



# VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

## FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

## ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A BIOMECHANIKY

INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND BIOMECHANICS

## VLIV KOMBINACE PROSTÉHO NAMÁHÁNÍ PRUTŮ NA BEZPEČNOST K MEZNÍMU STAVU PRUŽNOSTI

INFLUENCE OF COMBINATION OF SIMPLE BEAM LOADING ON THE SAFETY WITH RESPECT TO THE  
LIMIT STATE OF ELASTICITY

### BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

### AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Róbert Gális

### VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. Petr Kubík, Ph.D.

BRNO 2021

# Zadání bakalářské práce

Ústav:	Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky
Student:	<b>Róbert Gális</b>
Studijní program:	Strojírenství
Studijní obor:	Základy strojního inženýrství
Vedoucí práce:	<b>Ing. Petr Kubík, Ph.D.</b>
Akademický rok:	2020/21

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

## **Vliv kombinace prostého namáhání prutů na bezpečnost k meznímu stavu pružnosti**

### **Stručná charakteristika problematiky úkolu:**

V technické praxi je mnoho součástí zatěžováno různými kombinacemi prostého namáhání. Tato práce bude zaměřena na vyhodnocení bezpečnosti k meznímu stavu pružnosti u prutů s různými příčnými průřezy. Bude provedena analýza vlivu kombinace prostého namáhání na tento mezní stav. Pro řešení této problematiky bude využito analytické metody a metody konečných prvků.

### **Cíle bakalářské práce:**

1. Rešerše zaměřená na prosté a kombinované namáhání prutů, mezní stav pružnosti a podmínky plasticity.
2. Stanovení bezpečnosti k meznímu stavu pružnosti u prutů s různými příčnými průřezy, které jsou podrobeny kombinovanému namáhání.
3. Zhodnocení výsledků

### **Seznam doporučené literatury:**

JANÍČEK, P., ONDRÁČEK, E., VRBKA, J. a BURŠA, J. Mechanika těles: Pružnost a pevnost I, Akademické nakladatelství CERM, s.r.o., Brno, 2004.

FLORIAN, Z., PŘIKRYL, K., ONDRÁČEK, E. Mechanika těles - statika. Vyd. 3. Brno: PC-DIR, 1995.

PETRUŠKA, J.: Počítačové metody mechaniky - Metoda konečných prvků. Studijní opory [online]. 2003. Dostupný z www:

[http://www.umt.fme.vutbr.cz/index.php?option=com\\_content&task=view&id=79&Itemid=37](http://www.umt.fme.vutbr.cz/index.php?option=com_content&task=view&id=79&Itemid=37)

ZIENKIEWICZ, O., C., TAYLOR, R. L.: The finite element method, 5th ed., Arnold Publishers, London, 2000.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2020/21

V Brně, dne

L. S.

---

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.  
ředitel ústavu

---

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.  
děkan fakulty

## **Abstrakt**

Táto bakalárska práca sa zaoberá vyhodnocovaním vplyvu kombinácie prostého namáhania pre prúty s rôznymi typmi priečných priereзов z hľadiska medzného stavu pružnosti. V prvej časti práce sú zhrnuté teoretické poznatky o prostom a kombinovanom namáhaní, medznom stave pružnosti a metóde konečných prvkov. Následne je pre prúty rôznych priečných priereзов vyhodnotená bezpečnosť k medznému stavu pružnosti analytickým výpočtom a numerickým výpočtom pomocou metódy konečných prvkov.

## **Kľúčové slová**

Kombinované namáhanie, prút, priečny prierez, medzný stav pružnosti, metóda konečných prvkov.

## **Abstract**

This bachelor thesis deals with the evaluation of the influence of the combined loading for beams with different types of cross-sections in terms of the limit state of elasticity. The first part of the thesis summarizes the theoretical knowledge about simple and combined loading, the limit state of elasticity and the finite element method. Then, the safety of the limit state of elasticity is evaluated for the beams of different cross-sections by analytical calculations and numerical calculations using the finite element method.

## **Keywords**

Combined loading, beam, cross section, limit state of elasticity, finite element method.

### **Bibliografická citácia**

GÁLIS, Róbert. *Vliv kombinace prostého namáhání prutů na bezpečnost k meznímu stavu pružnosti*. Brno, 2021. Dostupné také z: <https://www.vutbr.cz/studenti/zav-prace/detail/132336>. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky. Vedoucí práce Ing. Petr Kubík, Ph.D.

## **Prehlásenie**

Prehlasujem, že som bakalársku prácu s názvom *Vliv kombinace prostého namáhání prutů na bezpečnost k meznímu stavu pružnosti* vypracoval samostatne pod vedením Ing. Petra Kubíka, Ph.D. s použitím odbornej literatúry a ďalších zdrojov uvedených v zozname použitých zdrojov.

V Brne dňa 21. 5. 2021

.....  
Róbert Gális

## **Pod'akovanie**

Týmto by som chcel poďakovať vedúcemu mojej bakalárskej práce, pánovi Ing. Petrovi Kubíkovi, Ph.D. za jeho vecné pripomienky, cenné rady, ochotu a čas venovaný pri tvorbe tejto práce.

# Obsah

1	Úvod .....	9
2	Teoretická časť .....	10
2.1	Prútové predpoklady .....	10
2.2	Jednoduché namáhanie .....	11
2.2.1	Ťah, tlak .....	11
2.2.2	Ohyb .....	12
2.2.3	Krútenie .....	14
2.3	Medzné stavy .....	15
2.3.1	Medzný stav pružnosti .....	15
2.3.2	Podmienka plasticity $\max \tau$ .....	17
2.3.3	Podmienka plasticity HMM .....	18
2.3.4	Súčiniteľ bezpečnosti .....	19
2.4	Kombinované namáhanie .....	19
2.4.1	Kombinácia N a $M_o$ .....	20
2.4.2	Kombinácia $M_o$ a $M_k$ .....	20
2.4.3	Kombinácia N a $M_k$ .....	21
2.4.4	Kombinácia $M_o$ a T .....	22
2.5	Metóda konečných prvkov .....	22
2.5.1	Rovnice rovnováhy .....	23
2.5.2	Geometrické rovnice .....	23
2.5.3	Konštitutívne vzťahy .....	24
2.5.4	Okrajové podmienky .....	24
2.5.5	Variačný princíp MKP .....	25
3	Výpočtová časť .....	27
3.1	Analytický výpočet .....	27
3.1.1	Prút s kruhovým prierezom zaťažený ohybom .....	27
3.1.2	Prút s kruhovým prierezom zaťažený krútením .....	28
3.1.3	Prút s kruhovým prierezom zaťažený kombináciou prostého namáhanie .....	29
3.1.4	Verifikácia .....	29
3.2	Numerický výpočet .....	30
3.2.1	Výpočtový model .....	31
3.2.2	Porovnanie prútov s kruhovým a eliptickým priečnym prierezom .....	32
3.2.3	Porovnanie prútov so štvorcovým a obdĺžnikovým priečnym prierezom .....	34
3.2.4	Prút s priečnym prierezom tvaru I .....	36
3.2.5	Prút s priečnym prierezom tvaru L .....	38
3.2.6	Prút s priečnym prierezom tvaru dutej elipsy .....	40
4	Záver .....	42
	Zoznam použitých zdrojov .....	43



# 1 Úvod

V technickej praxi sa pravidelne stretávame s konštrukciami a súčast'ami, ktoré majú tvar prútu a sú zaťažované kombináciou простého namáhania. Nielen rozmery a materiál, ale aj tvar priečného prierezu prútu ovplyvňujú vo veľkej miere mechanické vlastnosti celej súčasti, a preto je v praxi dôležité zvolit' vhodný tvar priečného prierezu, aby boli dosiahnuté požadované vlastnosti konštrukcie. Pre určenie schopnosti vyšetřovaného telesa plniť potrebné funkcie v daných zaťažových stavoch slúži vyjadrenie medzných stavov. Jedným z nich je medzný stav pružnosti, pri ktorého prekročení dochádza k vzniku plastických deformácií.

Bakalárska práca sa venuje vplyvu kombinácií простého namáhania, konkrétne kombinácii простého ohybu a простého krútenia, na medzný stav pružnosti pre prúty s rôznymi typmi priečnych prierezov. Takisto je pre jednotlivé prúty analyzované chovanie nebezpečných miest v prierezoch. Hlavným cieľom tejto práce je zhodnotenie použiteľnosti jednotlivých typov priečnych prierezov prútov s ohľadom na typ zaťaženia.

## 2 Teoretická časť

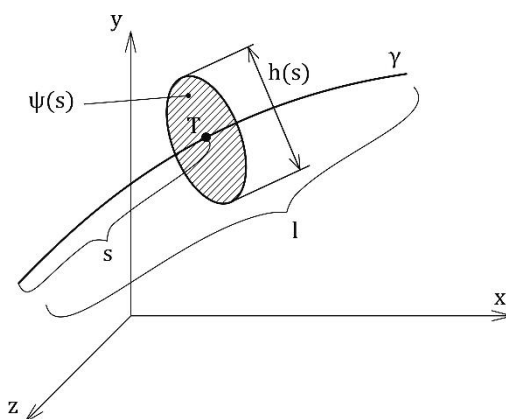
Pružnosť a pevnosť (PP) je základnou súčasťou mechaniky telies. Jej hlavným cieľom je analyzovať vplyv zaťaženia telesa na jeho napätosť a deformáciu, vzhľadom na riziko vzniku medzných stavov. Podľa stavu uvoľneného prvku sa pružnosť a pevnosť delí na dva typy. Kde nie je deformácia podstatná, je prvok uvoľnený v nedeformovanom stave - PP I. rádu. V prípade, že deformácia je podstatná, je nutné prvok uvoľniť v deformovanom stave – PP II. rádu [1].

Táto práca sa zaoberá kombináciou простého namáhania, čo je prípad PP I. rádu. Ide o prípad pružnosti a pevnosti zaoberajúcej sa jednorozmerným problémom, kde prvok je najčastejšie uvoľnený jednonásobne, pričom sa používa prútové teleso. Z hľadiska vyšetrenia deformácie a napätostí je prútové teleso najjednoduchším výpočtovým modelom reálneho telesa. Musí spĺňať isté geometrické a deformačné predpoklady a predpoklady napätosti, ktoré súhrnne nazývame prútové predpoklady [2].

### 2.1 Prútové predpoklady

#### 1) Geometrické predpoklady

Prút je určený strednicou  $\gamma$ , a v každom bode strednice pričným prierezom  $\psi$ . Strednica  $\gamma$  je spojnicou ťažísk jednotlivých pričných prierezov  $\psi$  (obr. 1). Spojnica je spojitá a hladká krivka konečnej dĺžky. Dĺžka strednice  $l$  je minimálne rovnako veľká ako najväčší rozmer  $h_{\max}$  pričného prierezu, väčšinou  $l \gg h_{\max}$  [1, 2].



Obr. 1: Strednica a pričný prierez. Prekreslené z [2]

#### 2) Väzbové a zaťažujúce predpoklady

Väzby obmedzujú posuv a natočenie strednice. Zaťaženie pôsobí iba na strednicu. Uvažujeme väzby bodové (klbová podpora pevná, posuvná) a votknutie [2].

#### 3) Deformačné predpoklady

Strednica  $\gamma$  zostáva po zaťažení spojitou a hladkou krivkou. Zároveň prierezy zostávajú rovinné a kolmé k deformovanej strednici, iba sa vzájomne [1, 2]:

- odd'ávajú (ťah)
- približujú (tlak)
- natáčajú okolo osi ležiacej v pričnom priereze a deformujú (ohyb)

- natáčajú okolo osi kolmej k pričnému prierezu a nedeformujú (krútenie)
- posúvajú kolmo k strednici (šmyk)

#### 4) Predpoklady napätosti

V bode prútu je napätosť definovaná normálovým a šmykovým napätím v pričnom priereze vedenom týmto bodom a zároveň všetky ostatné zložky tenzoru napätia<sup>1</sup> sú nulové. Táto napätosť sa nazýva prúťová napätosť [1].

## 2.2 Jednoduché namáhanie

V prípade, že v každom bode strednice prútu pôsobí iba jedna zložka vnútorných výsledných účinkov (VVÚ), prút spĺňa prúťové predpoklady, deformáciu a napätosť možno riešiť samostatne a pre riešenie statickej rovnováhy prvku je deformácia nepodstatná, jedná sa o jednoduché namáhanie [1, 3].

### 2.2.1 Ťah, tlak

Prostým ťahom (tlakom) nazývame namáhanie priameho prizmatickeho<sup>2</sup> prútu v prípade, že platí [3]:

- priečne prierezy sa oddaľujú/približujú a následne deformujú
- platia prúťové predpoklady
- jedinou nenulovou zložkou VVÚ je normálová sila  $\vec{N}$
- pre riešenie statickej rovnováhy sa prvok uvoľňuje v pôvodnom nedeformovanom stave

Pri ťahovom (tlakovom) zaťažení prútu sa limitne blízke priečne prierezy  $\psi_1, \psi_2$  elementárneho prvku  $\Omega_1$ , vzdialené o  $dx$ , oddialia (približia) o deformačný posuv  $du$ . Pričom  $du$  je rovnaký pre všetky body  $\psi$ . Pravé uhly  $\alpha, \beta$  zostanú nezmenené (obr. 2). Z týchto deformácií následne vyplývajú tieto deformačné charakteristiky [1]:

- Dĺžkové pretvorenie  $\varepsilon_x$  v smere strednice prútu:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} \quad (1)$$

- Keďže posuv  $du$  je rovnaký pre všetky body  $\psi$ , platí:

$$\varepsilon_x(y, z) = \frac{du}{dx} = konst. \quad (2)$$

- Nulové uhlové pretvorenie:

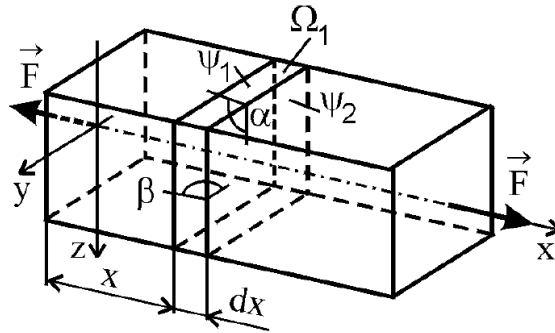
$$\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = 0 \quad (3)$$

- Dĺžkové pretvorenia v pričnom priereze:

$$\varepsilon_z = \varepsilon_y = -\mu\varepsilon_x \quad (4)$$

<sup>1</sup> Veličina určená 9 zložkami napätia, z ktorých šesť je nezávislých (normálové a šmykové), je daný maticou symetrickou okolo hlavnej diagonály [14]

<sup>2</sup> Prút, ktorý má v každom bode strednice rovnaký prierez a hlavné centrálné osi majú rovnaký smer [1]



Obr. 2: Prút namáhaný ťahom [1]

„Pri prostom ťahu (tlaku) sú normálové napätia  $\sigma$  v pričnom priereze  $\psi$  rozložené rovnomerne a šmykové napätia  $\tau$  sú nulové [3].“ Napätosť v bode telesa je jednoosová, pričom podľa znamienka  $\sigma$  rozlišujeme napätosť ťahovú ( $\sigma > 0$ ) a tlakovú ( $\sigma < 0$ ). Táto napätosť je určená napätím [1, 3]:

$$\sigma = \frac{N}{S} \quad (5)$$

- Pre konečný prvok dĺžky strednice  $\gamma$  sa veľkosť energie napätosti rovná:

$$W = \int_{\gamma} W_{\Omega_1} = \int_{\gamma} \frac{N^2}{2ES} dx \quad (6)$$

- Posuv každého bodu pričného prierezu konečného prvku s dĺžkou strednice  $\gamma$  je daný vzťahom:

$$u = \int_{\gamma} \frac{N dx}{ES} \quad (7)$$

## 2.2.2 Ohyb

Prostým ohybom nazývame namáhanie priameho prizmatického prútu v prípade, že platí [3]:

- pričné prierezy sa vzájomne natáčajú okolo osi ležiacej v pričnom priereze a následne deformujú
- platia prútové predpoklady
- nenulové zložky VVÚ sú iba ohybové momenty
- pre riešenie statickej rovnováhy sa prvok uvoľňuje v nedeformovanom stave

Pri prostom ohybe sú nenulové zložky VVÚ dve:  $\overrightarrow{M_{oy}}, \overrightarrow{M_{oz}}$ . Tento typ ohybu sa nazýva všeobecný (priestorový). Pre zjednodušenie sú všetky vzťahy odvodené pre tzv. základný ohyb, pri ktorom je jedna zložka nulová ( $\overrightarrow{M_{oy}} \neq 0, \overrightarrow{M_{oz}} = 0$ ) [1].

