Pedagogická fakulta
Faculty of Education
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

Diplomová práce

Matematické soutěže pro nejmladší žáky

Vypracovala: Bc. Jana Řičicová
Vedoucí práce: prof. RNDr. Pavel Tlustý, CSc.

České Budějovice 2022

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji diplomovou práci na téma Matematické soutěže pro nejmladší žáky jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své diplomové práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích 22. 3. 2022 ....

(podpis)

Poděkování

Chtěla bych poděkovat svému vedoucí diplomové práce prof. RNDr. Pavlovi Tlustému, CSc. za odborné vedení, za pomoc a rady při zpracování této práce.

Chtěla bych též poděkovat ředitelům základních škol, učitelům a žákům za vyplnění pracovních listů a dotazníků.

Název diplomové práce

Matematické soutěže pro nejmladší žáky

Anotace

Cílem diplomové práce je vytvoření materiálu, který bude sloužit učitelům na 1. stupni základní školy jako pomůcka nejen pro podnícení zájmu o matematiku, ale i k dalšímu rozvoji matematických schopností nejmladších žáků základní školy. V teoretické části se učitelé seznámí s přehledem matematických soutěží, které se pořádají v tuzemsku a v zahraničí. Tyto soutěže jsou porovnány z různých hledisek – náročnost, typologie příkladů, způsob vypracování (úplné řešení problému × výběr odpovědi z nabídnutých možností). Každá soutěž je stručně popsána a jsou u ní uvedeny vhodné motivační, nebo nějakým způsobem zajímavé úlohy. U každé úlohy nalezne učitel metodický rozbor řešení s komentářem. Praktická část práce obsahuje čtyři pracovní listy (pro 2. – 5. třídu ZŠ), které jsou složené z příkladů z různých soutěží. Tyto pracovní listy byly ověřeny na vybraných základních školách.

Klíčová slova

matematika, matematická soutěž, metodický rozbor řešení, pracovní list, 1. stupeň, tuzemské a zahraniční matematické soutěže

Title of the diploma thesis

Mathematical competitions for the youngest pupils

Annotation

The aim of the diploma thesis is to develop material for primary school teachers, which can be used to stimulate interest in Mathematics and further develop the youngest pupils' mathematical skills. In the theoretical part, teachers will get acquainted with an overview of domestic (the Czech Republic) and abroad mathematical competitions. These competitions are compared in different perspectives – complexity, typology of tasks, elaboration methods (complete task solution × choice of answer from the offered options). Each competition is briefly described, and it contains suitable motivational, or in some way interesting solved tasks. For each task, the teacher finds a methodological analysis of the solution with commentary. The practical part of the work contains four worksheets (for 2nd to 5th grade), which contain tasks from various competitions. These worksheets were verified at selected primary schools.

Keywords

Mathematics, mathematical competition, methodical analysis of solutions of tasks, worksheet, primary school, domestic (the Czech Republic) and abroad mathematical competitions

Obsah

1. Úvod

Diplomová práce je určena učitelům 1. stupně ZŠ jako pomůcka nejen pro podnícení zájmu o matematiku, ale i k dalšímu rozvoji matematických schopností nejmladších žáků. Nejmladšími žáky rozumíme žáky ve věku 6 – 11 let, což v České republice odpovídá věku žáků na 1. stupni.

V teoretické části se učitelé seznámí s přehledem matematických soutěží, které se pořádají v tuzemsku a v zahraničí. Tyto soutěže jsou porovnány z různých hledisek – náročnost, typologie příkladů, způsob vypracování (úplné řešení problému × výběr odpovědi z nabídnutých možností). Každá soutěž je stručně popsána a jsou u ní uvedeny vhodné motivační, nebo nějakým způsobem zajímavé úlohy. U každé úlohy nalezne učitel metodický rozbor řešení s komentářem.

Praktická část práce obsahuje čtyři pracovní listy (pro 2. – 5. třídu ZŠ), které jsou složené z příkladů z různých soutěží. Tyto pracovní listy byly ověřeny na vybraných základních školách. Pracovní listy byly následně podle připomínek učitelů upraveny tak, aby mohly být dále školami využitelné k evaluaci znalostí jejich žáků.

2. Teoretická část

V teoretické části jsou stručně popsány matematické soutěže v České republice, sousedních státech (Německo, Rakousko, Slovensko a Polsko) a v některých anglofonních zemích (USA a Austrálie). Více prostoru je věnováno tuzemským soutěžím, se kterými se žáci základních škol mohou osobně setkat.

Zahraniční soutěže, které se konají ve více zemích, jsou uvedeny pouze jednou. Tuzemské soutěže jsou uvedeny všechny. V některých případech ukázkových úloh je v závorce uvedeno, že se jedná přímo o autorské řešení, které je celé převzato.

U každé soutěže jsou uvedeny úlohy, u nichž je metodický rozbor a řešení s komentářem. Úlohy byly vybírány tak, aby každá věková kategorie, které se soutěž týká, byla obsažena právě jednou. Z tohoto důvodu se počet úloh u jednotlivých soutěží liší. U tuzemských soutěží jsou uvedeny i různé typy úloh, které se ve vybraných soutěžích objevují.

V tabulce je uveden seznam vybraných matematických soutěží konaných ve vybraných státech. Zvýrazněny jsou věkové kategorie žáků (6 – 11 let) a odpovídající třídy, kterých se soutěže týkají:

	6 – 7 let (1. třída)	7 – 8 let (2. třída)	8 – 9 let (3. třída)	9 – 10 let (4. třída)	10 – 11 let (5. třída)
Česká republika					
Logická olympiáda					
Matematický klokan					
Matematické putování					
Pangea					
Matematická olympiáda					
Pythagoriáda					
Německo					
Bolyai					
Matematická olympiáda					
Matematický klokan					
Pangea					
Pohár rektora					
Mat. soutěž Adam Ries					

	6 – 7 let (1. třída)	7 – 8 let (2. třída)	8 – 9 let (3. třída)	9 – 10 let (4. třída)	10 – 11 let (5. třída)
Rakousko					
Bolyai					
Matematický klokan					
Pangea					
Honba za čísly a figurami					
Slovensko					
Matematický klokan					
Malynár					
Mamut					
Maks					
Matematická olympiáda					
Pikomat					
Riesky					
Polsko					
Matematický Alfík					
Matematický klokan					
Pangea					
Matematický maraton					
Mat. soutěž KOMA					
USA					
Matematický klokan					
Národní soutěž Beestar					
Mathematica					
Matematická olympiáda					
Math League					
Austrálie					
Matematická olympiáda					
Matematický klokan					

Tabulka č. 1 Přehled vybraných matematických soutěží

2.1. Základní vzdělávání na 1. stupni v oblasti matematiky (RVP ZV)

Základní vzdělávání na 1. stupni usnadňuje svým pojetím přechod žáků z předškolního vzdělávání a rodinné péče do povinného, pravidelného a systematického vzdělávání. Vzdělávací obsah je na 1. stupni rozdělen na čtyři tematické okruhy, které jsou dále děleny na 1. období (1. – 3. třída) a 2. období (4. a 5. třída). Vzdělávací oblast Matematika a její aplikace je založena především na aktivních činnostech, které jsou typické pro práci s matematickými objekty a pro užití matematiky v reálných situacích. Z těchto tematických okruhů vychází učivo matematiky na 1. stupni (NUV, 2021):

	Tematické okruhy a učivo
1. třída	*Číslo a početní operace*: přirozená čísla 1 – 20 (číselný obor 0 – 10, 10 – 20); číselná osa; práce s textem slovní úlohy; číslice 0 – 9; čísla 0 – 20 a znaky < , >, =
	Závislosti, vztahy a práce s daty: struktura času (hodina, den, týden, měsíc, rok); tabulky a schémata
	Geometrie v rovině a v prostoru: rovinné útvary (čtverec, obdélník, trojúhelník, kruh); tělesa (krychle, kvádr, koule, válec); orientace v prostoru (před, za, vpravo, vlevo, nahoře, dole); porovnávání (větší, menší, stejný, nižší, vyšší); délka úsečky a poměřování úseček
2. třída	*Číslo a početní operace*: přirozená čísla 1 – 100; číselný obor 0 – 100; peníze (počítání s penězi, způsoby placení); lichá a sudá čísla; řád jednotek a desítek; násobilka (2, 3, 4, 5, 10); součet a rozdíl; strategie řešení úloh z běžného života
	Závislosti, vztahy a práce s daty: časové údaje (čtvrt hodiny, půl hodiny, tři čtvrtě hodiny, celá hodina); jednotky (centimetr, litr, kilogram); měření délky, hmotnosti, objemu; tabulková evidence zadaných údajů
	Geometrie v rovině a v prostoru: rovinné útvary (lomená čára, křivá čára, bod, úsečka, přímka, polopřímka); tělesa (kužel, jehlan)
3. třída	*Číslo a početní operace*: číselný obor 0 – 1 000; rozklad čísla v desítkové soustavě; číselná osa (nástroj modelování); zápis čísla v desítkové soustavě; násobilka (6, 7, 8, 9); řešitelské strategie (pokus–omyl, řetězení od konce, vyčerpání všech možností, zjednodušování); nejbližší, nižší a vyšší násobek čísla

	Závislosti, vztahy a práce s daty: jízdní řády; evidence sportovních výkonů; tabulka jako nástroj pro řešení úloh; teplota, teploměr a stupeň celsia
	Geometrie v rovině a v prostoru: klasifikace trojúhelníků (obecný, rovnostranný, rovnoramenný); rovinné útvary (mnohoúhelník – čtyřúhelník, pětiúhelník, šestiúhelník); osově souměrné rovinné útvary; vrchol, strana, úhlopříčka mnohoúhelníku
4. třída	*Číslo a početní operace*: číselný obor 0 – 1 000 000; komutativnost a asociativnost; římské číslice; hospodaření domácnosti (rozpočet, příjmy a výdaje domácnosti); zaokrouhlování čísel; odhad a kontrola výsledku; práce s kalkulátorem; matematizace reálné situace; písemné algoritmy sčítání, odčítání, násobení a dělení
	Závislosti, vztahy a práce s daty: zásady sběru a třídění dat; strukturovaná tabulka; sloupkové diagramy
	Geometrie v rovině a v prostoru: zásady rýsování; rýsování jednoduchých rovinných útvarů; čtvercová síť; jednotky délky a jejich převody (mm, cm, m, km); grafické sčítání a odčítání úseček; obvod mnohoúhelníku; vzájemná poloha přímek v rovině (rovnoběžky, různoběžky, kolmice); jednotky obsahu (mm^2, cm^2, m^2); osová souměrnost rovinného útvaru
	Nestandardní aplikační úlohy a problémy: řešení úloh úsudkem; číselné a obrázkové řady
5. třída	*Číslo a početní operace*: číselný obor 0 – miliarda; zaokrouhlování; fáze řešení problému (zápis, grafické znázornění, stanovení řešení, odhad a kontrola výsledku, posouzení reálnosti výsledku, formulace odpovědi); písemné algoritmy sčítání, odčítání, násobení a dělení
	Závislosti, vztahy a práce s daty: statistické údaje a jejich reprezentace; kruhový diagram; finanční produkty (úspory)
	Geometrie v rovině a v prostoru: konstrukce čtverce, obdélníku, trojúhelníku (pravoúhlého, rovnostranného a rovnoramenného), rovnoběžky a kolmice daným bodem; složené obrazce ve čtvercové síti
	Nestandardní aplikační úlohy a problémy: magické čtverce; pyramidy; sudoku

Tabulka č. 2 Učivo matematiky na 1. stupni (MŠMT, 2011)

2.2. Česká republika

V České republice existuje několik matematických soutěží, které jsou určeny žákům 1. stupně základních škol: Logická olympiáda, Matematický klokan, Matematické putování, Pangea, Matematická olympiáda a Pythagoriáda.

2.2.1. Logická olympiáda

Logická olympiáda je soutěž založená na logických úlohách, která je určená dětem předškolního věku, žákům základních škol a studentům středních škol. Soutěž je pořádána Mensou České republiky.

Soutěžící jsou rozděleni do kategorií:

- Kategorie MŠ – děti předškolního věku
- Kategorie A1 – žáci prvního ročníku základních škol (1. třída)
- Kategorie A2 – žáci druhého ročníku základních škol (2. třída)
- Kategorie A – žáci prvního stupně základních škol (3. – 5. třída)
- Kategorie B – žáci druhého stupně základních škol (6. – 9. třída)
- Kategorie C – studenti všech druhů středních škol

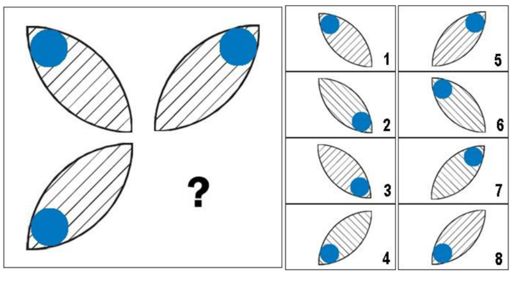
Pro kategorie MŠ, A1 a A2 probíhá soutěž jednokolově (pouze základní kolo) a výstupem je pouze informace o umístění a pořadí. Pro ostatní kategorie (A, B, C) soutěž probíhá ve třech kolech: základní, krajské a finále.

Pro účast v základním kole je nutná registrace účastníka na webových stránkách soutěže. Účastníci absolvují základní kolo online. Úlohy jsou bodovány podle obtížnosti. Nejsou udělovány záporné body za špatné odpovědi.

Do krajského kola postupuje v každém kraji a každé věkové kategorii 50 – 60 nejlepších soutěžících. Délka testu krajského kola je 30 minut. Do finále postupují vždy dva nejlepší soutěžící z jednotlivých krajů. (Mensa, 2020)

2.2.1.1. Kategorie MŠ, A1 a A2 (1. a 2. třída)

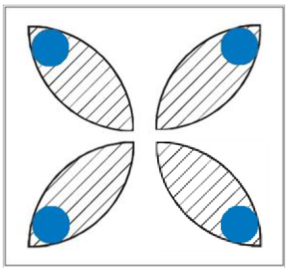
Místo otazníku doplň správný lístek z nabídky.



Obrázek č. 1 Zadání úlohy

Řešení:

Z obrázku lze vyvodit, že hledaný lístek je osově souměrný s lístkem v levém horním rohu, který stačí pouze překlopit. Hledaný lístek směřuje z levého horního rohu do pravého dolního rohu, modrá tečka se nachází v pravém dolním rohu a proužky jsou rovnoběžné s diagonálou směřující z pravého horního rohu do levého dolního rohu.



Obrázek č. 2 Řešení úlohy

Správné řešení je číslo 3.

Poznámka: Při vysvětlování postupu řešení je možné přiložit k obrazci zrcátko, aby žáci viděli, jak má kompletní útvar vypadat (demonstrace osové souměrnosti). Úloha byla použita v pracovním listě pro 2. třídu.

2.2.1.2. Kategorie A (3. – 5. třída)

V pokladničce máš 264 Kč. Suma je tvořena pouze českými mincemi (1 Kč, 2 Kč, 5 Kč, 10 Kč, 20 Kč, 50 Kč). Všech mincí máš stejný počet, kolik máš celkem mincí?

Řešení:

Sečteme hodnoty všech mincí.

$$1 + 2 + 5 + 10 + 20 + 50 = 88 \text{ Kč}$$

Postupným sčítáním dostaneme:

$$88 + 88 + 88 = 264.$$

Číslo 88 se do 264 vejde třikrát.

Celkem máme 6 různých hodnot mincí. Vynásobíme počet kusů od každé mince s počtem různých hodnot mincí.

$$3 \cdot 6 = 18 \text{ mincí}$$

Máme celkem 18 mincí různých hodnot.

Poznámka: V úloze žák kromě počítání do 1000 využívá základních znalosti z finanční matematiky (počítání s penězi, hodnoty českých mincí). Při vysvětlování postupu řešení je vhodné využít papírové mince. Úloha byla použita v pracovním listě pro 4. třídu.

2.2.2. Matematický klokan

Mezinárodně koordinovaná soutěž Matematický klokan byla vytvořena podle obdobné soutěže, která byla v 80. letech 20. století pořádána v Austrálii.

Soutěžící jsou podle věku rozděleni do 6 kategorií:

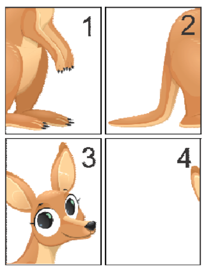
- 1. stupeň ZŠ: Cvrček (2. a 3. třída), Klokánek (4. a 5. třída)
- 2. stupeň ZŠ: Benjamín (6. a 7. třída), Kadet (8. a 9. třída)
- Střední školy: Junior (1. a 2. ročník), Student (3. a 4. ročník)

Soutěží se ve všech krajích naší republiky v jednom termínu, obvykle v pátek ve třetím březnovém týdnu. Žáci a studenti absolvují školní, oblastní, republikové i mezinárodní kolo ve své lavici. Ve všech kategoriích soutěžící řeší testové úlohy ve stanoveném čase, přičemž vybírá jednu z pěti nabízených možností řešení.

Úlohy jsou seřazeny ve třech skupinách podle obtížnosti, za správnou odpověď získává soutěžící 3, 4 nebo 5 bodů, za špatnou odpověď se mu jeden bod strhává. Aby soutěžící nedosahovali záporných výsledků, dostávají do vínku takový počet bodů, kolik je v kategorii úloh. Nejlepší řešitelé v každé kategorii jsou odměněni věcnou cenou. (Nocar, 2010)

2.2.2.1. Rok 2020, kategorie Cvrček (2. a 3. třída), úloha 3

Úloha za 3 body: Nela složila z těchto čtyř dílků klokana. Jak dílky uspořádala?



Obrázek č. 3 Výchozí obrázek úlohy

(A)

4	3
2	1

(B)

3	4
2	1

(C)

2	1
4	3

(D)

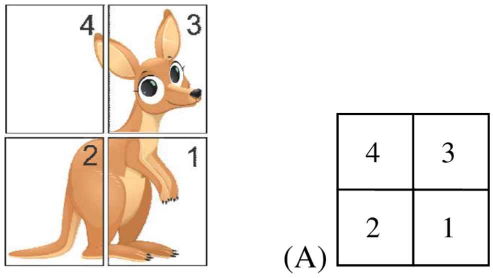
4	3
1	2

(E)

3	4
1	2

Řešení:

Při pohledu na přeházený obrázek zjistíme, že ho můžeme rozdělit na dvě části: hlavu (dílky 3 a 4) a tělo (dílky 1 a 2). Dílky hlavy budou nahoře a dílky těla budou dole. Dílky 1 a 3 budou vpravo a dílky 2 a 4 budou vlevo.



Obrázek č. 4 Řešení úlohy

Správné řešení je (A).

Poznámka: Úloha je na plošnou představivost. Řešení úlohy je možné ukázat i tak, že jednotlivé dílky rozstříháme, následně je složíme jako puzzle a zapíšeme správné řešení. Úloha byla použita v pracovním listě pro 2. třídu.

2.2.2.2. Rok 2017, kategorie Klokánek (4. a 5. třída), úloha 13

Úloha za 4 body: Žáci 4. B a 5. A pořádají sportovní turnaj. Nejprve se přihlásilo 13 dětí a poté ještě 19 dětí. Urči nejmenší počet dětí, které se musí ještě přihlásit, aby mohlo být vytvořeno šest družstev se stejným počtem hráčů.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Řešení:

Nejprve sečteme počet přihlášených dětí:

$$13 + 19 = 32 \text{ dětí.}$$

Musíme najít číslo, které je větší než 32 a je násobkem čísla 6. Vydělíme číslo 32 číslem 6, abychom zjistili nejbližší celočíselný násobek:

$$32 : 6 = 5, \text{ zbytek } 2.$$

Aby byl celočíselný násobek 6, musí se přihlásit další 4 děti.

Správné řešení je (D).

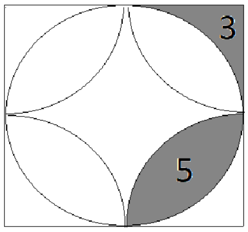
Poznámka: Při řešení úlohy se využívá znalostí malé násobilky a pracuje se zbytkem dělení. Násobek čísla 6 mohou žáci najít i vypisováním čísel větších jak 32.

2.2.3. Matematické putování

Matematické putování je soutěž pro týmy žáků 4. a 5. tříd základních škol, kterou připravují studenti učitelství Pedagogické fakulty Univerzity Karlovy v Praze. Soutěž není obyčejnou matematickou hrou, ve které jde jen o počítání záludných úloh. Kromě výpočtů je potřeba promyslet taktiku k doprovodné hře. V každém roce jsou vydávána pravidla soutěže. (Čadek, 2019)

2.2.3.1. *Rok 2019, stanoviště 6, úloha 1 (těžká)*

Určete obsah čtverce, jestliže víte, že vybarvené části mají obsah 3 a 5.

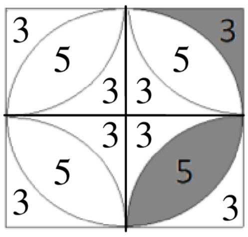


Obrázek č. 5 Výchozí obrázek úlohy

Řešení:

Čtverec rozdělíme na 4 shodné obrazce. V celém čtverci doplníme obsahy částí, protože jsou shodné. Zjistili jsme, že části s obsahem 3 (j^2) jsou ve čtverci osmkrát a části s obsahem 5 (j^2) čtyřikrát. Sečteme:

$$8 \cdot 3 + 4 \cdot 5 = 24 + 20 = 44 \ (j^2).$$

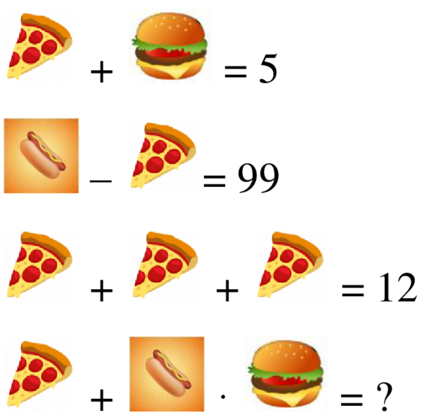


Obrázek č. 6 Řešení úlohy

Poznámka: Úloha využívá pojmu obsah čtverce, ale lze ji vyřešit logickou úvahou. Využíváme znalostí z geometrie (čtverec, kruh, shodnost, obsah) a aritmetiky (sčítání). Lepší by bylo úlohu počítat v jednotkách (např. v cm^2) – proto uvedeny v závorkách jednotky j^2. Úloha byla použita v pracovním listě pro 4. třídu.

2.2.3.2. *Rok 2019, stanoviště 11b, úloha 1 (středně těžká)*

Vyřešte rébus.



Řešení:

Z třetí rovnice vypočítáme hodnotu pizzy. Víme, že tři pizzy mají hodnotu 12. Jedna má proto hodnotu

$$12 : 3 = 4.$$

Z první rovnice vypočítáme hodnotu hamburgeru. Víme, že pizza má hodnotu 4 a součet obou položek je 5. Hamburger má hodnotu:

$$5 - 4 = 1.$$

Z druhé rovnice vypočítáme hodnotu párku v rohlíku. Víme, že když odečteme pizzu o hodnotě 4 od párku v rohlíku, dostaneme hodnotu 99. Hodnotu párku v rohlíku získáme sečtením výsledné hodnoty rovnice a hodnoty pizzy:

$$99 + 4 = 103.$$

Nyní vyřešíme rovnici s otazníkem. Za pizzu, párek v rohlíku a hamburger dosadíme vypočítané hodnoty.

$$4 + 103 \cdot 1 = 4 + 103 = 107.$$

Poznámka: Při výpočtu se využije sčítání, odčítání a znalost malé násobilky. Autoři se při vymýšlení úlohy inspirovali na sociálních sítích. Úloha byla použita v pracovním listě pro 4. třídu.

2.2.4. Pangea

Soutěž Pangea vznikla za účelem podpořit motivaci žáků a přispět tak k rozvoji vztahu k matematice. Pangea vznikla v roce 2007 v Německu. Soutěže se mohou zúčastnit žáci v kategoriích 4. – 9. třídy ZŠ. Každý účastník může soutěžit pouze v jedné kategorii.

Pro celou školu je třeba zvolit jeden ze způsobů účasti (online či tištěná verze). Žáci účastnící se soutěže v tištěné podobě hradí registrační poplatek 20 Kč. V průběhu soutěže je zakázáno používat kalkulačku či jiné elektronické přístroje.

Soutěž se skládá ze dvou kol – školní kolo a finálové (ústřední) kolo.

- Školní kolo soutěže se koná v tištěné a online verzi. Na vyřešení 15 otázek mají soutěžící 45 minut. Všichni účastníci obdrží certifikát o účasti v soutěži.
- Do finálového (ústředního) kola postupuje vždy nejlepší řešitel z každého kraje. Na vyřešení 20 otázek mají soutěžící 60 minut.

Slavnostní zakončení soutěže se koná v Praze a je spojené s vyhlašováním výsledků a předáváním cen. (Pangea, 2020)

2.2.4.1. *Rok 2016, 4. třída, školní kolo, úloha 2 (Nejvyšší hory kontinentů)*

Úloha za 3 body: V tabulce jsou zaznamenány nejvyšší hory kontinentů.

Jaký je výškový rozdíl mezi nejnižší a nejvyšší zaznamenanou horou?

Kontinent	Hora	Výška (m n. m.)
Afrika	Kilimandžáro	5 895
Amerika	Aconcagua	6 902
Antarktida	Vinson Massif	5 140
Asie	Mount Everest	8 850
Austrálie	Mount Carstensz	4 887
Evropa	Mont Blanc	4 807

Tabulka č. 3 Výchozí tabulka úlohy

(A) 36 481 m (B) 13 657 m (C) 4 043 m (D) 3 963 m (E) 1 948 m

Řešení:

Z výchozí tabulky vyčteme nejnižší (Mont Blanc – 4 807 m n. m.) a nejvyšší horu (Mount Everest – 8 850 m n. m.).

Vypočítáme výškový rozdíl:

$$8\,850 - 4\,807 = 4\,043 \text{ m.}$$

Výškový rozdíl mezi nejnižší a nejvyšší zaznamenanou horou je 4 043 m.

Správné řešení je (C).

Poznámka: Žák nejprve logicky určí nejnižší a nejvyšší horu a čísla od sebe odečte (menší od většího). Znalosti o výškách hor kontinentů se žákovi budou hodit v jiných předmětech (vlastivěda). Úloha byla použita v pracovním listě pro 4. třídu.

2.2.4.2. *Rok 2021, 5. třída, finálové kolo, úloha 12 (Zámek v Litomyšli)*

Úloha za 5 bodů: Zámek v Litomyšli, renesanční skvost a památka UNESCO, je atraktivní svými sgrafity ve tvaru psaníček. Na zdech zámku i přilehlých budovách lze najít 8 tisíc psaníček, na kterých prý nikde nenajdete stejný motiv. Psaníčka mají tvar obdélníku, který má rozměry 720 × 1150 mm.

(1)  (2) 

Obrázek č. 7 Ilustrace k úloze – (1) psaníčko (Pangea), (2) zámek (Pension-kraus)

Jaká je šířka a délka vnitřního obdélníku psaníčka, jestliže délka tohoto obdélníku je dvakrát kratší než délka celého psaníčka a šířka psaníčka je zhruba čtyřikrát kratší než šířka celého psaníčka?

(A) šířka 575 mm, délka 180 mm (B) šířka 180 mm, délka 575 mm

(C) šířka 360 mm, délka 287,5 mm (D) šířka 287,5 mm, délka 360 mm

(E) šířka 57,5 mm, délka 18 mm

Řešení:

Délku původního psaníčka vydělíme dvěma a jeho šířku čtyřma.

$$\text{délka: } 1150 : 2 = 575 \text{ mm}$$

$$\text{šířka: } 720 : 4 = 180 \text{ mm}$$

Správné řešení je (B).

Poznámka: V původním zadání jsou rozměry psaníčka v cm. Vnější rozměry zámku jsou přibližně 50 × 63 × 19 psaníček – viz obrázek zámku. Kratší strana zámku měří přibližně $50 \cdot 1150 = 57500$ mm $= 57{,}5$ m. Proto rozměry uvedeny v mm.

Žák při výpočtu využívá základní znalosti z geometrie (délka a šířka obdélníku) a aritmetiky (dělení). Žákovi se může stát, že správně přepočte rozměry, ale zaškrtne špatné řešení (podobnost řešení (A) a (B) – pouze prohozené rozměry).

2.2.5. Matematická olympiáda

Matematická olympiáda je předmětová soutěž z matematiky pro žáky základních a středních škol. Soutěž je jednotná pro celé území České republiky. Řešení úloh musí soutěžící zapsat tak, aby bylo možné sledovat jejich myšlenkový postup.

Soutěž je organizována v následujících kategoriích:

- Kategorie Z5 – Z9 (5. – 9. třída) pro základní školy – všechny kategorie mají školní a okresní kolo, kategorie Z9 má navíc kolo krajské.
- Kategorie A, B, C (1. – 4. ročník) pro střední školy – všechny kategorie mají školní a krajské kolo, kategorie A má navíc kolo ústřední.
- Kategorie P zaměřená na informatiku (1. – 4. ročník) pro střední školy – všechny kategorie mají školní, krajské a ústřední kolo.

Úspěšným řešitelem školního kola je žák, který má hodnocení výborně nebo dobře alespoň u 4 úloh.

V okresním kole je na výpočet úloh stanovený časový limit. Za každou úlohu může žák dostat maximálně 6 bodů. (Urban, 2016)

2.2.5.1. 58. ročník (2008/2009), I. kolo, Z5–I–5

Digitální hodiny ukazují hodiny a minuty, jako například 14:37.

Kolik minut denně svítí na těchto hodinách alespoň jedna pětka? (*M. Volfová*)

1. Řešení (autorské)

Nejprve si pro přehlednost napíšeme, na kterém místě může být číslice 5:

_	_	:	_	_
1. místo	*2. místo*		*3. místo*	*4. místo*
– pouze číslice 0, 1, 2	– všechny číslice 0 – 9		– pouze číslice 0 – 6	– všechny číslice 0 – 9

Na 1. místě pětka svítit nemůže, protože nejvyšší možná číslice je 2.

Budeme uvažovat interval prvních 12 hodin. Četnost výskytu číslice 5 v intervalu druhých 12 hodin je stejná.

- Na 2. místě pětka svítí od 5:00 do 5:59, tj. 60 minut. U dalších míst budeme uvažovat jen zbylých 11 hodin, protože jsme již tento interval vyřešili.
- Na 3. místě svítí pětka každou hodinu 10 minut (od ??:50 do ??:59), tj.:

$$11 \cdot 10 = 110 \text{ minut.}$$

- Na 4. místě svítí pětka v každé hodině šestkrát (05, 15, 25, 35, 45, 55). Minuta ??:55 je již započtena, proto s ní již nebudeme počítat:

$$11 \cdot 5 = 55 \text{ minut.}$$

Aspoň jedna pětka svítí v intervalu 12 hodin:

$$60 + 110 + 55 = 225 \text{ minut,}$$

za celý den pak:

$$2 \cdot 225 = 450 \text{ minut, tj. 7 hodin 30 minut.}$$

2. Řešení (autorské)

Uvědomíme si, že v době od 5:00 do 5:59 svítí 60 minut pětka na druhém místě a totéž v době 15:00 až 15:59, tj.:

$$60 \cdot 2 = 120 \text{ minut.}$$

Pro každou z ostatních 22 hodin můžeme vypsat, ve kterých minutách bude svítit aspoň jedna pětka: 05, 15, 25, 35, 45, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, tj. celkem 15 minut.

Dohromady za celý den je to:

$$120 + 22 \cdot 15 = 120 + 330 = 450 \text{ minut.}$$

Poznámka: Úlohu jsem vybrala jako ukázkovou, protože jsem se s ní setkala jako řešitel Matematické olympiády. Jedná se o aritmetickou úlohu. První řešení volí žák, který uvidí v úloze vzorec a bude strategicky postupovat. Oproti tomu druhé řešení volí žák, který zmíněné souvislosti nevidí a začne složitě vypisovat všechny možnosti.

2.2.5.2. 66. ročník (2016/2017), II. kolo, Z5–II–3

Ema chce sestrojit trojúhelník ABC se stranami $|AB| = 3$ cm a $|BC| = 4$ cm. Dále chce sestrojit všechny kružnice, z nichž každá bude mít střed v některém z vrcholů trojúhelníku a bude procházet některým jeho jiným vrcholem.

Jak dlouhá musí být strana AC, aby takových kružnic bylo právě pět? Určete všechny možnosti. (*V. Hucíková*)

1. Řešení (autorské)

Kdyby strany AB a AC byly stejně dlouhé, pak kružnice se středem v bodě A procházející bodem B by procházela také bodem C. V takovém případě sestrojíme jedinou kružnici se středem v bodě A.

Kdyby strany AB a AC byly různě dlouhé, pak kružnice se středem v bodě A procházející jedním z bodů B a C nebude procházet tím druhým. V takovém případě sestrojíme dvě kružnice se středem v bodě A.

Obdobné případy mohou nastat také pro kružnice se středem v bodě C. Kružnice se středem v bodě B budou jistě dvě, protože ze zadání víme, že strany BA a BC jsou různě dlouhé.

Pokud by strany trojúhelníku ABC byly navzájem různé, potom bychom sestrojili $2 + 2 + 2 = 6$ kružnic. Pokud by strana AC byla shodná s jednou ze zbylých dvou stran, potom bychom sestrojili $1 + 2 + 2 = 5$ kružnic.

Strana AC proto musí být dlouhá buď 3 cm nebo 4 cm.

