	$5/3 = 1{,}666666667$
5	$8/5 = 1{,}600000000$
6	$13/8 = 1{,}625000000$
7	$21/13 = 1{,}615384615$
8	$34/21 = 1{,}619047619$
9	$55/34 = 1{,}617647059$
10	$89/55 = 1{,}618181818$

Tab.2.1:Prvních deset členů posloupnosti $\frac{F_{n+1}}{F_n}$.

Tuto posloupnost můžeme znázornit i graficky, viz Obr.2.1.



Obr.2.1: Grafické znázornění prvních deseti členů posloupnosti $\frac{F_{n+1}}{F_n}$.

Čím větší je n, tím více se hodnoty blíží ke zlatému číslu, které je limitou posloupnosti $\left\{\frac{F_{n+1}}{F_n}\right\}$. Pro výpočet této limity využijeme poznatky z první kapitoly, kde byl odvozen vzorec pro n-tý člen Fibonacciho posloupnosti.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}}}{\dfrac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}{\sqrt{5}}} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - 0}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - 0} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}} =$$

$$= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \doteq 1{,}618033989$$

Při počítání jsme využili pravidel pro počítání s limitami a toho, že

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = 0.$$

Výsledkem limity posloupnosti $\left\{\frac{F_{n+1}}{F_n}\right\}$ je hodnota $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \doteq 1{,}618033989$, kterou nazýváme *zlatým řezem*. Toto iracionální číslo se obvykle značí řeckým písmenem Φ.

2.2 Geometrický význam zlatého řezu

Rozdělíme-li libovolnou úsečku na dvě nestejně dlouhé části tak, že poměr délky celé úsečky k délce větší části je stejný, jako poměr délky větší části úsečky k délce části menší, je tato úsečka tzv. rozdělena zlatým řezem. Nyní si ukážeme, že i tímto postupem dojdeme k tomu, že je hodnota zlatého řezu (tj. poměr délky celé úsečky k délce větší části) rovna $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Nechť máme úsečku AB a na ní nalezneme bod C tak, že při označení $|AB| = a$, $|AC| = x,\ |CB| = a - x,$ kde $a - x < x,$ platí:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}\ . \tag{3}$$

Obr.2.2: Rozdělení úsečky zlatým řezem.

Hodnotu zlatého čísla určíme tak, že vztah (3) upravíme a převedeme na kvadratickou rovnici

$$x^2 + ax - a^2 = 0.$$

Jestliže hledáme délku větší části úsečky, což znamená kladný kořen rovnice, pak

$$x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} a, \quad \text{tedy} \quad a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} x\,.$$

Z toho vyplývá, že

$$\frac{a}{x} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi.$$

Jak již bylo zmíněno výše, zlaté číslo lze zavést nejen jako poměr délek dvou částí úseček, ale i jako limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}.$$

3 Aplikace Fibonacciho posloupnosti v geometrii

Třetí kapitola je věnována geometrickým útvarům, které úzce souvisí s Fibonacciho posloupností. Konkrétně zlatému trojúhelníku, zlatému obdélníku a zlaté spirále.

Tato kapitola byla sepsána za pomoci literatur [5], [6], [13] a [14].

3.1 Zlatý trojúhelník

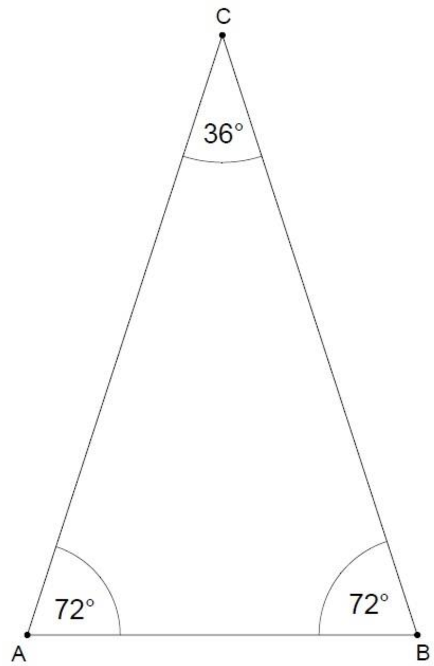
Zlatý trojúhelník je libovolný rovnoramenný trojúhelník, v němž je poměr délky ramene a základny roven Φ.