Pre geometrické vzťahy platí, že z prútu sa uvoľní jednonásobne elementárny prvok  $\Omega_1$  a z neho následne trojnásobne elementárny prvok  $\Omega_3$ . Prvok  $\Omega_1$  je deformovaný tak, že limitne blízke pričné prierezy  $\psi_1, \psi_2$  sa natočia okolo priamky ležiacej v pričnom priereze, pričom pôvodná dĺžka  $dx$  prvku  $\Omega_3$  sa zmení o deformačný posuv  $du$  (obr. 3) [1]. Prierezy prútu zostávajú kolmé k deformovanej strednici. Keďže pričné prierezy zostávajú aj po natočení rovinné a pri zvolenom základnom ohybe ( $M_o = M_{oy}$ ) sa natáčajú okolo priamky, ktorá je rovnobežná s osou  $y$ , sú posuvy  $du$  nezávislé na súradnici  $y$ . Preto pre opis posuvu  $du$  je postačujúca rovnica priamky a následné zložky tenzoru pretvorenia [1]:

$$du(z) = a_1 + b_1 z \quad (8)$$

- Dĺžkové pretvorenie v smere strednice prútu:

$$\varepsilon_x = \frac{du(z)}{dx} = a + bz \quad (9)$$

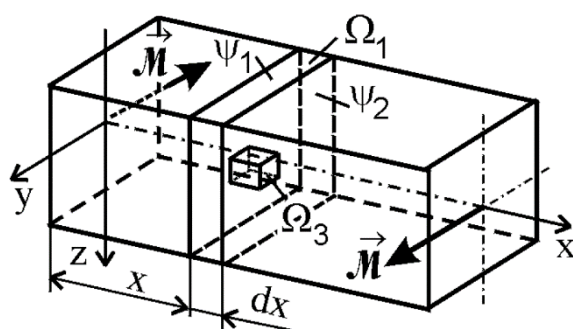
- Uhlové pretvorenia:

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = 0 \quad (10)$$

- Priečne pretvorenia:

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\mu\varepsilon_x \quad (11)$$

„Pri prostom ohybe sú dĺžkové pretvorenia rozložené v priečnom priereze lineárne a uhlové pretvorenia sú nulové [1].“



Obr. 3: Prút namáhaný ohybom [1]

Napätosť v bode telesa je jednoosová a v prípade, ak platí, že priečny prierez leží v hlavnom centrálnom súradnicovom systéme a  $\vec{M}_{oz} = 0$  je určená napätím [1, 2]:

$$\sigma = \frac{M_{oy}}{W_o} = \frac{M_{oy}}{J_y} z \quad (12)$$

- V prípade, že  $\vec{M}_{oz} \neq 0$  a zároveň  $\vec{M}_{oy} = 0$ , platí:

$$\sigma = -\frac{M_{oz}}{J_z} y \quad (13)$$

- Keďže obe napätia majú smer osi  $x$ , možno ich algebraicky sčítať:

$$\sigma = \frac{M_{oy}}{J_y} z - \frac{M_{oz}}{J_z} y \quad (14)$$

- Pre konečný prvok dĺžky strednice  $\gamma$  sa veľkosť energie napätosti rovná súčtu energií napätostí od zložiek :  $M_{oz}$  a  $M_{oy}$  ako základných ohybov:

$$W = \int_{\gamma} \frac{M_{oy}^2}{2EJ_y} dx + \int_{\gamma} \frac{M_{oz}^2}{2EJ_z} dx \quad (15)$$

Pri namáhaní ohybom dochádza k ohýbaniu strednice priameho prizmatického prútu, ktorý vytvára ohybovú čiaru. Posuvy bodov priečného prierezu je možné určiť v prípade, že sú známe deformačné charakteristiky, priehyby a uhly natočenia, v jednotlivých bodoch strednice. Pre vyjadrenie týchto deformácií sa používajú dva prístupy riešenia [1]:

### - Diferenciálny prístup

Predpokladáme základný ohyb okolo osi  $y$  a posuv strednice v smere osi  $z$  sa označuje  $w$ . Väčšina strojných súčastí musí byť dostatočne tuhá, a teda vplyvom ohybu ich deformácie musia byť malé ( $w'(x) \ll 1$ ). Následne diferenciálna rovnica priehybovej čiary má nasledujúci tvar, pričom znamienko záleží od zavedenej znamienkovej konvencie a orientácie os [1, 3]:

$$w'' = -\frac{M_{oy}}{EJ_y} \quad (16)$$

Diferenciálna rovnica priehybovej čiary sa rieši následnou integráciou, kde prvá integrácia  $w'(x)$  sa rovná natočeniu strednice o uhol  $\varphi$  a druhá integrácia  $w''(x)$  je rovná posuvu strednice v smere osi  $z$ . Integračné konštanty sú určené na základe okrajových podmienok pre celý prút a podmienok spojitosti posuvov a natočení na hraniciach daných úsekov [2].

### - Castigliánova veta (integrálny prístup)

Veľmi účinný prístup k analýze posuvov a uhlov natočenia je Castigliánova veta, ktorá hovorí, že posuv  $u_i$  pôsobiska ľubovoľnej sily po jej nositeľke je rovný parciálnej derivácii celkovej energie napätosti podľa tejto sily. Obdobne natočenie bodu  $\varphi_i$  sa rovná derivácii celkovej energie napätosti podľa silovej dvojice, ktorá v tomto bode pôsobí. Vzťahy pre tieto deformačné charakteristiky pre základný ohyb majú tvar [4]:

$$u_i = \frac{\partial W}{\partial F_i} = \int_{\gamma} \frac{M_{oy}}{EJ_y} \frac{\partial M_{oy}}{\partial F_i} dx \quad (17)$$

$$\varphi_i = \frac{\partial W}{\partial M_i} = \int_{\gamma} \frac{M_{oy}}{EJ_y} \frac{\partial M_{oy}}{\partial M_i} dx \quad (18)$$

## 2.2.3 Krútenie

Prostým krútením nazývame namáhanie priameho prizmatického prútu v prípade, že platí [3]:

- priečne prierezy sa vzájomne natáčajú okolo strednice prútu bez deformácie
- sú splnené prútové predpoklady
- jedinou nenulovou zložkou VVÚ je krútiaci moment  $\overrightarrow{M_k}$
- pre riešenie statickej rovnováhy sa prvok uvoľňuje v nedeformovanom stave
- priečný prierez je kruhový alebo medzikruhový

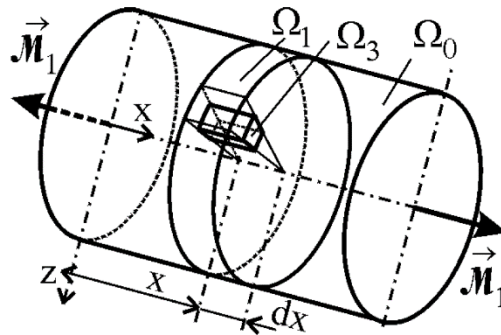
Pri namáhaní prostým krútením z hľadiska deformácie elementárnych prvkov  $\Omega_1$  a  $\Omega_3$  možno tvrdiť, že vzdialenosť  $dx$  limitne blízkych priečných prierezov  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  zostáva nezmenená, čo znamená že dĺžkové pretvorenie  $\epsilon_x$  je nulové (obr. 4). Keďže sa rozmerovo nemenia ani priečne prierezy, tak sú tiež nulové pretvorenia v radiálnom ( $\epsilon_r$ ) a obvodovom smere ( $\epsilon_\varphi$ ). Kvôli zachovaniu rovinnosti priečných prierezov sú nulové aj uhlové pretvorenia  $\gamma_{xr}$  a v dôsledku rotačne symetrického charakteru deformácie sú nulové tiež uhlové pretvorenia  $\gamma_{\varphi r}$  [3].

Jedinou nenulovou zložkou pretvorení je uhlové pretvorenie  $\gamma_{x\varphi}$ , ktoré vznikne v dôsledku toho, že čelá prvku  $\Omega_3$  ležiace v rezoch  $\psi_1$  a  $\psi_2$  sa vzájomne natočia o určitý elementárny uhol  $d\varphi$  [3]:

$$\gamma_{x\varphi} = \rho \vartheta \quad (19)$$

Kde,  $\rho$  je polomer všeobecného valcového rezu a  $\vartheta$  je pomerný uhol skrútenia:

$$\vartheta = \frac{d\varphi}{dx} \quad (20)$$



Obr. 4: Prút namáhaný krútením [1]

„Pri prostom krútení vznikajú v pričnom priereze šmykové napätia, ktoré sú po priereze rozložené lineárne, s nulovou hodnotou na strednici prútu. Normálové napätia sú nulové [1].“

- Vzťah pre výpočet šmykového napätia má tvar:

$$\tau = \frac{M_k}{W_k} = \frac{M_k}{J_p} \rho \quad (21)$$

- Pre konečný prvok dĺžky strednice  $\gamma$  sa veľkosť energie napätosti rovná:

$$W = \int_{\gamma} W_{\Omega_1} = \int_{\gamma} \frac{M_k^2}{2GJ_p} dx \quad (22)$$

- Uhol natočenia pričného prierezu v bode A vyjadrený pomocou Castigliánovej vety:

$$\varphi_A = \frac{\partial W}{\partial M_A} = \int_{\gamma} \frac{M_k}{GJ_p} \frac{\partial M_k}{\partial M_A} dx \quad (23)$$

## 2.3 Medzné stavy

Stav, kedy sa práve mení nejaká charakteristická schopnosť telesa plniť požadovanú funkciu alebo teleso úplne stráca túto schopnosť sa nazýva medzný stav. Na vznik medzného stavu pôsobí mnoho faktorov, ktoré sa delia na [1, 5]:

- vonkajšie faktory: mechanické zaťaženie, teplota, prostredie, energetické pole, chybná manipulácia
- vnútorné faktory: nevhodná voľba materiálu, nevhodná konštrukcia, vada materiálu, nedodržanie technológie

Hlavné delenie medzných stavov [5]:

- medzný stav deformácie
- medzný stav pružnosti
- medzný stav stability (vzpernej stability, tvarovej stability, stability trhlín)
- medzné stavy súvisiace s porušovaním telesa

### 2.3.1 Medzný stav pružnosti

Táto práca sa zaoberá hlavne medzným stavom pružnosti (MSP), ktorý je definovaný tak, že pri jeho prekročení dochádza v bode telesa k vzniku zistiteľných plastických deformácií [5].

Pre najjednoduchší popis medzného stavu pružnosti pri všeobecnej napätosti je nutné [3]:

- monotónne rastúce zaťažovanie
- izotropný<sup>3</sup> materiál z hľadiska MSP
- MSP opísaný jedinou materiálovou charakteristikou- výpočtovou medzou sklzu  $\sigma_K$

Pre určovanie MSP je taktiež dôležité sformulovanie tzv. podmienky plasticity, čo je jeho matematické vyjadrenie a je potrebné poznať medznú hodnotu- medzu sklzu  $\sigma_K$ .

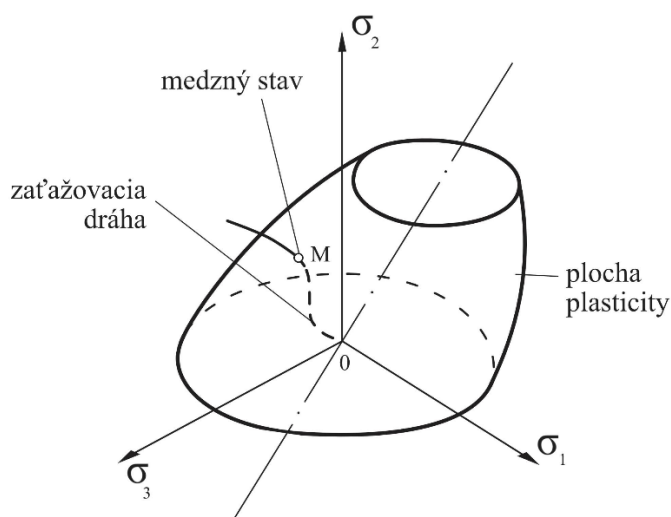
- Podmienku plasticity pre jednoosovú napätosť je možné vyjadriť v tvare [1]:

$$F(\sigma) = \sigma_K \quad (24)$$

- Podmienka plasticity pre trojosovú napätosť je daná funkciou tenzoru napätia:

$$F(T_\sigma) = F(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}) = \sigma_K \quad (25)$$

Grafické znázornenie podmienok plasticity je možné pomocou Haighovho priestoru (obr. 5), kde súradnicovými osami sú hlavné napätia. Podmienka plasticity je znázornená plochou, ktorá sa nazýva plocha plasticity. Zaťažovanie je znázornené krivkou (zaťažovacou dráhou) a jej priesečník s plochou plasticity predstavuje medzný stav pružnosti v Haighovom priestore [3].



Obr. 5: Podmienka plasticity v Haighovom priestore. Prekreslené z [2]

Medzný stav pružnosti je určený veľkosťou šmykového napätia  $|\tau_{\rho_K}|$  v istom reze  $\rho_K$  a podmienka plasticity má tvar [1]:

$$F(|\tau_{\rho_K}|) = M_K \quad (26)$$

Kde,  $M_K$  je materiálová charakteristika.

Najjednoduchšou formou funkcie  $F$  (vyjadrujúca podmienku plasticity) je funkcia lineárna, pričom podmienka plasticity má tvar [1]:

$$F(|\tau_{\rho_K}|) = |\tau_{\rho_K}| = \tau_{MK} \quad (27)$$

Kde,  $\tau_{MK}$  je materiálová konštanta.

Podľa voľby rezu  $\rho_K$  sa dajú získať rôzne podmienky plasticity. Medzi základné a najpoužívanejšie patria Trescova a Misesova.

<sup>3</sup> Materiál, ktorého mechanicko-fyzikálne vlastnosti sú rovnaké v každom smere [3]



### 2.3.2 Podmienka plasticity max $\tau$

Podmienka plasticity maximálnych šmykových napätí, známa tiež pod názvom Trescova podmienka, predpokladá, že rezom  $\rho_K$  je rez, v ktorom pôsobí maximálne šmykové napätie  $\tau_{max}$  a je vyjadrená vzťahom [3]:

$$\tau_{max} = \tau_{MK} \quad (28)$$

„Podľa podmienky plasticity max  $\tau$ , medzný stav pružnosti pri monotónnom zaťažovaní materiálu v základnom štruktúrnom stave z nezaťaženého stavu nastane, keď maximálne šmykové napätie dosiahne medznú hodnotu  $\tau_{MK}$ , ktorá je materiálovou charakteristikou [3].“

Všeobecná podmienka plasticity (pre hlavné napätia  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ ), ktorá platí pre akúkoľvek napätosť má tvar:

$$\sigma_K = \sigma_1 - \sigma_3 \quad (29)$$

Aby bolo možné určiť podmienku plasticity max  $\tau$  zo všeobecného vzťahu je nutné poznať všetky tri hlavné napätia. Avšak pre konkrétne typy napätostí je možné zjednodušiť túto podmienku plasticity, prípadne vzťah pre redukované napätie [1]:

– Jednoosová napätosť:

a) ťahová

$$\sigma = \sigma_K \quad (30)$$

b) tlaková

$$|\sigma| = \sigma_K \quad (31)$$

– Šmyková napätosť

$$\tau_K = \frac{\sigma_K}{2} \quad (32)$$

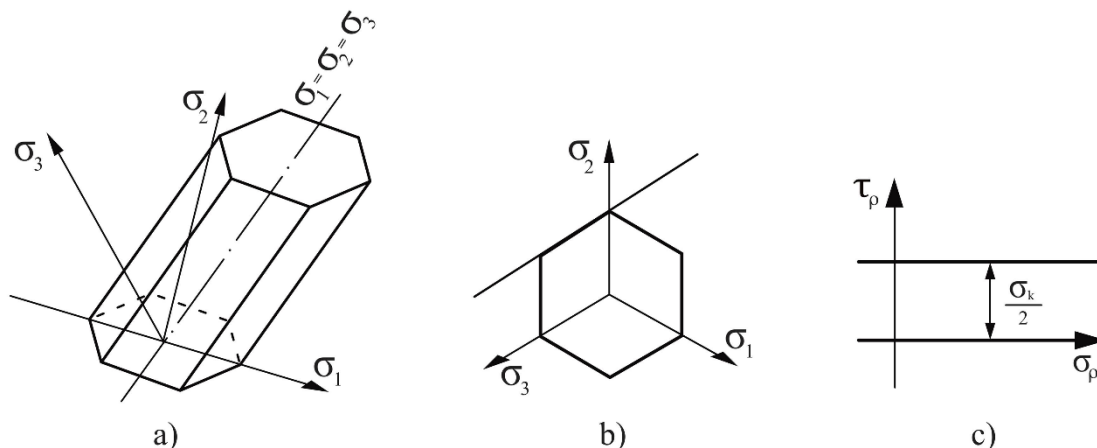
Kde,  $\tau_K$  je medza sklzu v šmyku.

