Univerzita Hradec Králové

Přírodovědecká fakulta

Katedra matematiky

Rozvíjení prostorové představivosti ve středoškolské matematice

Diplomová práce

Autor: Bc. Jana Búdová

Studijní program: N1101 - Matematika

Studijní obor: Učitelství matematiky pro střední školy

Učitelství pro střední školy – dějepis

Vedoucí práce: Mgr. Tomáš Zuščák, Ph.D.

Hradec Králové 2019

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci na téma Rozvíjení prostorové představivosti ve středoškolské matematice vypracovala samostatně a že jsem v seznamu použité literatury uvedla všechny prameny, z kterých jsem vycházela.

V Hradci Králové dne ……………………………………..

Jméno a příjmení

Poděkování

Ráda bych poděkovala Mgr. Tomáši Zuščákovi, Ph.D., vedoucímu mé diplomové práce za zájem, vedení, cenné rady a čas, který mi věnoval. Také bych ráda poděkovala své rodině a přátelům za podporu a pomoc během studia.

Anotace

BÚDOVÁ, J. *Rozvíjení prostorové představivosti ve středoškolské matematice*. Hradec Králové, 2019. Diplomová práce na Přírodovědecké fakultě Univerzity Hradec Králové. Vedoucí diplomové práce Mgr. Tomáš Zuščák, Ph.D. 92s.

Diplomová práce se zabývá rozvíjením prostorové představivosti. První část je věnována teoretickým poznatkům z pohledu psychologie a obecné didaktiky. Praktická část obsahuje soubor příkladů, které by měly sloužit k rozvoji prostorové představivosti. Součástí diplomové práce je rozbor a hodnocení didaktického výstupu realizovaného v praxi.

Klíčová slova

matematika, prostorová představivost, příklad, didaktika

Annotation

BÚDOVÁ, J. *Developing of the spatial conception in the high school mathematics.* Hradec Králové, 2019. Master´s thesis at Faculty of Science University of Hradec Králové. Thesis Supervisor Mgr. Tomáš Zuščák, Ph.D. 92s.

This Master´s thesis deals with the development of spatial perception. The first part is devoted to the theoretical background in the fields of psychology and general didactics. The practical part includes a set of tasks which should contribute to the development of spatial perception. The analysis and assessment of learning outcomes in teaching practice are also a part of this thesis.

Key words

mathematics, spatial perception, task, didactics

Obsah

Úvod

Svět, ve kterém žijeme je trojrozměrný. Proto každý z nás potřebuje prostorovou představivost.

Prostorová představivost nám v běžném životě pomáhá řešit problémy praktického charakteru. Tato schopnost je nezbytná pro vykonávání většiny povolání a oborů lidské činnosti. Konstruktéři a architekti by bez této představivosti nedokázali vytvořit nový návrh a stavitelé a dělníci by návrh nedokázali realizovat. Tato schopnost se však netýká pouze technických oborů. Nesmíme zapomínat ani na využití v moderních medicínských diagnostických metodách. Ani umělec, sochař, sportovec, letec nebo kosmonaut by nemohl bez prostorové představivosti vykonávat své povolání. Při zobrazování prostorových situací v deskriptivní geometrii se očekává vysoká úroveň prostorové představivosti. Využívá se také pro čtení map, plánů a technických výkresů. Grafická komunikace je důležitou součástí klíčových kompetencí člověka. Tato komunikace se stává univerzálním jazykem pro dorozumění mezi lidmi a národy.

Dnes žijeme ve světě plném počítačů, elektroniky a výpočetní techniky. S nárůstem těchto technologií vznikla obava z potlačení významu prostorové představivosti pěstované v syntetické geometrii. Je otázkou, zda je tomu opravdu tak. Musíme však připustit, že uživatel různých počítačových programů (CAD, Inventor Provessional, TurboCAD, Cabri 3D,…), ať už se jedná o technické návrhy objektů či počítačovou geometrii, musí mít velice dobře rozvinutou prostorovou představivost, aby daný problém nejprve zvládl ideově vyřešit a následně realizovat.

Vzhledem k tomu, že považujeme prostorou představivost za schopnost, musíme ji stejně jako ostatní schopnosti rozvíjet. Významným prostředkem rozvoje je školní vzdělávání a výchova. Důležité je vyučování geometrie, a to nejen v rámci matematiky, ale například i ve výtvarné výchově, pracovním vyučování, deskriptivní geometrii a dalších předmětech. K podstatnému rozvoji dochází při činnostech s prostorovým materiálem různého charakteru. Ve středoškolské matematice je touto činností výuka stereometrie.

Tato diplomová práce je rozdělena na dvě hlavní části: teoretickou a praktickou. V teoretické části jsem se zaměřila na dva hlavní úhly pohledu vědních disciplín, pomocí kterých můžeme na prostorovou představivost nahlížet. V první části nahlížíme na prostorovou představivost z hlediska psychologie, v druhé z hlediska didaktiky. Cílem teoretické části je vymezit základní pojmy související s prostorovou představivostí. Druhá část této práce je zaměřena prakticky. Cílem je vytvořit soubor úloh, které by měly vést ke zlepšení schopnosti prostorového vnímání žáků a následné aplikaci, a to nejen ve školní výuce, ale především v praktickém životě. Závěr druhé části je zaměřen na rozbor didaktického výstupu, který byl proveden v několika třídách gymnázia.

Nedílnou součástí této práce jsou obrázky. Pokud není uvedeno jinak, vypracovala jsem je samostatně v programu Geogebra. V rámci sbírky nejsou obrázky číslovány z důvodu lepší přehlednosti.

1 Teoretická část

1.1 Pohled psychologie

Každý z nás má určitou představu o pojmu prostorová představivost. Jednotlivé názory se liší, a to díky našim dosavadním zkušenostem, profesionálnímu zaměření i vztahu k dané problematice.

1.1.1 Osobnost

Pojem osobnost je používán v různých významech. Do psychologie byl tento pojem zaveden na počátku minulého století. Bylo nutné vysvětlit fakt, že na týž podnět různí lidí reagují různě. To znamená, že mezi podnět a reakci bylo nutné vložit nějaký faktor, který by vysvětlil variabilitu reakcí. Tento faktor byl později nazván osobností. Osobnost je chápána jako celek dispozic, které jsou chápány jako reakce individua na určitou situaci. Osobnost je ten individuální celek dispozic k psychickým reakcím, který způsobuje, že v téže situaci reagují různí lidé různě. Tyto reakce vykazují určitou jednotu cítění, vnímání, myšlení, představ a snah. Osobnost jako pojem tedy vyjadřuje vnitřní organizaci duševního života člověka, skutečnost, že funguje jako jednotný celek interindividuálních odlišných dispozic a vytváří smysluplné souvislosti s chováním člověka. Osobnost je chápána jako hypotetický konstrukt. Tento termín vyjadřuje již existující fenomén, který ovšem není plně pozorovatelný, ale je odvozován od toho, co je pozorováno, a má heuristickou hodnotu.

Psychologie však nedospěla k jednotnému pojetí tohoto konstruktu. Dnes existuje kolem patnácti pojetí osobnosti (např. behaviorismus, fenomenalismus, …). Behaviorismus chápe osobnost jako systém naučených tendencí chovat se v určité situaci určitým způsobem. Fenomenalismus vnímá osobnost jako vnitřní strukturu psychických vlastností, které určují její chování. Odlišný přístup vnímání osobnosti je daný rozdílem konstruktu a podstaty.

Díky těmto různým pohledům najdeme několik různých definic pojmu osobnosti. Osobnost může být chápána jako integrace individua k seberealizaci ve vztahu se svým prostředím. V jiné definici se naopak dočteme, že pojem osobnosti vyjadřuje organizovaný, dynamický a interindividuálně odlišný celek psychofyzických dispozic, determinující průběh a projevy psychických reakcí.

Psychologie osobnosti se zabývá třemi základními tématy:

- geneze a utváření osobnosti,
- struktura osobnosti,
- dynamika osobnosti.

Osobností se člověk stává v době, kdy se u něj v raném dětství utváří specificky lidská forma organizace a fungování psychiky. Geneze osobnosti je spojena se vznikem „já“ a jeho vývojem k sebepojetí, což jsou základní aspekty fungování osobnosti. Osobnost se utváří díky uplatnění interakce vrozených biologických činitelů a zkušeností. Člověk je získá v rámci určitého kulturního a sociálního prostředí, v němž žije, přičemž stále více uplatňuje vliv učení (zkušenosti).

Struktura osobnosti je její vnitřní uspořádání. Lze rozlišit psychické vlastnosti (rysy osobnosti, dispozice) a vrstvy osobnosti (dané vývojem). Za rysy osobnosti považujeme temperament, schopnosti, postoje a motivy. Temperament můžeme chápat jako dispozici ke vzrušivosti. Podle Hippokrata rozlišujeme čtyři základní typy – sangvinik, melancholik, cholerik a flegmatik. Vzhledem k tématu této práce popíši schopnosti osobnosti podrobněji v následující kapitole. Postojem rozumíme sklon k již ustáleným způsobům reagovat na předměty, osoby, situace a sebe sama. Vědomosti, dovednosti a postoje člověk získává v průběhu života. Velký vliv má především vzdělávání a sociální vlivy. Postoje lze analyzovat podle vztahu k hierarchii hodnot. Obsahují tři složky – poznávací, citovou a konativní. Dále je můžeme dělit podle různých kritérií – kladné a záporné, slovní a mimoslovní, silné a slabé, atd. Motivy dáváme do souvislosti s dynamikou osobnosti, jakožto základní funkční prvek.

1.1.2 Schopnost

Podobně jako u pojmu osobnost ani zde nenajdeme pouze jeden výklad tohoto pojmu. Před rokem 1990 je schopnost považována za psychickou vlastnost, která se projevuje tím, že se člověk dokáže naučit určitým činnostem a vykonávat je. Poté se tento názor trochu změnil. Schopnost byla vymezena jako soubor předpokladů nutných k úspěšnému vykonávání určitých činností a dovedností. Dále byly schopnosti rozčleněny na intelektuální (poznávací), psychomotorické a vjemové.

Na vznik a vývoj schopností je nahlíženo ze dvou hlavních pohledů. První názor je, že schopnosti jsou určeny geneticky a nelze je ovlivnit a rozvíjet. Druhý naopak tvrdí, že nejsou schopnosti závislé na vrozených dispozicích, ale jsou ovlivněny pouze prostředím. Nesmíme však zapomínat na „zlatou střední cestu“. Schopnosti, které jsou určeny geneticky, se do jisté míry dají ovlivnit a rozvíjet. Je však nutná jistá dávka motivace a vůle. Přirozeným základem rozvoje schopností jsou vlohy. Ty mohou mít velký vliv, ale samy o sobě nezajišťují dostatečný rozvoj schopností. Vlohy ovlivňují úroveň a stupeň úspěšnosti činnosti člověka a rychlost rozvoje schopností. Jsou základem schopnosti jako dispozice. Na jejich podkladě se vyvíjí nějaká schopnost. Schopnosti se mění a přetvářejí v průběhu celého života. Vývoj probíhá díky procesu určité praktické nebo teoretické činnosti. Schopnost tedy nemůže vzniknout samovolně (mimo činnost). Díky činnostem se schopnost vyvíjí a formuje. Nikdy však nedosáhne svého plného rozvoje. Rozvoj schopnosti k určité činnosti je určován společensko - historickými podmínkami materiálního života společnosti a souhrnem sociálních jevů.

Vývoj schopností probíhá v komplexu celé osobnosti. Vývoj je chápán jako změny osobnosti a všech psychických jevů spojený s vývojem biologickým a sociálním. Vývoj jedince se realizuje zráním a učením. Zrání je určeno biologickými činiteli, učení označuje získávání zkušeností a utváření jedince v průběhu jeho života. Výsledkem učení je osvojení vědomostí, dovedností, návyků, postojů, změna psychických procesů, stavů a vlastností.

K rozvoji schopností může docházet na základě cílevědomosti jedince. V první řadě je důležité rozpoznat, kterou schopnost je potřebné rozvíjet, a na tuto konkrétní se poté zaměřit. Všechny schopnosti se rozvíjejí jen v činnostech, pro něž jsou potřebné. Proto je důležité uvědomit si význam svého jednání, poté se schopnost rozvíjí snadněji. Jestliže dochází k uvědomění si vykonávaných činů, jedinec se snaží splnit daný úkol co nejúspěšněji. Pro rozvoj schopností je nutné neustále zvyšovat úkoly. Jednoduchými a snadnými úkoly se schopnosti nerozvíjejí. Obtížnost úkolu musí být přiměřená silám jedince. Nesmí způsobit ztrátu vlastní sebedůvěry, rozpaky a vypětí. Pro rozvoj schopností je důležitým činitelem opakování a systematičnost. Opakování je základem učení, ale i výchovy. Úspěšnost jedince při rozvíjení svých schopností je závislá na vytrvalosti a na snaze zdokonalovat se.

Literatura věnuje velkou pozornost vývoji rozumových schopností dětí. Vývoj schopností záleží do značné míry na zrání nervové soustavy. Piaget určil ústřední vývojové linie lidských schopností – od biologické aktivity až po formálně logické myšlení. Podle Piageta dítě zvládne logické operace, až k nim dospěje vývojem svého rozumu. Vývoj myšlení rozdělil do čtyř stádií:

- senzomotorické – do 2 let
- předoperacionální – 2-7 let
- konkrétních operací – 7-12 let
- formálních operací – nad 12 let.

Pro tuto práci bude stěžejní právě čtvrté období. Přetváření konkrétních operací na formální je dlouhodobý proces, který začíná 12. rokem a končí v 17-18 letech. Formální operace umožňují hypoteticky deduktivně usuzovat.

Orientace v prostoru jedenáctiletého dítěte je zaměřena především na přítomnost a většinou nemá žádné životní plány. Má však značný rozhled v prostoru i čase. Žák je velice vědychtivý, nemá problém s memorováním, fakta jsou však bez syntézy. K velkému přetváření dochází v pubescentním období (11 – 15 let). Dochází zde k rozvoji všech schopností. Zdokonaluje se schopnost reprodukce geometrického obrazce v postupných expozicích, která odráží vývoj představ. Předměty i osoby jsou znázorňovány trojrozměrným stínováním nebo jinými prostředky. Dochází k velmi prudkému a všeobecnému intelektuálnímu vývoji. Rozvoj inteligence jako schopnosti učit se a rozlišovat jednotlivé vztahy při řešení problémů pokračuje celý život. Psychické zrání jedince je ukončeno kolem patnáctého roku. Inteligence se v dalších životních obdobích rozvíjí již pouze materiálně, a to podle získaných zkušeností. V tomto pubescentním věku je žák také schopen analýzy většího počtu znaků v různých životních situacích a zvládne rozpoznat podstatné znaky, tvořící vlastní smysl předmětu nebo děje. Paměť je logičtější a operativnější. Dochází k oddálení předmětné konkrétnosti a posouvá se k abstraktnímu myšlení. Myšlení se dostává na logickou úroveň v plném smyslu – ovládání kalkulů výroků jako předpoklad dedukce. Jedinec přesně vnímá polohu, prostor a čas, umí odhadnout váhu předmětů. Vnímání je velice podobné jako u dospělého člověka. Diferencuje se typ osobnosti na umělecký (názorné představy), vyrovnaný nebo myslitelský (talent pro konstrukci, matematiku a fyziku). Ve schopnosti reprodukce různých geometrických útvarů dosáhli dobrých výsledků až třináctiletí žáci. Vývoj představ má 2 směry:

- představa se blíží schématům,
- představa zachovává ráz názornosti, konkrétnosti a individuálnosti, blíží se k úplné shodě s předmětem.

U adolescentů (16 – 18 let) dochází k dotváření a obohacení poznávacích procesů. Schopnost reprodukovat představy je ve fázi zralosti. Poznávací procesy se zdokonalují především díky praxi, učení a získáváním zkušeností. Diferencují se individuální vlastnosti jedince. Dozrávání psychických procesů se projevuje schopností úmyslného a trvalejšího soustředění vědomé činnosti. Paměť se nadále zdokonaluje. Myšlení i inteligence jsou na vysoké úrovni.

Schopnosti lze dělit na obecné, zvláštní a speciální. Obecná schopnost je také někdy nazývána jako inteligence. Inteligenci lze také chápat jako určitou rovnováhu mezi jedincem a prostředím. Rozlišujeme inteligenci jazykovou, hudební, logicko-matematickou, prostorovou, tělesně-pohybovou a osobní. Speciální schopnosti dělíme na verbální schopnost, prostorovou představivost, numerickou schopnost, percepční pohotovost a paměťovou schopnost. Za pojmem všeobecná schopnost si můžeme představit prolnutí všech ostatních schopností.

1.1.3 Představy

Je to jeden ze základních psychických procesů. Představa je názorný obraz něčeho, co aktuálně nepůsobí na naše smyslové orgány. Představy prostorových tvarů jsou získávány zrakově-hmatovou zkušeností. Představa jako nástroj poznání je závislá na poznávacích funkcích. Tyto funkce rozlišujeme na:

- vnímání – je spojeno s přítomností předmětu,
- nápodoba – uplatňuje se za přítomnosti i nepřítomnosti předmětu,
- představa – funguje pouze za nepřítomnosti předmětu.

Zobrazovací a operativní aspekty poznávacích schopností jsou komplementární. Zůstává však otázkou, zda je tomu ve všech stupních vývoje, nebo zda je představa zprvu příliš úzká a statická, aby byla schopná zobrazit přeměny (transformace).

Představa má takzvaný smyslový charakter, obsahuje i činnou představu, ke které je nutné využití motoriky. Představy můžeme třídit podle obsahu (vizuální, sluchové,…) nebo podle struktury. Dospělý člověk je schopen představy nepohyblivých předmětů, pohybů, transformací a předvídat v představách novou transformaci (skládání papíru). Všechny tyto představy se nevyvíjejí stejně. Korespondují s vývojovými stádii. Představy tedy můžeme dělit na reprodukční, anticipační, statické, pohybové a transformační.

Představy mají genetický základ a jsou nezávislé. Vyšší úroveň představ (anticipační představy) nevzniká přímo z představ nižší úrovně (reprodukční představy). Vývoj představ souvisí s vývojem rozumových schopností. V mladším školním věku dochází k vývoji reprodukční a anticipační představivosti. Děti starší 11 let zvládnou předpovídat tvar nebo délku stínu v závislosti na poloze předmětu a jeho vzdálenosti od světelného zdroje. Zformulovat všeobecný zákon dokáže žák starší 15 let.

Existuje jedna kategorie představ, která je relativně adekvátní, pokud se týká transformací. Touto kategorií jsou představy prostoru, takzvané geometrické intuice (prostorová představivost, prostorové myšlení…). Speciální situace u prostorových představ nastává mezi formou a obsahem. Obsahy představují prostorové a obrazné formy, které je znázorňují. Prostorové operace jsou obrazné transformace (obrazy prostoru). Obsahy a formy jsou tedy homogenní. Z této homogenity vyplývá, že tato představivost je jediná, ve které se představy transformací umísťují na stejné rovině jako reprodukční představy. Proto dostatečně vycvičená geometrická intuice umožňuje vidět v prostoru samotné transformace. Otázkou je, zda se vývoj geometrické intuice opírá o vývoj operací. Sklápění obrazců si dokáže představit dítě starší osm let. Klasické prostorové předměty kreslí děti podle následujícího pořadí – válec, kužel, krychle, jehlan.

1.1.4 Vnímání prostoru

Vnímání prostoru úzce souvisí s podmíněnými reflexy. „Obyčejné“ podmíněné reflexy se utváření rychleji než podmíněné reflexy na prostorové signály. Pro vytvoření nejelementárnějších vědomostí o prostoru je nutné dostatečné množství konkrétních přestav o předmětech a jevech okolního světa. Pro zrakové vnímání lze vyčlenit několik faktorů, které jsou součástí této schopnosti:

- prostorový faktor – přesné vnímání prostorových útvarů,
- prostorová orientace – schopnost nenechat se rušit prvky, ve kterých je zobrazena prostorová struktura,
- zrakové představy – schopnost (bez zrakových vjemů) představit si pohyb v trojrozměrném prostoru,
- prostorová paměť – paměť prostorových struktur,
- rychlost vnímání – nalézt danou strukturu, která musí zůstat v paměti, v jiné složité struktuře,
- vnímání tvaru – rekonstrukce slabých optických podnětů,
- klamy při vnímání – odolávání optickým klamům,
- rychlost střídání vjemů – pružnost ve střídání pojetí dvojznačných obrazců,
- odhad délek – odhad délky čáry nebo vzdálenosti dvou bodů.

V souvislosti se zrakovými faktory existují i další prostorové faktory – paměť pro prostorové umístění, hloubková prostorová orientace a vizualizace. Vizualizace je spojena s manipulací a reprodukčními představami. To znamená manipulovat s předměty v představě tak, aby se dostaly do jiné polohy v prostoru.

Jednotlivé faktory týkající se vnímání prostoru jsou na sobě závislé a lze je hierarchicky uspořádat od všeobecných až po speciální schopnosti.

1.1.5 Matematické schopnosti

Prostorovou představivost lze chápat jako součást obecnější matematické představivosti, která je zařazena mezi matematické schopnosti. Velký význam pro matematické schopnosti má schopnost logicky myslet v oblasti kvantitativních a prostorových vztahů. Matematické myšlení ovlivňuje i prostorová představivost. Většina matematicky nadaných žáků disponuje výjimečnou schopností orientovat se v prostoru.

Mezi matematické schopnosti můžeme zařadit následující faktory: prostorový, numerický, verbální, usuzovací a g-faktor. Pro tuto práci je nejdůležitější schopnost vnímat prostorové vztahy, prostorová orientace, schopnost postihnout vizuální vlastnosti představovaných nebo konkrétních objektů. Prostorový faktor je důležitý pro řešení geometrických úloh.

V této souvislosti můžeme rozlišovat dva typy matematicky nadaných žáků:

- žáci analyticky myslící - pracují pomalu, logicky usuzují, většinou jsou to introverti, úspěšnější v algebře a matematické analýze,
- žáci synteticky myslící - pracují rychle, intuitivní metodou, slabá slovní představivost, jsou lepší v geometrii a trigonometrii, dávají přednost geometrickým úlohám a formulacím.

Lze předpokládat, že i při algebraických výpočtech závisí správnost výpočtu v určité míře na ovládání prostoru. Podobně je tomu i u zápisu víceciferného čísla v příslušném tvaru. Geometrický třídimenzionální prostor není naším reálným biologickým prostorem. Je použitelný pro schémata a je součástí jiného sémantického systému.

Z hlediska prostorové představivosti je v dnešní době prozkoumán nejvíce předškolní a mladší školní věk. V následujících vývojových stupních je velice důležitá motivace. Problémem je jednostranné a šablonovité vedení žáků, kdy dochází k deformaci myšlenkového postoje žáka.

K poruchám matematických schopností může dojít při poškození symbolických mozkových funkcí. Při poškození například temenního laloku dochází k narušení orientace v prostoru. Mezi poruchy lze zařadit i dyskalkulii prostorového typu (dysspacii), kdy je narušena jakákoli činnost s prostorově rozloženým materiálem. Naopak lze zjistit i specifické matematické nadání, které se spojuje s g-faktorem, což je takzvaný obecný faktor, který určuje obecnou inteligenci (schopnost řešit problémy a komplikované úlohy).

1.1.6 Prostorová představivost

Prostorovou představivost lze chápat jako schopnost operovat s prostorovými představami, je to rozumová činnost s představami. Úspěšnost představivosti je pak závislá na zobecnělosti, strukturovanosti a diferencovanosti představ. Tuto představivost lze chápat také jako prostorovou inteligenci. Ta zajišťuje přesné vnímání vizuálního světa. Prostorovou představivost lze teoreticky rozdělit na tři důležité složky:

- prostorová orientace – určování polohy člověka v jeho okolí,
- vizualizace – představa vzájemných vztahů předmětů mimo nás,
- kinestetická představivost – určování výsledného pohybu.

Geometrická představivost se věnuje především představivosti s geometrickým obsahem. Tato schopnost má tři základní složky:

- schopnost rozeznávat rovinné útvary,
- představa o vztazích mezi útvary v rovině,
- schopnost rozeznávat základní tělesa v prostoru,
- představa o vzájemné poloze těles a rovin v prostoru.

Geometrické představy se rozvíjejí v ontogenetickém vývoji v pěti úrovních - vizuální, analytická, abstraktní, deduktivní a axiomatická. Člověk vnímá prostor, v němž žijeme, právě prostřednictvím svých geometrických představ.

Ve stereometrii je chápána prostorová představivost jako geometrická prostorová představivost. V práci budu nadále využívat označení prostorová představivost. Je to soubor schopností týkajících se reprodukčních i anticipačních statických i dynamických představ o tvarech, vlastnostech a vzájemných vztazích mezi geometrickými útvary v prostoru.

Prostorem můžeme rozumět náš reálný prostor, ve kterém žijeme a uvědomujeme si ho. Takto chápeme i třírozměrný geometrický model. Podobně chápeme i geometrické útvary. Názvy těles jsou pouhým zobecněním, abstrakcí a idealizací tvarů skutečných těles. Geometrickým tělesem můžeme chápat i tužkou narýsovanou čáru na rysu, znázorňující například přímku. Představy jsou skutečným nebo symbolickým odrazem reálných předmětů. Vzájemnými vztahy můžeme rozumět transformace a operace s geometrickými útvary. Do této skupiny můžeme zařadit například vzájemnou polohu útvarů a geometrická zobrazení.

Prostorová představivost je soubor schopností, určitých vlastností osobnosti, které jsou ovlivňovány vlastnostmi psychických procesů (představy, vnímání, myšlení, motivace, tělesný stav,…). Tuto schopnost lze analyzovat dle následujících faktorů:

- pasivní prostorová orientace – žák umí určit polohu geometrického útvaru v rovinném výkresu, virtuálně nebo v prostorovém modelu,
- vizuální paměť – žák umí použít obrazy uložené v paměti a spojovat je do nových celků,
- vizuální identifikace – žák umí vyhodnotit kvality předkládané situace,

- aktivní prostorová orientace – žák dokáže na základě vizuálního podnětu vytvořit a zpracovat představu pohybu a transformace,
- mentální manipulace – žák je schopen percepčně předvídat a určit novou představu objektu po jeho transformaci (otočení, posunutí,…),
- manuální manipulace – žák znázorňuje představu trojrozměrné situace do rovinné situace (2D), vytváří reálný model trojrozměrné situace,
- technická tvořivost v prostorové představivosti – žák aplikuje prostorovou představivost v podmíněné tvorbě (projektování, konstruování).