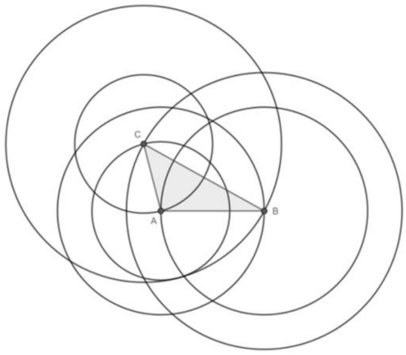
2. Řešení

Podle trojúhelníkové nerovnosti nejprve zjistíme, jak dlouhá může být strana AC. (Trojúhelníková nerovnost: součet délek dvou libovolných stran je vždy větší než délka třetí, zbývající strany. (Matematika.cz, 2003))

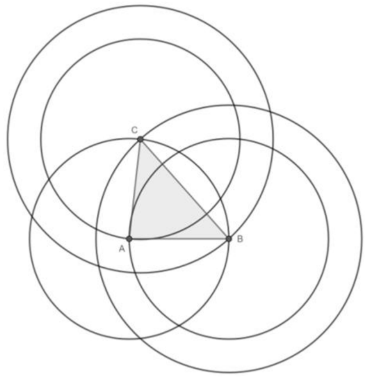
$AC < AB + BC$	$BC < AC + AB$	$AB < AC + BC$
$AC < 7$ cm	$4 < AC + 3$	$3 < AC + 4$
	$AC > 1$ cm	$AC > -1$ cm

Z výše uvedených nerovností vyplývá, že strana AC musí být dlouhá 2 – 6 cm.

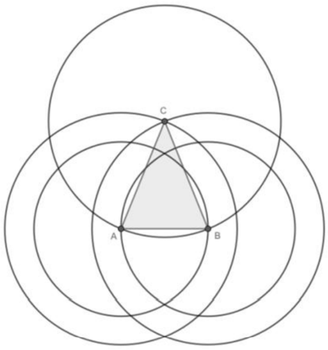
Všechny možnosti narýsujeme a podle zadání sestrojíme kružnice:



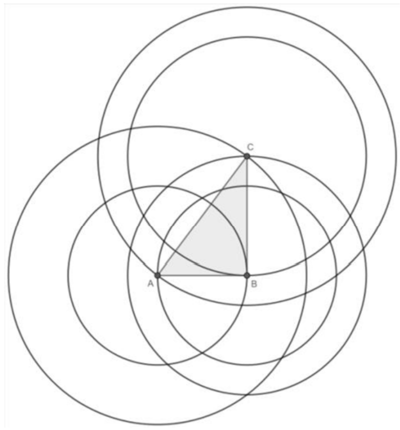
Obrázek č. 8 $AC = 2$ cm
– vznikne 6 kružnic (nevyhovuje)



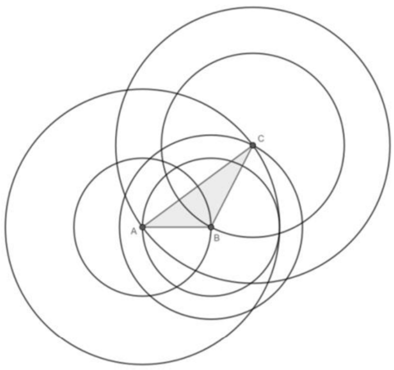
Obrázek č. 9 $AC = 3$ cm
– vznikne 5 kružnic (vyhovuje)



Obrázek č. 10 $AC = 4$ cm
– vznikne 5 kružnic (vyhovuje)



Obrázek č. 11 $AC = 5$ cm
– vznikne 6 kružnic (nevyhovuje)

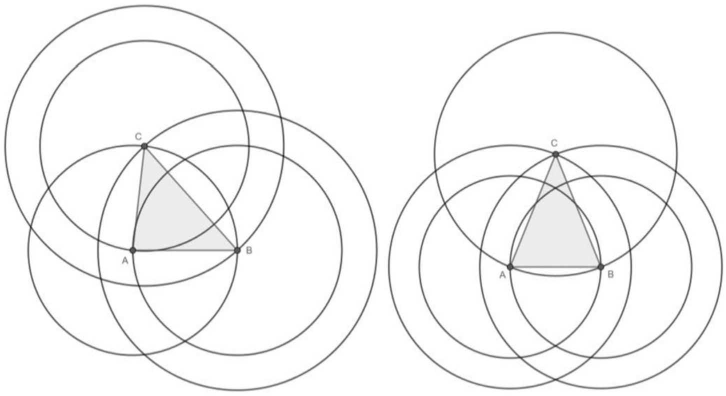


Obrázek č. 12 $AC = 6$ cm
– vznikne 6 kružnic (nevyhovuje)

Postupným rýsováním jsme zjistili, že podmínkám vyhovují pouze délky 3 a 4 cm.

3. Řešení

Uvědomíme si, že u většiny trojúhelníků existuje 6 kružnic. 5 jich je jen v případě, že délky dvou stran trojúhelníku jsou shodné, tj. $AC = AB$ nebo $AC = BC$. Protože známe délky stran AB a BC, možné délky strany AC jsou 3 cm nebo 4 cm.



Obrázek č. 13 Řešení úlohy

Poznámka: Jedná se o geometrickou úlohu. Trojúhelníkovou nerovnost znají žáci ze 4. třídy.

2.2.6. Pythagoriáda

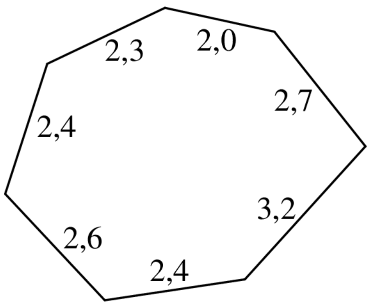
Soutěž Pythagoriáda je určena pro žáky základních škol a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií. Jejím cílem je zvýšit zájem o matematiku, napomáhat vyhledávání talentovaných žáků a systematicky podporovat a rozvíjet jejich odborný růst, tvořivé a logické myšlení. Pythagoriáda je jednotná pro celé území České republiky, pořádá se každoročně a člení se podle kategorií (5. – 8. třída) a soutěžních kol (školní a okresní).

Termíny konání jednotlivých soutěžních kol Pythagoriády a další informace upřesňující organizaci příslušného ročníku jsou stanoveny tak, aby se termíny konání jednotlivých olympiád a soutěží nepřekrývaly.

Účast žáků v Pythagoriádě je dobrovolná. Úkolem soutěžících je samostatně vyřešit zadané úlohy. Časový limit na vyřešení úloh je 60 minut čistého času. Za každou správně vyřešenou úlohu získá soutěžící 1 bod. (Urban, 2017)

2.2.6.1. 38. ročník (2014/2015), 5. třída, školní kolo, úloha 8

Vypočtěte obsah čtverce, který má stejný obvod jako sedmiúhelník na obrázku a výsledek zaokrouhlete na celé cm^2. (Rozměry jsou v cm.)



Obrázek č. 14 Výchozí obrázek úlohy

Řešení:

Nejprve sečteme délky stran sedmiúhelníku.

$$2{,}0 + 2{,}7 + 3{,}2 + 2{,}4 + 2{,}6 + 2{,}4 + 2{,}3 = 17{,}6 \text{ cm.}$$

Délku 17,6 cm vydělíme čtyřmi, protože čtverec má 4 strany.

$$17{,}6 : 4 = 4{,}4 \text{ cm.}$$

Nyní vypočítáme obsah čtverce o straně 4,4 cm:

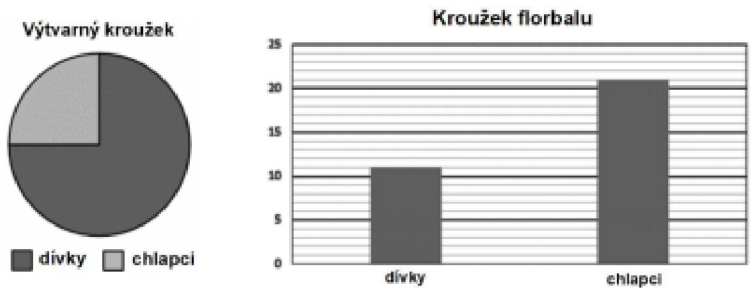
$$S = a^2 = 4{,}4^2 = 19{,}36 \doteq 19 \text{ cm}^2.$$

Obsah čtverce je přibližně 19 cm^2.

Poznámka: Při řešení úlohy využívá žák znalosti základních geometrických vzorců (obvod a obsah čtverce).

2.2.6.2. 42. ročník (2018/2019), 5. třída, okresní kolo, úloha 13

Do výtvarného kroužku chodí 32 dětí. Stejný počet chodí i do kroužku florbalu. Zjistěte z grafů, o kolik chlapců více chodí na florbal než do výtvarného kroužku.



Obrázek č. 15 Výchozí grafy úlohy

Řešení:

Nejprve vyčteme data z grafů a zapíšeme:

- Výtvarný kroužek: $\frac{1}{4}$ žáků jsou chlapci, $\frac{3}{4}$ žáků jsou dívky. $\frac{1}{4}$ z 32 je $32 : 4 = 8$. Kroužek navštěvuje 8 chlapců a 24 dívek.
- Kroužek florbalu: Kroužek navštěvuje 21 chlapců a 11 dívek.

Nyní zjistíme z grafů, o kolik chlapců více chodí na florbal:

$$21 - 8 = 13 \text{ chlapců.}$$

Na florbal chodí o 13 chlapců více než na výtvarný kroužek.

Poznámka: Tento typ úlohy jsem zvolila s cílem, aby žák musel pracovat s daty. Úloha byla použita v pracovním listě pro 5. třídu.

2.3. Německo

V Německu existují následující matematické soutěže určené pro žáky ve věku 6 – 11 let: Bolyai, Matematická olympiáda, Matematický klokan, Pangea, Pohár rektora a Matematická soutěž Adam Ries.

2.3.1. Pohár rektora

Každoroční matematická studentská soutěž o pohár rektora univerzity v Rostocku probíhá ve dvou fázích. První fáze probíhá na úrovni školy na začátku roku. Druhá fáze soutěže probíhá centrálně na univerzitě. Úlohy matematické soutěže jsou seřazené podle ročníků a následujících tří skupin: L (logicko–kombinatorické úlohy), A (algebraicko–aritmetické úlohy), G (geometrické úlohy). (Pokal des Rektors, 2021)

2.3.1.1. 4. třída, úloha 4L5

V krabici jsou 2 červené, 3 modré, 4 žluté, 5 zelených, 6 černých a 7 bílých kuliček, všechny stejné velikosti a hmotnosti. Axel by chtěl ze škatulky se zavázanýma očima vytáhnout alespoň 4 kuličky stejné barvy.

Kolik kuliček musí Axel vyndat z krabice, aby měl jistotu, že má u sebe 4 kuličky stejné barvy? Uveďte důvody své odpovědi!

Řešení (autorské):

V nejhorším případě může Axel vytáhnout 17 kuliček (konkrétně 2 červené, 3 modré a 3 žluté, zelené, černé a bílé) bez 4 kuliček stejné barvy. Z 18 vylosovaných kuliček jsou určitě 4 stejné barvy.

Poznámka: Úloha byla vybrána z logicko–kombinatorické skupiny úloh.

2.3.1.2. 5. třída, úloha 5A10

V zobrazeném kryptogramu by měly být do polí namísto písmen vkládány číslice, aby bylo správně vyřešeno všech pět zadaných úkolů. Stejná písmena by měla znamenat stejná čísla, různá písmena by měla znamenat různá čísla.

Vysvětlete, že dané číslice splňují všechny rovnice a že jsou jediné, které to dělají.

$$\begin{array}{ccccc} \boxed{a} & \cdot & \boxed{a} & = & \boxed{b} \\ - & & & & - \\ \boxed{c} & \cdot & \boxed{a} & = & \boxed{d} \\ \hline \boxed{e} & \cdot & \boxed{a} & = & \boxed{a} \end{array}$$

Obrázek č. 16 Zadání úlohy

Řešení (autorské):

Úkoly obsažené v kryptogramu jsou:

(1) $a \cdot a = b$ (2) $c \cdot a = d$ (3) $e \cdot a = a$ (4) $a - c = e$ (5) $b - d = a$

Protože například z úkolu (1) vychází $a \neq 0$, vyplývá pak z úkolu (3), že $e = 1$. Potom platí, že $c \neq 1$ a například kvůli úkolu (2) platí také $c \neq 0$, takže platí, že $c \geq 2$. Podle úkolu (4) platí, že $a \geq 3$ a kvůli úkolu (1) platí, že $a = 3$.

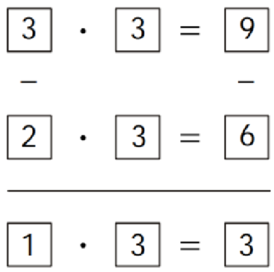
Z úkolů (1), (4) a (2) získáme zbylé neznámé:

$$b = a \cdot a = 3 \cdot 3 = 9$$

$$c = a - e = 3 - 1 = 2$$

$$d = c \cdot a = 2 \cdot 3 = 6$$

Úkol (5) je splněn stanovenými hodnotami. Jediným řešením je:



Obrázek č. 17 Řešení úlohy

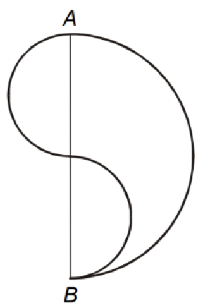
Poznámka: Úloha byla vybrána z algebraicko–aritmetické skupiny úloh.

2.3.1.3. 5. třída, úloha 5G25

Půlkruh je nakreslen přes úsečku *AB* a další půlkruh přes každou polovinu úsečky, jak je znázorněno na obrázku.

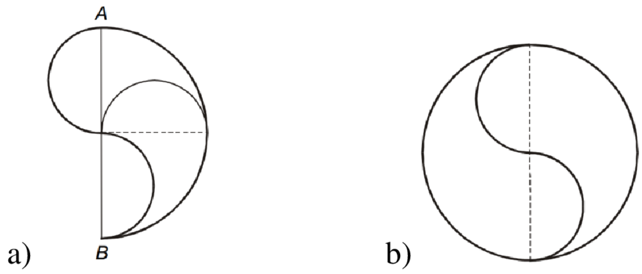
a) Oblast ohraničená třemi půlkruhy by měla být rozdělena na dvě shodné části pomocí řezu. Nakreslete obrázek pomocí průsečíkové křivky.

b) Dva takové povrchy lze spojit a vytvořit kruhový povrch. Nakreslete dvě z těchto oblastí, které dohromady tvoří kruhovou oblast.



Obrázek č. 18 Výchozí obrázek úlohy

Řešení (autorské):



Obrázek č. 19 Řešení úlohy

Poznámka: Úloha byla vybrána z geometrické skupiny úloh.

2.3.2. Matematická soutěž Adam Ries

Mezinárodní matematická soutěž Adama Riese je organizována Společností Adama Riese a je určena pro studenty 5. tříd ve spolkových zemích Sasko, Bavorsko (část Oberfranken) a Durynsko a pro studenty prim gymnázií Ústeckého kraje.

Soutěž probíhá ve třech kolech. První kolo probíhá na jednotlivých školách a nejlepší účastníci se kvalifikují do oblastního kola. Organizace oblastních kol a určení kritérií pro postup je v kompetenci jejich organizátorů. V Ústeckém kraji postupují do oblastního kola tři nejlepší účastníci školních kol. (Adamries.cz, 2021)

2.3.2.1. Rok 2009, 2. kolo, úloha 3

Adam Ries ve své druhé knize úloh poprvé vydané roku 1522 vytvořil příklady, které se týkají nákupu různého zboží. Jedna z úloh by v našem současném jazyce zněla takto (čísla byla změněna):

Jeden pytel zázvoru váží 90 liber a 24 lotů.

Jedna libra zázvoru stojí 16 šilinků.

V době, ve které žil Adam Riese, se platilo guldeny, šilinky a haléři. Mezi jednotkami platily následující převody: 1 gulden = 20 šilinků, 1 šilink = 12 haléřů. Hmotnost se udávala v librách a lotech. Platil převod 1 libra = 32 lotů.

Vyřeš následující úlohy:

a) Kolik stojí 90 liber zázvoru? Cenu vyjádři v guldenech.

b) Kolik stojí pytel zázvoru? Výslednou cenu udej tak, aby bylo zapotřebí co nejmenšího počtu mincí.

c) Jiný zákazník nakoupí zázvor za 45 guldenů a 6 haléřů. Kolik koupil zázvoru?

Řešení (autorské):

a) Jedna libra zázvoru stojí 16 šilinků. Potom stojí 90 liber zázvoru

$$90 \cdot 16 = 1440 \text{ šilinků.}$$

Jeden gulden je 20 šilinků, platí tedy

$$1440 : 20 = 72 \text{ guldenů.}$$

b) Jeden pytel zázvoru váží 90 liber a 24 lot. Jedna libra a tedy i 32 lot zázvoru stojí 16 šilinků. Z toho vyplývá, že 2 loty zázvoru stojí 1 šilink a 24 lot zázvoru stojí 12 šilinků. V bodu a) tohoto příkladu jsme vypočítali, že 90 liber zázvoru stojí 72 guldenů. Celý pytel zázvoru tedy stojí 72 guldenů a 12 šilinků.

c) Jedna libra zázvoru stojí 16 šilinků. 32 lot zázvoru tedy stojí

$$16 \cdot 12 = 192 \text{ haléřů.}$$

Jeden lot zázvoru tedy stojí

$$192 : 32 = 6 \text{ haléřů.}$$

Pokud zákazník nakoupí zázvor za 45 guldenů a 6 haléřů, což je celkem

$$(45 \cdot 20 \cdot 12) + 6 = 10806 \text{ haléřů,}$$

nakoupí tedy

$$10806 : 6 = 1801 \text{ lot zázvoru.}$$

Převedeno na větší jednotky se jedná o 56 liber a 9 lot zázvoru ($56 \cdot 32 + 9$).

Poznámka: Úloha seznamuje žáka s novými jednotkami a převody mezi nimi.

2.4. Rakousko

V Rakousku se žáci ve věku 6 – 11 let mohou zúčastnit matematických soutěží Bolyai, Matematický klokan, Pangea a soutěže „Honba za čísly a figurami“.

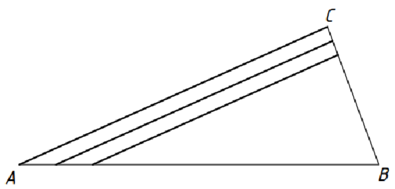
2.4.1. Honba za čísly a figurami

Soutěž „Honba za čísly a figurami“ je každoročně pořádaná technickou univerzitou ve Vídni. Je určena pro 4. – 9. třídu základních škol a 1. – 4. ročník střední školy. Má 3 samostatné kategorie s různým počtem úloh (5 – 7 úloh), které nejsou očíslovány, ale opatřeny čísly, která jsou řešením jiné úlohy. Tato čísla tvoří uzavřený kruh a žáci tak mohou začít kdekoli. (Zahlenjagd, 2019)

2.4.1.1. Rok 1999, 5. třída, ukázková úloha

Je dán trojúhelník ABC, kde $AB = 245$ m, $BC = 100$ m a $AC = 230$ m. Farmář začal orat pole od strany AC. Brázdy jsou rovnoběžné a jsou od sebe vzdáleny 0,5 m.

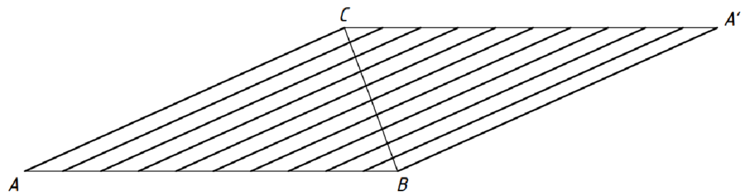
Na konci dne se farmář podívá na své pole a chce znát celkovou délku brázd zoraných v trojúhelníku ABC. Jak dlouhé jsou brázdy (v km)?



Obrázek č. 20 Výchozí obrázek úlohy

Řešení (autorské):

Přidáním symetrického trojúhelníku $A'CB$ podél strany CB vznikne rovnoběžník se stranami 230 m a 245 m.



Obrázek č. 21 Pomocný obrázek

Nyní jsou brázdy stejně dlouhé – každá měří 230 m. Podélně měří 245 m, celkem

$$(245 \cdot 2) - 1 = 490 - 1 = 489 \text{ rýh.}$$

Zjistíme, kolik měří brázdy dohromady

$$230 \cdot (489 : 2) = 56\,235\, m \doteq 56\, km.$$

Poznámka: Žák musí při řešení úlohy rozšířit trojúhelník na rovnoběžník. Využívá znalostí z geometrie (bod, úsečka, trojúhelník, rovnoběžník, délka, symetrie).

2.5. Slovensko

Na Slovensku se žáci ve věku 6 – 11 let mohou utkat se svými vrstevníky v těchto matematických soutěžích: Matematický klokan, Malynár, Mamut, Maks, Matematická olympiáda, Pikomat a Riesky.

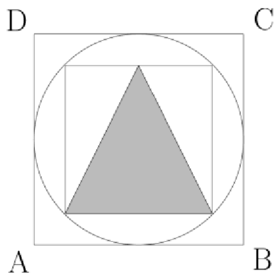
2.5.1. Malynár

Korespondenční matematický seminář Malynár je soutěž pro žáky 4. – 6. třídy ZŠ. Každý ročník se skládá z letního a zimního semestru, které jsou zakončeny matematickým soustředěním pro nejlepší řešitele. Jeden semestr se skládá ze dvou sérií, z nichž každá obsahuje 6 úloh seřazených zpravidla od nejlehčí po nejtěžší.

Žák se musí registrovat do semestru na internetových stránkách soutěže. Úkoly řeší žák samostatně, za opisování se strhávají body. Řešení musí obsahovat podrobný myšlenkový postup. Za úlohu může žák získat maximálně 9 bodů. (Malynár, 2021)

2.5.1.1. 28. ročník (2018/2019), zimní semestr, 1. série, úloha 6

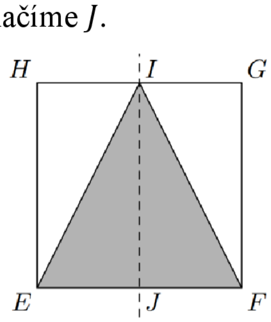
Střecha má tvar čtverce $ABCD$. Heliport je ve tvaru šedého trojúhelníku. Jakou část plochy střechy tvoří heliport? Úlohu řešte bez použití rýsovacích pomůcek a měření vzdáleností.



Obrázek č. 22 Výchozí obrázek úlohy

Řešení (autorské):

Vezměme si nejprve menší čtverec, který si označíme jako $EFGH$ a náš heliport označíme EFI. Čtverec rozdělíme na dvě části kolmicí na GH (resp. EF) v bodě I. Průsečík strany EF a kolmice označíme J.

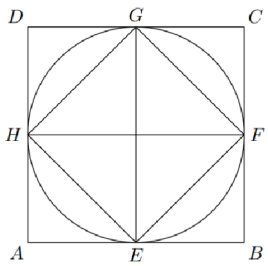


Obrázek č. 23 Označení pomocných bodů

Můžeme vidět, že kolmice rozdělila čtverec na 2 obdélníky, přičemž EI je úhlopříčka obdélníku $EJIH$ a úsečka FI je úhlopříčka obdélníku $JFGI$. Zároveň víme, že úhlopříčka rozdělí obdélník na 2 shodné trojúhelníky se stejným obsahem. Jelikož v obou tabulích je jeden trojúhelník bílý a druhý šedý, znamená to, že heliport (trojúhelník EFI) zabírá $\frac{1}{2}$ čtverce $EFGH$.

Čtverec $ABCD$ má vepsanou kružnici, která je zároveň opsána čtverci $EFGH$. Kružnice opsaná čtverci má střed v průsečíku úhlopříček, které jsou zároveň na sebe kolmé a všechny vrcholy čtverce leží na kružnici. Z toho vyplývá, že úhlopříčka čtverce je zároveň i průměrem kružnice, protože spojuje dva body kružnice a prochází středem.

Víme, že úhlopříčka čtverce $EFGH$ je i průměrem kružnice, můžeme kružnici (i se všemi body v ní) otočit tak, aby se vrcholy čtverce $EFGH$ nacházely ve středech stran čtverce $ABCD$ (tedy tam, kde se naše kružnice protíná se stranami čtverce $ABCD$). Úsečky EG a FH rozdělili čtverec $ABCD$ na 4 stejné čtverce, protože EG a FH spojují středy stran čtverce $ABCD$.



Obrázek č. 24 Znázornění řešení úlohy

Zároveň můžeme vidět, že strany čtverce $EFGH$ tvoří úhlopříčky menších čtverců vzniklých v čtverci $ABCD$. Každá úhlopříčka nám rozdělila čtverec na 2 stejné trojúhelníky se stejným obsahem a my už víme, že všechny 4 čtverce mají stejný obsah (jelikož jsou shodné – délka jejich stran je $\frac{1}{2}$ strany čtverce $ACBD$). To znamená, že i všechny trojúhelníky mají stejný obsah. Ve čtverci $EFGH$ se nacházejí 4 takové trojúhelníky a v čtverci $ABCD$ je jich 8 – čtverec $EFGH$ je $\frac{1}{2}$ čtverce $ABCD$.

Víme tedy, že heliport zabírá $\frac{1}{2}$ ze čtverce $EFGH$ a ten zabírá $\frac{1}{2}$ ze čtverce $ABCD$. To znamená, že heliport zabírá $\frac{1}{4}$ ze čtverce $ABCD$.

Poznámka: Žák při řešení úlohy využívá základní poznatky z geometrie (pojmy trojúhelník, čtverec, obdélník, bod, strana, kolmice, úhlopříčka, průsečík, obsah čtverce, průměr kružnice, střed kružnice, kružnice vepsaná a opsaná).

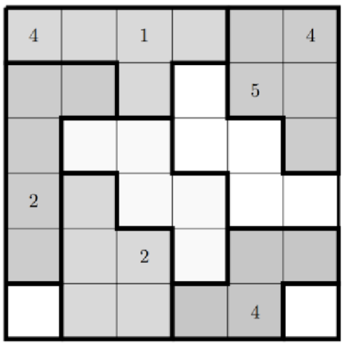
2.5.2. Mamut

Soutěž Mamut je pro žáky 4. – 6. třídy základních škol, kteří soutěží v pětičlenných týmech. Trvání soutěže je 120 minut. Úkoly jsou rozděleny podle obtížnosti na 1–bodové (lehké), 3–bodové (střední) a 5–bodové (těžké).

Na začátku soutěže získají družstva mladších žáků body navíc, aby byly vyrovnány věkové rozdíly mezi soutěžícími. Během soutěže mohou žáci absolvovat 3 sportovní úkoly, za jejichž splnění mohou získat 1 příklad navíc podle zvolené obtížnosti. (Mamut, 2021)

2.5.2.1. Rok 2017, úloha 9 (těžká)

Mřížka se skládá z ohraničených oblastí složených z 1 až 5 políček. Vaším úkolem je vyplnit tyto políčka čísly tak, aby v každé oblasti byla čísla od 1 po počet políček v ní (tj. pokud má oblast např. 3 políčka, jsou v ní čísla 1, 2 a 3). Jakékoliv dvě sousední políčka mřížky (i po diagonále) nemohou obsahovat stejné číslo.

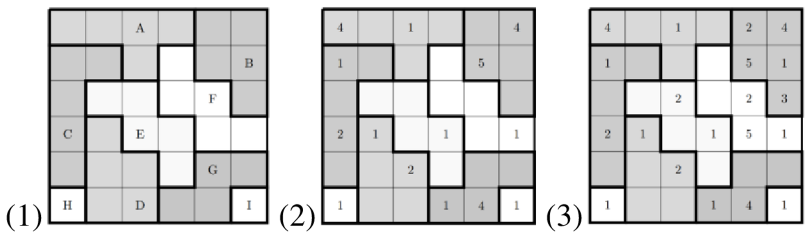


Obrázek č. 25 Výchozí obrázek úlohy

Řešení (autorské):

(1) Jednotlivé oblasti si označíme písmeny (*A – I*).

(2) Nejprve vyplníme oblasti *H* a *I*, kde doplníme číslo 1. V oblasti *G* může být číslo 1 jen na jediném místě – na tom, které nesousedí s oblastí *I*. V oblasti *D* máme také jen jednu možnost umístění čísla 1 – ve vrchním čtverečku (na zbývajících dvou by číslo 1 sousedilo s již umístěnými jedničkami v oblastech *G* a *H*). Stejným způsobem doplníme číslo 1 v oblastech *C*, *E* a *F* (vždy jen jedno vyhovující místo).



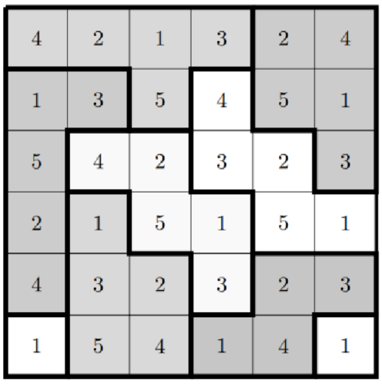
Obrázek č. 26 Postup řešení úlohy

(3) Při doplňování čísla 2 v oblasti *E* máme jedinou možnost, protože umístění dvojek v oblastech *C* a *D* ho jednoznačně určují. Dále lze doplnit v oblasti *F* číslo 5, protože zbývá poslední neobsazené políčko, které nesousedí s pětkou v oblasti *B*. Číslo 2 v oblasti *E* dále omezuje umístění dvojky v oblasti *F* pouze na jediné nevyplněno políčko – to, které s ní nesousedí.

Na nejníže položené políčko v oblasti *B* nemůžeme umístit čísla 1 a 2 (jsou již umístěna v sousedních políčkách v oblasti *F*), proto musíme doplnit číslo 3. V oblasti *B* doplníme zbývající čísla (1 a 2).

Nyní je možné doplnit celou oblast *A*. Umístíme nejprve číslo 3 na políčko, které je nejvíce vpravo – čísla 2 ani 5 tam být nemohou. Doplníme čísla 2 a 5 do zbývajících políček.

Následně dokončíme oblast *F* a po ní oblast *E*, z nich už jasně plyne i obsazení políček v oblastech *C*, *G* a *D*.



Obrázek č. 27 Řešení úlohy

Poznámka: Žák musí strategicky umisťovat čísla do políček.

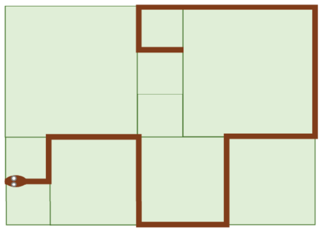
2.5.3. Maks

Soutěž Maks je rozdělena na pět kategorií pro žáky 5. – 9. třídy ZŠ. Žáci soutěží jako jednotlivci nebo ve dvojici, která je tvořena žáky ze stejného ročníku. Startovné je 10 €.

Soutěž má během školního roku osm kol. V každém kole má žák více než tři týdny na vyřešení čtyř úkolů, které si vybírá z pěti nabízených. Za správně vyřešenou úlohu dostane žák 6, 9 nebo 12 bodů (počet bodů závisí na tom, jak náročný úkol si vybral). Za částečně správnou odpověď dostává třetinu nebo dvě třetiny bodové hodnoty úlohy, za nesprávnou nebo žádnou odpověď dostává nula bodů. (Maks, 2021)

2.5.3.1. *Rok 2021, 1. kolo, úloha 4 (Had)*

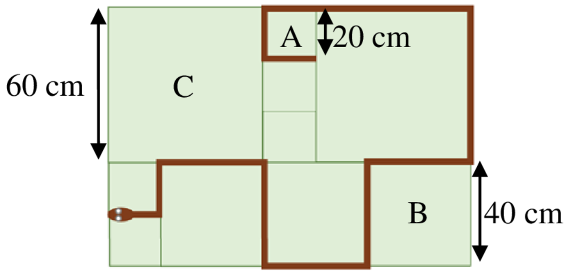
Rodinu Potrových čekalo po příchodu na zahradu nepříjemné překvapení. Na verandě, která je vydlážděná čtvercovými dlaždicemi třech různých velikostí, ležel obrovský had (viz obrázek č. 28). Každá z nejmenších dlaždic má obvod 80 cm. Jak dlouhý byl had?



Obrázek č. 28 Výchozí obrázek úlohy

Řešení:

Označíme délky stran dlaždic A, B, C. Vypočítáme, kolik cm měří všechny velikosti.



Obrázek č. 29 Vyznačení délek dlaždic

Víme, že A je $80 : 4 = 20$ cm, B je $2 \cdot 20 = 40$ cm a C je $3 \cdot 20 = 60$ cm.

Sečteme, kolik stran dlaždic had zabíral:

$$5 \cdot 20 + 5 \cdot 40 + 2 \cdot 60 = 100 + 200 + 120 = 420 \text{ cm}.$$

Had měřil 420 cm.

Poznámka: Při řešení si musíme uvědomit vztahy mezi délkami jednotlivých dlaždic. Úloha byla použita v pracovním listě pro 5. třídu.

2.5.4. Pikomat

Pikomat je určen žákům 5. – 9. třídy ZŠ. Zimní a letní část (pololetí) jsou vyhodnocovány odděleně a každá se skládá ze tří sérií úloh. Úlohy nesou označení, pro které kategorie jsou určeny: řešitelé kategorií 5 a 6 mají v každé sérii 4 úlohy, řešitelé kategorií 7 – 9 mají 5 úloh. Do soutěže jsou započítány pouze úlohy určené pro žákovu kategorii. Ke každé úloze má žák psát svůj postup s odůvodněním jednotlivých kroků. Za každou úlohu může získat maximálně 5 bodů. (Pikomat, 2021)

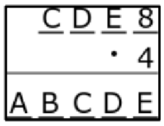
Poznámka: Zadání úloh je propojeno zajímavým příběhem. Česká verze, které jsem se účastnila, je až od 6. třídy.