– Prúťová napätosť:

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad (33)$$

„Redukované napätie  $\sigma_{red}$  je fiktívna hodnota jednoosového ťahového napätia, priradená danej viacosovej napätosti, ktorá má rovnakú prostú bezpečnosť voči vyšetovanému medznému stavu ako táto viacosová napätosť [1].“

Graficky sa dá podmienka plasticity max  $\tau$  znázorniť v Haighovom priestore ako povrch pravidelného šesťbokého hranola (obr. 6a). Krivkou plasticity je v oktaedrickej rovine pravidelný šesťuholník (obr. 6b). V Mohrovej rovine je to priamka vo vzdialenosti  $\frac{\sigma_K}{2}$  a maximálne Mohrove kružnice sa pri dosiahnutí medzného stavu tejto priamky dotýkajú (obr. 6c). Ak kružnice túto priamku pretínajú, je materiál v pružne plastickom stave a v prípade, že sa priamky nedotýkajú, materiál je v elastickom stave [3].



Obr. 6: Grafické znázornenie podmienky plasticity max  $\tau$ . Prekreslené z [3]

### 2.3.3 Podmienka plasticity HMH

Podmienka plasticity HMH, pomenovaná podľa pracovníkov Hancky-Hebur-Mises, ktorí ju nezávisle formulovali, predpokladá, že rezom  $\rho_K$  je oktaedrická rovina a je vyjadrená vzťahom [3]:

$$|\tau_O| = \tau_{OK} \quad (34)$$

„Podľa podmienky plasticity HMH, medzný stav pružnosti pri monotónnom zaťažovaní materiálu v základnom štruktúrnem stave z nezaťaženého stavu nastane, keď oktaedrické napätie dosiahne medznej hodnoty  $\tau_{OK}$ , ktorá je materiálovou charakteristikou [3].“

Podmienka plasticity HMH pre všeobecnú napätosť určenú hlavnými napätiami  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  má tvar [1]:

$$\sigma_K = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]} \quad (35)$$

Pre zvláštne typy napätostí je podmienka HMH vyjadrená vzťahmi:

- Jednoosová napätosť:

a) ťahová

$$\sigma = \sigma_K \quad (36)$$

b) tlaková

$$|\sigma| = \sigma_K \quad (37)$$

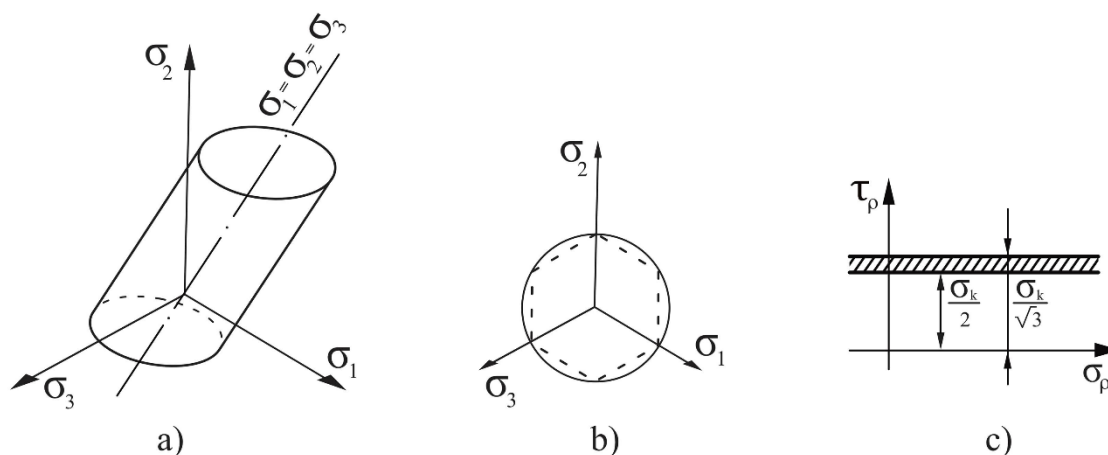
- Šmyková napätosť:

$$\tau_K = \frac{\sigma_K}{\sqrt{3}} \quad (38)$$

- Prúťová napätosť:

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \quad (39)$$

V Haighovom priestore je graficky znázornená podmienka plasticity HMH ako povrch valcovej plochy (obr. 7a). V oktaedrickej rovine je to kružnica opísaná pravidelnému šesťuholníku vyjadrujúcemu podmienku plasticity max  $\tau$  (obr. 7b). Aby bolo možné znázorniť podmienku HMH v Mohrovej rovine je nutné zaviesť Lodeho parameter  $\mu_\sigma$ , pomocou ktorého je vyjadrená veľkosť stredného napätia  $\sigma_2$ . Najväčší rozdiel medzi podmienkami max  $\tau$  a HMH v Mohrovej rovine je pre  $\mu_\sigma=0$ . V prípade  $\mu_\sigma=1$  sú obe podmienky zhodné (obr.7c) [1, 2].



Obr. 7: Grafické znázornenie podmienka plasticity HMM. Prekreslené z [3]

### 2.3.4 Súčiniteľ bezpečnosti

Pre vyjadrenie schopnosti telesa plniť požadovanú funkciu sa používa pojem spoľahlivosť sústavy. Spoľahlivosť je nutné posúdiť z hľadiska toho ako sa môžu zmeniť veličiny ovplyvňujúce medzný stav sústavy. Pri prevádzke danej sústavy nemožno pripustiť stavy blízke medzným stavom, musí existovať určitá rezerva - bezpečnosť. K určeniu bezpečnosti je nutné poznať veličinu ktorá popisuje vznik medzného stavu, ako napríklad deformačný parameter, redukované napätie, zaťažovaciu silu a podobne. Pre túto veličinu je koeficient bezpečnosti vyjadrený vzťahom [1]:

$$k = \frac{\alpha_M}{\alpha_P} \quad (40)$$

Kde,  $\alpha_M$  je medzná hodnota a  $\alpha_P$  vyjadruje prevádzkovú hodnotu príslušnej veličiny.

Pre medzný stav pružnosti je bezpečnosť:

$$k_k = \frac{\sigma_K}{\sigma_{max}} = \frac{\sigma_K}{\sigma_{red}} \quad (41)$$

## 2.4 Kombinované namáhanie

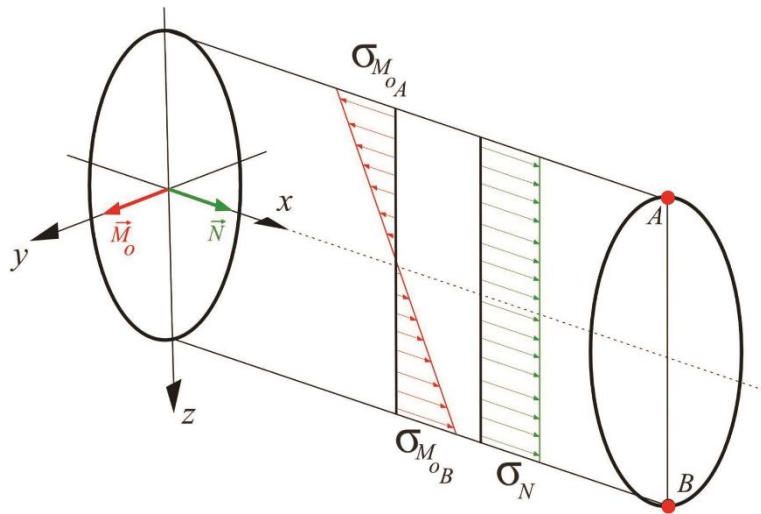
Kombinované namáhanie vzniká v prípade, že na teleso pôsobí kombinácia jednoduchých namáhaní. Pri ľubovoľnej kombinácii jednotlivých druhov namáhaní môže dôjsť k týmto prípadom napätostí [6]:

- jednoosová napätosť, kedy jediné normálové napätie  $\sigma$  je dané algebraickým súčtom jednotlivých napätí  $\sigma$  (napr. kombinácia  $M_o$  a  $N$ )
- rovinná napätosť s napätiami  $\sigma$  a  $\tau$  (napr. kombinácia  $M_o$  a  $T$ ,  $M_o$  a  $M_k$ )
- rovinná napätosť daná súčtom šmykových napätí  $\tau$  (napr. kombinácia  $M_k$  a  $T$ )

Základnými kombináciami jednoduchého namáhania sú [3]:

- kombinácia ťahu ( $N$ ) a ohybového momentu ( $M_o$ )
- kombinácia ohybového momentu a krútiaceho momentu ( $M_k$ )
- kombinácia ťahu a krútiaceho momentu
- kombinácia ohybového momentu a šmyku ( $T$ )

### 2.4.1 Kombinácia N a $M_o$



Obr. 8: Napätie a nebezpečné miesta v priečnom priereze kombinácie N a  $M_o$

- Napätie v bode priečného prierezu:

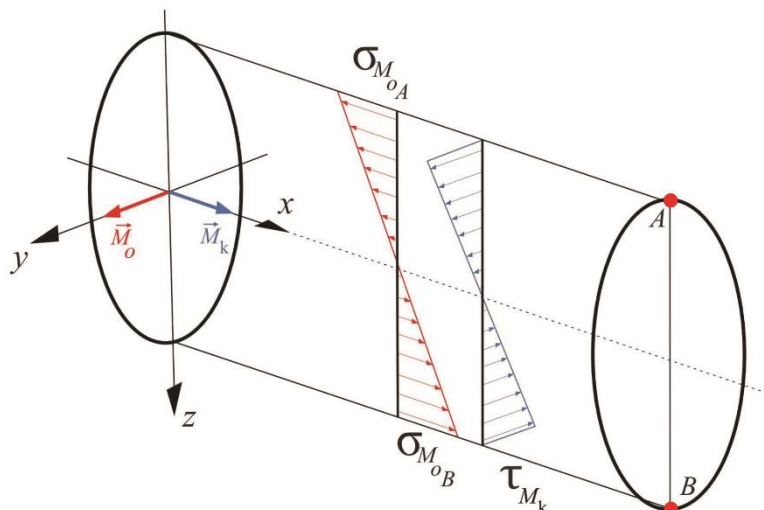
$$\sigma = \sigma_{M_o} + \sigma_N = \frac{M_{oy}}{J_y} z - \frac{M_{oz}}{J_z} y + \frac{N}{S} \quad (42)$$

- Redukované napätie:

$$\sigma_{red} = \sigma_{ex} \quad (43)$$

- Nebezpečné miesta priečného prierezu sa nachádzajú na vrchnom a spodnom okraji prierezu (body A a B na obr. 8). Nebezpečnejšie je to miesto, kde súčet normálových napätí je väčší, z čoho zároveň vyplýva menšia bezpečnosť k medznému stavu pružnosti.

### 2.4.2 Kombinácia $M_o$ a $M_k$



Obr. 9: Napätie a nebezpečné miesta v priečnom priereze kombinácie  $M_o$  a  $M_k$

- Napätie v bode priečného prierezu:

$$\sigma_{M_o} = \frac{M_{oy}}{J_y} z - \frac{M_{oz}}{J_z} y \quad (44)$$

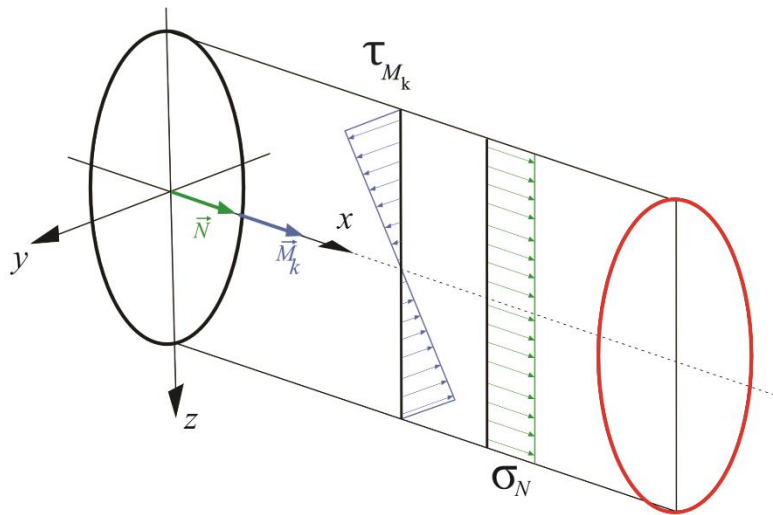
$$\tau_{Mk} = \frac{M_K}{J_P} \rho \quad (45)$$

- Redukované napätie (max  $\tau$ ):

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_{Mo}^2 + 4\tau_{Mk}^2} \quad (46)$$

- Extrémne miesta od krútiaceho momentu  $M_K$  sú po celom obvode pričného prierezu a od ohybového momentu sú na dvoch protiľahlých miestach prierezu (body A a B na obr. 9). Nebezpečné body sú teda dva a to tam kde je extrémna hodnota napätí  $\sigma$ .

### 2.4.3 Kombinácia N a $M_k$



Obr. 10: Napätie a nebezpečné miesta v pričnom priereze kombinácie N a  $M_k$

- Napätie v bode pričného prierezu:

$$\sigma_N = \frac{N}{S} \quad (47)$$

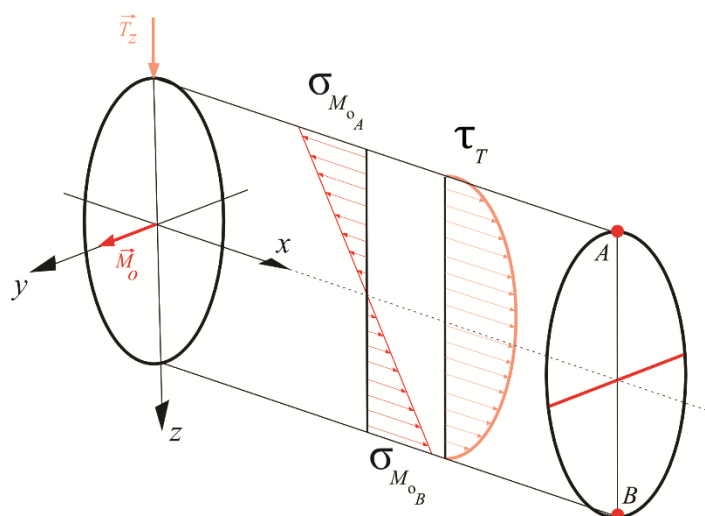
$$\tau_{Mk} = \frac{M_K}{J_P} \rho \quad (48)$$

- Redukované napätie (max  $\tau$ ):

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_N^2 + 4\tau_{Mk}^2} \quad (49)$$

- Normálové napätie  $\sigma_N$  je rozložené po priereze konštantne a napätie  $\tau_{MK}$  od krútiaceho momentu je rozložené lineárne po celom vonkajšom obvode pričného prierezu. Nebezpečné miesta sú teda po celom vonkajšom obvode prierezu (obr. 10).

## 2.4.4 Kombinácia $M_o$ a $T$



Obr. 11: Napätie a nebezpečné miesta v priečnom priereze kombinácie  $M_o$  a  $T$

- Napätie v bode priečného prierezu:

$$\sigma_{M_o} = \frac{M_{oy}}{J_y} z - \frac{M_{oz}}{J_z} y \quad (50)$$

$$\tau_T = \frac{T_z U_y \psi_1}{b J_y} \quad (51)$$

- Redukované napätie:

$$\sigma_{red_A} = \sigma_{ex_A} \quad (52)$$

$$\sigma_{red_B} = \sigma_{ex_B} \quad (53)$$

$$\sigma_{red_n} = 2\tau_{ex} \quad (54)$$

- Normálové napätia  $\sigma_{M_o}$  od ohybového momentu sú po priečnom priereze rozložené lineárne a šmykové napätia od posúvajúcej sily majú pre kruhový prierez eliptický priebeh a pre obdĺžnikový prierez parabolický. Extrémne napätia  $\tau$  sú v miestach kde  $\sigma$  je nulové a opačne. Možnými nebezpečnými miestami priečného prierezu sú miesta, kde napätie  $\sigma$  je maximálne a celá neutrálna os<sup>4</sup>, kde je maximálne napätie  $\tau$  (obr. 11).

## 2.5 Metóda konečných prvkov

Metóda konečných prvkov (MKP) je všeobecná numerická metóda, pomocou ktorej je možné riešiť a simulovať problémy mechaniky telies ako napríklad napätovo-deformačná analýza pri rôznych druhoch zaťažovania alebo kmitanie sústav. MKP rieši aj problémy v iných odvetviach inžinierstva modelovaním prúdenia kvapalín, vedenia tepla, analýzou elektromagnetického poľa a podobne [1, 7].