Ve stereometrii umožňuje prostorová představivost řešit úlohy týkající se vzájemné polohy geometrických útvarů, znázorňování těles, průměty těles, konstrukční úlohy atd.

Za dílčí učební cíle rozvíjení prostorové představivosti lze považovat:

- základní geometrické útvary – vytvoření přesných představ,
- odhad nebo stanovení vzájemné polohy geometrických útvarů,
- modelace obrázku znázorňující prostorovou situaci,
- odhad velikosti geometrických útvarů,
- popsání situace geometrickou symbolikou a terminologií,
- představy složených geometrických útvarů,
- umění rozhodnout o prostorovém uspořádání geometrických útvarů,
- konstrukční dovednosti.

Prostorová představivost se rozvíjí na základě geneticky podmíněných a vrozených vloh. Vývoj se realizuje učením a zráním jedince, které je ovlivňováno prostředím, výchovou a činností samotného jedince. Rozvíjení představivosti je možné již od předškolního věku až po dospělost.

Základem orientace v prostoru geometrických těles je schopnost vnímání okolního světa člověka. Proto je také oblast našeho zájmu úzce spjata s kognitivní psychologií. Matematika je však primární vědou, která se zabývá rozvojem prostorové představivosti u žáků.

1.2 Pohled obecné didaktiky

1.2.1 Bolzanovy - Popperovy světy

Mateřský jazyk si dítě začíná osvojovat již od prvních týdnů svého života. Tento proces je spontánní. Velký vliv na rozvoj má blízké okolí dítěte, společnost i samotná aktivita dítěte. K porozumění mateřského jazyka a následné mluvě dojde každé zdravé dítě.

Vývoj jazyka dítěte v předškolním věku je úzce spjat s jeho zájmy a s úzkým kontaktem se složitou realitou. Od začátku se setkáváme s užitečností jazyka, proto nám nevadí jeho složitost a mnohdy i nesrozumitelnost. Naopak ve škole často postrádáme samotnou užitečnost. Škola často vnucuje hotové formy, a to nejen ve výchově jazykové, ale i v matematické. To vede ke školnímu konformismu. Nejsou brány v úvahu spontánní poznávací a komunikační procesy a přirozená motivace dětí. Měli bychom respektovat individuální duševní postupy žáků, které mohou být nestandardní a zvláštní.

Jazyku se učíme díky komunikaci. Právě komunikace je klíčovým zdrojem poznávání. Vyjadřovací forma nemusí být vždy slovní, u dětí je často i výtvarná.

Znalost a zvládnutí jazyka je důležité nejen pro společenskou komunikaci, ale i pro dobré porozumění všech předmětů. Proto mnohé potíže žáků s řešením úloh pramenní z nízké úrovně porozumění samotného jazyka. Bohužel snižování této jazykové úrovně je znatelná i u absolventů středních škol.

Teorie tří světů pochází od českého matematika, logika a filozofa Bernarda Bolzana (1781-1848) a rakouského filozofa Karla Raimunda Poppera (1902-1994).

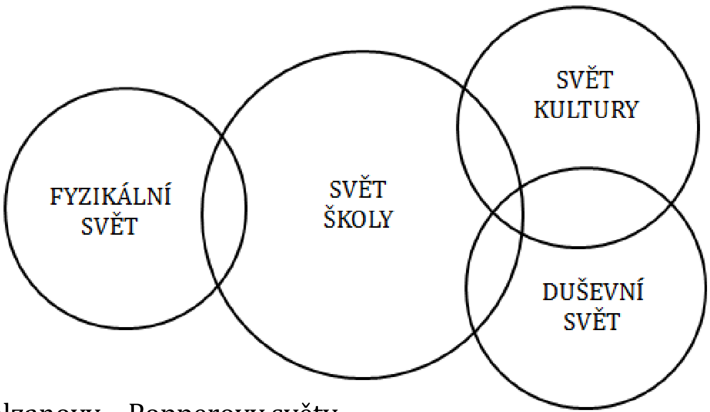
Je nutné rozlišovat prostředí, které člověka obklopuje, od subjektivního odrazu prostředí v mysli dítěte a naopak objektivního odrazu, který přináší věda. Bolzanovy – Popperovy světy můžeme chápat následovně:

- Svět 1 – tento svět je vytvořený přírodou a technikou, popisovaný a zkoumaný biologií, chemií a fyzikou. Je to svět „věcí“ (aut, osob, zvířat, knih, zanků,…) (= *fyzikální svět*);
- Svět 2 – je tvořen žitím člověka, popisovaný a zkoumaný psychologií. Je to svět vědomých i nevědomých zkušeností, představ člověka, lidského

vědomí, myšlenkových pochodů, prožitků, nadějí, pochybností a otázek (= *duševní svět*);

- Svět 3 – tento svět je tvořen objektivními myšlenkovými obsahy a vnějšími informacemi. Je to svět výtvorů lidského ducha, lidské řeči, vědy a kultury (= *svět kultury*).

Tyto tři světy jsou na sobě závislé a přirozeně spolu souvisejí. První svět existuje nezávisle na nás a našem vědomí, je však systematicky ovlivňován třetím světem prostřednictvím druhého světa. Nesmíme zapomenout na vzdělávací proces, který převážně probíhá ve světě školy. Charakteristika této instituce je o něco náročnější. Nikdy bychom však neměli zapomínat na určitou dávku lidskosti, která by zde měla fungovat. Probíhá tu i proces vzájemného ovlivňování žáků a učitelů. Hlavním cílem je pěstování přirozených schopností (*zvídavost, elán, chuť experimentovat,…*). Životní energie dítěte by se měla na jednu stranu podporovat a na druhou stranu usměrňovat, aby dosáhlo cenných cílů. Proto je důležité, aby škola byla tvořivá a dítě se aktivně rozvíjelo. Je nutné vyvarovat se veškerému formalismu a konformismu. Samotný vzdělávací proces by měl být především poznávacím procesem.



Obrázek 1: Bolzanovy – Popperovy světy
Hejný,Kuřina (2009,s.88)

1.2.2 Proces abstrakce

V matematice je tento proces velice zásadní. Díky němu jsme schopni oddělit od vnímaného jevu to, co považujeme za nepodstatné (*podružné*), a zdůrazňujeme to, co považujeme za podstatné (*zásadní, charakteristické*).

Dítě získává první představy o matematických pojmech díky kontaktu s realitou již v předškolním věku. V tomto období získává první poznatky o přirozených číslech a některých geometrických pojmech. Pro vznik nového pojmu je důležitý okamžik přeměny kvantity zkušeností člověka v novou kvalitu. Tento okamžik také nazýváme abstrakční zdvih. Ten označuje konec etapy prvotních zkušeností člověka s poznávaným pojmem. Posloupnost rozhodnutí, z nichž každé předcházející má vliv na následující, vede ke vzniku pojmů.

Snaha člověka o vytvoření příslušeného pojmu závisí na dostatečné motivaci. Jde o zvýšení citlivosti psychiky na určité podněty a následné zvýšení zájmu na danou oblast. Jazyk je důležitou složkou, která navádí člověka na možnost utváření nových pojmů.

Samotný proces poznání začíná náhodným zvolením prvku (*ohnisko*), následuje abstrakční zdvih, lze ho reprezentovat objektem, který obsahuje podstatné rysy zaváděného pojmu (*vzor, ideál*). Následuje zařazení nově vzniklého pojmu do struktury dosavadního poznání (*strukturalizace pojmu*).

Pro zavádění prvních geometrických pojmů je důležité geometrické vyjádření čísel. Žák na základě řešení úloh, rýsování a stříhání modelů mnohoúhelníků z papíru získá představu univerzálního modelu tohoto pojmu.

1.2.3 Poznávací proces

Zde narážíme na problematiku takzvané tradiční školy, kde často dochází k formalismu. Žák se učí matematiku bez hlubšího porozumění jako systém informací a návodů. Vzdělání má poté verbální a formální charakter, žák se učí matematiku téměř nazpaměť.

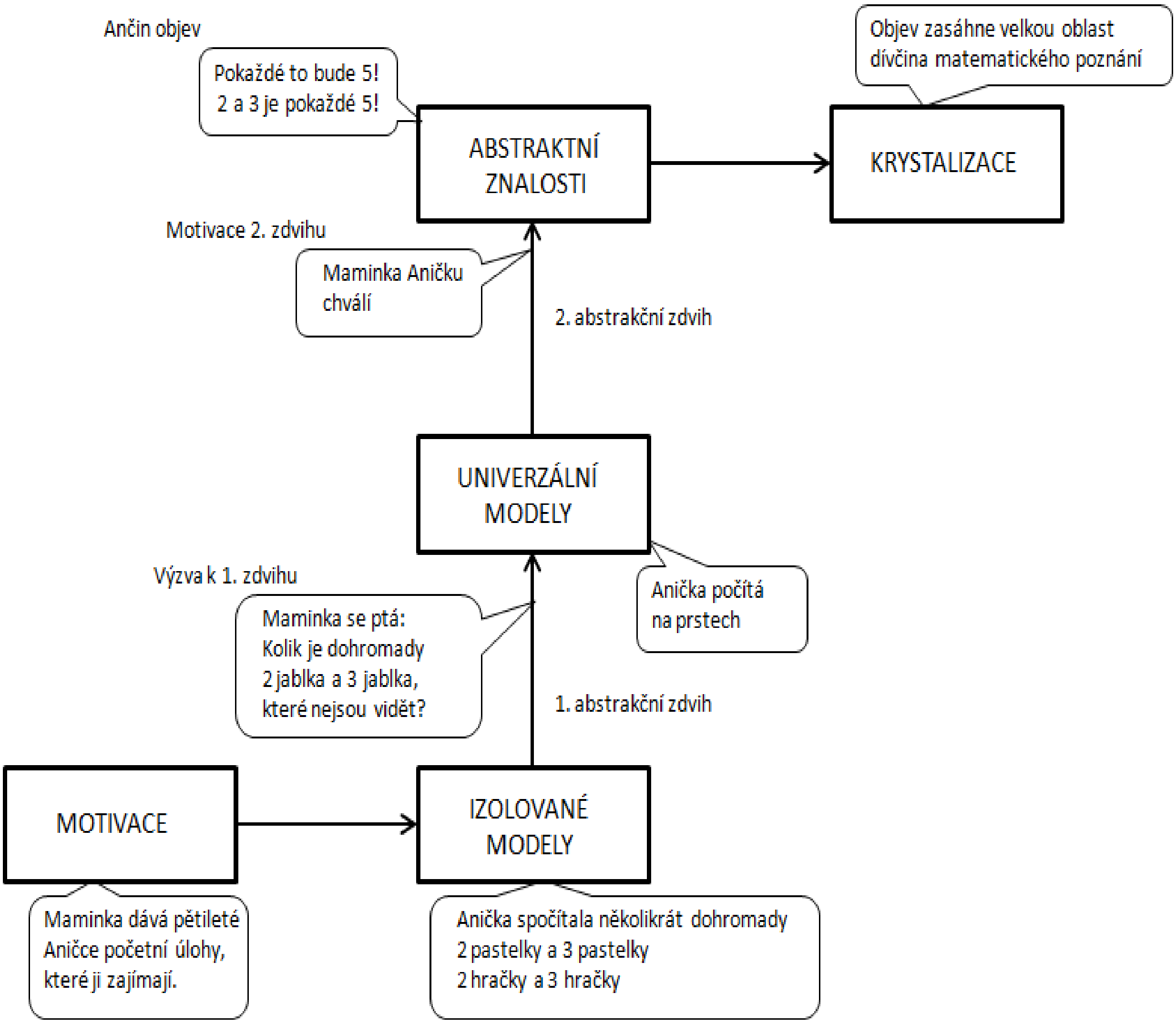
K lepšímu pochopení poznávacího procesu využijeme Bolzanovu-Popperovu myšlenku tří světů. Učitel vysílá informace a žák je přijímá. Žák, který nedává pozor, informaci nepřijímá, nebo přijme pouze část informace. Žáci, kteří informaci přijmou, ji také zpracují a vytvoří si jistou představu. Tento proces zpracování informace na představu nazveme uchopováním. Proces, který z myšlenky utváří informaci, nazýváme artikulace. Při zkoušení žáka dochází k typicky školní artikulaci poznatků a představ. Často nám ulehčují práci automatizované spoje, nad kterými nijak dlouho nepřemýšlíme. Tyto spoje uvolňují intelektuální energii na náročnější mentální operace. Bohužel však nevypovídají nic o kvalitě artikulované znalosti. Problematika formálnosti artikulovaného poznatku se často projeví selháním žáka nebo v jeho špatném uchopení signálu.

Po zařazení nové představy dochází k přijmutí nové informace. Ve výjimečných případech může dojít i k chybnému zařazení. Mluvíme-li o takzvaném uložení informace, máme tím na mysli přijetí a její následné zařazení k příbuzným již získaným informacím. Jestliže dojde navíc k propojení informace s již existující vědomou představou, pak mluvíme o uchopení informace. Je velmi složité nalézt hranici mezi uložením a uchopením. U člověka nedochází pouze k přijímání informací, ale také k jejich vysílání. Mezi takové projevy můžeme zařadit například písmo, tabulku, grafy, ale i různé zvuky a gesta.

Artikulovaná informace je výsledkem přeměny představy nebo pojmu, který se nachází v učitelově nebo žákově vědomí. Zkoušení žáka je typickým příkladem školní artikulace poznatků. Často se jedná o řešení úlohy v písemném testu nebo odpověď při ústním zkoušení. Interakce mezi žákem a učitelem je většinou zahájena učitelovou výzvou. Následně žák o dané věci přemýšlí, aktualizuje své znalosti, vytváří si určitou představu a následně se ji snaží artikulovat. V tomto případě dochází ke dvěma různým činnostem. První je ryze matematická, kdy žák řeší danou úlohu. Druhá je komunikační, kdy probíhá artikulace žákových myšlenek. Ve výsledku často tyto dvě roviny nejsou zcela rozdělovány. Učitel spíše hodnotí stránku artikulační. Matematická stránka je často opomíjena. Ne vždy žák své myšlenky dostatečně promýšlí. Spousta odpovědí je spojena s asociací. Daný poznatek je dlouhodobě uložen v paměti a je tedy okamžitě přístupný. Dobrým příkladem je násobilka. Odpověď je tedy velmi rychlá a nepotřebuje téměř žádnou intelektuální energii žáka. Tyto automatizované spoje nám ulehčují práci. Díky tomu můžeme svoji intelektuální energii využít pro řešení náročnějších operací. Nemůžeme však tvrdit, že tyto spoje dostatečně vypovídají o kvalitě artikulované znalosti. Ta může silně podléhat formalismu. Z rychlé a sebejisté odpovědi žáka nelze automaticky vyvodit pochopení dané problematiky ze žákovy strany. Často jsou tyto informace pouze naučené a chybí příslušná představa. Problém formálnosti artikulovaného poznatku se většinou projeví v důsledku selhání žákovy paměti nebo ve špatném uchopení signálu. Informace, která vychází pouze z paměti, a ne z představy, nazveme reprodukcí toho, co žák viděl, slyšel, četl a bez hlubšího pochopení uložil do paměti, nebo nápodobou toho, co žák odpozoroval při výuce od učitele nebo při činnosti jiné osoby.

Proces učení chápeme jako konstruování poznatkových struktur. Matematika je struktura popsaná systémem axiomů, definic a vět provázaných důkazy. Školní matematika by měla být spjata s duševními výkony žáků. Mělo by docházet k rozvoji řešení problémů a pěstování dovedností. Abstrakce, o níž jsem se již zmiňovala, je součástí tohoto postupu. Matematika je zvláště vhodná na kultivaci této důležité mentální funkce. K rozvoji schopnosti abstrakce vypomáhají různé úlohy, problémy a hádanky, které matematika dětem nabízí.

Poznávací proces založený na konstruktivním principu vychází z toho, že člověk nejdříve porozumí několika konkrétním příkladům, všímá si, co mají společného, a dochází tak k obecnějším a abstraktnějším poznatkům. Proces si přiblížíme na základě následujícího schématu.



Obrázek 2: Schéma poznávacího procesu
Hejný, Kuřina (2009,str.128)

Dva mentální zdvihy jsou základem poznávacího procesu. První zdvih vede od izolovaných modelů k univerzálním a druhý od univerzálních modelů k abstraktním znalostem. Samotným začátkem každého poznávacího procesu je motivace. Během procesu dochází k takzvané krystalizaci, což můžeme chápat jako výsledek zařazování nových poznatků do struktury. Ve schématu není zařazena etapa automatizace. Ta následuje po krystalizaci, ale již zde nedochází k novému poznání, nýbrž k pouhému nácviku poznaného. Nyní podrobněji charakterizuji jednotlivé etapy poznávacího procesu.

Klíčovou roli hraje motivace. Je předpokladem zahájení procesu učení. Žák, který nebude mít o učení zájem, nebude správně motivován, si nevybuduje žádnou poznatkovou strukturu ani si ji budovat nezačne, protože nebude dostatečně aktivní. Motivace může mít různé formy. Jedním způsobem je vhodně vedená diskuze o zajímavé problematice nebo podnětná hra. Dítě získá potřebnou motivaci snáz, jestliže se daná problematika týká věcí, které ho obklopují. Motivovat dítě k poznávání světa je velice složité, protože dětská motivace je velice nevyhraněná, těkavá a má silnou potřebu nápodoby. Jestliže se nám okamžitě nepodaří dítě upoutat, svou pozornost obrátí ihned jinam a původní potřeba poznání zůstane nenaplněna. Hlavním motivem stále zůstává snaha získat dobrou známku, zalíbit se učiteli nebo udělat radost rodičům. Proto jsou spíše výjimkou žáci, kteří jsou k učení se matematice motivováni potřebou poznávat.

Obecně chápeme model jako metodologický prostředek, který slouží k tomu, abychom se vyznali v situaci. Vytváříme si oddělené pohledy na daný problém, ty následně vedou k vytvoření izolovaných modelů. Izolované modely jsou reprezentanty obecného pojmu (například pro číslo 4 jsou to 4 auta, 4 trička,…). Rozvoj lidského poznání se opírá o soubory izolovaných modelů budoucího pojmu nebo poznatku. Můžeme u něho studovat čtyři stádia:

- konkrétní první zkušenosti s modelem, zárodkem příštího poznatku, pojmu,
- seznámení s dalšími izolovanými poznatky, pojmy,
- nalezení vzájemných souvislostí mezi některými modely, vytváření skupin na základě teoretických souvislostí,

- vytvoření komunit izolovaných modelů, uvědomělé poznání jejich podstaty.

Bez vzájemné vazby izolovaných modelů příštího poznatku nelze konstruovat univerzální model. Člověk, který si tuto vazbu dokáže vytvořit, ji pak může využít k vytvoření paralelního modelu v jiné situaci. Představa nebo znalost, která není opřena o žádný izolovaný model, je často silně formální. Tomuto problému lze zabránit dobudováním chybějících představ. Bohužel se často stává, že učitel postupuje opačně – vytváření představ brání.

Izolované modely představují etapu hledání. Naopak univerzální modely jsou etapou nalézání výsledků, podstaty a vzájemných souvislostí izolovaných modelů. Izolovaný model představuje ukázku. Pod univerzálním modelem si můžeme představit obecný návod, vzorec, graf, algoritmus,… . Tento model je popis situace ve vhodném jazyku a umožňuje předpovídání. Pro rozlišení těchto dvou typů je vhodný názorný příklad:

Kvadratická rovnice

- při řešení této rovnice využijeme izolované modely matematického a myšlenkového charakteru,
- zkušenosti při tvorbě izolovaného modelu mohou vést ke konstrukci univerzálního modelu,
- univerzálním modelem je například obecná kvadratická rovnice, vzorec pro výpočet kořenů nebo vzorec pro výpočet diskriminantu.

Našimi prvními univerzálními modely jsou prsty, které slouží k prvním početním poznatkům. Vznik univerzálního modelu spojený s radostí provází mentální zdvih. Univerzální a izolované modely se týkají mentálních transformací. Do povědomí žáků přicházejí modely některých nových poznatků postupně a některé i dlouhodobě (např. limity, derivace, zlomky,…). Mezi těmito dvěma typy modelů existuje ještě takzvaný *vzor* (hraniční typ modelu). Lze jej využívat k řešení úloh nebo k předpokladům, ale nemůžeme ho využít jako plnohodnotný univerzální model. Vzor nebyl konstruován abstrakčním zdvihem z izolovaných modelů. Dobrým příkladem tohoto modelu jsou slova *město, moře, kuře, stavení*, pomocí nichž žák zvládne správnou gramatickou konstrukci, aniž by hluboce porozuměl struktuře jazyka.

Vzor, který se dostane do žákova vědění pouhým sdělením, není univerzálním modelem. Je pouhým reprezentantem univerzálních modelů a je použitelný na modelování standardních situací. Dobrým příkladem je počítání na prstech. Z počátku dítě dokáže spočítat například pastelky, ale úlohu ne. Je to dáno tím, že najednou číslo představuje nejen počet, ale i pořadí. V průběhu řešení úlohy žák pochopí, že prsty může využívat k modelování všech početních operací. Nyní jsem popsala příklad změny vzoru na univerzální model. Tento proces se nazývá oživení vzoru. Za oživení můžeme považovat „mentální zdvih“, díky kterému se dostaneme na vyšší úroveň porozumění.

V nejvyšším patře schématu poznávacího procesu jsou znázorněny abstraktní znalosti. Tyto znalosti jsou obsahem matematických učebnic a monografií. Matematiku můžeme chápat jako strukturu definovanou axiomy, definicemi, důkazy a větami. Není to však jediný správný pohled na tento obor. Na matematiku nemusíme nahlížet jako na již utvořenou strukturu, ale můžeme strukturu hledat. To je základním rysem matematiky. Jde především o cestu postupného konstruování matematického světa. Například sčítání nelze zavést, aniž bychom nejprve zavedli univerzální model přirozených čísel. Často se setkáváme s pouhým formálním zavedením pojmu bez představ a souvislostí. Pro žáka střední školy je například Moivreova věta abstraktním poznatkem. Abstraktní znalost (výsledek poznávacího procesu) se může později stát izolovaným nebo univerzálním modelem jiného poznávacího procesu. Postavení daného poznatku, to znamená, zda je univerzálním, izolovaným modelem, nebo abstraktním poznatkem, závisí na jeho roli v poznávacím procesu. Každý poznávací proces musí obsahovat etapu izolovaných modelů a alespoň jeden abstrakční zdvih.

Poslední fází poznávacího procesu je krystalizace. V této fázi se propojí již existující poznatky a dochází zde k hledání nové rovnováhy v celé struktuře poznatků. Každý mentální krok, který vytváří nový abstraktní krok, vstupuje automaticky do krystalizace.

Matematickou podstatou jsou objevy a samotný pokrok. Za skutečný pokrok je považován proces spojení již známého s nově objeveným. Vyučování by mělo podporovat objevy žáků. Je samozřejmé, že se nejedná o objevy nových matematických myšlenek, ale jde především o pochopení dané problematiky, učiva. Aby člověk pochopil podstatu matematického učení, je důležité zažít „aha“ okamžik. Správný učitel by tento okamžik měl prožít. Poté dokáže u žáků navodit okamžik matematického zasvěcování a dokáže ho poznat. V opačném případě se může stát, že učitel nedokáže situaci rozpoznat, v krajním případě ji může i potlačit. Ve schématu poznávacího procesu najedeme 2 abstrakční zdvihy. To jsou reprezentanti našich objevů. První zdvih („zobecnění“) je považován za zrod univerzálního modelu a vede k nárůstu izolovaných modelů. Druhý zdvih („abstrakce“) je přechod z abstraktně nižší úrovně modelů na vyšší. Pořadí jednotlivých zdvihů není pevně dáno.

1.2.4 Problematika formalismu

Rozlišujeme dva základní přístupy k učení:

- povrchový – mechanické „biflování“, pamětní učení, poznatky jsou formální, bez pochopení, žáci učivo brzy zapomínají,
- hloubkový – porozumění učivu, žáci chápou obsah i strukturu učiva.

Na první pohled to vypadá, že při hloubkovém učení není vyžadována paměť. Z praxe ovšem víme, že jsou oblasti, kdy je paměť vyžadována, například pamětní znalost písemných algoritmů základních početních operací, znalost definic aritmetických a geometrických pojmů a algoritmů a několika vět a vzorců. Paměť je důležitá při orientaci v nejrůznějších situacích, v porozumění souvislostem a v řešení úloh. Utváření představ (přírodní, společenské, matematické struktury) jsou podstatnou složkou formování paměti. Tento proces má tedy konstruktivní charakter – konstrukce metafor, vzorců, formulí, analogií, modelů, názorových obrázků, schémat. Paměť nemůžeme chápat jako biflování nebo učení bez porozumění. Paměť by se měla opírat o zkušenosti, o vytváření představ a schémat. Škola by měla vést žáky k zapamatování podstatného a k zapamatování souvislostí.

Měli bychom rozlišovat formální a neformální znalost. Formální znalost je uchována pouze v paměti. Naopak neformální znalost je abstraktní a je opřena o izolované a univerzální modely. Většinou však znalosti nebývají až tak vyhrocené a skutečnost je někde mezi těmito dvěma póly.

V současném vyučování matematice je „nemoc“ formalismu nejvážnějším didaktickým problémem. Bohužel se často stává, že místo toho, aby se učitel snažil a podpořil porozumění žáka, raději rovnou ukáže, jak se to má správně počítat. Jestliže i přes snahu učitele a žákovu píli nevede úsilí k úspěchu, pak se příčina najde ve špatné genetické výbavě žáka. Formalismus deformuje i osobnostní sféru žáka, především jeho sebepoznání, sebehodnocení, metakognici *(poznání vlastního poznávání)* a následně i životní strategii. Dochází ke snižování žákova intelektuálního sebevědomí. Žák není schopen analyzovat problémové situace, argumentovat, třídit jevy, hierarchizovat poznatky atd. Nejtěžší forma formalismu nastane u žáka, který již nabyl přesvědčení, že on nikdy matematice rozumět nemůže a memorování vnímá jako jediný možný způsob učení se matematice. V tomto stádiu je již velice těžké žákovi pomoci. Jen zřídka se stává, že žák sám požádá učitele o pomoc. Většinou to jsou žáci, kteří nemají strach ze svých nedostatků, věří, že dokáží daným věcem porozumět, a věří, že jim učitel dokáže pomoci. Takových žáků je bohužel minimum. Většina se přiklání k formě memorování a nesnaží se dané učivo a problematiku pochopit. Do tohoto chování žáka, memorování versus pochopení, se promítá i výchova. Autoritativní vedení v rodině často vede k tomu, že jsou děti zvyklé poslouchat určitou autoritu, a to se promítá i do chování k učiteli jako autoritě – žák dává přednost memorování, nemívá potřebu věci analyzovat a rozumět jim. Důležité je i samotné klima ve třídě, atmosféra a pohled učitele na chybu. Učitel může nemoc formalismu odhalit díky svým znalostem, zkušenostem a správným diagnostickým metodám.