2.5.4.1. *37. ročník (2019/2020), zimní část, 1. série, úloha 1 (Kapky)*

Kapky v potoce přemýšlely, kolik kapek se včera přidalo k potoku. Počet kapek, které se včera přidaly, byl pětimístné číslo se zajímavou vlastností: Pokud škrtneme první dvě číslice tohoto pěticiferného čísla a za takto získané trojmístné číslo připíšeme číslici 8, dostaneme čtyřmístné číslo. Toto čtyřmístné číslo bude čtyřikrát menší než původní pětimístné číslo. Urči, kolik kapek se včera přidalo k potoku, tedy najdi všechna pětimístná čísla s touto vlastností.

Řešení (autorské):

Počet kapek, které se přidaly k potoku, je pětimístné číslo, které můžeme zapsat ve tvaru $ABCDE$, kde každé písmeno představuje jednu cifru. Pokud vyškrtneme první dvě číslice, A a B, a na konec připíšeme 8, dostaneme čtyřmístné číslo $CDE8$. Víme, že číslo $CDE8$ je čtyřikrát menší než číslo $ABCDE$. Zapíšeme jako násobení pod sebe:



Obrázek č. 30 Písemné násobení

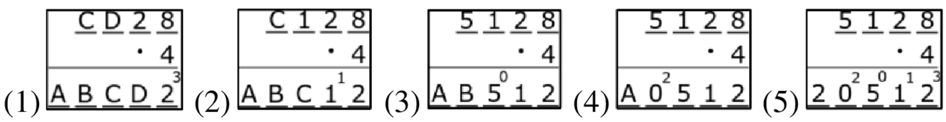
$4 \cdot 8 = 32$ (1) 2 napíšeme a 3 nám zůstala. Zjistili jsme, že písmeno E představuje číslici 2. Tím se nám podařilo odkrýt další cifru v horním čísle.

$4 \cdot 2 = 8$, $8 + 3 = 11$ (2) Nemůžeme zapomenout připočítat přechod přes desítku z minulého kroku. 1 napíšeme a 1 nám zůstala. Písmeno D přepíšeme na číslici 1.

$4 \cdot 1 = 4$, $4 + 1 = 5$ (3) Z minulého kroku nám zůstala jednotka. 5 napíšeme a nezůstalo nám nic. Písmeno C představuje číslici 5. Podařilo se nám odkrýt všechny cifry horního čísla, chybí už jen A a B ve spodním.

$4 \cdot 5 = 20$ (4) Z minulého kroku nám nezůstalo nic. Nulu napíšeme a 2 nám zůstala. Písmeno B představuje číslici 0.

(5) V horním čísle jsme neodkryli žádné nové písmeno, není tak dál co násobit. Číslici 2, která nám zůstala, napíšeme místo písmene A. Tím jsme odkryli celé spodní číslo.



Obrázek č. 31 Postup písemného násobení

K potoku se přidalo 20512 kapek.

Poznámka: Úlohu je možné využít při vysvětlování písemného násobení.

2.5.5. Riešky

Soutěž je určena pro 5. – 9. třídu ZŠ. Skládá se ze 2 nezávislých sérii – zimní a letní, které probíhají během jednotlivých pololetí. Každá série se skládá ze 3 kol a každé kolo z 10 úloh a prémie. Prémie je speciální úloha, ve které je cílem nalézt co nejlepší řešení. Úlohy jsou bodované na stupnici 0 až 10 bodů. Za prémii lze získat 0 až 8 bodů. Je dovoleno řešit i úlohy vyšších kategorii a úlohu číslo 10.

Úlohy řeší žák samostatně. Ke každé úloze píše postup s řádným zdůvodněním jeho správnosti. Za opisování a skupinové řešení se body dělí počtem opisujících. Řešení je nutné poslat do termínu kola, který je uveden na webové stránce soutěže. Po každé sérii se koná týdenní soustředění pro nejúspěšnější řešitele. (Riešky, 2021)

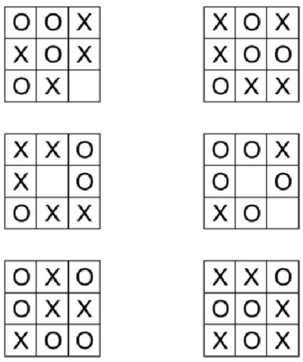
Poznámka: Zadání úloh je propojeno zajímavým příběhem.

2.5.5.1. 21. ročník (2018/2019), letní série, 3. kolo, prémiová úloha

Pavlík hraje s kamarádkou piškvorky 3 × 3 × 3. Cílem těchto piškvorek je zaplnit nějaký řádek, sloupec, úhlopříčku či tělesovou úhlopříčku svým znakem (křížek nebo kolečko). Když se to někomu podaří, hra končí a daný hráč je vítěz. Kolik nejvíce tahů mohou Pavlík a jeho kamarádka hrát, dokud se někdo nestane vítězem? Jak bude vypadat plánek před posledním (vítězným tahem)?

Řešení (autorské):

Zde vidíme dva způsoby, jak dosáhnout maximálního počtu tahů před koncem hry (jsou zobrazeny po vrstvách):



Obrázek č. 32 Nejlepší řešení úlohy

Poznámka (autorská): Nejlepší řešení, které řešitel našel, mělo až 25 tahů. Většina řešitelů dosáhla maximálního možného počtu tahů. Téměř všichni dosáhli alespoň o jedno méně, tedy 24. Občas řešitelé zapomněli, že Pavlík a jeho kamarádka se musí při hře střídat (počty křížků a koleček musí být stejné nebo rozdílné jen o 1) nebo přehlédli trojici.

2.6. Polsko

V Polsku mají žáci ve věku 6 – 11 let možnost soutěžit v těchto matematických soutěžích: Matematický Alfík, Matematický klokan, Pangea, Matematický maraton a Matematická soutěž KOMA.

2.6.1. Matematický Alfík

Matematický Alfík je celostátní matematická soutěž pro žáky základních (1. – 8. třída) a středních škol s možností výběru z více odpovědí. Soutěžní test má v 1. třídě 24 otázek, ostatní kategorie mají 30 otázek. Časový limit je 75 min. Organizátorem soutěže je vzdělávací společnost Talent hunters – JERSZ. Soutěžní úkoly nevyžadují mnoho školních znalostí, ale spíše chytrost, fantazii a logické myšlení. Na stránkách soutěže jsou zdarma k dispozici pracovní listy z minulých ročníků, které jsou nápomocny při realizaci zájmových kroužků během školního roku. (Alfik Matematiczny, 2021)

2.6.1.1. Rok 2021, 1. třída, úloha 5

Úloha za 3 body: Joasia byla v úterý v kině a o tři dny později šla do divadla. Jaký den v týdnu byla v divadle?

(A) ve středu (B) ve čtvrtek (C) v pátek (D) v sobotu (E) v neděli

Řešení:

Pro přehlednost a lepší pochopení příkladu vytvoříme tabulku s přehledem dnů v týdnu. Označíme jejich pořadí:

	Pondělí	Úterý	Středa	Čtvrtek	Pátek	Sobota	Neděle
Pořadí	1	2	3	4	5	6	7

Tabulka č. 4 Pořadí dnů v týdnu

Z tabulky víme, že úterý je 2. den v týdnu. Přičteme 3:

$$2 + 3 = 5$$

Z tabulky zjistíme, který den v týdnu je 5. (pátek).

Správné řešení je (C).

Poznámka: Při řešení úlohy potřebuje žák znalost sledu dnů v týdnu. Zároveň musí umět počítat alespoň do 10.

2.6.1.2. Rok 2019, 2. třída, úloha 9

Úloha za 3 body: Před dvěma lety bylo Jackovi 8 let. Kolik let mu bude příští rok?

(A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12 (E) 13

Řešení:

Uvědomíme si, že Jackovi je nyní

$$8 + 2 = 10 \text{ let.}$$

O rok později mu bude

$$10 + 1 = 11 \text{ let.}$$

Správné řešení je (C).

Poznámka: Žák musí být schopen si správně uvědomit časový sled událostí (před dvěma lety, příští rok). Úloha byla použita v pracovním listě pro 2. třídu.

2.6.1.3. Rok 2017, 3. třída, úloha 17

Úloha za 4 body: V restauraci je 5 stolů pro 4 osoby a 2 stoly pro 6 osob. Kolik lidí může sedět u těchto stolů, když třem z nich chybí jedna židle?

(A) 26 (B) 28 (C) 29 (D) 30 (E) 32

Řešení:

Kdyby žádné židle nechyběly, měli bychom celkem

$$5 \cdot 4 + 2 \cdot 6 = 20 + 12 = 32 \text{ židlí.}$$

Protože chybí 3 židle, může u stolů sedět

$$32 - 3 = 29 \text{ lidí.}$$

Správné řešení je (C).

Poznámka: Žák musí správně sečíst a odečíst židle. Úloha byla použita v pracovním listě pro 3. třídu.

2.6.1.4. Rok 2011, 4. třída, úloha 19

Úloha za 4 body: Místo každé hvězdičky při násobení: $* \cdot * = 2 \cdot *$ chceme zadat stejné číslo tak, abychom dostali pravdivou rovnost. O jaké číslo se jedná?

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 6 (E) jiné číslo

Řešení:

Úlohu lze řešit metodou pokus–omyl, protože známe možná čísla:

Číslo	Rovnice násobení		Poznámka
2	$2 \cdot 2 = 2 \cdot 2$	$4 = 4$	lze
3	$3 \cdot 3 = 2 \cdot 3$	$9 \neq 6$	nelze
4	$4 \cdot 4 = 2 \cdot 4$	$16 \neq 8$	nelze
6	$6 \cdot 6 = 2 \cdot 6$	$36 \neq 12$	nelze

Tabulka č. 5 Metoda pokus–omyl

Zjistili jsme, že úloha má řešení, když místo hvězdičky dosadíme číslo 2.

Úloha má řešení i při dosazení 0 ($0 \cdot 0 = 2 \cdot 0$).

Správné řešení je (A) i (E).

Poznámka: Úlohu lze použít při vysvětlování zmiňované metody.

2.6.1.5. Rok 2009, 5. třída, úloha 23

Úloha za 5 bodů: Jestliže pětičlenná rodina sní 5 kg rýže za 5 týdnů, kolik rýže sní desetičlenná rodina za 10 týdnů?

(A) 10 kg (B) 5 kg (C) 20 kg (D) 40 kg (E) 25 kg

Řešení:

Ze zadání víme, že pětičlenná rodina sní 5 kg rýže za 5 týdnů. Jeden člen sní za 5 týdnů

$$5 : 5 = 1 \text{ kg rýže.}$$

Za 10 týdnů (neboli dvakrát tolik týdnů) sní jeden člen rodiny

$$1 \cdot 2 = 2 \text{ kg rýže.}$$

Celá desetičlenná rodina tak sní

$$10 \cdot 2 = 20 \text{ kg rýže.}$$

Správné řešení je (C).

Poznámka: Při výpočtu využíváme znalostí malé násobilky. Žák si může špatně přečíst zadání myslet si, že se ptáme na pětičlennou rodinu: $5 \cdot 2 = 10$ kg. Úloha byla použita v pracovním listě pro 5. třídu.

2.6.2. Matematický maraton

Matematický maraton je soutěž nejen pro žáky základních (4. – 8. třída) a středních škol. V maratonu startují závodníci individuálně v pěti kategoriích:

- Mládež (4. – 6. třída ZŠ)
- Junioři (7. a 8. třída ZŠ + 3. ročník nižšího gymnázia)
- Vyšší sekundární školy
- Studenti a učitelé matematiky nebo informatiky
- Dospělí amatéři (lidé s jiným vzděláním než je matematika a informatika)

Soutěžící nejprve během 45 minut vyplní přihlášku a rozřazovací test, který obsahuje 15 úloh (6 s výběrem odpovědí a 7 otevřených). Ve finálovém kole má každý soutěžící jiný test. Soutěž končí, když je ve hře v dané kategorii pouze jeden hráč. (Fundacja Matematyków Wrocławskich, 2021)

2.6.2.1. Rok 2016, kategorie Mládež (4. – 6. třída), úloha 6

V muzikálu „Rent“ je píseň, která začíná slovy „pět set dvacet pět tisíc šest set minut“. Které období je této době nejblíže?

(A) týden (B) měsíc (C) rok (D) dekáda (E) století

Řešení:

Zjistíme, kolik hodin je 525 600 min:

$$525\,600 : 60 = 8\,760 \text{ h.}$$

Jeden týden má 168 h. Zjistíme, kolik týdnů je 8 760 h.

$$8\,760 : 168 \doteq 52{,}14 \text{ týdnů.}$$

Jeden kalendářní rok má 52 až 53 týdnů. Zadané době je proto nejblíže rok.

Správné řešení je (C).

Poznámka: V uvedené úloze využíváme znalostí převodu jednotek.

2.6.3. Matematická soutěž KOMA

Soutěž má neobvyklou formu a je určena žákům základních (4. – 8. třída) a středních škol. Má 3 kategorie: Mladí (4. – 6. třída), Junioři (7. a 8. třída) a Senioři (střední škola). Soutěž nevyužívá předchozích znalostí, díky čemuž je adresována nejen těm nejlepším matematikům, ale i všem studentům s vysokým intelektuálním potenciálem. V obou kolech soutěže si soutěžící poslechnou hodinovou přednášku z matematiky a poté 60 minut řeší úlohy na stejné téma. Při řešení úloh mohou soutěžící využít poznámky pořízené během přednášky. (Fundacja Matematyków Wrocławskich, 2021)

2.6.3.1. Rok 2015, kategorie Mladí (4. – 6. třída), přednáška (Logika)

Obsahem přednášky na téma logika bylo 5 bodů s příklady + ukázkové úlohy:

(1) *Čím se zabývá logika?* Logika jako věda se vyvinula ve starověkém Řecku. Vycházela z Aristotela. Slovo logos znamenalo řeč (proto logoped) a logika byla věda o jasném, přesném a správném vyvozování. Logie dnes znamená to, co věda (biologie, psychologie), tedy je synonymem přesnosti. (Jízdenky je možné zakoupit u řidiče o sobotách, nedělích a svátcích po 18:00. – Jízdenky lze zakoupit u řidiče po 18. hodině v sobotu, neděli a ve státních svátcích.)

(2) *George Boole* (1815 – 1864), tvůrce dvouhodnotové logiky, zavedl koncept logické věty a dvou logických hodnot pravda a lež. Na větách byly provedeny operace konjunkce, disjunkce a negace definovaných aritmeticky. Booleovská logika se 70 let po Booleově smrti stala základem fungování počítačů.

(3) *Logická věta* je věta, které lze jednoznačně přiřadit hodnotu pravdy nebo nepravdy. Ne každá věta je logická (Kolik je hodin?). Z jednoduchých vět se skládají souvětí pomocí logických spojek „a“ (konjunkce), „nebo“ (disjunkce) a „ne“ (negace). Je možné definovat další spojky: „buď ..., nebo ...“ (exkluzivní disjunkce), „Jestliže ..., potom ...“ (implikace), „Právě tehdy, když...“ (ekvivalence – v přednášce není uvedena). (Na stole je křída a tužka. Na stole je křída nebo tužka. Na stole není křída. Na stole je buď křída, nebo tužka. Jestliže je na stole křída, potom tam je i tužka. Právě tehdy, když je na stole křída, je na stole i tužka.)

(4) Definice *logických spojek*:

A	B	$A \wedge B$ (konjunkce)	$A \vee B$ (disjunkce)	$\neg A$ (negace)	$A \oplus B$ (exkluzivní disjunkce)	$A \Rightarrow B$ (implikace)	$A \Leftrightarrow B$ (ekvivalence)
1	1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	1	1	1	1	0
0	0	0	0	1	0	1	1

Tabulka č. 6 Přehled logických spojek (standardní zápis – včetně ekvivalence)

Poznámka: Logické spojky jsou v přednášce uvedeny nestandardním způsobem. Znaky v tabulkách představují „výsledek složeného výroku“:

A a B (konjunkce)

$A \setminus B$	P	N
P	P	N
N	N	N

*	1	0
1	1	0
0	0	0

A nebo B (disjunkce)

$A \setminus B$	P	N
P	P	P
N	P	N

max	1	0
1	1	1
0	1	0

Tabulka č. 7 Ukázka zápisu logických spojek z přednášky (nestandardní zápis)

(5) Příklad zápisu – popírání konjunkce: Ania (A) a Bartek (B) jsou šťastní (S).

	A a B jsou S	A a B nejsou S	A není S nebo B není S	jiné
$A = P, B = P$	P	N	N	
$A = P, B = N$	N	N	P	
$A = N, B = P$	N	N	P	
$A = N, B = N$	N	P	P	

Tabulka č. 8 Příklad zápisu konjunkce: Ne (A a B) = Ne A a B.

Poznámka: V přednášce je uvedena pravda jako P a nepravda jako F (faleš).

(6) *Ukázkové úlohy* ukazují techniku dosažení řešení (způsobu tvorby poznámek).

Pátrání po lhářích: Inspektor Smart ze Scotland Yardu prozkoumal zprávy z výslechu tří lupičů. Bylo zjištěno, že jeden z nich ukradl roli toaletního papíru, a že přesně jeden z podezřelých mluví pravdu. Zde jsou výpovědi podezřelých:

- Albert: Jsem nevinný.
- Bill: Charles ukradl noviny.
- Charles: Jsem nevinný.

Kdo ukradl toaletní papír?

	A je vinen	B je vinen	C je vinen
A	*N*	*P*	*P*
B	*N*	*N*	*P*
C	*P*	*P*	*N*

Tabulka č. 9 Zápis řešení úlohy

2.6.3.2. Rok 2015, kategorie Mladí (4. – 6. třída), úloha 6

Označ věty, které znamenají totéž jako věta: Pokud prší, nejdu do parku.

a) Když jdu do parku, znamená to, že neprší.

b) Když prší, jdu do parku.

c) Pokud není pravda, že nejdu do parku, znamená to, že neprší.

d) Pokud neprší, jdu do parku.

Řešení:

Zanalyzujeme výroky:

a) Jedná se o negaci původního výroku (jsou totožné).

b) Druhá část je negací původního výroku.

c) Výrok lze přepsat jako: „Když jdu do parku, neprší.“ Jedná se o negaci původního výroku (jsou totožné).

d) Jedná se o negaci původního výroku (jsou totožné).

Označíme věty a), b) a c).

Poznámka: Úloha je na výrokovou logiku.

2.7. USA

V USA existují pro žáky ve věku 6 – 11 let například tyto matematické soutěže: Matematický klokan, Národní soutěž Beestar, Mathematica, Matematická olympiáda a Math League.

2.7.1. Národní soutěž Beestar

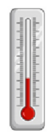
Národní soutěž Beestar je určena všem žákům 1. – 12. ročníku (6 – 18 let). Registrační poplatek je přibližně 8 $. Soutěž se pořádá na úrovni ročníků dvakrát do roka. Soutěž je online a má dvě kola (Dash Round a Spark Round), každé z nich s maximálním počtem 80 bodů. Kolo se skládá ze 4 sad úloh, každá je za 20 bodů.

V každém kole mohou žáci kdykoli během 2denního okna pracovat na sadách úloh. Organizátoři soutěže doporučují žákům vyhradit si na řešení sad přibližně 60 minut. Každá sada trvá v průměru méně než 15 minut. (Beestar, 2021)

2.7.1.1. 1. třída, ukázkový test, 1. sada, úloha 4

Jaký nástroj byste použili k měření hmotnosti hromady knih?

Obrázek č. 33 Výchozí obrázek úlohy

(A)  (B)  (C)  (D) 

Řešení:

Řešení otázky vychází z praktického života.

(A) Váhu používáme při měření hmotnosti pevných (kniha, dřevo) či kapalných látek (voda v kádince).

(B) Krejčovský (svinovací) metr používáme při měření obvodu těla (pas, boky) či délky oděvu (rukávy).

(C) Odměrný válec používáme nejčastěji při měření objemu kapalné látky (vody).

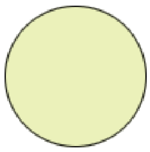
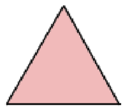
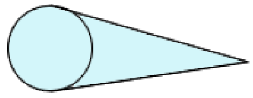
(D) Teploměr používáme při měření teploty plynu (vzduchu).

Správné řešení je (A).

Poznámka: Žák si uvědomí, že pro měření hmotnosti pevných látek používáme váhu. Žák při řešení úlohy využívá logické myšlení, které dále uplatňuje při rozvíjení matematických schopností.

2.7.1.2. 2. třída, ukázkový test, 1. sada, úloha 7

Rovnoběžky se nikdy neprotnou a vždy zůstanou ve stejné vzdálenosti od sebe. Který tvar obsahuje rovnoběžky?

(A)  (B)  (C)  (D) 

Řešení:

Podle definice v zadání si uvědomíme vlastnosti rovnoběžek a určíme hledaný tvar:

(A) Kruh neobsahuje žádné úsečky, proto zde nemůžeme hledat rovnoběžky.

(B) Obdélník se skládá ze čtyř stran (úseček). Vždy dvě protější strany (úsečky) jsou rovnoběžné. Tento útvar (obdélník) obsahuje rovnoběžky.

(C) Trojúhelník se skládá ze tří stran (úseček), ale žádné dvě strany (úsečky) nejsou rovnoběžné. Tento útvar (trojúhelník) neobsahuje rovnoběžky.

(D) Útvar složený z kruhu a jeho dvou tečen obsahuje dvě úsečky, které nejsou rovnoběžné. Tento útvar neobsahuje rovnoběžky.

Správné řešení je (B).

Poznámka: Žák zjistí, že jediný útvar, který odpovídá zadání je obdélník. Úloha byla použita v pracovním listě pro 2. třídu.

2.7.1.3. 3. třída, ukázkový test, 1. sada, úloha 4

Na začátku týdne měl Ryan 2 plné sklenice želé. Každý den vzal hrst želé z každého z nich. Na obrázku je zobrazeno, kolik želé bylo na konci týdne ve sklenicích A a B. Jaký je nejlepší odhad počtu ks želé ve sklenici B?

Sklenice A: 44 ks želé

Sklenice B: ? ks želé

Obrázek č. 34 Výchozí obrázek úlohy

(A) 35 (B) 50 (C) 60 (D) 90

Řešení:

Z výchozího obrázku usoudíme, že ve sklenici B je dvakrát více želé než ve sklenici A. Vynásobíme proto počet želé ve sklenici A číslem 2:

$$44 \cdot 2 = 88 \text{ ks želé.}$$

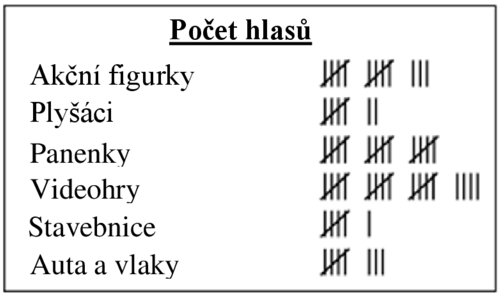
Víme, že počet želé ve sklenici B je asi 88 ks. Vybereme nejbližší počet, tj. 90.

Správné řešení je (D).

Poznámka: Úlohu uvádím, protože s podobnou úlohou, kde má žák odhadovat, jsem se zatím v matematických soutěžích nesetkala.

2.7.1.4. 4. třída, ukázkový test, 2. sada, úloha 10

Gabrielle pracuje v prodejně Toys 'R' Us. Poprosila děti, které obchod navštívily, aby vyplnily dotazník o jejich oblíbené hračce. Výsledky průzkumu využije k tomu, aby zajistila, že tyto hračky budou na skladě. Který výrok přímo vyplývá z průzkumu?



Obrázek č. 35 Výchozí obrázek úlohy

(A) Plyšáci a akční figurky dostaly nejméně hlasů.

(B) Panenky a akční figurky dostaly nejvíce hlasů.

(C) Většina dětí volila panenky a stavebnice jako jejich oblíbenou hračku.

(D) Polovina hlasů byla pro videohry a panenky.

Řešení:

Ze zadání víme, že 13 dětí zaškrtlo akční figurky, 7 plyšáky, 15 panenky, 19 videohry, 6 stavebnice a 8 auta a vlaky. Výroky vyšetříme:

(A) Nejméně hlasů dostali plyšáci a stavebnice, proto není výrok pravdivý.

(B) Nejvíce hlasů dostaly videohry a panenky, proto není výrok pravdivý.

(C) Nejvíce hlasů dostaly videohry a panenky, proto není výrok pravdivý.

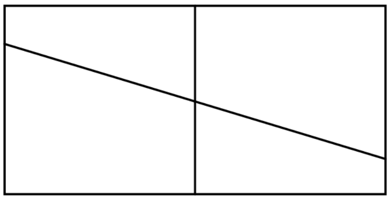
(D) Většinu hlasů dostaly videohry a panenky. Výrok je pravdivý.

Správné řešení je (D).

Poznámka: Úloha je na výrokovou logiku.

2.7.1.5. *5. třída, ukázkový test, 2. sada, úloha 9*

Dillonovi spadlo zrcadlo na zem a rozlomilo se (viz obrázek). Kolik je na obrázku čtyřúhelníků?

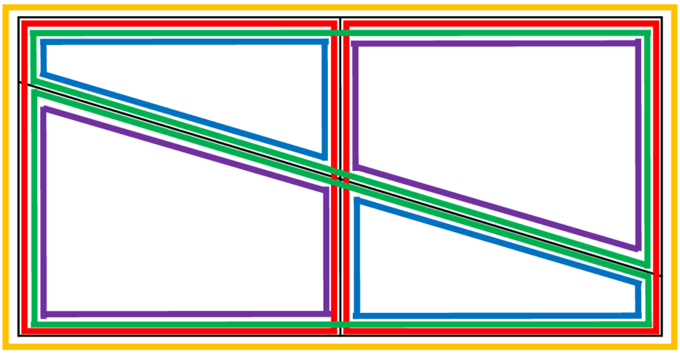


Obrázek č. 36 Výchozí obrázek úlohy

(A) 9 (B) 8 (C) 7 (D) 6

Řešení:

Na obrázku jsou dva čtverce, které dohromady dávají obdélník. Tyto dva čtverce se vždy dále dělí na dva lichoběžníky. Obdélník je úsečkou dělen na dva stejné lichoběžníky.



Obrázek č. 37 Řešení úlohy

Zvýraznili jsme 1 žlutý obdélník, 2 červené čtverce, 2 zelené lichoběžníky, 2 modré lichoběžníky a 2 fialové lichoběžníky, tj.

$$1 + 2 + 2 + 2 + 2 = 9 \text{ čtyřúhelníků.}$$

Správné řešení je (A).

Poznámka: Úlohu lze použít při vysvětlování shodnosti útvarů, otočení a posunutí. Úloha byla použita v pracovním listě pro 5. třídu.

2.7.2. Mathematica

Centrum pro matematickou soutěž připravuje některé z nejlepších matematických soutěží v Severní Americe. Škola své žáky může přihlásit do sedmi různých kategorií, které jsou učeny žákům a studentům 3. – 9. třídy. Soutěž se skládá z 50 otázek, na které mají žáci 75 minut. Za každou otázkou následuje 5 možných odpovědí. (Mathematica, 2021)

2.7.2.1. Rok 2020, kategorie Thales (3. třída), úloha 3

Šesté písmeno za desátým písmenem abecedy je písmeno

(A) m (B) n (C) o (D) p (E) q

Řešení (autorské):

Mezinárodní (anglická) abeceda má 26 znaků. Šesté písmeno za desátým písmenem abecedy je písmeno $6 + 10 = 16$.

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

Tabulka č. 10 Mezinárodní (anglická) abeceda

Šestnácté písmeno v abecedě je písmeno p.

Správné řešení je (D).

Poznámka: Žák musí správně určit hledaného člena posloupnosti (abecedy).

2.7.2.2. Rok 2017, kategorie Byron–Germain (4. třída), úloha 10

Který výraz dává sudý součet?

A) $31 + 18 + 20$ B) $22 + 24 + 36 + 19$ C) $12 + 14 + 17$

D) $12 + 14 + 55 + 33$ E) $10 + 20 + 57$

Řešení:

Žák si musí uvědomit, že součet dvou sudých čísel je sudý, součet dvou lichých čísel je sudý a součet lichého a sudého čísla je lichý. Proto není potřeba výrazy počítat.

A) $31 + 18 + 20 =$ liché + sudé + sudé = liché

B) $22 + 24 + 36 + 19 =$ sudé + sudé + sudé + liché = liché

C) $12 + 14 + 17 =$ sudé + sudé + liché = liché

D) $12 + 14 + 55 + 33 =$ sudé + sudé + liché + liché = sudé

E) $10 + 20 + 57 =$sudé + sudé + liché = liché

Správné řešení je (D).

Poznámka: Pojmy lichý a sudý se vyučují ve 2. třídě. Z tohoto důvodu jsem úlohu použila v pracovním listě pro 3. třídu.

2.7.2.3. Rok 2012, kategorie Fibonacci (5. třída), úloha 18

Kolik lichých čísel je mezi 80 a 180?

(A) 49 (B) 51 (C) 50 (D) 52 (E) 100

Řešení (autorské):

Namísto pokusu odpovědět na tuto otázku hned, pojďme nejprve analyzovat jednodušší formu stejného problému.

- Kolik lichých čísel je mezi 2 a 4? Evidentně existuje pouze jedno, a to číslo 3.
- Kolik lichých čísel je mezi 2 a 10? Existují 4 (3, 5, 7, 9).
- Kolik lichých čísel je mezi 8 a 18? Existuje jich 5 (9, 11,13, 15, 17).

Všimněme si, že počet lichých čísel mezi dvěma sudými čísly se vždy rovná polovině rozdílu mezi sudými čísly. Toto pravidlo můžeme použít na původní otázku.

Počet lichých čísel mezi 80 a 180 je

$$(180 - 80) : 2 = 100 : 2 = 50$$

Mnoho velkých vědeckých a matematických objevů bylo provedeno tímto způsobem – transformací původního problému na jednodušší modely. Z nich můžeme snadněji čerpat matematický zákon, který lze použít k řešení všech problémů stejného typu.

Správné řešení je (D).

Poznámka: Úlohu by většina žáků nejspíše vyřešila vypsáním všech čísel v uvedeném intervalu a následně spočítala všechna lichá čísla.

2.7.3. Math League

Matematická liga pořádá matematické soutěže pro žáky 4. – 8. třídy a studenty středních škol (9. – 12. ročník), kterých se každoročně účastní více než milion studentů ze Spojených států a Kanady.

Soutěž se skládá z 30 otázek s možností výběru z více odpovědí, na které je vyhrazen limit 30 minut. V soutěži jsou otázky na 1. stránce jednoduché, na 2. středně těžké a na 3. obtížnější. Každá soutěž obsahuje otázky z různých oblastí matematiky.

Cílem je podpořit zájem studentů a důvěru v matematiku prostřednictvím řešení hodnotných problémů. Mnoho studentů nejprve rozvine zájem o matematiku prostřednictvím činností zaměřených na řešení problémů, jako jsou tyto soutěže.

Školy soutěží v celostátních nebo vícestátních ligových soutěžích. (Math League, 2008)

2.7.3.1. Rok 2013, 4. třída, úloha 29

Ray chodí běhat každý druhý den. Pokud běžel poprvé minulý měsíc v pondělí, pak běžel podesáté minulý měsíc...

(A) v pondělí (B) v úterý (C) v pátek (D) v neděli

Řešení:

Vytvoříme si tabulku a označíme si do ní, kdy běžel Ray minulý měsíc podesáté:

	Pondělí	Úterý	Středa	Čtvrtek	Pátek	Sobota	Neděle
1. týden	(1)		(2)		(3)		(4)
2. týden		(5)		(6)		(7)	
3. týden	(8)		(9)		(10)		

Tabulka č. 11 Řešení úlohy

Podesáté běžel v pátek.

Správné řešení je (C).

Poznámka: Úlohu nejrychleji vyřešíme pomocí tabulky (viz výše). Úloha byla použita v pracovním listě pro 4. třídu.

2.7.3.2. Rok 2019, 5. třída, úloha 20

Elle každý den loupala dvakrát tolik ořechů, než den předtím. Pokud Elle oloupala 360 ořechů za 4 dny, o kolik více ořechů loupala čtvrtý den oproti prvnímu dni?

(A) 90 (B) 168 (C) 192 (D) 270

Řešení:

Celkový počet oloupaných ořechů je 360. Musíme je rozdělit na určitý počet dílů. Každý další den má dvakrát více dílů: první den 1 díl, druhý den 2 díly, třetí den 4 díly a čtvrtý den 8 dílů. Díly sečteme:

$$1 + 2 + 4 + 8 = 15 \text{ dílů.}$$

Celkový počet ořechů vydělíme počtem dílů:

$$360 : 15 = 24.$$

První den Ella oloupala $1 \cdot 24 = 24$ ořechů a čtvrtý den $8 \cdot 24 = 192$ ořechů. Zjistíme, o kolik více ořechů loupala čtvrtý den oproti prvnímu dni:

$$192 - 24 = 168 \text{ ořechů.}$$

Správné řešení je (B).

Poznámka: Žáka může napadnout, že celkový počet ořechů bude postupně dělit dvěma. Tímto postupem se k výsledku nedopracuje, protože na první den by zbylo $\frac{45}{2}$ ořechů.

2.8. Mezinárodní matematické soutěže

2.8.1. Matematický klokan

Dva francouzští učitelé se v roce 1991 inspirovali australskou matematickou soutěží a rozhodli se založit podobnou soutěž ve Francii. Soutěž nazvali „Klokan“, aby vzdali hold svým australským přátelům. Nyní je soutěž známa jako Kangourou sans Frontières (Klokánek bez hranic).