Základným princípom MKP je diskretizácia (rozdelenie) spojitého riešeného telesa do menších elementov (prvkov) konečného počtu bez zbytku, ktoré tvoria geometrický model. Základným prvkom v rovine je štvoruholník, v priestore je to šesťsten. Avšak niekedy je nutné použiť zjednodušené tvary prvkov (trojuholník, štvorsten). Rozdelenie telesa na prvky je

<sup>4</sup> Vyskytuje sa pri namáhaní ohybom, je to geometrické miesto bodov priečného prierezu s nulovým dĺžkovým pretvorením a tým aj nulovým napätím od ohybu, prechádza ťažiskom priečného prierezu [3]

dôležité kvôli jednoduchšiemu matematickému popisu. Rohy týchto prvkov, prípadne ďalšie významné body (najčastejšie stredy hrán) sú uzlovými bodmi, ktoré vytvárajú sieť, ktorej hustota je kľúčová pre presnosť výsledkov, ale aj náročnosť výpočtu [1, 8].

Pre napäťovú analýzu vyšetřovaného telesa v obecnej priestorovej statickej úlohe poznáme celkom 15 neznámych funkcií závislých na premenných  $x, y, z$ :

- tri posuvy  $u, v, w$
- šesť pretvorení  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$
- šesť napätí  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$

Neznáme funkcie sú navzájom viazané systémom rovníc (rovnováhy, konštitutívne a geometrické), ktoré musia byť splnené vo vnútri riešenej oblasti. Musia byť tiež doplnené o okrajové podmienky (geometrické alebo silové) [9].

### 2.5.1 Rovnice rovnováhy

Vyjadrujú podmienky rovnováhy pre elementárny vnútorný prvok, na ktorý pôsobia aj vonkajšie objemové sily  $o_x, o_y, o_z$  [ $\text{N}\cdot\text{m}^{-3}$ ]. Reprezentujú vzájomnú väzbu medzi zložkami napätí, ktorá musí vždy platiť [9].

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + o_x = 0 \quad (55)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + o_y = 0 \quad (56)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + o_z = 0 \quad (57)$$

### 2.5.2 Geometrické rovnice

Geometrické rovnice sú vzťahy, ktoré vytvárajú väzbu medzi zložkami posuvov a pretvorení. Uvedené rovnice neobsahujú nelineárne členy, keďže problémy v tejto práci sú riešené v oblasti lineárnej pružnosti a pevnosti. Podmienkou platnosti týchto rovníc je malé pretvorenie ( $10^{-2}$  a menej) [10].

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (58)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (59)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (60)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (61)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (62)$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad (63)$$

### 2.5.3 Konštitutívne vzťahy

Vyjadrujú vzťah medzi napätosťou a deformáciou. Sú vyjadrené pre lineárne pružný Hookovský materiál, ktorého vlastnosti sú určené dvoma nezávislými konštantami: modulom pružnosti v ťahu  $E$  a Poissonovým číslom  $\mu$  [9].

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad (64)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)] \quad (65)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad (66)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \quad (67)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz} \quad (68)$$

$$\gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx} \quad (69)$$

Na rozdiel od modulu pružnosti v ťahu a Poissonovej konštanty je modul pružnosti v šmyku  $G$  nezávislou materiálovou veličinou:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} \quad (70)$$

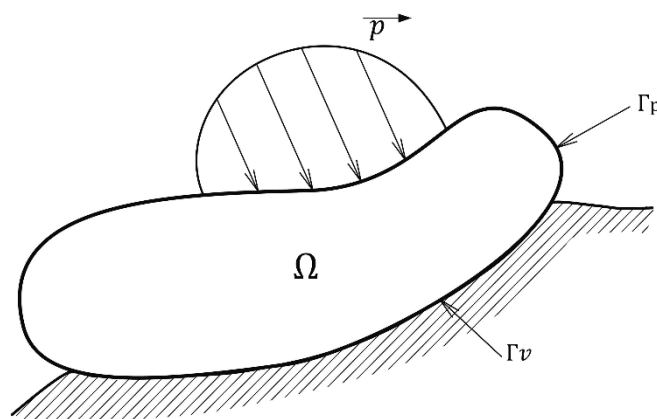
### 2.5.4 Okrajové podmienky

Okrajové podmienky o ktoré musí byť spomenutý systém rovníc doplnený majú dva druhy: geometrické a silové. V riešenom mieste a smere je možné predpísať iba jeden druh podmienky. Geometrické okrajové podmienky vyjadrujú zadanie posuvov na určitej časti povrchu riešeného telesa  $\Gamma_v$  (obr. 12). Tieto posuvy sú známe napríklad z posuvov okolitých telies alebo z uloženia vyšetřovaného telesa. Zväčša sú označované  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{w}$  a platí [9]:

$$\Gamma_v : u = \bar{u}, v = \bar{v}, w = \bar{w}, \quad (71)$$

Častým prípadom je prípad homogénnych geometrických podmienok kde platí, že všetky posuvy sú nulové [9]:

$$\bar{u} = \bar{v} = \bar{w} = 0 \quad (72)$$



Obr. 12: Zatažené riešené teleso. Prekreslené z [9]



Druhým typom okrajových podmienok sú podmienky silové, ktoré vyjadrujú rovnováhu medzi vonkajšími a vnútornými silami elementárneho prvku, ktorý leží na hranici vyšetrovanej časti  $\Gamma_p$  (obr. 12). Ak je na  $\Gamma_p$  zadané vonkajšie plošné zaťaženie  $\mathbf{p}^T = [p_x, p_y, p_z]$  a zároveň jednotkový vektor normály k povrchu má zložky  $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ , vyplýva z toho že [9]:

$$\Gamma_p: \quad p_x = \sigma_x \alpha_x + \tau_{xy} \alpha_y + \tau_{yz} \alpha_z \quad (73)$$

$$p_y = \tau_{xy} \alpha_x + \sigma_y \alpha_y + \tau_{yz} \alpha_z \quad (74)$$

$$p_z = \tau_{xz} \alpha_x + \tau_{yz} \alpha_y + \sigma_z \alpha_z \quad (75)$$

V prípade, že úloha je riešená pomocou deformačnej varianty MKP, tak v miestach povrchu, kde nie je definovaná žiadna okrajová podmienka je automaticky zadaná homogénna silová podmienka. Z toho vyplýva, že pri presnom riešení je normálové aj šmykové napätie v tomto mieste povrchu nulové [9].

### 2.5.5 Variačný princíp MKP

V mechanike variačné metódy vychádzajú z variačných princípov. Pre variačnú metódu MKP je základom Lagrangeov variačný princíp, ktorý je definovaný ako: „Zo všetkých funkcií posuvov, ktoré zachovávajú spojitosť telesa a spĺňajú geometrické okrajové podmienky, sa realizujú iba tie, ktoré dávajú celkovej potenciálnej energii  $\Pi$  stacionárnu hodnotu [9].“

Vďaka prírodnému princípu, ktorý hovorí, že z možných dejov prebehne v skutočnosti iba ten, ku ktorého uskutočneniu je potrebné minimálne množstvo energie platí, že daná stacionárna hodnota je jednoznačná a zároveň predstavuje minimum potenciálnej energie  $\Pi$  [1, 9]:

$$\Pi = W - P \quad (76)$$

- Kde  $W$  je energia napätosti telesa  $\Omega$ :

$$W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma^T \varepsilon dV \quad (77)$$

- $P$  je potenciál vonkajšieho zaťaženia:

$$P = \int_{\Omega} u^T o dV + \int_{\Gamma_p} u^T p dS \quad (78)$$

- Vzťah pre celkovú potenciálnu energiu je možné zapísať ako:

$$\Pi = \frac{1}{2} U^T K U - U^T F \quad (79)$$

Kde:

$K$  – globálna matica tuhosti

$U$  – globálna stĺpcová matica neznámych parametrov

$F$  – globálna stĺpcová matica zaťaženia

Langrangeov variačný princíp hovorí, že  $\Pi$  má nadobúdať stacionárne hodnoty, z čoho vyplýva podmienka:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial U} = 0 \quad (80)$$

Parciálnym derivovaním podľa  $u_1, u_2, u_3, u_4$  sa získa sústava štyroch lineárnych algebraických rovníc:

$$K U = F \quad (81)$$

Pretože matica tuhosti  $K$  je singulárna<sup>5</sup>, sústava nemá jednoznačné riešenie. Preto je nutné predpísať dostatočný počet okrajových podmienok, aby došlo k jednoznačnému určeniu priestorovej polohy telesa [9].

---

<sup>5</sup> Determinant matice je nulový

### 3 Výpočtová časť

V nasledujúcej časti tejto práce sú analyzované vplyvy jednotlivých kombinácií prostého namáhania na prúty rôznych priečných priereзов vzhľadom na medzný stav pružnosti. Na úvod bol realizovaný analytický výpočet prútu s triviálnym priečnym priereзов vzhľadom na výpočet redukovaného napätia a bezpečnosti k medznému stavu pružnosti. Následne boli všetky ostatné analýzy napätia a bezpečnosti k MSP v priečných priereзов prútov vykonané pomocou metódy konečných prvkov vo výpočtovom programe Ansys Workbench 2021 R1.

Základným prvkom tejto práce pre analýzu bezpečnosti k MSP je pomer krútiaceho momentu voči ohybovému  $R = M_K/M_O$  a jeho obmeny. Materiálom všetkých prútov bola uvažovaná konštrukčná oceľ S235 s jej charakteristickými mechanickými vlastnosťami:

- Minimálna medza sklzu pre menovité hrúbky materiálu [11]:

16 – 40 mm...  $\sigma_K = 225$  MPa

40 – 100 mm...  $\sigma_K = 215$  MPa

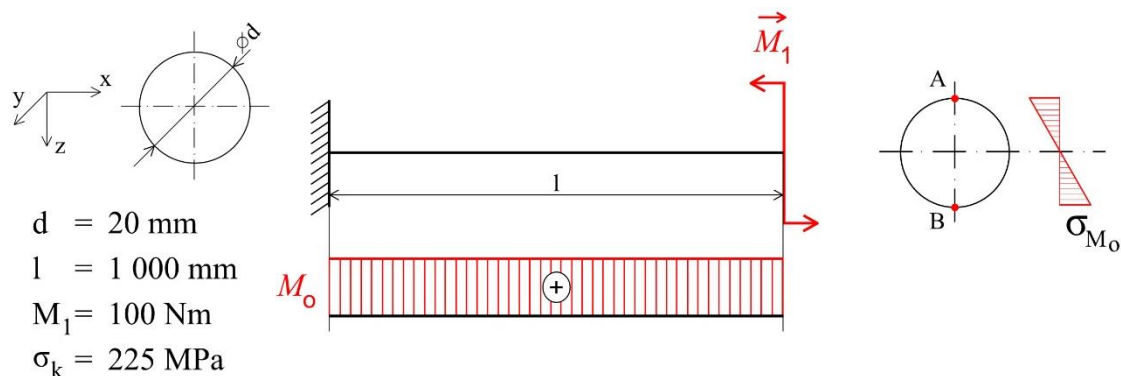
- Pevnosť v ťahu pre menovité hrúbky materiálu [11]:

3 – 100 mm...  $R_m = 360 - 510$  MPa

#### 3.1 Analytický výpočet

Analytický výpočet je nutné vykonať z hľadiska verifikácie výpočtových modelov využívaných v numerickom riešení. Pre toto overenie bol zvolený prút s kruhovým priečnym priereзов s priemerom 0,02 m a dĺžkou 1 m, aby boli dodržané prútové predpoklady (kap. 1.1). Tento prút je na jednom konci pevne votknutý a na druhej strane je postupne zaťažovaný ohybom, krútením a na záver kombináciou týchto záťažovacích stavov.

##### 3.1.1 Prút s kruhovým priereзов zat'azený ohybom



Obr. 13: Prút zaťažovaný prostým ohybom

Ohybový moment, ktorým je prút zaťažovaný je konštantný po celej dĺžke ako je zjavné z obr. 13, z čoho vyplýva, že nebezpečné miesto pozdĺž strednice je v celej jej dĺžke. Pretože priebeh ohybového napätia v priečnom priereze je lineárny, nebezpečné miesta v priereze sú body A a B. V týchto bodoch pôsobí najväčšie normálové napätie  $\sigma$ , v bode A tlakové a v bode B ťahové (obr. 13). Šmykové napätie je v celom priereze nulové.

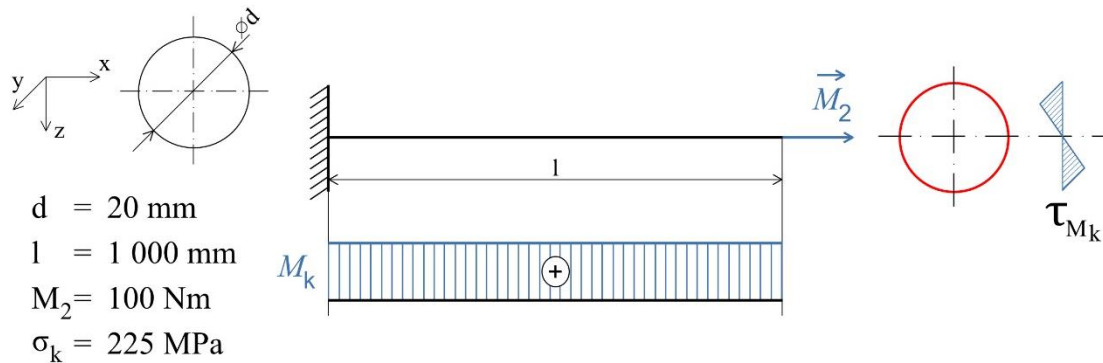
$$\sigma_{M_o} = \frac{M_{oy}}{W_o} = \frac{M_1}{\frac{\pi d^4}{64}} \cdot \frac{d}{2} = \frac{M_1}{\frac{\pi d^3}{32}} = \frac{100}{\frac{\pi \cdot 0,02^3}{32}} = 127,32 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{red}^{HMH} = \sqrt{\sigma_{M_o}^2 + 3\tau^2} = \sigma_{M_o} = 127,32 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{red}^{\max\tau} = \sqrt{\sigma_{M_o}^2 + 4\tau^2} = \sigma_{M_o} = 127,32 \text{ MPa}$$

$$k_k^{HMH} = k_k^{\max\tau} = \frac{\sigma_K}{\sigma_{red}^{HMH}} = \frac{\sigma_K}{\sigma_{red}^{\max\tau}} = \frac{225}{127,32} = 1,767$$

### 3.1.2 Prút s kruhovým prierezom zaťažený krútením



Obr. 14: Prút zaťažený prostým krútením

Pri zaťažovaní konštantným krútením, je podobne ako pri ohybe, nebezpečným miestom pozdĺž strednice celá dĺžka prútu. Nebezpečným miestom v pričnom priereze je celý vonkajší obvod, na ktorom je maximálne šmykové napätie  $\tau$  (obr. 14). Normálové napätie je nulové.

$$\tau_{Mk} = \frac{M_k}{W_k} = \frac{M_2}{\frac{\pi d^4}{32}} \cdot \frac{d}{2} = \frac{M_2}{\frac{\pi d^3}{16}} = \frac{100}{\frac{\pi \cdot 0,02^3}{16}} = 63,66 \text{ MPa}$$

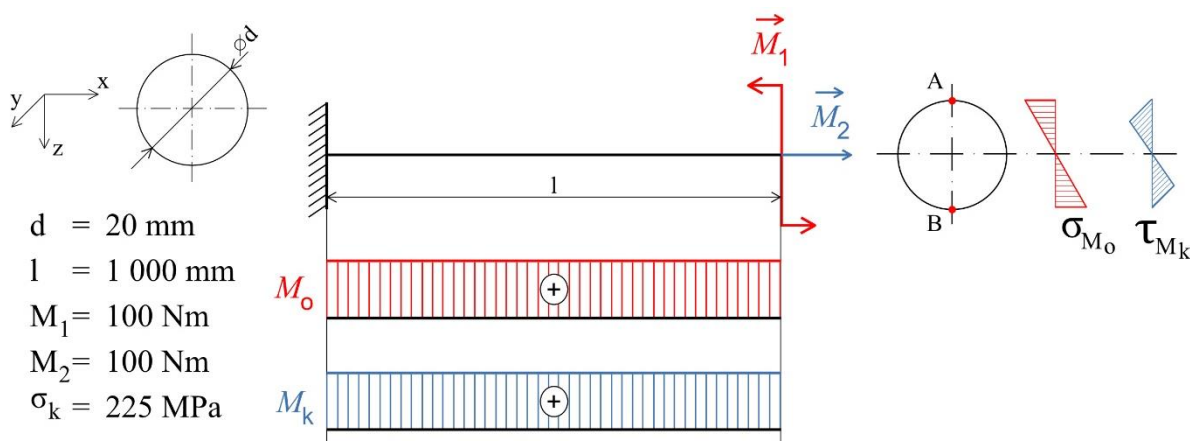
$$\sigma_{red}^{HMH} = \sqrt{\sigma_{M_o}^2 + 3\tau_{Mk}^2} = \sqrt{3}\tau_{Mk} = 110,26 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{red}^{\max\tau} = \sqrt{\sigma_{M_o}^2 + 4\tau_{Mk}^2} = 2\tau_{Mk} = 127,32 \text{ MPa}$$

$$k_k^{HMH} = \frac{\sigma_K}{\sigma_{red}^{HMH}} = \frac{225}{110,26} = 2,041$$

$$k_k^{\max\tau} = \frac{\sigma_K}{\sigma_{red}^{\max\tau}} = \frac{225}{127,32} = 1,767$$