V geometrii se formalismus nejčastěji projevuje na objektech. Žáci mají o objektech (čtverec, trojúhelník, jehlan,…) pouze neúplnou a deformovanou představu. Jsou jim často také představovány pouze nedeformované (pěkné) modely těles a útvarů. Na středních školách a druhém stupni základních škol jsou formalismem zasaženy poznatky o geometrických transformacích.

Prevence před formalismem spočívá v dostatečné pozornosti věnované etapám modelů. Žáci by měli být dostatečně seznámeni s izolovanými modely, tento proces probíhá řešením úloh.

Nyní bychom si měli položit otázku, jak lze rozvíjet prostorovou orientaci. Na našich školách se této problematice věnuje velmi málo času. Hlavním pilířem prostorové orientace je samotná schopnost vnímání prostorových zákonitostí u geometrických těles ve spojitosti s myšlením a s prostorovou představivostí. Proto bych se v další části diplomové práce ráda zaměřila na úlohy, které by měly vést k lepšímu rozvoji prostorových představ a zároveň podpořit myšlení žáků.

1.2.5 Propojení didaktiky s praktickou částí

Největší problematikou je takzvaná tradiční škola, kde výuka směřuje výlučně k formalismu. Žák vnímá látku bez hlubšího porozumění. Sbírka úloh, sestavená v praktické části této diplomové práce, se snaží spíše žáky motivovat a dovést je ke správnému výsledku. Úlohy by měli napomoci rozvoji prostorové představivosti.

Dítě získává první základní geometrické pojmy již v předškolním věku. Nové pojmy vždy získáváme pomocí přeměny kvantity v novou kvalitu. Tomuto procesu říkáme abstrakční zdvih. Tento proces je pro matematiku typický. Žák musí vyřešit dané množství úloh, aby získal novou kvalitu. Můžeme říci, že si daný proces žák zautomatizuje. To je cílem i mé sbírky úloh. Příklady jsem tedy sestavovala od nejlehčích po nejtěžší. Po vypracování jedné kapitoly by si žák měl tento proces osvojit. Nově vzniklou schopnost by poté měl zařadit do struktury svých dosavadních schopností a dovedností. Sbírka příkladů by tedy měla vést ke zlepšení prostorové představivosti žáků.

2 Praktická část

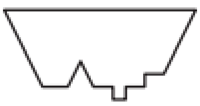
Prostorovou představivost chápeme jako schopnost vnímat trojrozměrný svět. Každý člověk se narodí s určitými inteligenčními dispozicemi, avšak každou z nich můžeme určitým tréninkem zlepšit. Kvalitnějších výsledků v prostorové představivosti můžeme dosáhnout pomocí zrakově - hmatových zkušeností. V praktické části diplomové práce se tedy zaměříme na příklady vedoucí ke zlepšení této schopnosti. Nedílnou součástí je analýza a hodnocení praktické realizace.

2.1 Sbírka příkladů

2.1.1 Skládání obrazců

Předpoklady: Znalost základních geometrických útvarů

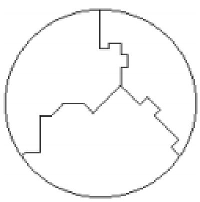
Příklad 1. : Který z daných útvarů doplní útvar ze zadání tak, aby vznikl trojúhelník?[1]



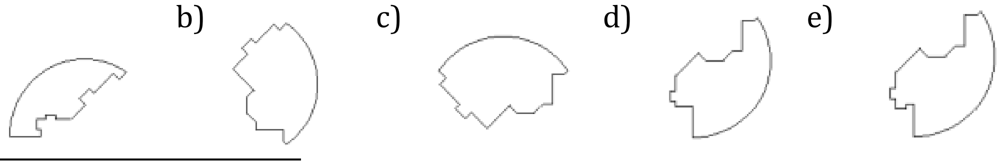
a) b) c) d) e)

Poznámka: Pro žáky s horší představivostí můžeme použít vystřižený papírový model.

Příklad 2. : Kruh je rozdělen na tři díly. Který z následujících dílů není součástí kruhu:[2]

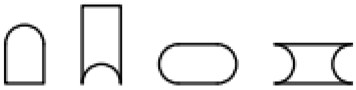


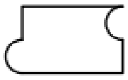
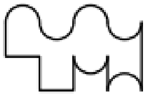
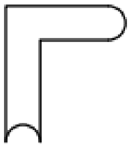
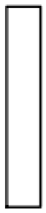
a) b) c) d) e)



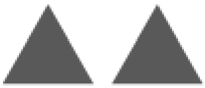
[1] Příklad 1. – vlastní tvorba, inspirace: Matematický klokan. *Matematický klokan* [online].[cit. 02.05.2019]. Dostupné z: http://matematickyklokan.net (Sborník 2019)

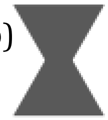
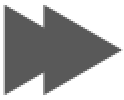
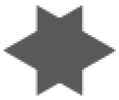
[2] Příklad 2. – převzato: *Document Moved* [online]. Copyright © [cit. 02.05.2019]. Dostupné z: https://www.unob.cz/fvl/studium/Documents/test-3.blok.pdf

Příklad 3. : Sestavením čtyř dílků lze sestavit různé tvary. Který z následujících obrazců nelze sestavit?[3] 

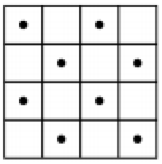
a)  b)  c)  d)  e) 

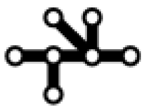
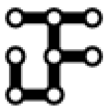
Příklad 4. : Máme vystřižené dva obrazce. Který z následujících obrazců nelze složit překládáním obou obrazců přes sebe nebo pokládáním vedle sebe?[4]



a)  b)  c)  d)  e) 

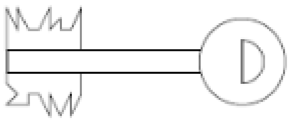
Příklad 5. : Který z útvarů může po přemístění do tabulky zakrýt co nejvíce bodů?[5]



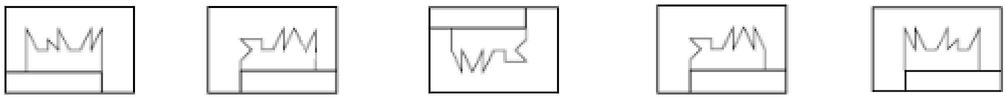
a)  b)  c)  d)  e) 

[3] Příklad 3. – převzato: TLUSTÝ, Pavel. *Každý den s matematikou: logické úlohy, zajímavé hříčky, grafické hádanky*. Plzeň: Fraus, [2018]. ISBN 978-80-7489-404-6.
[4] Příklad 4. – vlastní tvorba
[5] Příklad 5. – převzato: Matematický klokan. *Matematický klokan* [online]. [cit. 02.05.2019]. Dostupné z: http://matematickyklokan.net (Sborník 2013)

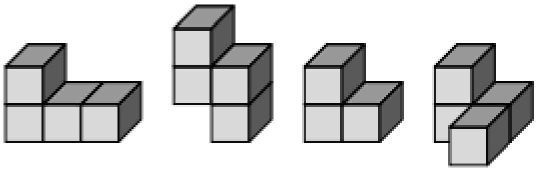
Příklad 6. : Na obrázku je oboustranný klíč. Který ze znázorněných otisků nepatří tomuto klíči?[6]



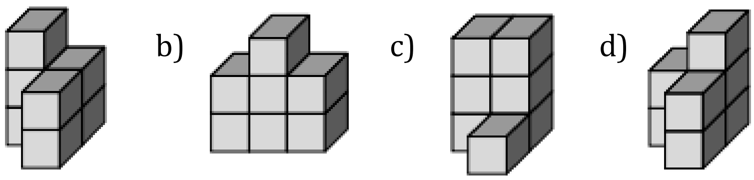
a) b) c) d) e)



Příklad 7. : Kterou z následujících staveb nelze sestavit z těchto čtyř dílů stavebnice?[7]

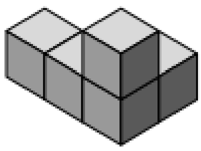


a) b) c) d) e) lze postavit vše

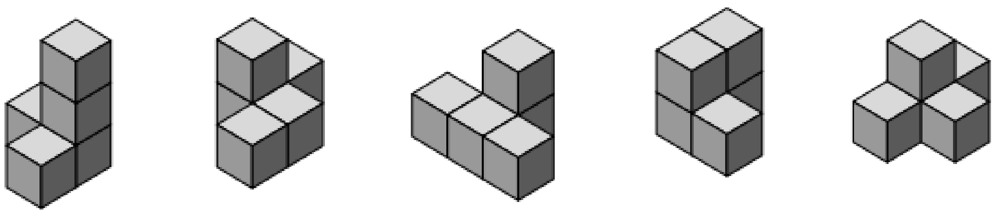


Poznámka: Pro lepší představivost můžeme využít například dětskou stavebnici.

Příklad 8. : Máme stavbu z pěti kostek. Kterou z následujících staveb nemůžeme získat po přesunutí jedné kostky?[8]

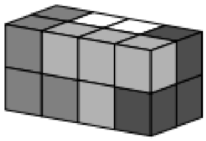


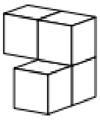
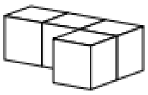
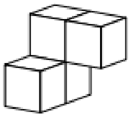
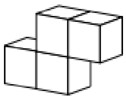
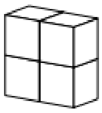
a) b) c) d) e)



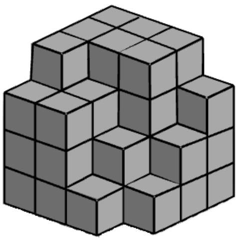
[6] Příklad 6. - vlastní tvorba, inspirace: TLUSTÝ, Pavel. *Každý den s matematikou: logické úlohy, zajímavé hříčky, grafické hádanky*. Plzeň: Fraus, [2018]. ISBN 978-80-7489-404-6.
[7] Příklad7. - vlastní tvorba
[8] Příklad 8. - vlastní tvorba, inspirace: Matematický klokan. *Matematický klokan* [online]. [cit. 02.05.2019]. Dostupné z: http://matematickyklokan.net (Sborník 2008)

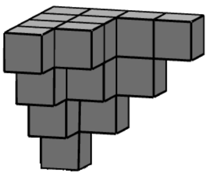
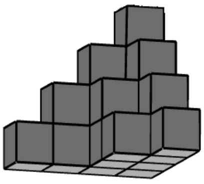
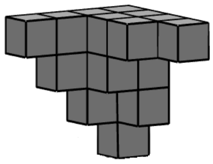
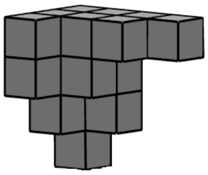
Příklad 9. : Následující kvádr je složen ze 4 částí. Každá je tvořena čtyřmi krychlemi stejné barvy. Jaký tvar má bílá část?[9]



a)  b)  c)  d)  e) 

Příklad 10. : Která z daných možností doplní následující objekt do tvaru krychle?[10]



a)  b)  c)  d) 

Poznámka: Můžeme využít různé typy zadání těchto úloh:

- pro individuální využití lze vytvořit pracovní list pro každého žáka zvlášť,
- jako rozcvičku na začátku hodiny lze jednotlivé úlohy promítnout na dataprojektoru a ohodnotit například první tři nejrychlejší žáky se správnou odpovědí,
- příklady lze využít i pro praktickou činnost, žáci poté mají za úkol vyrobit modely k jednotlivým úlohám.

Poznámka: Doporučuji, aby tento typ úloh plnil každý žák sám. Pro lepší kontrolu lze využít papírové modely, které můžeme následně nechat kolovat po třídě. Každý žák se sám může přesvědčit, zda jsou jeho výsledky správné.

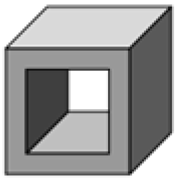
(Správné řešení: 1d; 2d; 3d; 4e; 5e; 6b; 7e; 8c; 9d; 10c)

[9] Příklad 9. – převzato: Matematický klokan. *Matematický klokan* [online]. [cit. 02.05.2019]. Dostupné z: http://matematickyklokan.net (Sborník 2012)
[10] Příklad 10. – vlastní tvorba

2.1.2 Tělesa

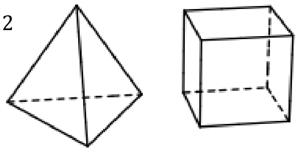
Předpoklady: Znalost geometrických obrazců, těles a jejich vlastností. Orientace v základních geometrických pojmech (úhlopříčka, stěna,…).

Příklad 1. : Kolik stěn má následující těleso?[11]



a) 6 b) 7 c) 8 d) 9 e) 10

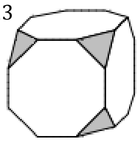
Příklad 2. : Hrajeme si s kostkami. Máme tři čtyřstěny a pět krychlí. Kolik stěn mají tato tělesa dohromady?[12]



a) 42 b) 48 c) 50 d) 52 e) 56

Poznámka: K předcházejícímu příkladu si můžeme přichystat pro názornější ukázku tělesa ve tvaru čtyřstěnu a krychle. Žáci s horší prostorovou představivostí ji mohou využít.

Příklad 3. : Krychle má seříznuté všechny vrcholy. Kolik hran má takto upravené těleso?[13]



a) 30 b) 36 c) 40 d) 48 e) 52

---

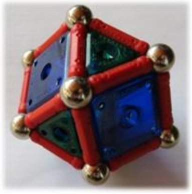
[11] Příklad 1. – vlastní tvorba

[12] Příklad 2. – převzato: – HERMAN, Jiří. *Matematika - Sekunda: Hranoly*. Praha: Prometheus, 2003, 95 s. Učebnice pro základní školy. ISBN 80-7196-257-0.

[13] Příklad 3. – vlastní tvorba, inspirace: HERMAN, Jiří. *Matematika – Sekunda: Hranoly*. Praha: Prometheus, 2003, 95 s. Učebnice pro základní školy. ISBN 80-7196-257-0.

Příklad 4.: Mnohostěn na obrázku má čtvercové a trojúhelníkové stěny. Každý čtverec sousedí se čtyřmi trojúhelníky. Každý trojúhelník sousedí se třemi čtverci. Mnohostěn má šest čtvercových stěn. Kolik má trojúhelníkových stěn?[14]

a)5 b) 6 c) 7 d) 8 e) 9



Příklad 5. : Kolik stěnových úhlopříček má pravidelný čtyřboký hranol.[15]

a) 10 b) 12 c) 14 d) 16 e) 18

Poznámka: Pro tuto úlohu doporučuji vytvořit náčrt nebo jednoduchý model:

- náčrt nakreslíme obyčejnou tužkou do sešitu (na tabuli připomeneme pravidla pro kreslení těles),
- model můžeme sestavit pomocí špejlí a modelíny, nebo ze stavebnice.

Ukázka modelu:

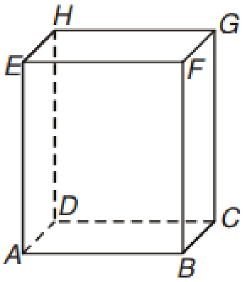
Příklad 6. : Kolik tělesových úhlopříček má pravidelný šestiboký hranol.[16]

a) 6 b) 12 c) 18 d) 24 e) 36

Poznámka: U tohoto příkladu by mohl být pro žáky problematický náčrtek. Proto bych raději volila sestavení vlastního modelu například ve dvojicích. Při této činnosti si žáci lépe uvědomí stavbu tělesa a tělesových úhlopříček.

Příklad 7. : Na obrázku vidíme čtyřboký hranol. Určete všechny:

a) hrany rovnoběžné s hranou AB,
b) hrany rovnoběžné s hranou CG,
c) hrany kolmé na stěnu $ADHE$,
d) stěny rovnoběžné se stěnou $ABFE$,
e) stěny rovnoběžné se stěnou $ABCD$.[17]



[14] Příklad 4. – vlastní tvorba
[15] Příklad 5. – vlastní tvorba
[16] Příklad 6. – vlastní tvorba

Poznámka: Žáci nejsou zvyklí přemýšlet nad rovnoběžností v prostoru. Většinou se orientují pouze v rovině. Pro lepší představu můžeme použít jakoukoli kostku a například obyčejnou tužku. Pohybem tužky po jednotlivých stěnách se žáci přesvědčí o rovnoběžnosti hran. Stejným způsobem lze ověřit rovnoběžnost stěn.

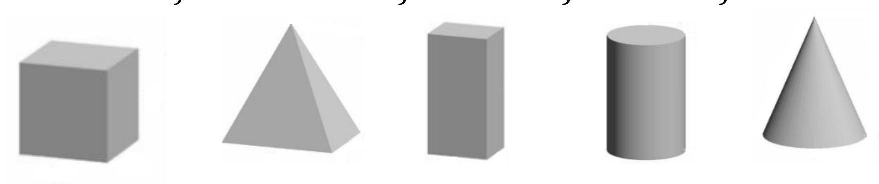
(Správné řešení: 1e; 2a; 3d; 4d; 5b; 6c; 7a – hrany DC, EF, HG, 7b – hrany BF, AE, DH, 7c – hrany AB, DC, EF, HG, 7d – stěna DCGH, 7e – stěna EFGH)

2.1.3 Sítě těles

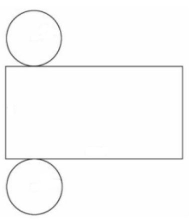
Předpoklady: Znalost konstrukce sítě jednotlivých těles.

Příklad 1. : Přiřaďte k danému tělesu jeho síť.[18]

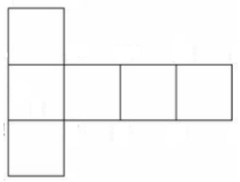
1) 2) 3) 4) 5)



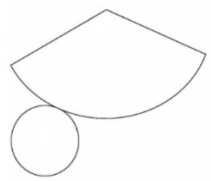
a)



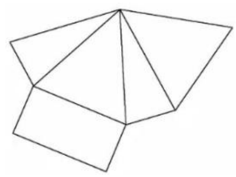
b)



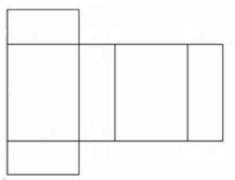
c)



d)



e)



Poznámka: Tento příklad se na první pohled zdá naprosto banální. Díky němu ale můžeme prověřit základní znalosti týkající se konstrukce sítí těles.

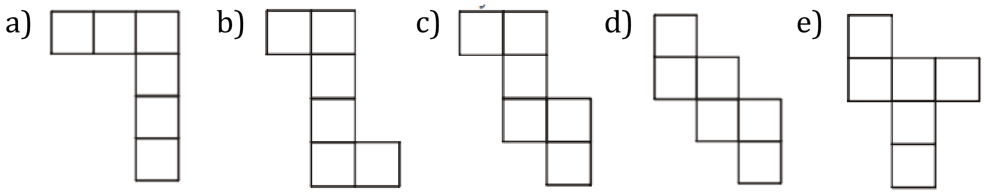
Poznámka: Tuto úlohu lze využít několika způsoby:

- připravíme si několik modelů těles, děti poté budou mít za úkol nakreslit k těmto tělesům sítě,
- rozcvička na začátku hodiny,
- skupinová práce do dvojic.

[17] Příklad 7. – vlastní tvorba, inspirace: HERMAN, Jiří. *Matematika – Kvarta: Jehlany a kužely*. Praha: Prometheus, 2001, 163 s. Učebnice pro základní školy. ISBN 80-7196-225-2.

[18] Příklad 1. – vlastní tvorba

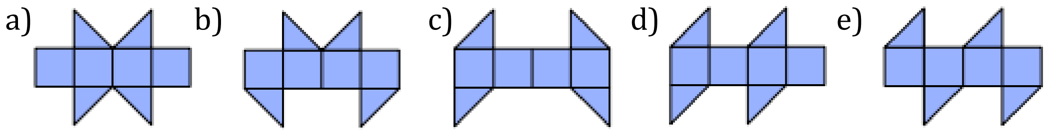
Příklad 2. : Rozhodněte, která z následujících sítí není síť krychle.[19]



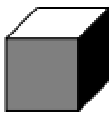
Poznámka: Klasickým způsobem praktického znázornění sítí je pomocí papíru, nebo čtvrtky. Skládat různé věci z papíru ovšem žáky moc nebaví. Je to nejlevnější materiál a proto se využívá nejčastěji. V tomto případě bych doporučila pro modelování využít stavebnici Geomag. Sítě lze krásně a rychle postavit. Bohužel to má jednu velkou nevýhodu. Při finálním sestavení sítě například do krychle, nám budou překážet některé komponenty, což by se nám u papíru nestalo. I přesto myslím, že pro zlepšení představivosti nám tato varianta bude vyhovovat.

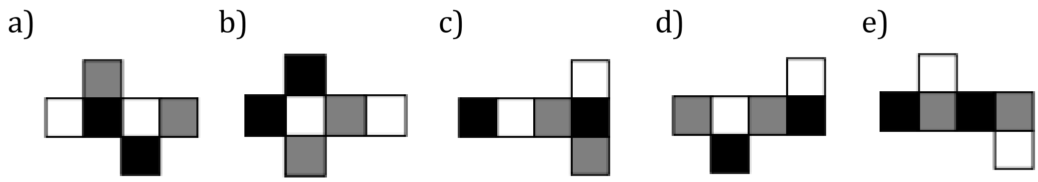
Ukázka modelu:

Příklad 3. : Jednu z následujících sítí nelze sestavit do tvaru krychle. Která to je?[20]



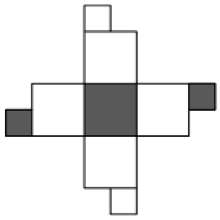
Příklad 4. : Každé dvě protější stěny krychle jsou vybarveny stejnou barvou. Která síť patří této krychli? [21]



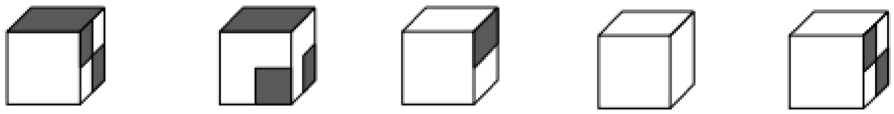


[19]Příklad 2. – vlastní tvorba, inspirace: HERMAN, Jiří. *Matematika – Sekunda: Hranoly*. Praha: Prometheus, 2003, 95 s. Učebnice pro základní školy. ISBN 80-7196-257-0.
[20] Příklad 3. – převzato: Matematický klokan. *Matematický klokan* [online]. [cit. 02.05.2019]. Dostupné z: http://matematickyklokan.net (Sborník 2013)
[21] Příklad 4. – vlastní tvorba

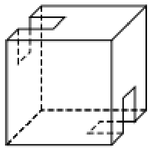
Příklad 5. : Přiřaďte k dané síti správnou krychli.[22]



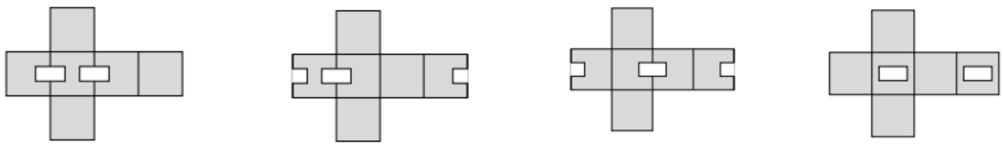
a) b) c) d) e)



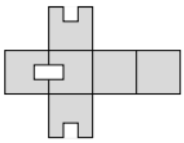
Příklad 6. : Do krabice byly vyřezány dva otvory. Jak bude vypadat síť krabice po opětovném rozložení?[23]



a) b) c) d)

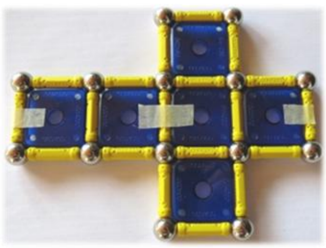


e)



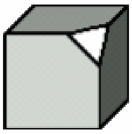
Poznámka: K tomuto příkladu si můžeme vytvořit snadno model. Z jakékoli stavebnice si vytvoříme síť krychle. Pak už nám bude stačit lepicí páska, abychom naznačili výřezy.