Tedy platí

$$\frac{|AC|}{|AB|} = \Phi,$$

kde $|AC|$ je velikost ramene a $|AB|$ je velikost základny.

Tento trojúhelník má proti základně úhel o velikosti 36° a při základnách úhly velké 72°.

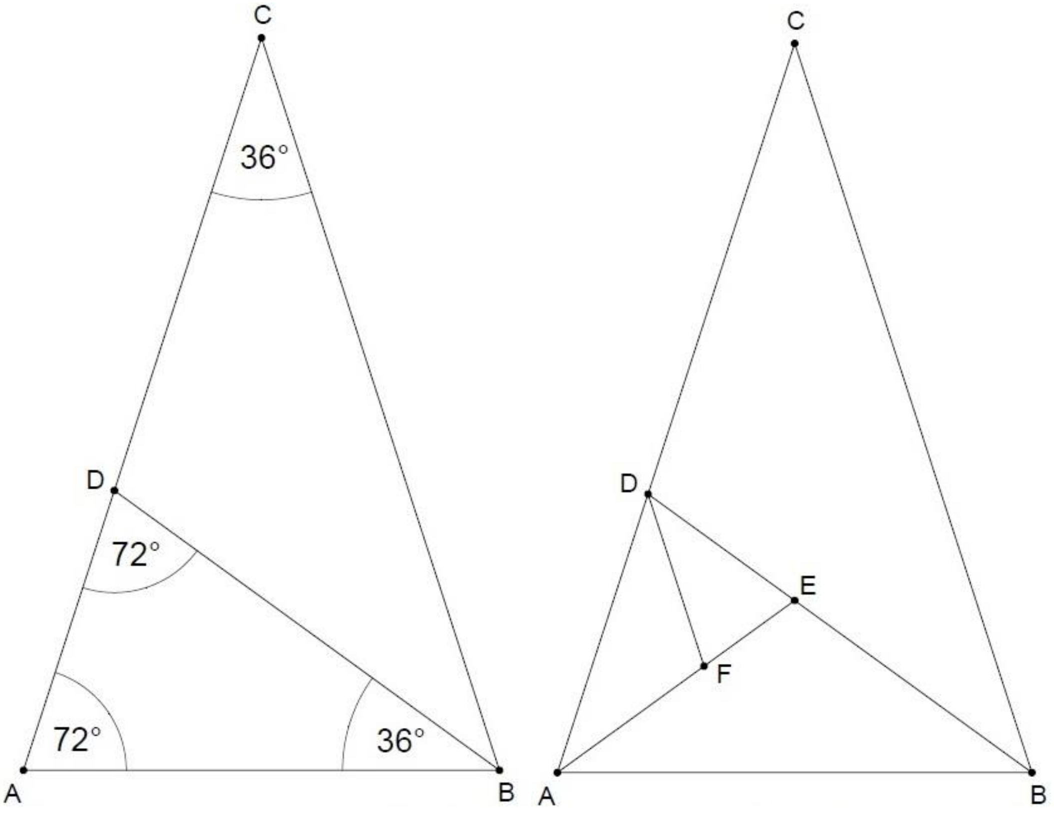


Obr.3.1: Zlatý trojúhelník.

Vepíšeme-li do zlatého trojúhelníku ABC (se základnou AB) rovnoramenný trojúhelník DAB s ramenem AB a základnou AD, bude tento nový trojúhelník opět zlatým trojúhelníkem. Úhel u vrcholu A je pro oba trojúhelníky stejný a měří 72°. Jelikož DAB je rovnoramenný trojúhelník se základnou AD, musí být úhel u vrcholu D shodný s úhlem u vrcholu A. Tento úhel měří opět 72°.

