

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A BIOMECHANIKY

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

VYUŽITÍ DYNAMICKÉHO TLUMIČE V HYDRODYNAMICE

USE OF THE DYNAMIC DAMPER IN HYDRODYNAMICS

DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. Jiří Vrána

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

prof. Ing. František Pochylý, CSc.

BRNO 2019

Zadání diplomové práce

Ústav:	Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Student:	Bc. Jiří Vrána
Studijní program:	Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor:	Inženýrská mechanika a biomechanika
Vedoucí práce:	prof. Ing. František Pochylý, CSc.
Akademický rok:	2018/19

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

Využití dynamického tlumiče v hydrodynamice

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Diplomová práce bude zaměřena na využití dynamického tlumiče u hydrodynamických obvodů. Řešení bude zaměřeno na návrh principu dynamického tlumiče a jeho funkce v hydrodynamickém obvodu. Bude vytvořen jak matematický model tlumiče, tak celého hydraulického obvodu a navržena metoda jeho řešení

Cíle diplomové práce:

Matematický model dynamického tlumiče a jeho variant. Umístění dynamického tlumiče v hydraulickém obvodu, vzhledem k vlastnímu tvaru kmitu tlaku a průtoku.

Návrh metody výpočtu tlakových pulzací.

Návrh variant dynamického tlumiče.

Návrh konstrukční varianty dynamického tlumiče.

Vytvoření softwaru pro řešení tlakových pulzací v jednoduchém hydrodynamickém obvodu s dynamickým tlumičem.

Řešení vlastního a vynuceného kmitání, včetně posouzení vlivu dynamického tlumiče na stabilitu dynamického systému.

Seznam doporučené literatury:

CENGEL, Yunus A. a John M. CIMBALA. Fluid mechanics: fundamentals and applications. 2nd ed. Boston: McGraw-Hill Higher Education, c2010. ISBN 00-772-9546-3.

BRDIČKA, Miroslav. Mechanika kontinua. Praha: Československá akademie věd, 1959. Úvod do teoretické fyziky.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2018/19

V Brně, dne

L. S.

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Předkládaná diplomová práce se zabývá možnostmi využití dynamického tlumiče v hydrodynamice. Konkrétně se jedná o posouzení vlivu dynamického tlumiče na dynamickou stabilitu tekutinové soustavy v případě, že tato soustava před instalací tlumiče vlivem samobuzeného kmitání vykazovala nestabilní chování. V práci je uveden algoritmus pro výpočet tlakových a průtokových pulzací vycházející z metody přenosových matic, dále jsou odvozeny přechodové matice pro různé varianty návrhu tlumiče. S využitím tohoto algoritmu je řešen vliv tlumiče umístěného ve stabilní a nestabilní tekutinové soustavě. Výstupem práce je software pro řešení tlakových a průtokových pulzací v soustavě se sériově řazenými hydrodynamickými prvky vytvořený v programu MATLAB.

Abstract

The master thesis deals with the possibility of using dynamic damper in hydrodynamics. Specifically, the assessment of the impact of dynamic damper on the dynamic stability of the fluid system when the system exhibited unstable behaviour prior to damper installation due to self-excited vibration. In the thesis is presented the algorithm for the calculation of pressure and flow pulsations based on the transfer matrix method, the transition matrices for different damper designs variants are derived. Using the algorithm, the effect of a damper placed in a stable and unstable fluid system is solved. The output of this work is software for solution of pressure and flow pulsations in the system with serially arranged hydrodynamic elements created in the MATLAB program.

Klíčová slova

Dynamický tlumič, tlakové a průtokové pulzace, dynamická stabilita, metoda přenosových matic.

Keywords

Dynamic damper, pressure and flow pulsations, dynamic stability, transfer matrix method.

Bibliografická citace

VRÁNA, Jiří. *Využití dynamického tlumiče v hydrodynamice*. Brno, 2019. Dostupné také z: <https://www.vutbr.cz/studenti/zav-prace/detail/117033>. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky. Vedoucí práce František Pochylý.

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci *Využití dynamického tlumiče v hydrodynamice* vypracoval samostatně pod vedením svého vedoucího prof. Ing. Františka Pochylého, CSc., a že jsem uvedl všechny použité zdroje.

V Brně dne 24. května 2019

.....
Bc. Jiří Vrána

Poděkování

Rád bych poděkoval svému vedoucímu prof. Ing. Františku Pochylému, CSc. za jeho čas a cenné rady, které mi při řešení této práce věnoval. Dále bych chtěl poděkovat svým nejbližším za podporu při studiu.

Obsah

1	Úvod	13
2	Analýza problému a řešené cíle	14
2.1	Formulace problému.....	14
2.2	Cíle řešeného problému.....	14
2.3	System podstatných veličin	14
2.4	Výběr metody řešení.....	15
3	Tlakové a průtokové pulzace a jejich tlumení	16
3.1	Tlumiče pulzací.....	16
3.1.1	Tlumiče typu dolní propust (TDP).....	17
3.1.2	Tlumiče typu pásmová zádrž (TPZ).....	17
3.1.3	Kombinované tlumiče	18
3.2	Snižování amplitudy tlakových a průtokových pulzací [3].....	18
3.2.1	Hydraulické prvky způsobující disipaci mechanické energie.....	18
3.2.2	Plynový akumulátor bez tlumení	18
3.2.3	Dynamický tlumič.....	19
3.3	Princip dynamického tlumiče.....	19
3.4	Dynamický tlumič tekutinových soustav	20
3.4.1	Konstrukční provedení dynamického tlumiče	21
4	Metoda přenosových matic	22
4.1	Stavový prostor.....	22
4.2	Počáteční podmínky.....	23
4.3	Okrajové podmínky	23
4.4	Příklady okrajových podmínek.....	23
4.4.1	Okrajové podmínky na začátku trubice.....	23
4.4.2	Okrajová podmínka na konci trubice.....	24
4.4.3	Další možnosti zápisu okrajových podmínek.....	25
4.5	Řešení rovnice využitím Laplaceovy transformace	25
4.6	Řešení soustavy rovnic	26
4.7	Zpětná Laplaceova transformace.....	28
4.8	Vlastní tvary a amplitudo-frekvenční charakteristika	28
4.9	Hledání nulových bodů funkce $\Delta(s)$	29
4.10	Stabilita	31
4.10.1	Vliv okrajových podmínek.....	33
4.10.2	Vliv trubice	33
4.10.3	Vliv lokálního prvku	33
4.11	Tvorba softwaru pro výpočet tlakových a průtokových pulzací.....	34
5	Dynamický tlumič	36
5.1	Sestavení přechodové matice tlumiče	36
5.1.1	Tlumič s jedním stupněm volnosti	36

5.1.2	Tlumič se dvěma stupni volnosti.....	38
5.1.3	Tlumič se třemi stupni volnosti	40
5.2	Vliv polohy umístění tlumiče.....	43
6	Řešení úlohy	46
6.1	Soustava se dvěma kladnými odpory	47
6.2	Soustava se dvěma kladnými odpory a dynamickým tlumičem	49
6.2.1	Tlumič s vlastní frekvencí nižší oproti frekvenci buzení	49
6.2.2	Tlumič nalazen na budící frekvenci	51
6.2.3	Tlumič s vlastní frekvencí vyšší oproti budící frekvenci.....	52
6.3	Nestabilní soustava	54
6.4	Nestabilní soustava s dynamickým tlumičem.....	56
7	Závěr	61
8	Použité zdroje.....	63
9	Seznam obrázků a tabulek	64
9.1	Seznam obrázků.....	64
9.2	Seznam tabulek	65
10	Seznam příloh	67

Seznam použitých symbolů veličin

Označení	Rozměr	Popis veličiny
t	$[s]$	čas
x	$[m]$	poloha
F	$[N]$	síla
q_A	$[m]$	amplituda kmitu
m	$[kg]$	hmotnost
b	$[Ns\ m^{-1}]$	součinitel tlumení
k	$[N\ m^{-1}]$	tuhost
ω	$[rad\ s^{-1}]$	úhlová frekvence
Ω	$[rad\ s^{-1}]$	vlastní úhlová frekvence
S	$[m^2]$	průřez
V	$[m^3]$	objem
ρ	$[kg\ m^{-3}]$	hustota
a	$[ms^{-1}]$	rychlost zvuku
K	$[Pa]$	modul objemové pružnosti kapaliny
Q, q	$[m^3\ s^{-1}]$	průtok
p, σ	$[Pa]$	tlak
u	$[m]$	výchylka
w		stavový vektor
P		přenosová matice
R		přechodová matice prvku
p		vektor počátečních podmínek
E		jednotková matice
s		parametr Laplaceovy transformace $t \rightarrow s$
u		L. obraz stavového vektoru
β		L. obraz tlaku
ξ		L. obraz průtoku
ν		L. obraz výchylky

Symbol	Popis
\in	je prvkem
\wedge	současně platí
\forall	platí pro každé
\mathcal{L}	Laplaceova transformace
Σ	suma
Π	součin
\dot{a}	parciální derivace veličiny a podle času
a'	parciální derivace veličiny a podle s
a^*	vektor transponovaný, komplexně sdružený k a

1 Úvod

Při sestavování hydrodynamických obvodů je třeba navrhnout soustavu tak, aby byla zaručena spolehlivost a provozuschopnost. Z toho důvodu je třeba zohlednit všechny jevy, které mohou chování soustavy ovlivnit. Tlakové a průtokové pulzace jsou jedním z těchto jevů. Vznikají zejména při přechodovém stavu, což může být například uzavírání ventilu, a mohou mít výrazný vliv při posuzování pevnosti, nebo při posuzování dynamické stability soustavy.

Může nastat situace, při níž pulzace v soustavě překročí hranici dynamické stability a vznikne samobuzené kmitání. V takovém případě bude docházet k nárůstu amplitudy kmitu, což může vést k havárii. Problém dynamické stability je aktuálním tématem a hledají se způsoby, jak se tomuto jevu co nejlépe vyvarovat. Jednou z možností by mohlo být použití dynamického tlumiče. Tato varianta je ojedinělá, proto je příhodné zjistit, jak se bude soustava s tlumičem chovat, jaký bude mít vliv na dynamickou stabilitu a jaké parametry budou toto chování nejvíce ovlivňovat.

Cílem této práce je vytvořit výpočtový model soustavy, který bude možné použít k řešení hydrodynamického obvodu s dynamickým tlumičem. K tomu bude třeba zvolit vhodnou metodu a popsat chování dynamického tlumiče, který se může vyskytovat ve více provedeních, a navrhnout jeho konstrukční provedení. Dále bude vhodné stanovit, jaký vliv bude mít umístění tlumiče v soustavě, a to jak na amplitudu kmitu, tak na dynamickou stabilitu soustavy.

2 Analýza problému a řešení cíle

2.1 Formulace problému

Analýza vlivu umístění, vhodnosti konstrukčního řešení tlumiče a jeho vlivu na stabilitu hydrodynamické soustavy.

2.2 Cíle řešeného problému

- Vytvořit výpočtový model dynamického tlumiče a jeho variant.
- Zvolit vhodné umístění dynamického tlumiče v hydraulickém obvodu, vzhledem k vlastnímu tvaru kmitu tlaku a průtoku.
- Návrh metody výpočtu tlakových pulzací.
- Návrh variant dynamického tlumiče.
- Návrh konstrukční varianty dynamického tlumiče.
- Vytvořit software pro řešení tlakových pulzací v jednoduchém hydrodynamickém obvodu s dynamickým tlumičem.
- Provést řešení vlastního a vynuceného kmitání, včetně posouzení vlivu dynamického tlumiče na stabilitu dynamického systému.

2.3 Systém podstatných veličin

Před řešením stanoveného problému je třeba definovat veličiny, které do procesu řešení daného objektu vstupují a výrazně jej ovlivňují a stanovit systém podstatných veličin [1]. Tento stanovený systém obsahuje všechny veličiny potřebné pro řešení problému na zvolené rozlišovací úrovni.

Řešeným objektem je hydrodynamická soustava složená z tekutinových prvků spojených pružnými trubicemi, které obsahují stlačitelnou kapalinu.

- **Okolí objektu**
 - Pulzátor
 - Potrubí
- **Geometrie a topologie objektu**
 - Geometrie potrubí
 - Geometrie dynamického tlumiče
- **Vazby objektu k okolí**
 - Napojení poulzátoru na soustavu
- **Aktivace objektu**
 - Tlakové (příp. průtokové) buzení soustavy pulzátozem

- **Ovlivňování objektu**
 - Viskozita média
 - Hustota média
 - Rychlost zvuku v médiu
 - Tekutinové prvky v soustavě
- **Projevy objektu**
 - Tlakové a průtokové pulzace
- **Důsledky projevu objektu**
 - Mezní stav dynamické stability

2.4 Výběr metody řešení

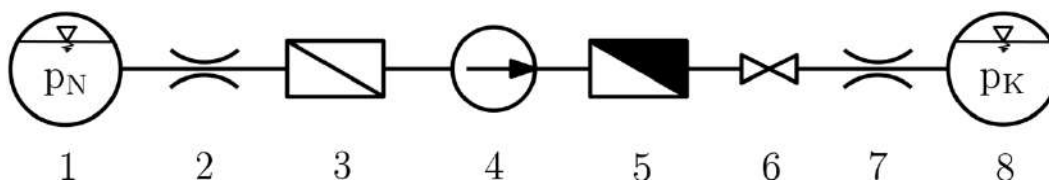
V práci je řešen nepřímý problém. Vstupní veličiny do algoritmu řešení jsou okolí objektu, vazby objektu k okolí, aktivace objektu, ovlivňování objektu, ale také projevy objektu a jeho důsledky. Výstupem z algoritmu je návrh vhodné geometrie a topologie objektu.

K řešení tohoto problému je možné použít výpočtové modelování, nebo provést experiment. Výpočtové modelování lze dále rozdělit na řešení analytické, anebo numerické. V práci je použita obou přístupů, hlavní část úlohy je řešena metodou přenosových matic. Tato metoda obsahuje všechny podstatné veličiny ze systému podstatných veličin. Dále byl pro názorné zobrazení vlastních hodnot naprogramován algoritmus využívající metodu konečných diferencí, jehož vstupem jsou výsledky řešení metodou přenosových matic.

Experimentální řešení by nebylo v případě takto stanoveného problému vhodné. Bylo by možné použít jej pro ověření získaných výsledků, to ale nebylo cílem této práce.

3 Tlakové a průtokové pulzace a jejich tlumení

Hydrodynamická soustava je charakterizována sítí pružných trubíc, které jsou vzájemně propojené pasivními a aktivními tekutinovými prvky, jako například na obrázku (Obrázek 3.1). Mezi pasivní prvky lze řadit například hydraulický odpor, do skupiny aktivních prvků potom patří hydrogenerátory. [2]



Obrázek 3.1: Hydrodynamická soustava napájecího systému tepelné elektrárny [2]

1 – napájecí nádrž; 2 – šoupátko; 3 – filtr; 4 – čerpadlo; 5 – zpětná klapka; 6 – uzavírací ventil; 7 – napájecí ventil; 8 – kotel

Přenosem energie z aktivních tekutinových prvků dochází v potrubní soustavě k tlakovým pulzacím. Pokud se frekvence buzení shoduje s vlastní frekvencí tekutiny soustavy, dochází podobně jako u mechanických systémů k rezonanci, díky čemuž může docházet ke snížení životnosti soustavy, ovlivňování řídicích a kontrolních prvků, zvýšení hluku a možné způsobení havárie soustavy.

Numerické metody pro řešení dynamiky tekutinového systému lze rozdělit do dvou skupin, a to na harmonickou a transienční analýzu. Pro řešení ve frekvenční oblasti je vhodná metoda přenosových matic, která využívá Laplaceovy transformace podle času s v lineárnizovaných rovnicích rovnováhy a kontinuity se zahrnutím okrajových podmínek. [3]

Pro řešení dynamických projevů v časové oblasti je často používaná metoda konečných diferencí. Lze užít explicitní a implicitní algoritmus, nebo metodu charakteristik. Nejlepší výsledky v souladu s teorií a experimenty jsou dosaženy při využití metody charakteristik.

3.1 Tlumiče pulzací

Tato podkapitola čerpá z knihy [4]. Snižování tlakových pulzací lze rozdělit na primární opatření v samotném hydrogenerátoru a sekundární opatření, které spočívá v odstranění pulzací za tímto prvkem. Právě zde se uplatní tlumiče pulzací.

Požadavky, které jsou na tyto tlumiče kladeny:

- tlumení tlakových pulzací v požadovaném frekvenčním rozsahu při minimální tlakové ztrátě

- jednoduchost konstrukce, která je odolná vůči požadovanému tlaku se snadnou instalací v obvodu
- co největší spolehlivost s minimálními nároky na údržbu

Tlumiče lze z hlediska tlumení rozdělit na aktivní a pasivní.

Aktivní způsob tlumení pulzací spočívá v měření tlakových pulzací a otáček v dané soustavě, a s využitím řídicí elektroniky vytvoří zařízení takovou tlakovou "protipulzací", že po složení s původním tvarem pulzu dojde k potlačení pulzací. Tento typ tlumiče není pro jeho složitost tolik rozšířený.

Pasivní tlumiče lze dále rozdělit. První skupina je označována jako absorpční tlumiče, které pracují na principu nevratné přeměny energie na teplo. Tyto tlumiče jsou efektivní při vyšších frekvencích. Další skupinou jsou reflexní tlumiče, které jsou zároveň nejrozšířenější. Princip spočívá v tom, že dopadající vlna se částečně odrazí a částečně prochází do další části obvodu. Vícenásobným odrazem dochází k vyhlazování pulzací. Poslední skupinou jsou tlumiče kombinované. Může se jednat o kombinace absorpčního a reflexního tlumiče nebo různé typy reflexních tlumičů.

Dále je možné tlumiče kategorizovat podle frekvenční propustnosti.

3.1.1 Tlumiče typu dolní propust (TDP)

Konstrukční řešení je nejčastěji komorové. U tohoto typu tlumiče nastává útlum v oblasti nad rezonanční frekvencí kapaliny, je širokopásmový a lze jej rozšířit sériovým řazením komor.

Typy provedení:

- Jednokomorový tlumič se soustředěnými parametry
- Vícekomorový tlumič se soustředěnými parametry
- Dvoukomorový tlumič s dlouhým spojovacím vedením
- Jednokomorový tlumič s rozloženými parametry

3.1.2 Tlumiče typu pásmová zádrž (TPZ)

Tento typ tlumiče je vhodný pro útlum úzkopásmového charakteru s periodickým výskytem nulového a nejvyššího útlumu.

Do této kategorie patří:

3.1.2.1 Paralelní odbočka (prostá, s komorou, s různou délkou větví)

Tlumicího účinku je zde dosaženo interferencí průchozích a odražených vln v odbočce. Klíčovým parametrem charakterizujícím tlumení je zde délka odbočky.

3.1.2.2 Plynový akumulátor

Tento typ tlumiče se podobá paralelní odbočce s komorou, nádoba je ale z části naplněna plynem a z části kapalinou. Parametrem ovlivňujícím tlumení je zde kapacita akumulátoru, která je závislá na plnicím tlaku plynu. Oproti paralelní odbočce má plynový akumulátor širší frekvenční pásmo nižšího útlumu, nehodí

se však pro tlumení rychloběžných hydrogenerátorů, jelikož má poměrně nízkou vlastní frekvenci.

3.1.3 Kombinované tlumiče

Pokud některý z výše uvedených tlumičů má nepříznivou frekvenční charakteristiku v žádaném frekvenčním spektru, je možné vytvořit vhodné řešení konstrukčním spojením tlumičů dolní propusti a pásmové zadržky.