### 3.1.3 Prút s kruhovým prierezom zaťažený kombináciou prostého namáhania



Obr. 15: Prút zaťažený kombináciou prostého namáhania

Pri zaťažovaní kombináciou prostého namáhania sú nebezpečnými miestami v priečnom priereze body A a B (obr. 15 a kap. 2.4.2). Uvedený vzorový výpočet je vykonaný s pomerom ohybových momentov  $R = 1$ . Výsledky pre ďalšie pomery  $R$  sú uvedené v tabuľke 3.

$$\sigma_{M_o} = \frac{M_{oy}}{W_o} = \frac{M_1}{\frac{\pi d^4}{64}} \cdot \frac{d}{2} = \frac{M_1}{\frac{\pi d^3}{32}} = \frac{100}{\frac{\pi \cdot 0,02^3}{32}} = 127,32 \text{ MPa}$$

$$\tau_{M_k} = \frac{M_k}{W_k} = \frac{M_2}{\frac{\pi d^4}{32}} \cdot \frac{d}{2} = \frac{M_2}{\frac{\pi d^3}{16}} = \frac{100}{\frac{\pi \cdot 0,02^3}{16}} = 63,66 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{red}^{HMH} = \sqrt{\sigma_{M_o}^2 + 3\tau_B^2} = \sqrt{127,32^2 + 3 \cdot 63,66^2} = 168,43 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{red}^{\max \tau} = \sqrt{\sigma_{M_o}^2 + 4\tau_B^2} = \sqrt{127,32^2 + 4 \cdot 63,66^2} = 180,06 \text{ MPa}$$

### 3.1.4 Verifikácia

Pre overenie použitého výpočtového modelu je nutné porovnať výsledky získané analytickou metódou s výsledkami získanými metódou konečným prvkom v programe Ansys Workbench 2021 R1. Keďže sa dajú predpokladať mierne rozdiely vo výsledkoch získaných týmito dvomi metódami, určíme ich odchýlku pomocou vzťahu:

$$s = \left| \left( 1 - \frac{\sigma_{red}^{MKP}}{\sigma_{red}^{Analytika}} \right) \cdot 100 \right| \quad (82)$$

Pre názornejšie demonštrovanie odchýlok sú porovnané redukované napätia namiesto porovnania bezpečností, pri ktorých dochádza k skresleniu výsledkov v dôsledku zaokrúhľovania. Zároveň sú v porovnaní vyjadrené výsledky pre podmienku HMH, keďže je v praxi využívaná častejšie a obe podmienky sú počítané identickými výpočtovými modelmi, čiže sa dajú predpokladať obdobné odchýlky. Analytické riešenie je porovnávané s numerickým riešením dosiahnutým prostredníctvom prvkov BEAM 189 a SOLID 186.

Tab. 1: Porovnanie redukovaných napätí pre prostý ohyb

Moment 1	Analytický	MKP BEAM	Odchýlka BEAM	MKP SOLID	Odchýlka SOLID
[Nm]	[MPa]	[MPa]	[%]	[MPa]	[%]
100	127,32	127,59	0,212	127,42	0,079

Tab. 2: Porovnanie redukovaných napätí pre prosté krútenie

Moment 2	Analytický	MKP BEAM	Odchýlka BEAM	MKP SOLID	Odchýlka SOLID
[Nm]	[MPa]	[MPa]	[%]	[MPa]	[%]
100	110,26	110,49	0,208	110,41	0,136

Tab. 3: Porovnanie redukovaných napätí pre kombinované namáhanie

Pomer momentov $M_2/M_1$	Analytický	MKP BEAM	Odchýlka BEAM	MKP SOLID	Odchýlka SOLID
[-]	[MPa]	[MPa]	[%]	[MPa]	[%]
0,1	127,8	128,06	0,203	127,89	0,07
0,5	138,75	139,04	0,209	138,82	0,05
1	168,43	168,78	0,208	168,5	0,042
1,3	191,73	192,12	0,203	191,81	0,042
1,5	208,73	209,16	0,206	208,82	0,043

Najskôr sú porovnávané výsledky redukovaných napätí pre záťaž kruhového prierezu prostým ohybom (tab. 1), následne pre záťaž prostým krútením (tab. 2). Na záver sú analyzované výsledky kombinácie prostého namáhania resp. pomerov ohybových momentov (tab. 3).

Z vypočítaných dát možno tvrdiť, že odchýlky pre prvok SOLID boli menšie pre všetky záťažové stavy než u prvku BEAM. Súčasne, z vyššie uvedených tabuliek vyplýva, že celková odchýlka medzi analytickým výpočtom a numerickým výpočtom pomocou MKP v software ANSYS Workbench je v intervale od 0,042 % do 0,212 %. Na základe týchto zistení možno tvrdiť, že použitý výpočtový model bol verifikovaný ako správny.

### 3.2 Numerický výpočet

V tejto časti práce sú numerickým výpočtom prostredníctvom metódy konečných prvkov analyzované prúty rôznych pričných prierezov, pričom všetky prúty sú na jednom konci pevne votknuté a na druhom konci sú zaťažované kombináciou prostého namáhania, konkrétne ohybovým momentom okolo osi  $y$  a krútiacim momentom.

Kombinácia namáhání je charakterizovaná pomerom krútiaceho momentu k ohybovému momentu okolo osi  $y$  vo zvolenom súradnicovom systéme zobrazenom na obr. 16. Pričom veľkosť ohybového momentu zostáva konštantná a zvyšuje sa hodnota krútiaceho momentu. Prúty boli zaťažované kombináciou prostého krútenia a prostého ohybu, čo má za následok, že normálové aj šmykové napätia sú vo všetkých variantoch prútov s rôznymi prierezmi konštantné po celej dĺžke strednice. To znamená, že nebezpečné miesto pozdĺž strednice sa nachádza, rovnako ako v analytickom výpočte (kap. 2.1), v celej jej dĺžke.

Pre každý pričný prierez prútu boli zhodnotené priebehy bezpečností podľa podmienok plasticity  $HMH$  a  $\max \tau$  vzhľadom ku kombináciám namáhání. Takisto boli zhodnotené rozdiely bezpečností podľa jednotlivých podmienok plasticity, ale aj rýchlosť zmeny

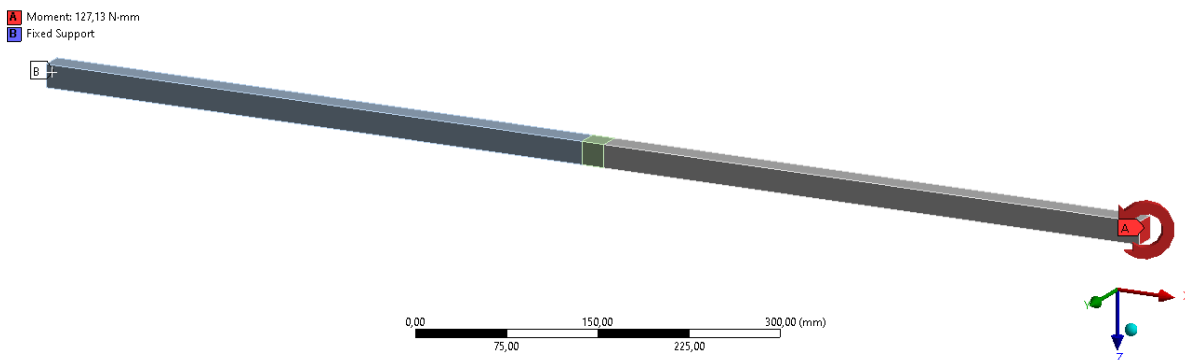
bezpečnosti v závislosti na charaktere namáhania. Ďalej bolo analyzované správanie a umiestnenie nebezpečného miesta v pričnom priereze s najväčším redukovaným napätím resp. najnižšou bezpečnosťou.

### 3.2.1 Výpočtový model

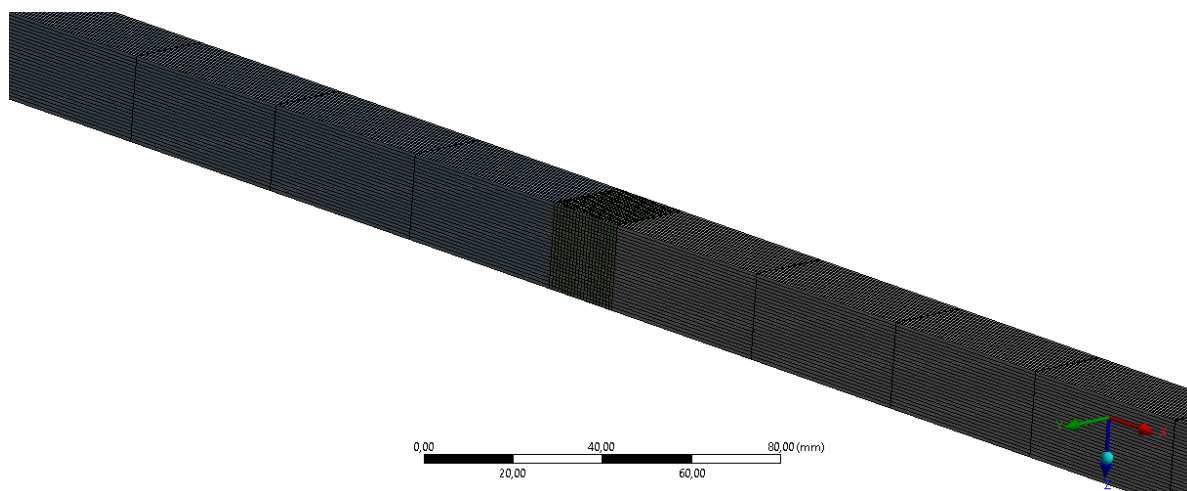
Výpočty v programe Ansys Workbench boli vykonané na zostave HP ZBook s procesorom Intel i7 s počtom jadier 4 o frekvencii 2,7 GHz, s pamäťou RAM 16GB a grafickou kartou Nvidia Quadro K2100M.

Uloženia a zaťaženia prútov boli definované pomocou okrajových podmienok, ktoré sú zobrazené na príklade prútu so štvorcovým prierezom (obr. 16). Votknutie jedného konca prútu bolo definované pomocou funkcie fixed support, ktorá zamedzila deformácií bodov na tomto konci prútu. Na druhom konci prútu bol zadaný moment pomocou jednotlivých zložiek v osiach x a y.

Sieť konečných prvkov výpočtových modelov jednotlivých prútov bola tvorená hlavne kvadratickými priestorovými prvkami SOLID 186. Veľkosť prvkov v pričnom priereze bola približne 1 mm. V axiálnom smere prútov bola veľkosť prvkov priemerne 30 mm pre urýchlenie výpočtu a docielenie menšieho počtu prvkov. Avšak v strednej časti prútu bola sieť zjemnená v axiálnom smere na dĺžku 1 mm (obr. 17). Toto zjemnenie bolo vykonané z dôvodu, že výsledky boli získavané zo strednej časti prútu, aby bolo zamedzené nepresnostiam spôsobeným okrajovými podmienkami na jednotlivých koncoch prútov.



Obr. 16: Okrajové podmienky pre prút so štvorcovým prierezom

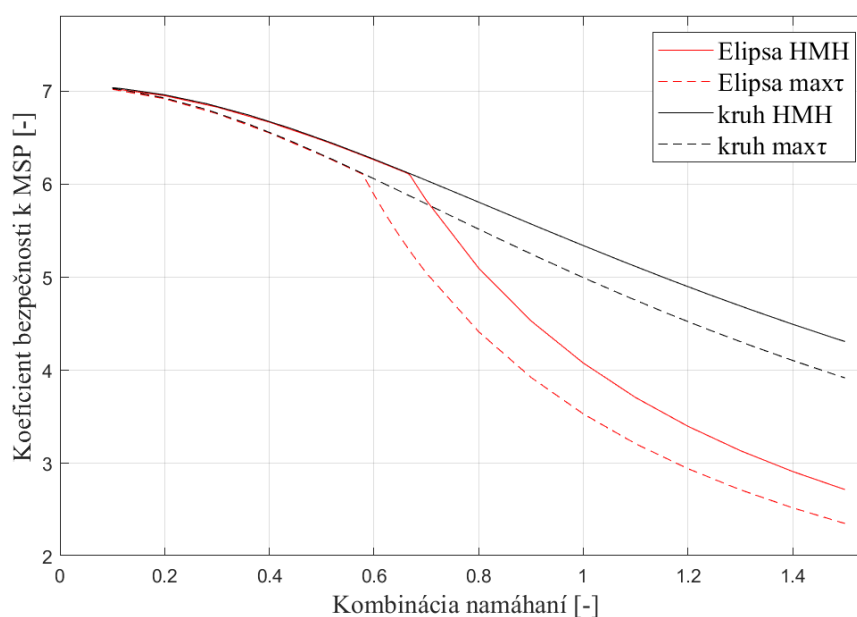


Obr. 17: Zobrazenie siete v okolí strednej časti prútu so štvorcovým prierezom

### 3.2.2 Porovnanie prútov s kruhovým a eliptickým priečnym prierezom

Kruhový a eliptický priečny prierez sú geometricky príbuzné tvary, preto je možné v istých aspektoch predpokladať porovnateľné výsledky. Pre komparáciu bol zvolený prút s kruhovým prierezom s priemerom 0,02 m a prút s eliptickým prierezom s dĺžkou hlavnej osi 0,04 m a vedľajšej osi 0,02 m. Oba prúty s dĺžkou 1 m. Analýza bola vykonaná na intervale pomeru  $R = \langle 0,1; 1,5 \rangle$ .

Najskôr bolo nutné spočítať maximálne redukované napätie, z čoho bola následne vyjadrená bezpečnosť k MSP. Ďalej boli výsledky vynesené do grafu závislosti bezpečnosti k MSP podľa podmienok plasticity HMM a  $\max \tau$  na kombinácií namáhání (obr. 18). Súčasne boli znázornené rozloženia redukovaných napätí v priečných prierezoch spoločne s ich extrémnymi hodnotami v charakteristických hodnotách  $R$  (obr. 19 – 22).



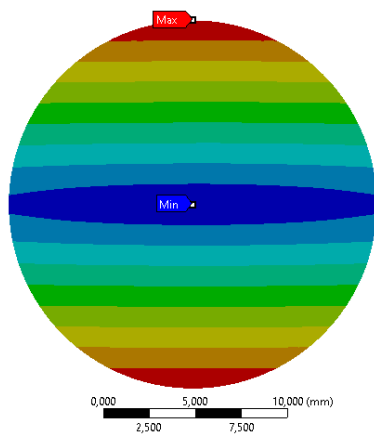
Obr. 18: Priebeh bezpečností prútov s kruhovým a eliptickým prierezom vzhľadom na pomer  $R$

Z priebehu bezpečností (obr. 18) vyplýva, že pre prút s kruhovým prierezom, bezpečnosť pre obe podmienky plasticity plynulo klesá s rastúcim pomerom  $R$  resp. so zvyšujúcim sa redukovaným napätím. Je to spôsobené skutočnosťou, že nebezpečné miesto v kruhovom priečnom priereze sa nemení so zvyšujúcim sa pomerom  $R$  a redukované napätie plynulo rastie. Pre ľubovoľnú kombináciu nenulového ohybového momentu s krútiacim momentom sa kritické miesto s maximálnym redukovaným napätím resp. minimálnou bezpečnosťou k MSP nachádza na vrchnom a spodnom vlákne kruhového prierezu (obr. 19, obr. 21).