Žáci vyplňují test s 21, 24 či 30 úlohami. Za úlohu v soutěži lze získat 3, 4 nebo 5 bodů. Časový limit je 60 či 75 minut. Žáci vybírají z více možností. (AMC, 2021)

Přehled vybraných zemí, kde se soutěž pořádá ve věkové kategorii 6 – 11 let:

	6 – 7 let (1. třída)	7 – 8 let (2. třída)	8 – 9 let (3. třída)	9 – 10 let (4. třída)	10 – 11 let (5. třída)
Rakousko					
Slovensko					
USA					
Polsko					
Austrálie					
Německo					

Tabulka č. 12 Přehled sledovaných zemí

Rakousko: Soutěž je určena žákům 1. – 12. ročníku. (Känguru der Mathematik, 2021)

Slovensko: Soutěž má 13 samostatných kategorií. Žáci 1. – 4. třídy ZŠ řeší 18 úloh, ostatní žáci mají 24 úloh. Žáci 1. třídy ZŠ řeší pouze 12 úloh. Soutěž organizuje Talentída. Startovné je 4 € na žáka. (Matematický klokan, 2021)

USA: Soutěž je určena žákům 1. – 12. ročníku. Za nesprávnou odpověď nejsou odebrány body. (Math Kangaroo, 2003)

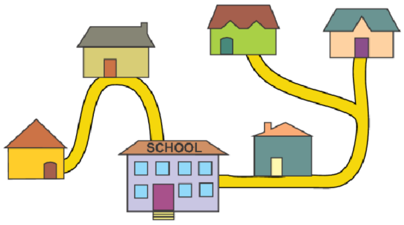
Polsko: Soutěž je jednorázový test, který je pro 2. – 12. ročník. Na začátku soutěže dostávají žáci tolik bodů, kolik mají úloh. (Kangur, 2021)

Austrálie: Soutěž je online a je určena pro 3. – 12. ročník. Do soutěže se mohou přihlásit školy, které soutěží v australské matematické soutěži. (AMC, 2021)

Německo: Individuální soutěž pro 3. – 13. ročník, která se koná v březnu ve všech zúčastněných zemích současně. (Känguru der Mathematik, 2021)

2.8.1.1. USA, rok 2021, úroveň 1 a 2 (1. a 2. třída), úloha 15

Úloha za 4 body: Na obrázku je pět domů pěti kamarádů a jejich škola. Škola je největší budovou na obrázku. Doris a Ali při cestě do školy prochází kolem Leova domu. Eva prochází kolem domu Chole. Který dům je Evy?



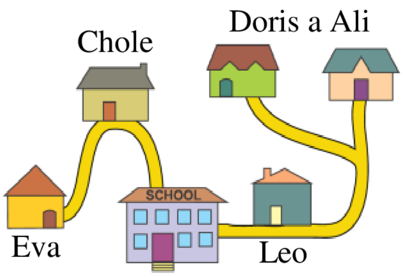
Obrázek č. 38 Výchozí obrázek úlohy

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

Řešení:

Při řešení vycházíme z následujících informací:

- Doris a Ali při cestě do školy prochází kolem Leova domu. – Tito kamarádi bydlí z našeho pohledu vpravo. Leo bydlí nejblíže ke škole.
- Eva prochází kolem domu Chole. – Již víme, že vpravo bydlí Doris, Ali a Leo. Eva a Chole proto bydlí vlevo od školy. Blíže ke škole bydlí Chole. Eva tedy bydlí ve žlutém domě. (viz obrázek)



Obrázek č. 39 Řešení úlohy

Správné řešení je (B).

Poznámka: Žák musí umět pracovat s informacemi (jména kamarádů, přiřazení domečků ke jménům). Úloha byla rovněž uvedena v rakouském zadání. Úloha byla použita v pracovním listě pro 2. třídu.

2.8.1.2. Polsko, rok 2014, kategorie Dítě (3. a 4. třída)

Úloha za 3 body: Když je koala vzhůru, sní každou hodinu 50 gramů eukalyptových listů. Včera v noci spala 13 hodin. Kolik gramů listů snědla den předtím?

A) 550 B) 130 C) 650 D) 50 E) 450

Řešení:

Vypočítáme, kolik hodin byla koala vzhůru. Den má 24 hodin a spala 13 hodin:

$$24 - 13 = 11 \text{ hodin.}$$

Počet hodin, během kterých byla vzhůru, vynásobíme počtem za 1 hodinu snědených eukalyptových listů:

$$11 \cdot 50 = 550 \text{ g.}$$

Správné řešení je (A).

Poznámka: Žák si musí uvědomit kolik hodin má den a správně údaje odečíst.

2.8.1.3. Slovensko, ročník 2009/2010, kategorie Klokánek 4, úloha 7

Úloha za 4 body: Do tanečního kroužku se přihlásilo 31 chlapců a 28 děvčat. Od té doby každý týden do kroužku přistoupili dva chlapci a tři děvčata. Po kolika týdnech bylo v kroužku stejně děvčat jako chlapců?

A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

1. Řešení:

Pro lepší přehlednost zapíšeme do tabulky:

	počet chlapců	počet dívek
původně	31	28
1. týden	$31 + 2 = 33$	$28 + 3 = 31$
2. týden	$33 + 2 = 35$	$31 + 3 = 34$
3. týden	$35 + 2 = 37$	$34 + 3 = 37$

Tabulka č. 13 Řešení úlohy

Po 3 týdnech byl v tanečním kroužku stejný počet chlapců a děvčat.

Správná odpověď je (C).

2. Řešení:

Počet chlapců v týdnu x lze označit $31 + 2x$ a počet dívek $28 + 3x$. Protože se počet chlapců a dívek rovná, můžeme zapsat rovnici $31 + 2x = 28 + 3x$, kterou vyřešíme:

$$31 + 2x = 28 + 3x$$

$$3x - 2x = 31 - 28$$

$$x = 3$$

Po 3 týdnech bude počet chlapců a dívek stejný.

Správná odpověď je (C).

3. Řešení:

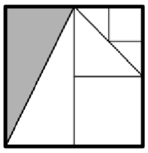
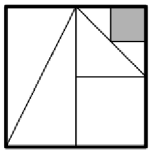
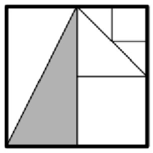
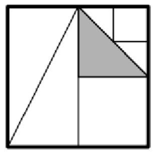
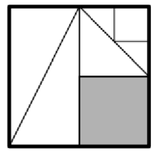
Chlapců je o 3 více. Každý týden přibude jedna dívka. Za 3 týdny jich bude stejně.

Správná odpověď je (C).

Poznámka: V druhém řešení se pracuje s rovnicí o jedné neznámé, se kterou se žák ve 4. třídě zatím nesetkal. Uvedený postup řešení může být využit při výkladu zmiňované látky v příslušném ročníku 2. stupně ZŠ.

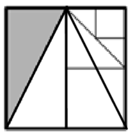
2.8.1.4. Německo, rok 2021, úroveň 5 a 6 (5. a 6. třída), úloha A8

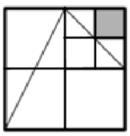
Úloha za 3 body: Na jednom z následujících obrázků je jedna osmina plochy velkého čtverce zbarvena šedě. Ve kterém?

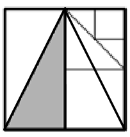
(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

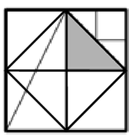
Řešení:

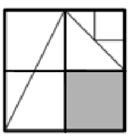
U každého možného řešení určíme, jak velká část původního čtverce je vybarvena:

(A) 
Šedivý trojúhelník je čtvrtina původního čtverce.

(B) 
Šedivý čtverec je čtvrtina vyznačeného čtverce
a šestnáctina původního čtverce.

(C) 
Šedivý trojúhelník je čtvrtina původního čtverce.
Totožné s možností (A).

(D) 
Šedivý trojúhelník je osmina původního čtverce.

(E) 
Šedivý čtverec je čtvrtina původního čtverce.

Správné řešení je (D).

Poznámka: Úloha byla i v americké verzi soutěže, ale s pozměněným zadáním a barevným šrafováním. V obou případech byla úloha za 3 body a řešení bylo stejné. V úloze žák využívá znalosti z geometrie (trojúhelník, čtverec, obdélník) a aritmetiky (zlomky). Úlohu lze využít při výkladu zlomků a ke zpestření výuky.

2.8.2. Matematická olympiáda

Přehled vybraných zemí, kde se soutěž pořádá ve věkové kategorii 6 – 11 let:

	6 – 7 let (1. třída)	7 – 8 let (2. třída)	8 – 9 let (3. třída)	9 – 10 let (4. třída)	10 – 11 let (5. třída)
Německo					
Austrálie					
USA					
Slovensko					

Tabulka č. 14 Přehled sledovaných zemí

Německo: Soutěž má 3 úrovně pro žáky 3. – 7. ročníku (školní, regionální a státní kolo) a 4 úrovně pro žáky 8. – 13. ročníku (školní, regionální, státní a národní kolo). Soutěž organizuje každoročně jiný federální stát a žáci během 4,5 hodiny řeší 3 úlohy. (Mathematik olympiaden, 2001)

Austrálie: Soutěž je určena žákům 3. – 12. ročníku (8 – 18 let). Zadání olympiády se skládá z 25 otázek s výběrem odpovědí a 5 uzavřených otázek, které jsou řazeny podle obtížnosti. Vstupní poplatek je 6,50 $ za studenta. (AMC, 2021)

USA: Soutěž pouze pro školní týmy tvořené až 35 žáky z 4. – 8. ročníku. Žáci mají na 5 úloh 30 minut. (MOEMS, 2021)

Slovensko: Zadání, kategorie a pravidla soutěže jsou totožná s českou verzí. (SKMO, 2021)

2.8.2.1. Německo, 60. ročník (2020/2021), 3. třída, školní kolo, úloha 4 (Pentominos)

Pentominos se skládá z pěti čtverců stejné velikosti, které se nepřekrývají. Sousední čtverce leží proti sobě celou délkou strany.

Příklad:

správně špatně

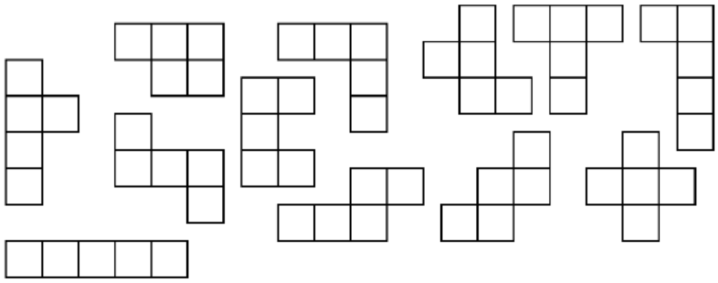
Obrázek č. 40 Výchozí obrázky úlohy

Poznámka (autorská): Otočené nebo zrcadlové útvary jsou považovány za stejné.

Nakreslete dalších osm různých pentominos.

Řešení (autorské):

Celkem existuje 12 řešení:



Obrázek č. 41 Možná řešení úlohy

Poznámka: Úloha může být použita v geometrii. Úloha byla použita v pracovním listě pro 3. třídu.

2.8.2.2. Austrálie, rok 2014, Střední základní kategorie (3. a 4. třída), úloha 1 (Klubový kód)

Chcete-li se stát členem klubu, musíte prolomit tento kód:

6	**1**	**4**	**3**	**2**	**5**

Každé ze šesti čísel znamená jiné písmeno. K prolomení kódu použijte následující stopy a otázky.

a) $E + U + L = 6$. Jaká čísla mohou E, U, L znamenat?

b) $S + R + U + T = 18$. Jaká je hodnota $S + R + T$? Jaké číslo je U?

c) $U \cdot T = 15$. Jaké číslo je T?

d) $S \cdot L = 8$. Jaká čísla jsou S, R, E, L?

Jak zní kódové slovo?

Řešení (autorské):

a) Jediná tři čísla, která dají součet 6, jsou čísla 1, 2, 3. Takže E, U, L znamenají čísla 1, 2, 3 v určitém pořadí.

b) 1. alternativa: Z části a) víme, že písmena E, U, L znamenají čísla 1, 2, 3 v určitém pořadí. Proto písmena S, R, T znamenají v určitém pořadí 4, 5, 6 a $S + R + T = 15$ a $U = 3$.

2. Alternativa: Jediná čtyři čísla, která dají součet 18, jsou čísla 3, 4, 5, 6. Z části a) víme, že písmeno U je 1, 2 nebo 3. Proto $U = 3$ a $S + R + T = 15$.

3. Alternativa: Šest písmen E, L, R, S, T, U znamená šest čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6 v určitém pořadí. Proto $E + L + R + S + T + U = 21$. Ze zadání víme, že $E + U + L = 6$ a $S + R + U + T = 18$.

Proto $E + L + R + S + T + U + U = 6 + 18 = 24$.

Proto $U = 24 - 21 = 3$ a $S + R + T = 18 - 3 = 15$.

c) $U \cdot T = 15$ a z části b) víme, že $U = 3$. Vypočítáme T

$$T = 15 : 3 = 5.$$

d) Z části b) víme, že S = 4, 5 nebo 6. Protože $S \cdot L = 8$, $S = 4$. Proto $L = 2$. Z části a) víme, že čísla E, U, L jsou v určitém pořadí čísla 1, 2, 3. Protože čísla $U = 3$ a $L = 2$, musí být $E = 1$ a $R = 6$.

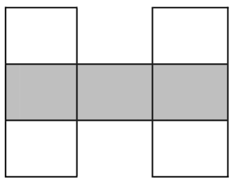
6	**1**	**4**	**3**	**2**	**5**
R	**E**	**S**	**U**	**L**	**T**

Kódové slovo je RESULT (výsledek).

Poznámka: Pod autorským řešením úlohy je napsáno: „Tento problém je modifikací problému navrženého Lorraine Mottersheadem. Řešení úlohy vyžaduje systematické zkoumání jednoduchých rovnic.“

2.8.2.3. USA, Elementary Division (4. – 6. třída), úloha 3D

Do obrázku mají být umístěna celá čísla 1 – 7, vždy jedno na čtverec. Součty čísel v levém sloupci, pravém sloupci a každé úhlopříčce jsou stejné. Jaký je nejmenší možný součin čísel v šedé řadě?



Obrázek č. 42 Výchozí obrázek úlohy

Řešení (autorské):

Protože pro tři čísla v šedém řádku chceme mít co nejmenší součin, použijeme čísla 1, 2 a 3. Součet čísel v prvním sloupci se musí rovnat součtu čísel ve druhém sloupci. Součet dvou zbývajících čísel v prvním sloupci proto musí být o 2 větší než součet dvou chybějících čísel ve druhém sloupci.

Chybějící čísla v prvním sloupci musí být 5 a 7, zatímco dvě chybějící čísla ve druhém sloupci musí být 4 a 6. Úhlopříčky mají také stejný součet $(5 + 1 + 7 = 13)$.

Nejmenší možný součin čísel v šedém řádku je $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

Poznámka: Žák musí postupně vyřadit možné varianty trojic čísel. Na úloze lze vysvětlit metodu vylučovací – vyřazujeme postupně trojice, která zadání nevyhovují.

2.8.3. Pangea

Matematická soutěž Pangea spojuje 21 evropských zemí. Centrem matematické soutěže Pangea je Německo. Filozofie soutěže „matematika spojuje“ je však nadnárodní. Žáci řeší otázky s možností výběru z více odpovědí. (Pangea.org, 2021)

Přehled vybraných zemí, kde se soutěž pořádá ve věkové kategorii 6 – 11 let:

	6 – 7 let (1. třída)	7 – 8 let (2. třída)	8 – 9 let (3. třída)	9 – 10 let (4. třída)	10 – 11 let (5. třída)
Německo					
Rakousko					
Polsko					

Tabulka č. 15 Přehled sledovaných zemí

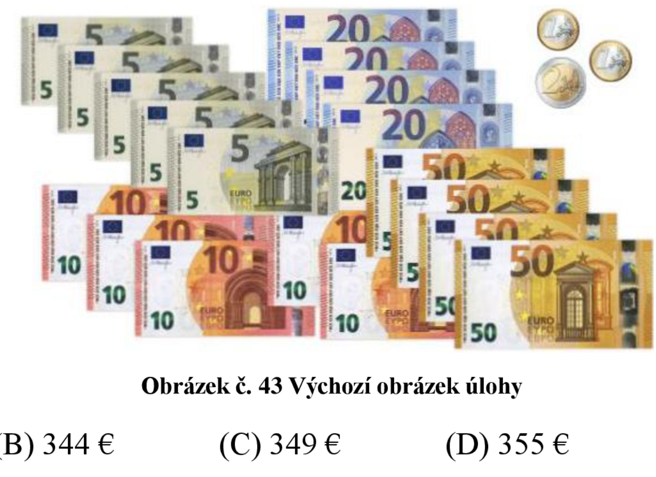
Německo: Soutěž je třídílná, určená pro 3. – 10. ročník. Je zdarma pro všechny zúčastněné. Žáci mají 45 – 60 minut na vyřešení 15 – 20 úloh. Za nesprávné odpovědi se body neodečítají. (Pangea Wettbewerb, 2021)

Rakousko: Soutěž je určena žákům 3. – 10. ročníku. Žáci mají 45 minut na 15 úloh, které jsou rozděleny do 5 různých úrovní obtížnosti. V případě 4 a 5 bodových úloh se při nesprávném zodpovězení body odečítají. Za nevyřešenou úlohu se body neodečítají. (Pangea wettbewerb, 2021)

Polsko: Soutěž probíhá ve třech kategoriích: Pythagoras (4. – 6. třída), Thales (gymnázia) a Banach (střední školy). Soutěž má dvě fáze. Vyřazovací test trvá 45 minut a skládá se z 20 otázek, kde je 10 úloh za 3 body a 10 úloh za 4 body. Pokud žák neodpoví, body se mu neodečítají. (Wrocławski Portal Matematyczny, 2021)

2.8.3.1. Německo, rok 2016, 3. třída, úloha 3

Jaká je celková hodnota všech bankovek a mincí?



Obrázek č. 43 Výchozí obrázek úlohy

(A) 339 € (B) 344 € (C) 349 € (D) 355 € (E) 359 €

Řešení:

Spočítáme celkovou hodnotu bankovek a mincí (od nejmenších po největší):

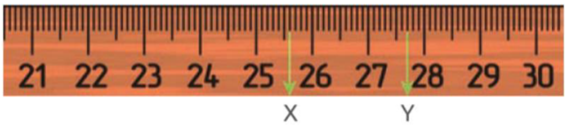
$$2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 5 \cdot 5 + 5 \cdot 10 + 4 \cdot 20 + 4 \cdot 50 = 2 + 2 + 25 + 50 + 80 + 200 = 359\ €$$

Správné řešení je (E).

Poznámka: V úloze žák kromě sčítání a násobení využívá základních znalosti z finanční matematiky (počítání s penězi, různé hodnoty peněz). Úloha byla použita v pracovním listě pro 3. třídu.

2.8.3.2. Rakousko, rok 2021, 4. třída, 50. týden, úloha 3

Určete vzdálenost od *X* do *Y*.



Obrázek č. 44 Výchozí obrázek úlohy

(A) 21 mm (B) 25 mm (C) 20 mm (D) 15 mm (E) 10 mm

Řešení:

Z výchozího obrázku odečteme hodnoty *X* a *Y* a určíme jejich vzdálenost:

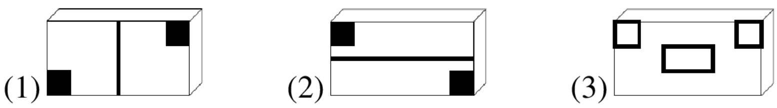
$$27{,}7 - 25{,}6 = 2{,}1\ cm = 21\ mm$$

Správné řešení je (A).

Poznámka: Žák musí umět správně odečíst hodnoty z obrázku.

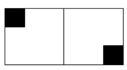
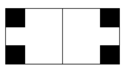
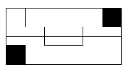
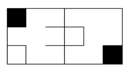
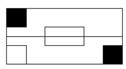
2.8.3.3. Německo, rok 2020, 5. třída, úloha 17

Lisa má 3 razítka. Jejich spodní strany jsou na obrázku:



Obrázek č. 45 Výchozí obrázek úlohy

Který z následujících otisků Lisa nemůže udělat, i když razítka zkombinuje?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

Řešení:

Možnost (A) získáme razítkem (1), možnost (B) razítky (1) a (2), možnost (C) razítky (2) a (3), možnost (D) razítky (1) a (3), možnost (E) nelze udělat.

Správné řešení je (E).

Poznámka: Úloha je zaměřena na prostorovou představivost žáka a jeho schopnost kombinovat zadané prvky (razítka). Úloha byla použita v pracovním listě pro 5. třídu.

2.8.4. Bolyai

Mezinárodní týmová soutěž Bolyai vznikla před 18 lety v Maďarsku. Soutěže se účastní týmy od 3. třídy až po maturitu, ve kterých jsou 2, 3 nebo 4 stejně staří žáci. Žáci řeší úlohy odpovídající jejich věku. Účastnický poplatek jsou 3 € za každého žáka.

Týmy řeší celkem 14 úloh. Žáci u úloh 1 – 13 vybírají z více možností, kde jedna či několik z nich je správných. V Úloze 14 mají žáci zapsat své řešení tak, aby bylo možné sledovat jejich myšlenkový postup. (Bolyai.at a Bolyai.de, 2021)

Přehled vybraných zemí, kde se soutěž pořádá ve věkové kategorii 6 – 11 let:

	6 – 7 let (1. třída)	7 – 8 let (2. třída)	8 – 9 let (3. třída)	9 – 10 let (4. třída)	10 – 11 let (5. třída)
Německo					
Rakousko					

Tabulka č. 16 Přehled sledovaných zemí

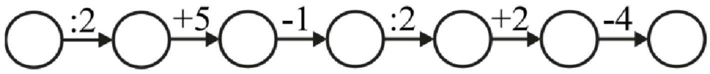
Německo: Mezinárodní soutěž se v Německu koná od roku 2014. Oficiálním partnerem soutěže je v Německu Singbergschule Wölfersheim. (Bolyai.de, 2021)

Rakousko: V Rakousku se soutěž koná od roku 2017. (Bolyai.at, 2021)

Poznámka: Úlohy jsou v obou zemích totožné, proto u nich není uveden stát.

2.8.4.1. Ročník 2020/2021, 3. třída, úloha 2

Do prázdných kroužků zapište čísla od 1 do 7 tak, aby byl výsledek výpočtu správný. Každé číslo je použito pouze jednou. Které číslo může být ve středovém kroužku?

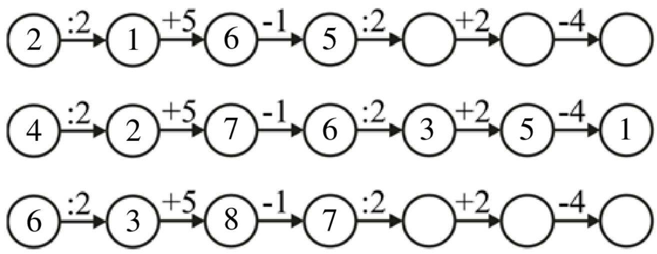


Obrázek č. 46 Výchozí obrázek úlohy

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 6

Řešení:

Začínáme z levé strany. První hledané číslo musí být dělitelné dvěma. Máme proto možnosti 2, 4 a 6. Čísla dosadíme a vypočítáme zbytek:



Obrázek č. 47 Postup řešení úlohy

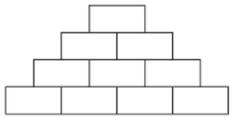
Zjistili jsme, že jediné možné řešení získáme, pokud jako první číslo dosadíme 4. Proto může být ve středovém kroužku pouze číslo 6.

Jediné správné řešení je (E).

Poznámka: Žák musí logicky určit, která čísla může využít při použití metody pokus–omyl. Úloha byla použita v pracovním listě pro 3. třídu.

2.8.4.2. Ročník 2012/2013, 4. třída, úloha 10

V následující číselné pyramidě každé pole, kromě spodního řádku, ukazuje součet níže uvedených čísel. Anja napsala do spodního řádku čtyři taková různá jednociferná lichá čísla, jejichž součet je 22. Jaké číslo může být v horním poli?



Obrázek č. 48 Výchozí obrázek úlohy

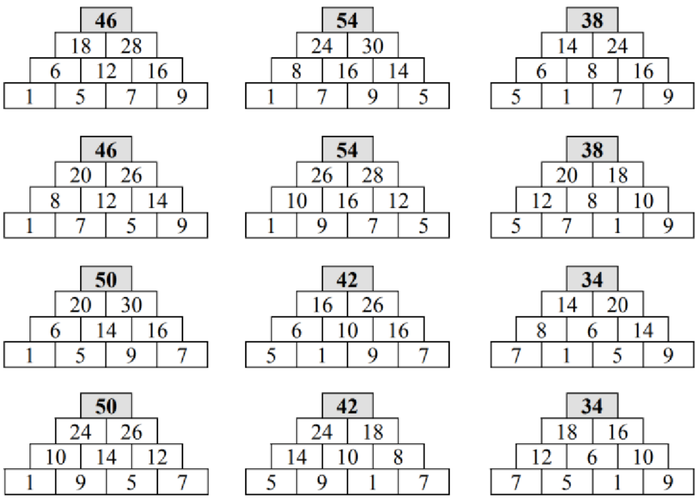
(A) 34 (B) 42 (C) 46 (D) 50 (E) 56

Řešení (autorské):

Pomocí čtyř různých jednociferných lichých čísel lze 22 zapsat pouze jako součet čísel 9, 7, 5 a 1. Existuje šest způsobů, jak vybrat dvě vnější čísla: 1 a 9, 1 a 7, 1 a 5, 5 a 9, 5 a 7, 7 a 9.

Ve všech šesti případech zapíšeme dvě vnější čísla do pořadí. Máme ještě dvě možnosti, jak do prostředních polí zapsat další dvě čísla. Tím jsme získali všechny možnosti.

Pokud prohodíme dvě vnější čísla, nezískáme žádná nová řešení, pouze zrcadlové obrazy již zmíněných řešení. Takže můžeme vyplnit pyramidu pro všech 12 možností:



Obrázek č. 49 Možná řešení úlohy

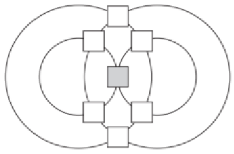
Z uvedených možností můžeme do horního pole zadat čísla 34, 42, 46 a 50.

Řešení úlohy jsou (A), (B), (C) a (D).

Poznámka: V úloze použijeme rozklad čísel.

2.8.4.3. Ročník 2018/2019, 5. třída, úloha 14

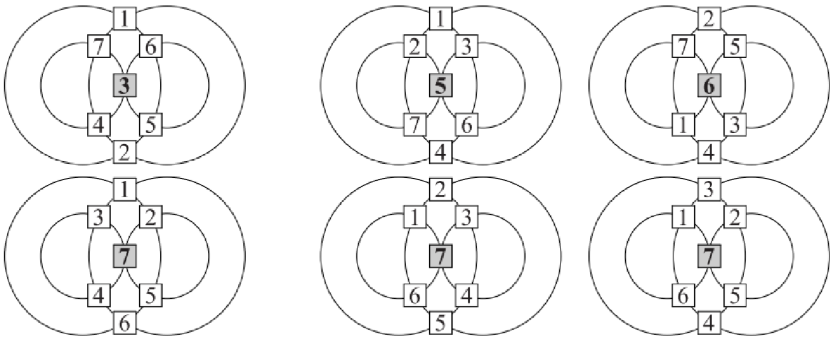
Na obrázku jsou zobrazeny čtyři kruhy, které se protínají v celkem sedmi bodech (kde jsou políčka). Vaším úkolem je zapsat do těchto políček čísla 1 až 7 (do každého políčka jiné číslo) tak, aby součty čísel podél všech čtyř kruhů byly vždy stejné. Ve šrafovaném rámečku se mohou objevit různá čísla. Pro každé z těchto čísel nakreslete samostatný obrázek.



Obrázek č. 50 Výchozí obrázek úlohy

Řešení (autorské):

Do vytvořeného boxu mohou jít pouze čísla 3, 5, 6 a 7. Součet dvou čísel ze dvou polí nahoře a dole musí dát číslo ze šrafovaného rámečku. Systematickým pokusem a omylem dostaneme:



Obrázek č. 51 Řešení úlohy

Poznámka: Strategicky umístíme čísla. Je možné použít metodu pokus–omyl či metodu vylučovací.

3. Praktická část

Praktická část se věnuje tvorbě, ověření a úpravě pracovních listů pro 2. – 5. třídu ZŠ, které jsou tvořeny úlohami z teoretické části. Pracovní list pro 1. třídu jsem nevytvářela, protože žáci v době zadávání pracovních listů (listopad a prosinec 2021) nejsou schopni si sami přečíst zadání a dále podle něj pracovat, což je v tomto případě stěžejní.

Každý pracovní list obsahuje 5 úloh z matematických soutěží a je sestaven tak, aby ho měli žáci šanci zvládnout během jedné vyučovací hodiny (45 min). Jedinou povolenou pomůckou jsou psací potřeby.

V pracovních listech mají žáci za úkol řešit úlohy otevřené a uzavřené:

	Úlohy	
	otevřené	uzavřené
2. třída	1	4
3. třída	1	4
4. třída	3	2
5. třída	2	3

Tabulka č. 17 Přehled úloh v pracovních listech

Z důvodu ověření pracovních listů jsem požádala 10 základních škol v Jihočeském kraji. Se spoluprací souhlasilo 5 z nich – 1 v Českých Budějovicích a 4 v okrese Tábor. Pracovní listy jsem také sama zadávala na jedné z oslovených ZŠ (ZŠ5) v 5. třídě.

Kvůli časové náročnosti a střídání činností u nejmladších žáků (2. a 3. třída) jsem učitelům sdělila, že je možné pracovat na pracovních listech několik vyučovacích hodin. Učitelům jsem dále vzkázala, že specifické potřeby žáků mají být při řešení pracovních listů zohledněny (přidání času navíc, učitel přečte zadání apod.).

Do škol jsem dávala i řešení pracovních listů a dotazníky pro učitele. Pomocí dotazníku jsem chtěla zjistit, jaké matematické soutěže učitelé znají a také je poprosit, aby mi dali zpětnou vazbu ohledně mých pracovních listů.

3.1. Dotazník pro učitele

Třída: ______________________________

Základní škola: ______________________________

---

1. V tabulce naleznete vybrané tuzemské matematické soutěže pro žáky 1. stupně ZŠ.

(1) V prvním sloupci zaškrtněte všechny soutěže, které znáte.

(2) Ve druhém sloupci zaškrtněte soutěže, kterých se žáci z Vaší školy účastní.

(1)	(2)	Název matematické soutěže
		Logická olympiáda (1. – 5. třída)
		Matematický klokan (2. – 5. třída)
		Matematické putování (4. a 5. třída)
		Pangea (4. a 5. třída)
		Matematická olympiáda (5. třída)
		Pythagoriáda (5. třída)

2. Znáte jinou tuzemskou soutěž, která není zmíněna? Pokud ano, jakou?

____

3. V jakém ročníku je podle Vás správný čas na zapojení žáků do vědomostní soutěže?

____

____

____

4. Jaký je Váš názor na pracovní list? Přijde Vám přiměřený věku žáků?

____

____

____

____

5. Pokud máte nějaké připomínky, napište je sem:

____

____

____

3.2. Pracovní listy

3.2.1. Pracovní list pro 2. třídu

Jméno: ________________________________

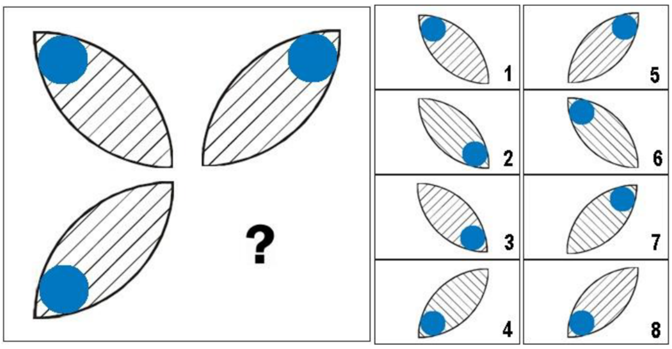
Základní škola:_______________________________________

Časový limit: 45 min

Pomůcky: psací potřeby a vlastní hlava

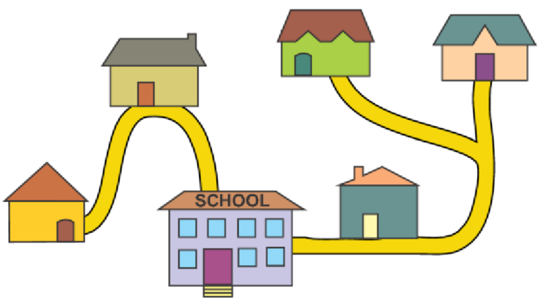
---

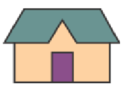
1. Místo otazníku doplň správný lístek z nabídky.



Řešení: ________________________

2. Na obrázku je pět domů pěti kamarádů a jejich škola. Škola je největší budovou na obrázku. Doris a Ali při cestě do školy prochází kolem Leova domu. Eva prochází kolem domu Chole. Který dům je Evy?

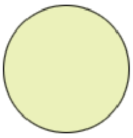
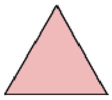
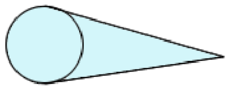


(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

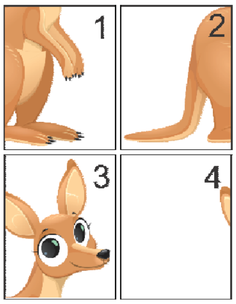
3. Před dvěma lety bylo Jackovi 8 let. Kolik let mu bude příští rok?