Lze zde uvést dva základní typy provedení, a to komorový tlumič se zasunutým výstupem nebo komorový tlumič s přepážkou.

Kombinovaný tlumič je schopen při stejných rozměrech, jako má jeho základní varianta, dosáhnout větší míry útlumu a postihnout širší frekvenční pásmo.

3.2 Snižování amplitudy tlakových a průtokových pulzací [3]

V této podkapitole jsou uvedeny některé prvky, kterými lze tlumit tlakové a průtokové pulzace. Dále je zde uveden společně se značením tvar přechodové matice \mathbf{R} daného prvku z literatury [2]. Využití této matice bude klíčové pro řešení úlohy metodou přenosových matic popsané v kapitole 3.3.

3.2.1 Hydraulické prvky způsobující disipaci mechanické energie

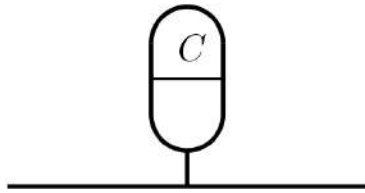
Mezi tyto prvky lze zařadit například armatury, clony, nebo speciální regulační odpory. Vyznačují se tím, že dobře tlumí nestacionární tlakové a průtokové pulzace, mohou však způsobit tlakové ztráty stacionárního průtoku.

$$\begin{array}{c} b \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -b & 1 \end{bmatrix} ; b > 0 \quad (3.1)$$

3.2.2 Plynový akumulátor bez tlumení

Plynový akumulátor lze využít k přeladění soustavy a tím i ke snížení pulzací vynuceného kmitání. Častěji se používá ke snížení amplitud přechodového kmitání. Nejvhodnější je umístit plynový akumulátor tak, aby byl co nejbližší zdroji tlakových pulzací. Aby plnil svoji funkci, nesmí se nacházet v místě uzlu tlaku tlumeného tvaru kmitu.

Veličinou charakterizující je kapacita akumulátoru C , která odpovídá podílu objemu a tlaku plynu.



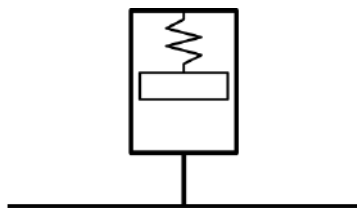
$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & -sC \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; C = \frac{V}{p} \quad (3.2)$$

3.2.3 Dynamický tlumič

Mimo plynový akumulátor lze k přeladění soustavy použít dynamický tlumič. Pokud je správně nalazen, pohltí část mechanické energie soustavy. Tímto principem lze zabránit rezonančnímu kmitání soustavy. Přidání dynamického tlumiče do hydraulického obvodu způsobí jeho přeladění.

Umístění dynamického tlumiče se volí obdobně jako u plynového akumulátoru do místa mimo uzel tlaku příslušného tvaru kmitu. Nejlepší vlastnosti lze očekávat v místě kmitny tlaku nebo uzlu průtoku.

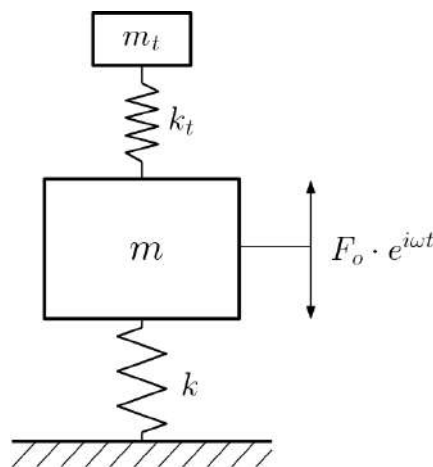
Parametry $\Psi(s)$ a $\Phi(s)$ charakterizují chování tlumiče a jsou závislé na jeho konstrukci. Jejich odvození pro různé varianty tlumiče je provedeno v kapitole 5.



$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & -s \frac{\Psi(s)}{\Phi(s)} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

3.3 Princip dynamického tlumiče

Návrh dynamického tlumiče tlakových pulzací vychází z principu dynamického tlumiče vibrací, který je vhodné nyní shrnout.



Obrázek 3.2: Schematické znázornění dynamického tlumiče vibrací [6]

Na hmotu m uchycenou k základnímu tělesu pružinou k působí harmonická budící síla $F_o \cdot e^{i\omega t}$, jak je vidět na obrázku (Obrázek 3.2). Je-li brána v úvahu pouze tato soustava, pak platí, že vlastní úhlová frekvence lze vyjádřit vztahem $\Omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Pokud se frekvence budící síly ω rovná vlastní úhlové frekvenci, pak se soustava dostává do rezonance.

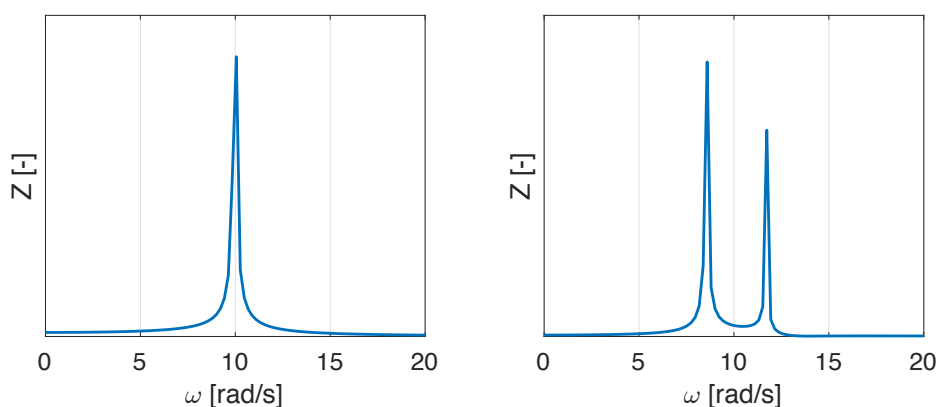
Rezonančnímu stavu se lze vyhnout přiřepněním hmoty m_t pružinou k_t za předpokladu, že je splněna závislost (3.4).

$$\frac{k_t}{m_t} = \omega^2 = \Omega^2 \quad (3.4)$$

Pokud tato rovnost platí, hmota m_t se stává dynamickým tlumičem vibrací. Hmota m přestává kmitat a kmitá pouze hmota m_t a to s opačnou fází oproti budící síle. Amplituda kmitání je definována vztahem (3.5) [6].

$$q_a = -\frac{F_o}{k_t} \quad (3.5)$$

Situaci lze znázornit také ve frekvenčním spektru, kde je dobře vidět, jak přidání hmoty m_t změní amplitudo-frekvenční charakteristiku soustavy (Obrázek 3.3).



Obrázek 3.3: Amplitudo-frekvenční charakteristika soustavy bez hmoty m_t (vlevo), s přidanou hmotou m_t (vpravo)

3.4 Dynamický tlumič tekutinových soustav

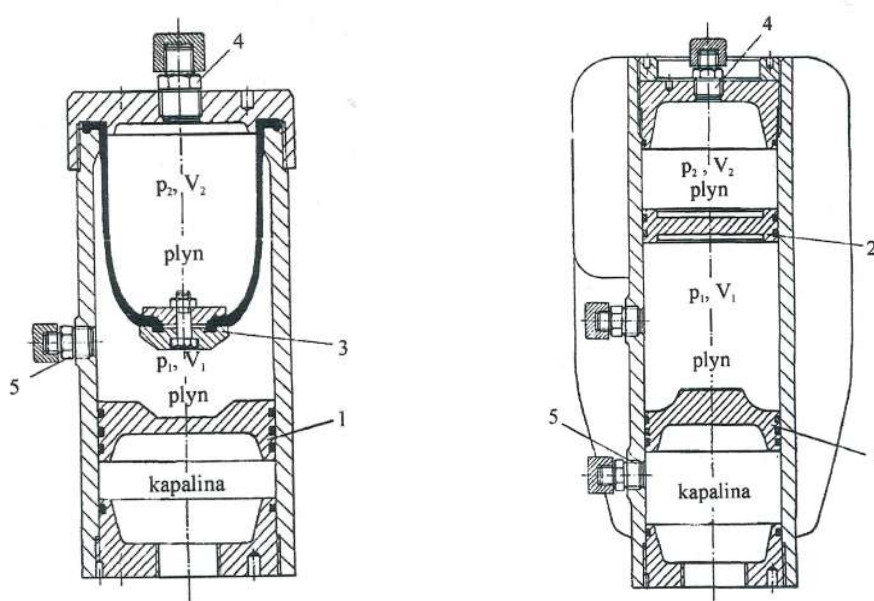
V hydrodynamické soustavě je přenos energie potrubím z objemových, nebo odstředivých čerpadel doprovázen tlakovými pulzacemi, které představují

buzení soustavy. Pokud nastane situace, kdy bude frekvence buzení shodná s vlastní frekvencí tekutiny v potrubní síti nastane rezonanční kmitání. [7]

3.4.1 Konstrukční provedení dynamického tlumiče

Konstrukční řešení tlumiče je možno realizovat pomocí mechanické pružiny anebo natlakovaného plynového polštáře, který taktéž plní funkci pružiny. Výhodou plynového polštáře je, že změnou přetlaku v tlumiči lze lehce změnit jeho naladění.

Pro tlumič se dvěma stupni volnosti lze nalézt konstrukční provedení, které je na obrázku (Obrázek 3.4). Pro obě varianty platí, že tlumič je tvořen válcovým pláštěm a využívá plynovou pružinu.



Obrázek 3.4: Varianty konstrukčního provedení tlumiče se dvěma stupni volnosti [7]

V prvním případě je rozhraní mezi komorami odděleno pružnou přepážkou, kdežto v druhém případě jsou komory odděleny pohyblivým pístem. První typ provedení je výhodnější, neboť u druhého provedení je třeba zajistit kvalitní těsnění mezi komorami, aby nedocházelo k úniku plynu mezi komorami, což by způsobilo rozladění tlumiče.

4 Metoda přenosových matic

Metoda popisovaná v této kapitole vychází z literatury [2]. Tlakové a průtokové pulzace lze popsat specifickým tvarem rovnice rovnováhy (4.1) a rovnice kontinuity (4.2) pro pružnou trubici.

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{S}{\rho} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{Q}{S} \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{b}{\rho} q = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{K}{S} \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{Q}{S} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\rho q^2 - b \frac{Q}{S} q}{S} = 0 \quad (4.2)$$

Tyto rovnice byly odvozeny za předpokladu, že nelineární členy, které rovnice kontinuity a rovnice rovnováhy ve svém základním tvaru obsahují, budou považovány za nepodstatné z hlediska řešení daného problému. Ke splnění této podmínky platí předpoklad pro Machovo číslo $M \ll 1$.

Déle bude užitečné tyto rovnice zapsat jedinou maticovou rovnicí.

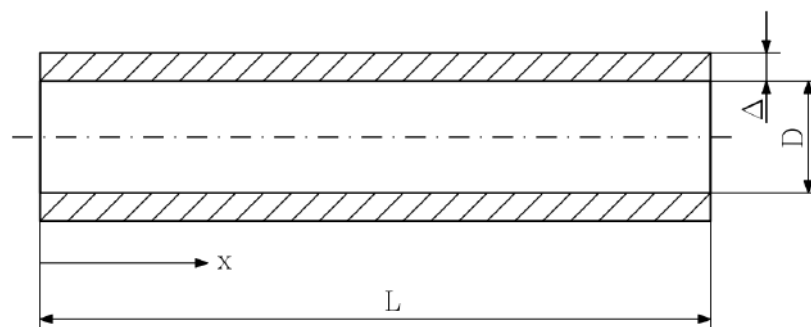
$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \mathbf{B} \mathbf{w} + \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} = 0 \quad (4.3)$$

Rovnice (4.1) a (4.2) obsahují složku proudění stacionární, závislou na čase a nestacionární. Pro řešení daného problému bude dostatečné uvažovat složku nestacionární. Je třeba si uvědomit, že se nejedná o kompletní řešení dané úlohy. Za tohoto předpokladu budou mít složky v rovnici (4.3) tvar:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{b}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{S}{\rho} \\ \frac{K}{S} & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} q \\ \sigma \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

4.1 Stavový prostor

Vektor \mathbf{w} popisuje stav makroskopické soustavy (Obrázek 4.1) v určitém místě prostoru x a v čase t , je tedy označen jako stavový vektor a obdržíme jej řešením diferenciální rovnice (4.3), která je lineární parciální diferenciální rovnicí prvního řádu dvou proměnných x a t . Pro jednoznačné řešení je nutné zadat počáteční a okrajovou podmínku.



Obrázek 4.1: Makroskopická soustava

4.2 Počáteční podmínky

Počáteční podmínky určují stav soustavy v čase $t = 0$. Předpokládejme, že je v tomto čase pro každé $x \in \langle 0, L \rangle$ předepsána funkce $\varphi(x)$ tak, že platí

$$\mathbf{w}(x, 0) = \varphi(x) \quad \forall x \in \langle 0, L \rangle \quad (4.5)$$

4.3 Okrajové podmínky

Pro úlohu popsanou soustavou dvou diferenciálních rovnic je třeba zadat dvě okrajové podmínky, a to na začátku $x = 0$ a na konci trubice $x = L$.

Stavový vektor \mathbf{w} obsahuje dvě proměnné, z nichž jedna bude na začátku trubice považována za neznámou. Tato veličina bude mít označení α .

Okrajová podmínka bude definována působením silového pole označovaným $\mathbf{m}(t)$ na začátku trubice v $x = 0$ a $n(t)$ na konci trubice $x = L$. Pro danou metodu je vhodný zápis okrajových podmínek (4.6) a (4.7).

$$\mathbf{w}(0, t) = \mathbf{a} \alpha(0, t) + \mathbf{m}(t) \quad \forall t ; x = 0 \quad (4.6)$$

$$\mathbf{b}^T \mathbf{w}(L, t) = n(t) \quad \forall t ; x = L \quad (4.7)$$

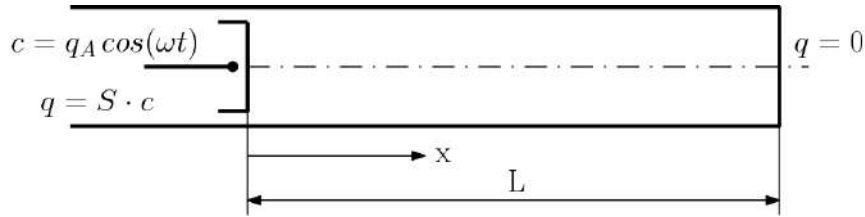
4.4 Příklady okrajových podmínek

Uvedme několik možností, jak je možné zadat okrajové podmínky.

4.4.1 Okrajové podmínky na začátku trubice

Jednou z možností je, že v místě $x = 0$ je definován průtok $q(0, t) = \delta(t)$. Neznámou veličinou je nestacionární složka tlaku $\sigma(0, t)$. Zapišme rovnici (4.6) pro tento případ.

$$\mathbf{w}(0, t) = \begin{bmatrix} q(0, t) \\ \sigma(0, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \sigma(0, t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \delta(0, t) \quad (4.8)$$



Obrázek 4.2: Okrajová podmínka

Vektory a proměnné definující okrajovou podmínku mají pro tyto vstupní parametry následující tvar:

$$\mathbf{a}^T = (0, 1); \quad \alpha = \sigma(0, t); \quad \mathbf{m}^T = (1, 0) \delta(t) \quad (4.9)$$

Názornou představu lze získat z obrázku (Obrázek 4.2), kde je vidět, že počáteční průtok je definován pulzátoem s rychlostí pístu c .

$$\delta(t) = S q_A \cos(\omega t) \quad (4.10)$$

Druhou možností, jak zadat okrajovou podmínku na začátku, je předepsat ji pro nestacionární tlak $\sigma(0, t) = \gamma(t)$. Analogicky lze vyjádřit vektory tvarem (4.11).

$$\mathbf{a}^T = (1, 0); \quad \alpha = q(0, t); \quad \mathbf{m}^T = (0, 1) \gamma(t) \quad (4.11)$$

Další možnou situací je, že je v místě $x = 0$ zadána závislost (4.12).

$$\varepsilon(t) = q(0, t) + h \sigma(0, t) \quad (4.12)$$

$$\mathbf{a}^T = (-h, 1); \quad \alpha = \sigma(0, t); \quad \mathbf{m}^T = (1, 0) \varepsilon(t) \quad (4.13)$$

4.4.2 Okrajová podmínka na konci trubice

V místě $x = L$ je zadán průtok $q_0(t)$. Rovnice (4.7) bude mít tvar:

$$(1, 0) \begin{bmatrix} q(L, t) \\ \sigma(L, t) \end{bmatrix} = q_0(t) \quad (4.14)$$

$$\mathbf{b}^T = (1, 0); \quad n(t) = q_0(t)$$

Pokud tento typ podmínky aplikujeme na příklad uvedený na obrázku (Obrázek 4.2), lze jednoduše psát $q_0(t) = 0$; $n(t) = 0$.

4.4.3 Další možnosti zápisu okrajových podmínek

Okrajová podmínka lze předepsat i pomocí časové derivace, v takovém případě bude mít rovnice okrajové podmínky následující tvar.

$$x = 0 : \mathbf{w}(0, t) = \mathbf{a}_1 \alpha + \mathbf{a}_2 \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \mathbf{m}^T(t) \quad (4.15)$$

$$x = L : \mathbf{b}_1^T \mathbf{w}(0, t) + \mathbf{b}_2^T \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = n(t) \quad (4.16)$$

4.5 Řešení rovnice využitím Laplaceovy transformace

Metoda sítí využívá při řešení dané soustavy rovnic Laplaceovu transformaci, která převádí úlohu na soustavu obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu. Laplaceova transformace je provedena podle časové proměnné t , která se zobrazí na s .

Zavedme nyní předpoklad o existenci těchto Laplaceových obrazů:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\mathbf{w}(x, t)\} &= \mathbf{u}(x, s); \quad \mathcal{L}\{\alpha(0, t)\} = \beta(0, s); \\ \mathcal{L}\left\{\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}\right\} &= s\mathbf{u}(x, s) - \mathbf{w}(x, 0); \quad \mathcal{L}\left\{\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right\} = s\beta(0, s) - \\ &-\alpha(0, 0); \quad \mathcal{L}\{\mathbf{m}(t)\} = \mathbf{r}(s); \quad \mathcal{L}\{n(t)\} = n(s) \end{aligned} \quad (4.17)$$

Rovnice (4.3) má po Laplaceově transformaci tvar:

$$\mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + s\mathbf{u} = \mathbf{w}(x, 0) \quad \forall x \in \langle 0, L \rangle \quad (4.18)$$

Při hledání řešení je vhodné tuto rovnici zjednodušit zavedením prvků \mathbf{U} a \mathbf{h} . Problém se tím zjednoduší na řešení obyčejné diferenciální rovnice (4.20).

$$\mathbf{U} = \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{B} + s\mathbf{E}); \quad \mathbf{h} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{w}(x, 0) = \mathbf{K}^{-1}\boldsymbol{\varphi}(x) \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \mathbf{U}\mathbf{u} + \mathbf{h} \quad (4.20)$$

Tvar řešení lze jednoduše vyjádřit pomocí maticové exponenciály (4.21). Pro praktické využití je vhodné definovat matici \mathbf{P} a vektor \mathbf{p} (4.22). Konečný tvar řešení je uveden v rovnici (4.23).

$$\mathbf{u}(x) = e^{\mathbf{U}x} \mathbf{u}(0) + e^{\mathbf{U}x} * \mathbf{h} \quad (4.21)$$

$$\mathbf{P}(x, s) = e^{\mathbf{U}x}; \quad \mathbf{p}(x, s) = e^{\mathbf{U}x} * \mathbf{h} \quad (4.22)$$

$$\mathbf{u}(x, s) = \mathbf{P}(x, s)\mathbf{u}(0, s) + \mathbf{p}(x, s) \quad (4.23)$$

Rovnice (4.23) definuje stavový vektor $\mathbf{u}(x, s)$ závislý na matici \mathbf{P} , jejíž tvar je ovlivněn výhradně vlastnostmi trubice. Dále je stavový vektor závislý na vektoru \mathbf{p} , jež zahrnuje vliv počátečních podmínek a vektoru $\mathbf{u}(0, s)$ okrajových podmínek.