Ukázka modelu:

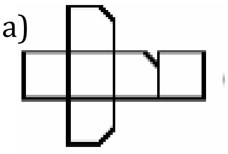


[22] Příklad 5. – vlastní tvorba, inspirace: Matematický klokan. *Matematický klokan* [online]. [cit. 02.05.2019]. Dostupné z: http://matematickyklokan.net (Sborník 2005)
[23] Příklad 6. – převzato: Matematický klokan. *Matematický klokan* [online]. [cit. 02.05.2019]. Dostupné z: http://matematickyklokan.net (Sborník 2006)

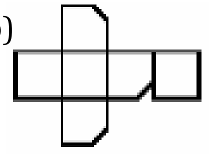
Příklad 7. : Krychli jsme odřízli jeden roh. Která z daných sítí odpovídá tomuto tělesu?[24]



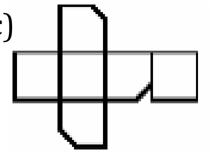
a)



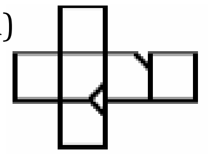
b)



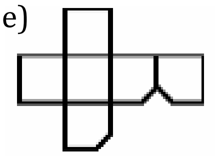
c)



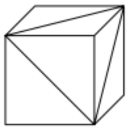
d)



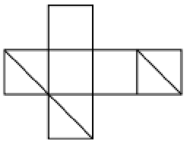
e)



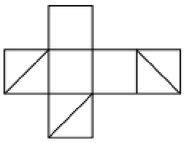
Příklad 8. : Na krychli jsou znázorněny úhlopříčky. Která z následujících možností odpovídá síti dané krychle?[25]



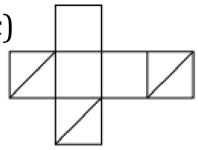
a)



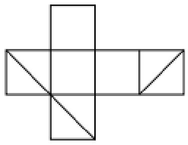
b)



c)

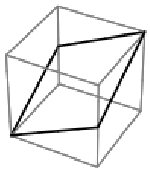


d)

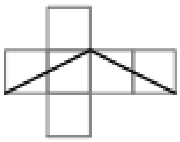


e) jiná možnost

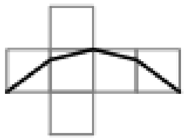
Příklad 9. : Na krychli je nakreslena lomená čára, která rozděluje krychli na dvě shodné části. Která síť náleží tomuto obrázku?[26]



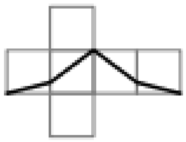
a)



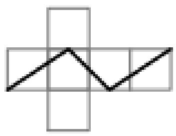
b)



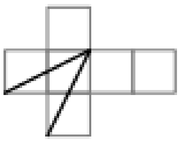
c)



d)



e)



---

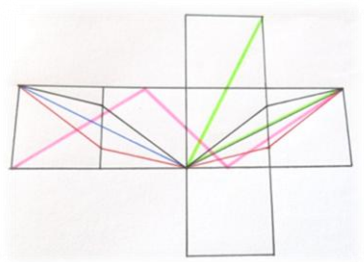
[24]Příklad 7. – vlastní tvorba, inspirace: HERMAN, Jiří. *Matematika – Sekunda: Hranoly*. Praha: Prometheus, 2003, 95 s. Učebnice pro základní školy. ISBN 80-7196-257-0.

[25] Příklad 8. – vlastní tvorba

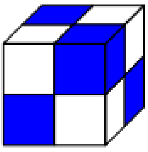
[26] Příklad 9. – vlastní tvorba, inspirace: Matematický klokan. *Matematický klokan* [online]. [cit. 02.05.2019]. Dostupné z: http://matematickyklokan.net (Sborník 2011)

Poznámka: U příkladu 8 a 9 doporučuji vytvořit model. Výhodou je, že se u jednotlivých možností nemění tvar sítě. Proto nám bude stačit vytvořit pouze jednu síť nejlépe ze čtvrtky. Jednotlivé kombinace úhlopříček poté můžeme zakreslovat pomocí barevných tužek. Po složení nám správná kombinace vytvoří správnou lomenou čáru.

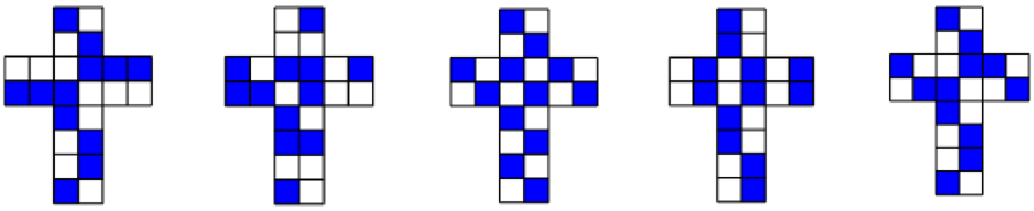
Ukázka modelu:



Příklad 10. : Která z následujících sítí náleží krychli, kterou vidíte na obrázku?[27]

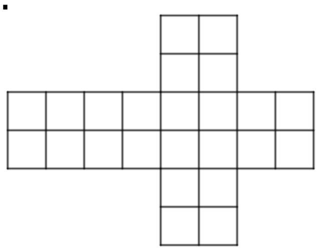


a) b) c) d) e)



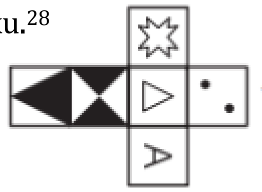
Poznámka: Pro lepší představivost a rychlé znázornění si můžeme vytvořit síť pomocí čtverečkovaného papíru. Poté sestavíme krychli (neslepovat) a podle zadání na ni barevně vyznačíme jednotlivé čtverce. Po opětovném rozložení uvidíme, která z nabízených možností se shoduje s naší sítí.

Ukázka modelu:

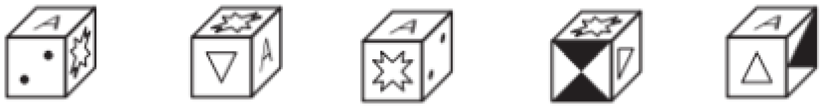


[27] Příklad 10. – převzato: Matematický klokan. *Matematický klokan* [online]. [cit. 02.05.2019]. Dostupné z: http://matematickyklokan.net (Sborník 2013)

Příklad 11. : Přiřaďte k dané síti správnou kostku.[28]



a) b) c) d) e)



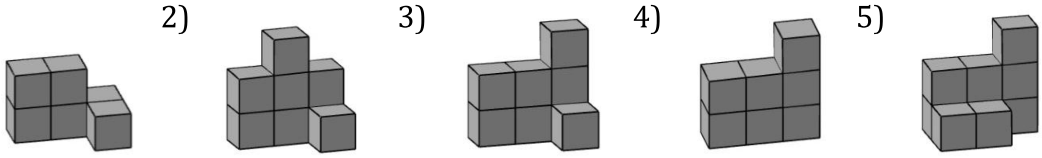
(Správné řešení: 1 – 1b, 2d, 3e, 4a, 5c; 2a; 3c; 4e; 5e; 6c; 7e; 8d; 9a; 10e; 11d)

2.1.4 Stavby z kostek

Poznámka: Stavby z kostek patří k základním úlohám již v předškolním a mladším školním věku. Stupeň obtížnosti se odvíjí od věku dítěte.

Příklad 1. : K daným stavbám přiřaďte správný plán.[29]

1) 2) 3) 4) 5)



a)

2	2	3

b)

2	2	3
1	1	

c)

2	2	3
		1

d)

2	2	1
		1

e)

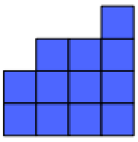
2	3	2
		1

Poznámka: Předchozí příklad patří k nejzákladnějším úlohám stavění z kostek. Využívá se především pro žáky předškolního a mladšího školního věku. Naše varianta je černobílá. Můžeme však využít i variantu s barevnými kostkami. Na jednotlivých pláncích však není zadané číslo, ale puntíky různých barev, dle kostek.

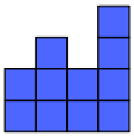
[28]Příklad 11. – vlastní tvorba, inspirace: HERMAN, Jiří. *Matematika – Sekunda: Hranoly*. Praha: Prometheus, 2003, 95 s. Učebnice pro základní školy. ISBN 80-7196-257-0.
[29] Příklad 1. – vlastní tvorba

Příklad 2. : Na plánku vidíme stavbu při pohledu shora. Čísla uvádějí počet krychlí, které jsou postaveny nad sebou. Co uvidíme, když se na stavbu podíváme zezadu?[30]

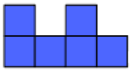
a)



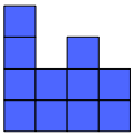
b)



c)



d)

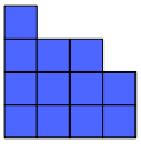


vzadu

4	2	3	2
3	3	1	2
2	1	3	1
1	2	1	2

vpředu

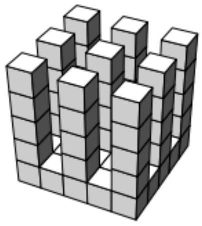
e)



Poznámka: Pro žáky s horší prostorovou představivostí použijeme jakékoli kostky, ze kterých si danou stavbu postavíme podle zadaného plánku.

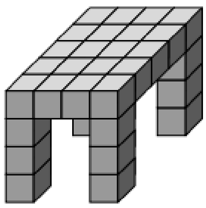
Ukázka modelu:

Příklad 3. : Z krychle jsme odebrali několik krychliček. Zbyly pouze pilíře stejné výšky stojící na jedné základně. Kolik krychliček jsme museli odebrat, aby vznikla tato stavba?[31]



a) 60   b) 64   c) 68   d) 72   e) 76

Příklad 4. : Z kostek jsme postavili stůl. Kolik krychlí jsme použili na tuto stavbu?[32]



a) 28   b) 30   c) 32   d) 34   e) 36

---

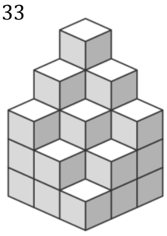
[30]Příklad 2. – převzato: Matematický klokan. *Matematický klokan* [online]. [cit. 02.05.2019]. Dostupné z: http://matematickyklokan.net (Sborník 2013)

[31] Příklad 3. – vlastní tvorba, inspirace: Matematický klokan. *Matematický klokan* [online]. [cit. 02.05.2019]. Dostupné z: http://matematickyklokan.net (Sborník 2014)

[32] Příklad 4. – vlastní tvorba

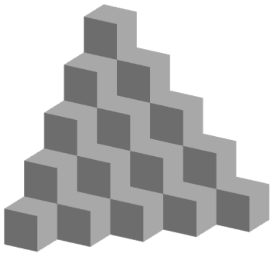
Příklad 5. : Z kolika kostek se skládá těleso na obrázku?[33]

a) 20 b) 23 c) 25 d) 27 e) 30



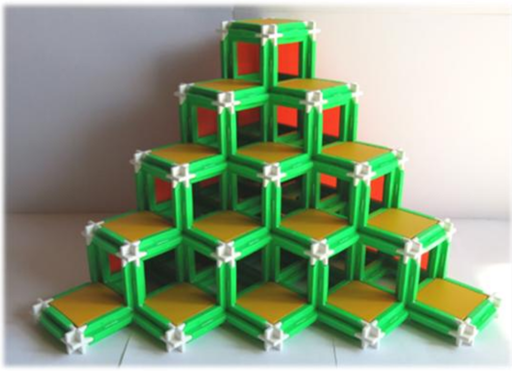
Příklad 6. : Na obrázku vidíme stavbu z kostek. Kolik potřebujeme krychlí na sestavení tohoto tělesa?[34]

a) 32 b) 35 c) 38 d) 40 e) 45

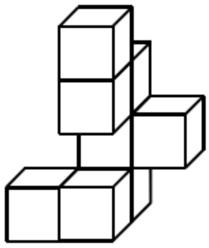


Poznámka: Tato stavba z kostek je pro děti jedna z nejobtížnějších. Žáci s horší prostorovou představivostí mohou mít s touto úlohou problémy. Jako u každé z těchto příkladu nám k lepšímu vyobrazení může pomoci jakákoli stavebnice.

Ukázka modelu:



Příklad 7. : Po slepení následující modelu jsme všechny stěny natřely na bílo. (Tělesem můžeme libovolně otáčet.)[35]



7.1. Kolik kostek má na bílo natřeno právě 4 stěny?

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

7.2. Kolik kostek má na bílo natřeno méně než 4 stěny?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

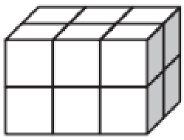
---

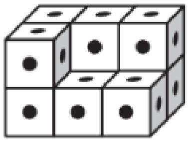
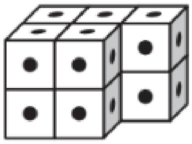
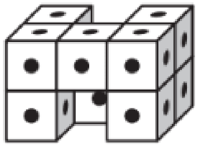
[33] Příklad 5. – vlastní tvorba

[34] Příklad 6. – vlastní tvorba

[35] Příklad 7. – vlastní tvorba, inspirace: CERMAT :: . *CERMAT ::* [online]. Copyright © 2010 CERMAT [cit. 02.05.2019]. Dostupné z: https://www.cermat.cz/testova-zadani-k-procvicovani-u-osmileta-gymnazia-matematika-1404035565.html

Příklad 8. : Z malých krychlí byly slepeny tři stejné kvádry. Z každého kvádru jsme odstranily dvě krychle. Tím nám vznikla tři nová tělesa. Na každou stěnu takto nově vzniklého tělesa, jsme na střed nakreslili černý puntík. (Puntíky jsou nakresleny i na spodních a zadních stěnách, které nevidíme.)[36]

- původní kvádr: 

1. těleso:  2. těleso:  3. těleso: 

8.1. : Kolik puntíků je na 1. tělese?

8.2. : Kolik puntíků je na 2. tělese?

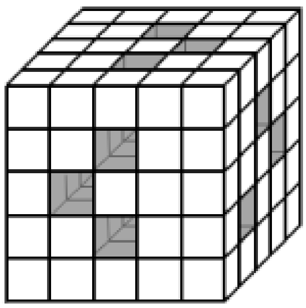
8.3. : Kolik puntíků je na 3. tělese?

8.4. : Kolik krychlí má právě tři puntíky? *(spočítejte všechna tělesa dohromady)*

8.5. : Kolik krychlí má právě čtyři puntíky? *(spočítejte všechna tělesa dohromady)*

Poznámka: Žákům u těchto typů úloh velice pomáhá tištěná verze. Mohou si postupně zakreslovat, nebo vybarvovat kostky, které už započítali. Elektronická verze je pro ně náročnější.

Příklad 9. : Daná krychle má rozměry 5x5x5. Postupně jsme vytvořili devět otvorů skrz celé těleso. Úprava probíhá ve třech fázích:



- v první fázi jsme vysunuli 3 sloupce shora dolů,
- ve druhé fázi jsme vysunuli 3 otvory zepředu dozadu,
- ve třetí fázi jsme vysunuli 3 otvory zprava doleva.

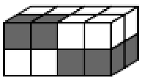
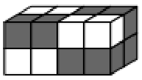
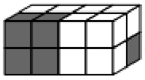
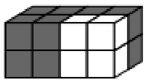
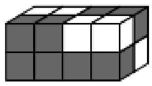
9.1. : Kolik malých krychlí jsme vysunuli během druhé fáze?

9.2. : Z kolika krychliček se skládá těleso, vzniklé po vytvoření devíti otvorů?[37]

[36] Příklad 8. – převzato - CERMAT :: . *CERMAT ::* [online]. Copyright © 2010 CERMAT [cit. 02.05.2019]. Dostupné z: https://www.cermat.cz/testova-zadani-k-procvicovani-u-osmileta-gymnazia-matematika-1404035565.html

[37] Příklad 9. – vlastní tvorba, inspirace: TLUSTÝ, Pavel. *Každý den s matematikou: logické úlohy, zajímavé hříčky, grafické hádanky*. Plzeň: Fraus, [2018]. ISBN 978-80-7489-404-6.

Příklad 10. : Ze dvou sousedících bílých a dvou tmavých krychlí je složen hranol. Jedno z následujících těles lze sestavit ze čtyř takových hranolů. Které?[38]

a) 
b) 
c) 
d) 
e) 

Poznámka: Úlohy zaměřené na stavbu kostek jsou klasickými úlohami, které se objevují v přijímacích testech na osmiletá a šestiletá gymnázia. Často je také můžeme vidět v různých logických a matematických soutěžích.

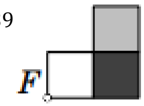
(Správné řešení: 1 – 1d, 2a, 3c, 4a, 5b; 2b; 3b; 4c; 5d; 6b; 7 – 7.1.b, 7.2.b; 8 – 8.1. 32, 8.2. 30, 8.3. 35, 8.4. 17, 8.5. 10; 9 – 9.1. 11, 9.2. 89; 10b)

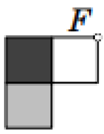
2.1.5 Otáčení těles

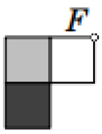
Předpoklady: Shodná zobrazení.

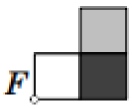
Poznámka: Pro tuto kapitolu pro nás bude stěžejním shodným zobrazením rotace. Vzhledem k tomu, že toto téma není prvkem RVP pro Základní školy, můžeme narazit na neznalost žáků. Proto doporučuji nejprve zjistit situaci v dané třídě. Popřípadě tyto úlohy zahrnout až po probrání otočení.

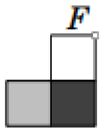
Příklad 1. : Otočíme-li obrazcem o 180° okolo bodu F, dostaneme:[39]

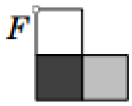


a) 

b) 

c) 

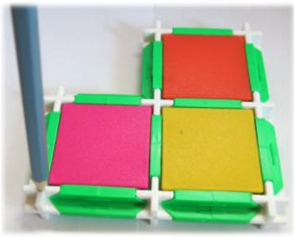
d) 

e) 

Poznámka: U otáčení lze jednodušeji vytvořit modely. Stačí nám sestavit základní obrazec. Poté ho položíme na libovolnou plochu a zvolíme si bod, okolo kterého budeme obrazec otáčet. Bod můžeme lehce přidržet prstem, nebo například obyčejnou tužkou.

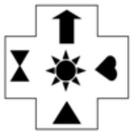
[38] Příklad 10. – vlastní tvorba
[39] Příklad 1. – vlastní tvorba

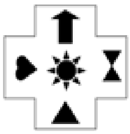
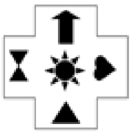
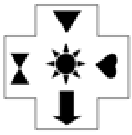
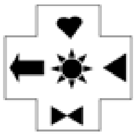
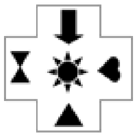
Ukázka modelu:



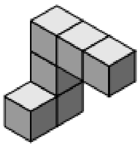
Poznámka: Výhodou stavebnice Seva, kterou jsem použila, jsou barevné výplně. Díky nim můžeme lépe rozlišovat jednotlivé stěny tělesa nebo obrazce.

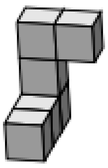
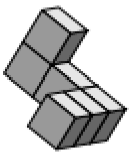
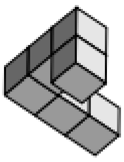
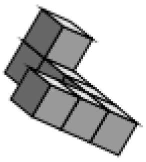
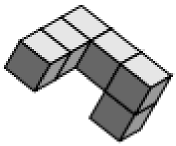
Příklad 2. : Jak bude vypadat obrazec po rotaci o + 90° okolo středu?[40]



a)  b)  c)  d)  e) 

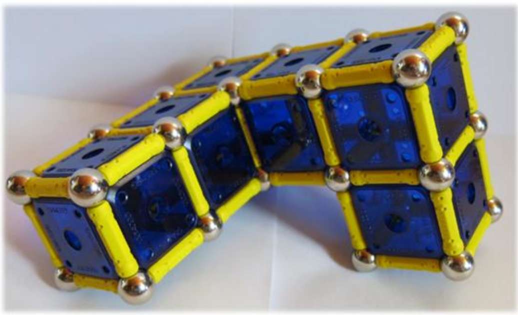
Příklad 3. : Z kostek jsme sestavili následující těleso. Otáčíme jím různými směry. Které těleso po rotaci nemůžeme vidět?[41]



a)  b)  c)  d)  e) 

Poznámka: Pro lepší prostorovou představivost můžeme využít model sestavený pomocí Geomagu.

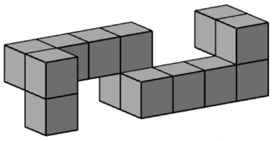
Ukázka modelu:

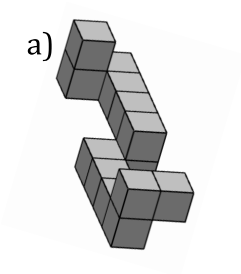
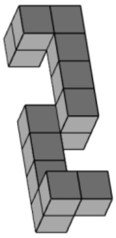
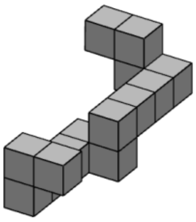
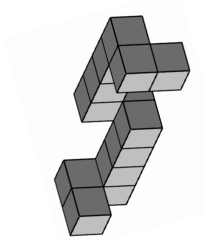
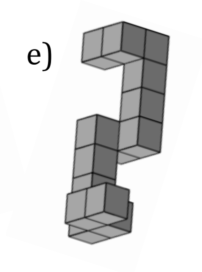


[40] Příklad 2. – převzato: Matematický klokan. *Matematický klokan* [online]. [cit. 02.05.2019]. Dostupné z: http://matematickyklokan.net (Sborník 2019)

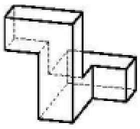
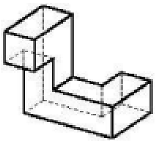
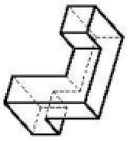
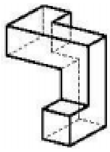
[41] Příklad 3. – vlastní tvorba

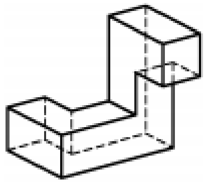
Příklad 4. : Z krychliček jsme sestavili těleso, které vidíte na obrázku. Z daných možností vyberte tu, která odpovídá dané předloze.[42]



a)  b)  c)  d)  e) 

Příklad 5. : Na obrázcích E, F, G, H jsou čtyři tělesa. Která z těchto těles vznikla otáčením tělesa vpravo?[43]

E  F  G  H 



a) E a G b) F a H c) G d) žádné e) E, F, G

Poznámka: Úlohy týkající se otáčení přímo vyzývají k sestavení různých modelů. Již samotné sestavení tělesa podle zadaní rozvíjí u dětí prostorovou představivost.

(Správné řešení: 1a; 2d; 3c; 4b; 5a)

[42] Příklad 4. – vlastní tvorba

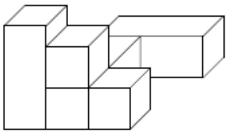
[43] Příklad 5. – převzato: Matematický klokan. *Matematický klokan* [online]. [cit. 02.05.2019]. Dostupné z: http://matematickyklokan.net (Sborník 2007)

2.1.6 Pohledy (zobrazování těles)

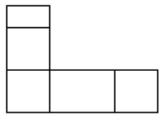
Předpoklady: Znalost základních stereometrických pojmů (podhled, nadhled).

Poznámka: V následujících úlohách se můžeme setkat i s technickými pojmy (průmět, nárys, bokorys, půdorys).

Příklad 1. : Pomocí dřevěných kostek stavebnice jsme postavili následující stavbu:

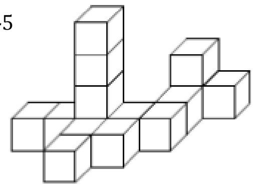


Z jakého pohledu byla pořízena následující fotografie?[44]

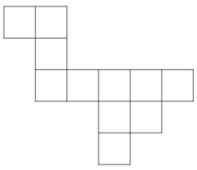


a) shora b) zleva c) zprava d) zdola e) zepředu

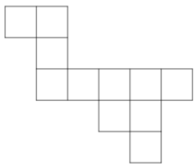
Příklad 2. : Na obrázku vidíme těleso sestavené z krychlí. Který z níže uvedených půdorysů patří tomuto tělesu?[45]



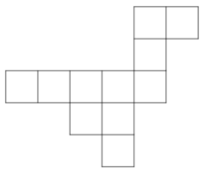
a)



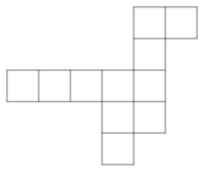
b)



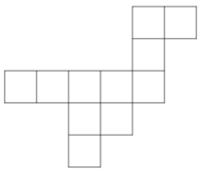
c)



d)



e)

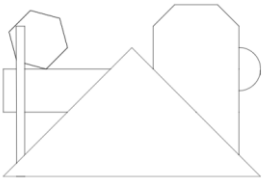


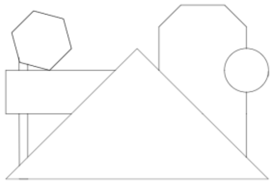
[44] Příklad 1. – vlastní tvorba, inspirace: *Document Moved* [online]. Copyright © [cit. 02.05.2019]. Dostupné z: https://www.unob.cz/fvl/studium/Documents/test-3.blok.pdf

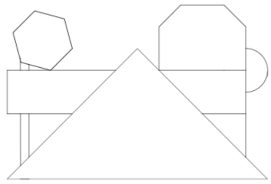
[45] Příklad 2. – vlastní tvorba, inspirace : CERMAT :: . *CERMAT ::* [online]. Copyright © 2010 CERMAT [cit. 02.05.2019]. Dostupné z: https://www.cermat.cz/testova-zadani-k-procvicovani-u-osmileta-gymnazia-matematika-1404035565.html

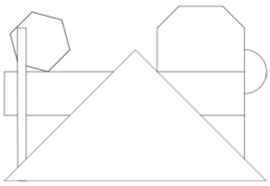
Příklad 3. : Podle následujícího popisu vyberte z možností ten obrázek, který danému popisu odpovídá.

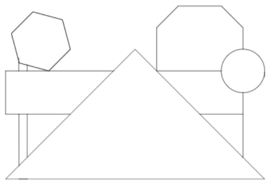
„Trojúhelník částečně zastiňuje obdélník se zkosenými rohy. V levé části obrázku šestiúhelník částečné zakrývá svislý čtyřúhelník. Vpravo je vidět celá kružnice, která částečně překrývá vodorovný obdélník. “[46]

a) 

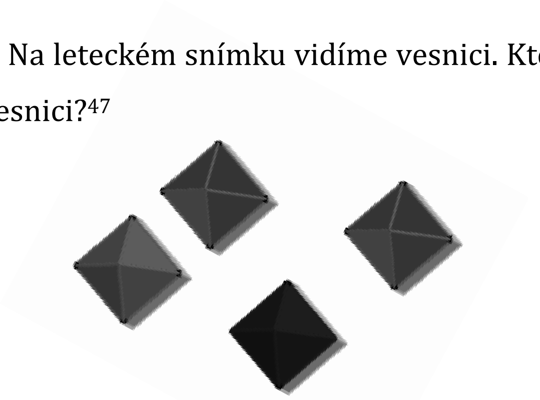
b) 

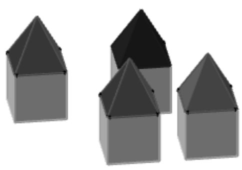
c) 

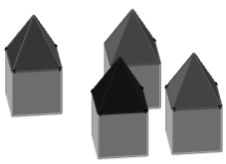
d) 

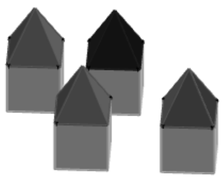
e) 

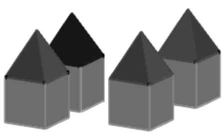
Příklad 4. : Na leteckém snímku vidíme vesnici. Která z daných možností zobrazuje stejnou vesnici?[47]

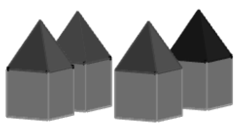


a) 

b) 

c) 

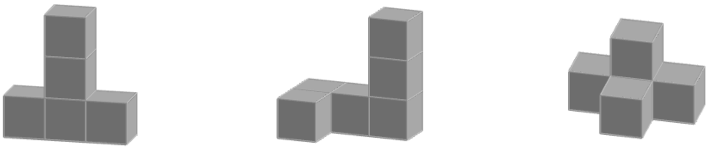
d) 

e) 

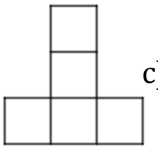
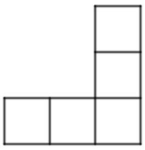
[46] Příklad 3. – vlastní tvorba
[47] Příklad 4. – vlastní tvorba

Příklad 5. : Přiřaďte k tělesům správný nárys, bokorys a půdorys.[48]

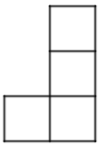
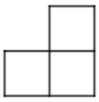
těleso 1 těleso 2 těleso 3



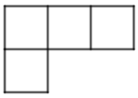
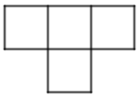
nárys:

a)  b)  c) 

bokorys:

a)  b)  c) 

půdorys:

a)  b)  c) 

Poznámka: Technické obory jsou závislé na zobrazování těles v různých pohledech. Základní příklady by však měli zvládat již žáci na druhém stupni základních škol.