(A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12 (E) 13

4. Rovnoběžky se nikdy neprotnou a vždy zůstanou ve stejné vzdálenosti od sebe. Který tvar obsahuje rovnoběžky?

(A)  (B)  (C)  (D) 

5. Nela složila z těchto čtyř dílků klokana. Jak dílky uspořádala?



(A)

4	3
2	1

(B)

3	4
2	1

(C)

2	1
4	3

(D)

4	3
1	2

(E)

3	4
1	2

Moje hodnocení - vybarvi emotikonu podle toho, jak se ti pracovní list líbil:

líbil se  nelíbil se

Moje připomínky:

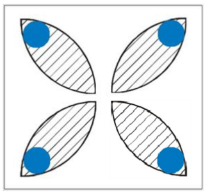
____

____

Pracovní list pro 2. třídu (autorské řešení)

---

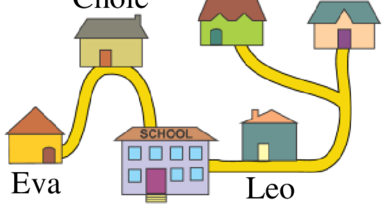
1. Místo otazníku doplň správný lístek z nabídky.



Řešení:

Při vysvětlování postupu řešení je možné přiložit k obrazci zrcátko, aby žáci viděli, jak má kompletní útvar vypadat (demonstrace osové souměrnosti). Z obrázku lze vyvodit, že hledaný lístek je osově souměrný s lístkem v levém horním rohu, který stačí pouze překlopit. Hledaný lístek směřuje z levého horního rohu do pravého dolního rohu, modrá tečka se nachází v pravém dolním rohu a proužky jsou rovnoběžné s diagonálou směřující z pravého horního rohu do levého dolního rohu. Správné řešení je číslo 3.

2. Na obrázku je pět domů pěti kamarádů a jejich škola. Škola je největší budovou na obrázku. Doris a Ali při cestě do školy prochází kolem Leova domu. Eva prochází kolem domu Chole. Který dům je Evy?



(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

Řešení:

Při řešení vycházíme z následujících informací:

- Doris a Ali při cestě do školy prochází kolem Leova domu. – Tito kamarádi bydlí z našeho pohledu vpravo. Leo bydlí nejblíže ke škole.
- Eva prochází kolem domu Chole. – Již víme, že vpravo bydlí Doris, Ali a Leo. Eva a Chole proto bydlí vlevo od školy. Blíže ke škole bydlí Chole. Eva tedy bydlí ve žlutém domě. (viz obrázek)

Správné řešení je (B).

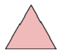
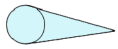
3. Před dvěma lety bylo Jackovi 8 let. Kolik let mu bude příští rok?

(A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12 (E) 13

Řešení:

Uvědomíme si, že Jackovi je nyní $8 + 2 = 10$ let. O rok později mu bude $10 + 1 = 11$ let. Správné řešení je (C).

4. Rovnoběžky se nikdy neprotnou a vždy zůstanou ve stejné vzdálenosti od sebe. Který tvar obsahuje rovnoběžky?

(A)  (B)  (C)  (D) 

Řešení:

Podle definice v zadání si uvědomíme vlastnosti rovnoběžek a určíme hledaný tvar:

(A) Kruh neobsahuje žádné úsečky, proto zde nemůžeme hledat rovnoběžky.

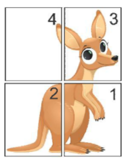
(B) Obdélník se skládá ze čtyř stran (úseček). Vždy dvě protější strany (úsečky) jsou rovnoběžné. Tento útvar (obdélník) obsahuje rovnoběžky.

(C) Trojúhelník se skládá ze tří stran (úseček), ale žádné dvě strany (úsečky) nejsou rovnoběžné. Tento útvar (trojúhelník) neobsahuje rovnoběžky.

(D) Útvar složený z kruhu a jeho dvou tečen obsahuje dvě úsečky, které nejsou rovnoběžné. Tento útvar neobsahuje rovnoběžky.

Žák zjistí, že jediný útvar, který odpovídá zadání je obdélník. Správné řešení je (B).

5. Nela složila z těchto čtyř dílků klokana. Jak dílky uspořádala?



(A)

4	3
2	1

(B)

3	4
2	1

(C)

2	1
4	3

(D)

4	3
1	2

(E)

3	4
1	2

Řešení:

Při řešení úlohy žák používá plošnou představivost. Při pohledu na přeházený obrázek zjistíme, že ho můžeme rozdělit na dvě části: hlavu (dílky 3 a 4) a tělo (dílky 1 a 2). Dílky hlavy budou nahoře a dílky těla budou dole. Dílky 1 a 3 budou vpravo a dílky 2 a 4 budou vlevo. Správné řešení je (A).

3.2.2. Pracovní list pro 3. třídu

Jméno: ______________________________

Základní škola:____________________________________

Časový limit: 45 min

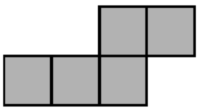
Pomůcky: psací potřeby a vlastní hlava

---

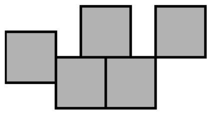
1. V restauraci je 5 stolů pro 4 osoby a 2 stoly pro 6 osob. Kolik lidí může sedět u těchto stolů, když třem z nich chybí jedna židle?

(A) 26 (B) 28 (C) 29 (D) 30 (E) 32

2. Pentominos se skládá z pěti čtverců stejné velikosti, které se nepřekrývají. Sousední čtverce leží proti sobě celou délkou strany. Otočené nebo zrcadlové útvary jsou považovány za stejné. Nakreslete alespoň dalších 8 různých pentominos do tabulky.



správně



špatně

3. Který výraz dává sudý součet?

A) $31 + 18 + 20$

B) $22 + 24 + 36 + 19$

C) $12 + 14 + 17$

D) $12 + 14 + 55 + 33$

E) $10 + 20 + 57$

4. Do prázdných kroužků zapište čísla od 1 do 7 tak, aby byl výsledek výpočtu správný. Každé číslo je použito pouze jednou. Které číslo může být ve středovém kroužku?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 6

5. Jaká je celková hodnota všech bankovek a mincí?

(A) 339 € (B) 344 € (C) 349 € (D) 355 € (E) 359 €

Moje hodnocení - vybarvi či zakroužkuj emotikonu podle toho, jak se ti pracovní list líbil:

líbil se  nelíbil se

Moje připomínky:

____

____

Pracovní list pro 3. třídu (autorské řešení)

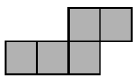
1. V restauraci je 5 stolů pro 4 osoby a 2 stoly pro 6 osob. Kolik lidí může sedět u těchto stolů, když třem z nich chybí jedna židle?

(A) 26 (B) 28 (C) 29 (D) 30 (E) 32

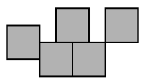
Řešení:

Kdyby žádné židle nechyběly, měli bychom celkem $5 \cdot 4 + 2 \cdot 6 = 20 + 12 = 32$ židlí. Protože chybí 3 židle, může u stolů sedět $32 - 3 = 29$ lidí. Správné řešení je (C).

2. Pentominos se skládá z pěti čtverců stejné velikosti, které se nepřekrývají. Sousední čtverce leží proti sobě celou délkou strany. Otočené nebo zrcadlové útvary jsou považovány za stejné. Nakreslete alespoň dalších 8 různých pentominos do tabulky.



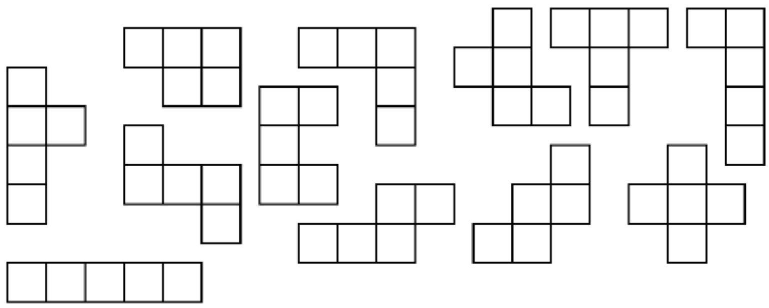
správně



špatně

Řešení:

Celkem existuje 12 řešení. Úloha může být použita v geometrii (sestavování sítí těles).



3. Který výraz dává sudý součet?

A) $31 + 18 + 20$ B) $22 + 24 + 36 + 19$ C) $12 + 14 + 17$

D) $12 + 14 + 55 + 33$ E) $10 + 20 + 57$

Řešení:

Žák si musí uvědomit, že součet dvou sudých čísel je sudý, součet dvou lichých čísel je sudý a součet lichého a sudého čísla je lichý. Proto není potřeba výrazy počítat. Správné řešení je (D).

4. Do prázdných kroužků zapište čísla od 1 do 7 tak, aby byl výsledek výpočtu správný. Každé číslo je použito pouze jednou. Které číslo může být ve středovém kroužku?

$$\bigcirc \xrightarrow{:2} \bigcirc \xrightarrow{+5} \bigcirc \xrightarrow{-1} \bigcirc \xrightarrow{:2} \bigcirc \xrightarrow{+2} \bigcirc \xrightarrow{-4} \bigcirc$$

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 6

Řešení:

Začínáme logicky z levé strany. První hledané číslo musí být dělitelné dvěma. Máme proto možnosti 2, 4 a 6. Čísla dosadíme a vypočítáme zbytek:

$$2 \xrightarrow{:2} 1 \xrightarrow{+5} 6 \xrightarrow{-1} 5 \xrightarrow{:2} \bigcirc \xrightarrow{+2} \bigcirc \xrightarrow{-4} \bigcirc$$

$$4 \xrightarrow{:2} 2 \xrightarrow{+5} 7 \xrightarrow{-1} 6 \xrightarrow{:2} 3 \xrightarrow{+2} 5 \xrightarrow{-4} 1$$

$$6 \xrightarrow{:2} 3 \xrightarrow{+5} 8 \xrightarrow{-1} 7 \xrightarrow{:2} \bigcirc \xrightarrow{+2} \bigcirc \xrightarrow{-4} \bigcirc$$

Zjistili jsme, že jediné možné řešení získáme, pokud jako první číslo dosadíme 4. Proto může být ve středovém kroužku pouze číslo 6. Jediné správné řešení je (E).

5. Jaká je celková hodnota všech bankovek a mincí?

(A) 339 € (B) 344 € (C) 349 € (D) 355 € (E) 359 €

Řešení:

Spočítáme celkovou hodnotu bankovek a mincí na obrázku (od nejmenších po největší):

$$2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 5 \cdot 5 + 5 \cdot 10 + 4 \cdot 20 + 4 \cdot 50 =$$
$$= 2 + 2 + 25 + 50 + 80 + 200 = 359\ €$$

Správné řešení je (E).

3.2.3. Pracovní list pro 4. třídu

Jméno: ______________________________

Základní škola:____________________________________

Časový limit: 45 min

Pomůcky: psací potřeby a vlastní hlava

---

1. V pokladničce máš 264 Kč. Suma je tvořena pouze českými mincemi (1 Kč, 2 Kč, 5 Kč, 10 Kč, 20 Kč, 50 Kč). Všech mincí máš stejný počet, kolik jich máš celkem?

2. V tabulce jsou zaznamenány nejvyšší hory kontinentů. Jaký je výškový rozdíl mezi nejnižší a nejvyšší zaznamenanou horou?

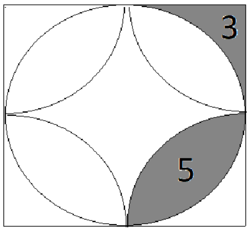
Kontinent	Hora	Výška (m n. m.)
Afrika	Kilimandžáro	5 895
Amerika	Aconcagua	6 902
Antarktida	Vinson Massif	5 140
Asie	Mount Everest	8 850
Austrálie	Mount Carstensz	4 887
Evropa	Mont Blanc	4 807

(A) 36 481 m (B) 13 657 m (C) 4 043 m (D) 3 963 m (E) 1 948 m

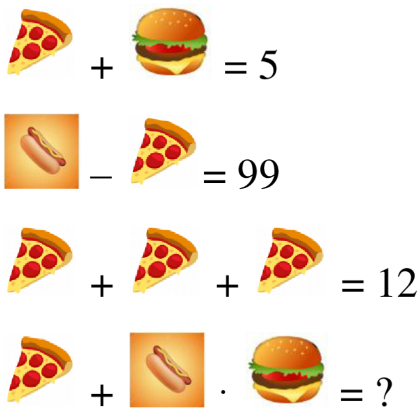
3. Ray chodí běhat každý druhý den. Pokud běžel poprvé minulý měsíc v pondělí, pak běžel podesáté minulý měsíc...

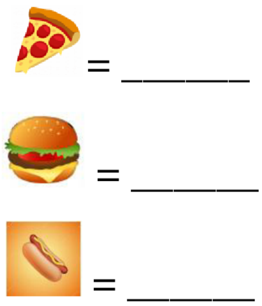
(A) v pondělí (B) v úterý (C) v pátek (D) v neděli

4. Určete obsah čtverce, jestliže víte, že vybarvené části mají obsah 3 a 5.



5. Vyřešte rébus.





Moje hodnocení - vybarvi či zakroužkuj emotikonu podle toho, jak se ti pracovní list líbil:

líbil se  nelíbil se

Moje připomínky:

____

____

Pracovní list pro 4. třídu (autorské řešení)

1. V pokladničce máš 264 Kč. Suma je tvořena pouze českými mincemi (1 Kč, 2 Kč, 5 Kč, 10 Kč, 20 Kč, 50 Kč). Všech mincí máš stejný počet, kolik jich máš celkem?

Řešení:

Sečteme hodnoty všech mincí: $1 + 2 + 5 + 10 + 20 + 50 = 88$ Kč. Postupným sčítáním dostaneme: $88 + 88 + 88 = 264$. Číslo 88 se do 264 vejde třikrát. Vynásobíme počet kusů od každé mince počtem různých hodnot mincí: $3 \cdot 6 = 18$.

2. V tabulce jsou zaznamenány nejvyšší hory kontinentů. Jaký je výškový rozdíl mezi nejnižší a nejvyšší zaznamenanou horou?

Kontinent	Hora	Výška (m n. m.)
Afrika	Kilimandžáro	5 895
Amerika	Aconcagua	6 902
Antarktida	Vinson Massif	5 140
Asie	Mount Everest	8 850
Austrálie	Mount Carstensz	4 887
Evropa	Mont Blanc	4 807

(A) 36 481 m (B) 13 657 m (C) 4 043 m (D) 3 963 m (E) 1 948 m

Řešení:

Z výchozí tabulky vyčteme nejnižší (Mont Blanc) a nejvyšší horu (Mount Everest). Vypočítáme výškový rozdíl: $8\,850 - 4\,807 = 4\,043$ m. Správné řešení je (C).

3. Ray chodí běhat každý druhý den. Pokud běžel poprvé minulý měsíc v pondělí, pak běžel podesáté minulý měsíc...

(A) v pondělí (B) v úterý (C) v pátek (D) v neděli

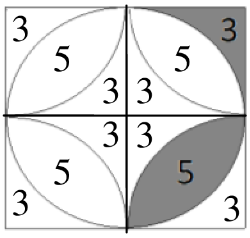
Řešení:

Vytvoříme si tabulku a označíme si do ní, kdy běžel Ray minulý měsíc podesáté:

	Pondělí	Úterý	Středa	Čtvrtek	Pátek	Sobota	Neděle
1. týden	(1)		(2)		(3)		(4)
2. týden		(5)		(6)		(7)	
3. týden	(8)		(9)		(10)		

Podesáté běžel v pátek. Správné řešení je (C).

4. Určete obsah čtverce, jestliže víte, že vybarvené části mají obsah 3 a 5.

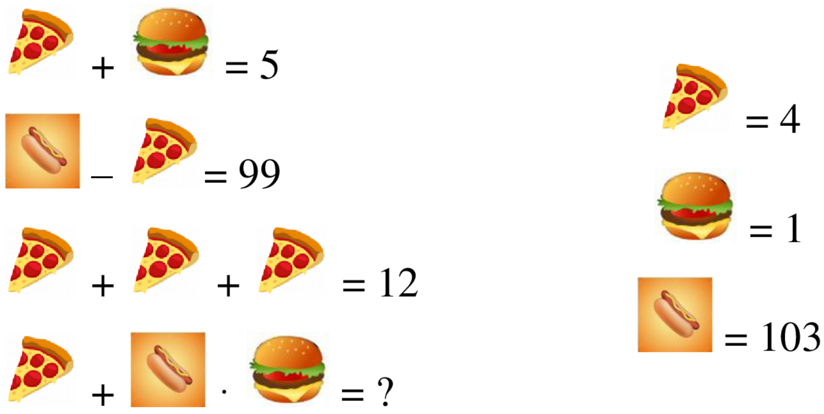


Řešení:

Čtverec rozdělíme na 4 shodné obrazce. V celém čtverci doplníme obsahy částí, protože jsou shodné. Zjistili jsme, že části s obsahem 3 (j^2) jsou ve čtverci osmkrát a části s obsahem 5 (j^2) čtyřikrát. Sečteme: $8 \cdot 3 + 4 \cdot 5 = 24 + 20 = 44$ (j^2).

Poznámka: Úloha využívá pojmu obsah čtverce, ale lze ji vyřešit logickou úvahou.

5. Vyřešte rébus.



Řešení:

Z třetí rovnice vypočítáme hodnotu pizzy. Víme, že tři pizzy mají hodnotu 12. Jedna má proto hodnotu $12 : 3 = 4$. Z první rovnice vypočítáme hodnotu hamburgeru. Víme, že pizza má hodnotu 4 a součet obou položek je 5. Hamburger má hodnotu: $5 - 4 = 1$. Z druhé rovnice vypočítáme hodnotu párku v rohlíku. Víme, že když odečteme pizzu o hodnotě 4 od párku v rohlíku, dostaneme hodnotu 99. Hodnotu párku v rohlíku získáme sečtením výsledné hodnoty rovnice a hodnoty pizzy: $99 + 4 = 103$. Nyní vyřešíme rovnici s otazníkem. Za pizzu, párek v rohlíku a hamburger dosadíme vypočítané hodnoty. $4 + 103 \cdot 1 = 4 + 103 = 107$.

3.2.4. Pracovní list pro 5. třídu

Jméno: ______________________________

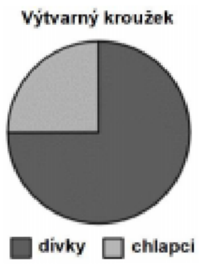
Základní škola:____________________________________

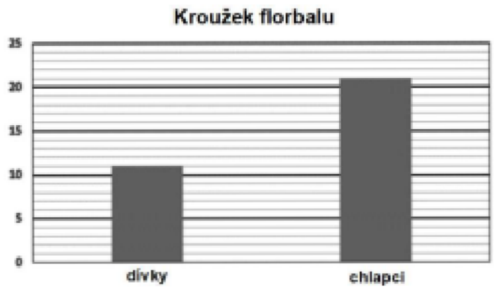
Časový limit: 45 min

Pomůcky: psací potřeby a vlastní hlava

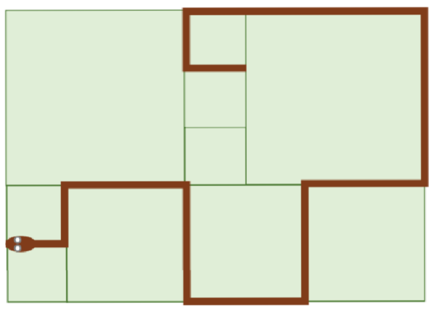
---

1. Do výtvarného kroužku chodí 32 dětí. Stejný počet chodí i do kroužku florbalu. Zjistěte z grafů, o kolik chlapců více chodí na florbal než do výtvarného kroužku.





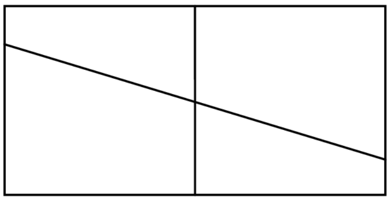
2. Rodinu Potrových čekalo po příchodu na zahradu nepříjemné překvapení. Na verandě, která je vydlážděná čtvercovými dlaždicemi třech různých velikostí, ležel obrovský had. Každá z nejmenších dlaždic má obvod 80 cm. Jak dlouhý byl had?



3. Jestliže pětičlenná rodina sní 5 kg rýže za 5 týdnů, kolik rýže sní desetičlenná rodina za 10 týdnů?

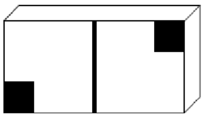
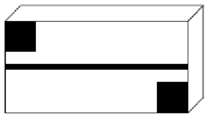
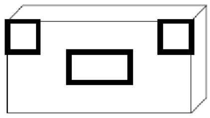
(A) 10 kg (B) 5 kg (C) 20 kg (D) 40 kg (E) 25 kg

4. Dillonovi spadlo zrcadlo na zem a rozlomilo se (viz obrázek). Kolik je na obrázku čtyřúhelníků?

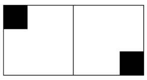
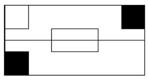
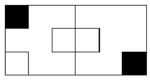
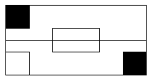


(A) 9 (B) 8 (C) 7 (D) 6

5. Lisa má 3 razítka. Jejich spodní strany jsou na obrázku.

(1)  (2)  (3) 

Který z následujících otisků Lisa nemůže udělat, i když razítka zkombinuje?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

Moje hodnocení - vybarvi či zakroužkuj emotikonu podle toho, jak se ti pracovní list líbil:

líbil se  nelíbil se

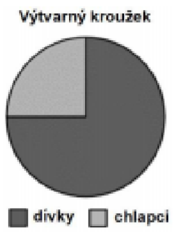
Moje připomínky:

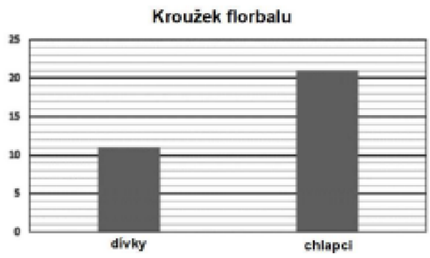
____

____

Pracovní list pro 5. třídu (autorské řešení)

1. Do výtvarného kroužku chodí 32 dětí. Stejný počet chodí i do kroužku florbalu. Zjistěte z grafů, o kolik chlapců více chodí na florbal než do výtvarného kroužku.





Řešení:

Nejprve vyčteme data z grafů a zapíšeme:

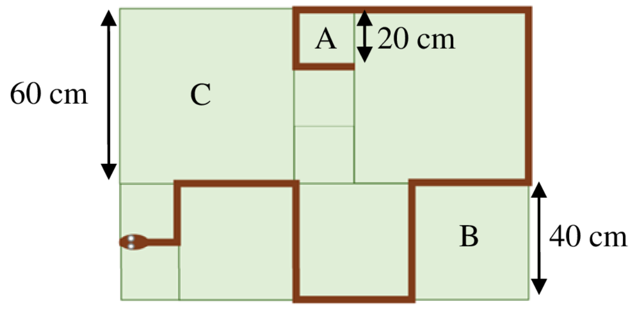
- Výtvarný kroužek: $\frac{1}{4}$ žáků jsou chlapci, $\frac{3}{4}$ žáků jsou dívky. $\frac{1}{4}$ z 32 je $32 : 4 = 8$. Kroužek navštěvuje 8 chlapců a 24 dívek.
- Kroužek florbalu: Kroužek navštěvuje 21 chlapců a 11 dívek.

Nyní zjistíme z grafů, o kolik chlapců více chodí na florbal: $21 - 8 = 13$ chlapců.

Na florbal chodí o 13 chlapců více než na výtvarný kroužek.

Poznámka: Úlohu jsem zvolila, protože zde žák musí pracovat s daty.

2. Rodinu Potrových čekalo po příchodu na zahradu nepříjemné překvapení. Na verandě, která je vydlážděná čtvercovými dlaždicemi třech různých velikostí, ležel obrovský had. Každá z nejmenších dlaždic má obvod 80 cm. Jak dlouhý byl had?



Řešení:

Označíme délky stran dlaždic A, B, C. Vypočítáme, kolik cm měří všechny velikosti. Víme, že A je $80 : 4 = 20$ cm, B je $2 \cdot 20 = 40$ cm a C je $3 \cdot 20 = 60$ cm. Sečteme, kolik stran dlaždic had zabíral: $5 \cdot 20 + 5 \cdot 40 + 2 \cdot 60 = 100 + 200 + 120 = 420$ cm. Had měřil 420 cm.

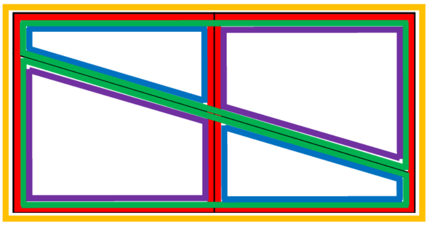
3. Jestliže pětičlenná rodina sní 5 kg rýže za 5 týdnů, kolik rýže sní desetičlenná rodina za 10 týdnů?

(A) 10 kg (B) 5 kg (C) 20 kg (D) 40 kg (E) 25 kg

Řešení:

Jeden člen sní za 5 týdnů $5 : 5 = 1$ kg rýže. Za 10 týdnů (neboli 2× tolik týdnů) sní jeden člen rodiny $1 \cdot 2 = 2$ kg rýže. Celá desetičlenná rodina tak sní $10 \cdot 2 = 20$ kg rýže. Správné řešení je (C).

4. Dillonovi spadlo zrcadlo na zem a rozlomilo se (viz obrázek). Kolik je na obrázku čtyřúhelníků?

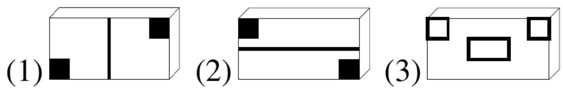


(A) 9 (B) 8 (C) 7 (D) 6

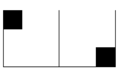
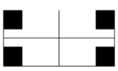
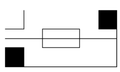
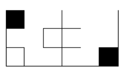
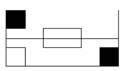
Řešení:

Na obrázku jsou dva čtverce, které dohromady dávají obdélník. Tyto dva čtverce se vždy dále dělí na dva lichoběžníky. Obdélník je úsečkou dělen na dva stejné lichoběžníky. Zvýraznili jsme 1 žlutý obdélník, 2 červené čtverce, 2 zelené lichoběžníky, 2 modré lichoběžníky a 2 fialové lichoběžníky, tj. $1 + 2 + 2 + 2 + 2 = 9$ čtyřúhelníků. Správné řešení je (A).

5. Lisa má 3 razítka. Jejich spodní strany jsou na obrázku.



Který z následujících otisků Lisa nemůže udělat, i když razítka zkombinuje?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

Řešení:

Možnost (A) získáme razítkem (1), možnost (B) razítky (1) a (2), možnost (C) razítky (2) a (3), možnost (D) razítky (1) a (3), možnost (E) nelze udělat. Úloha je zaměřena na prostorovou představivost žáka a jeho schopnost kombinovat zadané prvky (razítka). Správné řešení je (E).

3.3. Zadávání a evaluace pracovních listů

Vytvořené pracovní listy jsem na své náklady vytiskla a roznesla do základních škol. Z oslovených 10 škol se mi jich ozvalo 5. Ředitele škol jsem požádala, aby mi sdělili, kolik žáků mají ve vybraných třídách. Vytvořila jsem sady podle nahlášených počtů žáků a ke každé sadě přiložila dopis učitelům.

Počty žáků z vybraných tříd jednotlivých škol, které se mnou spolupracovaly:

	ZŠ1	ZŠ2	ZŠ3	ZŠ4	ZŠ5	Celkem
2. třída	27	14	12	60	18	131
3. třída	25	14	16	54	17	126
4. třída	45	17	23	46	21	152
5. třída	27	13	15	50	12	117

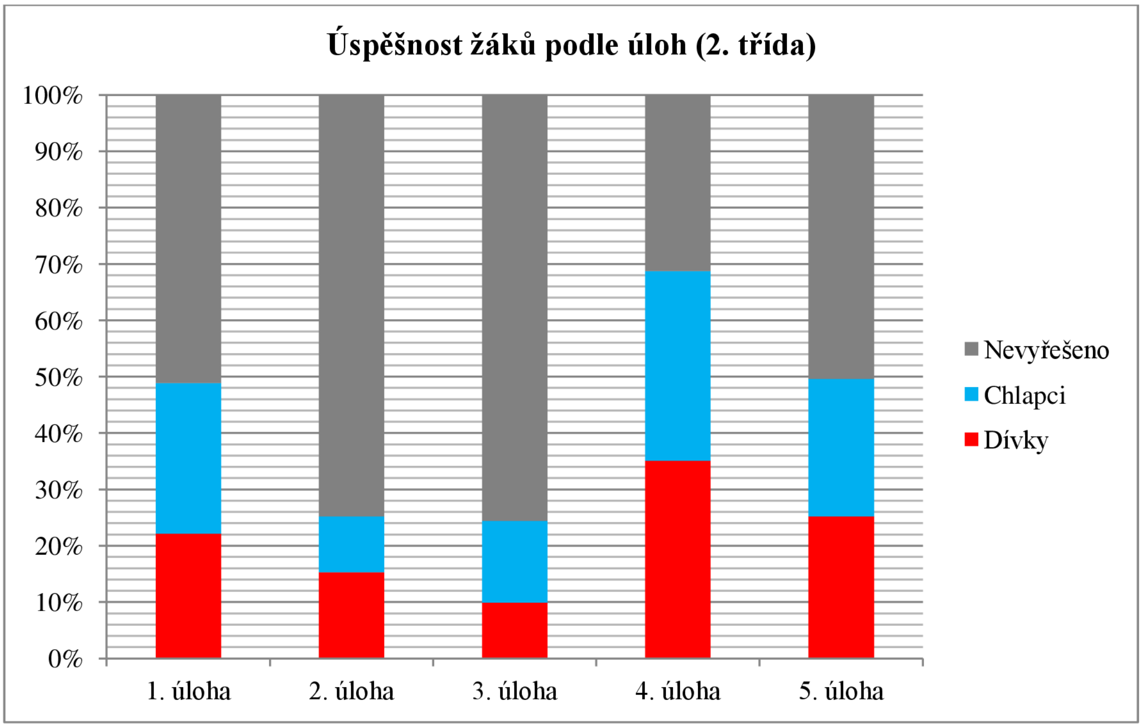
Tabulka č. 18 Počty žáků

Charakteristiky uvedených škol:

- ZŠ1 – Škola v okresním městě Tábor s paralelními třídami. (1. a 2. stupeň ZŠ)
- ZŠ2 – Škola v okrese Tábor s paralelními třídami. (pouze 1. stupeň ZŠ)
- ZŠ3 – Škola v krajském městě České Budějovice s paralelními třídami. (1. a 2. stupeň ZŠ)
- ZŠ4 – Škola v okresním městě Tábor s paralelními třídami. (1. a 2. stupeň ZŠ)
- ZŠ5 – Škola v okrese Tábor bez paralelních tříd. (1. a 2. stupeň ZŠ)

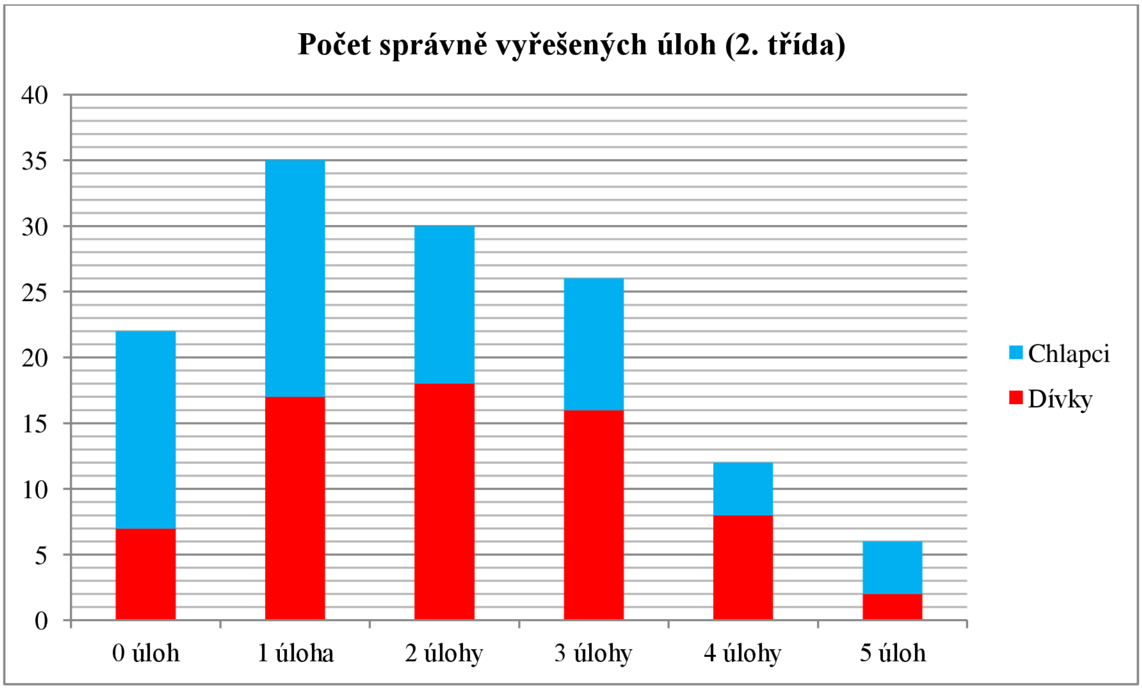
3.3.1. 2. třída – 131 žáků (68 dívek, 63 chlapců)

Podle sesbíraných dat můžeme usoudit, že se dotazovaným žákům ve 2. třídě nejvíce dařilo při řešení 4. úlohy, protože jim většina učitelů vysvětlila pojem rovnoběžka.