4.6 Řešení soustavy rovnic

Díky rovnici (4.23) je možné získat řešení tlaku a průtoku v trubici. Pokud bude soustava tvořena sítí trubíc a bude obsahovat hydraulické prvky¹, obdržíme soustavu rovnic. Zaměříme se nyní na její řešení.

Soustavu rovnic lze zapsat v maticovém tvaru (4.24) $\mathbf{A}\mathbf{Y} = \mathbf{x}$.

$$\left[\begin{array}{cccccccc} \mathbf{a} & -\mathbf{E} & & & & & & \\ & \mathbf{R}_1 \mathbf{P}_1 & -\mathbf{E} & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & \mathbf{R}_i \mathbf{P}_i & -\mathbf{E} & & & \\ & & & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & \mathbf{R}_{N-1} \mathbf{P}_{N-1} & -\mathbf{E} & \\ & & & & & & & \mathbf{b}^T \mathbf{P}_N \end{array} \right] \begin{bmatrix} \beta \\ \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_i \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{N-1} \\ \mathbf{u}_N \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_i \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{N-1} \\ x_N \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Matice \mathbf{A} je přenosovou maticí řešené soustavy, skládající se ze sériově řazených prvků. Tato matice závisí pouze na vlastnostech soustavy. Vektor \mathbf{x} zohledňuje vliv vnějšího prostředí a počátečních podmínek. Vektor \mathbf{Y} obsahuje složky, jež jsou Laplaceovy obrazy stavových proměnných, konkrétně průtoku a tlaku, a získáme ho řešením této soustavy algebraických rovnic.

¹ Hydraulické prvky jsou pospány maticí \mathbf{R} . Tvary matic pro vybrané prvky jsou uvedeny v kapitole 4.

Pro řešení soustavy rovnic je výhodné rozdělit matici \mathbf{A} na čtyři pole, jak je naznačeno ve výrazu (4.25), čímž obdržíme submatice.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{n} & \boldsymbol{\pi} \\ 0 & \mathbf{d} \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Obdržíme dvě obdélníkové matice \mathbf{n} a \mathbf{d} okrajových podmínek a dolní trojúhelníkovou matici $\boldsymbol{\pi}$ obsahující matice \mathbf{P} a \mathbf{R} s prvky -1 na hlavní diagonále.

Za předpokladu, že matice \mathbf{A} je regulární lze psát řešení ve tvaru $\mathbf{Y} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}$. Je tedy klíčové určit inverzní matici \mathbf{A}^{-1} . Zavedme nejprve následující zjednodušení:

$$\mathbf{z} = -\boldsymbol{\pi}^{-1}\mathbf{n} \ ; \ \mathbf{w} = -\mathbf{d}\boldsymbol{\pi}^{-1} \ ; \ \Delta = \mathbf{d}\mathbf{z} \quad (4.26)$$

V uvedených výrazech se vyskytuje matice inverzní k $\boldsymbol{\pi}$. Její vyjádření je uvedeno v (4.27).

$$\left[\begin{array}{cccccccc} & -\mathbf{E} & & & & & & \\ & -\mathbf{R}_1\mathbf{P}_1 & & -\mathbf{E} & & & & \\ -\mathbf{R}_2\mathbf{P}_2 & \mathbf{R}_1\mathbf{P}_1 & & -\mathbf{R}_2\mathbf{P}_2 & & -\mathbf{E} & & \\ & & & & \ddots & & & \\ -\prod_{j=i-1}^1 \mathbf{R}_j\mathbf{P}_j & & -\prod_{j=i-1}^2 \mathbf{R}_j\mathbf{P}_j & \dots & -\mathbf{R}_{i-1}\mathbf{P}_{i-1} & & -\mathbf{E} & \\ & & & & & \ddots & & \\ -\prod_{j=N-1}^1 \mathbf{R}_j\mathbf{P}_j & & -\prod_{j=N-1}^2 \mathbf{R}_j\mathbf{P}_j & \dots & \dots & \dots & -\mathbf{R}_{N-1}\mathbf{P}_{N-1} & -\mathbf{E} \end{array} \right] \quad (4.27)$$

Inverzní matici lze získat jako:

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{T} + \boldsymbol{\alpha}\Delta^{-1}\boldsymbol{\beta} \quad (4.28)$$

Přičemž vektory $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ a matice \mathbf{T} mají tvar:

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\beta} = [\mathbf{w} \ 1] \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & 0 \\ \boldsymbol{\pi}^{-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

Vynásobení rovnice (4.28) vektorem \mathbf{x} obdržíme řešení soustavy rovnic.

$$\mathbf{Y} = \mathbf{T}\mathbf{x} + \frac{\beta\mathbf{x}}{\Delta}\alpha \quad (4.30)$$

4.7 Zpětná Laplaceova transformace

Pro návrat z frekvenční do časové oblasti je užito zpětné Laplaceovy transformace. Při její aplikaci je vhodné využít větu o reziduích. Řekněme, že funkce $\mathbf{Y}(s)$ je ve tvaru:

$$\mathbf{Y}(s) = \frac{\phi(s)}{\psi(s)} \quad (4.31)$$

Za předpokladu, že $\phi(s)$ a $\psi(s)$ jsou holomorfní funkce v bodě s_k a tento bod je pól prvního řádu, je reziduum definováno vztahem (4.32).

$$\text{Res } \mathbf{Y}(s_k) = \frac{\phi(s_k)}{\psi'(s_k)} \quad (4.32)$$

S využitím této věty lze odvodit vztah pro výpočet vlastního kmitání (4.33) a vynuceného kmitání (4.34). Tato řešení jsou určena v místech $x = 0$.

$$\mathbf{w}_1(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta(s_k)\varepsilon(s_k)}{\beta(s_k)\mathbf{A}'(s_k)\alpha(s_k)} \alpha(s_k) e^{s_k t} \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_2(t) = & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta(s_k)\varphi(s_k)}{\beta(s_k)\mathbf{A}'(s_k)\alpha(s_k)} \frac{\alpha(s_k)}{s_k - i\omega} e^{s_k t} - \\ & - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta(s_k)\varphi(s_k)}{\beta(s_k)\mathbf{A}'(s_k)\alpha(s_k)} \frac{\alpha(s_k)}{s_k - i\omega} e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (4.34)$$

kde $\varepsilon(s)$ je vektor počátečních podmínek a $\varphi(s)$ je vektor zahrnující vlivy vnějšího prostředí.

4.8 Vlastní tvary a amplitudo-frekvenční charakteristika

Pro vykreslení vlastních tvarů kmitu je využito řešení získané ze vztahu (4.30). Tento vektor je složen ze stavových vektorů $\mathbf{u}_i(0, s)$, které je třeba převést využitím rovnice (4.23) na vektory $\mathbf{u}_i(x, s)$. Za předpokladu $s = s_k$ je vektor závislý na jedné proměnné x . Dosazením konkrétních hodnot za x obdržíme

vektory komplexních čísel. Pro vykreslení vlastního tvaru je brána absolutní hodnota těchto hodnot.

Při vykreslení amplitudo-frekvenční charakteristiky je postup obdobný, odlišný v tom, že je zvolena poloha $x = X_{A-F}$ a nezávislou proměnnou je s . Dosazením různých hodnot ω za s lze vykreslit amplitudo-frekvenční charakteristiku. Pro vykreslení je opět použita absolutní hodnota, v tomto případě označena jako Z .

4.9 Hledání nulových bodů funkce $\Delta(s)$

Hledání nulových bodů funkce komplexní proměnné $\Delta(s)$ může být velmi složité, zejména pokud sestává ze součinu několika matic \mathbf{P} a \mathbf{R} . Jednou z možností, jak nalézt řešení, je využít metodu konečných diferencí, popsanou v literatuře [5] a [8]. Stanovení těchto hodnot je důležité, neboť dává informaci o dynamickém zesílení a vnitřním tlumení soustavy.

Nechť je v Gaussově rovině dán obor O komplexních čísel $s = \alpha + i\omega$. Jestliže každému s je přiřazeno právě jedno komplexní číslo $\Delta(s)$, říkáme, že v O je definována funkce dvou proměnných α, ω (4.35).

$$\Delta(s) = u(\alpha, \omega) + i v(\alpha, \omega) \quad u, v \in \mathbb{R} \quad (4.35)$$

Teorie funkce komplexní proměnné uvádí, že reálná i imaginární část $u(\alpha, \omega)$, $v(\alpha, \omega)$ každé holomorfní funkce je funkcí harmonickou a vyhovuje tudíž Laplaceově rovnici:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \omega^2} = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \omega^2} = 0 \quad \forall \alpha, \omega \in O \quad (4.36)$$

Pro řešení Laplaceovy rovnice (4.36) je nutné zadat okrajové podmínky na hranici Γ (4.37).

$$\begin{aligned} u(\alpha, \omega) &= u_{\Gamma} \\ v(\alpha, \omega) &= v_{\Gamma} \end{aligned} \quad \alpha, \omega \in \Gamma \quad (4.37)$$

V dalším kroku je aplikována na rovnice (4.36) metoda konečných diferencí rozepsáním do tvarů (4.38) a následné úpravě do tvaru (4.39). Rovnice je vyjádřena pro proměnnou u , pro v platí stejný postup. Grafická interpretace je zobrazena na obrázku (Obrázek 4.3).

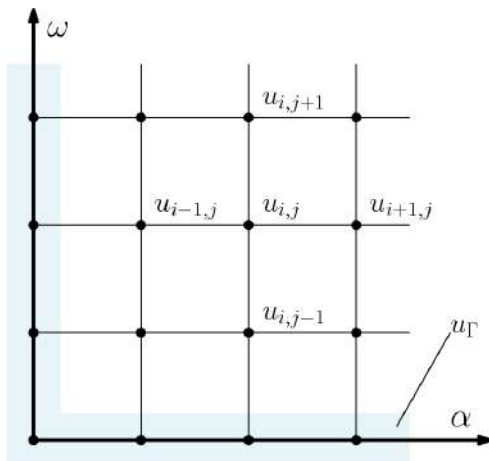
$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{dx^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{dy^2} = 0 \quad (4.38)$$

$$u_{i,j} = \frac{dx^2 dy^2}{2(dx^2 + dy^2)} \left(\frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j}}{dx^2} + \frac{u_{i,j+1} + u_{i,j-1}}{dy^2} \right) \quad (4.39)$$

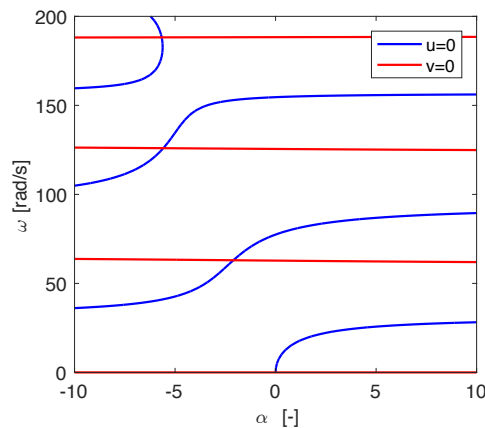
Nyní lze přistoupit k numerickému řešení. Nejprve je třeba vyčíslit hodnoty na hranici s využitím okrajových podmínek. Následuje iterační proces výpočtu uvnitř oblasti O . Hodnota výsledku je závislá na maximální přípustné hodnotě relativní chyby, kterou volí uživatel.

$$\epsilon_{i,j} = \left| \frac{temp - u_{i,j}^{iter}}{temp} \right| \quad (4.40)$$

Stanovení hodnoty relativní chyby v obecném bodě je provedeno následovně. V prvním kroku je vypočtena hodnota $u_{i,j}^{iter+1}$. Tato hodnota je prozatím zapsána jako dočasná proměnná $temp$. Následně je vypočtena relativní chyba v daném místě podle vzorce (4.40). V dalším kroku je přepsána proměnná $u_{i,j}^{iter}$ hodnotou uloženou v proměnné $temp$. Za relativní chybu iteračního kroku je považována maximální chyba, která se v dané síti vyskytuje.

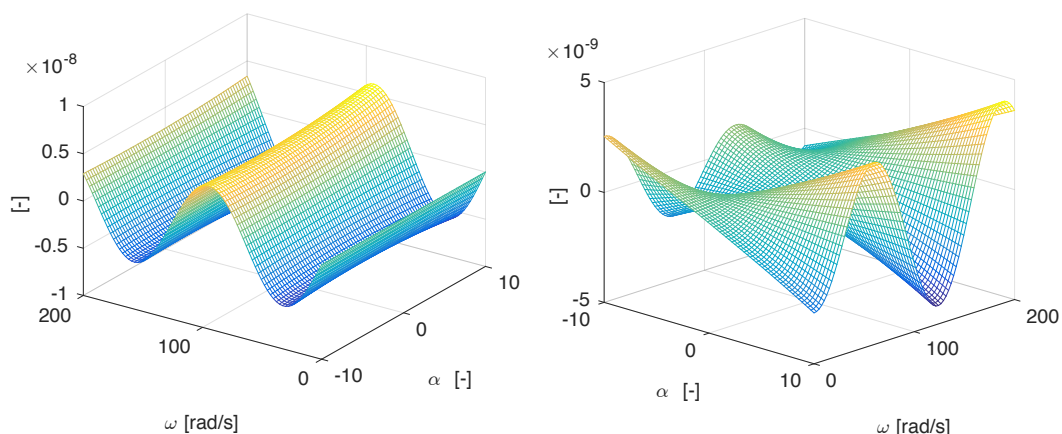


Obrázek 4.3: Algoritmus výpočtu metodou konečných diferencí



Obrázek 4.4: Vykreslení výsledků v Gaussově prostoru

Výsledek je určen množinou bodů získaných řešením Laplaceovy rovnice, pro které platí $u = 0, v = 0$. Lze to interpretovat geometricky, tedy že řešením je plocha, která vytvoří izokřivku v místě, kde protíná rovinu $u = 0$ příp. $v = 0$. V místě, kde se tyto izočáry protnou, se nachází jeden z kořenů s_k .



Obrázek 4.5: Funkce u (vlevo) a funkce v (vpravo)

Názorný příklad výsledku je uveden na obrázku (Obrázek 4.4), který je řešením tekutinové soustavy s lokálním odporem. Plochy, ze kterých jsou získány tyto výsledné izokřivky jsou zobrazeny na obrázku (Obrázek 4.5). Z grafu lze určit jak stabilitu soustavy podle parametru α , tak i vlastní frekvenci ω na imaginární ose.

4.10 Stabilita

Hledáním řešení funkce $\Delta(s)$ lze získat informaci o stabilitě soustavy z reálné části vlastního čísla. Popis stanovení této hodnoty vychází opět z literatury [2]. Nulový bod, který je tímto řešením, se totiž vyskytuje ve funkci charakterizující přechodový děj, jak je uvedeno v rovnici (4.41).

$$e^{s_k t} = e^{\alpha_k t} e^{i\omega_k t} = e^{\alpha_k t} (\cos \omega_k t + i \sin \omega_k t) \quad (4.41)$$

Pro parametr α_k , který popisuje chování soustavy z hlediska stability mohou nastat 3 případy:

- $\alpha_k = 0$: V tomto případě soustava kmitá na mezi stability, pokud je daný předpoklad splněn alespoň pro jednu z hodnot, přičemž pro ostatní hodnoty platí $\alpha_k < 0$.
- $\alpha_k < 0$: Soustava kmitá stabilně, časová závislost je charakterizována klesající amplitudou kmitu.
- $\alpha_k > 0$: Soustava kmitá nestabilně, amplituda kmitu neomezeně roste.

Z hlediska návrhu je informace o celkové stabilitě nedostatečná, je tedy vhodné vědět, jaký vliv mají konkrétní prvky soustavy na celkovou stabilitu. K tomu bude využita homogenní část rovnice (4.18). Tuto rovnici je vhodné upravit, a to nahrazením matice \mathbf{K} maticí symetrickou. Toho je dosaženo

zavedením matice \mathbf{D} a matice Ξ , přičemž jejich tvar je vyjádřen v (4.42) a platí pro ně vztahy (4.43).

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\rho}{S} & 0 \\ 0 & \frac{S}{K} \end{bmatrix}; \quad \Xi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

$$\mathbf{DK} = \Xi \quad \mathbf{Z} = \mathbf{DB} = \begin{bmatrix} \frac{b}{S} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

$$s\mathbf{D}\mathbf{u} + \mathbf{Z}\mathbf{u} + \Xi \frac{d\mathbf{u}}{dx} = 0 \quad (4.44)$$

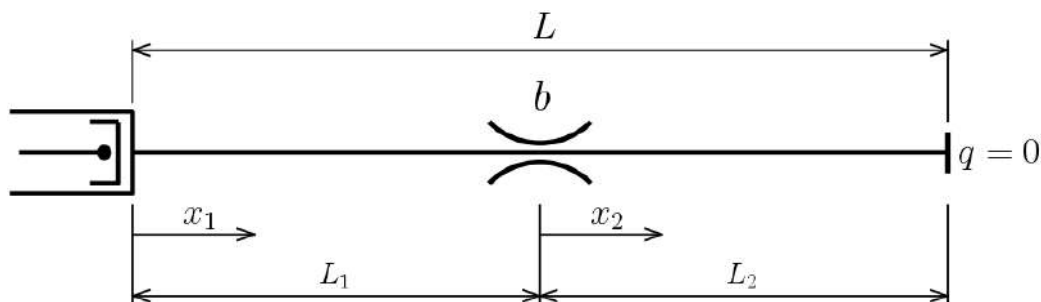
Homogenní rovnice (4.18) lze potom psát ve tvaru (4.44). Dalšími matematickými úpravami této rovnice lze nalézt vyjádření pro α uvedené ve výrazu (4.45),

$$\alpha = - \frac{\sum_{i=1}^N \int_0^{L_i} \mathbf{u}_i^* \mathbf{Z}_i \mathbf{u}_i \, dx}{\sum_{i=1}^N \int_0^{L_i} \mathbf{u}_i^* \mathbf{D}_i \mathbf{u}_i \, dx} + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{u}_1^*(0, s) \Xi \mathbf{u}_1(0, s) - \mathbf{u}_N^*(L_N, s) \Xi \mathbf{u}_N(L_N, s)}{\sum_{i=1}^N \int_0^{L_i} \mathbf{u}_i^* \mathbf{D}_i \mathbf{u}_i \, dx} + \frac{1}{2} \frac{\sum_{i=1}^{N-1} \mathbf{u}_i^*(L_i, s) [\mathbf{R}_i^* \Xi \mathbf{R}_i - \Xi] \mathbf{u}_i(L_i, s)}{\sum_{i=1}^N \int_0^{L_i} \mathbf{u}_i^* \mathbf{D}_i \mathbf{u}_i \, dx} \quad (4.45)$$

nebo jako součet účinku trubic, okrajových podmínek a lokálních prvků:

$$\alpha = \alpha_T + \alpha_{OP} + \alpha_{LP} \quad (4.46)$$

Výpočet stability tímto způsobem je výhodný, jelikož rozlišuje vliv trubic, okrajových podmínek a lokálních hydraulických prvků. Demonstrujme nyní jednotlivé členy tohoto výrazu na jednoduché úloze na obrázku (Obrázek 4.6).