(Správné řešení: 1c; 2d; 3e; 4a; 5 – 1. těleso: b,b,c, 2.těleso: c,a,a, 3.těleso: a,c,b)

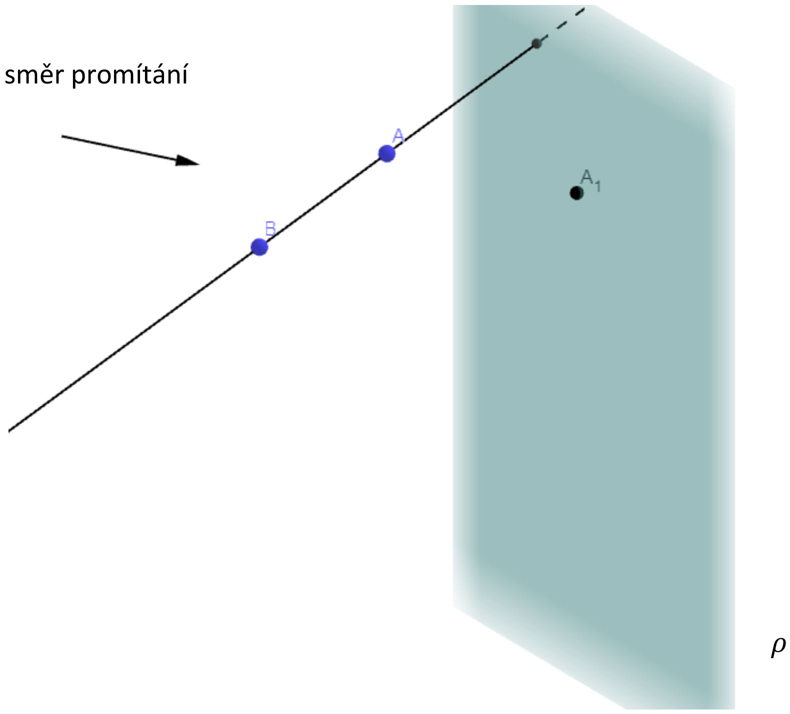
[48] Příklad 5. – vlastní tvorba

2.1.7 Volné rovnoběžné promítání

Předpoklady: Úvod do stereometrie. Zobrazení těles a znalost geometrických pojmů.

Poznámka: Při tomto zobrazování musíme trojrozměrné objekty převést na dvojrozměrné. Což bude u žáků vyvolávat spoustu otázek a nejasností. Toto promítání již vyžaduje určitou dávku prostorové představivosti.

Příklad 1. : Pomocí volného rovnoběžného promítání přeneste dva body, ležící v prostoru, na danou rovinu.[49]



Příklad 2. : Zjistěte některé základní vlastnosti volného rovnoběžného promítání:

a) Zobrazí se dva body ležící na přímce do dvou bodů, které leží na jedné přímce?
b) Zachovává volné rovnoběžné promítání délky úseček?[50]

[49] Příklad 1. – vlastní tvorba, inspirace: [online]. Copyright © 2010 [cit. 02.05.2019]. Dostupné z: http://www.realisticky.cz
[50] Příklad 2. – vlastní tvorba

Poznámka: U těchto příkladů máme několik možností, jak žáky dovést ke správným výsledkům:

- hromadná diskuze s žáky nad danou tématikou,
- jednotná ukázka pomocí počítačových programů (Geogebra, Cabri3D,…),
- pomocí počítače nebo tabletu žáci samostatně (ve dvojicích) provedou simulaci.

Příklad 3. : Ve volném rovnoběžném promítání zobrazte:

a) krychli s hranou délky $a = 5cm$,

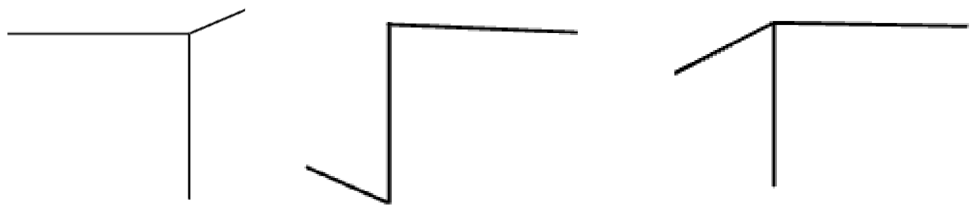
b) pravidelný šestiboký jehlan s podstavnou hranou délky $a = 2{,}5cm$ a výškou $v = 5cm$,

c) rotační válec s poloměrem podstavy $r = 2{,}5cm$ a výškou $r = 4cm$. [51]

Poznámka: Tělesa zobrazujeme tak, aby jedna jejich část ležela v průčelné rovině. Úsečky kolmé k průmětně zobrazujeme do úseček, které s obrazem vodorovných úseček svírají úhel 45° a jejich délku zkracujeme na polovinu původní délky. Většinou zobrazujeme tělesa v nadhledu. Tato pravidla nejsou nutnou podmínkou, ale praxí jsou takto zavedená.

Příklad 4. : Ve volném rovnoběžném promítání jsou dány tři viditelné hrany krychle. Dokreslete obraz celé krychle. [52]

a) b) c)



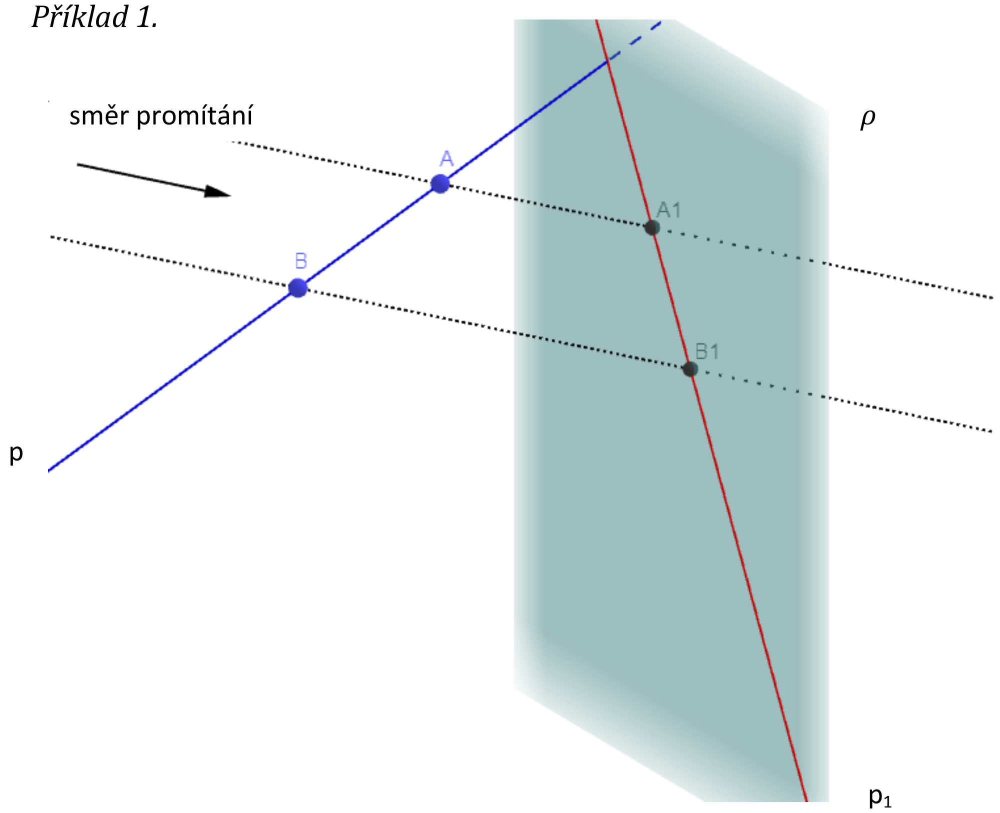
Příklad 5. : Ve volném rovnoběžném promítání zobrazte pravidelný čtyřboký hranol $ABCDEFGH$ $(a = 3\ cm, b = 5\ cm, c = 2\ cm)$. Stěna $ABCD$ je rovnoběžná s průmětnou.[53]

[51] Příklad 3. – vlastní tvorba, inspirace: POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia*. 4. vyd. Praha: Prometheus, 2009. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-389-9.
[52] Příklad 4. – vlastní tvorba, inspirace: HERMAN, Jiří. *Matematika – Sekunda: Hranoly*. Praha: Prometheus, 2003, 95 s. Učebnice pro základní školy. ISBN 80-7196-257-0.
[53] Příklad 5. – vlastní tvorba

Příklad 6. : Ve volném rovnoběžném promítání narýsujte pravidelný šestiboký hranol $ABCDEFGHIJKL$ s podstavnou hranou $4\ cm$ a výškou $6\ cm$. Hranol stojí na podstavě $ABCDEF$, stěnová úhlopříčka AD je rovnoběžná s průmětnou.[54]

Správné řešení:

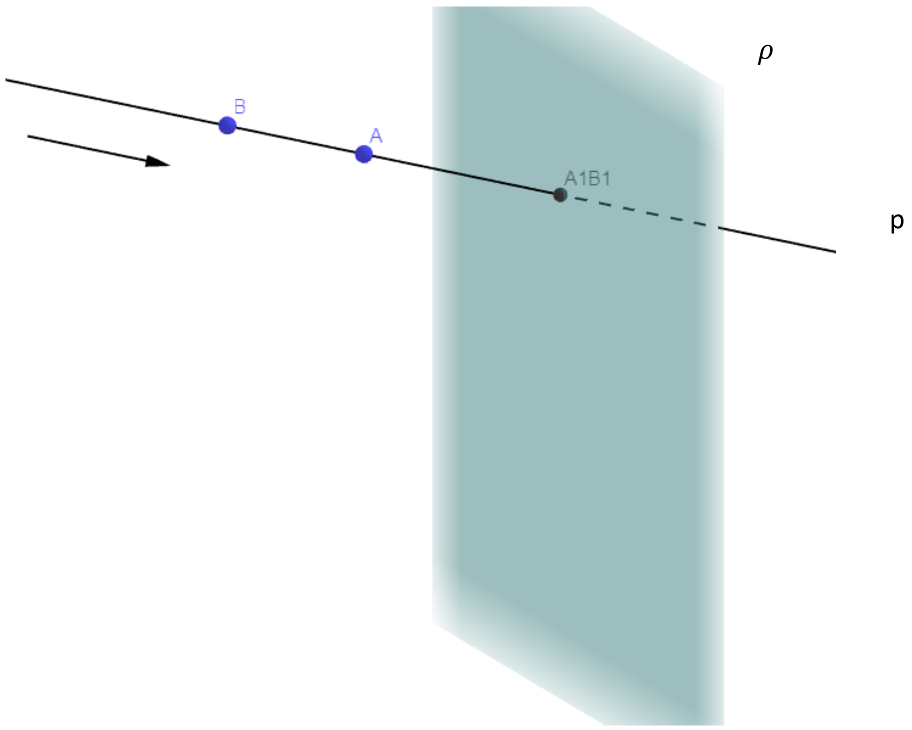
Příklad 1.



54 Příklad 6. – vlastní tvorba, inspirace: POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia*. 4. vyd. Praha: Prometheus, 2009. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-389-9.

Příklad 2. :

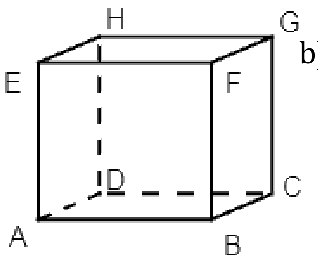
a) Průmětem přímky je opět přímka, nebo bod. Do bodu se přímka promítne v tom případě, je-li přímka zároveň promítací přímkou (směr promítání).
Pro názornou ukázku můžeme využít nákres z minulého příkladu, kde můžeme vidět zobrazení dvou bodů na přímku. Následující obrázek znázorňuje zobrazení přímky na jeden bod.



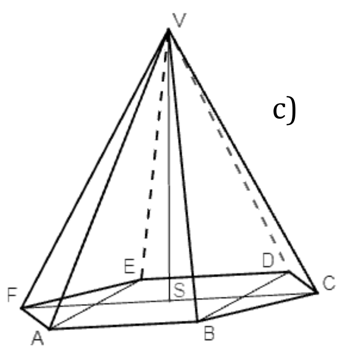
b) Promítání obecně délky nezachovává. Tato vlastnost je vidět na minulém příkladu, kdy se nám přímka může zobrazit pouze v jeden bod. Délky se také mohou zkracovat nebo prodlužovat.

Příklad 3. :

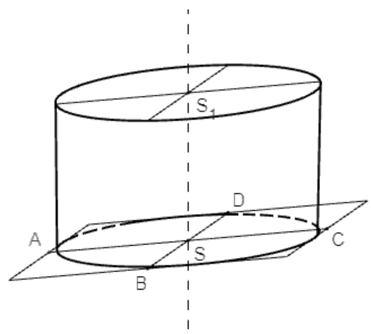
a)



b)

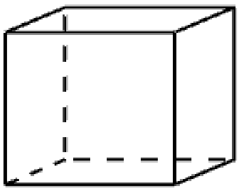


c)

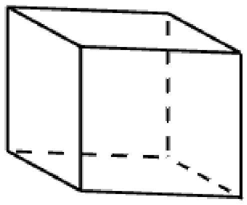


Příklad 4. :

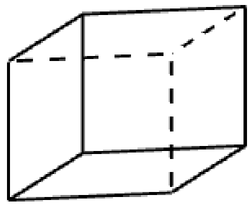
a)



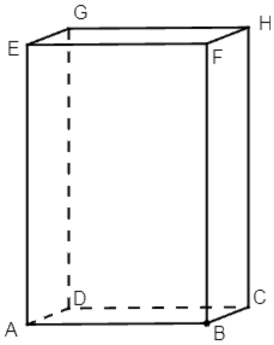
b)



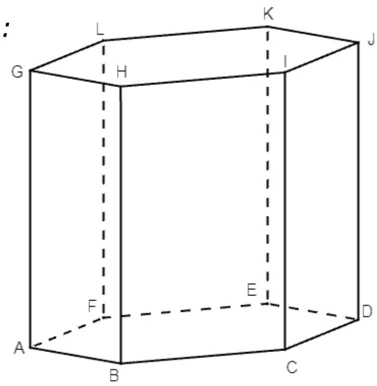
c)



Příklad 5. :



Příklad 6. :



2.1.8 Polohové vlastnosti

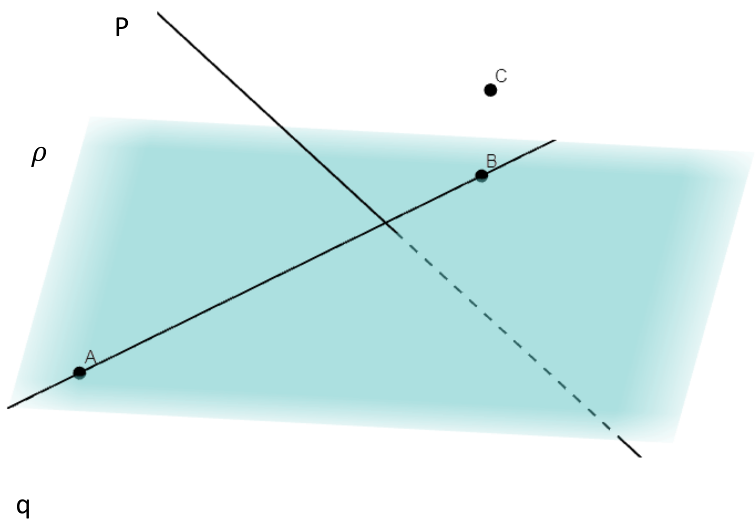
Poznámka: Polohové vlastnosti jsou součástí stereometrie. Ta je považována za jednu z nejobtížnějších částí školské matematiky. I v této kapitole nám řešení geometrických úloh budou usnadňovat modely.

Poznámka: Při používání modelů nesmíme zapomenout, že rovina je stejně nekonečná jako přímka.

2.1.8.1 Základní vztahy mezi body, přímkami a rovinami

Předpoklady: Planimetrie - základní vztahy mezi body a přímkami.

Příklad 1. : Pomocí symbolického zápisu zapište situaci na obrázku pomocí vztahů mezi body, přímkami a rovinou.[55]



Poznámka: Pozor na správný zápis. Nelze psát $p \in \rho$ protože, protože rovina ρ je tvořena množinou bodů a ne přímek. Na tento fakt, bychom žáky měli upozornit.

Příklad 2. : Nalezněte všechny možné způsoby určení roviny pomocí bodů a přímek.[56]

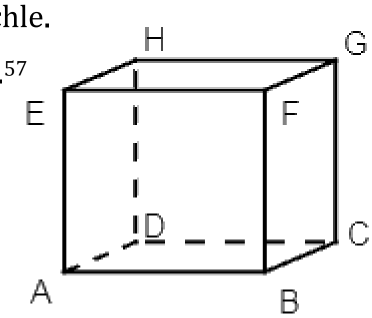
Poznámka: Doporučuji názornou demonstraci přímo ve třídě. Žáci po názorné ukázce mohou sami vymýšlet další příklady.

[55] Příklad 1. – vlastní tvorba, inspirace: POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia*. 4. vyd. Praha: Prometheus, 2009. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-389-9.
[56] Příklad 2. – vlastní tvorba

Příklad 3. : Je dána krychle $ABCDEFGH$.

a) Určete různým způsobem rovinu dolní stěny krychle.

b) Rozhodněte, zda v této rovině leží úsečky BD, BH.[57]



Příklad 4. : Je dána krychle $ABCDEFGH$. Rozhodněte, zda:

a) přímky CH, CS_{AE} leží v rovině GCD,

b) body S_{BC}, F leží v rovině BCG,

c) přímky AG, AE leží v rovině ACG.[58]

Správné řešení:

Příklad 1. :

- $A \in q, A \in \rho, A \notin p$
- $B \in q, B \in \rho, B \notin p$
- $C \notin q, C \notin \rho, C \notin p$
- $p \subset \rho, q \not\subset \rho$

Příklad 2. :

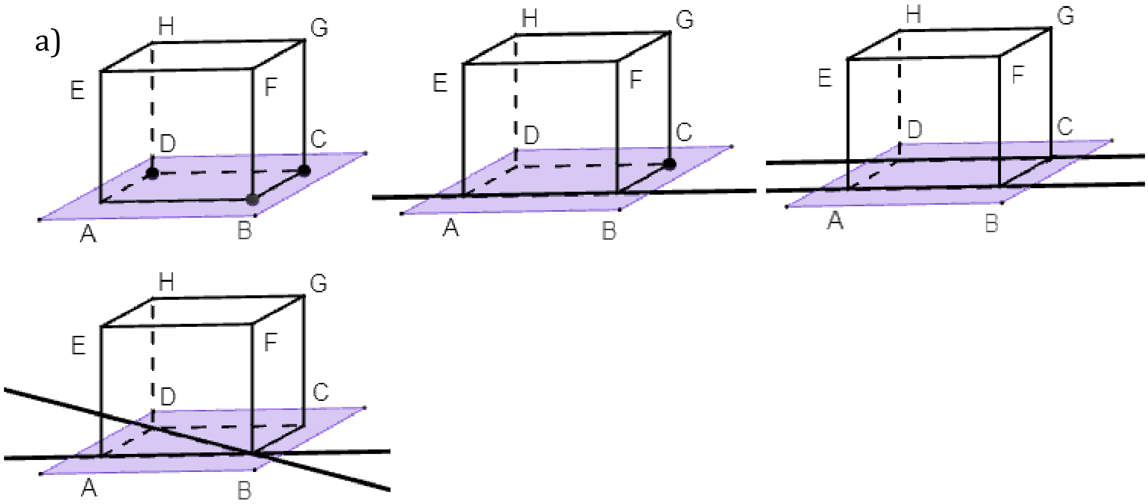
- tři nekolineární body – např. 3 rohy místnosti určují jednu rovinu (= stěnu)
- přímka a bod, který na ni neleží – např. okraj listu papíru a libovolný bod na papíře
- dvě různé rovnoběžné přímky – např. dvě rovnoběžné hrany lavice
- dvě různoběžné přímky – např. hrana stěny a její úhlopříčka

[57] Příklad 3. – převzato: POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia*. 4. vyd. Praha: Prometheus, 2009. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-389-9.

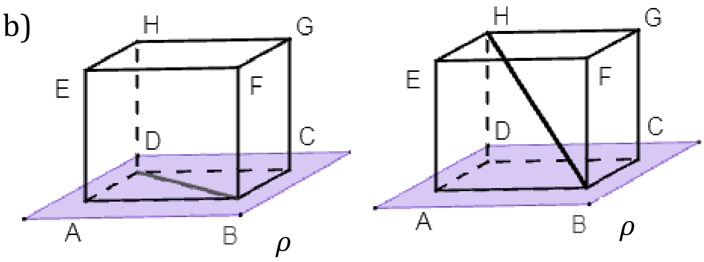
[58] Příklad 4. – vlastní tvorba, inspirace: POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia*. 4. vyd. Praha: Prometheus, 2009. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-389-9.

Příklad 3. :

a)



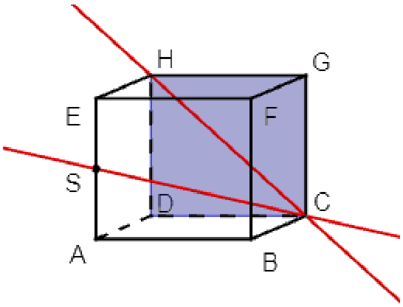
b)



- $BD \subset \rho$
- $BH \not\subset \rho$

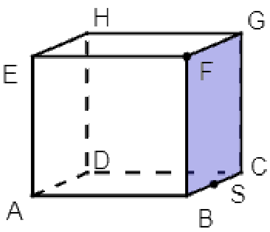
Příklad 4. :

a)



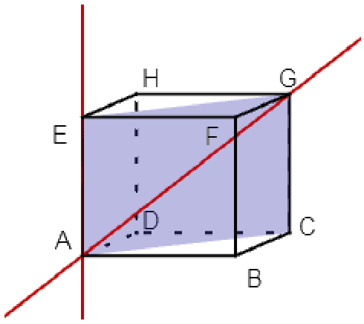
- $\leftrightarrow CH \subset \leftrightarrow GCD$
- $\leftrightarrow CS_{AE} \not\subset \leftrightarrow GCD$

b)



- $S_{BC} \in \leftrightarrow BCG$
- $F \in \leftrightarrow BCG$

c)



- $\leftrightarrow AG \subset \leftrightarrow ACG$
- $\leftrightarrow AE \subset \leftrightarrow ACG$

2.1.8.2 Vzájemná poloha dvou přímek

Příklad 1. : Určete vzájemnou polohu dvou přímek:

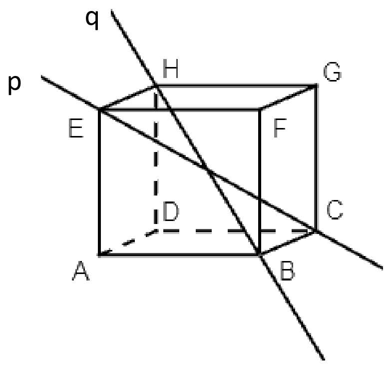
a) v rovině,

b) v prostoru.[59]

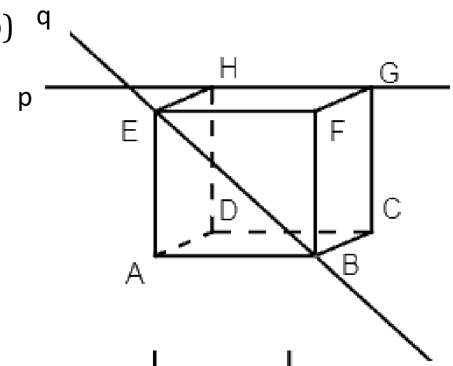
Poznámka: Žáci pomocí špejlí mohou ve dvojicích modelovat jednotlivé situace. Je také důležité na danou polohu dvou přímek nahlížet z různých pohledů. Když se například podíváme na mimoběžky proti stěně, bude to vypadat, jakoby se protínaly v jednou bodě.