Z matematiky víme, že součet vnitřních úhlů v trojúhelníku musí být 180°, proto na třetí vnitřní úhel zbývá 36°. Trojúhelník DAB má tedy vnitřní úhly velikosti 72°, 72°, 36°, z toho je zřejmé, že se jedná opět o zlatý trojúhelník.

Uvedený postup můžeme opakovat a vepisovat stále menší a menší zlaté trojúhelníky ADB, DEA, EFD ....



Obr.3.2: Vepsané trojúhelníky.

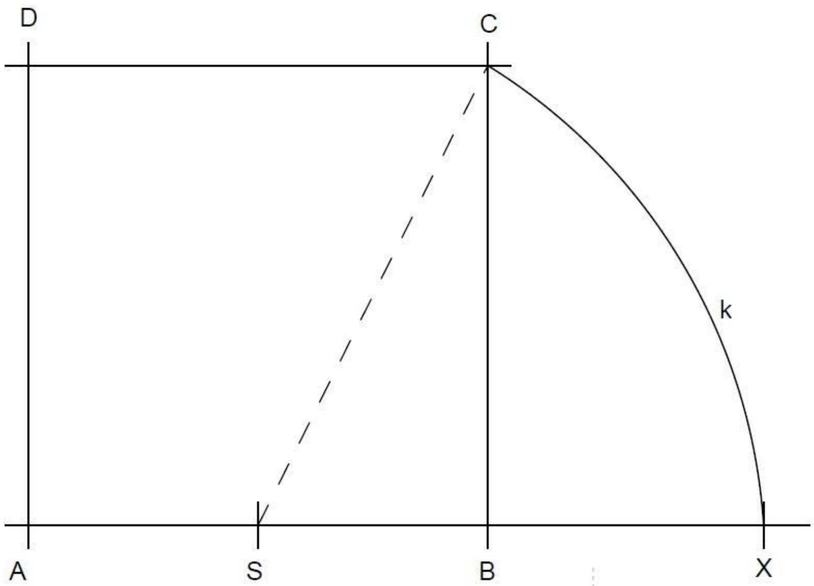
3.2 Zlatý obdélník

Obdélník, jehož delší strana má velikost a a kratší strana má velikost b, nazveme zlatým, jestliže platí

$$\frac{a}{b} = \Phi.$$

Zkonstruovat zlatý obdélník lze například následujícím způsobem:

Nejprve sestrojíme čtverec $ABCD$. Na úsečce AB nalezneme bod S, který je jejím středem. Opíšeme kružnici k se středem v bodě S a poloměrem $r = |SC|$. Průsečík polopřímky AB je hledaný bod X.



Obr.3.3: Konstrukce.

Obdélník o stranách AX a AD je poté zlatým trojúhelníkem, což lze ověřit například takto:

Označíme-li $a := |AB| = |BC|$, pak z Pythagorovy věty plyne, že

$$|SC| = |SX| = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{5}$$

a tudíž

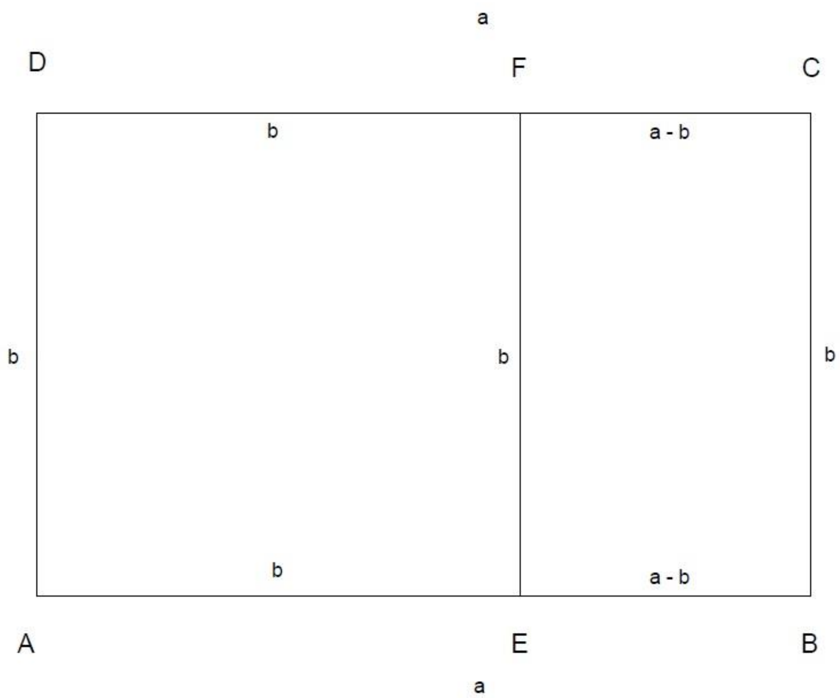
$$|AX| = |AS| + |SX| = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{5} = \frac{a}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right)$$

$$\frac{|AX|}{|AB|} = \frac{\frac{a}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right)}{a} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi,$$

což jsme chtěli dokázat.

Zlatý obdélník má následující zajímavou vlastnost:

Oddělíme-li od zlatého obdélníku $ABCD$ $(a \text{ x } b)$ čtverec $AEFD$ $(b \text{ x } b)$, bude zbylý obdélník $BCFE$ $\left(b \text{ x } (a - b)\right)$ opět zlatý.



Obr.3.4: Oddělení čtverce od zlatého obdélníku.

Navíc platí, že jediný obdélník, ze kterého vznikne po oddělení čtverce obdélník, který by byl „zmenšenou kopií“ původního obdélníku, je obdélník zlatý.

Důkaz Má-li původní obdélník rozměry $a, b,$ má obdélník po oddělení čtverce rozměry $\left(b \text{ x } (a - b)\right)$. Aby měly oba obdélníky stejné poměry stran, musí tedy platit:

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a - b}$$

neboli

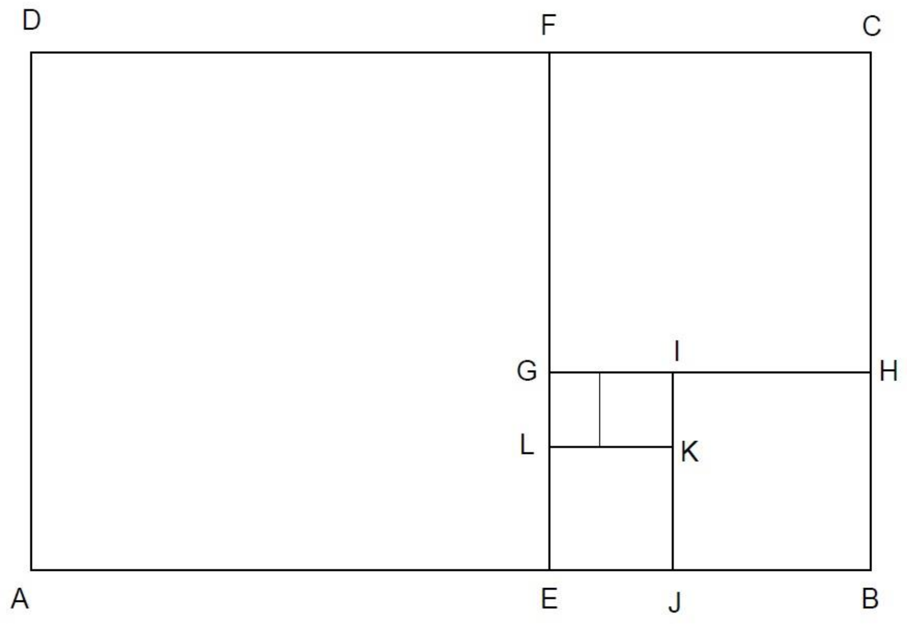
$$a^2 - ab = b^2.$$

Po vydělení b^2 tedy získáme rovnici

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} - 1 = 0,$$

která má jediný kladný kořen $\frac{a}{b} = \Phi$.