Obrázek 4.6: Soustava s lokálním odporem

4.10.1 Vliv okrajových podmínek

Za předpokladu, že byla při odvozování výrazu (4.45) užita homogenní rovnice, lze psát okrajové podmínky v následujícím tvaru.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(0, s) &= \mathbf{a} \beta(0, s); & \mathbf{a}^T &= (0, 1) & \text{pro } x_1 = 0 \\ \mathbf{u}_2^T(L_2, s) &= (0, u_2) & & & \text{pro } x_2 = L_2 \end{aligned} \quad (4.47)$$

$$\mathbf{u}_1^*(0, s) \exists \mathbf{u}_1(0, s) = \bar{\beta}(0, s) \beta(0, s) \mathbf{a}^T \exists \mathbf{a} = 0 \quad (4.48)$$

$$\mathbf{u}_2^*(L_2, s) \exists \mathbf{u}_2(L_2, s) = 0 \quad (4.49)$$

Dosazením těchto vztahů do čitatele členu zahrnující okrajové podmínky ve výrazu (4.45) zjistíme, že výraz nabývá hodnoty 0 viz (4.48) a (4.49), a nemá proto vliv na celkovou stabilitu soustavy.

4.10.2 Vliv trubice

Zanedbáním lokálního prvku a předpokladu, že vliv okrajových podmínek nemá na stabilitu vliv, se výraz pro α výrazně zjednoduší (4.50). Je zde patrné, že stabilita je závislá pouze na \mathbf{u} , \mathbf{Z} a \mathbf{D} .

$$\alpha_T = - \frac{\int_0^L \mathbf{u}^* \mathbf{Z} \mathbf{u} \, dx}{\int_0^L \mathbf{u}^* \mathbf{D} \mathbf{u} \, dx} \quad (4.50)$$

Matice \mathbf{Z} a \mathbf{D} jsou diagonální s nezápornými prvky. Potom musí vždy platit, že $\alpha_T < 0$. Účinek od viskozity vždy přispívá ke stabilitě soustavy.

4.10.3 Vliv lokálního prvku

Stanovme nyní viskozitu média rovnu nule. Tímto předpokladem lze zjistit, jaký účinek má na stabilitu lokální prvek. Výraz (4.45) se potom zjednoduší na tvar:

$$\alpha_{LP} = \frac{1}{2} \frac{\mathbf{u}_1^*(L_1, s) [\mathbf{R}^* \exists \mathbf{R} - \exists] \mathbf{u}_1(L_1, s)}{\sum_{i=1}^N \int_0^{L_i} \mathbf{u}_i^* \mathbf{D}_i \mathbf{u}_i dx} \quad (4.51)$$

Veličiny popisující hydraulický prvek obsahuje matice \mathbf{R} , která se ve výrazu (4.51) vyskytuje v hranaté závorce. Pro názornost byla zavedena matice $\mathbf{\Gamma}$.

$$\mathbf{\Gamma} = [\mathbf{R}^* \exists \mathbf{R} - \exists] \quad (4.52)$$

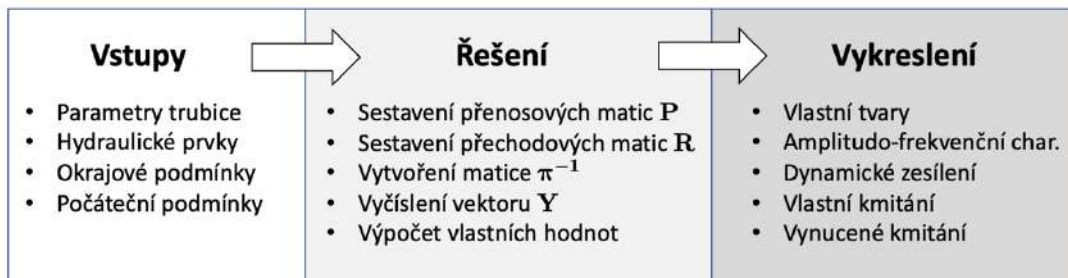
Pro sériově řazený lokální odpor má matice $\mathbf{\Gamma}$ tvar (4.53) a pro dynamický tlumič lze odvodit vyjádření (4.54).

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} -2b & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2s \frac{\Psi(s)}{\Phi(s)} \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

4.11 Tvorba softwaru pro výpočet tlakových a průtokových pulzací

Vytvoření softwaru pro řešení tlakových a průtokových pulzací bylo provedeno v programu Matlab v aplikaci App Designer [9] s využitím symbolických proměnných [10]. Návrh aplikace je znázorněn na obrázku (Obrázek 4.7). Uživatel nejprve zadá vstupní parametry včetně okrajových a počátečních podmínek. Na základě zadaných hodnot je sestavena přenosová a přechodová matice. Pomocí algoritmu řešení je vyjádřen vektor stavových proměnných. Dále jsou vypočteny vlastní hodnoty. Z těchto získaných veličin je možné vykreslit výsledky.



Obrázek 4.7: Schéma tvorby aplikace

Pro vykreslení vlastních tvarů a amplitudo-frekvenční charakteristiky je daný stavový vektor vynásoben přenosovou maticí. Dynamické zesílení lze získat vykreslením funkční závislosti $\Delta(s)$. Pro vykreslení kmitání v časové oblasti je nutné použít vztahy získané zpětnou Laplaceovou transformací (4.33), (4.34).

Uživatelské prostředí je zobrazeno v příloze I a aplikace nahrána na disku, který je přiložen k práci.

5 Dynamický tlumič

5.1 Sestavení přechodové matice tlumiče

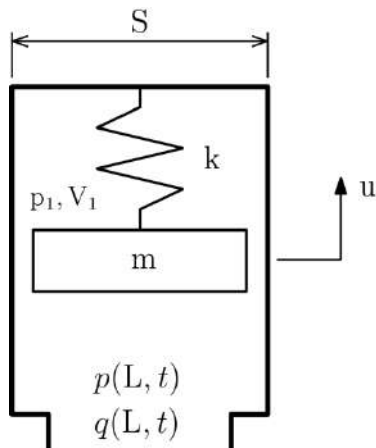
Jak již bylo zmíněno v kapitole 3, hydraulické prvky v soustavě lze popsat přechodovou maticí \mathbf{R} . V této kapitole je popsáno odvození této matice pro některé varianty provedení dynamického tlumiče. Obecný tvar matice \mathbf{R} (5.1) je pro každý tlumič stejný, odlišnost se projeví v parametrech $\Psi(s)$ a $\Phi(s)$.

K jejich odvození je použita rovnice rovnováhy, rovnice kontinuity a stavová rovnice.

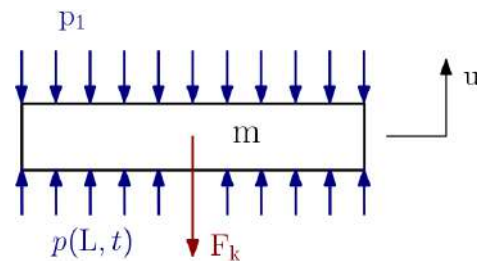
$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & -s \frac{\Psi(s)}{\Phi(s)} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Při odvozování přechodové matice tlumiče je využito zdroje [6].

5.1.1 Tlumič s jedním stupněm volnosti



Obrázek 5.1: Schéma tlumiče



Obrázek 5.2: Uvolněný prvek hmoty

Pohybová rovnice pro hmotu m má tvar (5.2):

$$m\ddot{u} + ku + Sp_1 - Sp(L,t) = 0 \quad (5.2)$$

Předpokládejme, že rozdíl plochy průřezu tlumiče a průřez kmitající hmoty je zanedbatelný z hlediska řešení problému. Objem tekutiny vtékající do tlumiče je úměrný výchylce a ploše tlumiče S . Časovou derivací tohoto objemu lze získat průtok $q(L,t)$:

$$q(L, t) = \frac{dV}{dt} = \frac{d(S \cdot u)}{dt} = S \cdot \dot{u} \quad (5.3)$$

Předpokládejme, že komora tlumiče je vyplněna ideálním plynem, který lze popsat stavovou rovnicí (5.4), která má po derivaci tvar (5.5):

$$p_1 \cdot V_1 = \text{konst} \quad (5.4)$$

$$\dot{p}_1 \cdot V_1 + p_1 \cdot \dot{V}_1 = 0 \quad (5.5)$$

Upravme nyní tuto rovnici do tvaru (5.6). Členy p_{10} a V_{10} vyjadřují časově nezávislou složku tlaku a průtoku.

$$\dot{p}_1 - S \frac{p_{10}}{V_{10}} \dot{u}_1 = 0 \quad (5.6)$$

Rovnice budou v dalším kroku řešeny využitím Laplaceovy transformace. Za předpokladu, že existují L. obrazy a je zadána nulová počáteční podmínka, lze rovnice zapsat následovně:

$$s^2 m \nu + k \nu + S^2 \frac{p_{10}}{V_{10}} \nu - S \beta(L, s) = 0 \quad (5.7)$$

$$\xi(L, s) = s \cdot S \cdot \nu \quad (5.8)$$

Za předpokladu, že platí podmínky (5.9), lze říct, že se plyn chová jako statická pružina (5.10). Zavedme pro přehlednost předpoklad, že výsledná tuhost k bude vyjadřovat, jak vliv tuhosti pružiny, tak vliv plynu v tlumiči.

$$V_{10} \gg S \cdot u \quad ; \quad p_{10} \gg p_1 \quad (5.9)$$

$$k_p = S^2 \cdot \frac{p_{10}}{V_{10}} \quad (5.10)$$

Z rovnice rovnováhy lze vyjádřit L. obraz výchylky ν s využitím předchozího zjednodušení v přehledném tvaru:

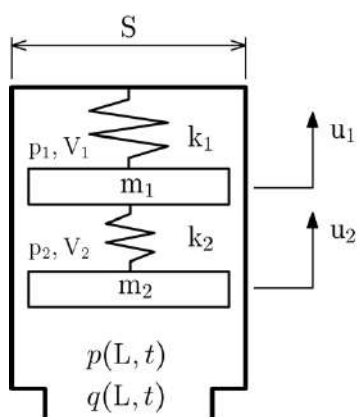
$$\nu = \frac{S \beta(L, s)}{s^2 m + k} \quad (5.11)$$

Dosažením do rovnice pro L. obraz průtoku obdržíme závislost průtoku na tlaku. Výraz vystupující v této závislosti je ve skutečnosti hledaný podíl $\Psi(s)$ a $\Phi(s)$.

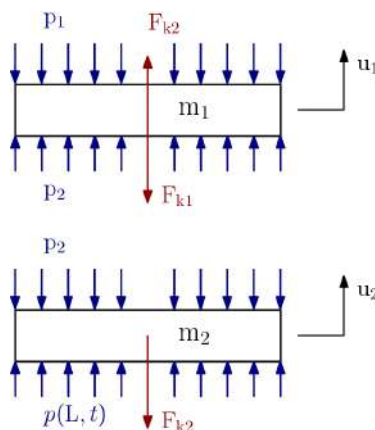
$$\xi(L, s) = s \frac{S^2}{s^2 m + k} \beta(L, s) \quad (5.12)$$

$$\Psi(s) = S^2; \quad \Phi(s) = s^2 m + k \quad (5.13)$$

5.1.2 Tlumič se dvěma stupni volnosti



Obrázek 5.3: Schéma tlumiče



Obrázek 5.4: Uvolnění hmoty v tlumiči

Stejně je možné odvodit přechodovou matici pro dynamický tlumič se dvěma stupni volnosti. Rovnice rovnováhy mají tvar:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{u}_1 + k_1 u_1 + k_2 (u_1 - u_2) + S p_1 - S p_2 &= 0 \\ m_2 \ddot{u}_2 + k_2 (u_2 - u_1) + S p_2 - S p(L, t) &= 0 \end{aligned} \quad (5.14)$$

Tok tekutiny působí na hmotu m_2 , rovnici kontinuity lze zapsat:

$$q(L, t) = S \cdot \dot{u}_2 \quad (5.15)$$

Opět bude platit předpoklad, že tlumič je naplněn ideálním plynem, lze tedy psát stavové rovnice a jejich derivace ve tvaru:

$$\begin{aligned} p_1 \cdot V_1 &= \text{konst} \\ p_2 \cdot V_2 &= \text{konst} \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 \cdot V_1 + p_1 \cdot \dot{V}_1 &= 0 \\ \dot{p}_2 \cdot V_2 + p_2 \cdot \dot{V}_2 &= 0 \end{aligned} \quad (5.17)$$

Po úpravě lze rovnice (5.17) přepsat ve tvaru zahrnující časově stálou složku tlaku a průtoku:

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 - S \frac{p_{10}}{V_{10}} \dot{u}_1 &= 0 \\ \dot{p}_2 - S \frac{p_{20}}{V_{20}} (\dot{u}_2 - \dot{u}_1) &= 0 \end{aligned} \quad (5.18)$$

Následuje provedení L. transformace. Opět je zaveden předpoklad existence L. obrazů a nulových počátečních podmínek. S dosazením výrazů (5.18) lze psát rovnice rovnováhy ve tvaru:

$$\begin{aligned} s^2 m_1 \nu_1 + k_1 \nu_1 + k_2 (\nu_1 - \nu_2) + S^2 \frac{p_{10}}{V_{10}} \nu_1 + S^2 \frac{p_{20}}{V_{20}} (\nu_1 - \nu_2) &= 0 \\ s^2 m_2 \nu_2 + k_2 (\nu_2 - \nu_1) + S^2 \frac{p_{20}}{V_{20}} (\nu_2 - \nu_1) &= S \beta(L, s) \end{aligned} \quad (5.19)$$

Pro L. obraz průtoku lze psát rovnici kontinuity ve tvaru:

$$\xi(L, s) = s \cdot S \cdot \nu_2 \quad (5.20)$$

Předpokládejme, že podmínky (5.9) platí pro oba meziprostory v tlumiči, lze tedy opět předpokládat chování plynu jako statické pružiny a stručně rovnice zapsat v přehlednějším tvaru:

$$\begin{aligned} s^2 m_1 \nu_1 + k_1 \nu_1 + k_2 (\nu_1 - \nu_2) &= 0 \\ s^2 m_2 \nu_2 + k_2 (\nu_2 - \nu_1) &= S \beta(L, s) \end{aligned} \quad (5.21)$$

Vyjádříme z první rovnice rovnováhy L. obraz výchylky hmoty m_2 a dosadíme toto vyjádření do druhé rovnice. Následně z této rovnice vyjádříme L. obraz výchylky ν_1 .

$$\nu_2 = \frac{s^2 m_1 + k_1 + k_2}{k_2} \nu_1 \quad (5.22)$$

$$\nu_1 = \frac{S \cdot \beta(L, s)}{\frac{s^2 m_1 + k_1 + k_2}{k_2} (s^2 m_2 + k_2) - k_2} \quad (5.23)$$

Dosažením těchto dvou rovnic do rovnice kontinuity obdržíme závislost L. obrazu průtoku na L. obrazu tlaku:

$$\xi(L, s) = s \frac{s^2 m_1 + k_1 + k_2}{k_2} \frac{S^2 \cdot \beta(L, s)}{\frac{s^2 m_1 + k_1 + k_2}{k_2} (s^2 m_2 + k_2) - k_2} \quad (5.24)$$

Po úpravě ve tvaru:

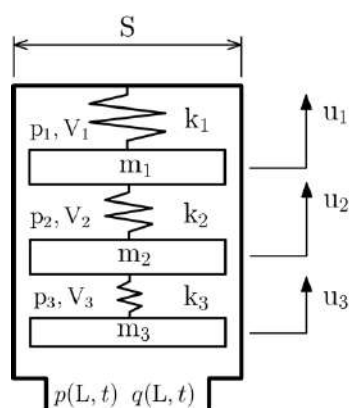
$$\xi(L, s) = s \frac{S^2 \left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + s^2 \right) \cdot \beta(L, s)}{m_2 \left(s^4 + s^2 \left(\frac{k_1}{m_1} + \frac{k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2} \right) + \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2} \right)} \quad (5.25)$$

Z tohoto výrazu již lze stanovit parametr $\Psi(s)$ a $\Phi(s)$ a získat tak tvar přechodové matice.

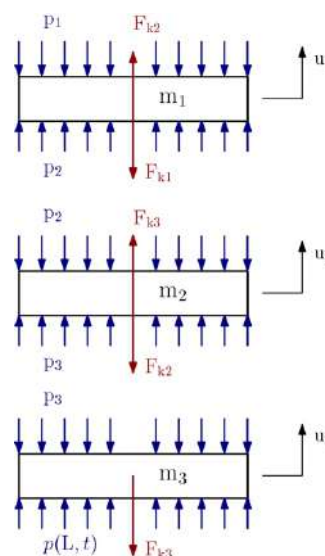
$$\Psi(s) = S^2 \left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + s^2 \right) \quad (5.26)$$

$$\Phi(s) = m_2 \left(s^4 + s^2 \left(\frac{k_1}{m_1} + \frac{k_2}{m_1} + \frac{k_2}{m_2} \right) + \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2} \right) \quad (5.27)$$

5.1.3 Tlumič se třemi stupni volnosti



Obrázek 5.5: Schéma tlumiče



Obrázek 5.6: Uvolnění hmoty v tlumiči

Analogicky jako u předchozích dvou typů byla odvozena přechodová matice pro tlumič se třemi stupni volnosti. Rovnice rovnováhy jsou ve tvaru:

$$\begin{aligned}
m_1 \ddot{u}_1 + k_1 u_1 + k_2(u_1 - u_2) + Sp_1 - Sp_2 &= 0 \\
m_2 \ddot{u}_2 + k_2(u_2 - u_1) + k_3(u_2 - u_3) + Sp_2 - Sp_3 &= 0 \\
m_3 \ddot{u}_3 + k_3(u_3 - u_2) + Sp_3 - Sp(L, t) &= 0
\end{aligned} \tag{5.28}$$

Průtok zde působí na plochu hmoty m_3 , rovnice kontinuity lze tedy psát ve tvaru (5.29).

$$q(L, s) = S \cdot \dot{u}_3 \tag{5.29}$$

Opět zavedme předpoklad, že je tlumič vyplněn ideálním plynem a platí stavové rovnice:

$$\begin{aligned}
p_1 \cdot V_1 &= \text{konst} \\
p_2 \cdot V_2 &= \text{konst} \\
p_3 \cdot V_3 &= \text{konst}
\end{aligned} \tag{5.30}$$

a jejich derivace:

$$\begin{aligned}
\dot{p}_1 \cdot V_1 + p_1 \cdot \dot{V}_1 &= 0 \\
\dot{p}_2 \cdot V_2 + p_2 \cdot \dot{V}_2 &= 0 \\
\dot{p}_3 \cdot V_3 + p_3 \cdot \dot{V}_3 &= 0
\end{aligned} \tag{5.31}$$

Tyto rovnice opět upravme do příhodnějšího tvaru.

$$\begin{aligned}
\dot{p}_1 - S \frac{p_{10}}{V_{10}} \dot{u}_1 &= 0 \\
\dot{p}_2 - S \frac{p_{20}}{V_{20}} (\dot{u}_2 - \dot{u}_1) &= 0 \\
\dot{p}_3 - S \frac{p_{30}}{V_{30}} (\dot{u}_3 - \dot{u}_2) &= 0
\end{aligned} \tag{5.32}$$