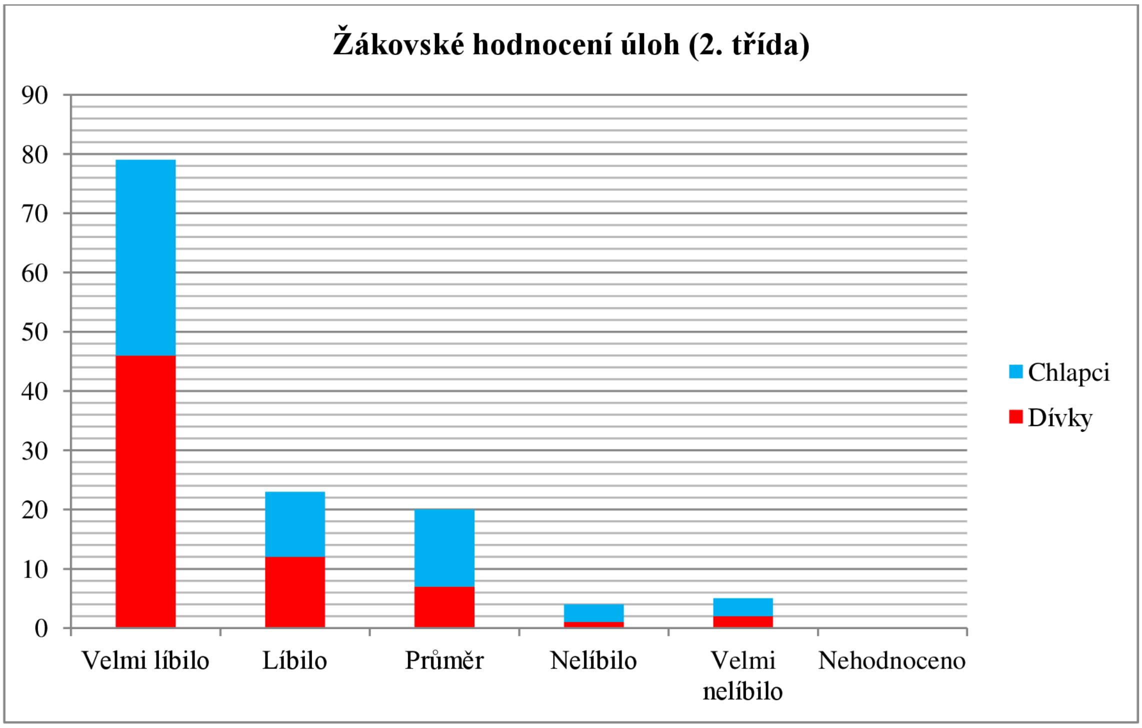
Graf č. 1 Úspěšnost žáků podle úloh (2. třída)

Celkově žáci 2. tříd vypočítali 251 úloh. Všechny úlohy vypočetlo 6 žáků. Žák v průměru dokázal vyřešit ≐ 1,92 úlohy.



Graf č. 2 Počet správně vyřešených úloh (2. třída)

Všichni žáci pracovní list ohodnotili. Většina žáků označila, že se jim pracovní list velmi líbil (60 %) – hodnocení 1.



Graf č. 3 Žákovské hodnocení úloh (2. třída)

Vybraná slovní hodnocení:

- „Tenhle test byl úžasný."
- „Bylo to akorát a bylo to super."
- „Byla to zábava."
- „Pro mě to bylo lehké."
- „Bylo to střední."
- „Líbilo se mi to."
- „Bylo to trošku těžký, ale super."
- „Mně se list nelíbí."
- „Smutné."
- „Je to hezký list, ale dal mi zabrat."
- „Pro mě to bylo totálně lehké."

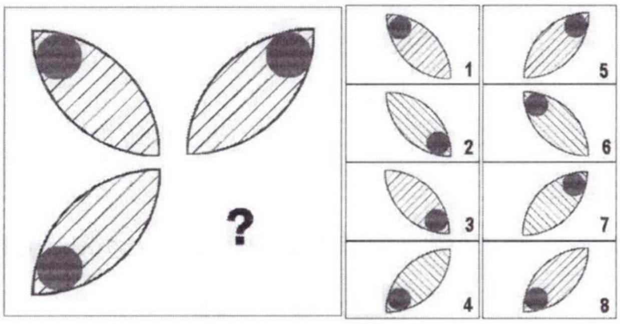
3.3.1.1. *Ukázka vyplněného pracovního listu*

Pracovní list pro 2. třídu

Jméno: Karolína

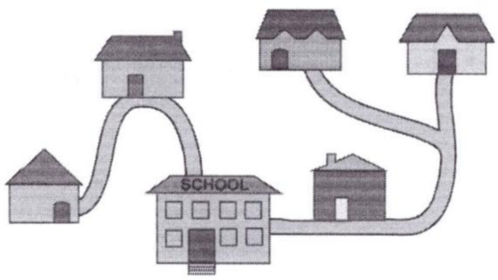
Základní škola: ZŠ 1

1. Místo otazníku doplň správný lístek z nabídky.



Řešení: 3

2. Na obrázku je pět domů pěti kamarádů a jejich škola. Škola je největší budovou na obrázku. Doris a Ali při cestě do školy prochází kolem Leova domu. Eva prochází kolem domu Chole. Který dům je Evy?

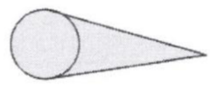


(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

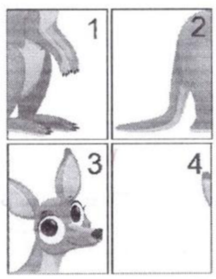
3. Před dvěma lety bylo Jackovi 8 let. Kolik let mu bude příští rok?

(A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12 (E) 13

4. Rovnoběžky se nikdy neprotnou a vždy zůstanou ve stejné vzdálenosti od sebe. Který tvar obsahuje rovnoběžky?

(A)  (B)  (C)  (D) 

5. Nela složila z těchto čtyř dílků klokana. Jak dílky uspořádala?



(A)

4	3
2	1

(B)

3	4
2	1

(C)

2	1
4	3

(D)

4	3
1	2

(E)

3	4
1	2

Moje hodnocení - vybarvi emotikonu podle toho, jak se ti pracovní list líbil:

líbil se  nelíbil se

Moje připomínky:

____

____

3.3.1.2. *Učitelské hodnocení a návrhy změn*

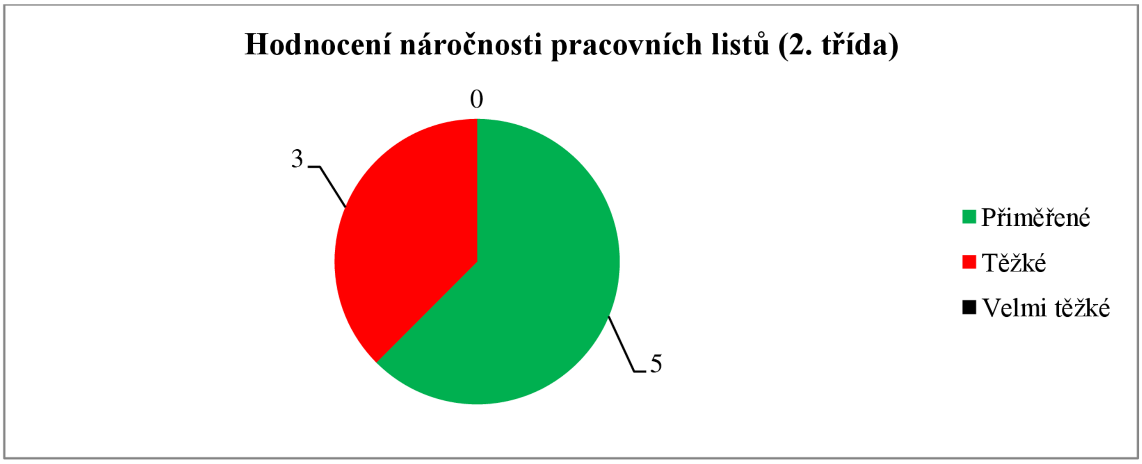
Pracovní list hodnotilo 8 učitelů. Před vypracováním úloh většina učitelů vysvětlila pojem rovnoběžky, protože toto učivo zatím neprobírali. Někteří učitelé celý list žákům předčítali.

Podle učitelů ke správnému řešení žáci dojdou pomocí dobrého logického uvažování. Je třeba číst s porozuměním a vše si uvědomit.

Nadpoloviční většina učitelů ohodnotila pracovní list jako přiměřený věku žáků. Přestože několik učitelů list ohodnotilo jako těžký, pracovní list nebude dále upravován, protože zadání úlohy 4 obsahuje definici rovnoběžky.

Připomínky a poznámky k úlohám:

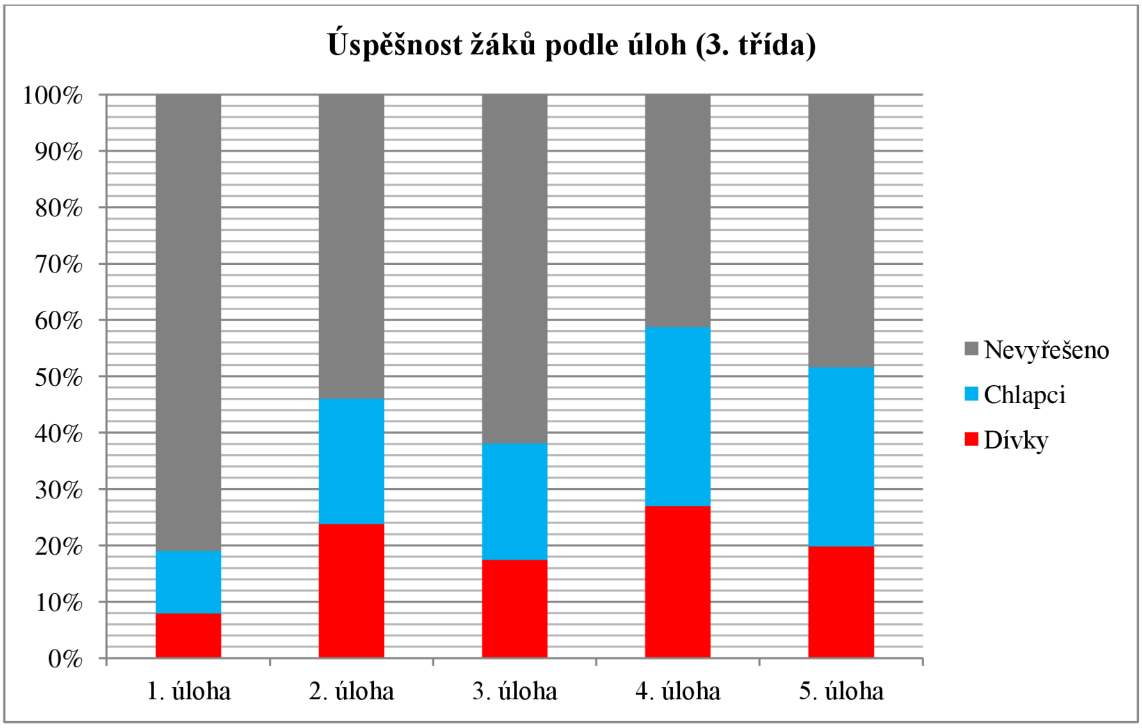
- Úloha 4 – V geometrii mají žáci zatím pouze bod, lomené, křivé a přímé čáry. S pojmem rovnoběžka se setkali poprvé.



Graf č. 4 Hodnocení náročnosti pracovních listů (2. třída)

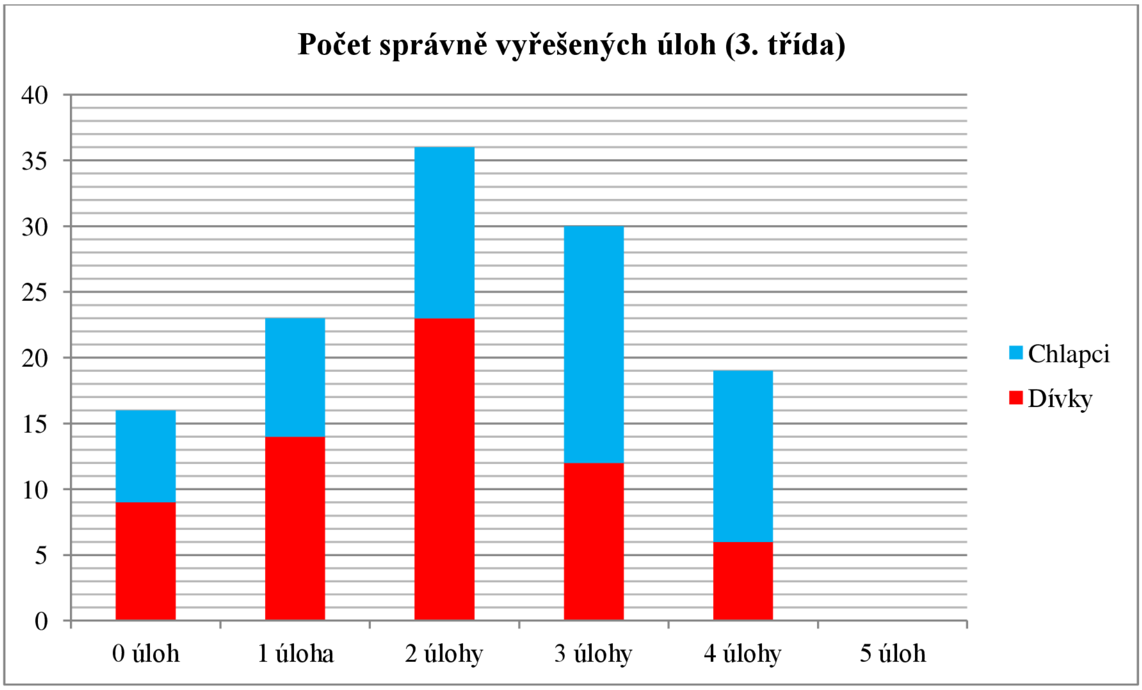
3.3.2. 3. třída – 126 žáků (65 dívek, 61 chlapců)

Z uvedených dat vyplývá, že žáci nejlépe porozuměli 4. úloze.



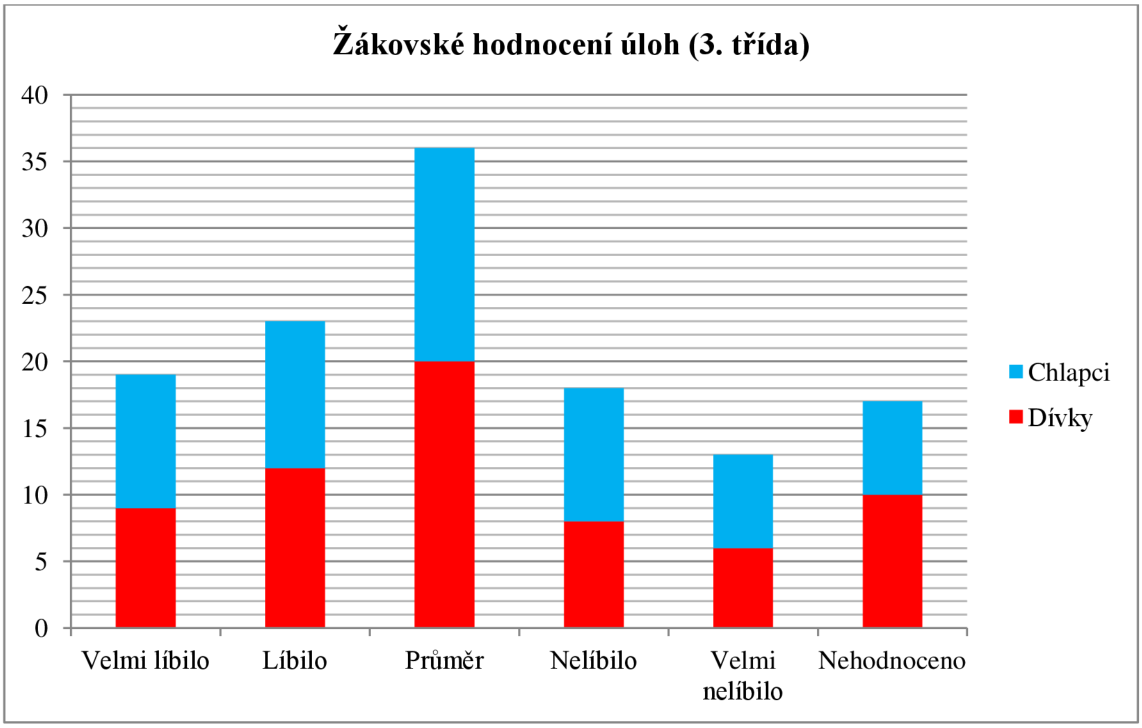
Graf č. 5 Úspěšnost žáků podle úloh (3. třída)

Celkově žáci 3. tříd vypočítali 261 úloh. Žádnému žákovi se nepodařilo vypočítat všechny úlohy. Žák v průměru dokázal vyřešit ≐ 2,07 úlohy.



Graf č. 6 Počet správně vyřešených úloh (3. třída)

13,5 % žáků pracovní list neohodnotilo. Většina žáků označila pracovní list jako průměr (29 %) – hodnocení 3.



Graf č. 7 Žákovské hodnocení úloh (3. třída)

Vybraná slovní hodnocení:

- „Nikomu bych to nedoporučoval."
- „Bylo to hrozný a zároveň dobrý."
- „Bylo to těžký. Polovinu věcí nechápu. Je to na třeťáka moc těžký."
- „Mně se to docela líbilo, ale aspoň jsem to zkusila, ale nevím, jestli to mám dobře."
- „Jsou tam věci, které jsme se neučili."
- „Bylo to těžké, ale nějak jsem to zvládla. Snad mám alespoň 1 správně."
- „Nebaví mě ani tohle. Mě totiž nebaví matika. To, co je podtrhnuté, tak to nechápu."
- „Dobrý den, na pracovním listě se mi nejvíc líbilo Pentominos a nejtěžší byla úloha 3. Děkuji a nashledanou."
- „Docela těžké, ale musíte hodně počítat."
- „Chtělo by to, aby to bylo trošku míň těžký. Tak pro 3., 2., 1. třídu."
- „Bylo to docela dobrý a taky to bylo střední utrpení."
- „Nevěděla jsem, co je středový kruh?"

3.3.2.1. Ukázka vyplněného pracovního listu

Pracovní list pro 3. třídu

Jméno: Marika

Základní škola: ZŠ 4

1. V restauraci je 5 stolů pro 4 osoby a 2 stoly pro 6 osob. Kolik lidí může sedět u těchto stolů, když třem z nich chybí jedna židle?

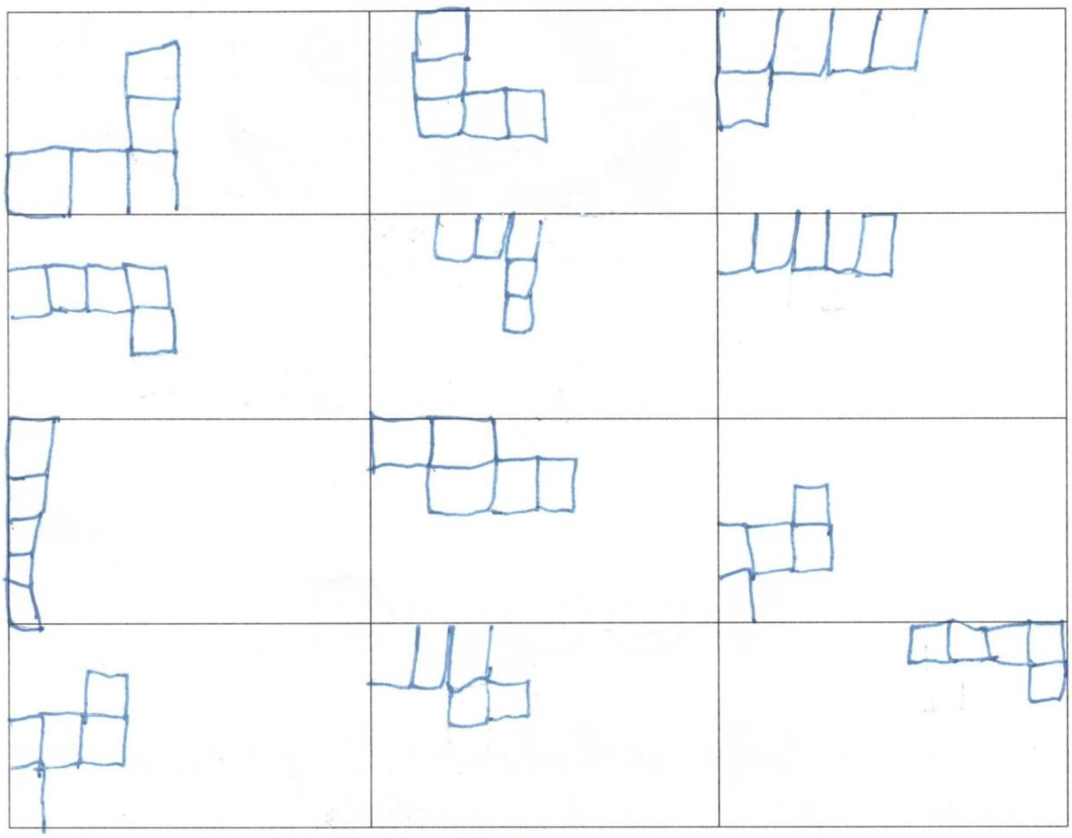
(A) 26 (B) 28 (C) 29 (D) 30 (E) 32

$5 \cdot 4 = 20$ $2 \cdot 6 = 12$

$32 - 3 = 29$ $20 + 12 = 32$

2. Pentominos se skládá z pěti čtverců stejné velikosti, které se nepřekrývají. Sousední čtverce leží proti sobě celou délkou strany. Otočené nebo zrcadlové útvary jsou považovány za stejné. Nakreslete alespoň dalších 8 různých pentominos do tabulky.

správně špatně



3. Který výraz dává sudý součet?

A) $31 + 18 + 20$

B) $22 + 24 + 36 + 19$

C) $12 + 14 + 17$

D) $12 + 14 + 55 + 33$

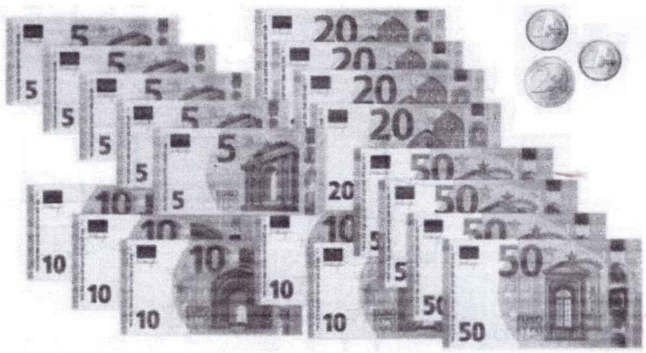
E) $10 + 20 + 57$

4. Do prázdných kroužků zapište čísla od 1 do 7 tak, aby byl výsledek výpočtu správný. Každé číslo je použito pouze jednou. Které číslo může být ve středovém kroužku?

$4 \xrightarrow{:2} 2 \xrightarrow{+5} 7 \xrightarrow{-1} 6 \xrightarrow{:2} 3 \xrightarrow{+2} 5 \xrightarrow{-4} 1$

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 6

5. Jaká je celková hodnota všech bankovek a mincí?



(A) 339 € (B) 344 € (C) 349 € (D) 355 € (E) 359 €

Moje hodnocení - vybarvi či zakroužkuj emotikonu podle toho, jak se ti pracovní list líbil:

líbil se  nelíbil se

Moje připomínky: Přišlo mi že těžký je Pentomino. Ale jinak se mi to líbilo. A bylo to docela jednoduchý.

3.3.2.2. *Učitelské hodnocení a návrhy změn*

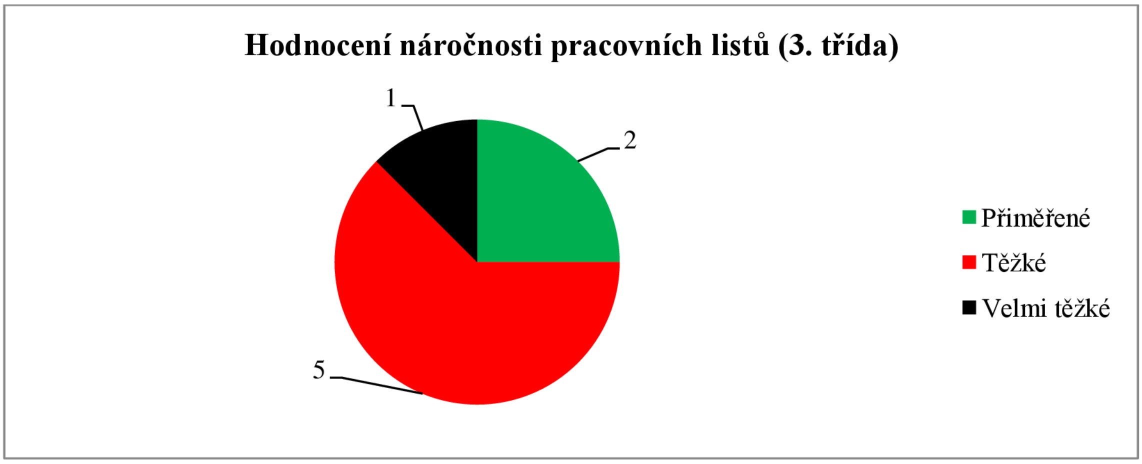
Pracovní list hodnotilo 8 učitelů. Mnoho učitelů napsalo, že v době zadávání pracovního listu neprobrali numeraci do 1000 a že běžně nepracují s pojmy sudý a lichý. Zatím počítají v oboru do 100, což je stále pro některé žáky složité. Počítání přes 100 nezvládnou všichni.

Dále učitelé uvedli, že je pracovní list náročný i na čtenářskou gramotnost a zadání je v některých cvičeních složitě napsané. Podle jedné paní učitelky je pracovní list na logiku spíše těžší. Jiný učitel má názor, že dnešní žáci jsou líní logicky přemýšlet, a tak pro ně pracovní list obtížný je.

Většina učitelů hodnotila pracovní list jako těžký. Z tohoto důvodu byl pracovní list upravován podle jejich připomínek.

Připomínky a poznámky k úlohám:

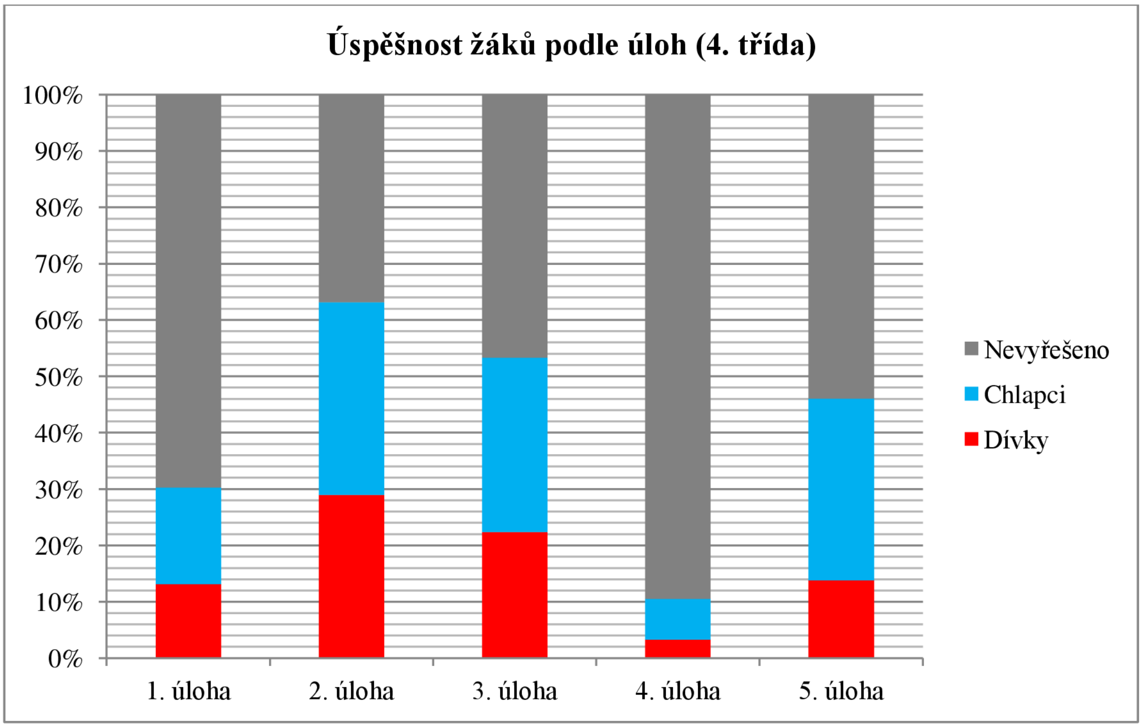
- Úloha 2 – Zjednodušit zadání.
- Úloha 3 – Pozměnit zadání: „Který výsledek je sudý?“
- Úloha 4 – Označit středový kroužek.



Graf č. 8 Hodnocení náročnosti pracovních listů (3. třída)

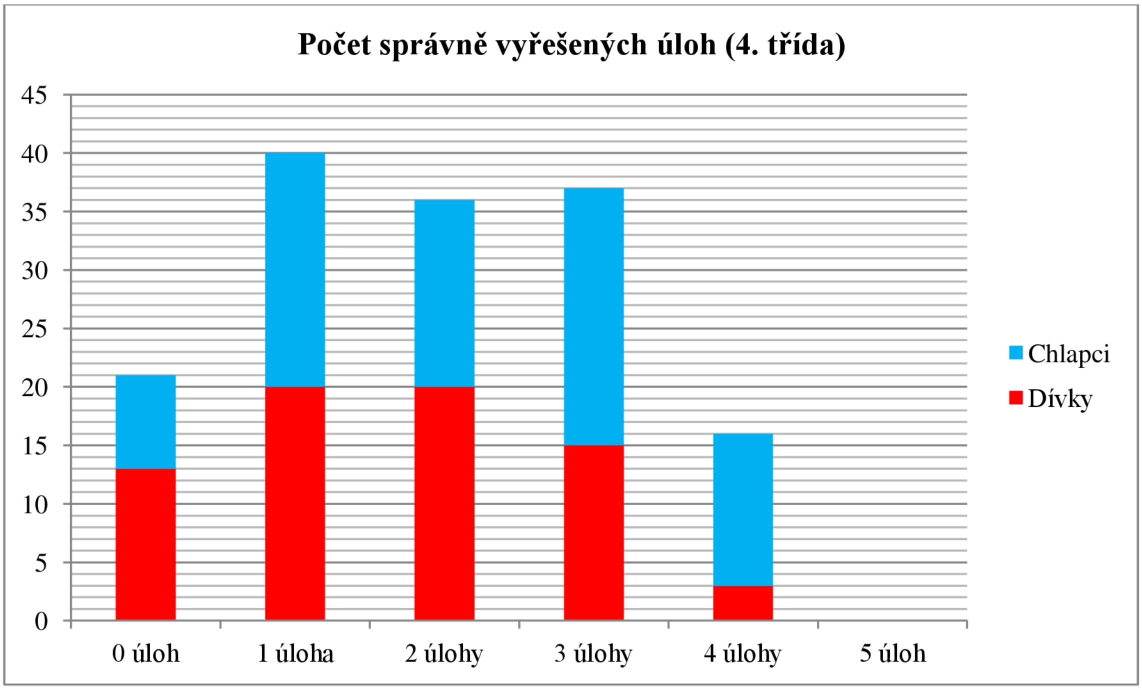
3.3.3. 4. třída – 152 žáků (74 dívek, 78 chlapců)

Z níže uvedených dat lze vyčíst, že byli žáci nejúspěšnější při řešení 2. a 3. úlohy.



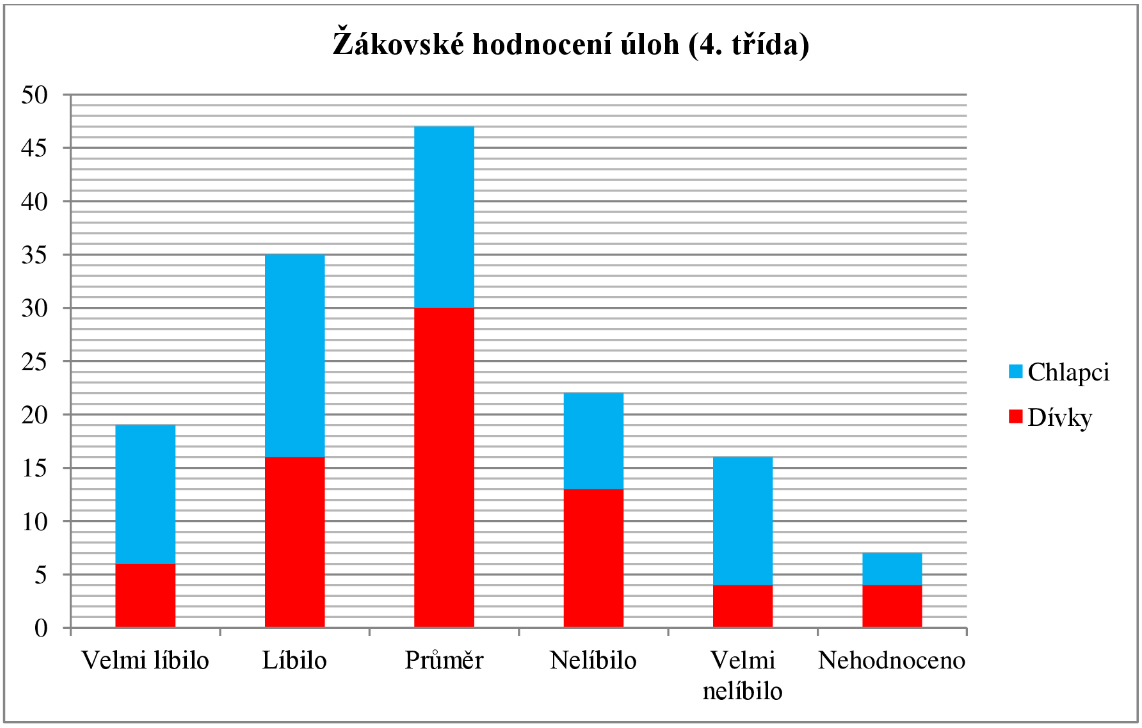
Graf č. 9 Úspěšnost žáků podle úloh (4. třída)

Celkově žáci 4. tříd vypočítali 287 úloh. Žádnému žákovi se nepodařilo vypočítat všechny úlohy. Žák v průměru dokázal vyřešit ≐ 2,19 úlohy.