Poznámka 3.1 V oddělování čtverců lze pokračovat stejným způsobem. Získáme tak stále nové menší zlaté obdélníky $EBHG,\ GEJI,\ IGLK$ ...



Obr.3.5: Postupné oddělování čtverců.

Poznámka 3.2 Se zlatým řezem se můžeme setkat i u mnohoúhelníků, např. úhlopříčky v pravidelném pětiúhelníku se protínají v poměru zlatého řezu. Také poměr úhlopříčky a strany pravidelného pětiúhelníku je zlatý. Úhlopříčky v pravidelném desetiúhelníku jej rozdělují na deset zlatých trojúhelníků.

3.3 Zlatá spirála

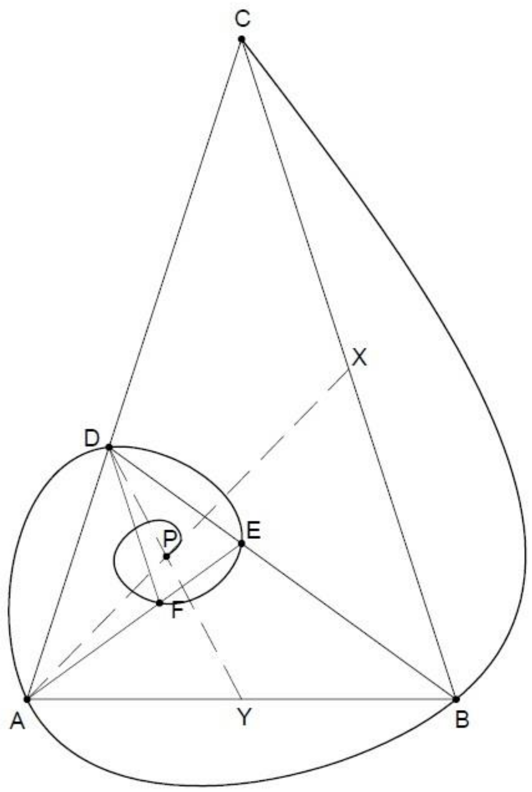
Spirála, které se říká zlatá, je speciálním případem logaritmické spirály. Je určena rovnicí v polárních souřadnicích

$$r = a \cdot e^{b \cdot \Theta},$$

kde a, b jsou kladné reálné konstanty.

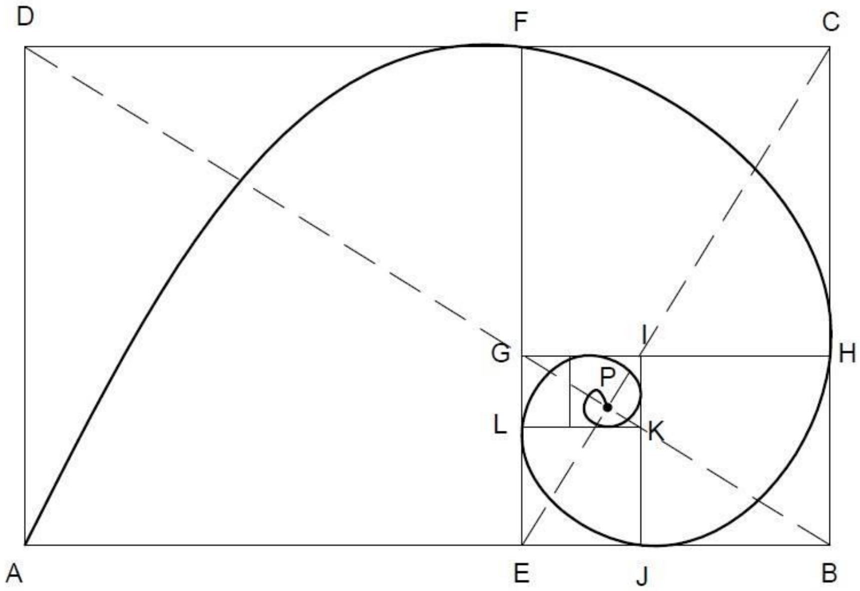
Poznámka 3.3 Polární souřadnice udávají polohu bodu A pomocí jeho vzdálenosti r od počátku soustavy souřadnic P a úhlu Θ, který svírá polopřímka PA s kladným směrem osy x.