Následuje provedení Laplaceovy transformace za předpokladu existence L. obrazů a nulových počátečních podmínek. Vyjádřeme již rovnici rovnováhy ve tvaru, kdy je účinek plynu zahrnut v konstantě k .

$$\begin{aligned}
s^2 m_1 \nu_1 + k_1 \nu_1 + k_2(\nu_1 - \nu_2) &= 0 \\
s^2 m_2 \nu_2 + k_2(\nu_2 - \nu_1) + k_3(\nu_2 - \nu_3) &= 0 \\
s^2 m_3 \nu_3 + k_3(\nu_3 - \nu_2) &= S\beta(L, s)
\end{aligned} \tag{5.33}$$

Rovnice kontinuity má po L. transformaci tvar:

$$\xi(L, s) = s \cdot S \cdot \nu_3 \quad (5.34)$$

Postupnými úpravami vyjádříme z rovnic rovnováhy L. obraz výchylky ν_3 , která bude dosazena do rovnice kontinuity. Z první rovnice vyjádříme ν_1 .

$$\nu_1 = \frac{k_2}{s^2 m_1 + k_1 + k_2} \nu_2 \quad (5.35)$$

Z druhé rovnice ν_3 .

$$\nu_3 = \frac{(s^2 m_2 + k_2 + k_3)(s^2 m_1 + k_1 + k_2) - k_2^2}{k_3(s^2 m_1 + k_1 + k_2)} \nu_2 \quad (5.36)$$

Ze třetí rovnice rovnováhy bude vyjádřena ν_2 .

$$\nu_2 = \frac{S \cdot \beta(L, s)}{\frac{(s^2 m_3 + k_3)(s^2 m_2 + k_2 + k_3)(s^2 m_1 + k_1 + k_2) + k_2^2(s^2 m_3 + k_3)}{k_3(s^2 m_1 + k_1 + k_2)} - k_3} \quad (5.37)$$

Dosazením těchto rovnic do rovnice kontinuity lze získat vyjádření přechodové matice.

$$\xi(L, s) = s \frac{(s^2 m_2 + k_2 + k_3)(s^2 m_1 + k_1 + k_2) - k_2^2}{k_3(s^2 m_1 + k_1 + k_2)} \cdot \frac{S^2 \cdot \beta(L, s)}{\frac{(s^2 m_3 + k_3)(s^2 m_2 + k_2 + k_3)(s^2 m_1 + k_1 + k_2) + k_2^2(s^2 m_3 + k_3)}{k_3(s^2 m_1 + k_1 + k_2)} - k_3} \quad (5.38)$$

Rovnice kontinuity lze zapsat také v tomto tvaru.

$$\xi(L, s) = s \frac{\Psi(s)}{\Phi(s)} \beta(L, s) \quad (5.39)$$

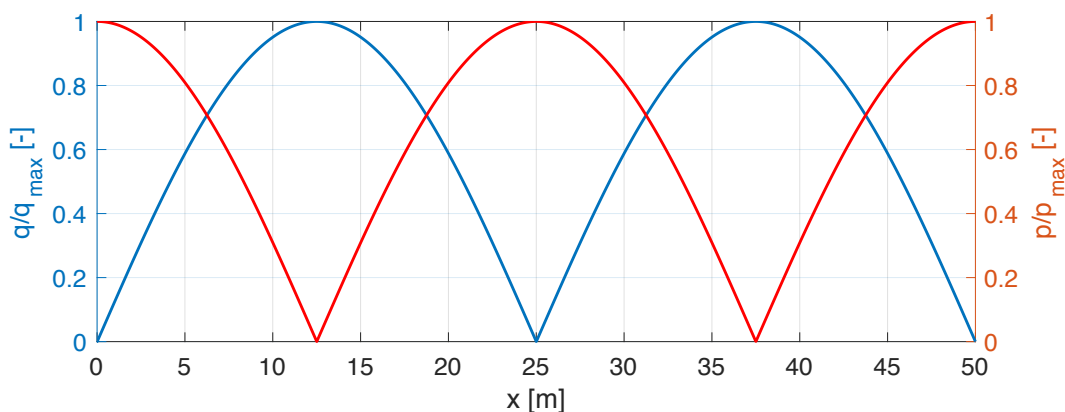
Hodnoty $\Psi(s)$ a $\Phi(s)$ mají po úpravě tvar:

$$\Psi(s) = S^2 \left(s^4 + s^2 \left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} \frac{k_2 + k_3}{m_2} \right) + \left(\frac{k_1 k_2 + k_2 k_3 + k_1 k_3}{m_1 m_2} \right) \right) \quad (5.40)$$

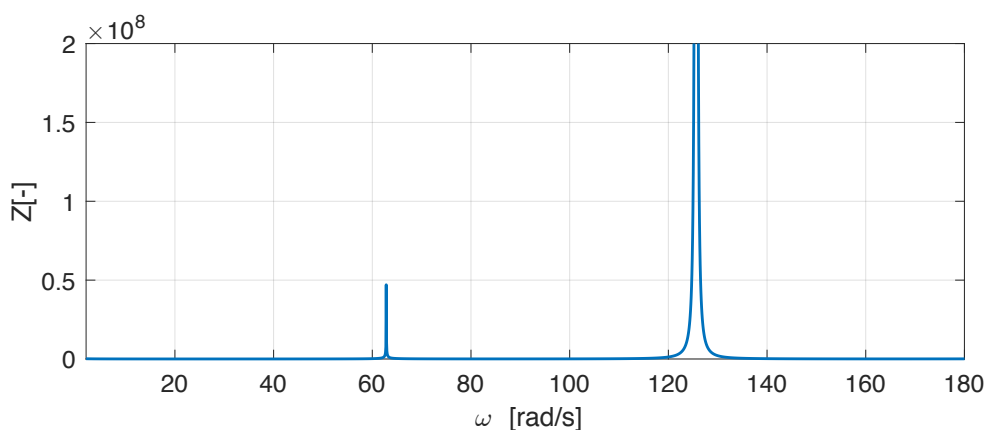
$$\begin{aligned} \Phi(s) = & m_3 \left(s^6 + s^4 \left(\frac{k_1 + k_2}{m_1} + \frac{k_2 + k_3}{m_2} + \frac{k_3}{m_3} \right) + \right. \\ & + s^2 \left(\frac{k_1 k_2 + k_2 k_3 + k_1 k_3 + k_2^2}{m_1 m_2} + \frac{k_2 k_3}{m_2 m_3} \frac{k_1 k_3 + k_2 k_3}{m_1 m_3} \right) + \\ & \left. + \frac{k_1 k_2 k_3 + 2k_2^2 k_3}{m_1 m_2 m_3} \right) \end{aligned} \quad (5.41)$$

5.2 Vliv polohy umístění tlumiče

V předchozí podkapitole bylo zmíněno, že funkce dynamického tlumiče je závislá na tom, zda je tlumič, případně plynový akumulátor, umístěn v místě uzlu tlaku nebo uzlu průtoku. Demonstrujme nyní oba případy na příkladu uzavřené trubice s harmonickým buzením.



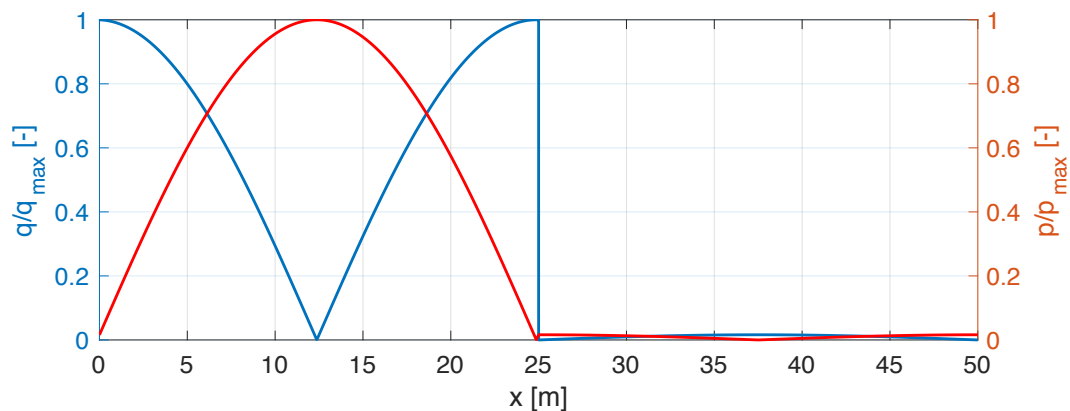
Obrázek 5.7: Tvary kmitu při $\omega = 125,6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ – bez tlumiče



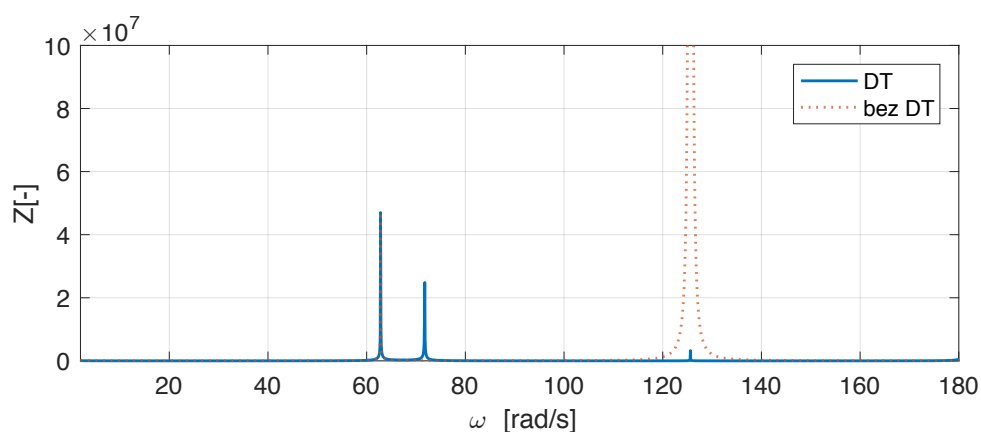
Obrázek 5.8: Amplitudo-frekvenční charakteristika – bez tlumiče

Pro názornost byl vybrán 2. vlastní tvar kmitu (Obrázek 5.7) odpovídající vlastní frekvenci $\omega = 125,6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ (Obrázek 5.8). Vyberme dvě místa, ve kterých

bude umístěn dynamický tlumič, a to uzel průtoku $x = 25$ m a uzel tlaku v místě $x = 37,5$ m.

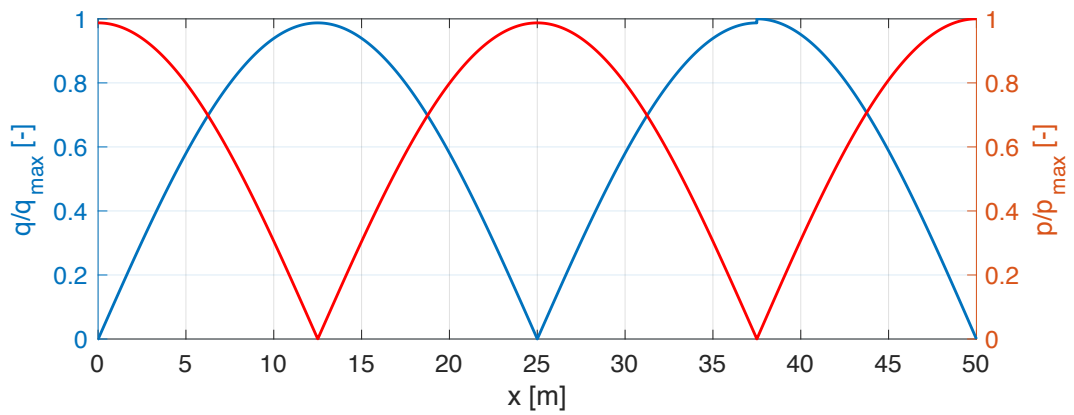


Obrázek 5.9: Tvar kmitu při umístění tlumiče v místě $x = 25$ m

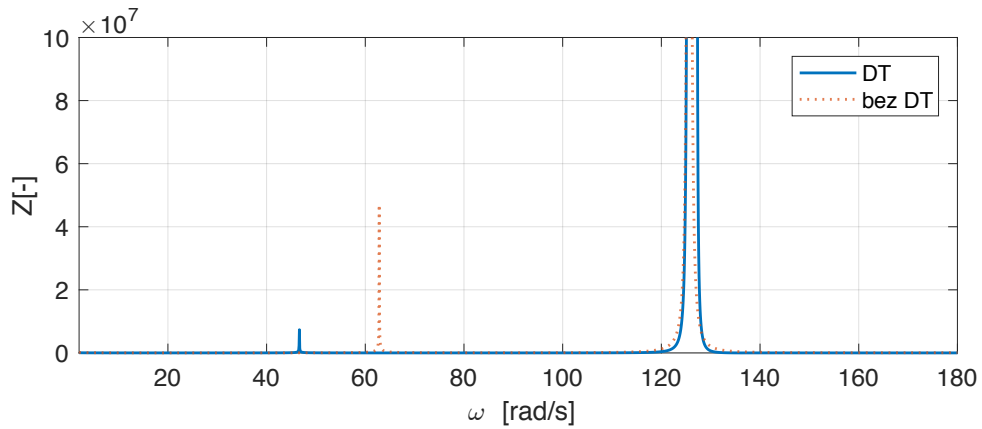


Obrázek 5.10: Amplitudo-frekvenční charakteristika s tlumičem v místě $x = 25$ m

Z obrázku (Obrázek 5.10) je zřejmé, že na frekvenci $\omega = 125,6 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ nedochází k rezonančnímu zesílení soustavy, tlumič umístěný v $x = 25$ m tedy plní svoji funkci, což lze potvrdit vykreslením vlastních tvarů (Obrázek 5.9).



Obrázek 5.11: Tvar kmitu při umístění tlumiče v místě $x = 37,5$ m



Obrázek 5.12: Amplitudo-frekvenční charakteristika s tlumičem v místě $x = 37,5$ m

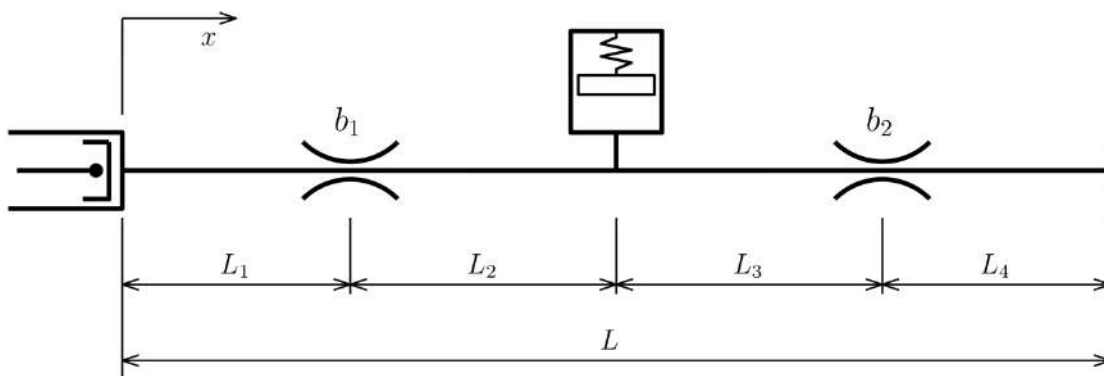
Je-li tlumič umístěn v $x = 37,5$ m, tedy v místě uzlu tlaku, neplní tlumič svoji funkci, jak je patrné z obrázku (Obrázek 5.11). Z vykreslení amplitudo-frekvenční charakteristiky (Obrázek 5.12) je taktéž patrné, že amplituda budící frekvence zůstává prakticky nezměněna.

6 Řešení úlohy

V této kapitole je popsáno řešení problému hydrodynamické soustavy (Obrázek 6.1) sestávající z uzavřené trubice a dvou lokálních odporů. Na otevřeném konci trubice je umístěn pulzátor, který vnáší do soustavy harmonické buzení.

Mezi odpory je umístěn dynamický tlumič a je zjišťováno, jaká bude odezva soustavy pro jednotlivé případy:

- Pro lokální odpory platí $b_1 > 0$ a $b_2 > 0$, soustava je bez dynamického tlumiče
- Pro lokální odpory platí $b_1 > 0$ a $b_2 > 0$, dynamický tlumič má vlastní frekvenci:
 - nižší oproti budící frekvenci $\Omega_T < \omega$
 - odpovídající budící frekvenci $\Omega_T = \omega$
 - vyšší, než je budící frekvence $\Omega_T > \omega$
- Hodnota lokálního odporu $b_1 < 0$ což do systému vnáší nestabilitu. Hodnota $b_2 > 0$ a soustava je bez dynamického tlumiče
- Do soustavy c) je přidán dynamický tlumič se záměrem stabilizace soustavy



Obrázek 6.1: Schéma soustavy

Vzhledem ke stanoveným předpokladům lze pro všechny případy popsat okrajové podmínky $q(0, t) = Q_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$ a $q(L, t) = 0$.

Tabulka 6.1: Vstupní veličiny

celková délka větve	L	50	[m]
průměr trubice	ød	80	[mm]
rychlost zvuku v médiu	a	1000	[m s ⁻¹]
hustota média	ρ	1000	[kg m ⁻³]
vnitřní útlum média	b	12,8	[kg s ⁻¹ m ⁻³]
amplituda průtoku	Q ₀	0,01	[m ³ s ⁻¹]
budící úhlová frekvence	ω	63	[rad s ⁻¹]

6.1 Soustava se dvěma kladnými odpory

Podmínkou pro hydraulický prvek typu lokální odpor je, že tlumící člen b nabývá kladné hodnoty, což způsobí v daném místě pokles amplitudy kmitu. Stanovme libovolně hodnoty lokálních odporů umístěných v soustavě, viz (Tabulka 6.2).

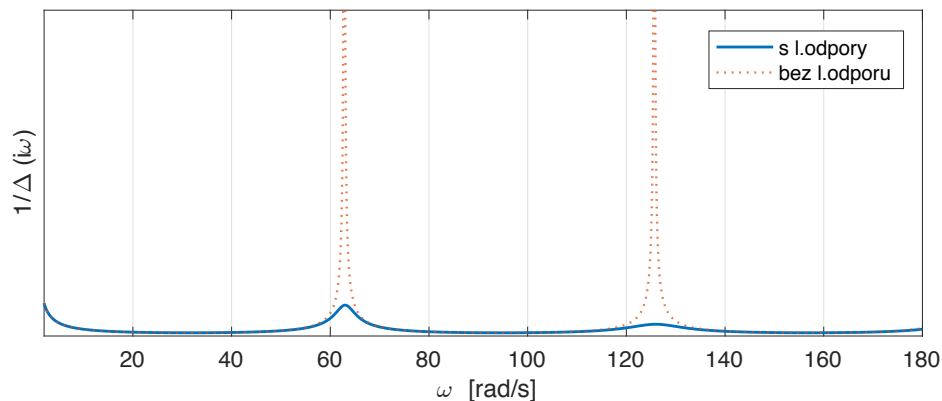
Tabulka 6.2: Parametry lokálních odporů

Součinitel tlumení	Umístění prvku
$b_1 = 4 \cdot 10^7 \text{ kg s}^{-1} \text{ m}^{-3}$	$x_1 = 1 \text{ m}$
$b_2 = 6 \cdot 10^7 \text{ kg s}^{-1} \text{ m}^{-3}$	$x_2 = 40 \text{ m}$

Jak je z dynamiky známo, přidání tlumícího prvku do soustavy změnil tvar amplitudo-frekvenční charakteristiky. To je patrné z dynamického zesílení soustavy na (Obrázek 6.2). Hodnoty vlastních frekvencí, které je možné z grafu odečíst, se pro tyto dva případy nepatrně liší, což je další projev způsobený přidáním tlumícího prvku do soustavy.