Příklad 2. : Určete vzájemnou polohu přímek vyznačených na obrázku.[60]

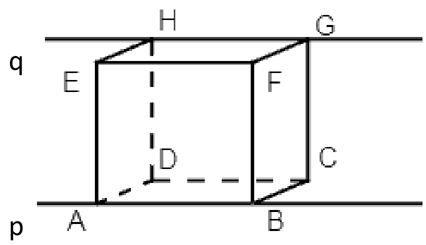
a)



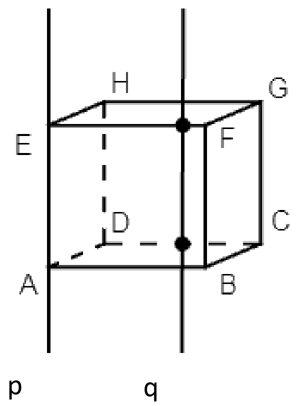
b)



c)



d)

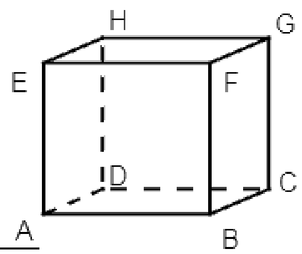


Příklad 3. : Je dána krychle $ABCDEFGH$. Uveďte všechny přímky, které procházejí vrcholem E a dalším vrcholem krychle a jsou s přímkou BC:

a) rovnoběžné,

b) různoběžné,

c) mimoběžné.[61]



[59] Příklad 1. – vlastní tvorba

[60] Příklad 2. – vlastní tvorba, inspirace: POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia*. 4. vyd. Praha: Prometheus, 2009. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-389-9.

[61] Příklad 3. – převzato: POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia*. 4. vyd. Praha: Prometheus, 2009. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-389-9.

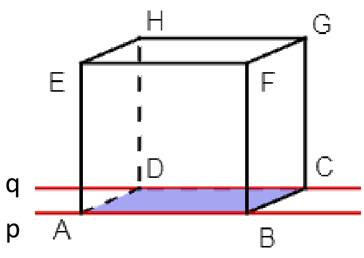
Správné řešení:

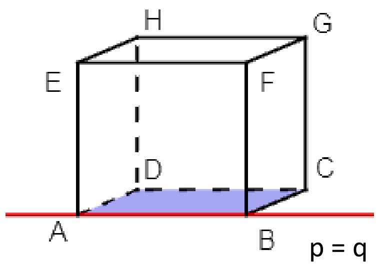
Příklad 1. :

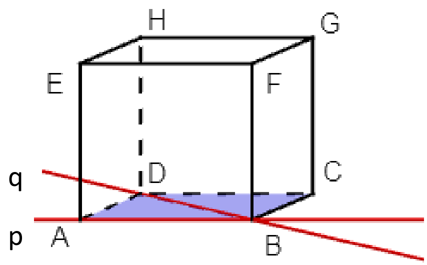
a) rovnoběžné – různé – nemají společný bod

- totožné – nekonečně mnoho společných bodů

různoběžné – jeden společný bod



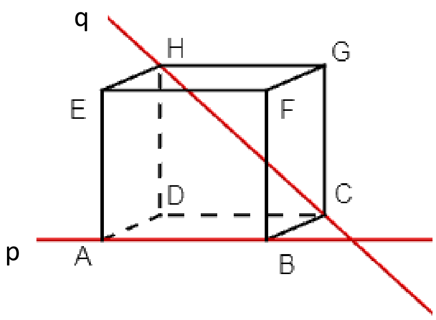


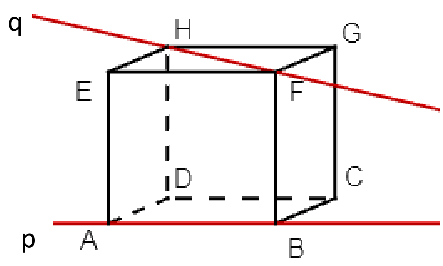


b) Předchozí tři případy známe již z planimetrie. Je však nutné rovnoběžnost v prostoru vymezit jiným způsobem než v rovině:

rovnoběžné – nemají společný bod, ale mají stejný směr

mimoběžné – nemají společný bod, mají různý směr





Příklad 2. :

a) různoběžky
b) mimoběžky
c) rovnoběžky
d) mimoběžky

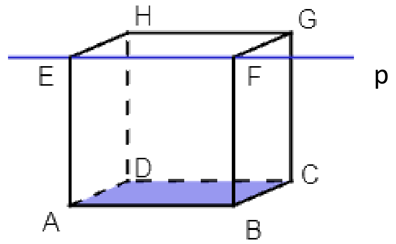
Příklad 3. :

a) $\leftrightarrow EH$
b) $\leftrightarrow BE, \leftrightarrow CE$
c) $\leftrightarrow AE, \leftrightarrow DE, \leftrightarrow EG, \leftrightarrow EF$

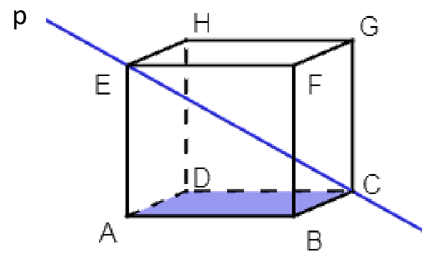
2.1.8.3 Vzájemná poloha přímky a roviny

Příklad 1. : Pomocí následujících obrázků určete počet společných bodů roviny ABC a přímky p. Poté určete jejich vzájemnou polohu. [62]

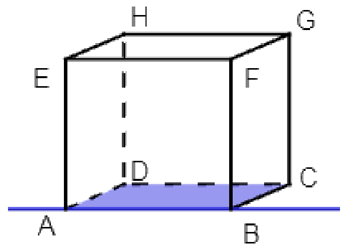
a)



b)



c)



Poznámka: Žákům by mohla dělat problém poslední krychle. Nesmíme zapomínat, že rovina je stejně nekonečná jako přímka.

Příklad 2. : Určete všechny roviny krychle $ABCDEFGH$, které obsahují alespoň jeden vrchol krychle a přímku BC.[63]

Příklad 3. : Je dána krychle $ABCDEFGH$. Určete vzájemnou polohu:

a) přímky AD a roviny AFG,

b) přímky BG a roviny ABF,

c) přímky DF a roviny BCE,

d) přímky EF a roviny ABC,

e) přímky AC a roviny AFG.[64]

Příklad 4. : Je dána krychle $ABCDEFGH$. Určete všechny přímky, které procházejí bodem H a některým dalším vrcholem krychle a s rovinou ABC jsou:

a) rovnoběžné,

b) různoběžné.[65]

---

[62] Příklad 1. – vlastní tvorba, inspirace: POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia*. 4. vyd. Praha: Prometheus, 2009. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-389-9.

[63] Příklad 2. – vlastní tvorba

[64] Příklad 3. – vlastní tvorba, inspirace: POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia*. 4. vyd. Praha: Prometheus, 2009. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-389-9.

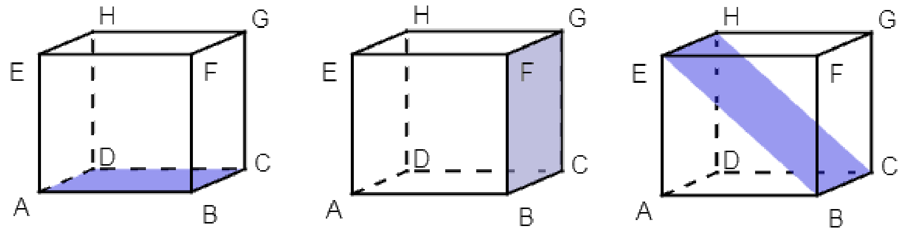
[65] Příklad 4. – převzato: POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia*. 4. vyd. Praha: Prometheus, 2009. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-389-9.

Správné řešení:

Příklad 1. :

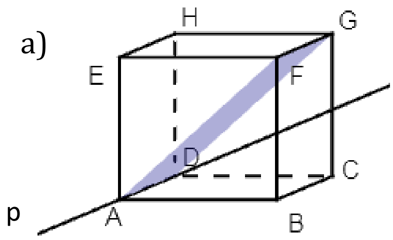
a) žádný společný bod => přímka je rovnoběžná s rovinou
b) jeden společný bod => přímka je různoběžná s rovinou
c) všechny body přímky jsou zároveň body roviny => přímka je rovnoběžná s rovinou

Příklad 2. :



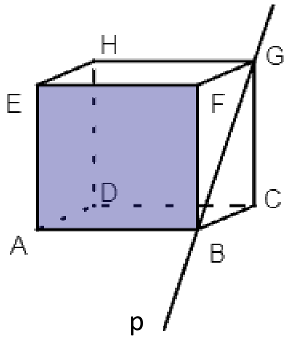
Příklad 3. :

a)



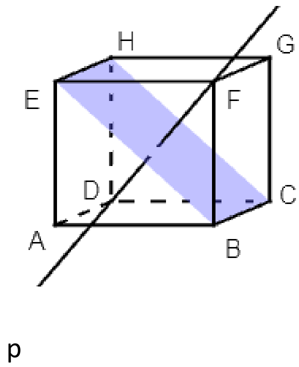
- přímka je rovnoběžná s rovinou

b)



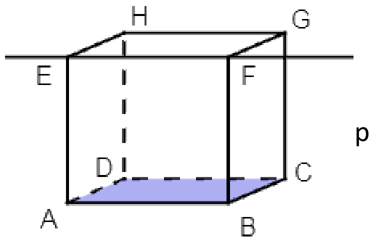
- přímka je různoběžná s rovinou

c)



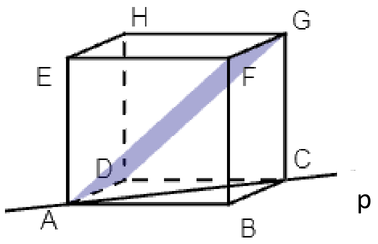
- přímka je různoběžná s rovinou

d)



- přímka je rovnoběžná s rovinou

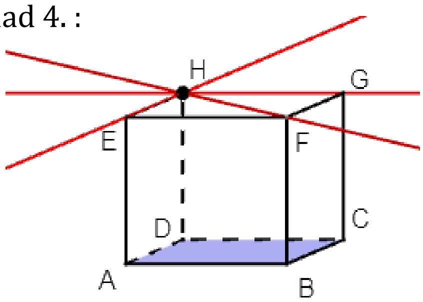
e)



- přímka je různoběžná s rovinou

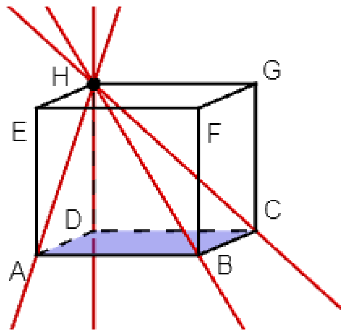
Příklad 4. :

a)



- $\leftrightarrow EH, \leftrightarrow FH, \leftrightarrow GH$

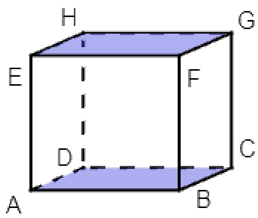
b)

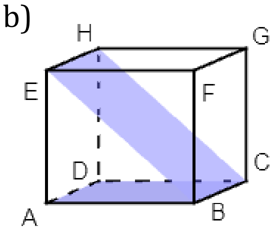


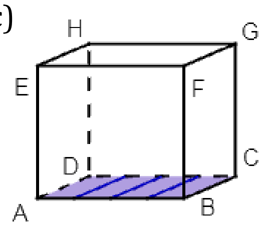
- $\leftrightarrow AH, \leftrightarrow BH, \leftrightarrow CH, \leftrightarrow DH$

2.1.8.4 Vzájemná poloha rovin

Příklad 1. : Pomocí následujících obrázků určete počet společných bodů dvou rovin. Poté určete jejich vzájemnou polohu.[66]

a)


b)


c)


Příklad 2. : Je dána krychle $ABCDEFGH$. Určete vzájemnou polohu rovin:

a) BCF a ADG,

b) ABC a EHS_{BF},

c) BCF a ADE,

d) ADG a BCE.

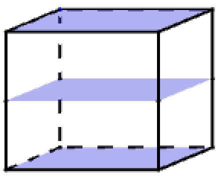
Při různoběžnosti nalezněte jejich průsečnici. [67]

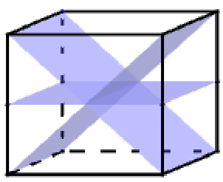
Příklad 3. : Je dána krychle $ABCDEFGH$. Určete všechny roviny, které procházejí bodem H a dalšími dvěma vrcholy krychle a jsou s rovinou ABC:

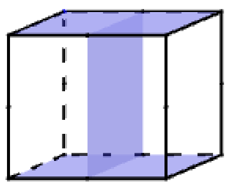
a) rovnoběžné,

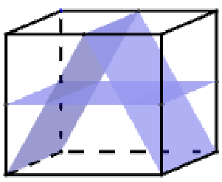
b) různoběžné.[68]

Příklad 4. : Pomocí následujících obrázků určete počet společných bodů tří rovin. Poté určete jejich vzájemnou polohu.[69]

a)


b)


c)


d)


[66] Příklad 1. - vlastní tvorba

[67] Příklad 2. – vlastní tvorba, inspirace: HERMAN, Jiří. *Matematika – Kvarta: Jehlany a kužely*. Praha: Prometheus, 2001, 163 s. Učebnice pro základní školy. ISBN 80-7196-225-2.

[68] Příklad 3. – převzato: POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia*. 4. vyd. Praha: Prometheus, 2009. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-389-9.

[69] Příklad 4. – vlastní tvorba, inspirace: POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia*. 4. vyd. Praha: Prometheus, 2009. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-389-9.

Správné řešení:

Příklad 1. :

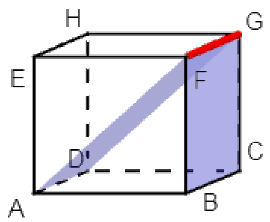
a) roviny jsou rovnoběžné => nemají žádný společný bod

b) roviny jsou různoběžné => mají nekonečně mnoho společných bodů ležících v jedné přímce (průsečnici)

c) roviny jsou rovnoběžné (totožné) => mají nekonečně mnoho společných bodů

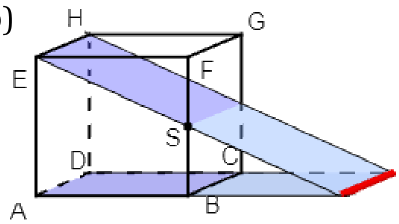
Příklad 2. :

a)



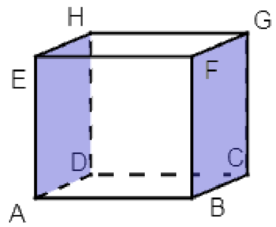
různoběžné

b)



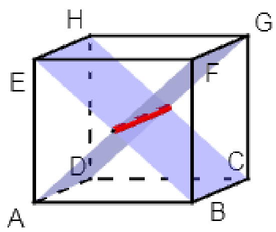
různoběžné

c)



rovnoběžné

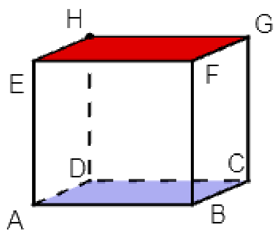
d)



různoběžné

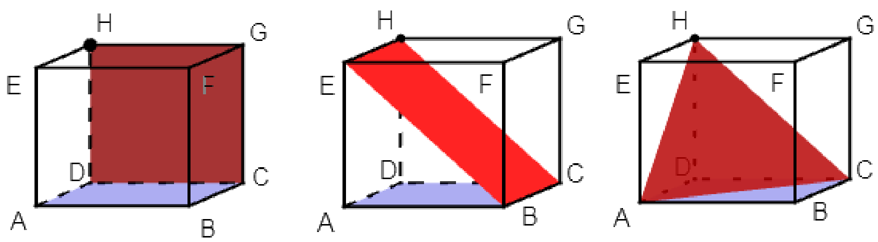
Příklad 3. :

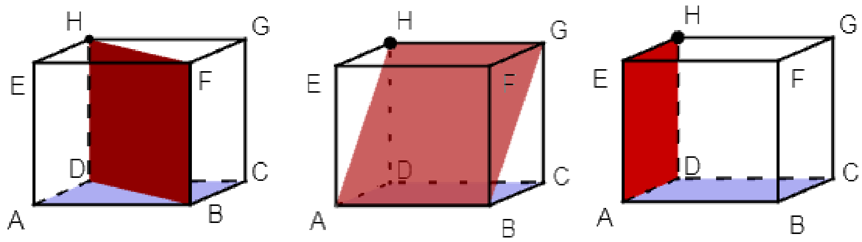
a)

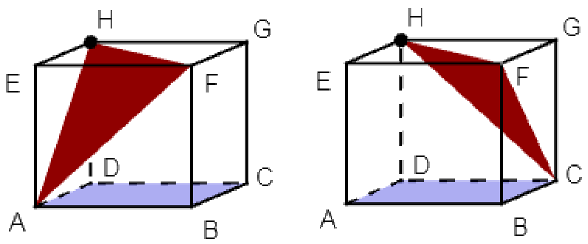


- $\leftrightarrow AFG$

b)







- $\leftrightarrow CDG, \leftrightarrow BCE, \leftrightarrow ACH,$
  $\leftrightarrow BDF, \leftrightarrow ABG, \leftrightarrow ADE,$
  $\leftrightarrow AFH, \leftrightarrow CFH$

Příklad 4. :

a) každé dvě roviny jsou rovnoběžné => nemají žádný společný bod

b) každé dvě roviny jsou různoběžné => mají nekonečné mnoho společných bodů ležících v jedné přímce (průsečnici)

c) dvě roviny jsou rovnoběžné a třetí je protíná ve dvou přímkách, které jsou rovnoběžné => tři roviny nemají žádný společný bod

d) každé dvě roviny jsou různoběžné => tři roviny nemají žádný společný bod

2.1.8.5 Rovnoběžnost přímek a rovin

Předpoklady: Znalost kritéria rovnoběžnosti dvou přímek, přímky a roviny, dvou rovin.

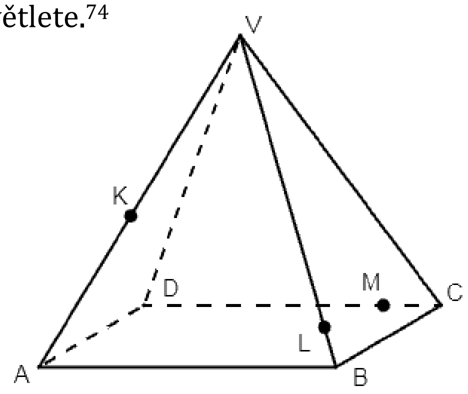
Příklad 1. : Vysvětlete, proč jsou hrany BC a EH krychle $ABCDEFGH$ rovnoběžné.[70]

Příklad 2. : Je dána krychle $ABCDEFGH$. Vysvětlete, proč je přímka CE rovnoběžná s rovinou AHS_{CD}.[71]

Příklad 3. : Je dána krychle $ABCDEFGH$. Nalezněte rovnoběžnou rovinu s rovinou ACH procházející vrcholem B.[72]

Příklad 4. : V krychli $ABCDEFGH$ je dán bod S_{AB}. Veďte bodem S_{AB} rovnoběžku s rovinami BEG a BDH. [73]

Příklad 5. : Určete vzájemné průsečnice a společný bod rovin ABC, ABV, KLM. Vysvětlete.[74]

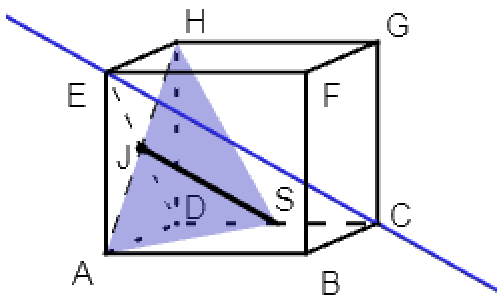


[70] Příklad 1. – vlastní tvorba, inspirace: HERMAN, Jiří. *Matematika – Kvarta: Jehlany a kužely*. Praha: Prometheus, 2001, 163 s. Učebnice pro základní školy. ISBN 80-7196-225-2.
[71] Příklad 2. – vlastní tvorba, převzato: HERMAN, Jiří. *Matematika – Kvarta: Jehlany a kužely*. Praha: Prometheus, 2001, 163 s. Učebnice pro základní školy. ISBN 80-7196-225-2.
[72] Příklad 3. – vlastní tvorba, inspirace: POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia*. 4. vyd. Praha: Prometheus, 2009. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-389-9.
[73] Příklad 4. – vlastní tvorba, převzato: POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia*. 4. vyd. Praha: Prometheus, 2009. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-389-9.
[74] Příklad 5. – vlastní tvorba

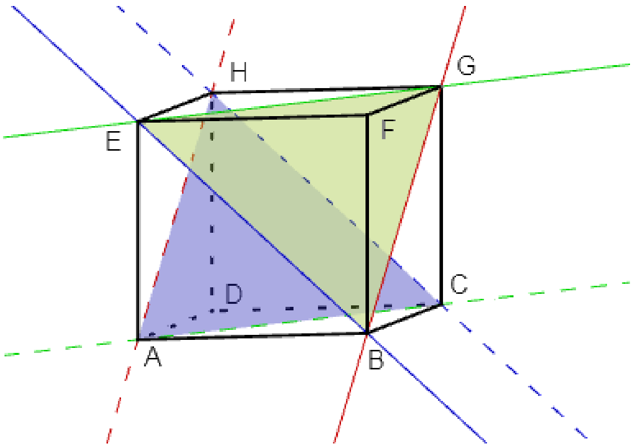
Správné řešení:

Příklad 1. : Stačí nám nalézt jednu přímku, s níž jsou obě zadané přímky rovnoběžné. V naší krychli je to například přímka FG.

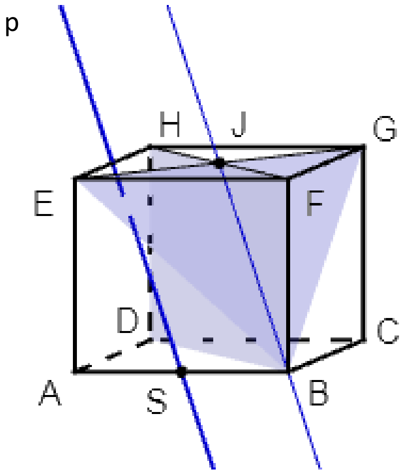
Příklad 2. : Najdeme přímku, která leží v zadané rovině a je rovnoběžná s přímkou CE. V rovině AHS_{CD} leží střed úsečky AH. Označíme ho J. V trojúhelníku CDE je bod J středem strany AH a bod S je středem strany CD. Úsečka JS je střední příčkou trojúhelníku CDE a je tedy rovnoběžná s přímkou CE. V rovině AHS_{CD} jsme našli přímku rovnoběžnou s přímkou CE. Tudíž je přímka CE rovnoběžná i s rovinou AHS_{CD}.



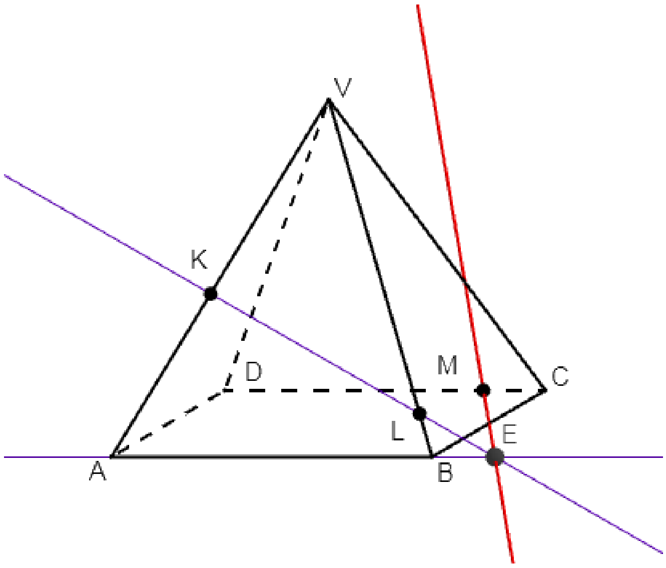
Příklad 3. :



Příklad 4. : Přímka p je rovnoběžná s průsečnicí rovin BEG a BDH.



Příklad 5. : Budeme vždy hledat průsečnici dvou různoběžných rovin. Průsečnicí rovin ABC a ABV je přímka AB. Průsečnicí rovin ABV a KLM je přímka KL. Tyto dvě přímky mají společný průsečík – E. Tímto bodem bude procházet průsečnice rovin KLM a ABC.



2.1.8.6 Řezy těles

Poznámka: V následujících úlohách budeme rýsovat tělesa vždy ve volném rovnoběžném promítání. Další metody jsou záležitostí deskriptivní geometrie.

Poznámka: Řez tělesa rovinou je průnik hranice tělesa a roviny řezu. Budeme tedy sestrojovat průsečnice dané roviny s rovinami jednotlivých stěn tělesa. Proto bychom s žáky nejprve měli zopakovat základní stereometrické konstrukce (sestrojení průsečnice dvou rovin, sestrojení přímky, která prochází daným bodem a je rovnoběžná s dvěma různoběžnými rovinami, …).

Poznámka: Před začátkem rýsování řezů těles je nutné uvést pár základních pravidel:

- leží-li dva různé body v rovině, pak přímka jimi určená leží také v této rovině,
- strany řezu v rovnoběžných stěnách jsou navzájem rovnoběžné,
- jsou-li každé dvě ze tří rovin různoběžné a mají-li tyto tři roviny jediný společný bod, procházejí tímto společným bodem všechny tři průsečnice ⇒ průsečnice rovin dvou sousedních stěn s rovinou řezu a přímka, v níž leží společná hrana, se protínají jednom bodě.

Přímka 1. : Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou:

a) BCS_{DH},

b) CFS_{AB},

c) BGS_{AE}.[75]

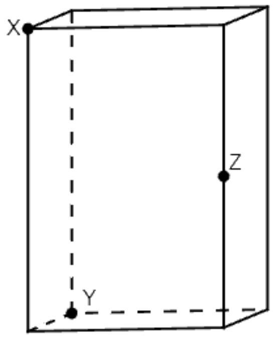
Příklad 2. : Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou KLM; K je bodem hrany AE, $|AK| : |KE| = 4 : 1, L$ je bodem hrany BF, $|BL| : |LF| = 1 : 2$, M je bodem hrany CG, $|CM| : |MG| = 2 : 1$.[76]

[75] Příklad 1. – vlastní tvorba

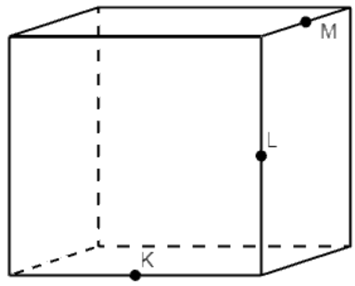
[76] Příklad 2. – vlastní tvorba, inspirace: POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia*. 4. vyd. Praha: Prometheus, 2009. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-389-9.