Tuto spirálu můžeme proložit vrcholy do sebe vepsaných zlatých trojúhelníků. Pólem spirály je průsečík úseček AX, DY, kde X je střed strany BC a Y je střed strany AB.



Obr.3.6: Zlatá spirála v trojúhelníku.

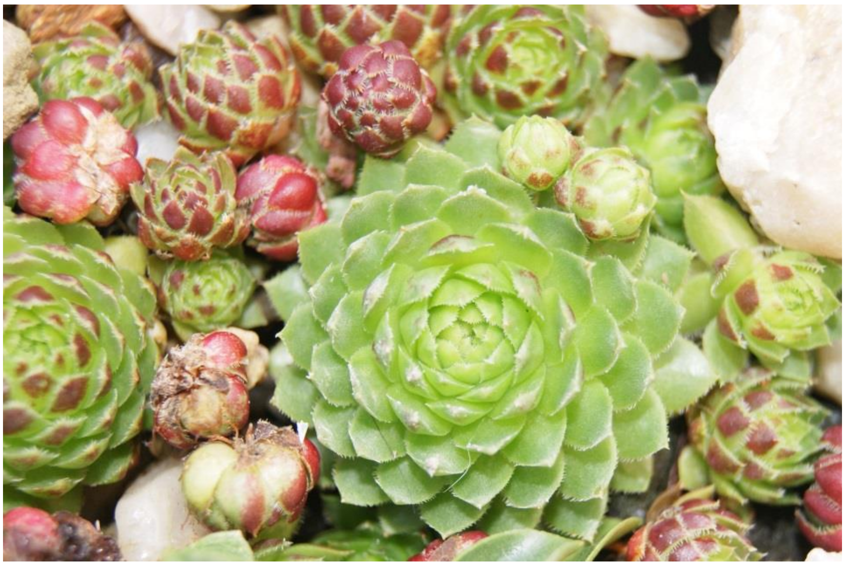
Zlatou spirálu lze vykreslit i do zlatého obdélníku, který jsme získali vepisováním stále menších zlatých obdélníků do sebe. Spirála, jež směřuje do svého pólu, bude procházet po řadě vrcholy $A, F, H, J, L, \ldots$ Pól P je průsečík úseček BD, CE.



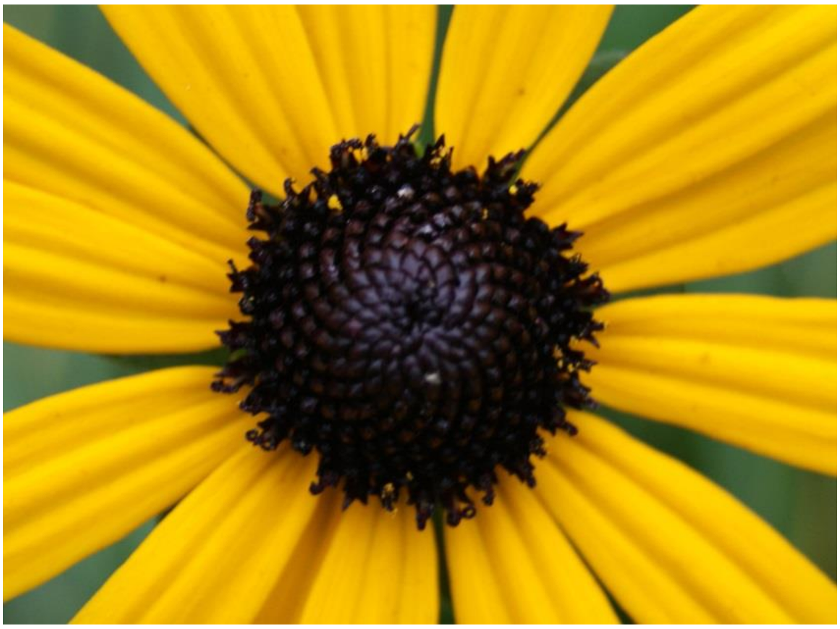
Obr.3.7: Zlatá spirála v obdélníku.