Tabulka 6.3: Vlastní frekvence soustavy

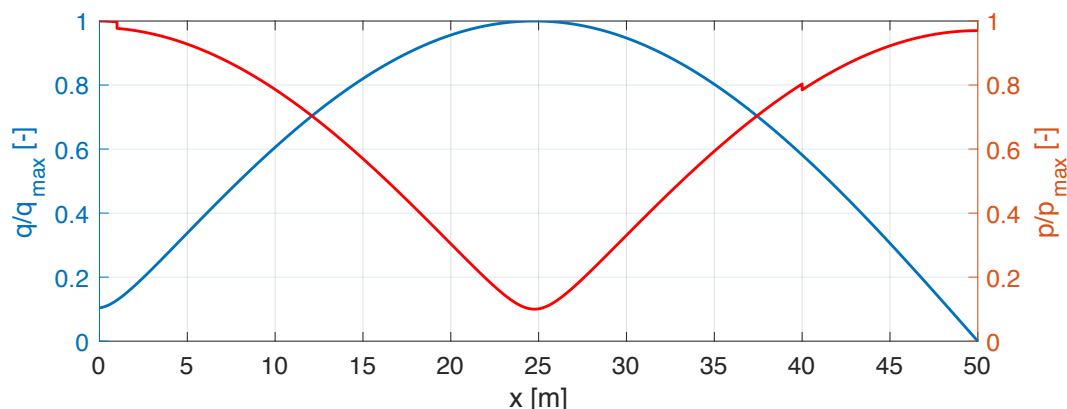
Ω	trubice bez odporů	trubice s lok. odpory	
1.	62,82	63,03	[rad s ⁻¹]
2.	125,68	125,96	[rad s ⁻¹]



Obrázek 6.2: Dynamické zesílení soustavy

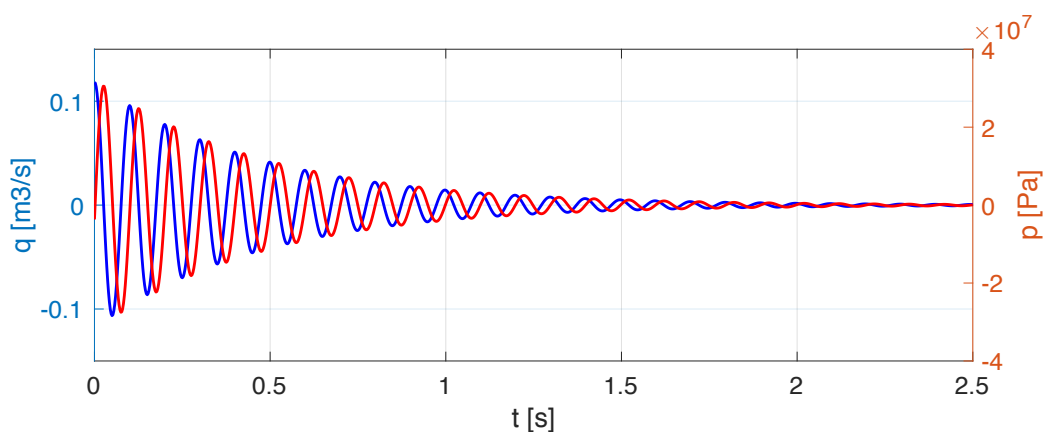
Další analýza se bude týkat chování soustavy na 1. vlastní frekvenci. Z vykreslení 1. vlastního tvaru pro průtok a tlak (Obrázek 6.3) je jasně vidět umístění lokálních odporů. Z grafu je dále možné usoudit, že tyto odporové prvky způsobí, že v poloze $x = 25 \text{ m}$ nevznikne uzel tlaku, dochází zde pouze k výraznému poklesu tlakových pulzací.

Z tohoto grafu je možné ověřit splnění okrajové podmínky zadané na konec trubice, tedy, že hodnota průtoku v místě $x = L$ bude rovna nule.



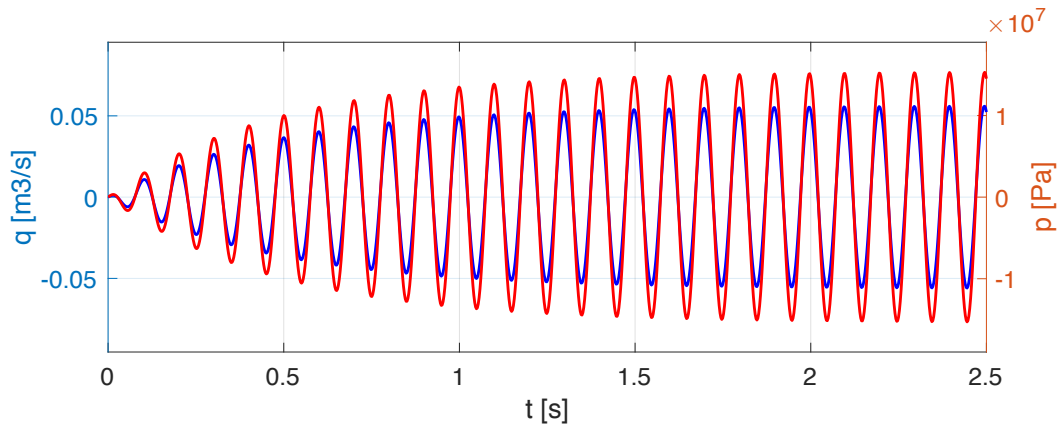
Obrázek 6.3: Vlastní tvary kmitu pro 1. vlastní frekvenci

V grafu (Obrázek 6.4) je vykresleno vlastní kmitání tlaku a průtoku v místě trubice $x = 26$ m. Z grafu je jasně patrný vliv tlumení, charakterizovaného součinitelem α , který nabývá hodnoty $\alpha = -2,103$. Výchylka se ustálí na nulové hodnotě, jelikož je řešena pouze nestacionární složka tlaku a průtoku.



Obrázek 6.4: Volné kmitání v místě $x = 26$ m

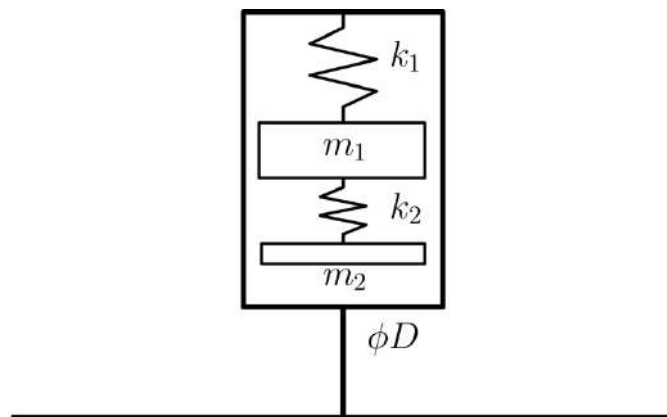
Pokud bude soustava buzena pulzátoem s frekvencí odpovídající vlastní frekvenci, dostane se soustava do rezonančního stavu, jak je vidět v grafu (Obrázek 6.5). Je zde patrné, že vlivem tlumení dojde k ustálení výchylky.



Obrázek 6.5: Časová odezva na vynucené kmitání při $\omega \approx \Omega_1$ v místě $x = 26$ m

6.2 Soustava se dvěma kladnými odpory a dynamickým tlumičem

V této podkapitole je předchozí řešení rozšířeno o dynamický tlumič. Níže jsou uvedeny tři možnosti naladění tlumiče a výsledné porovnání charakteristik soustavy s daným návrhem tlumiče. Pro výpočty byl zvolen typ tlumiče se dvěma stupni volnosti, viz (Obrázek 6.6). Tento tlumič byl v dané soustavě umístěn do polohy $x = 5$ m.



Obrázek 6.6: Použitá varianta dynamického tlumiče

6.2.1 Tlumič s vlastní frekvencí nižší oproti frekvenci buzení

Zvolme nyní parametry tlumiče tak, aby jeho vlastní frekvence byla nižší, než je hodnota budící frekvence. Tyto parametry jsou uvedeny v tabulce (Tabulka 6.4).

Tabulka 6.4: Parametry tlumiče

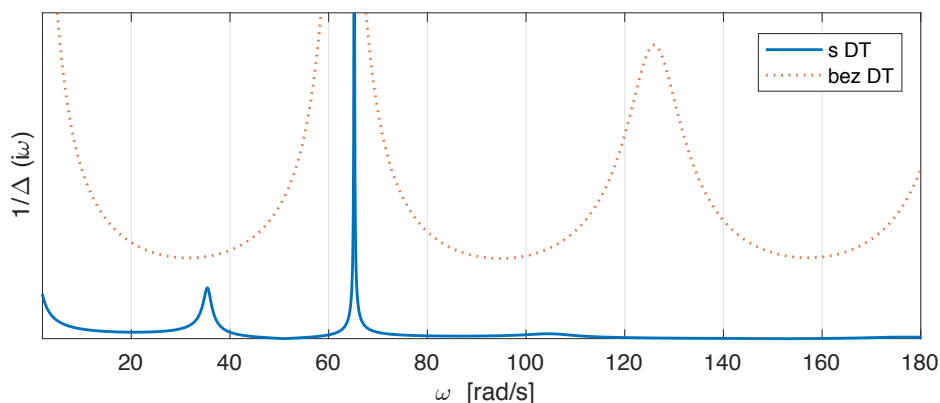
hmota	m_1	1,5	[kg]
	m_2	0,1	[kg]
poddajnost	k_1	4200	[N m ⁻¹]

	k_2	2180	$[\text{N m}^{-1}]$
průměr	$\varnothing D$	0,1	$[\text{m}]$
vlastní frekvence tlumiče	Ω_T	51,02	$[\text{rad s}^{-1}]$

Z grafu dynamického zesílení (Obrázek 6.7) je zřetelné, že takto naladěný tlumič sice způsobil rozdvojení 1. vlastní frekvence soustavy bez tlumiče, hodnota 2. vlastní frekvence soustavy s tlumičem je však jen nepatrně odlišná, viz Tabulka 6.5.

Tabulka 6.5: Vlastní frekvence soustavy

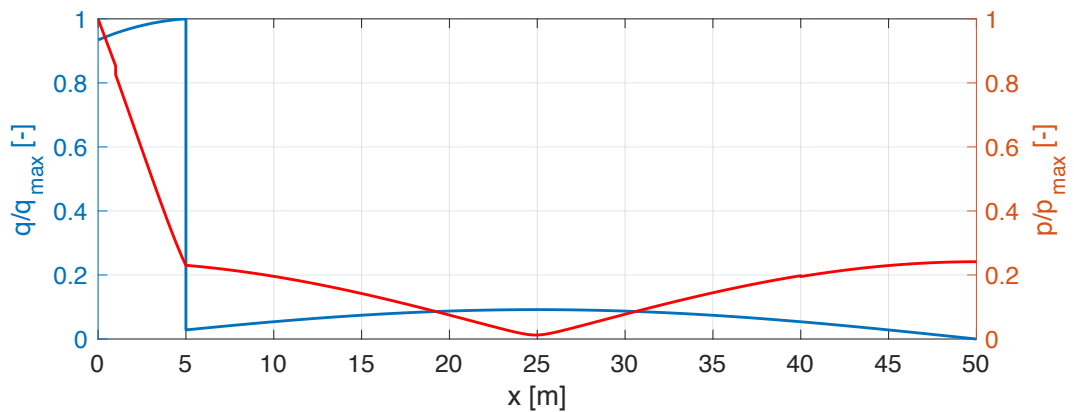
Ω	trubice bez DT	trubice s DT	
1.	63,03	35,38	$[\text{rad s}^{-1}]$
2.	125,96	65,20	$[\text{rad s}^{-1}]$
3.	188,20	104,61	$[\text{rad s}^{-1}]$



Obrázek 6.7: Dynamické zesílení soustavy

Pokud se ještě vrátíme k dynamickému zesílení, je vidět, že pásmo, kdy nedochází k rezonanci, se výrazně zúžilo z původního rozpětí přibližně 50 rad s^{-1} na přibližných 20 rad s^{-1} .

Z vykreslení vlastních tvarů kmitu (Obrázek 6.8) je zřejmé, že došlo k poklesu amplitudy kmitu tlaku a průtoku. Pokud by však hodnota budící frekvence jen nepatrně vzrostla, dostala by se soustava opět do rezonance.



Obrázek 6.8: Tvary pro 1.vlastní frekvenci

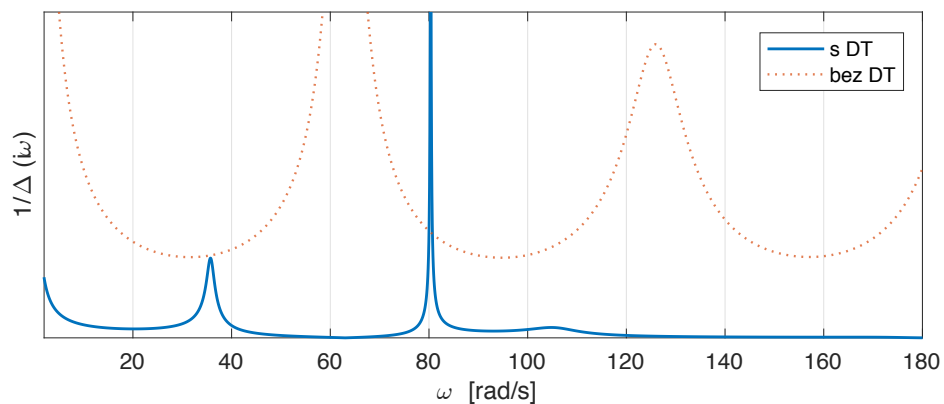
6.2.2 Tlumič nalazen na budící frekvenci

Další možností je zvolit parametry dynamického tlumiče tak, aby hodnota vlastní frekvence tlumiče odpovídala budící frekvenci, viz (Tabulka 6.6).

Tabulka 6.6: Parametry tlumiče

hmota	m_1	1,36	[kg]
	m_2	0,1	[kg]
poddajnost	k_1	5858	[N m ⁻¹]
	k_2	3000	[N m ⁻¹]
průměr	$\varnothing D$	0,1	[m]
vlastní frekvence tlumiče	Ω_T	63,01	[rad s ⁻¹]

Z vykreslení dynamického zesílení (Obrázek 6.9) je vidět, že tlumič zde funguje podstatně lépe než v předchozím případě. Použitím dynamického tlumiče dosáhneme výrazného přeladění soustavy. Oproti podladěnému tlumiči se kolem původní 1. vlastní frekvence nedostane soustava do rezonance.



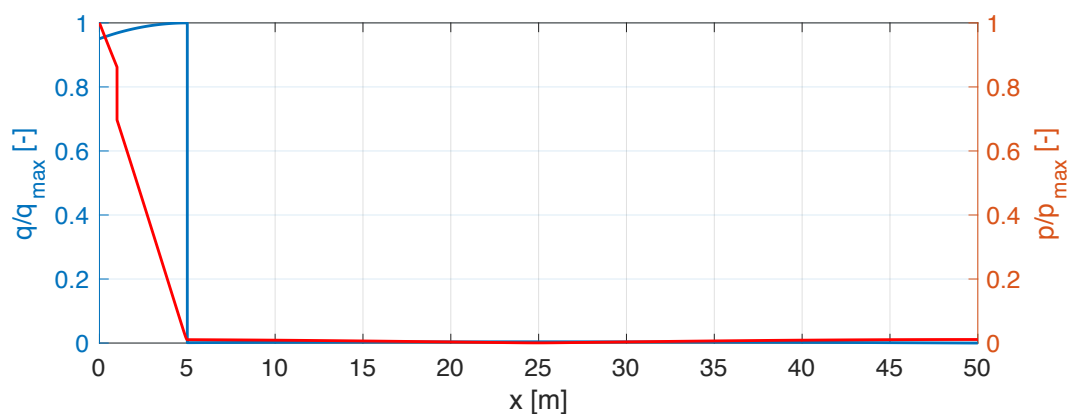
Obrázek 6.9: Dynamické zesílení soustavy

Jak z grafu, tak z tabulky (Tabulka 6.7) vlastních frekvencí je zřejmé, že rozdíl oproti předchozímu případu je zřejmý. Zejména v hodnotě 2. vlastní frekvence tlumené soustavy, což zvyšuje i pásmo, kdy nenastává kritické zesílení soustavy.

Tabulka 6.7: Srovnání vlastních frekvencí soustavy

Ω	trubice bez DT	trubice s DT	
1.	63,03	35,73	[rad s ⁻¹]
2.	125,96	80,32	[rad s ⁻¹]
3.	188,20	104,82	[rad s ⁻¹]

U zobrazení vlastních tvarů kmitu je vidět, že budící frekvence se již nenachází v okolí vlastní frekvence soustavy. Amplituda kmitu za dynamickým tlumičem dosahuje 0,5 % původní maximální výchylky (Obrázek 6.10).



Obrázek 6.10: Tvary kmitu pro první vlastní frekvenci

6.2.3 Tlumič s vlastní frekvencí vyšší oproti budící frekvenci

V poslední řadě byl zjištěn vliv dynamického tlumiče na soustavu, pokud je frekvenčně nalazen na frekvenci vyšší, než je budící frekvence. Hodnoty pro tako navržený tlumič jsou vypsány v tabulce (Tabulka 6.8).

Tabulka 6.8: Parametry tlumiče

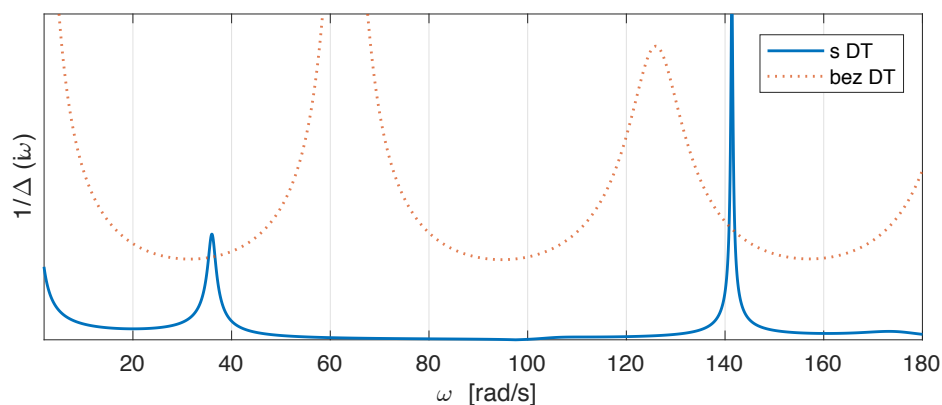
hmota	m_1	1,36	[kg]
	m_2	0,1	[kg]
poddajnost	k_1	5858	[N m ⁻¹]
	k_2	3000	[N m ⁻¹]
průměr	$\varnothing D$	0,1	[m]
vlastní frekvence tlumiče	Ω_T	63,01	[rad s ⁻¹]

Z vykreslení vlastních hodnot na grafu frekvenčního zesílení (Obrázek 6.11) je oproti tlumiči, který je nalazen na frekvenci buzení, vidět ještě výraznější změnu hodnoty 2. vlastní frekvence. Dále je možné usuzovat, že mohlo pro tento typ naladění tlumiče dojít ke sloučení 2. a 3. vlastní frekvence, jelikož 3. vlastní frekvence soustavy se oproti předchozím případům nachází až na hodnotě $173,21 \text{ rad s}^{-1}$.