Příklad 3. : Sestrojte řez daných těles rovinami, které jsou určeny třemi body. [77]

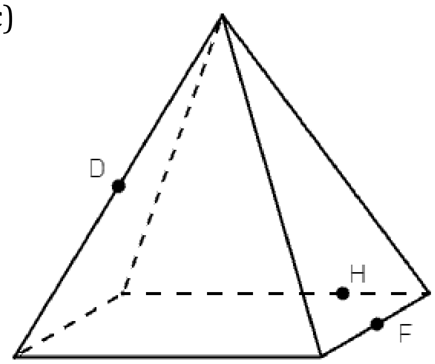
a)



b)



c)



Poznámka: K předcházejícímu příkladu je dobré mít připravenou tištěnou verzi. Žáci si nemusí rýsovat daná tělesa a pouze doplňují řez, čímž ušetříme při hodině čas.

Příklad 4. : Sestrojte řez krychle $ABCDEFGH$ rovinou BPQ; bod P je středem hrany FG, bod Q leží na prodloužení úsečky EF za bod E, $|QE| : |EF| = 1 : 3$. [78]

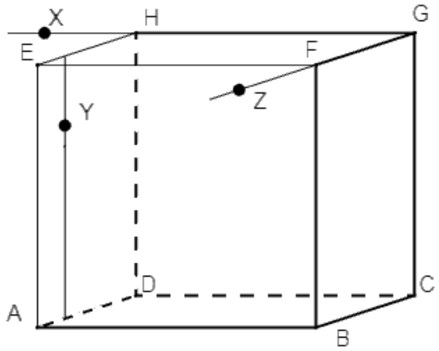
---

[77] Příklad 3. – vlastní tvorba, inspirace: Matematika pro každého. *Matematika pro každého* [online]. Copyright © maths.cz 2008 [cit. 06.05.2019]. Dostupné z: https://maths.cz/clanky/67-stereometrie-procvicovani-rezu

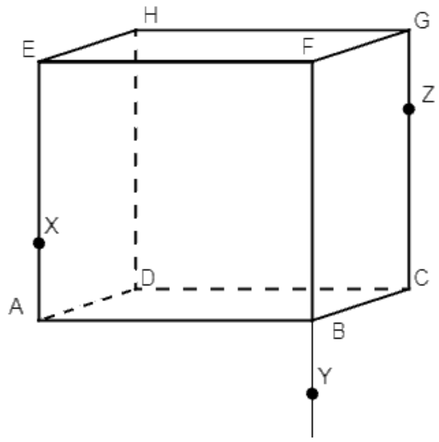
[78] Příklad 4. – vlastní tvorba, inspirace: POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia*. 4. vyd. Praha: Prometheus, 2009. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-389-9.

Příklad 5. : Sestrojte řez tělesa rovinou, která je dána body X, Y, Z.[79]

a)

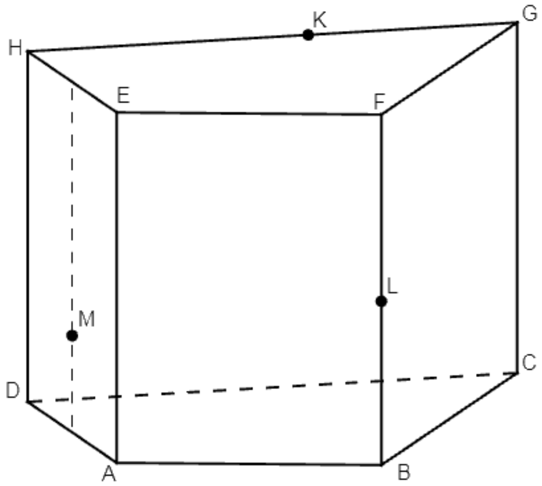


b)



Příklad 6. : Sestrojte řez pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ rovinou MNO. Bod M je střed hrany BC, bod N je bodem hrany CV, $|CN| : |NV| = 1 : 2$, bod O je bodem hrany DV, $|DO| : |OV| = 3 : 2$.[80]

Příklad 7. : Sestrojte řez čtyřbokého hranolu $ABCDEFGH$ rovinou KLM.[81]



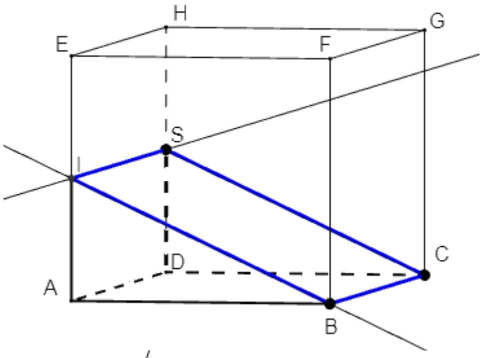
Poznámka: Pro lepší představivost je dobré mít jednotlivé příklady zpracované v elektronické podobě například v geogebře. Otáčení tělesa umožní žákům řez lépe vidět.

[79] Příklad 5. – vlastní tvorba, inspirace: [online]. Copyright © 2010 [cit. 02.05.2019]. Dostupné z: http://www.realisticky.cz
[80] Příklad 6. – vlastní tvorba, inspirace: POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia*. 4. vyd. Praha: Prometheus, 2009. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-389-9.
[81] Příklad 7. – převzato: [online]. Copyright © 2010 [cit. 02.05.2019]. Dostupné z: http://www.realisticky.cz

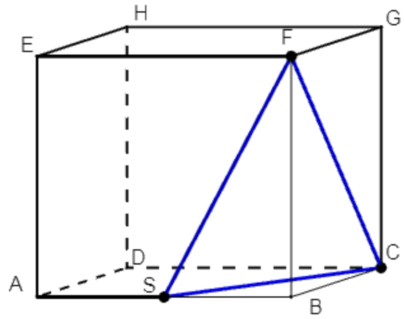
Správné řešení:

Příklad 1. :

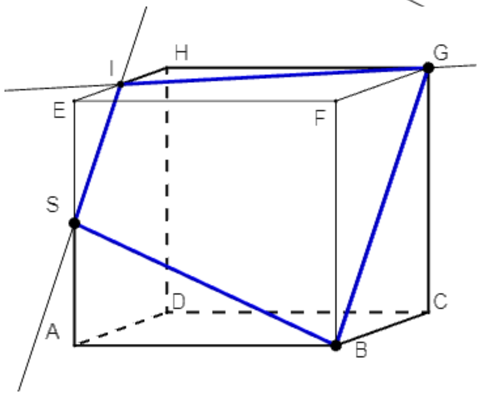
a)



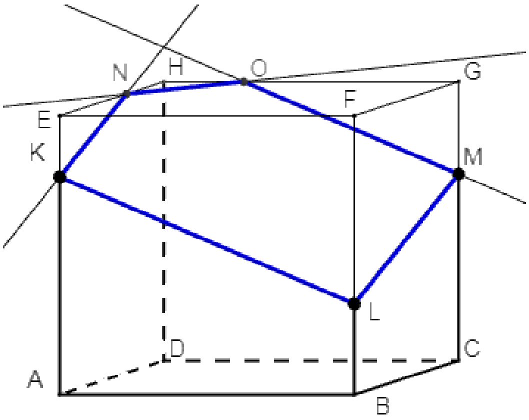
b)



c)

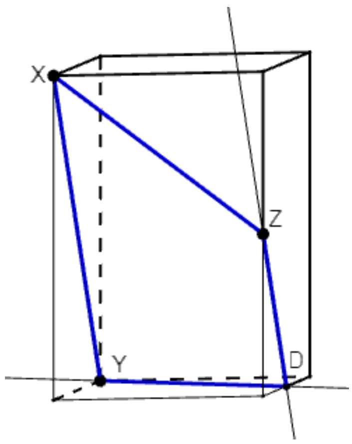


Příklad 2. :

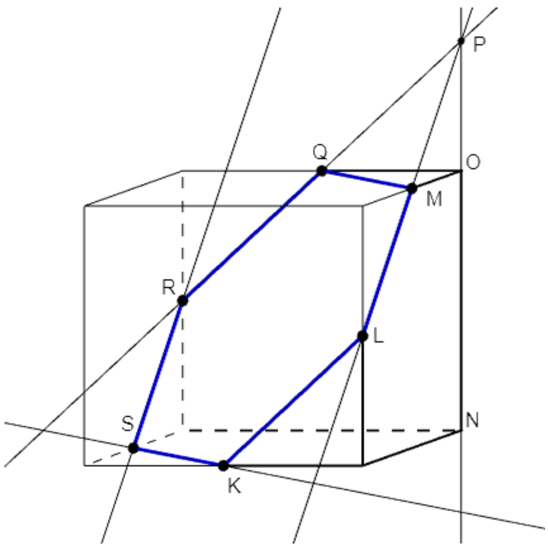


Příklad 3. :

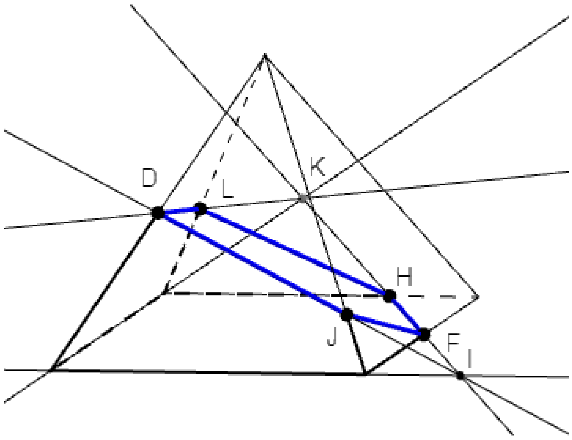
a)



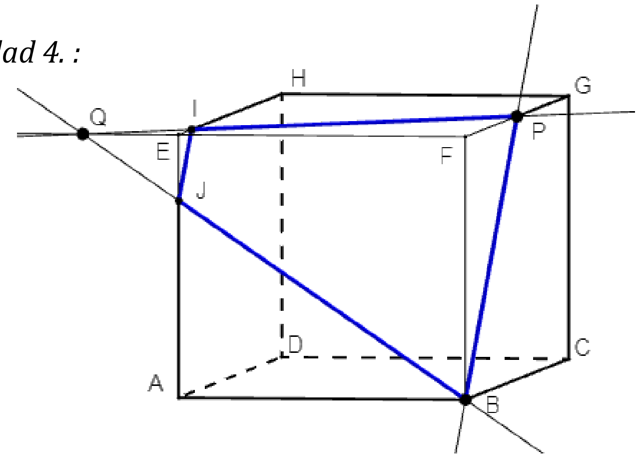
b)



c)

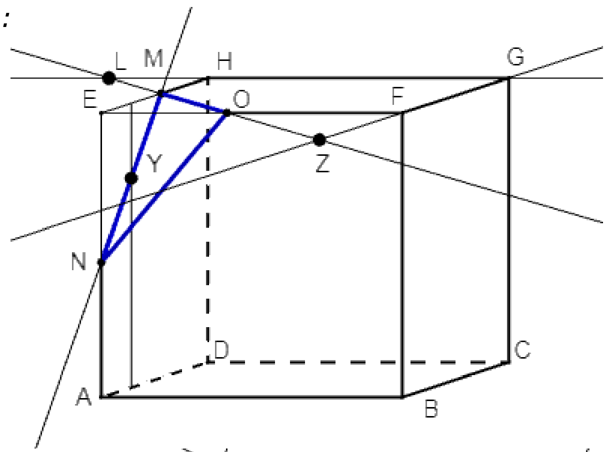


Příklad 4. :

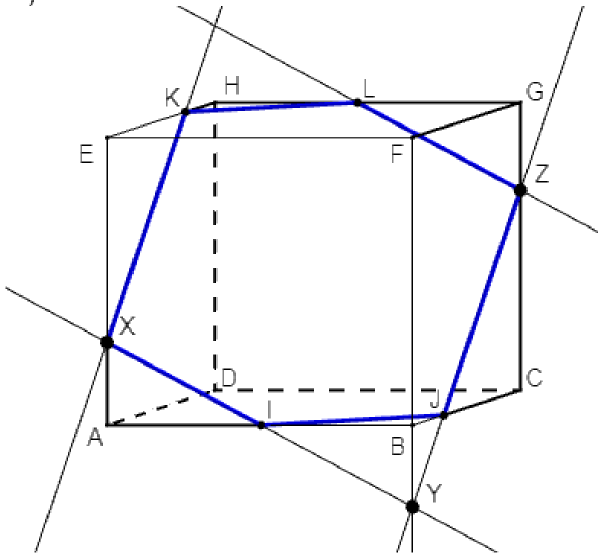


Příklad 5. :

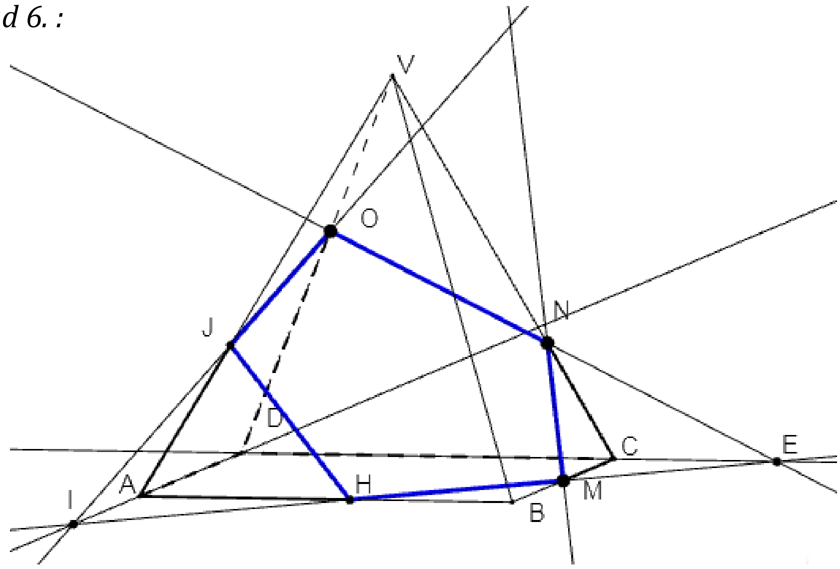
a)



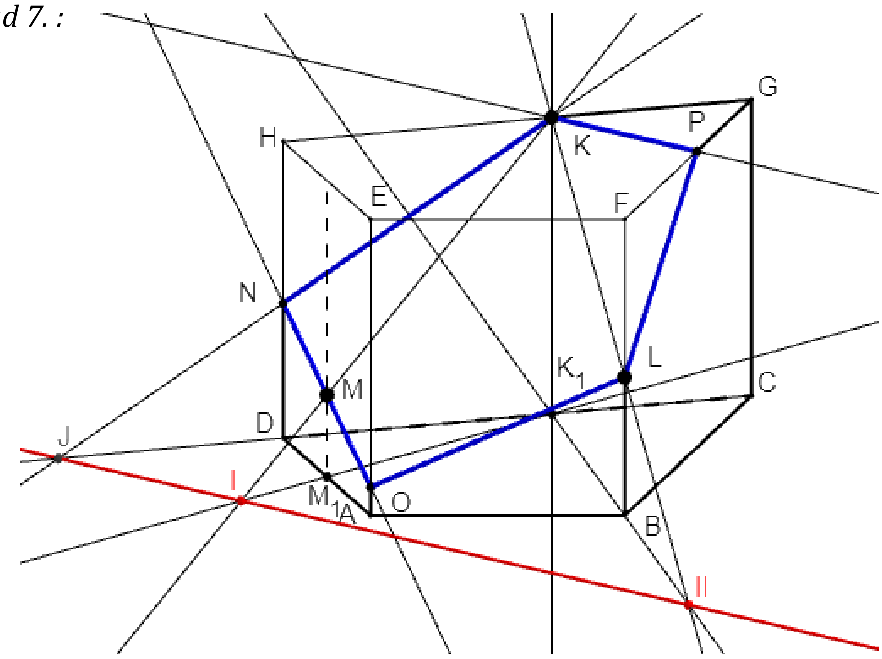
b)



Příklad 6. :



Příklad 7. :



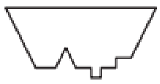
2.2 Didaktický výstup

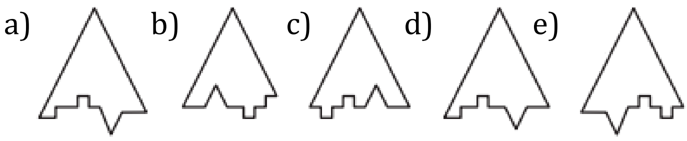
Sestavila jsem tři pracovní listy. Pomocí prvních dvou jsem chtěla zjistit na jaké úrovni je prostorová představivost žáků nižšího a vyššího gymnázia. Podmínky měly všechny skupiny stejné. Každý z žáků dostal svůj pracovní list. Pro vypracování byl stanoven časový limit 30 minut. Cílem třetího pracovního listu bylo na základě vlastnoručně vyrobených modelů zjistit správné řešení jednotlivých příkladů. Pro sestavení pracovních listů jsem použila příklady ze sbírky příkladů mé diplomové práce.

2.2.1 Pracovní list 1

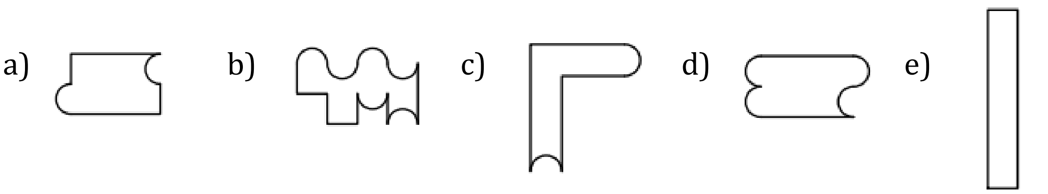
<u>Pracovní list 1:</u>

Příklad 1. : Který z daných útvarů doplní útvar ze zadání tak, aby vznikl trojúhelník?

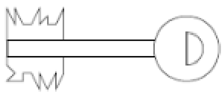


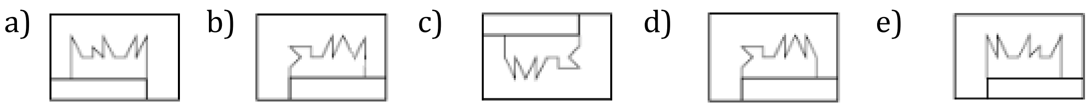


Příklad 2. : Sestavením čtyř dílků lze sestavit různé tvary. Který z následujících obrazců nelze sestavit?

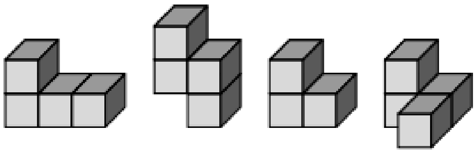


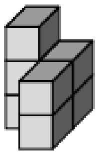
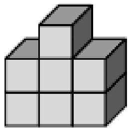
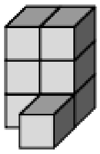
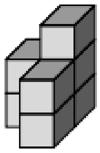
Příklad 3. : Na obrázku je oboustranný klíč. Který z nezorněných otisků nepatří tomuto klíči?



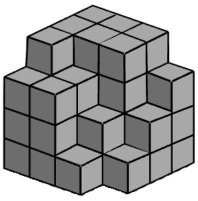


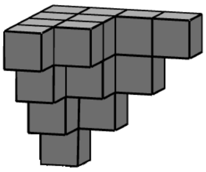
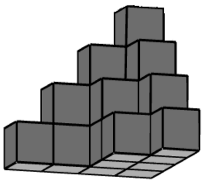
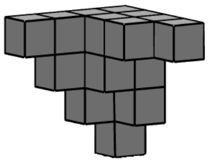
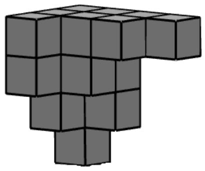
Příklad 4. : Která s následujících staveb nelze sestavit z těchto čtyř dílů stavebnice?



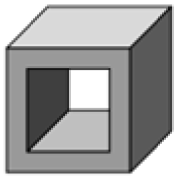
a)  b)  c)  d)  e) lze postavit vše

Příklad 5. : Který z daných možností doplní následující objekt do tvaru krychle?



a)  b)  c)  d) 

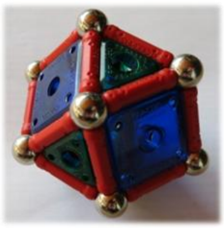
Příklad 6. : Kolik stěn má následující těleso?



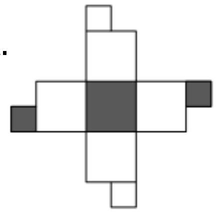
a) 6 b) 7 c) 8 d) 9 e) 10

Příklad 7.: Mnohostěn na obrázku má čtvercové a trojúhelníkové stěny. Každý čtverec sousedí se čtyřmi trojúhelníky. Každý trojúhelník sousedí se třemi čtverci. Mnohostěn má šest čtvercových stěn. Kolik má trojúhelníkových stěn?

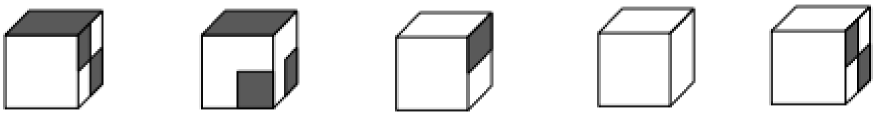
a)5 b) 6 c) 7 d) 8 e) 9



Příklad 8. : Přiřaďte k dané síti správnou krychli.

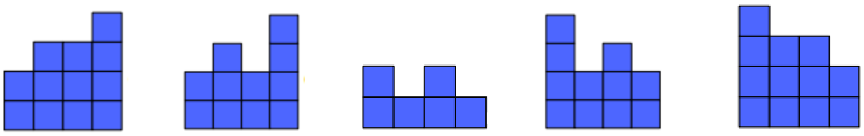


a) b) c) d) e)



Příklad 9. : Na plánku vidíme stavbu při pohledu shora. Čísla uvádějí počet krychlí, které jsou postaveny nad sebou. Co uvidíme, když se na stavbu podíváme zezadu?

a) b) c) d) e)



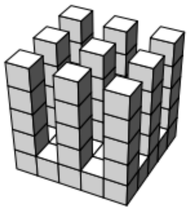
vzadu

4	2	3	2
3	3	1	2
2	1	3	1
1	2	1	2

vpředu

Příklad 10. : Z krychle jsme odebrali několik krychliček. Zbyly pouze pilíře stejné délky stojící na jedné základně. Kolik krychliček jsme museli odebrat, aby vznikla tato stavba?

a) 60 b) 64 c) 68 d) 72 e) 76



Pracovní list jsem sestavila pro žáky nižšího gymnázia konkrétně pro primu a sekundu.

Na začátku hodiny jsem žákům vysvětlila základní pravidla pro vypracování testu:

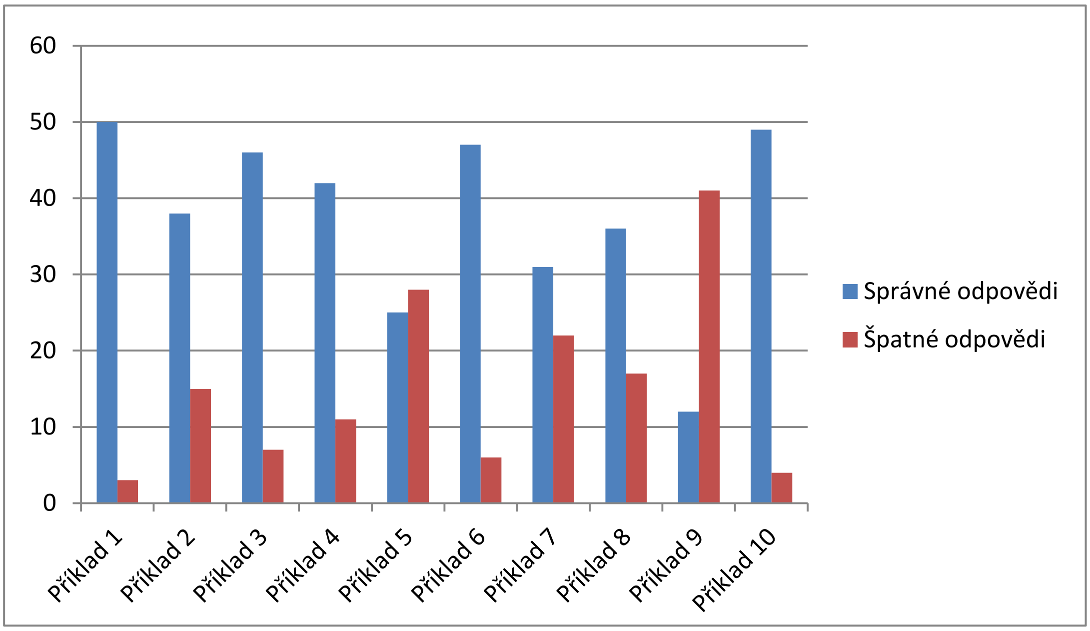
- samostatná práce,
- používat pouze psací potřeby,
- nevyužívat modely.

Modely nebyly využity záměrně. Chtěla jsem zjistit od žáků, kde by model sami využili.

Během řešení žáci měli nejvíce dotazů k příkladu číslo 2 a 4. Ze zadání totiž nevyplývá, zda musí využít všechny obrazce, nebo zda s nimi mohou libovolně otáčet. Po uplynutí časového limitu jsme společně vyhodnotili jednotlivé úlohy. Žáci poté měli za úkol označit maximálně tři nejtěžší a tři nejlehčí příklady. Vše záleželo na jejich vlastním uvážení. Nebyli ničím a nikým nijak ovlivňováni. Na závěr měli žáci zakroužkovat úlohy, u kterých by uvítali jakýkoli druh modelu.

Vyhodnocení: Pracovní list vypracovalo celkem 53 žáků. Za nejlehčí úlohy žáci považují příklady 1, 6 a 10. Naopak nejtěžší 5, 7 a 9. Modely by žáci uvítali u příkladu 4, 7 a 9.