Zlatá spirála se často vyskytuje v přírodě, jak je patrné na následujících obrázcích.

Obr.3.8: Ulity.



Obr 3.9: Netřesk.



Obr.3.10: Spirály v terči třapatky.

Tyto spirály jsou zřetelně vidět i na šiškách jehličnatých stromů, například na borovici. Můžeme přitom pozorovat spirály ve směru a proti směru hodinových ručiček. U borovicových šišek obvykle napočítáme 8 pravotočivých spirál a 13 levotočivých spirál. Obvyklé počty spirál nám tedy odpovídají Fibonacciho číslům.

Obr.3.11: Spirály u šišky borovice.

Fibonacciho čísla můžeme nalézt v uspořádání semen v terči některých rostlin. Příkladem takové rostliny je slunečnice. Slunečnice na fotografii níže má 55 pravotočivých spirál a 89 spirál levotočivých. Další slunečnice má 34 spirál po směru hodinových ručiček a 55 spirál proti směru hodinových ručiček. V obou případech počty spirál odpovídají členům Fibonacciho posloupnosti.

Obr.3.12: Semínka slunečnice tvořící spirály.

Obr.3.13: Spirály u slunečnice.

Fibonacciho čísla můžeme nalézt i v uspořádání listů na stonku, kterým se zabývá obor nazvaný fylotaxe. Růst lístků na stonku lze ve většině případů popsat pomocí zlomku ve tvaru

$$\frac{F_n}{F_{n+2}},$$

kdy v čitateli i jmenovateli se vyskytují členy Fibonacciho posloupnosti. Pokud místa, kde vyrůstají listy ze stonku, proložíme spirálou, pak čitatel výše uvedeného zlomku udává počet otáček spirály mezi dvěma listy, které rostou nad sebou. Jmenovatel udává počet lístků, které se nalézají na úseku spirály mezi dvěma nad sebou umístěnými listy.

Většina rostlin (přes 90%) má popsané uspořádání listů odpovídající Fibonacciho číslům. Ukazuje se, že toto uspořádání je výhodné v tom, že horní listy nezakrývají ty vyrůstající pod nimi a že všechny listy mají dostatečný přísun slunečního světla. Pokud bychom zkoumali podrobněji postavení listů u některých běžných stromů, zjistili bychom, že poměr $\frac{F_n}{F_{n+2}}$ je roven:

- $\frac{1}{3}$ u ostružiny, buku, lísky,…
- $\frac{2}{5}$ u jabloně, meruňky, dubu, třešně, švestky,…
- $\frac{3}{8}$ u hrušně, vrby, topolu, …

Podíváme-li se na stonky většiny rostlin shora, zjistíme, že nové listy vyrůstají pootočené o jistý úhel od listu předchozího. Tento úhel (tzv. divergenční) je takový, aby horní listy co nejméně stínily listům pod nimi. Pozorováním značného počtu druhů rostlin vědci došli k závěru, že se jedná nejčastěji o úhel o velikosti 137,5°. Tento úhel je často nazýván úhlem zlatým, protože platí:

$$137{,}5^\circ = \frac{360^\circ}{\Phi^2} \quad \text{neboli} \quad 137{,}5^\circ = 360^\circ - \frac{360^\circ}{\Phi}.$$

Obr.3.14: Postavení listů u slunečnice.

Obr.3.15: Pohled shora a uspořádání listů.