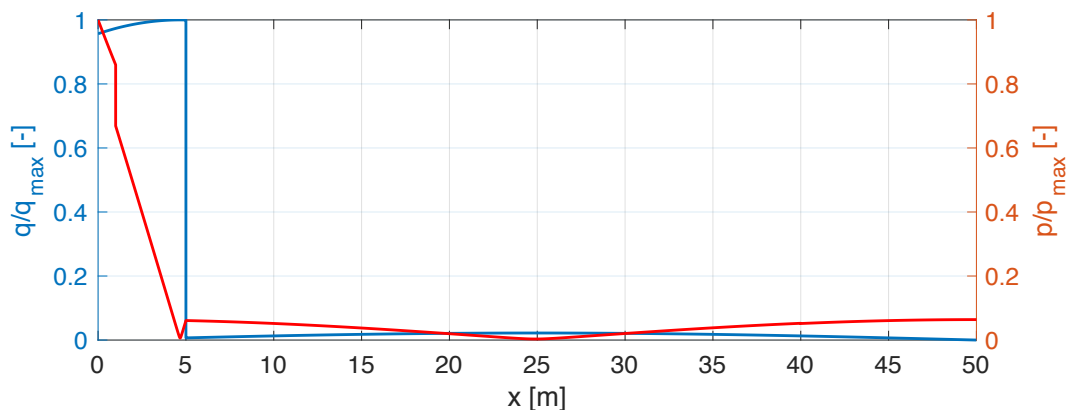
Použití takto navrženého tlumiče poskytuje z uvedených tří variant nejrozsáhlejší frekvenční pásmo, kdy nedochází k rezonanci (Obrázek 6.11).

Tabulka 6.9: Porovnání vlastních frekvencí

Ω	trubice bez DT	trubice s DT	
1.	63,03	36,01	$[\text{rad s}^{-1}]$
2.	125,96	141,36	$[\text{rad s}^{-1}]$
3.	188,20	173,21	$[\text{rad s}^{-1}]$



Obrázek 6.11: Dynamické zesílení soustavy



Obrázek 6.12: Tvary kmitu pro první vlastní frekvenci

Vykreslení vlastních tvarů (Obrázek 6.12) potvrzuje výsledky z amplitudo-frekvenční charakteristiky. Hodnota maximální výchylky za tlumičem dosahuje přibližně 6 % původní amplitudy.

6.3 Nestabilní soustava

K vytvoření nestabilního chování soustavy lze využít prvku lokálního odporu. Stanovením záporného součinitele tlumení lze do soustavy uměle nést nestabilitu. Konkrétní hodnoty tohoto příkladu jsou uvedeny v tabulce (Tabulka 6.10).

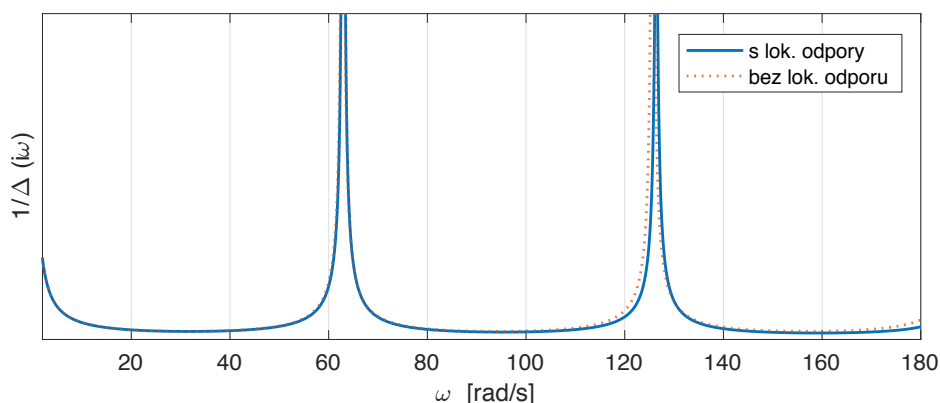
Tabulka 6.10: Parametry lokálních odporů

Součinitel tlumení	Umístění prvku
$b_1 = -9,8 \cdot 10^8 \text{ kg s}^{-1} \text{ m}^{-3}$	$x_1 = 1 \text{ m}$
$b_2 = 6 \cdot 10^6 \text{ kg s}^{-1} \text{ m}^{-3}$	$x_2 = 40 \text{ m}$

Z vykreslení dynamického zesílení je zřejmé, že záporný součinitel tlumení nezpůsobí snížení špičky u vlastních frekvencí, jako tomu bylo v případě stabilní soustavy. Stejně jako u stabilní soustavy dochází k mírnému nárůstu vlastních frekvencí, viz tabulka (Tabulka 6.11).

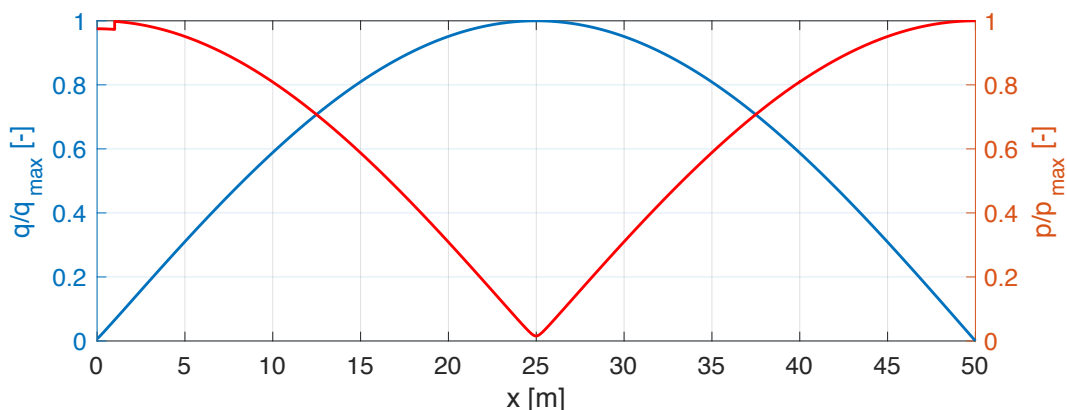
Tabulka 6.11: Porovnání vlastních frekvencí

Ω	trubice bez odporů	trubice s lok. odpory	
1.	62,82	62,96	[rad s ⁻¹]
2.	125,68	126,38	[rad s ⁻¹]



Obrázek 6.13: Dynamické zesílení soustavy

Z vykreslení vlastních tvarů (Obrázek 6.14) lze pozorovat v poloze umístění lokálního odporu se záporným součinitelem tlumení zvýšení maximální výchylky. O stabilitě z tohoto vykreslení nelze rozhodnout.



Obrázek 6.14: Tvary kmitu pro první vlastní frekvenci

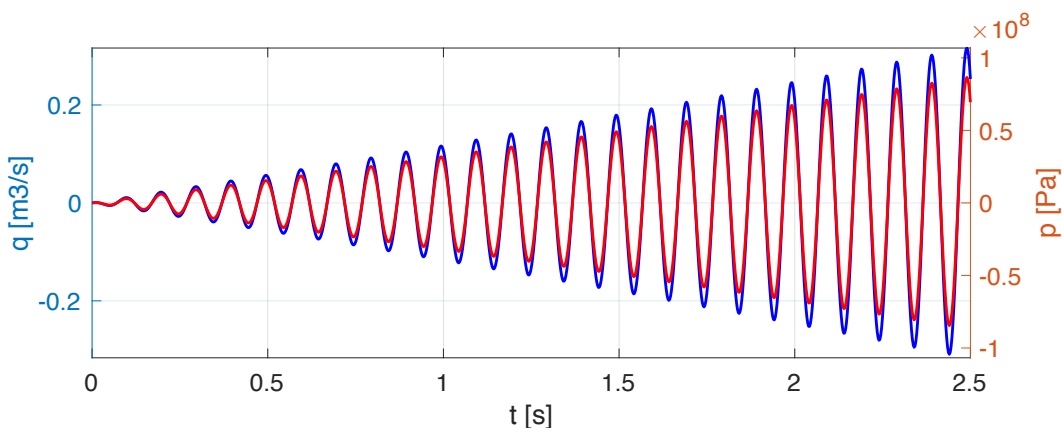
K určení stability je třeba zjistit reálný koeficient komplexního čísla. Ten lze rozložit na podíl stability od viskózního tlumení v trubici a podíl od lokálních prvků. Tyto hodnoty jsou uvedeny v tabulce (Tabulka 6.12).

Z hodnot uvedených v tabulce lze potvrdit předpoklad, že podíl vlastností trubice působí stabilizujícím vlivem. Nestabilita je tedy způsobena výhradně vlivem lokálních odporů.

Tabulka 6.12: Stabilita soustavy

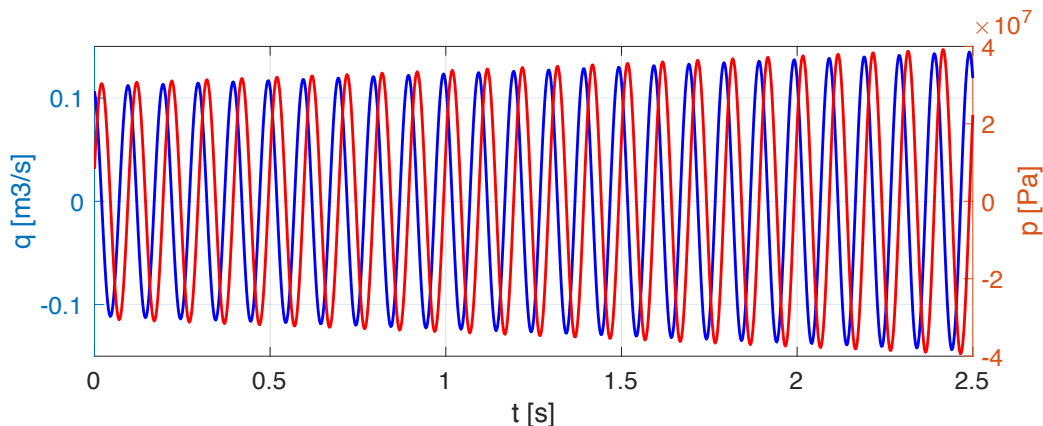
celková stabilita	α [-]	0,024
stabilita trubice	α_T [-]	-0,006
stabilita lokálních prvků	α_{LP} [-]	0,030

Ke znázornění je vhodné vykreslit volné kmitání (Obrázek 6.15), na kterém lze pozorovat vliv nestabilního kmitání.



Obrázek 6.15: Volné kmitání soustavy v místě $x = 5$ m

Stejně jako na grafu volného kmitání, tak i na grafu odezvy na vynucené kmitání (Obrázek 6.16) je vliv nestability zřejmý. Další podkapitola je věnována tomu, zda a jak je možné pomocí dynamického tlumiče předejít nestabilnímu chování.



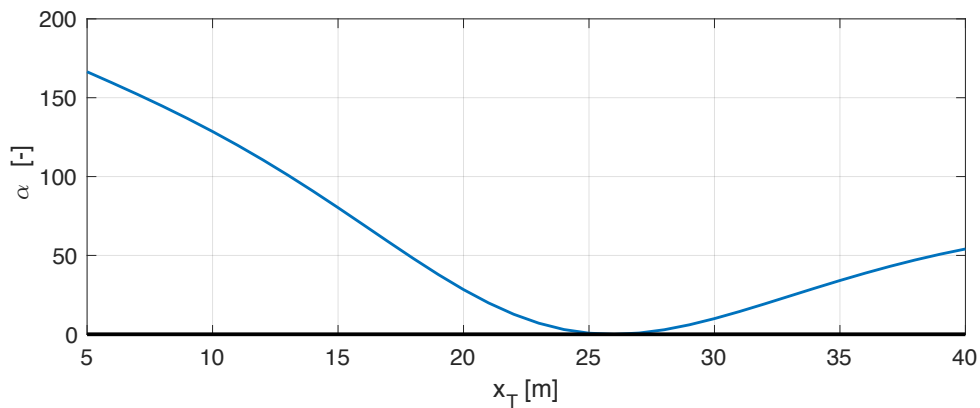
Obrázek 6.16: Časová odezva na vynucené kmitání při $\omega \approx \Omega_1$ v místě $x = 5$ m

6.4 Nestabilní soustava s dynamickým tlumičem

Pro snahu stabilizovat soustavu byl opět použit tlumič se dvěma stupni volnosti. Bylo nejprve třeba zjistit, jaký vlivy budou mít na stabilitu dílčí parametry, zejména byl posuzován vliv umístění tlumiče a vliv jeho naladění.

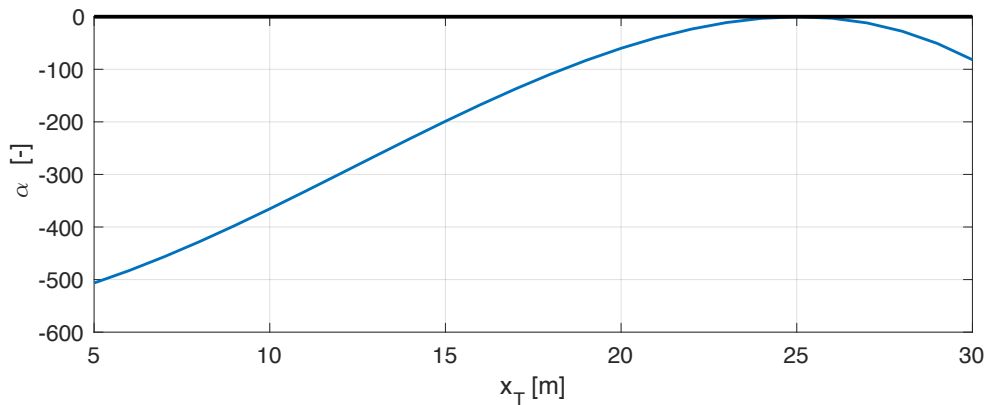
Při posuzování závislosti umístění na stabilitě byl nejprve použit tlumič s vlastní frekvencí odpovídající buzení soustavy. Z grafu (Obrázek 6.17) je vidět, že soustava se nejvíce přiblíží stabilnímu chování okolo hodnoty $x \sim 26$ m. Toto umístění odpovídá místu minimální amplitudy tlakových pulzací. V ostatních polohách dochází k výraznému nárůstu nestabilního chování.

V případě použití tlumiče s vlastní frekvencí nižší, než je frekvence buzení, které je znázorněno na grafu (Obrázek 6.18), nastává situace opačného charakteru. Hodnoty součinitele α nabývají pro většinu poloh velice nízkých hodnot, stejně jako u předchozího případu se v místě $x \sim 26$ m pohybujeme na hranici stability.



Obrázek 6.17: Závislost umístění na stabilitě pro tlumič naladěný na budící frekvenci

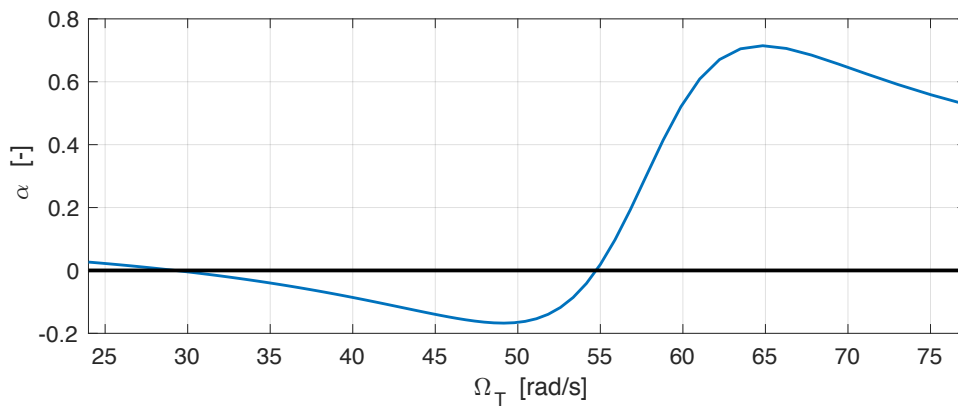
Pokud by byly ve výpočtu použity parametry s velice nízkým součinitelem α , docházelo by sice k vysokému útlumu za dynamickým tlumičem, amplituda by se ale zvětšovala před ním. Pro další posuzování bude tedy příhodné zvolit umístění právě v poloze, kdy se soustava pohybuje na hranici stability.



Obrázek 6.18: Závislost umístění na stabilitě pro tlumič naladěný na frekvenci menší, než je budící frekvence

Pro stanovení závislosti vlastní frekvence tlumiče na stabilitě byla na základě těchto zjištění zvolena poloha tlumiče $x = 25$ m. Pro zvolený typ tlumiče lze z grafu vyjadřující danou závislost (Obrázek 6.19) vysledovat, že existuje pásmo frekvencí, pro které se bude soustava vyznačovat stabilním chováním.

V dalším kroku byl dynamický tlumič nalazen na vlastní frekvenci z tohoto pásma a bylo ověřeno, zda skutečně dochází ke stabilizaci.



Obrázek 6.19: Závislost naladění tlumiče na stabilitě při umístění tlumiče do polohy $x = 25$ m

Zvolením parametrů v tabulce (Tabulka 6.13) obdržíme tlumič naladěný tak, aby, podle závislosti (Obrázek 6.19), bylo možné stabilizovat danou soustavu.

Tabulka 6.13: Parametry tlumiče

hmota	m_1	1,5	[kg]
	m_2	0,1	[kg]
poddajnost	k_1	3800	[N m ⁻¹]
	k_2	2280	[N m ⁻¹]
průměr	$\varnothing D$	0,1	[m]
vlastní frekvence tlumiče	Ω_T	48,56	[rad s ⁻¹]

Výpočtem bylo zjištěno, že hodnoty popisující stabilitu pro frekvenci buzení (Tabulka 6.14), jsou záporné. To jen potvrzuje předpoklad z grafu (Obrázek 6.19), který předpokládá stabilní chování.

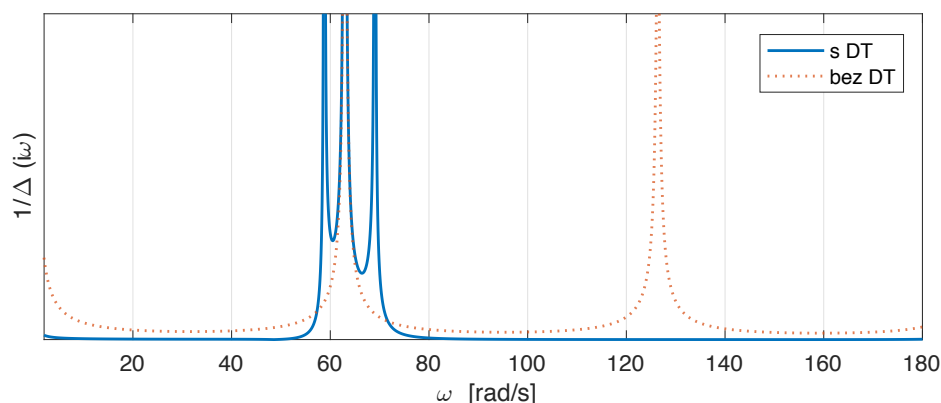
Tabulka 6.14: Stabilita soustavy

celková stabilita	α [-]	-0,162
stabilita trubice	α_T [-]	-0,006
stabilita lokálních prvků	α_{LP} [-]	-0,155

Z grafu dynamického zesílení (Obrázek 6.20) je vidět, že okolo místa 1. vlastní frekvence soustavy bez tlumiče se nyní nachází tři špičky, z nichž jedna odpovídá přímo 1. vlastní frekvenci netlumené soustavy. To by mohlo znamenat, že dynamický tlumič zde nesníží amplitudu kmitů, ale pouze stabilizuje soustavu.