Graf č. 10 Počet správně vyřešených úloh (4. třída)

4,6 % žáků pracovní list neohodnotilo. Většina žáků označila pracovní list jako průměr (31 %) – hodnocení 3.



Graf č. 11 Žákovské hodnocení úloh (4. třída)

Vybraná slovní hodnocení:

- „Je to příšerný, pro mě skoro nemožný. Jestli tohle má být na gymplu, tak tam fakt nejdu.“
- „Hodně mně to namáhalo mozek.“
- „Úloha 4 je hrozně těžká a já tomu pořád nerozumím.“
- „Mohlo by to být víc zábavnější.“
- „Je to dobré, bavilo mě to.“
- „Nerozuměla jsem tomu, nelíbilo se mi to, hrozně těžká slova.“
- „Bylo to moc fajn a zabavil jsem se u toho.“
- „Byla to blbost, nedávalo to smysl.“
- „Mně se to tedy docela líbilo. Ale ta 1 mě docela potrápila, ale byla dobrá.“
- „Nějaké úlohy jsem nechápala, ale není to špatné. Moc se mi líbila úloha 5.“
- „Proč, fuj, složité, ne!“
- „Napůl se mi to líbilo. Bylo to náročný.“
- „Moc mě to bavilo, ale úloha 4 je obsah a ten jsme se neučili, ale jinak super.“
- „Moc jsem nepochopil úlohu 4 a ty párky z úlohy 5 mi taky nešly.“

3.3.3.1. *Ukázka vyplněného pracovního listu*

Pracovní list pro 4. třídu

Jméno: adam

Základní škola: ZŠ2

1. V pokladničce máš 264 Kč. Suma je tvořena pouze českými mincemi (1 Kč, 2 Kč, 5 Kč, 10 Kč, 20 Kč, 50 Kč). Všech mincí máš stejný počet, kolik jich máš celkem?

2. V tabulce jsou zaznamenány nejvyšší hory kontinentů. Jaký je výškový rozdíl mezi nejnižší a nejvyšší zaznamenanou horou?

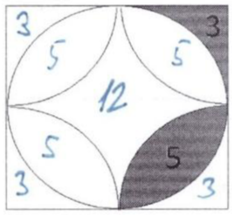
Kontinent	Hora	Výška (m n. m.)
Afrika	Kilimandžáro	5 895
Amerika	Aconcagua	6 902
Antarktida	Vinson Massif	5 140
Asie	Mount Everest	8 850
Austrálie	Mount Carstensz	4 887
Evropa	Mont Blanc	4 807

(A) 36 481 m (B) 13 657 m (C) 4 043 m (D) 3 963 m (E) 1 948 m

3. Ray chodí běhat každý druhý den. Pokud běžel poprvé minulý měsíc v pondělí, pak běžel podesáté minulý měsíc...

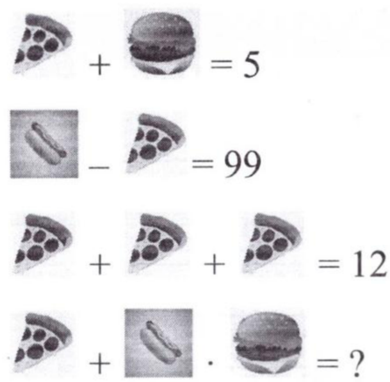
(A) v pondělí (B) v úterý (C) v pátek (D) v neděli

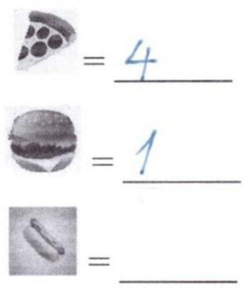
4. Určete obsah čtverce, jestliže víte, že vybarvené části mají obsah 3 a 5.



44

5. Vyřešte rébus.





Moje hodnocení - vybarvi či zakroužkuj emotikonu podle toho, jak se ti pracovní list líbil:

líbil se  nelíbil se

Moje připomínky:

je to příšerný pro mně je to skoro nemožný jestli tohle má bejt na gymplu tak tam fakt nejdu.

3.3.3.2. *Učitelské hodnocení a návrhy změn*

Pracovní list hodnotilo 9 učitelů. Někteří učitelé uvedli, že žáci nemají s řešením některých úloh zkušenosti a řeší je způsobem pokus–omyl (např. úloha 1 a 4), protože z učebnic matematiky jsou zvyklí na jiný způsob zadání úloh.

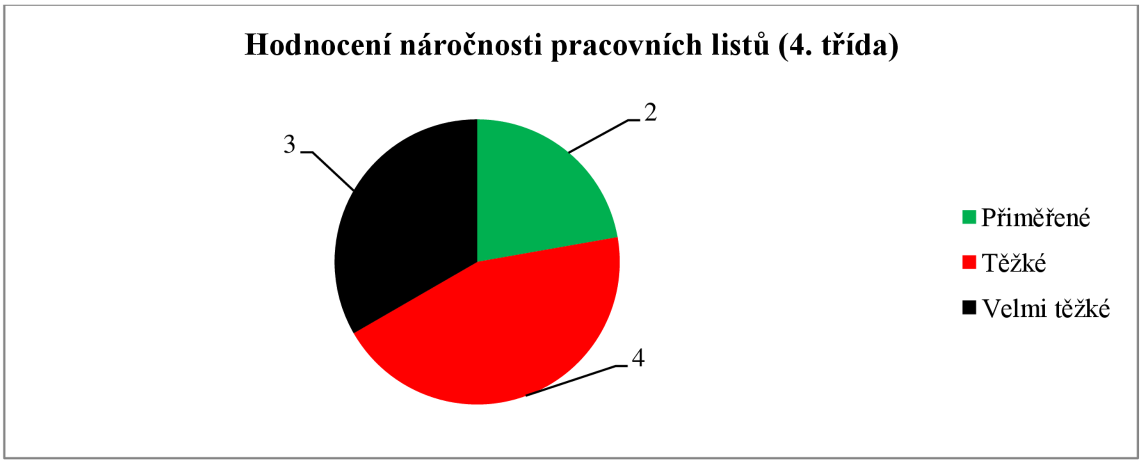
Většina učitelů zastává názor, že je pracovní list určen převážně nadaným žákům, protože pracovní list je zbytečně náročný a neodpovídá látce 4. třídy ZŠ. Žáci průměrní a podprůměrní mají problémy s řešením.

Učitelé dále zmiňovali, že žáky nejvíce bavila úloha 5 (rébus). Dále uvedli, že by bylo dobré zařadit úlohy s praktickými zkušenostmi (skládání stavebnic).

Třetina učitelů hodnotila pracovní list jako velmi těžký, více jak třetina jako těžký a méně jak třetina jako přiměřený. Proto byl pracovní list upravován podle jejich připomínek.

Připomínky a poznámky k úlohám:

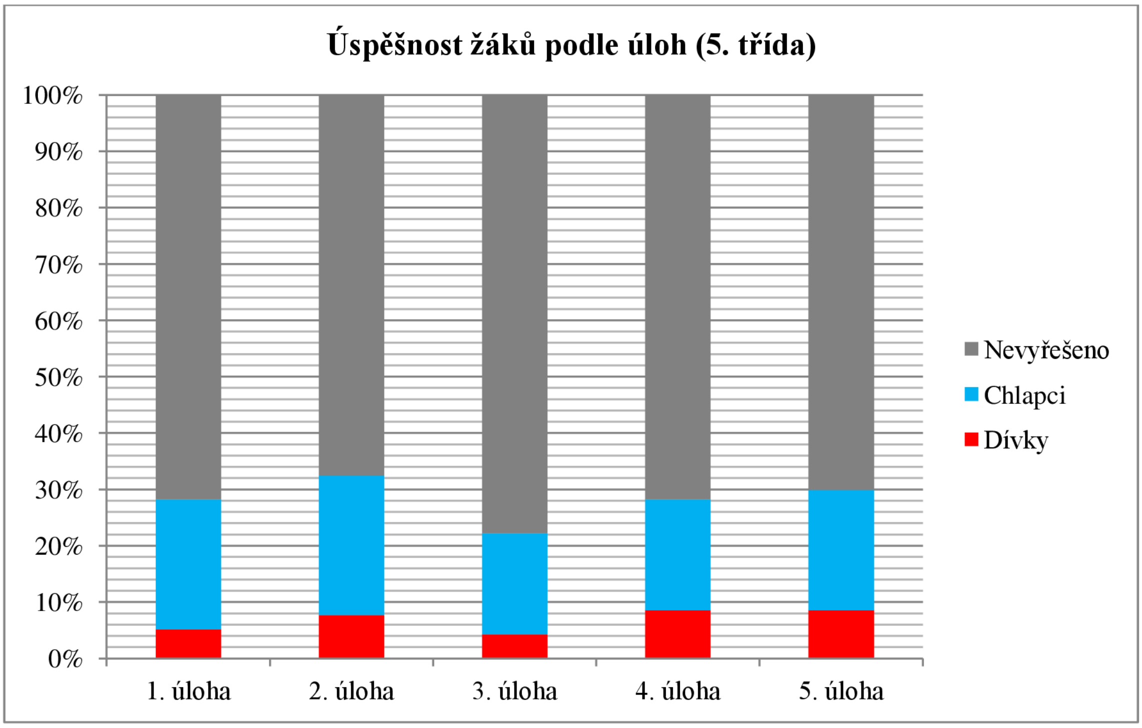
- Úloha 1 – Doplnit o manipulaci s papírovými mincemi.
- Úloha 3 – Odstranit ze zadání pojem „minulý měsíc“, který není potřeba.
- Úloha 4 – Žákům chybí představivost a nemají zkušenost s plošnými útvary. Je potřeba úlohu přeformulovat.



Graf č. 12 Hodnocení náročnosti pracovních listů (4. třída)

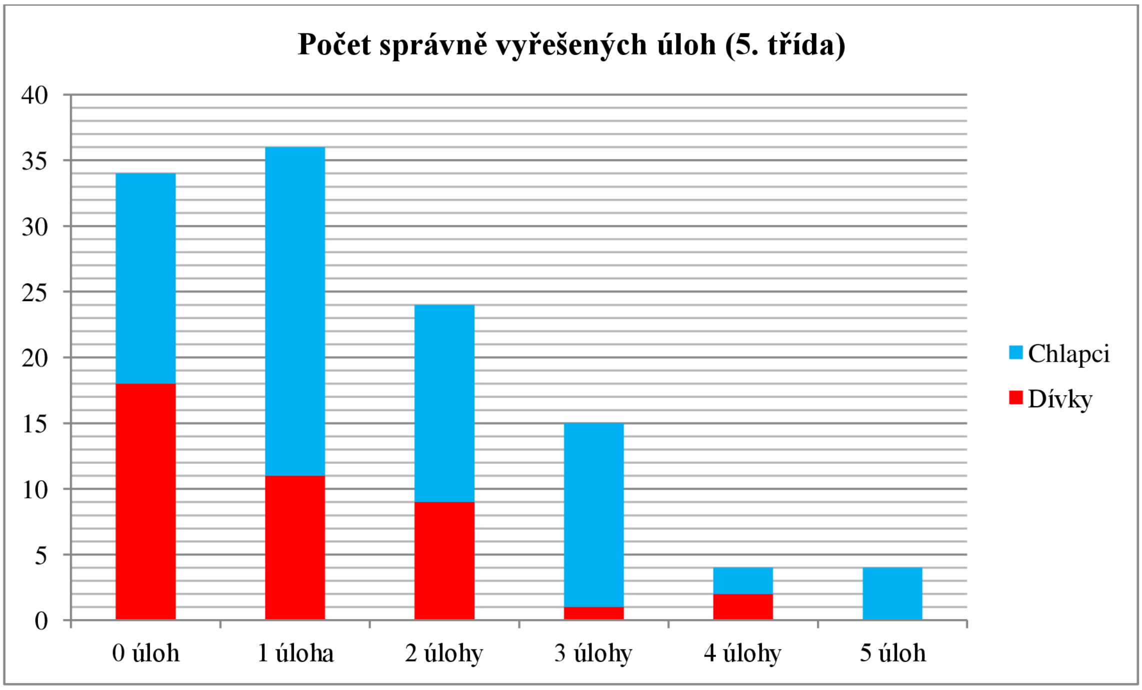
3.3.4. 5. třída – 117 žáků (41 dívek, 76 chlapců)

Z grafu lze vyčíst, že 1., 2., 4. a 5. úlohu vypočítalo přibližně 30 % žáků, tj. téměř každý třetí žák. 3. úlohu vypočítala asi čtvrtina žáků (25 %).



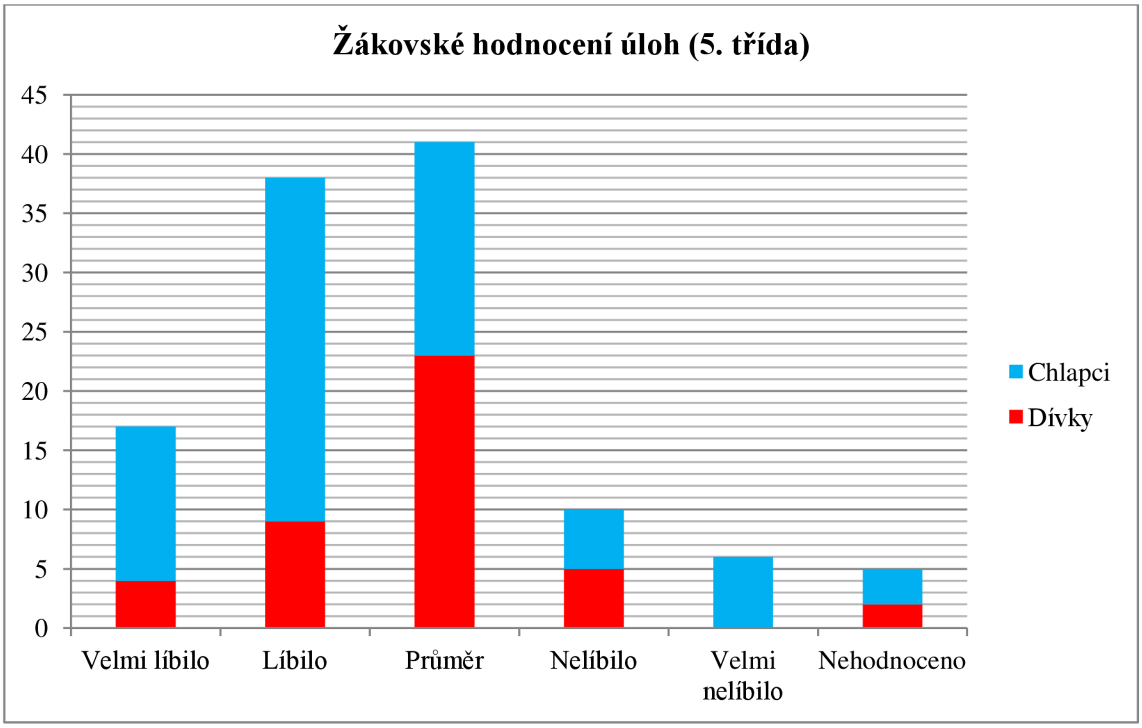
Graf č. 13 Úspěšnost žáků podle úloh (5. třída)

Celkově žáci 5. tříd vypočítali 165 úloh. Všechny úlohy vypočetli 4 žáci. Žák v průměru dokázal vyřešit ≐ 1,41 úlohy.



Graf č. 14 Počet správně vyřešených úloh (5. třída)

4,3 % žáků pracovní list neohodnotilo. Většina žáků označila pracovní list jako průměr (35 %) a líbil se (32 %) – hodnocení 2–.



Graf č. 15 Žákovské hodnocení úloh (5. třída)

Vybrané slovní hodnocení:

- „Bylo to dost záludné, ale líbilo se mi to. Ta pětka, ta mi dala zabrat."
- „Test se mi líbil. Nebyl ani moc těžký, ale zase ani moc lehký."
- „Pěkný test, ale někdy špatně pochopím zadání."
- „Nejhorší test na světě!"
- „Líbilo se mi to, popral jsem se s tím."
- „Nerozuměla jsem hadovi."
- „Od této doby nemám rád rýži."
- „Bylo to skvělé, takovéhle hlavolamy se mi líbí."
- „Trochu to nechápu, ale zkontroluju si to."
- „Nebudu to mít správně. Ani si nejsem jistá."
- „Mega super."
- „Bavilo mě to moc, ale chvíli jsem nevěděl."
- „Test je dobrý a i zábavný, ale mohlo by tu být více úloh."
- „Nevěděl jsem si rady s úlohou 5. Ale hodnocení: super, dobře vymyšlené."
- „Musel jsem konečně zapojit hlavu, test byl dobrý."

3.3.4.1. Ukázka vyplněného pracovního listu

Pracovní list pro 5. třídu

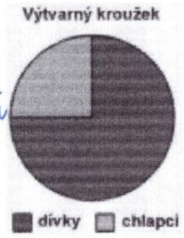
Jméno: Kryštof

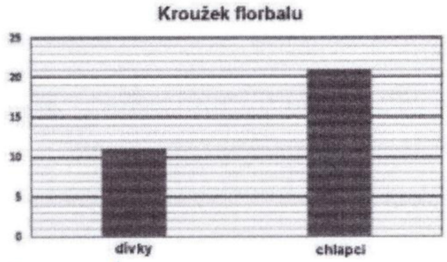
Základní škola: ZŠ3

---

1. Do výtvarného kroužku chodí 32 dětí. Stejný počet chodí i do kroužku florbalu. Zjistěte z grafů, o kolik chlapců více chodí na florbal než do výtvarného kroužku.

32 : 4 = 8 chlapci





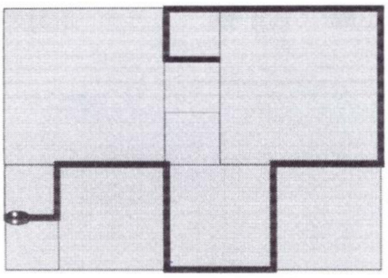
21 chlapci

21 - 8 = 13

Do kroužku florbalu chodí o 13 kluků víc.

2. Rodinu Potrových čekalo po příchodu na zahradu nepříjemné překvapení. Na verandě, která je vydlážděná čtvercovými dlaždicemi třech různých velikostí, ležel obrovský had. Každá z nejmenších dlaždic má obvod 80 cm. Jak dlouhý byl had?

21 · 20 = 0 · 42 · 420



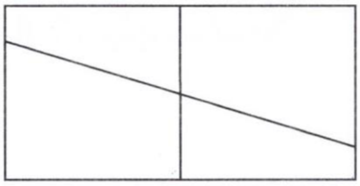
3 + 6 + 2 + 6 + 2 + 2 = 21

Had je dlouhý 420 cm.

3. Jestliže pětičlenná rodina sní 5 kg rýže za 5 týdnů, kolik rýže sní desetičlenná rodina za 10 týdnů?

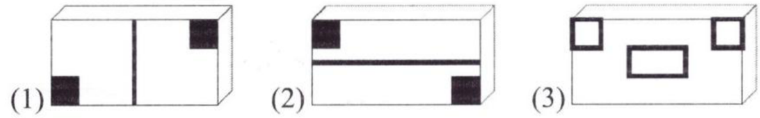
(A) 10 kg (B) 5 kg (C) 20 kg (D) 40 kg (E) 25 kg

4. Dillonovi spadlo zrcadlo na zem a rozlomilo se (viz obrázek). Kolik je na obrázku čtyřúhelníků?

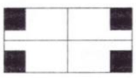
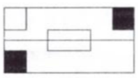
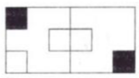
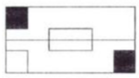


(A) 9 (B) 8 (C) 7 (D) 6

5. Lisa má 3 razítka. Jejich spodní strany jsou na obrázku.



Který z následujících otisků Lisa nemůže udělat, i když razítka zkombinuje?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

Moje hodnocení - vybarvi či zakroužkuj emotikonu podle toho, jak se ti pracovní list líbil:

líbil se  nelíbil se

Moje připomínky: Od této doby nemám rád myši.

3.3.4.2. *Učitelské hodnocení a návrhy změn*

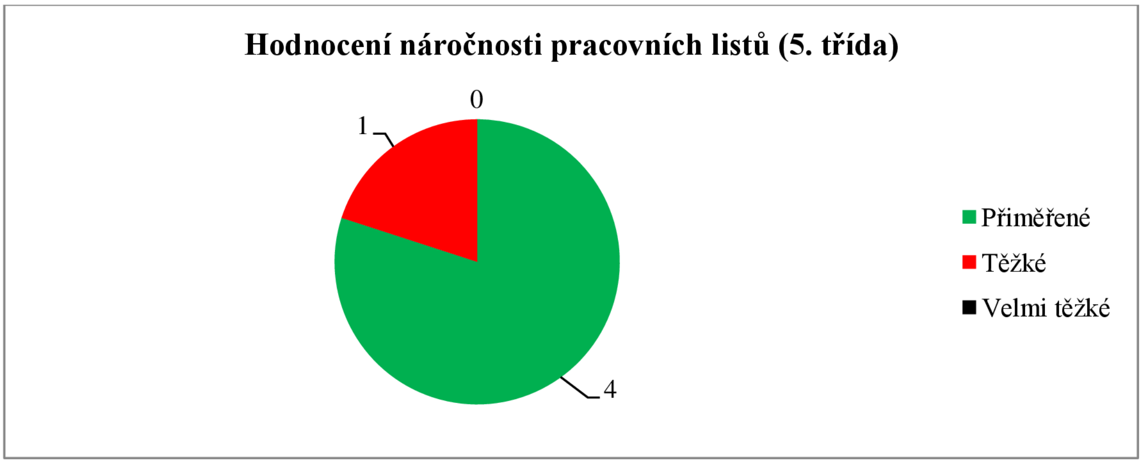
Pracovní list hodnotilo 5 ze 7 učitelů, kterým jsem dotazník dala. Podle učitelů byly pro většinu žáků úlohy ne úplně snadné. Integrovaní žáci (u nás dysfázie) vypočítat úlohy nezvládnou, ani když se jim zadání přečte. Ostatní žáci byli upozorněni, na co si mají dát pozor a trochu se zopakovali grafy a tabulky.

Jako obtížnější se učitelům jevily úlohy 3 a 5, protože jsou na představivost, kterou žáci tolik nepoužívají.

Většina dotazovaných učitelů ohodnotila pracovní list jako přiměřený. Sada úloh pro 5. třídu proto zůstala beze změn.

Připomínky k úlohám:

- Úloha 3 – malý chyták.



Graf č. 16 Hodnocení náročnosti pracovních listů (5. třída)

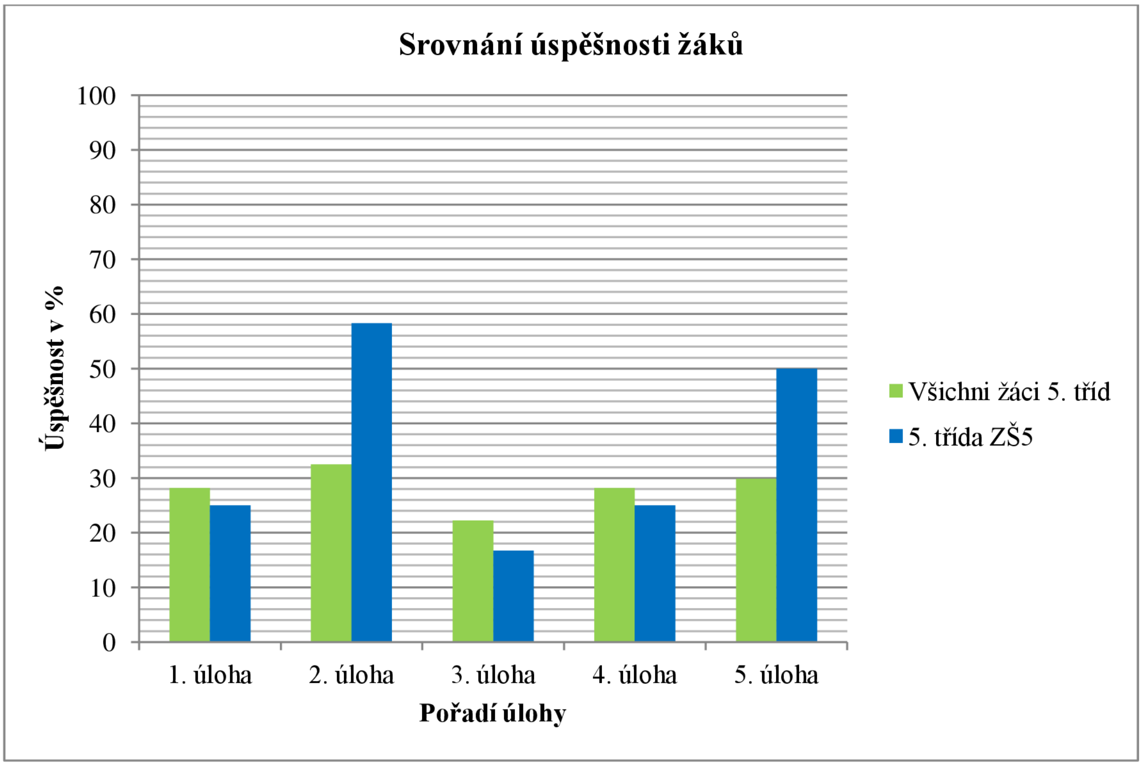
3.3.4.3. *Zadávání pracovního listu v 5. třídě (ZŠ5)*

Pracovní list jsem zadávala 6. prosince 2021. Přítomno bylo 12 žáků (5 dívek a 7 chlapců). Každý žák vypracoval úlohy samostatně. Většina žáků měla úlohy hotové asi za 25 minut.

Všichni přítomní žáci byli úspěšní – získali 1 a více bodů: 6 žáků vypočetlo 1 úlohu, 3 žáci 2 úlohy a 3 žáci 3 úlohy.

Celkem žáci ve třídě vypočetli 21 úloh. Průměrně tak žák vypočetl 1,75 úlohy. Celkový průměr je 1,41. Třída je proto o 0,34 úlohy nad průměrem zúčastněných 5. tříd.

Žáci 5. třídy ZŠ5 byli nadprůměrně úspěšní při řešení 2. a 5. úlohy.

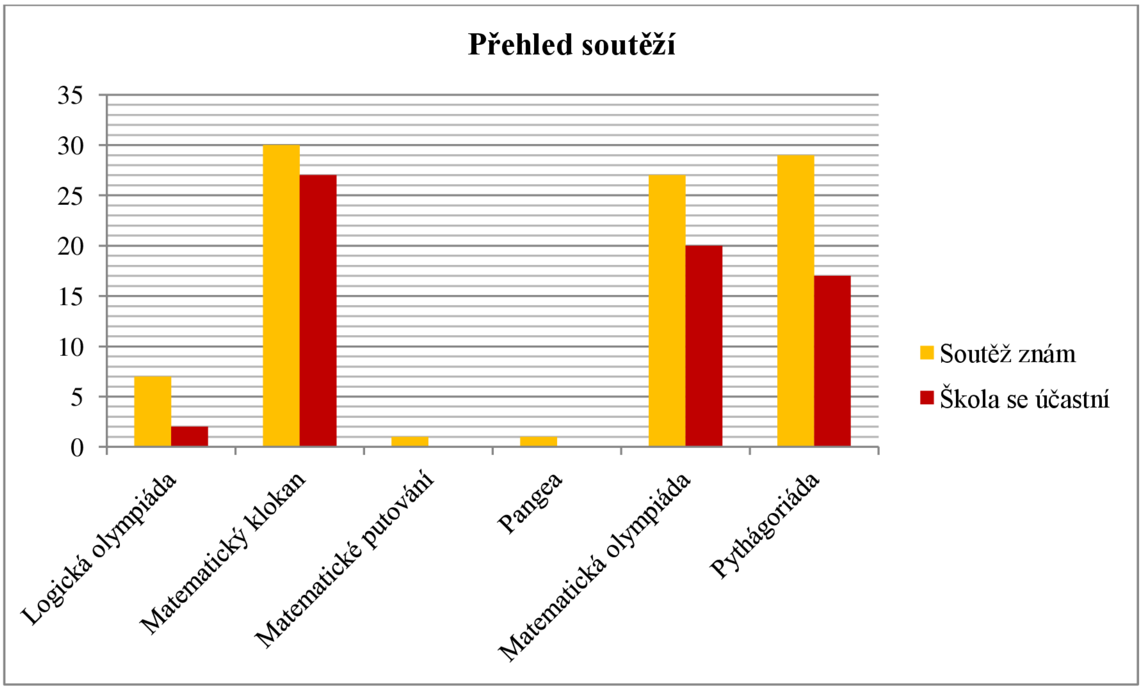


Graf č. 17 Srovnání úspěšnosti žáků

3.4. Evaluace dotazníku pro učitele

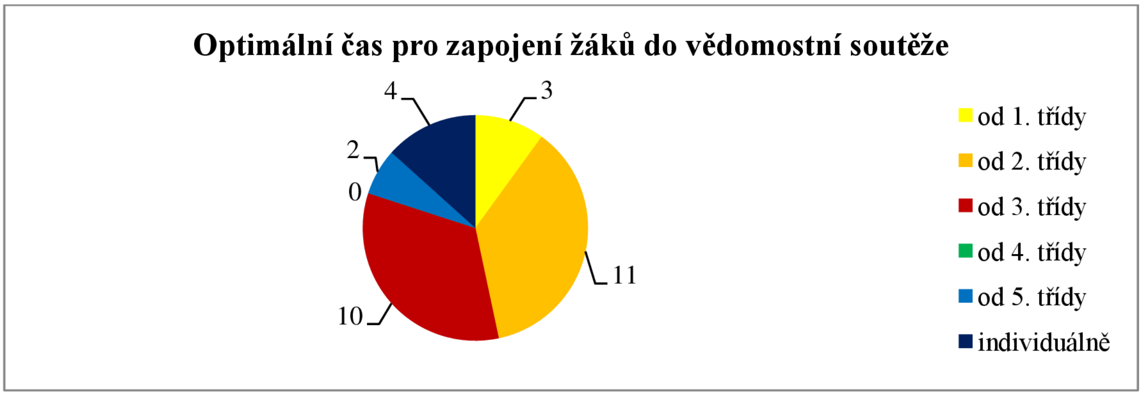
Připravený dotazník vyplnilo 30 učitelů. Dva učitelé z 5. třídy mi jej vrátili prázdný.

Většina učitelů zná soutěže Matematický klokan, Pythágoriáda a Matematická olympiáda. Představy učitelů, zda se jejich škola uvedených soutěží účastní, se liší. Podle získaných dat školy soutěží v Matematickém klokanu, Matematické olympiádě, Pythágoriádě a Logické olympiádě.



Graf č. 18 Přehled soutěží

Více než třetina učitelů se domnívá, že by se žáci do vědomostních soutěží měli zapojovat již od 2. třídy. Třetina zvažuje účast žáků v soutěžích od 3. třídy.



Graf č. 19 Optimální čas pro zapojení žáků do vědomostní soutěže

Dva učitelé uvedli, že znají i jiné soutěže:

- MASO (online matematická soutěž)
- OSMA (online soutěž)

3.5. Finální úpravy pracovních listů

Aby mohly být soubory úloh využity školami pro zjištění znalostí jejich žáků, byla úlohám přiřazena obtížnost podle procentuální úspěšností žáků v jednotlivých úlohách a komentářů učitelů.

Úlohy byly rozděleny tak, aby vycházelo, že 2 jsou lehké (za 1 bod), 1 střední (za 2 body) a 2 těžké (za 3 body). Celkově může žák získat 10 bodů. Pokud získá 5 bodů (50 %), je úspěšným řešitelem.

	1. úloha	2. úloha	3. úloha	4. úloha	5. úloha
2. třída	lehká (1)	těžká (3)	střední (2)	těžká (3)	lehká (1)
3. třída	lehká (1)	těžká (3)	těžká (3)	lehká (1)	střední (2)
4. třída	těžká (3)	lehká (1)	lehká (1)	těžká (3)	střední (2)
5. třída	střední (2)	těžká (3)	lehká (1)	lehká (1)	těžká (3)

Tabulka č. 19 Přiřazení obtížnosti

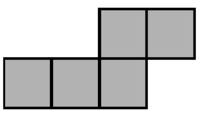
Soubory úloh pro 2. a 5. třídu jsem neupravovala, protože většina učitelů úlohy ohodnotila jako přiměřené věku žáků. Soubory úloh pro 3. a 4. třídu byly upraveny podle připomínek učitelů. Finální soubory úloh a pokyny k nim jsou umístěny v příloze.

3.5.1. Úprava zadání úloh pro 3. třídu

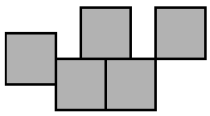
Učitelé měli následující připomínky a poznámky k úlohám – změny jsou zvýrazněny červeně:

- **Úloha 2** – Zjednodušit zadání.

Pentominos se skládá z pěti čtverců stejné velikosti, které se nepřekrývají (viz obrázky). ~~Sousední čtverce leží proti sobě celou délkou strany. Otočené nebo zrcadlové útvary jsou považovány za stejné.~~ Nakreslete alespoň dalších 8 různých pentominos ~~do tabulky~~.



správně



špatně

- **Úloha 3** – Pozměnit zadání: „Který výsledek je sudý?“

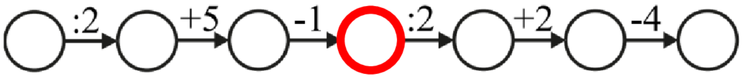
Který výsledek je sudý (končí na 0, 2, 4, 6, 8)?