Závěr

V předložené bakalářské práci může čtenář nalézt základní pojmy, vlastnosti a vztahy týkající se Fibonacciho posloupnosti, ale také souvislost Fibonacciho posloupnosti se zlatým řezem a jinými matematickými útvary.

Kromě matematických vlastností a souvislostí s jinými matematickými pojmy, je bližší pozornost v práci věnována také výskytu Fibonacciho čísel a zlatého řezu v přírodě. Pomocí vlastních „experimentů“ jsem se snažila nalézt v přírodě rostliny, jejichž počet okvětních lístků odpovídá některému z Fibonacciho čísel. Pozorovala jsem, kde se v přírodě vyskytují zlaté spirály a také jaká je souvislost mezi zlatým řezem a postavením listů na stonku. Rovněž jsem prověřovala, zda rostliny, které se dle literatury řadí mezi rostliny s počtem okvětních lístků rovným některému z Fibonacciho čísel, tomu opravdu odpovídají. Došla jsem přitom k závěru, že (alespoň v přírodních podmínkách v mém okolí) je v rozporu s literaturou počet okvětních lístků sedmikrásek, které jsou považovány za klasický příklad rostliny s počtem okvětních lístků rovným některému z Fibonacciho čísel. Při konkrétních pozorováních totiž tomuto tvrzení odpovídala pouze jedna sedmikráska z padesáti zkoumaných.

Svou bakalářskou práci jsem doplnila ilustrujícími obrázky vytvořenými v programu AutoCAD a vlastními fotografiemi.

Při vytváření této práce jsem si vyzkoušela práci s cizojazyčnými odbornými texty a naučila se více o Fibonacciho posloupnosti. Také jsem se při psaní své bakalářské práce přesvědčila, že výskyt Fibonacciho čísel je i v běžném životě opravdu častý a setkáváme se s nimi téměř denně.

Literatura

[1] Bartch, H., J.: *Matematické vzorce*, 2. revidované vydání, SNTL, Praha, 1987

[2] Calda, E.: *Co Fibonacci ani Ludolf netušili aneb Jak souvisí čísla Fibonacciho s číslem* π, Operační program Praha-Adaptabilita, CZ.2.17/3.1.00/31165.

[3] Dunlap, R. A.: *The Golden Ratio and Fibonacci Numbers*, World Scientific Pub Co Inc, 1998

[4] Hertle, B., Kiermeier, P., Nickigová, M.: *Zahradní květiny*, SVOJKA a VAŠUT, 1997

[5] Chmelíková, A.: *Zlatý řez nejen v matematice*, 1. vydání, vydavatelství Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze, Praha, 2011

[6] Jarošová, M.: *Fibonacciho čísla a jejich souvislost s jinými matematickými pojmy* [rigorózní práce], Brno, 2007

[7] Konforovič, A. G.: *Významné matematické úlohy*, 1. vydání, Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1989

[8] Koshy, T.: *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*, Wiley, New York, 2001

[9] Livio, M.: *Zlatý řez Příběh fí, nejpodivuhodnějšího čísla na světě*, Dokořán, Praha, 2006

[10] Olsen, S.: *Záhadný zlatý řez největší tajemství přírody*, 2. vydání, Dokořán, Praha, 2009

[11] Rektorys, K. a spol.: *Přehled užité matematiky I.*, 7. vydání, Prometheus, Praha, 2003

[12] Britton, J.: *Fibonacci Numbers in Nature*, [online], dostupné z: <http://britton.disted.camosun.bc.ca/fibslide/jbfibslide.htm>,[citováno 18.2. 2014].

[13] Knott, R.: *Fibonacci Numbers and Nature* [online], dostupné z:

<http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibnat.html>,[citováno 30.1.2014].

[14] Nagyova, I.: Zlatý řez, [online], dostupné z: <http://www.volny.cz/zlaty.rez/diplomka.html>, [citováno 12.2.2014].

[15] Wikipedia (The free encyclopedia): *Fibonacci numbers.* [online], dostupné z: <http://en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci_number>, [citováno 5.12. 2013]