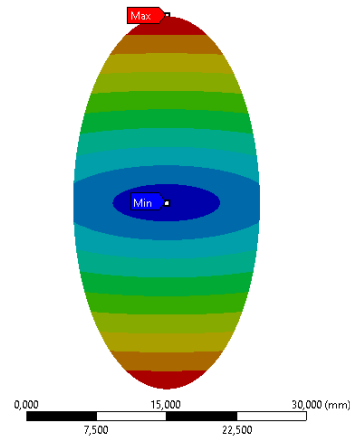
Pre prút s eliptickým prierezom platí, že pri zvyšovaní krútiaceho momentu dochádza k skokovej zmene nebezpečného miesta v priečnom priereze z vrchného a spodného vlákna hlavnej polosi na konce vedľajšej polosi (obr. 20, obr. 22). Táto skoková zmena je zjavná aj v grafickej závislosti priebehu bezpečností (obr. 18). Pričom, pokiaľ nedôjde k zmene miesta s maximálnym redukovaným napätím, priebeh bezpečnosti pre eliptický prierez je takmer identický ako pre kruhový. Takisto je zrejmé, že k tejto zmene dochádza pre jednotlivé podmienky plasticity v iných pomeroch  $R$ . Konkrétne pre podmienku HMM k zmene nebezpečného miesta dochádza pri pomere  $R = 0,67$  a pre podmienku  $\max \tau$  pri hodnote  $R = 0,58$ . Po dosiahnutí týchto pomerov krútiaceho momentu k ohybovému sa mení tvar priebehu bezpečností, čo má za následok, že bezpečnosť začína rýchlejšie klesať so zvyšujúcim sa pomerom  $R$ . V prípade, žeby bol prút ďalej zaťažovaný s väčším pomerom  $R$  ako 1,5,



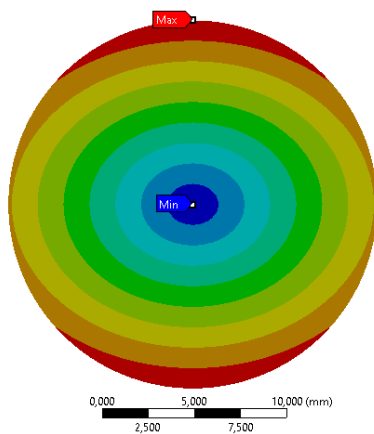
priebeh bezpečností by začal klesať miernejšie a limitne by sa blížil k hodnote bezpečnosti 0. Keby bol prút s eliptickým prierezom zaťažovaný ohybovým momentom v osi z, nedochádzalo by k zmene nebezpečného miesta, pretože by sa vo všetkých prípadoch nachádzalo na krajných vláknach kratšej polosi elipsy.



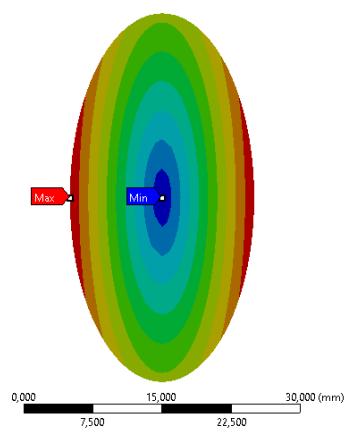
Obr. 19: Rozloženie redukovaného napätia v kruhovom priereze pri  $R = 0,1$



Obr. 20: Rozloženie redukovaného napätia v eliptickom priereze pri  $R = 0,1$

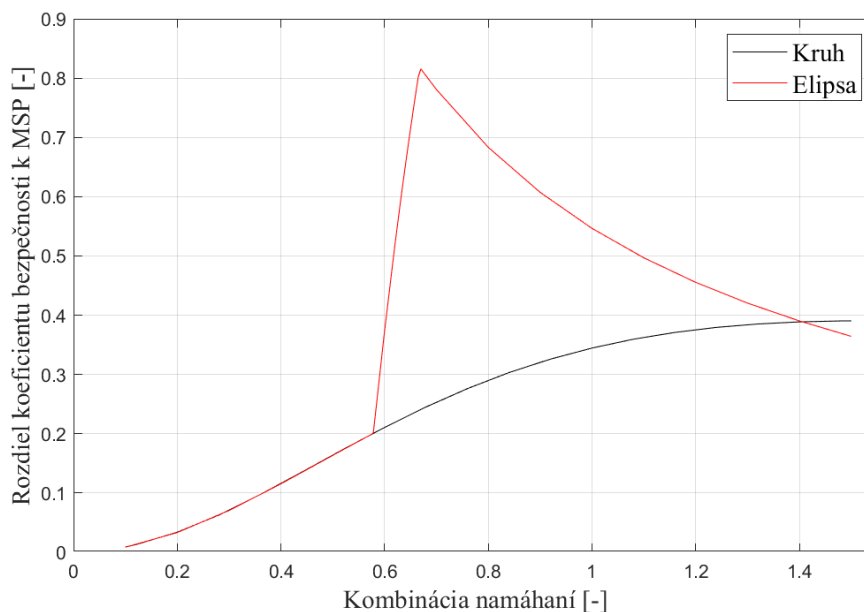


Obr. 21: Rozloženie redukovaného napätia v kruhovom priereze pri  $R = 1,5$



Obr. 22: Rozloženie redukovaného napätia v eliptickom priereze pri  $R = 1,5$

Pretože pre výpočet bezpečností boli využité dve podmienky plasticity ( $\max \tau$  a  $\text{HMH}$ ), bola vykonaná analýza rozdielu týchto podmienok v závislosti na pomere  $R$  (obr. 23). Konkrétne boli hodnoty bezpečnosti k MSP podľa podmienky  $\max \tau$  odčítané od bezpečností pre podmienku  $\text{HMH}$ . Takisto ako u priebehu bezpečností, aj rozdiel podmienok plasticity je identický pre oba typy prierezov po hodnotu pomeru  $R = 0,58$ . Od tohto bodu so zvyšujúcim sa pomerom  $R$ , pre prút s kruhovým prierečným prierezom rozdiel podmienok ďalej plynulo a mierne rastie. Avšak pre eliptický prierez sa začína rozdiel podmienok rapídne zväčšovať až do bodu s hodnotou  $R = 0,67$ . Tento rapídny rast rozdielu podmienok u eliptického prierezu je spôsobený práve rozdielnym miestom zlomu jednotlivých podmienok a práve preto sa deje v rozmedzí bodov, v ktorých dochádza k skokovej zmene nebezpečného miesta pre jednotlivé podmienky plasticity. Následne sa so zvyšujúcim krútiacim momentom resp. pomerom  $R$  jednotlivé podmienky platné pre eliptický prierez približujú, a teda ich rozdiel sa postupne znižuje.

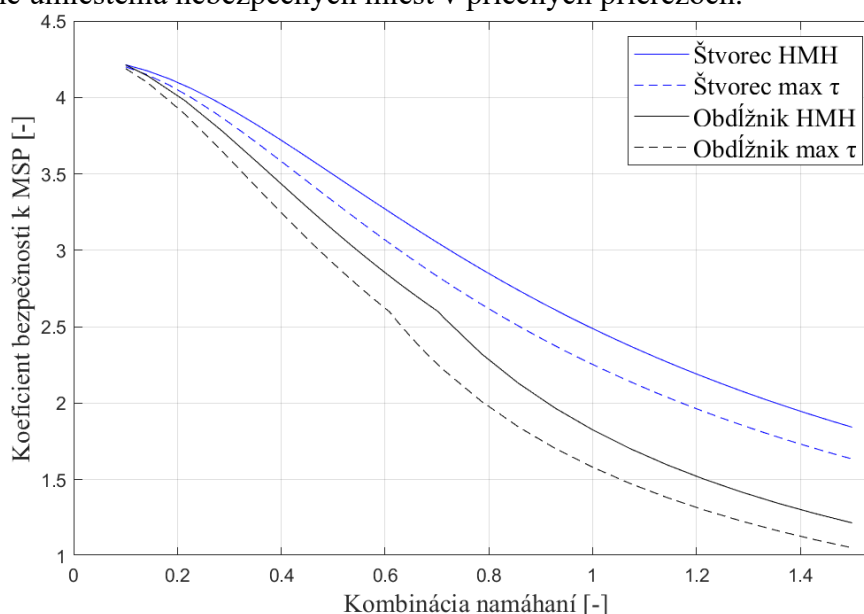


Obr. 23: Znáozornenie rozdielov podmienok plasticity prútov s kruhovým a eliptickým prierezom

Pre overenie platnosti geometrických rovníc MKP (kap. 1.5.2) bol vykonaný výpočet maximálneho redukovaného pretvorenia. Najväčšie pretvorenie zo všetkých pomerov  $R$  pre kruhový prierez má hodnotu  $2,59 \cdot 10^{-4}$  a pre eliptický prierez je to  $4,14 \cdot 10^{-4}$ . Tieto hodnoty jednoznačne spĺňajú podmienku platnosti geometrických rovníc, t.j. pretvorenie má byť rádovo menšie ako  $10^{-2}$ .

### 3.2.3 Porovnanie prútov so štvorcovým a obdĺžnikovým priečnym prierezom

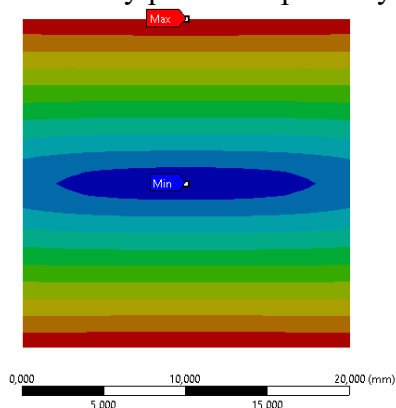
Štvorcový a obdĺžnikový priečny prierez sú rovnako ako kruhový a eliptický, geometrický podobné. Pre porovnanie bol zvolený prút so štvorcovým prierezom s dĺžkou strany 0,02 m a prút s obdĺžnikovým prierezom s dĺžkou kratšej strany 0,02 m a dlhšej 0,04 m. Oba prúty s dĺžkou 1 m. Analýza bola vykonaná na intervale pomeru  $R = \langle 0,1; 1,5 \rangle$ . Aj v tomto prípade bola pre porovnanie jednotlivých prierezov vynesena závislosť koeficientu bezpečnosti k MSP pre podmienku HMH aj  $\max \tau$  na kombinácií namáhání  $R$  (obr. 24). Takisto, na obr. 25 až 28 sú znázornené umiestenia nebezpečných miest v priečných prierezoch.



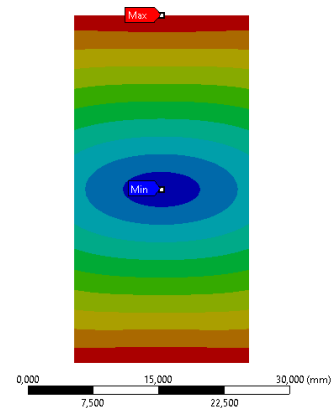
Obr. 24: Priebeh bezpečností prútov so štvorcovým a obdĺžnikovým prierezom vzhľadom na pomer  $R$

Pre prút so štvorcovým prierezom platí podobne ako pre kruhový prierez, že miesto s maximálnym redukovaným napätím sa skokovo nemení, čoho dôkazom je plynulý pokles bezpečnosti so zvyšujúcou sa hodnotou kombinácie namáhania (obr. 24). V prípade, že štvorcový prierez je zaťažovaný iba ohybom, nebezpečným miestom sú vrchná a spodná hrana prierezu. Akonáhle začne na prút pôsobiť krútiaci moment, nebezpečné miesto sa zredukuje iba na stredy horizontálnych hrán prierezu (červený štítok na obr. 25), aj keď pri nízkych hodnotách pomeru  $R$  je rozdiel v redukovaných napätiach na horizontálnych hranách minimálny. So zvyšujúcim sa pomerom  $R$ , sa rozdiel v hodnotách redukovaných napätí medzi nebezpečným miestom a bodmi v jeho okolí na horizontálnych hranách zväčšuje, ale umiestnenie kritického miesta sa už nemení (obr. 27). V prípade, že by bol prút zaťažovaný čistým krútením, nebezpečnými miestami by boli stredy všetkých hrán štvorcového prierezu.

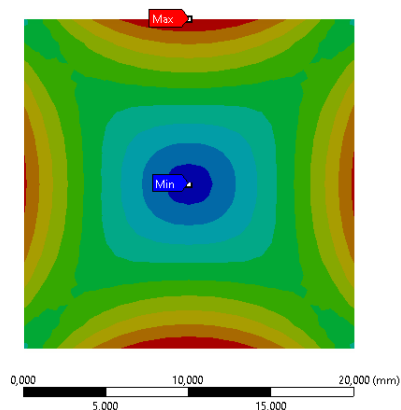
U prútu s obdĺžnikovým prierezom orientovaným tak, že dlhšia strana je rovnobežná s osou  $z$ , dochádza k skokovej zmene kritického miesta zo stredov horizontálnych hrán (obr. 26) do stredov vertikálnych hrán (obr. 28). Túto zmenu je možné vyčítať zo zlomu v priebehoch bezpečností (obr. 24). Avšak táto zmena priebehov bezpečností nie je u obdĺžnikového prierezu taká zrejímavá ako tomu bolo u prútu s eliptickým prierezom, čo je spôsobené skutočnosťou, že bezpečnosť v oblasti pred zlomom, s rastúcim pomerom  $R$  u obdĺžnikového prierezu klesala rýchlejšie ako u eliptického. Takisto je možné vidieť, že k zlomu dochádza pre každú podmienku plasticity v inom bode. Konkrétne v bode  $R = 0,7$  (HMH) a  $R = 0,61$  ( $\max \tau$ ). Zároveň v priebehoch bezpečností je možné pozorovať odlišnosť od priebehov pre kruhový a eliptický prierez. Zatiaľ čo pre prúty s kruhovým a eliptickým prierezom platí, že do bodu zlomu priebehov pre eliptický prierez sú priebehy a rýchlosť poklesu bezpečností takmer zhodné, pre štvorcový a obdĺžnikový prierez sú priebehy ihneď od začiatku zaťažovania rozdielne.



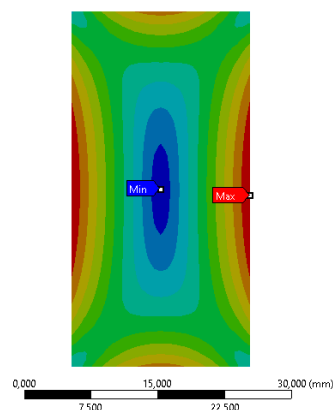
Obr. 25: Rozloženie redukovaného napätia v štvorcovom priereze pri  $R = 0,1$



Obr. 26: Rozloženie redukovaného napätia v obdĺžnikovom priereze pri  $R = 0,1$



Obr. 27: Rozloženie redukovaného napätia v štvorcovom priereze pri  $R = 1,5$

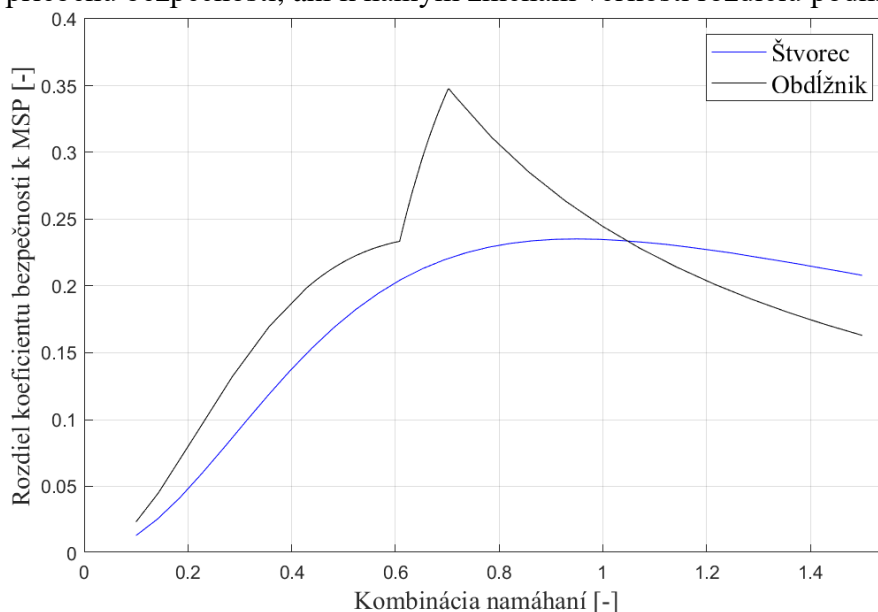


Obr. 28: Rozloženie redukovaného napätia v obdĺžnikovom priereze pri  $R = 1,5$

Závislosť rozdielu podmienok na kombinácií namáhání je zobrazená na obr. 29. Rozdiel podmienok plasticity bol získaný odčítaním hodnôt bezpečností podľa  $\max \tau$  od bezpečností pre podmienku HMH. Pre rozdiel podmienok prútu so štvorcovým prierezom platí, že spočiatku plynulo rastie, avšak v oblasti okolo pomeru  $R = 0,9$  dochádza takmer k ustáleniu rozdielu podmienok a ďalej tento rozdiel veľmi mierne klesá.