A) $31 + 18 + 20$ B) $22 + 24 + 36 + 19$ C) $12 + 14 + 17$

D) $12 + 14 + 55 + 33$ E) $10 + 20 + 57$

- **Úloha 4** – Označit středový kroužek.

Do prázdných kroužků zapište čísla od 1 do 7 tak, aby ~~byl výsledek výpočtu správný.~~ každé číslo bylo použito pouze jednou. Které číslo může být ve středovém kroužku (zvýrazněn červeně)?



(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 6

3.5.2. Úprava zadání úloh pro 4. třídu

Učitelé měli následující připomínky a poznámky k úlohám – změny jsou zvýrazněny červeně:

- **Úloha 1** – Doplnit o manipulaci s mincemi.

V pokladničce máš 264 Kč. Suma je tvořena pouze českými mincemi (1 Kč, 2 Kč, 5 Kč, 10 Kč, 20 Kč, 50 Kč). Všech mincí máš stejný počet, kolik jich máš celkem?

Celkem:

______ ______ ______ ______ ______ ______ ______

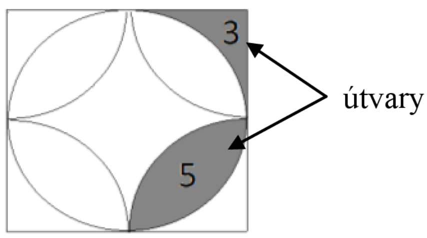
- **Úloha 3** – Odstranit ze zadání pojem „minulý měsíc“, který není potřeba.

Ray chodí běhat každý druhý den. Pokud běžel poprvé ~~minulý měsíc~~ v pondělí, pak běžel podesáté ~~minulý měsíc~~...

(A) v pondělí (B) v úterý (C) v pátek (D) v neděli

- **Úloha 4** – Žákům chybí představivost a nemají zkušenost s plošnými útvary. Je potřeba úlohu přeformulovat.

Určete obsah čtverce, tj. rozdělte čtverec na útvary a sečtěte jejich hodnoty. ~~jestliže víte, že~~ Zvýrazněné části mají hodnoty 3 a 5.



4. Závěr

Cílem diplomové práce je vytvoření materiálu, který bude sloužit učitelům na 1. stupni ZŠ jako pomůcka nejen pro podnícení zájmu o matematiku, ale i k dalšímu rozvoji matematických schopností nejmladších žáků základní školy.

Psaní diplomové práce mě určitě posunulo v přípravě na moji budoucí profesi učitele 1. stupně. Okrajově jsem se seznámila se školstvím v sousedních a některých anglofonních zemích. Zároveň jsem se setkala s dalšími různými přístupy k výuce matematiky na 1. stupni.

Během psaní teoretické části práce jsem zjistila, že většina matematických soutěží je placená. Vzhledem k tomu, že většina tuzemských soutěží je hrazená MŠMT, měli bychom být vděční, že to tak je.

Ze všech vybraných soutěží mě nejvíce oslovila polská matematická soutěž KOMA svým nevšedním konceptem. V budoucnu jistě koncept soutěže (přednáška, na kterou bezprostředně navazuje test) v praxi využiji.

4.1. Srovnání soutěží

V teoretické části je rozebráno 21 různých soutěží (soutěže se stejným názvem započítáváme právě jednou), z toho 4 se konají mezinárodně (Matematický klokan, Matematická olympiáda, Pangea a Bolyai). Mezinárodní matematická soutěž Matematický klokan se koná ve všech vybraných zemích.

Celkově je 5 soutěží, které mají kategorii určenou pro 1. třídu, 7 pro 2. třídu, 18 pro 3. třídu, 28 pro 4. třídu a 35 pro 5. třídu.

	Počet soutěží	Z toho určených pro				
		1. třídu	2. třídu	3. třídu	4. třídu	5. třídu
Česká republika	6	1	2	2	4	6
Německo	6	0	0	4	5	6
Rakousko	4	0	0	3	4	4
Slovensko	7	1	1	1	3	7
Polsko	5	1	2	3	5	5
USA	5	2	2	3	5	5
Austrálie	2	0	0	2	2	2

Tabulka č. 20 Přehled soutěží

Některé úlohy ze soutěží jsou určeny pro více tříd. Úlohy ze soutěží jsou buď s výběrem z několika odpovědí či jsou otevřené. V případě otevřených úloh je očekáváno, že žák napíše své řešení tak, aby se dal sledovat jeho myšlenkový postup.

Z celkových 52 úloh je 22 otevřených a 30 uzavřených. V 1. – 4. třídě se nejčastěji objevují uzavřené úlohy, v 5. třídě je to naopak.

	Celkem úloh	Z toho úloh	
		otevřených	uzavřených
1. třída	4	1	3
2. třída	5	1	4
3. třída	9	3	6
4. třída	20	8	12
5. třída	26	18	8

Tabulka č. 21 Typy úloh

Úlohy se dále mohou rozdělit na logické, aritmetické a geometrické. Většinou se jedná o úlohy logické.

	Celkem úloh	Z toho úloh		
		logických	aritmetických	geometrických
1. třída	4	4	0	0
2. třída	5	3	1	1
3. třída	9	7	3	0
4. třída	20	10	8	2
5. třída	26	15	3	9

Tabulka č. 22 Zaměření úloh

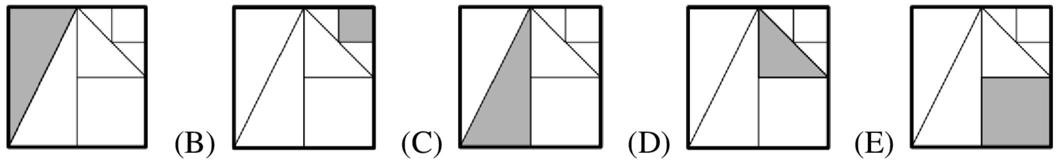
Obtížnost některých úloh je označena body (Matematický klokan – 3, 4 a 5 bodů za úlohy) nebo slovně (Matematické putování – lehká, středně těžká a těžká úloha). Náročnost všech úloh je úměrná věku žáků.

4.2. Podobná zadání

Během vyhledávání ukázkových úloh z mezinárodních soutěží jsem několikrát našla podobné úlohy, které se však částečně lišily.

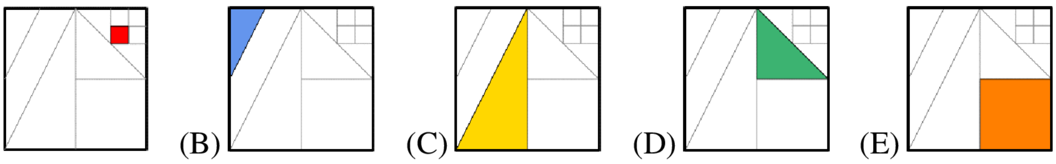
Jako příklad uvádím úlohu, kterou jsem našla v německé a americké verzi soutěže Matematický klokan. Obě verze byly uvedeny v kategorii pro 5. a 6. třídu a byly za 3 body:

Německo: Na jednom z následujících obrázků je jedna osmina plochy velkého čtverce zbarvena šedě. Ve kterém?



(A) (B) (C) (D) (E)

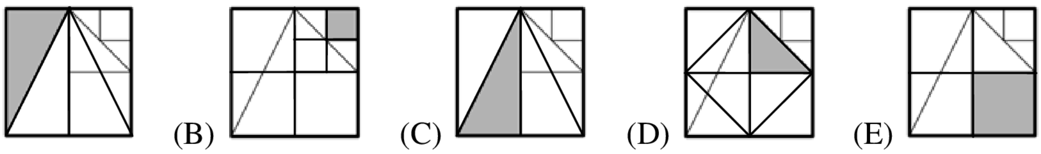
USA: Uvnitř čtverce jsou nakresleny úsečky, které jsou nakresleny buď z vrcholů nebo ze středů ostatních úseček. Vybarvili jsme $\frac{1}{8}$ původního čtverce. O který útvar se jedná?



(A) (B) (C) (D) (E)

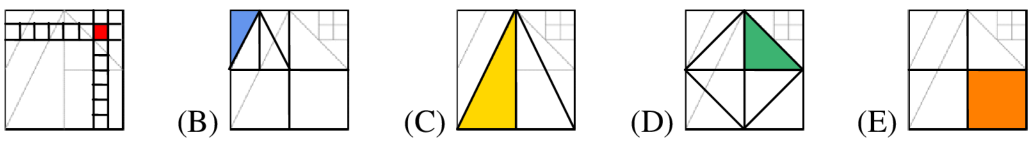
Řešení:

Německo:



(A) (B) (C) (D) (E)

USA:



(A) (B) (C) (D) (E)

Poznámka: Správné řešení je v obou případech (D).

Německá verze je lehčí, protože zde žák uvažuje nejvýše šestnáctinu původního čtverce a vysvětlení úlohy je proto jednodušší. V americké verzi nalézáme menší části a úloha je tak náročnější. Německou verzi bych proto zařadila do 5. třídy a americkou do 6. třídy.

5. Použitá literatura a zdroje

1. ADAM-RIES-WETTBEWERB. Informace. *Adamries.cz* [Online] 2021. [Citace: 27. Září 2021.] http://www.adamries.cz/info.htm

2. ALFIK MATEMATICZNY. 2021. Alfik matematiczny. *Jersz.pl* [Online] 2021. [Citace: 7. Listopad 2021.] https://jersz.pl/konkurs/alfik-matematyczny/

3. AMC. 2021. Challenge Practice Problems. *Australian Mathematics competition*. [Online] 2021. [Citace: 4. Červenec 2021.] https://www.amt.edu.au/free-amc-problems

4. AMC. 2021. Kangourou sans Frontières. *Australian Mathematics competition*. [Online] 2021. [Citace: 4. Červenec 2021.] https://www.amt.edu.au/australian-mathematics-competition/kangourou-sans-frontieres-ksf-2021

5. BEESTAR. 2003. Introduction. *Beestar National Competition*. [Online] 2021. [Citace: 30. Červen 2021.] https://www.beestar.org/exam?cmd=natl_cp&type=intro

6. BOLYAITEAM. 2021. Internationaler Mathematik Teamwettbewerb "Bolyai". *Bolyaiteam.at* [Online] 2021. [Citace: 7. Listopad 2021.] https://www.bolyaiteam.at/

7. BOLYAITEAM. 2021. Internationaler Mathematik Teamwettbewerb "Bolyai". *Bolyaiteam.de* [Online] 2021. [Citace: 7. Listopad 2021.] https://www.bolyaiteam.de/

8. ČADEK, Jan. 2019. Pravidla. *Matematické putování*. [Online] 2019. [Citace: 3. Červenec 2021.] https://mdisk.pedf.cuni.cz/Putovani/pravidla2019.html

9. FUNDACJA MATEMATYKÓW WROCŁAWSKICH. 2021. Konkurs Matematiczny KOMA. *Instytut Matematyczny.* [Online] 2021. [Citace: 7. Listopad 2021.] http://www.fmw.uni.wroc.pl/koma/konkurs-matematyczny-koma

10. FUNDACJA MATEMATYKÓW WROCŁAWSKICH. 2021. Maraton matematyczny. *Instytut Matematyczny.* [Online] 2021. [Citace: 7. Listopad 2021.] http://www.fmw.uni.wroc.pl/dla-uczni%C3%B3w/maraton-matematyczny/maraton-matematyczny

11. KANGUR. 2021. Zasady i cel Konkursu. *Międzynarodowy Konkurs Kangur Matematyczny.* [Online] 2021. [Citace: 12. Listopad 2021.] https://www.kangur-mat.pl/zasady.php

12. KÄNGURU DER MATHEMATIK. 2021. Känguru der Mathematik. *Kaengru.de* [Online] 2021. [Citace: 1. Říjen 2021.] https://www.mathe-kaenguru.de/

13. KÄNGURU DER MATHEMATIK. 2021. Über den Wettbewerb. *Kaengru.at* [Online] 2021. [Citace: 1. Říjen 2021.] https://www.kaenguru.at/verein.html

14. MAKS. 2021. O Súťaži. *Maks.sk*. [Online] 2021. [Citace: 30. Září 2021.] https://maks.sk/pravidla/

15. MALYNÁR. 2021. Pravidla. *Malynar.strom.sk.* [Online] 2021. [Citace: 30. Září 2021.] https://malynar.strom.sk/sk/pravidla/

16. MAMUT. Pravidlá mamutu. *Malynar.strom.sk.* [Online] 2021. [Citace: 30. Září 2021.] https://malynar.strom.sk/sk/mamut/pravidla/

17. MATEMATICKÝ KLOKAN. 2021. Klokan test pro 1. ročník. *Nagyova.clanweb.eu* [Online] 2021. [Citace: 30. Září 2021.] http://nagyova.clanweb.eu/wp-content/uploads/2016/02/Klokan-testy_ZS1-rocnik.pdf

18. MATEMATICKÝ KLOKAN. 2021. Pravidlá súťaže. *Matematický klokan.sk* [Online] 2021. [Citace: 30. Září 2021.] https://matematickyklokan.sk/o-sutazi/pravidla-sutaze/

19. MATEMATIKA.CZ. 2003. Trojúhelník. *Matematika.cz*. [Online] 2003. [Citace: 2. Červenec 2021.] https://www.matweb.cz/popis-trojuhelniku

20. MATH KANGAROO. 2003. Rules. *Math Kangaroo USA*. [Online] 2013. [Citace: 30. Červen 2021.] https://www.mathkangaroo.org/mk/rules.html

21. MATH LEAGUE. 2008. Contest information. *Mathleague.com* [Online] 2008. [Citace: 26. Září 2021.] https://www.mathleague.com/index.php/annualcontestinformation

22. MATHEMATICA. 2021. Mathematica. *Mathematica.ca* [Online] 2021. [Citace: 25. Září 2021.] http://mathematica.ca/eng/

23. MATHEMATIK OLYMPIADEN. 2001. Olympiaden - Überblick. *Mathematik-olympiaden.de* [Online] 2001. [Citace: 4. Červenec 2021.] https://www.mathematik-olympiaden.de/moev/index.php/olympiaden/teilnahme

24. MENSA. 2020. Pravidla soutěže. *Logická olympiáda*. [Online] 2020. [Citace: 30. Červen 2021.] https://www.logickaolympiada.cz/userfiles/pravidla/2020/Logick%C3%A1%20olympi%C3%A1da%202020%20pravidla(1).pdf

25. MO. 2008/2009. 58. ročník. *Matematická olympiáda.* [Online] 2008/2009. [Citace: 1. Červenec 2021.] http://www.matematickaolympiada.cz/cs/olympiada-pro-zakladni-skoly/58-rocnik-08-09

26. MO. 2016/2017. 66. ročník. *Matematická olympiáda.* [Online] 2016/2017. [Citace: 30. Červen 2021.] http://www.matematickaolympiada.cz/cs/olympiada-pro-zakladni-skoly/66-rocnik-16-17

27. MOEMS. 2021. Program description. *Moems.com* [Online] 2021. [Citace: 26. Září 2021.] https://www.moems.org/program.htm

28. MŠMT. 2011. Doporučené učební osnovy. *Rvp.cz* [Online] 2021. [Citace: 28. Říjen 2021.] http://www.vuppraha.rvp.cz/wp-content/uploads/2011/03/Doporucene-ucebni-osnovy-predmetu-CJL-AJ-a-M-pro-zakladni-skolu.pdf

29. NOCAR, David. 2010. Informace o soutěži. *Matematický klokan*. [Online] 2010. [Citace: 30. Červen 2021.] https://matematickyklokan.net/index.php/o-soutezi/informace-o-soutezi

30. NUV. 2021. RVP ZV 2021. *Národní ústav pro vzdělávání*. [Online] 2021. [Citace: 28. Říjen 2021.] http://www.nuv.cz/file/4982/

31. PANGEA. 2020. Pravidla matematické soutěže Pangea. *Pangea*. [Online] 2020. [Citace: 30. Červen 2021.] https://www.pangeasoutez.cz/files/public/rules.pdf

32. PANGEA. 2021. Pangea international. *Pangea-maths.org*. [Online] 2021. [Citace: 28. Říjen 2021.] https://www.pangea-maths.org/pangea-international/

33. PANGEA-WETTBEWERB. 2021. Pangea Mathematik wettbewerb. *Pangea-wettbewerb.at* [Online] 2021. [Citace: 27. Září 2021.] https://www.pangea-wettbewerb.at/privacy-policy/

34. PANGEA-WETTBEWERB. 2021. Pangea Philosophie und Ziele. *Pangea-wettbewerb.de* [Online] 2021. [Citace: 27. Září 2021.] https://pangea-wettbewerb.de/pangea-philosophie-und-ziele/

35. PENSION-KRAUS. 2022. Tipy na výlet. *Pension-kraus.cz* [Online] 2022. [Citace: 5. Březen 2022.] https://www.pension-kraus.cz/images/tipy-na-vylet/zamek-litomysl1.jpg

36. PIKOMAT. 2021. Pokyny. *Pikomat.sk.* [Online] 2021. [Citace: 1. Říjen 2021.] https://www.pikomat.sk/s/pokyny

37. POKAL DES REKTORS. 2021. Mathematischer Wettbewerb der Klassen 4 und 5. *Mathematik.uni-rostock.de* [Online] 2021. [Citace: 26. Září 2021.] https://www.mathematik.uni-rostock.de/struktur/professuren-apl-prof/didaktik-der-mathematik/angebote-und-informationen-fuer-lehrerinnen-und-schuelerinnen/pokal-des-rektors/

38. PYTHAGORIÁDA. 2018/2019. Zadání Pythagoriády. *Portál talentovaní.cz.* [Online] 2018/2019. [Citace: 1. Červenec 2021.] https://www.talentovani.cz/souteze/pythagoriada/archive

39. RIESKY. 2021. Pravidlá. *Riesky.sk.* [Online] 2021. [Citace: 1. Říjen 2021.] https://riesky.sk/pravidla/

40. SHUTTERSTOCK. 2021. Emotion feedback. *Shutterstock.com* [Online] 2021. [Citace: 7. Listopad 2021.] https://image.shutterstock.com/image-vector/rating-satisfaction-feedback-form-emotions-260nw-1037095897.jpg

41. SKMO. 2021. Matematická olympiáda. *Oficiálna stránka Slovenskej komisie Matematickej olympiády.* [Online] 2021. [Citace: 1. Červenec 2021.] https://skmo.sk/

42. URBAN, Michal. 2016. Organizace MO. *Matematická olympiáda.* [Online] 1. Srpen 2016. [Citace: 29. Červen 2021.] http://www.matematickaolympiada.cz/media/41005/orgradmo.pdf.

43. URBAN, Michal. 2017. Organizační řád Pythagoriády. *Portál talentovaní.cz.* [Online] 1. Srpen 2017. [Citace: 29. Červen 2021.] https://www.talentovani.cz/souteze/pythagoriada

44. WIKIPEDIA.ORG. 2021. Koruna česká. Wikipedia.org. [Online] 2021. [Citace: 26. Prosince 2021.] https://cs.wikipedia.org/wiki/Koruna_%C4%8Desk%C3%A1

45. WROCŁAWSKI PORTAL MATEMATYCZNY. 2021 Pangea. *Matematyka.wroc.pl* [Online] 2021. [Citace: 12. Listopad 2021.] http://www.matematyka.wroc.pl/konkursy/pangea

46. ZAHLENJAGD. 2019. Jagd auf Zahlen und Figuren. *Zahlenjagd.at* [Online] 20. Listopad 2019. [Citace: 7. Listopad 2021.] https://www.zahlenjagd.at/ausstellung2021.html#wett

47. ZŠ A MŠ NA BERÁNKU. 2020. Matematický klokan Cvrček 2020. *Matematický klokan*. [Online] 16. Listopad 2020. [Citace: 1. Červenec 2021.] http://www.naberanku.cz/uploads/souteze/mk-cvrcek-2020.pdf

48. ZŠ STVORLISTOK. 2021. Klokan testy. *Examtesting.sk* [Online] 2021. [Citace: 30. Září 2021.] http://www.examtesting.sk/fileadmin/template/main/klokan/testy/pdf/Klokanko_4.pdf

6. Seznam obrázků, tabulek, grafů a zkratek

6.1. Seznam obrázků

6.2. Seznam tabulek

6.3. Seznam grafů

6.4. Seznam zkratek

MO	Matematická olympiáda
MŠMT	Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy
RVP ZV	Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání
RVP	Rámcové vzdělávací programy
UNESCO	The United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization (Organizace OSN pro vzdělání, vědu a kulturu)
USA	United States of America (Spojené státy americké)
ZŠ	Základní škola

7. Přílohy

Příloha č. 1: Soubor úloh pro 2. třídu

Časový limit: 45 min

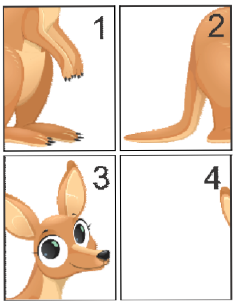
Pomůcky: psací potřeby a vlastní hlava

Hranice úspěšnosti: 5 bodů (50 %)

Jméno:____

---

1. Úloha za 1 bod (lehká): Nela složila z těchto čtyř dílků klokana. Jak dílky uspořádala?



(A)

4	3
2	1

(B)

3	4
2	1

(C)

2	1
4	3

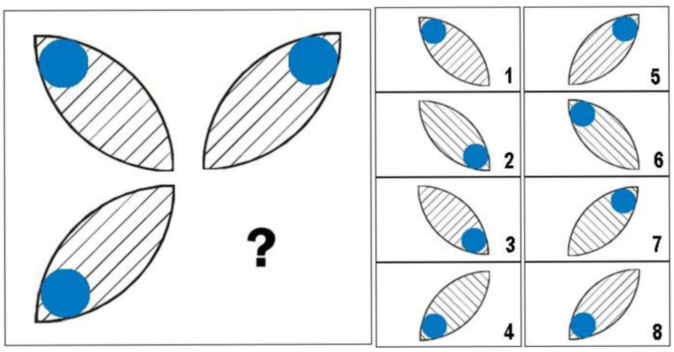
(D)

4	3
1	2

(E)

3	4
1	2

2. Úloha za 1 bod (lehká): Místo otazníku doplň správný lístek z nabídky.

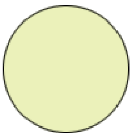
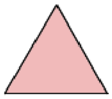
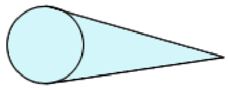


Řešení: ____________________________

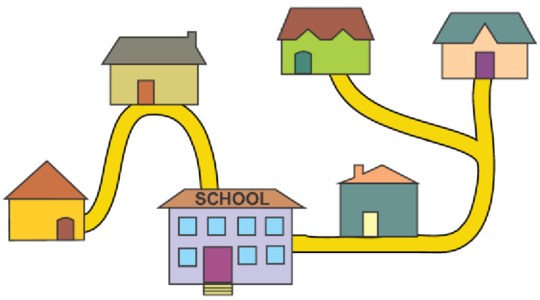
3. Úloha za 2 body (střední): Před dvěma lety bylo Jackovi 8 let. Kolik let mu bude příští rok?

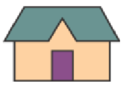
(A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12 (E) 13

4. Úloha za 3 body (těžká): Rovnoběžky se nikdy neprotnou a vždy zůstanou ve stejné vzdálenosti od sebe. Který tvar obsahuje rovnoběžky?

(A)  (B)  (C)  (D) 

5. Úloha za 3 body (těžká): Na obrázku je pět domů pěti kamarádů a jejich škola. Škola je největší budovou na obrázku. Doris a Ali při cestě do školy prochází kolem Leova domu. Eva prochází kolem domu Chole. Který dům je Evy?



(A)  (B)  (C)  (D)  (E) 

Příloha č. 2: Soubor úloh pro 3. třídu

Časový limit: 45 min

Pomůcky: psací potřeby a vlastní hlava

Hranice úspěšnosti: 5 bodů (50 %)

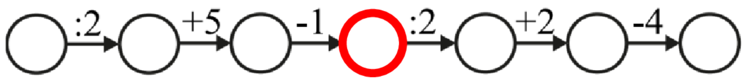
Jméno:____

---

1. Úloha za 1 bod (lehká): V restauraci je 5 stolů pro 4 osoby a 2 stoly pro 6 osob. Kolik lidí může sedět u těchto stolů, když třem z nich chybí jedna židle?

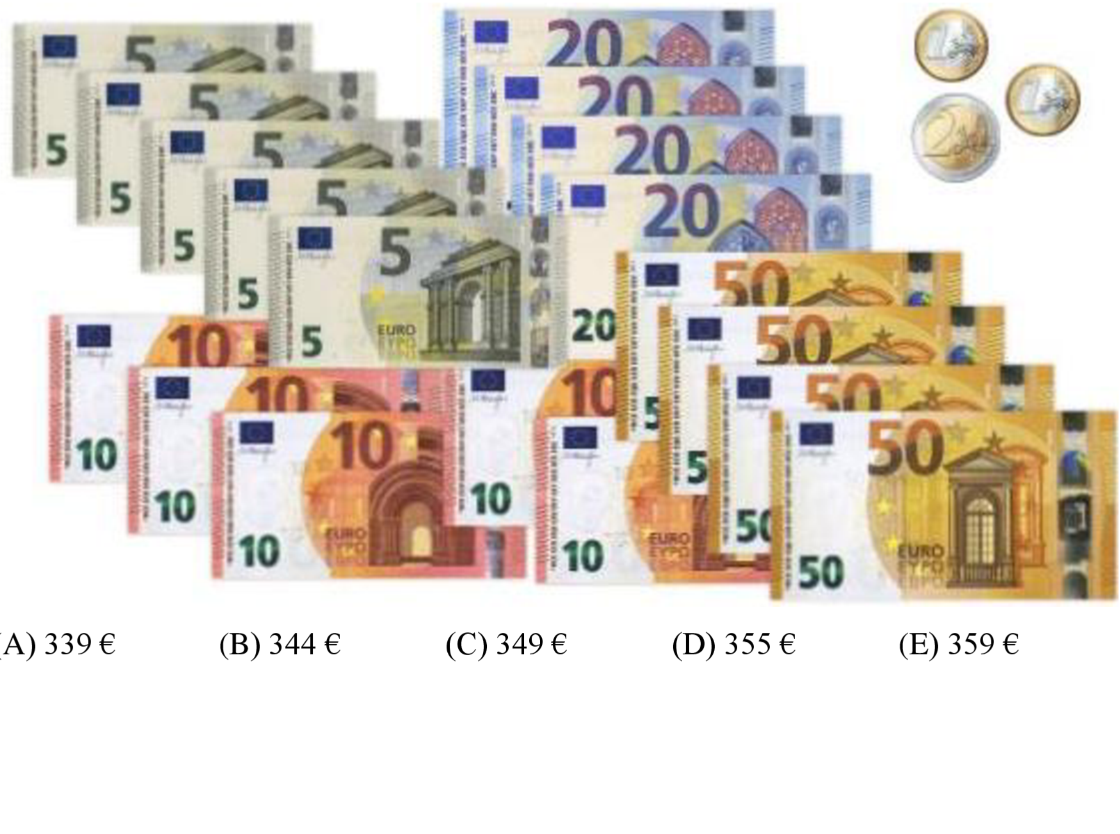
(A) 26 (B) 28 (C) 29 (D) 30 (E) 32

2. Úloha za 1 bod (lehká): Do kroužků zapište čísla od 1 do 7 tak, aby každé číslo bylo použito pouze jednou. Které číslo může být ve středovém kroužku (zvýrazněn červeně)?



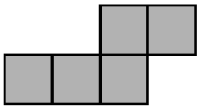
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 6

3. Úloha za 2 body (střední): Jaká je celková hodnota všech bankovek a mincí?

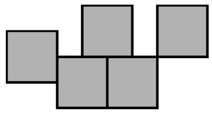


(A) 339 € (B) 344 € (C) 349 € (D) 355 € (E) 359 €

4. Úloha za 3 body (těžká): Pentominos se skládá z pěti čtverců stejné velikosti, které se nepřekrývají (viz obrázky). Nakreslete dalších 8 různých pentominos.



správně



špatně

5. Úloha za 3 body (těžká): Který výsledek je sudý (končí na 0, 2, 4, 6, 8)?

A) $31 + 18 + 20$

B) $22 + 24 + 36 + 19$

C) $12 + 14 + 17$

D) $12 + 14 + 55 + 33$

E) $10 + 20 + 57$

Příloha č. 3: Soubor úloh pro 4. třídu

Časový limit: 45 min

Pomůcky: psací potřeby a vlastní hlava

Hranice úspěšnosti: 5 bodů (50 %)

Jméno:____

---

1. Úloha za 1 bod (lehká): V tabulce jsou zaznamenány nejvyšší hory kontinentů. Jaký je výškový rozdíl mezi nejnižší a nejvyšší zaznamenanou horou?

Kontinent	Hora	Výška (m n. m.)
Afrika	Kilimandžáro	5 895
Amerika	Aconcagua	6 902
Antarktida	Vinson Massif	5 140
Asie	Mount Everest	8 850
Austrálie	Mount Carstensz	4 887
Evropa	Mont Blanc	4 807

(A) 36 481 m (B) 13 657 m (C) 4 043 m (D) 3 963 m (E) 1 948 m

2. Úloha za 1 bod (lehká): Ray chodí běhat každý druhý den. Pokud běžel poprvé v pondělí, pak běžel podesáté...

(A) v pondělí (B) v úterý (C) v pátek (D) v neděli

3. Úloha za 2 body (střední): Vyřešte rébus.

🍕 + 🍔 = 5

🌭 – 🍕 = 99

🍕 + 🍕 + 🍕 = 12

🍕 + 🌭 · 🍔 = ?

🍕 = ______

🍔 = ______

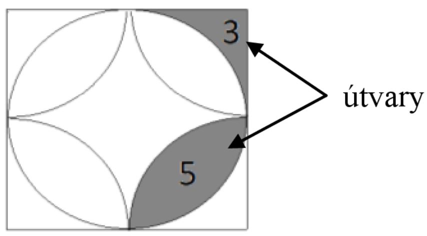
🌭 = ______

4. Úloha za 3 body (těžká): V pokladničce máš 264 Kč. Suma je tvořena pouze českými mincemi (1 Kč, 2 Kč, 5 Kč, 10 Kč, 20 Kč, 50 Kč). Všech mincí máš stejný počet, kolik jich máš celkem?

Celkem:

______ ______ ______ ______ ______ ______ ______

5. Úloha za 3 body (těžká): Určete obsah čtverce, tj. rozdělte čtverec na útvary a sečtěte jejich hodnoty. Zvýrazněné části mají hodnoty 3 a 5.



Příloha č. 4: Soubor úloh pro 5. třídu

Časový limit: 45 min

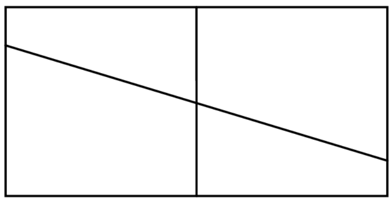
Pomůcky: psací potřeby a vlastní hlava

Hranice úspěšnosti: 5 bodů (50 %)

Jméno:____

---

1. Úloha za 1 bod (lehká): Dillonovi spadlo zrcadlo na zem a rozlomilo se (viz obrázek). Kolik je na obrázku čtyřúhelníků?

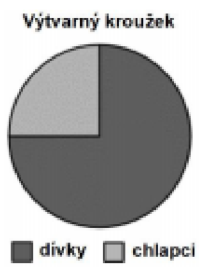


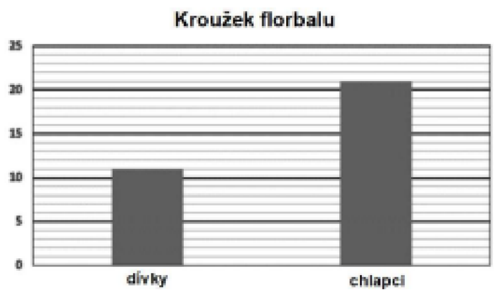
(A) 9 (B) 8 (C) 7 (D) 6

2. Úloha za 1 bod (lehká): Jestliže pětičlenná rodina sní 5 kg rýže za 5 týdnů, kolik rýže sní desetičlenná rodina za 10 týdnů?

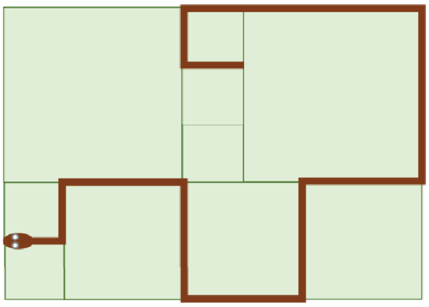
(A) 10 kg (B) 5 kg (C) 20 kg (D) 40 kg (E) 25 kg

3. Úloha za 2 body (střední): Do výtvarného kroužku chodí 32 dětí. Stejný počet chodí i do kroužku florbalu. Zjistěte z grafů, o kolik chlapců více chodí na florbal než do výtvarného kroužku.

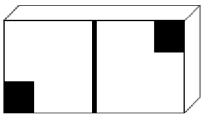
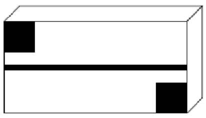
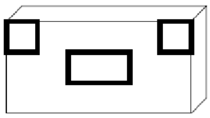




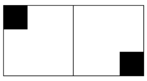
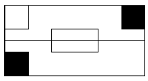
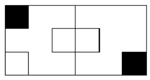
4. Úloha za 3 body (těžká): Rodinu Potrových čekalo po příchodu na zahradu nepříjemné překvapení. Na verandě, která je vydlážděná čtvercovými dlaždicemi třech různých velikostí, ležel obrovský had. Každá z nejmenších dlaždic má obvod 80 cm. Jak dlouhý byl had?



5. Úloha za 3 body (těžká): Lisa má 3 razítka. Jejich spodní strany jsou na obrázku.

(1)  (2)  (3) 

Který z následujících otisků Lisa nemůže udělat, i když razítka zkombinuje?

(A)  (B)  (C)  (D)  (E)