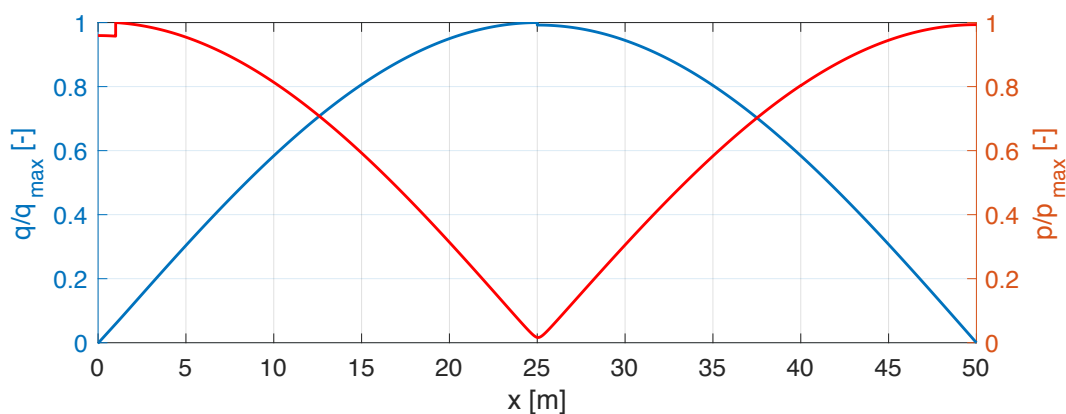
Tabulka 6.15: Porovnání vlastních frekvencí

Ω	trubice bez tlumiče	trubice s tlumičem	
1.	62,96	58,76	[rad s ⁻¹]
2.	126,38	62,96	[rad s ⁻¹]
3.	190,22	69,05	[rad s ⁻¹]



Obrázek 6.20: Dynamické zesílení soustavy

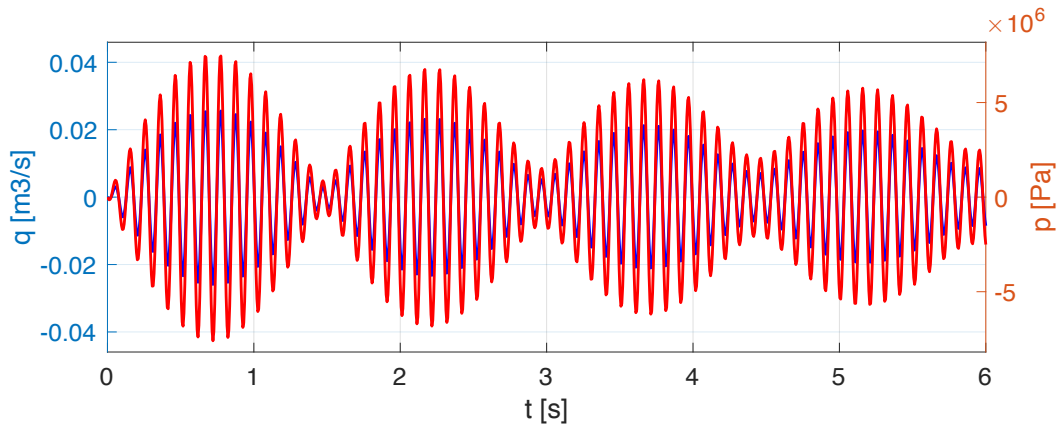
Z vykreslení vlastních tvarů (Obrázek 6.21) je zřejmé, že tomu tak opravdu je a amplitudy kmitu nejsou utlumeny, jako tomu bylo v případě stabilní soustavy, kdy byl tlumič umisťován do polohy maximální tlakové amplitudy.



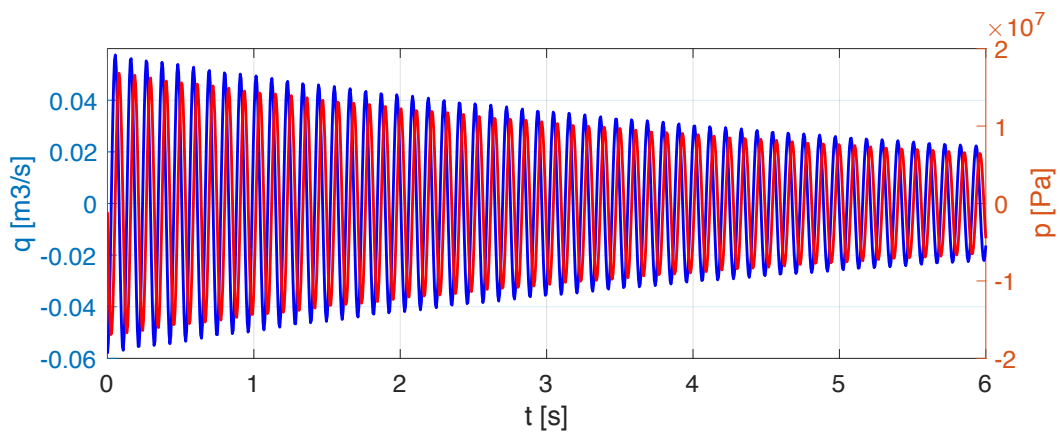
Obrázek 6.21: Vlastní tvary kmitu pro budící frekvenci

Vykreslením volného kmitání (Obrázek 6.22) je jasně viditelný útlum kmitání. Dále je zde možné pozorovat nárůsty a poklesy amplitudy kmitu, tzv. záněje. Frekvence těchto zánějí odpovídá rozdílu 1. a 2. vlastní frekvence soustavy.

V grafu odezvy na vynucené kmitání (Obrázek 6.23) je jasně zřetelný útlum kmitání.



Obrázek 6.22: Vlastní kmitání v místě $x = 25$ m



Obrázek 6.23: Odezva na vynucené kmitání v místě $x = 25$ m

7 Závěr

Cílem této práce bylo vytvořit výpočtový model tlakových a průtokových pulzací hydrodynamické soustavy a dále na základě tohoto modelu vytvořit software pro řešení této soustavy s vykreslením vlastního a vynuceného kmitání v časové oblasti, amplitudo-frekvenční charakteristiky a vlastních tvarů. Dalším cílem bylo vytvořit výpočtový model několika variant dynamického tlumiče a posoudit vliv umístění tlumiče na vlastnosti soustavy.

V kapitole 4 byla pospána zvolená metoda řešení tlakových pulzací včetně posuzování stability. Konkrétně se jedná o metodu přenosových matic hojně využívanou k posuzování hydrodynamických soustav. Pro posuzování stability byly zvoleny dvě možnosti. Obě popisují stabilitu pomocí reálné hodnoty vlastního čísla, první možností je získat tuto hodnotu z matematického výrazu (4.45), druhou je využití metody konečných diferencí a vykreslení izokřivek v Gaussově rovině.

Pro popis chování různých variant dynamického tlumiče byly v kapitole 5 vytvořeny přechodové matice pro tři různé typy tlumiče. Varianty jsou si podobné, liší se počtem stupňů volnosti. K vytvoření přechodových matic byla použita rovnice rovnováhy, rovnice kontinuity a stavová rovnice.

Dále bylo posuzováno, jaký vliv má umístění dynamického tlumiče na vlastní tvary kmitu a vlastní frekvenci soustavy. Bylo zjištěno, že při umístění tlumiče do uzlu průtoku a kmitny tlaku dochází k výraznému poklesu amplitudy pulzací v oblasti za tlumičem a zároveň dochází k přeladění soustavy. V případě umístění tlumiče do uzlu tlaku, a tedy kmitny průtoku, nenastává ve vykreslení vlastních tvarů žádná výrazná změna. Pro utlumení tlakových pulzací je tedy vhodné umístit tlumič do uzlu průtoku a kmitny tlaku.

V kapitole 6 je řešena úloha se dvěma lokálními odpory. Podle konstanty tlumení charakterizující tyto prvky byla vytvořena stabilní (obě konstanty byly kladné) a nestabilní (jedna z konstant byla záporná) soustava. Následně byl do těchto soustav vhodně přidán dynamický tlumič. V případě stabilní soustavy byl sledován vliv naladění dynamického tlumiče. Ze sledovaných případů bylo zjištěno, že z hlediska šíře frekvenčního pásma, kdy nedochází k rezonančnímu zesílení, je nejvhodnější použít tlumič naladěný na frekvenci vyšší oproti budící frekvenci. Na tlumení pulzací nemělo naladění tlumiče výrazný vliv.

V případě nestabilní soustavy bylo posuzováno, jaký vliv bude mít dynamický tlumič na stabilitu a zda bude možné jeho vhodným umístěním a volbou parametrů zamezit samobuzenému kmitání. Při umístění tlumiče do polohy poblíž kmitny tlaku docházelo k enormnímu nárůstu nestability. Následně bylo zjištěno, že nejlepšího stabilizačního vlivu bude dosaženo v oblasti uzlu tlaku, tedy v místě, kde tlumič neovlivňuje amplitudu kmitu. Dále bylo zjištěno, že naladění tlumiče výrazně ovlivňuje stabilitu, a pro daný případ bylo nalezeno pásmo vlastních frekvencí tlumiče, při kterých bude soustava

stabilní. Vytvořený program pro řešení tlakových a průtokových pulzací včetně vyjádření vlivu stability je obsažen v příloze.

V navazující práci by bylo možné přidat do výpočtu reálná data budícího průtoku. V této práci je budící funkce ve tvaru funkce sinus, což je značně idealizovaný stav. Dále by bylo možné provést experiment na reálné soustavě a získané výsledky porovnat s výpočtovým modelem. Následně by bylo možné zahrnout do konstrukčního provedení kmitající hmotu v tekutině a stanovit přídatné účinky. Tato zjištění by mohla přispět ke snížení hmotnosti a zmenšení tlumiče.

8 Použité zdroje

- [1] JANÍČEK, Přemysl. *Systémová metodologie : brána do řešení problémů*. Vyd. 1. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2014. ISBN 978-80-7204-887-8.
- [2] POCHYLÝ, František. *Dynamika tekutinových systémů*. Vyd. 1. Brno: Vysoké učení technické v Čs. redakci VN MON, 1990. Učební texty vysokých škol. ISBN 80-214-0139-7.
- [3] HABÁN, Vladimír. *Tlumení tlakových a průtokových pulzací: teze disertační práce*. Brno: Vysoké učení technické, 2001. ISBN 80-214-1905-9.
- [4] ZYMÁK, Václav. *Dynamika pulsujícího průtoku : teorie, měření, aplikace, zkušenosti*. 1. vyd. Brno: PC-DIR, 1994. ISBN 80-85895-00-5.
- [5] MITRA, Ambar K. Finite difference method for the solution of Laplace equation. *Department of aerospace engineering Iowa state University* [online]. 2010 [cit. 2019-05-20]. Dostupné z: https://akmitra.public.iastate.edu/aero361/design_web/Laplace.pdf
- [6] HALFAR JIŘÍ. *Návrh dynamického tlumiče v hydrodynamickém obvodu*. 1990. ISBN 911089-76.
- [7] POCHYLÝ, František. *Dynamické tlumení konstrukcí*. B.m., nedatováno. Vysoké učení v Brně.
- [8] ELSHERBENI ATEF Z., Demir Veysel. *Finite-Difference Time-Domain Method for Electromagnetics with MATLAB® Simulations* [online]. B.m.: Institution of Engineering and Technology, 2016. ISBN 978-1-61353-175-4 [cit. 2019-05-20]. Dostupné z: <https://app.knovel.com/hotlink/toc/id:kpFDTDMEM7/finite-difference-time/finite-difference-time>
- [9] *Programming Apps in App Designer* [online] [cit. 2019-05-20]. Dostupné z: <https://www.mathworks.com/help/matlab/code-app-behavior-in-app-designer.html>
- [10] *Symbolic Variables, Expressions, Functions, and Preferences* [online] [cit. 2019-05-20]. Dostupné z: https://www.mathworks.com/help/symbolic/symbolic-variables-expressions-and-functions.html?s_tid=CRUX_lftnav

9 Seznam obrázků a tabulek

9.1 Seznam obrázků

Obrázek 3.1: Hydrodynamická soustava napájecího systému tepelné elektrárny [2]	16
Obrázek 3.2: Schematické znázornění dynamického tlumiče vibrací [6]	19
Obrázek 3.3: Amplitudo-frekvenční charakteristika soustavy bez hmoty mt (vlevo), s přidanou hmotou mt (vpravo)	20
Obrázek 3.4: Varianty konstrukčního provedení tlumiče se dvěma stupni volnosti [7]	21
Obrázek 4.1: Makroskopická soustava	23
Obrázek 4.2: Okrajová podmínka	24
Obrázek 4.3: Algoritmus výpočtu metodou konečných diferencí	30
Obrázek 4.4: Vykreslení výsledků v Gaussově prostoru	30
Obrázek 4.5: Funkce u (vlevo) a funkce v (vpravo)	31
Obrázek 4.6: Soustava s lokálním odporem	33
Obrázek 4.7: Schéma tvorby aplikace	34
Obrázek 5.1: Schéma tlumiče	36
Obrázek 5.2: Uvolněný prvek hmoty	36
Obrázek 5.3: Schéma tlumiče	38
Obrázek 5.4: Uvolnění hmoty v tlumiči	38
Obrázek 5.5: Schéma tlumiče	40
Obrázek 5.6: Uvolnění hmoty v tlumiči	40
Obrázek 5.7: Tvary kmitu při $\omega = 125,6 \text{ rad. s}^{-1}$ – bez tlumiče	43
Obrázek 5.8: Amplitudo-frekvenční charakteristika – bez tlumiče	43
Obrázek 5.9: Tvar kmitu při umístění tlumiče v místě $x = 25 \text{ m}$	44
Obrázek 5.10: Amplitudo-frekvenční charakteristika s tlumičem v místě $x = 25 \text{ m}$	44
Obrázek 5.11: Tvar kmitu při umístění tlumiče v místě $x = 37,5 \text{ m}$	45
Obrázek 5.12: Amplitudo-frekvenční charakteristika s tlumičem v místě $x = 37,5 \text{ m}$	45
Obrázek 6.1: Schéma soustavy	46
Obrázek 6.2: Dynamické zesílení soustavy	47
Obrázek 6.3: Vlastní tvary kmitu pro 1. vlastní frekvenci	48
Obrázek 6.4: Volné kmitání v místě $x=26 \text{ m}$	48
Obrázek 6.5: Časová odezva na vynucené kmitání při $\omega \approx \Omega_1$ v místě $x = 26 \text{ m}$	49

Obrázek 6.6: Použitá varianta dynamického tlumiče	49
Obrázek 6.7: Dynamické zesílení soustavy	50
Obrázek 6.8: Tvary pro 1.vlastní frekvenci	51
Obrázek 6.9: Dynamické zesílení soustavy	51
Obrázek 6.10: Tvary kmitu pro první vlastní frekvenci	52
Obrázek 6.11: Dynamické zesílení soustavy	53
Obrázek 6.12: Tvary kmitu pro první vlastní frekvenci	53
Obrázek 6.13: Dynamické zesílení soustavy	54
Obrázek 6.14: Tvary kmitu pro první vlastní frekvenci	55
Obrázek 6.15: Volné kmitání soustavy v místě $x = 5$ m.....	55
Obrázek 6.16: Časová odezva na vynucené kmitání při $\omega \approx \Omega_1$ v místě $x = 5$ m	56
Obrázek 6.17: Závislost umístění na stabilitě pro tlumič naladěný na budící frekvenci.....	57
Obrázek 6.18: Závislost umístění na stabilitě pro tlumič naladěný na frekvenci menší, než je budící frekvence	57
Obrázek 6.19: Závislost naladění tlumiče na stabilitě při umístění tlumiče do polohy $x = 25$ m.....	58
Obrázek 6.20: Dynamické zesílení soustavy	59
Obrázek 6.21: Vlastní tvary kmitu pro budící frekvenci	59
Obrázek 6.22: Vlastní kmitání v místě $x = 25$ m	60
Obrázek 6.23: Odezva na vynucené kmitání v místě $x = 25$ m	60

9.2 Seznam tabulek

Tabulka 6.1: Vstupní veličiny	46
Tabulka 6.2: Parametry lokálních odporů	47
Tabulka 6.3: Vlastní frekvence soustavy	47
Tabulka 6.4: Parametry tlumiče	49
Tabulka 6.5: Vlastní frekvence soustavy	50
Tabulka 6.6: Parametry tlumiče	51
Tabulka 6.7: Srovnání vlastních frekvencí soustavy	52
Tabulka 6.8: Parametry tlumiče	52
Tabulka 6.9: Porovnání vlastních frekvencí	53
Tabulka 6.10: Parametry lokálních odporů	54
Tabulka 6.11: Porovnání vlastních frekvencí	54
Tabulka 6.12: Stabilita soustavy	55
Tabulka 6.13: Parametry tlumiče	58

Tabulka 6.14: Stabilita soustavy	58
Tabulka 6.15: Porovnání vlastních frekvencí.....	59

10 Seznam příloh

Příloha I Grafické prostředí aplikace

Přílohy na disku

Příloha II Aplikace pro výpočet pulzací

Příloha III Skript k aplikaci a pomocné funkce

Přílohy jsou nahrány na nosiči CD, který je součástí diplomové práce. Soubory jsou vytvořené ve verzi Matlabu R2016a. Pro spuštění aplikace a skriptů je třeba mít aktivovaný Symbolic Toolbox.

Příloha I – Grafické prostředí aplikace

Výpočet tlakových a průtokových pulzací v hydrodynamické soustavě

Vstupy		Zadání hydrodynamických prvků	
Parametry trubice		Lokální odpor <input checked="" type="checkbox"/>	Plynový akumulátor <input type="checkbox"/>
Délka trasy [m]	50	Součinitel tlumení b [kg m⁻³s⁻¹]	Plnění akumulátoru C [Pa/m³]
Prumer trubice [m]	0.08	4e7,6e7	
Rychlost zvuku [m/s]	1000	Umístění x [m]	Umístění x [m]
Hustota [kg/m ³]	1000	1,40	
Tlumení [kg/s/m ³]	12.8		
Okrajové podmínky		Dynamický tlumič <input type="checkbox"/>	
Typ buzení	Prutokove	Varianta	Hmotnost m_i [kg] 1,0.2
Amplituda buzení	0.1	<input type="radio"/> 1 DOF	Tuhost k_i [N/m] 8800,5280
Frekvence buzení [rad/s]	63	<input checked="" type="radio"/> 2 DOF	Průměr tlumiče D [mm] 100
Konec trubice	q=0	<input type="radio"/> 3 DOF	Umístění x [m] 5
Výsledky		Vykreslení výsledků	
Vlastní frekvence soustavy [rad/s]	63.03	<input type="checkbox"/> Vlastní tvary	<input type="checkbox"/> A-F charakteristika
Vlastní frekvence tlumiče [rad/s]	0.00	<input type="checkbox"/> Dynamické zesílení	
Celková stabilita	-2.109	<input type="checkbox"/> Vlastní kmitání	
Stabilita od kapaliny	-0.006	<input type="checkbox"/> Vynucené kmitání	
Stabilita lokálních prvků	-2.103	<input type="checkbox"/> Předchozí A-F charakteristika	
<input checked="" type="radio"/> Vlastní výpočet Run		Vlastní tvar	1
Vykreslení v poloze [m] 13		Konečný čas [s]	1
<input type="radio"/> FDM výpočet Run		Alfa span	-10,10
		Omega span	0,200
		Stav	Výpočet 49%