Pre prút s obdĺžnikovým prierezom platí, že rozdiel podmienok sa plynulo zväčšuje po hodnotu pomeru  $R = 0,61$ , čo je bod zlomu priebehu bezpečností pre podmienku  $\max \tau$ . Od tohto bodu dochádza k prudkému zväčšeniu rýchlosti rastu rozdielu podmienok. Tento rýchly rast prebieha až do bodu  $R = 0,7$ , čo je bod zlomu priebehu bezpečností pre podmienku HMH. Ďalej so zväčšujúcim sa pomerom  $R$  sa bezpečnosti jednotlivých podmienok približujú (obr. 24), a teda ich rozdiel klesá (obr. 29).

Rovnako ako pre eliptický prierez, tak aj pre obdĺžnikový platí, kebyže ohybový moment pôsobil v osi  $z$ , nedochádzalo by k skokovej zmene nebezpečného miesta, ale po celý čas by sa kritické miesto nachádzalo v strede dlhších strán prierezu, a teda by nedochádzalo k zlomu v priebehu bezpečností, ani k náhlym zmenám veľkostí rozdielu podmienok.

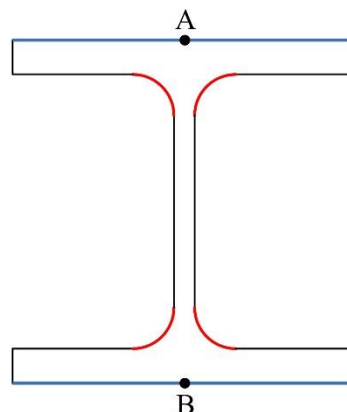
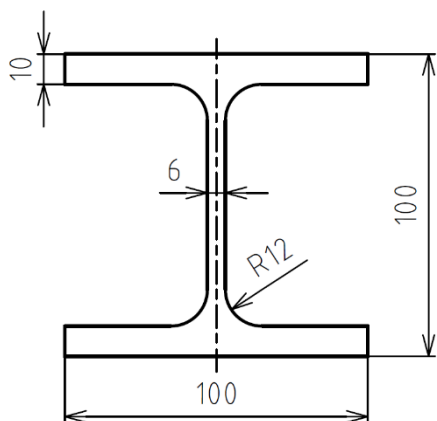


Obr. 29: Znáozornenie rozdielov podmienok plasticity prútov so štvorcovým a obdĺžnikovým prierezom

### 3.2.4 Prút s priečnym prierezom tvaru I

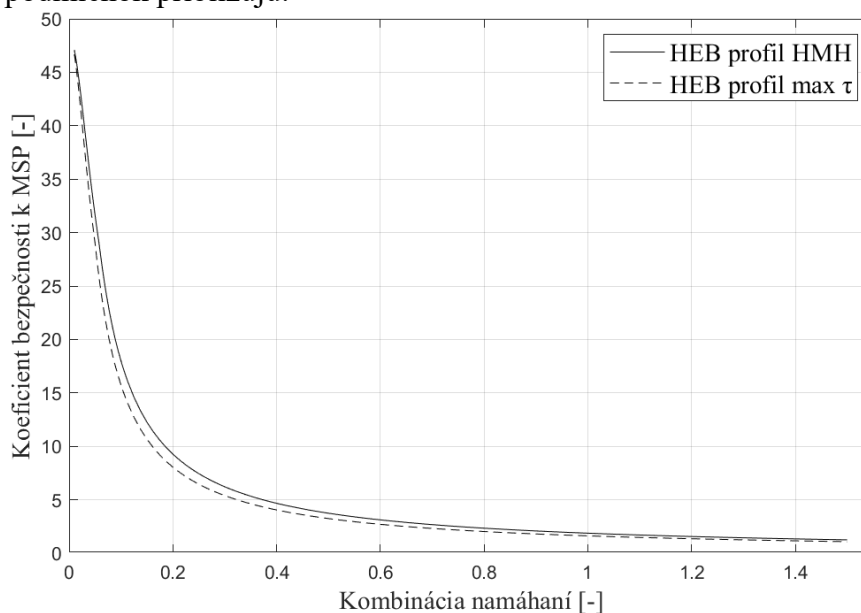
V technickej praxi sú často využívané nosníky s I profilom a preto bol vykonaný rozbor tohto reálne využívaného profilu. Pre analýzu bol zvolený prút s prierezom typu HEB podľa normy DIN 1025-2 s normalizovanými rozmermi v mm (obr. 30) [12]. Pre analýzu bola zvolená dĺžka prútu 10 m. Analýza bola v tomto prípade vykonaná na intervale pomeru  $R = \langle 0,01; 1,5 \rangle$ .

V prípade, že je I profil zaťažený čistým ohybom, miestom s najvyšším redukovaným napätím sú vrchná a spodná hrana priečneho prierezu – modré úsečky (obr. 31). Avšak postupným zaťažovaním prútu aj krútením dochádza už pri veľmi malej hodnote pomeru  $R$  k redukcii nebezpečného miesta s najmenšou bezpečnosťou k MSP na stred vrchnej a spodnej hrany prierezu – body A a B (obr. 31). Zároveň podobne ako u štvorcového a obdĺžnikového prierezu je rozdiel hodnôt redukovaných napätí na horizontálnych hranách minimálny. Následným zvyšovaním pomeru  $R$  sa tento rozdiel napätí zväčšuje a zároveň sa ďalšími nebezpečnými miestami postupne začínajú stávať jednotlivé rádiusy v stojke I profilu. Akonáhle platí, že pomer  $R = 0,05$  ( $\max \tau$ ) a  $R = 0,0575$  (HMH), dochádza k osamostatneniu nebezpečného miesta iba do rádiusov – červené krivky (obr. 31).



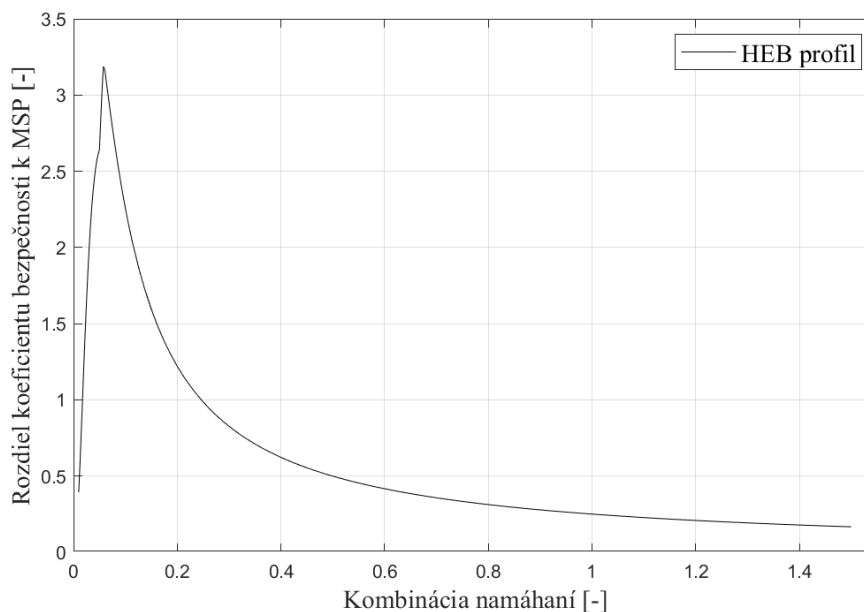
Obr. 30: Normalizované rozmery HEB profilu      Obr. 31: Nebezpečné miesta v priechnom priereze

Zmena nebezpečného miesta nie je tak zreteľná v grafickom zobrazení závislosti koeficientu bezpečnosti na kombinácii namáhání (obr. 32) ako tomu bolo napríklad u prútu s eliptickým prierezom. Avšak túto zmenu je možné vidieť v závislosti rozdielu bezpečností podľa jednotlivých podmienok plasticity (obr. 33). V tomto prípade je zrejmé, že po hodnotu  $R = 0,05$ , kde sa nebezpečné miesta nachádzajú ešte na vrchnej a spodnej hrane prierezu, rozdiel podmienok plasticity rastie. V tomto bode dôjde k osamostatneniu nebezpečného miesta v rádiuse podľa  $\max \tau$  a až do hodnoty  $R = 0,0575$ , čo je miesto osamostatnenia pre HMH, rozdiel bezpečností k MSP rastie ešte rýchlejšie. Od tohto bodu sa následne bezpečnosti podľa jednotlivých podmienok približujú.



Obr. 32: Priebeh bezpečností prútu s priechnym prierezom tvaru I vzhľadom na pomer  $R$

Čo je však možné vyčítať z priebehu bezpečností (obr. 32), je fakt, že už pri minimálnom zaťažení prútu krútiacim momentom, a teda zväčšujúcom sa pomere  $R$ , dochádza k rapidnému poklesu bezpečností k MSP. Napríklad pre podmienku HMH od pomeru  $R = 0,01$  do pomeru  $R = 0,2$ , dochádza k poklesu bezpečnosti z hodnoty 47,08 na hodnotu 9,27. Čo je pokles bezpečnosti o 37,81 pri zvýšení pomeru  $R$  iba o 0,19. Bezpečnosť prudko klesá až po hodnotu približne 5 a následne je priebeh bezpečností miernejší, limitne sa blížiaci k 0. Z týchto zistení možno usúdiť, že prúty s priechnym prierezom tvaru I, konkrétne v tomto prípade s HEB profilom, sú veľmi citlivé na krútenie. Je to samozrejme spôsobené aj faktom, že rádiusy sú koncentrátoři napätia a dá sa v nich očakávať prudký nárast napätí, čo sa v tomto prípade potvrdilo.



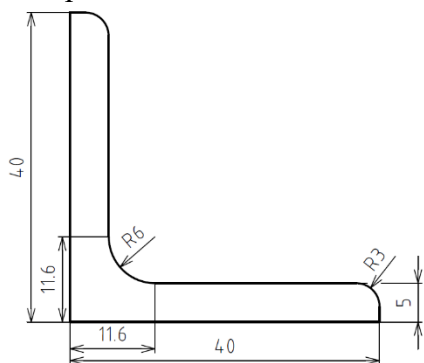
Obr. 33: Znáznornenie rozdielu podmienok plasticity prútu s priečnym prierezom tvaru I

Takisto bol vykonaný výpočet maximálnych redukovaných pretvorení, ktorých hodnota bola rádovo  $10^{-3}$ , čo spĺňa podmienku malých pretvorení pre platnosť geometrických rovníc MKP (kap. 1.5.2).

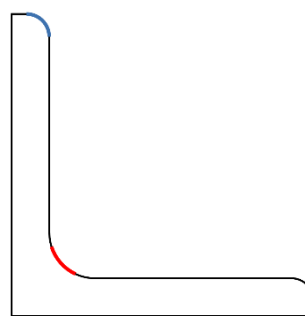
### 3.2.5 Prút s priečnym prierezom tvaru L

Často využívaným profilom v praxi je takisto L profil. Pre výpočet bol zvolený prút s prierezom tvaru rovnoramenného L podľa normy EN 10056 s normalizovanými rozmermi v mm (obr. 34) a dĺžkou 2 m [13]. Analýza bola vykonaná na intervale pomeru  $R = \langle 0,01; 1,5 \rangle$ .

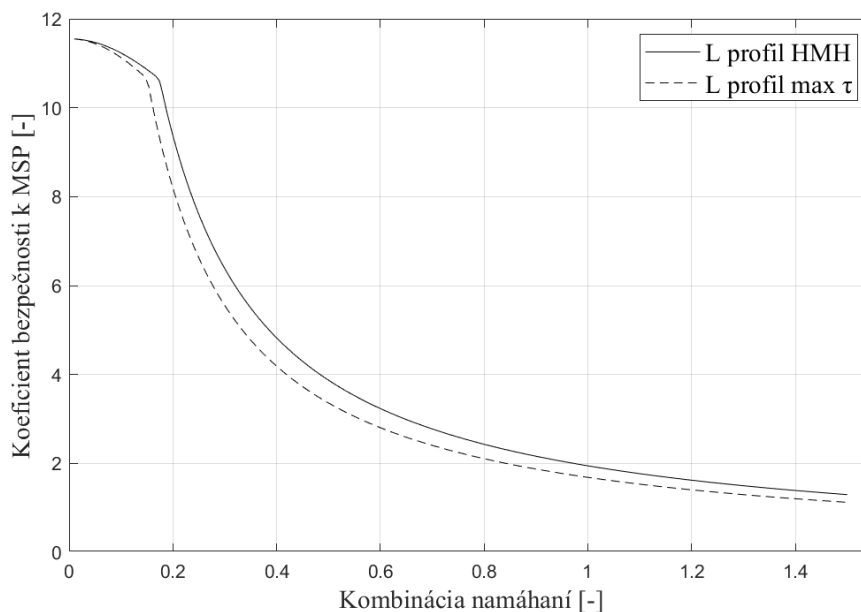
Vzhľadom na prítomnosť rádiusu sa dal predpokladať obdobný priebeh bezpečnosti ako u prútu s HEB profilom. Avšak v prípade prútu s L profilom nedochádza k prudkému poklesu bezpečnosti okamžite po zvýšení pomeru  $R$ , resp. pri nízkom zaťažení od krútiaceho momentu (obr. 36) ako tomu bolo u HEB profilu. Pre prút s L profilom platí, že po hodnoty  $R = 0,182$  (HMH) a  $R = 0,147$  ( $\max \tau$ ) sa nebezpečné miesto nachádza na vrchnej časti priečného prierezu, konkrétne vo vrchnom rádiuse – modrá časť (obr. 35) a zároveň v tomto intervale bezpečnosť klesá mierne (obr. 36). Avšak ihneď po prekročení spomínaných hodnôt  $R$  dochádza k skokovej zmene miesta s minimálnou bezpečnosťou v priereze do rádiusu – červená časť (obr. 35), kde nebezpečné miesto zotrúva pri akomkoľvek zvýšení krútiaceho momentu. Súčasne pri tejto skokovej zmene, podobne ako u HEB profilu, dochádza k prudkému poklesu bezpečnosti k MSP, čo je ovplyvnené skutočnosťou, že rádius je koncentrátor napätia.



Obr. 34: Normalizované rozmery L profilu

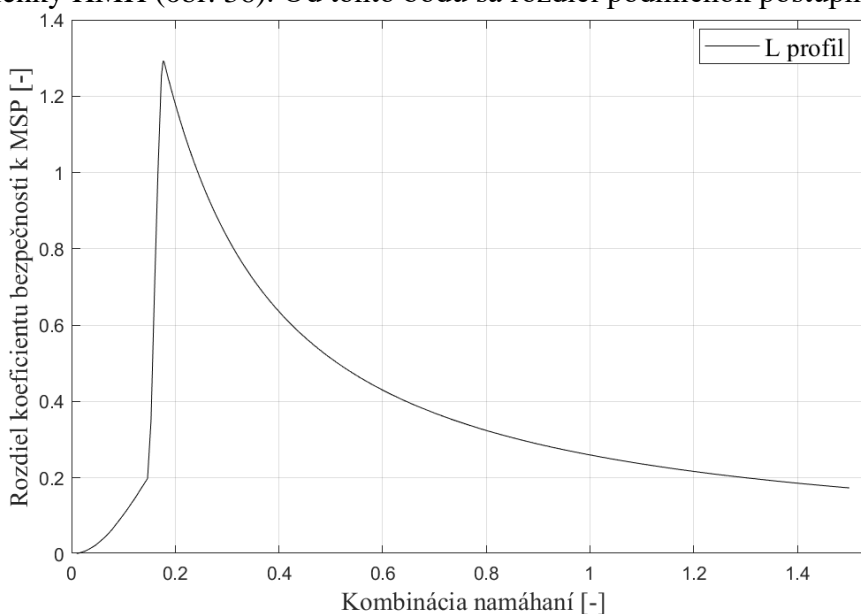


Obr. 35: Nebezpečné miesta v priečnom priereze



Obr. 36: Priebeh bezpečností prútu s priečnym prierezom tvaru L vzhľadom na pomer  $R$

Ostré zmeny priebehov bezpečností a zmeny nebezpečného miesta v priereze sú zjavné aj zo závislosti rozdielu bezpečností podľa jednotlivých podmienok na pomere  $R$  (obr. 37). Kde po  $R = 0,147$ , čo je miesto, v ktorom dochádza k prudkej zmene priebehu bezpečnosti podľa podmienky  $\max \tau$  (obr. 36), rozdiel podmienok plynulo rastie. Avšak od tohto bodu rozdiel podmienok prudko narastá až do bodu  $R = 0,182$ , čo je bod ostrého zlomu priebehu bezpečnosti podľa podmienky HMM (obr. 36). Od tohto bodu sa rozdiel podmienok postupne znižuje.