Příklad	Počet správných odpovědí	Počet špatných odpovědí	Procentuální úspěšnost
1	50	3	94,3%
2	38	15	71,7%
3	46	7	86,8%
4	42	11	79,2%
5	25	28	47,2%
6	47	6	88,7%
7	31	22	58,5%
8	36	17	68%
9	12	41	22,6%
10	49	4	92,5%

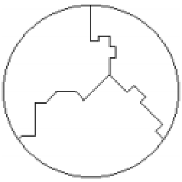


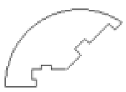
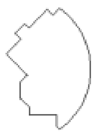
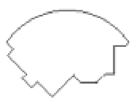
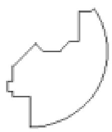
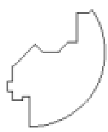
Graf 1: Úspěšnost řešení

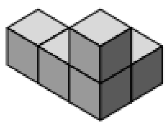
Z grafu vidíme, že nejvíce problematickým byl příklad 9. Po diskuzi s dětmi vyplynulo, že na stavbu pohlíželi spíše zepředu. Chyba nebyla ve srozumitelnosti příkladu.

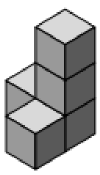
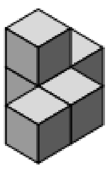
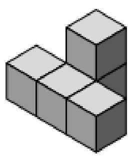
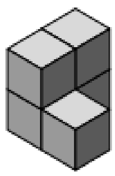
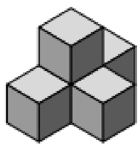
2.2.2 Pracovní list 2

<u>Pracovní list 2:</u>

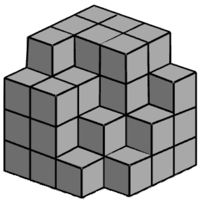
Příklad 1. : Kruh je rozdělen na tři díly. Který z následujících dílů není součástí kruhu: 

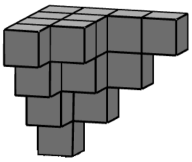
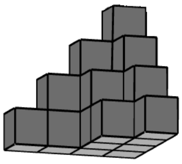
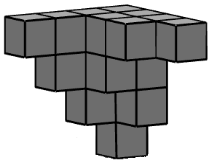
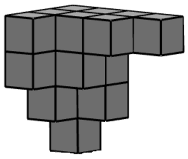
a)  b)  c)  d)  e) 

Příklad 2. : Máme stavbu z pěti kostek. Kterou z následujících staveb nemůžeme získat po přesunutí jedné kostky? 

a)  b)  c)  d)  e) 

Příklad 3. : Která z daných možností doplní následující objekt do tvaru krychle?

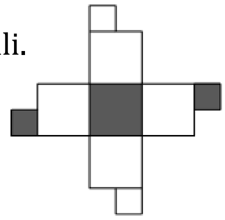


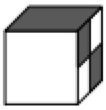
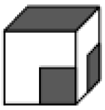
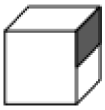
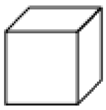
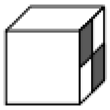
a)  b)  c)  d) 

Příklad 4. : Kolik tělesových úhlopříček má pravidelný šestiboký hranol.

a) 6 b) 12 c) 18 d) 24 e) 36

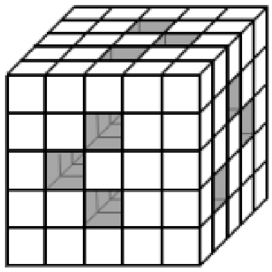
Příklad 5. : Přiřaďte k dané síti správnou krychli.



a)  b)  c)  d)  e) 

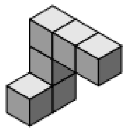
Příklad 6. : Daná krychle má rozměry 5x5x5. Postupně jsme vytvořili devět otvorů skrz celé těleso. Úprava probíhá ve třech fázích:

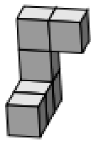
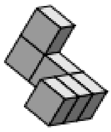
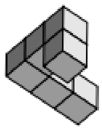
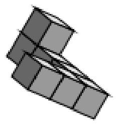
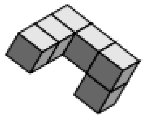
- v první fázi jsme vysunuli 3 sloupce shora dolů
- ve druhé fázi se vysunuli 3 otvory zepředu dozadu
- ve třetí fázi se vysunuli 3 otvory zprava doleva.



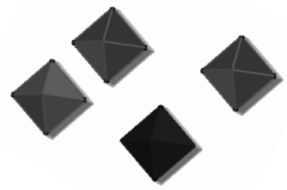
6.1. : Kolik malých krychlí jsme vysunuli během druhé fáze?

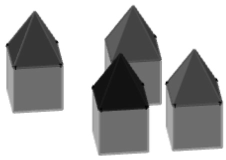
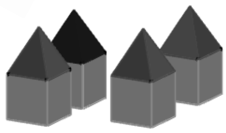
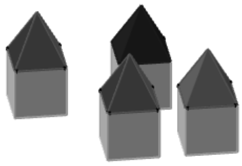
6.2. : Z kolika krychliček se skládá těleso, vzniklé po vytvoření devíti otvorů?

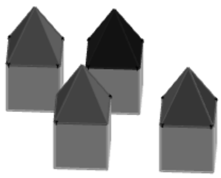
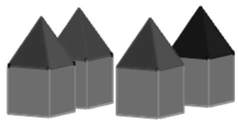
Příklad 7. : Z kostek jsme sestavili následující těleso. Otáčíme jím různými směry. Které těleso po rotaci nemůžeme vidět? 

a)  b)  c)  d)  e) 

Příklad 8. : Na leteckém snímku vidíme vesnici. Která z daných možností zobrazuje stejnou vesnici?

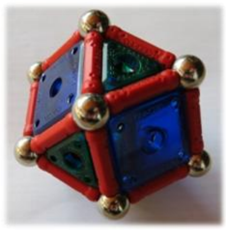


a)  b)  c) 

d)  e) 

Příklad 9.: Mnohostěn na obrázku má čtvercové a trojúhelníkové stěny. Každý čtverec sousedí se čtyřmi trojúhelníky. Každý trojúhelník sousedí se třemi čtverci. Mnohostěn má šest čtvercových stěn. Kolik má trojúhelníkových stěn?

a)5 b) 6 c) 7 d) 8 e) 9



Pracovní list jsem sestavila pro žáky vyššího gymnázia konkrétně pro kvintu a oktávu.

Na začátku hodiny jsem žákům vysvětlila základní pravidla pro vypracování testu:

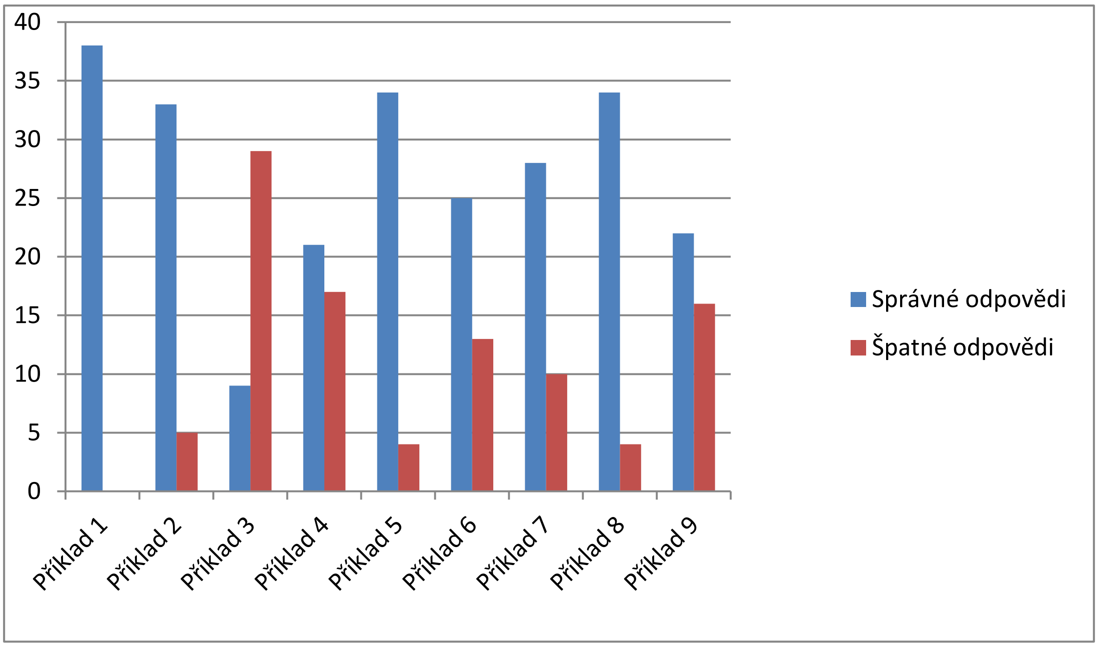
- samostatná práce,
- používat pouze psací potřeby,
- nevyužívat modely.

Modely nebyly využity záměrně. Chtěla jsem zjistit od žáků, kde by model sami využili.

Během řešení žáci měli nejvíce dotazů k příkladu číslo 2 a 4. V příkladu číslo dvě měli žáci problém s přesností zadání. Teoreticky by byly možné dvě správné odpovědi. Jestliže můžeme s kostkami libovolně otáčet, pak by mohla být za správnou odpověď považována i odpověď *a*. V tomto případě totiž nepohneme ani s jednou kostkou. Někteří žáci měli u příkladu číslo 4 hlavní problém s pojmem tělesová úhlopříčka. Po uplynutí časového limitu žáci opět vyhodnotili jednotlivé úkoly. Dle vlastního uvážení označili maximálně tři nejtěžší a tři nejlehčí příklady. Na závěr měli žáci zakroužkovat úlohy, u kterých by uvítali jakýkoli druh modelu.

Vyhodnocení: Pracovní list vypracovalo celkem 38 žáků. Za nejlehčí úlohy žáci považují příklady 1, 2 a 5. Naopak nejtěžší 3,6 a 9. Modely by žáci uvítali u příkladu 7 a 9.

Příklad	Počet správných odpovědí	Počet špatných odpovědí	Procentuální úspěšnost
1	38	0	100%
2	33	5	86,8%
3	9	29	23,7%
4	21	17	55,3%
5	34	4	89,5%
6	25	13	65,8%
7	28	10	73,7%
8	34	4	89,5%
9	22	16	57,9%



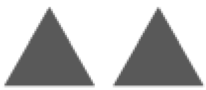
Graf 2: Úspěšnost řešení

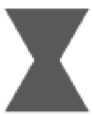
Z grafu vidíme, že nejvíce problematickým byl příklad 3. Příklad 5 jsem zařadila do obou pracovních listů. Vzhledem k procentuální úspěšnosti je vidět, že dochází ke zlepšení prostorové představivosti vzhledem k věku žáka, což samozřejmě nemusí být pravidlem. Velice překvapivá je neúspěšnost příkladu 4 a 9. Úroveň zadání příkladu 4 bych zařadila na nižší stupeň. Bohužel ani po diskuzi s žáky jsme nepřišli na příčinu špatných odpovědí.

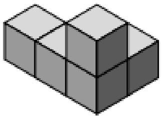
2.2.3 Pracovní list 3

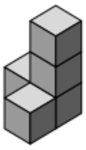
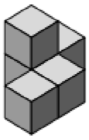
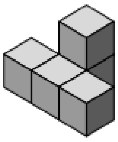
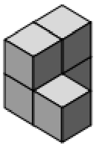
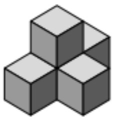
Pracovní list 3:

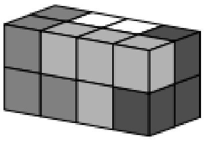
Příklad 1. : Máme vystřižené dva obrazce. Který z následujících obrazců nelze složit překládáním obou obrazců přes sebe nebo pokládáním vedle sebe?

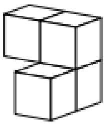
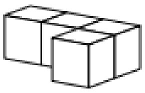
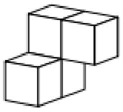
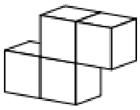
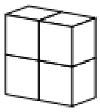


a)  b)  c)  d)  e) 

Příklad 2. : Máme stavbu z pěti kostek. Kterou z následujících staveb nemůžeme získat po přesunutí jedné kostky? 

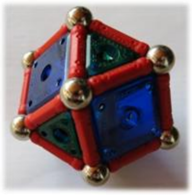
a)  b)  c)  d)  e) 

Příklad 3. : Následující kvádr je složen ze 4 částí. Každá je tvořena čtyřmi krychlemi stejné barvy. Jaký tvar má bílá část? 

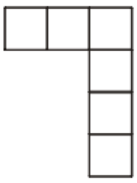
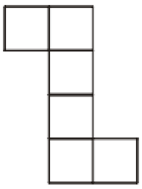
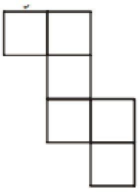
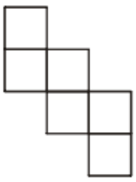
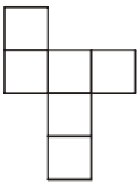
a)  b)  c)  d)  e) 

Příklad 4.: Mnohostěn na obrázku má čtvercové a trojúhelníkové stěny. Každý čtverec sousedí se čtyřmi trojúhelníky. Každý trojúhelník sousedí se třemi čtverci. Mnohostěn má šest čtvercových stěn. Kolik má trojúhelníkových stěn?

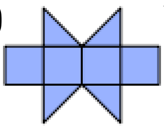
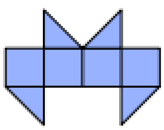
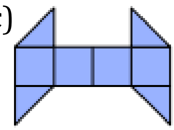
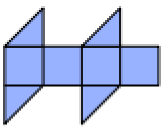
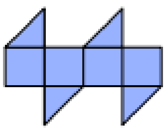
a)5 b) 6 c) 7 d) 8 e) 9



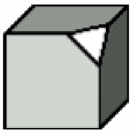
Příklad 5. : Rozhodněte, která z následujících sítí není síť krychle.

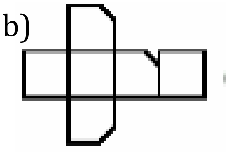
a)  b)  c)  d)  e) 

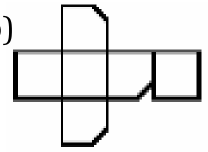
Příklad 6. : Jedna z následujících sítí nelze sestavit do tvaru krychle. Která to je

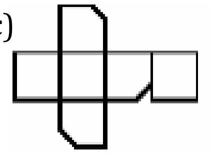
b)  b)  c)  d)  e) 

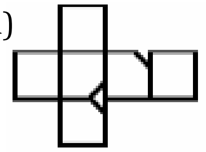
Příklad 7. : Krychli jsme odřízli jeden roh. Která z daných sítí odpovídá tomuto tělesu?

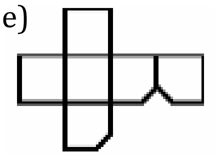


b) 

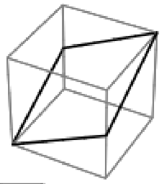
b) 

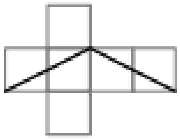
c) 

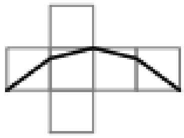
d) 

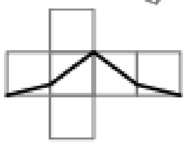
e) 

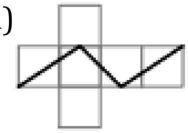
Příklad 8. : Na krychli je nakreslena lomená čára, která rozděluje krychli na dvě shodné části. Která síť náleží tomuto obrázku?

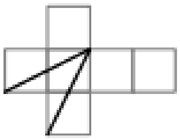


a) 

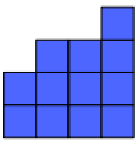
b) 

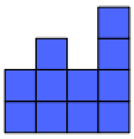
c) 

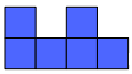
d) 

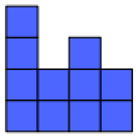
e) 

Příklad 9. : Na plánku vidíme stavbu při pohledu shora. Čísla uvádějí počet krychlí, které jsou postaveny nad sebou. Co uvidíme, když se na stavbu podíváme zezadu?

a) 

b) 

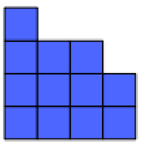
c) 

d) 

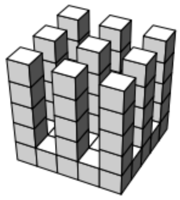
vzadu

4	2	3	2
3	3	1	2
2	1	3	1
1	2	1	2

vpředu

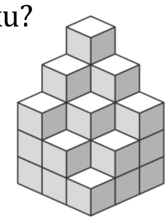
e) 

Příklad 10. : Z krychle jsme odebrali několik krychliček. Zbyly pouze pilíře stejné délky stojící na jedné základně. Kolik krychliček jsme museli odebrat, aby vznikla tato stavba?



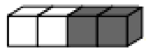
a) 60 b) 64 c) 68 d) 72 e) 76

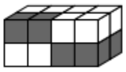
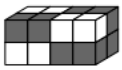
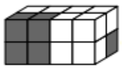
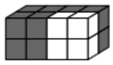
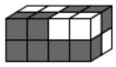
Příklad 11. : Z kolika kostek se skládá těleso na obrázku?



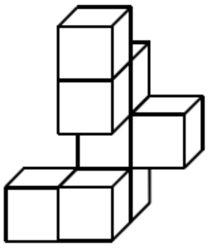
a) 20 b) 23 c) 25 d) 27 e) 30

Příklad 12. : Ze dvou sousedících bílých a dvou tmavých krychlí je složen hranol. Jedno z následujících těles lze sestavit ze čtyř takových hranolů. Které?



a)  b)  c)  d)  e) 

Příklad 13. : Po slepení následující modelu jsme všechny stěny natřely na bílo. (Tělesem můžeme libovolně otáčet.)



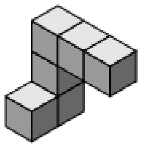
13.1. Kolik kostek má na bílo natřeno právě 4 stěny?

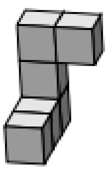
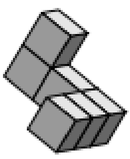
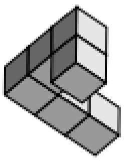
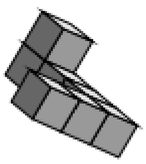
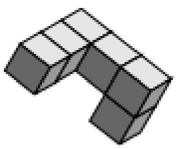
a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

13.2. Kolik kostek má na bílo natřeno méně než 4 stěny?

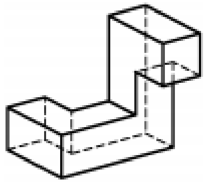
a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

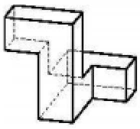
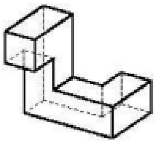
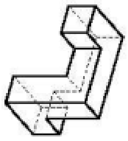
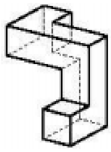
Příklad 14. : Z kostek jsme sestavili následující těleso. Otáčíme jím různými směry. Které těleso po rotaci nemůžeme vidět?



a)  b)  c)  d)  e) 

Příklad 15. : Na obrázcích E, F, G, H jsou čtyři tělesa. Která z těchto těles vznikla otáčením tělesa vpravo?



E  F  G  H 

a) E a G b) F a H c) G d) žádné e) E, F, G

Pracovní list jsem sestavila pro žáky nižšího gymnázia. Pro větší efektivnost jsem využila půlené hodiny v sekundě.

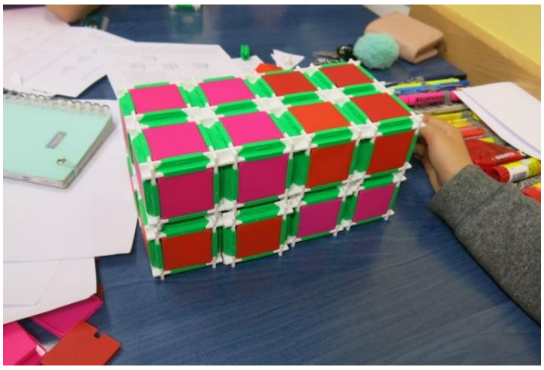
Na začátku hodiny jsem žákům vysvětlila základní pravidla pro vypracování testu:

- skupinová práce (3 – 4 žáci),
- sestavit co nejvíce modelů.

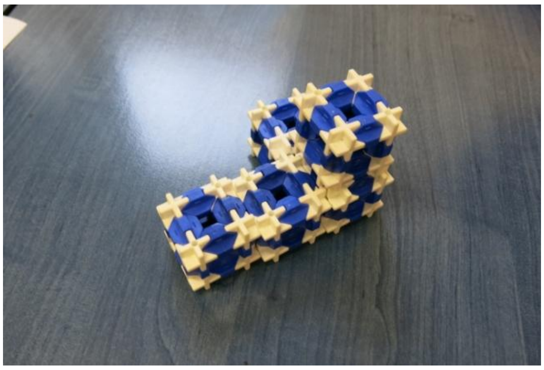
Každá skupinka dostala dvě shodná zadání. Jejich cílem bylo na základě vlastnoručně vytvořených modelů najít správnou odpověď na jednotlivé příklady. Pro vytvoření modelů jim byly poskytnuty různé materiály a pomůcky (stavebnice Seva, Geomag, dřevěné kostky, papír, špejle, …).

Vyhodnocení: Každá skupinka si rozdělila příklady tak, aby stihla sestavit co nejvíce modelů a vyřešit všechny příklady. Bohužel je jedna vyučovací hodina pro tuto aktivitu velice krátká. Žádná skupinka nezvládla splnit všechny úkoly. Sestavení modelů pomohlo žákům nejen odpovědět správně na dané příklady, ale rozvíjet i vizuálně prostorovou schopnost.

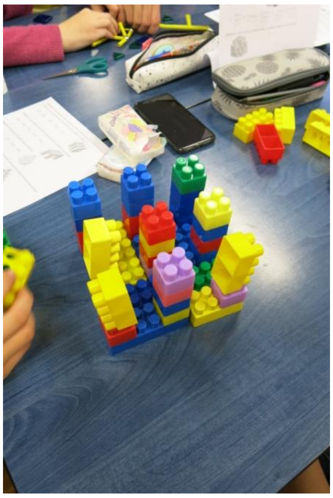
- model k příkladu 12. :



- model k příkladu 2. :



- model k příkladu 10. :



Závěr

Cílem této diplomové práce bylo zpracovat problematiku prostorové představivosti a jejího rozvoje z pohledu různých disciplín (psychologie, obecná didaktika). Následně měl být vytvořen soubor didaktického materiálu vhodného k rozvoji prostorové představivosti.

První část je zaměřena na dvě disciplíny, které nahlížejí na prostorovou představivost z různých úhlů pohledu. Psychologie se zabývá především vrozenými dispozicemi člověka. Alespoň okrajově se v této kapitole zabývám vnitřní strukturou osobnosti. Klíčovým tématem je však rozvoj schopností, kde je popsán i vývoj prostorové orientace a s ní spojená prostorová představivost jako součást matematických schopností. Prostorové představivosti jsem následně věnovala samostatnou kapitolu. Druhou disciplínou je obecná didaktika. Tato kapitola je věnována především poznávacímu procesu. Pomocí názorného schématu jsem popsala proces poznávání, které je založeno na konstruktivistickém principu. Tuto teorii jsem následně využila pro sestavení sbírky úloh.

V praktické části jsem nejprve vytvořila sbírku příkladů. Úlohy jsem se snažila sestavovat od nejlehčích až po nejtěžší. Samozřejmě tento názor je čistě subjektivní. Někomu se zdají náročné i základní úlohy. Valnou většinu příkladů můžeme znát již z prvního nebo druhého stupně základní školy. Vzhledem k tomu, že matematika je předmětem, kde na sebe jednotlivé látky navazují, považuji za důležité, úroveň obtížnosti postupně zvyšovat. Správné základy a důsledné procvičování mohou vést ke zlepšení prostorové představivosti žáků.

V závěrečné fázi jsem sestavila tři pracovní listy. K sestavení jsem využila pouze úlohy ze sbírky příkladů mé diplomové práce. Cílem bylo zjistit úroveň a problematiku prostorové představivosti u žáků.

Poznatky, které jsem získala díky psaní této diplomové práce, bych ráda využila i v učitelské praxi.

Seznam použité literatury:

1) BOČEK, Leo a Jiří KADLEČEK. *Základy stereometrie: pro 2. ročník tříd gymnázií se zaměřením na matematiku*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1986, 174 s.
2) HEJNÝ, Milan a František KUŘINA. *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování*. 2., aktualiz. vyd. Praha: Portál, 2009, 232 s. Pedagogická praxe. ISBN 978-80-7367-397-0.
3) HERMAN, Jiří. *Matematika – Kvarta: Jehlany a kužely*. Praha: Prometheus, 2001, 163 s. Učebnice pro základní školy. ISBN 80-7196-225-2.
4) HERMAN, Jiří. *Matematika – Sekunda: Hranoly*. Praha: Prometheus, 2003, 95 s. Učebnice pro základní školy. ISBN 80-7196-257-0.
5) KUŘINA, František a Jana CACHOVÁ. *Matematika a porozumění světu: setkání s matematikou po základní škole*. Praha: Academia, 2009, 332 s. ISBN 978-80-200-1743-7.
6) MOLNÁR, Josef. *Rozvíjení prostorové představivosti (nejen) ve stereometrii*. 2., rozš. vyd. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2009. ISBN 978-80-244-2254-1.
7) PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. Praha: Prometheus, 1998, 303 s. Učebnice pro střední školy. ISBN 80-7196-099-3.
8) POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia*. 4. vyd. Praha: Prometheus, 2009. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 978-80-7196-389-9.
9) TLUSTÝ, Pavel. *Každý den s matematikou: logické úlohy, zajímavé hříčky, grafické hádanky*. Plzeň: Fraus, [2018]. ISBN 978-80-7489-404-6.

Internetové zdroje

1) CERMAT :: . *CERMAT ::* [online]. Copyright © 2010 CERMAT [cit. 02.05.2019]. Dostupné z: https://www.cermat.cz/testova-zadani-k-procvicovani-u-osmileta-gymnazia-matematika-1404035565.html
2) *Document Moved* [online]. Copyright © [cit. 02.05.2019]. Dostupné z: https://www.unob.cz/fvl/studium/Documents/test-3.blok.pdf
3) Matematický klokan. *Matematický klokan* [online]. [cit. 02.05.2019]. Dostupné z: http://matematickyklokan.net
4) Matematika pro každého. *Matematika pro každého* [online]. Copyright © maths.cz 2008 [cit. 06.05.2019]. Dostupné z: https://maths.cz/clanky/67-stereometrie-procvicovani-rezu
5) [online]. Copyright © 2010 [cit. 02.05.2019]. Dostupné z: http://www.realisticky.cz