Obr. 37: Znárodnenie rozdielov podmienok plasticity prútu s priečnym prierezom tvaru L

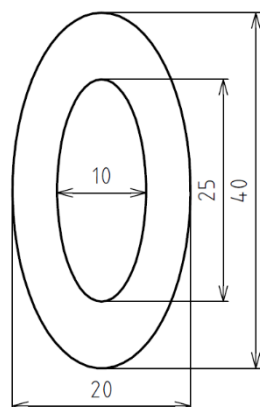
Na základe predošlých zistení, možno tvrdiť, že prúty s priečnym prierezom tvaru rovnoramenného L sú podobne ako prúty s HEB profilom citlivé na záťaž od krútiaceho momentu. Avšak L profil je o niečo odolnejší, a k prudkému poklesu bezpečností dochádza pri vyššom pomere  $R$  ako u HEB profilu.

### 3.2.6 Prút s pričným prierezom tvaru dutej elipsy

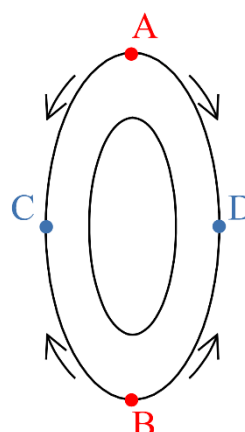
Pre demonštráciu prútu s dutým pričným prierezom bola vykonaná analýza prútu s profilom dutej elipsy, ktorého dĺžka je 2 m a rozmery pričného prierezu v mm sú zobrazené na obr. 38. Výpočet prebiehal na intervale  $R = \langle 0,1;1,5 \rangle$ .

Postupným zaťažovaním prútu bolo zistené, že u profilu tvaru dutej elipsy podobne ako u profilu tvaru plnej elipsy, pri nízkych hodnotách pomeru  $R$ , a teda kombinácií namáhání, kedy ešte prevládajú účinky od ohybového momentu, sa nebezpečné miesta v pričnom priereze nachádzajú na vrchnom a spodnom vlákne – body A a B (obr. 39). V týchto bodoch sa nebezpečné miesto nachádza až po hodnotu  $R = 0,564$  ( $\max \tau$ ), resp.  $R = 0,654$  (HMH), kedy dochádza k zlomu priebehov bezpečností k MSP. Do tohto momentu bol nárast redukovaného napätia, a teda aj pokles bezpečností mierny (obr. 40).

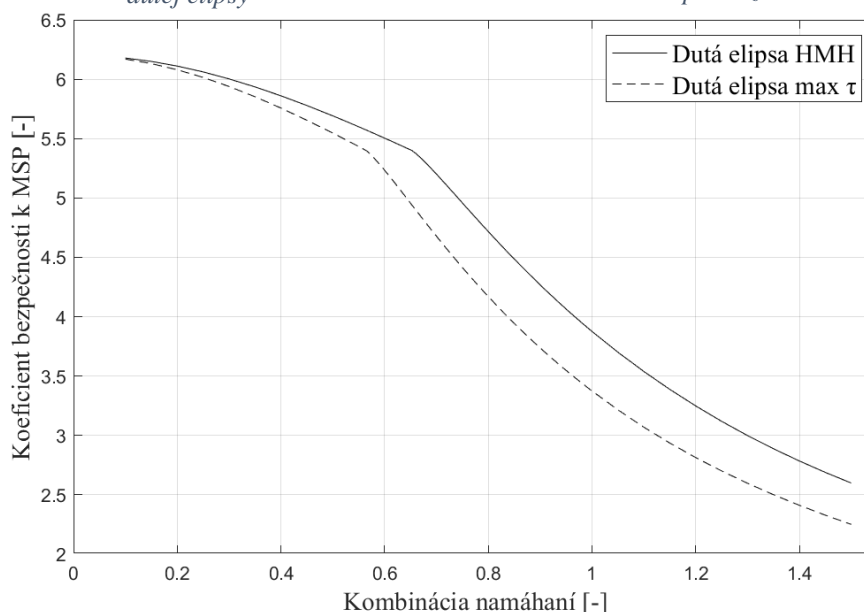
V okamihu zlomu jednotlivých priebehov bezpečností nedochádza k skokovej zmene nebezpečného miesta, ako tomu bolo pri ostatných skúmaných prierezoch, ale v daných pomeroch sa nebezpečné miesta prierezu začínajú postupne posúvať po vonkajších vláknoch v smere šípok (obr. 39). Zároveň v tomto okamihu, spolu s posúvajúcimi sa kritickými miestami, sa začína rýchlejšie zvyšovať redukované napätie, a teda dochádza k prudšiemu poklesu bezpečností (obr. 40). Následným zvyšovaním pomeru  $R$  sa nebezpečné miesta postupne presunú až do bodov C a D (obr. 39).



Obr. 38: Rozmery pričného prierezu tvaru dutej elipsy



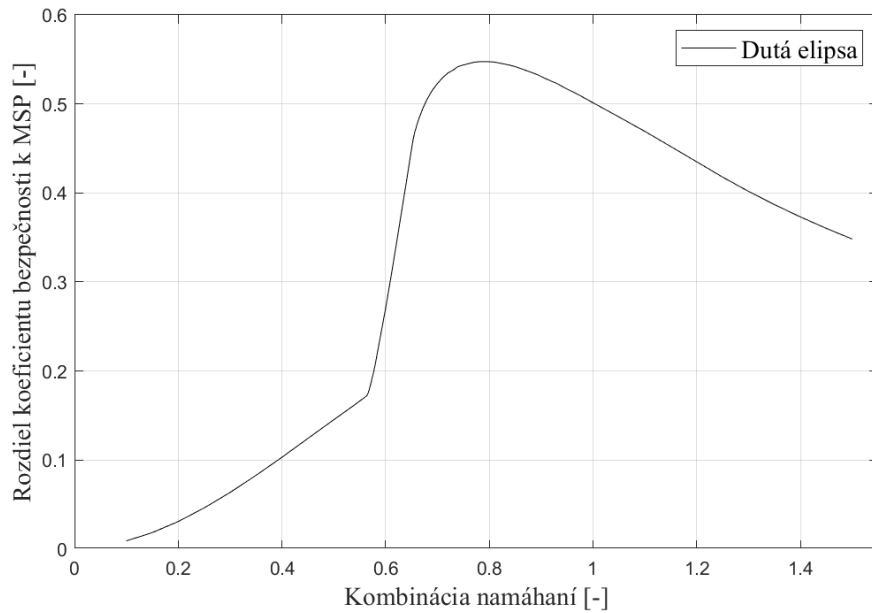
Obr. 39: Nebezpečné miesta v pričnom priereze



Obr. 40: Priebeh bezpečností prútu s pričným prierezom tvaru dutej elipsy vzhľadom na pomer  $R$



Závislosť rozdielu bezpečností podľa jednotlivých podmienok (obr. 41) potvrdzuje predošlé výsledky, odkiaľ je zrejmé, že rozdiel sa postupne zvyšuje v oblasti do pomeru  $R = 0,564$ , kedy sa začínajú presúvať nebezpečné miesta a zároveň dochádza k zlomu priebehu bezpečnosti pre podmienku  $\max \tau$ . Od tohto okamihu až do miesta  $R = 0,654$ , kedy dochádza k podobným javom pre podmienku HMM, rozdiel podmienok prudko a takmer lineárne rastie. V ďalšom priebehu rozdiel rastie, ale rýchlosť zmeny je menšia. V bode pre  $R = 0,79$  dosiahne rozdiel podmienok maximum a od tohto okamihu sa rozdiel postupne znižuje, čo je spôsobené limitným približovaním sa bezpečností podľa oboch podmienok k hodnote bezpečnosti 0.



Obr. 41: Znáozornenie rozdielu podmienok plasticity prútu s pričným prierezom tvaru dutej elipsy

Takisto bola pre prút s prierezom dutej elipsy skontrolovaná platnosť geometrických rovníc. Maximálne redukované pretvorenie dosahovalo v tomto prípade hodnoty rádovo  $10^{-3}$ , čo takisto spĺňa podmienku malých pretvorení ( $10^{-2}$ ).

## 4 Záver

Na úvod práce, v druhej kapitole boli vysvetlené dôležité teoretické pojmy ohľadom kombinovaného namáhania, medzného stavu pružnosti, podmienok plasticity a metódy konečných prvkov, ktoré boli neskôr vo výpočtovej časti využívané.

Následne vo výpočtovej časti boli na úvod porovnané výsledky analytického a numerického výpočtu pre prút s kruhovým prierezom, pre overenie správnosti používaného výpočtového modelu. Keďže odchýlky medzi analytickým a numerickým výpočtom sa pohybovali v intervale od 0,042 % do 0,212 %, bolo možné použiť výpočtový model v programe Ansys Workbench považovať za vyhovujúci pre výpočty ďalších prútov s rôznymi prierezmi.

V analýze jednotlivých prútov s rozdielnymi tvarmi priečných prierezov bola najskôr vykonaná komparácia prútu s kruhovým prierezom voči prútu s eliptickým prierezom. Bolo zistené, že pre kruhový prierez, u ktorého nedochádza k zmene nebezpečného miesta so zvyšujúcim sa pomerom  $R$ , redukované napätie plynulo rastie, čo má za následok, že bezpečnosť k MSP u tohto prútu plynulo klesá. Avšak pre eliptický prierez, pri ktorom sa nebezpečné miesto v istom okamihu skokovo mení, dochádza k zjavnej zmene rastu redukovaného napätia, a teda aj ostrému zlomu v priebehu bezpečností.

Predošlé zistenia boli potvrdené v porovnaní prútu so štvorcovým prierezom a prútu s obdĺžnikovým prierezom, kde bolo možné pozorovať analogické výstupy v podobe plynulého poklesu bezpečnosti u štvorcového prierezu, pri ktorom nedochádzalo k skokovej zmene nebezpečného miesta. Naopak u obdĺžnikového prierezu podobne ako u eliptického, pri náhlej zmene nebezpečného miesta, došlo k zmene priebehu bezpečnosti a jej rýchlejšiemu poklesu.

Tretí vyšetrovaný prierez mal tvar písmena I, konkrétne typu HEB. V tomto prípade takisto došlo k skokovej zmene, avšak do rádiusu, ktorý je koncentrátorom napätia, a zároveň k tejto zmene došlo pri oveľa nižšom pomere  $R$  ako u obdĺžnikového alebo eliptického prierezu. Bezpečnosť k MSP pre tento prierez zaťažovaný kombináciou ohybu a krútenia ihneď od začiatku klesala rýchlo.

Pre prút s prierezom tvaru rovnoramenného L tiež dochádzalo k skokovej zmene nebezpečného miesta do rádiusu, avšak nie ihneď po zvýšení krútiaceho momentu ako u HEB profilu, ale aj napriek tomu k zmene došlo oveľa skôr ako napríklad u eliptického prierezu. Akonáhle však k zmene došlo, bezpečnosť k MSP začala prudko klesať so zvyšujúcim sa pomerom  $R$ .

Na záver bol analyzovaný netradičný, v praxi takmer nevyužívaný priečný prierez tvaru dutej elipsy, ktorý vykazoval zaujímavé výsledky, kedy nedochádzalo k skokovej zmene nebezpečného miesta v priečnom priereze, ale k jeho postupnému presúvaniu sa po vonkajšom vlákne prierezu. Avšak priebeh bezpečnosti k MSP ovplyvnil okamih, kedy sa nebezpečné miesto odpútalo od pôvodnej pozície a začalo sa presúvať.

Z rozboru všetkých skúmaných typov priečných prierezov vyplýva, že hodnota a priebeh bezpečností k MSP pre prútové teleso je úzko spätá s chovaním a umiestnením nebezpečného miesta v priečnom priereze. Z prútov analyzovaných v tejto práci je zrejmé, že pokiaľ sa v priečnom priereze nachádza rádius, a teda koncentrátor napätia, je tento prút veľmi citlivý vzhľadom k MSP na vplyv krútenia. Takisto bolo zistené, že pokiaľ nedochádza k zmene polohy nebezpečného miesta v priereze, tak redukované napätie plynulo a pozvoľna rastie, čo má za následok, že bezpečnosť k MSP neklesá prudko a nedochádza k prudkým zmenám v jej priebehu. Avšak v prípade, že k skokovej zmene nebezpečného miesta dôjde, a zároveň pri tejto zmene dochádza k výraznej zmene rastu redukovaného napätia, dochádza aj k zmene priebehu bezpečnosti k MSP a jej rýchlejšiemu poklesu. Zo skúmaných profilov prútov možno za najkritickejší voči MSP považovať profil tvaru I typu HEB.

## Zoznam použitých zdrojov

- [1] HORNÍKOVÁ, Jana. *Pružnosť a pevnosť: Interaktívny učebný text* [online]. Brno: CERM, 2003 [cit. 2020-11-26]. ISBN 80-7204-268-8. Dostupné z: <http://beta.fme.vutbr.cz/cpp/>
- [2] VRBKA, Jan. *Pružnosť a pevnosť I*. Brno: Investice do rozvoje a vzdelávania: Učebný text, 2012, 280 s.
- [3] JANÍČEK, Přemysl, Emanuel ONDRÁČEK, Jan VRBKA a Jiří BURŠA. *Mechanika těles: pružnosť a pevnosť I*. 3., přeprac. vyd., V Akademickém nakladatelství CERM 1. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2004. ISBN 80-214-2592-X.
- [4] SHIGLEY, Joseph, Charles MISCHKE a Richard BUDYNAS. *Konstruování strojních součástí*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, 2010. Překlady vysokoškolských učebnic. ISBN 978-80-214-2629-0.
- [5] VLK, Miloš. *Mezní stavy a spolehlivost*. Brno: VUT, 1991. ISBN 80-214-0386-1. Dostupné také z: <https://ndk.cz/uuid/uuid:b01df180-5a1d-11e2-bcaf-005056827e52>
- [6] HÁJEK, Emanuel, Pavel REIF a František VALENTA. *Pružnosť a pevnosť I: celostátní vysokoškolská učebnice pro skupinu studijních oborů strojírenství a ostatní kovodělná výroba*. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1988. Dostupné také z: <https://ndk.cz/uuid/uuid:7438b190-d6b4-11e8-bbaa-005056827e52>
- [7] BROŽOVSKÝ, Jiří a Alois MATERNA. *Metoda konečných prvků ve stavební mechanice*. Ostrava, 2012. Učebný text. Fakulta stavební, VŠB-TU Ostrava.
- [8] ZIENKIEWICZ, O.C. a Y.K. CHEUNG. *The finite element method in structural and continuum mechanics*. New York: McGraw-Hill, 1967.
- [9] PETRUŠKA, Jindřich. *MKP v inženýrských výpočtech* [online]. Učebný text FSI VUT Brno, 2011 [cit. 2021-02-06]. Dostupné z: <http://www.umt.fme.vutbr.cz/images/opory/MKP%20v%20inzenyrskych%20vypoctech/RIV.pdf>
- [10] FUSEK, Martin a Radim HALAMA. *MKP a MHP*. Ostrava, 2011. Učebný text. Fakulta stavební, VŠB-TU Ostrava.
- [11] *Technická příručka: Nelegované konstrukční oceli podle EN 10025* [online]. 2020 [cit. 2021-02-26]. Dostupné z: <https://bbolzano.cz/cz/technicka-podpora/technicka-prihrucka/tycove-oceli-uhlikove-konstrukcni-a-legovane/nelegovane-konstrukcni-oceli-podle-en-10025/prehled-mechanickych-vlastnosti-oceli-podle-en-10025-nove>
- [12] *Tyče prierezu HEA, HEB*. Feron [online]. [cit. 2021-03-20]. Dostupné z: <https://www.ferona.sk/profilova-ocel-tyce-prierezu-hea-heb>
- [13] *Tyče prierezu L rovnoramenné, nerovnoramenné*. Feron [online]. [cit. 2021-03-28]. Dostupné z: <https://www.ferona.sk/tyce-prierezu-l-rovnoramenne-nerovnoramenne>
- [14] FLORIAN, Zdeněk, Emanuel ONDRÁČEK a Karel PŘIKRYL. *Mechanika těles: statika*. Vyd. 7., V Akademickém nakladatelství CERM 2. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2007. ISBN 978-80-214-3440-0.