UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Testování znalostí studentů - příprava ke zkoušce z předmětu Matematika 2: Metrické prostory

Vedoucí bakalářské práce:
Mgr. Iveta Bebčáková, Ph.D.
Rok odevzdání: 2014

Vypracoval:
Lukáš Ryšánek
MATEKO, III. ročník

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem vytvořil tuto bakalářskou práci samostatně za vedení paní Mgr. Ivety Bebčákové, Ph.D. a že jsem v seznamu použité literatury uvedl všechny zdroje použité při zpracování práce.

V Olomouci dne 15. dubna 2014

Poděkování

Rád bych tímto poděkoval vedoucí bakalářské práce paní Mgr. Ivetě Bebčákové, Ph.D. za spolupráci a i za čas, který mi věnovala při konzultacích. Dále bych chtěl poděkovat své rodině a přátelům, že mne podporovali během studia a že se mnou měli během této doby trpělivost. Nakonec bych chtěl poděkovat i studentům, kteří se podrobili testování a bez nichž by tato práce nemohla být sepsána.

Obsah

Použité matematické značení

$\mathbb{R}$	...	množina reálných čísel
$\mathbb{R}^2$	...	kartézský součin $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
$\mathbb{N}$	...	množina přirozených čísel
$\mathbb{Z}$	...	množina celých čísel
$\mathbb{Q}$	...	množina racionálních čísel
$\mathbb{C}$	...	množina komplexních čísel
A°	...	vnitřek množiny A
$intA$	...	vnitřek množiny A
$\exists(.)$	...	existenční kvantifikátor; čteme: „existuje alespoň jeden (.)“
$\exists!(.)$	...	existenční kvantifikátor; čteme: „existuje právě jeden (.)“
$\forall(.)$	...	obecný kvantifikátor; čteme: „pro všechna (.)“
$A \subset B$	...	inkluze; čteme: „A je podmnožinou B“
$A \cup B$	...	sjednocení množin A a B
$A \cap B$	...	průnik množin A a B
$\vee$	...	logická spojka „nebo“
$\wedge$	...	logická spojka „a zároveň“
$\overline{A}$	...	uzávěr množiny A
$\rho(x, y)$	...	vzdálenost bodů x a y
$\Omega(a, \varepsilon)$	...	otevřená koule se středem v bodě a a poloměrem ε

Úvod

Stěžejním úkolem této bakalářské práce je vytvoření souboru testových otázek a odpovědí na téma *metrické prostory*, které poslouží jako výuková pomůcka pro studenty předmětu *Matematika 2*, a jeho vysázení do prostředí *LMS Moodle*, kde bude k dispozici studentům. Součástí této práce je též teorie vytváření testů a popis některých hodnot vystupujících jako realizace statistických veličin, pomocí nichž se vyhodnocují testy.

Práce, jež nese název *Testování znalostí studentů - příprava ke zkoušce z předmětu Matematika 2: Metrické prostory*, je rozdělena do čtyř kapitol. První dvě kapitoly jsou zaměřeny na nezbytnou teorii metrických prostorů a také zde vysvětlíme, k čemu vzniklý soubor otázek slouží a proč byl vytvořen. Třetí kapitola je již zaměřena na samotný popis statistických veličin, které nám *LMS Moodle* poskytuje. Pokusíme se v této kapitole zaměřit na problematiku vytváření testů a zejména na základní teorii některých statistik. Zmíníme zde také vztahy mezi některými veličinami a vše názorně popíšeme na vybraných příkladech.

V závěrečné kapitole, která již není stěžejní částí bakalářské práce, bychom rádi uvedli, jak probíhá výuka v samotném kurzu a okrajově se zaměříme na možnosti aplikace souboru testových otázek v praxi a s tím související zefektivnění zkoušky v předmětu *Matematika 2*.

Doufáme, že se nám vytyčený cíl, vytvoření souboru otázek, povede naplnit a to v takové kvalitě, aby bylo možno tento soubor použít pro testování studentů.

1 Matematika 2

Předmět *Matematika 2* se vyučuje na katedře matematické analýzy a aplikací matematiky (dále jen KMA) a je určen pro studenty prvního ročníku bakalářského studia studijního programu Aplikovaná matematika. Tento předmět je označován zkratkou KMA/M2; zařazen je v letním semestru s dotací čtyř hodin přednášek a dvou hodin cvičení týdně.

1.1 Metrické prostory

V letním semestru čeká studenty na začátku předmětu problematika metrických prostorů, jež se stala stěžejním tématem této bakalářské práce. Níže se pokusíme vysvělit, co si představit pod metrickým prostorem, uvedeme jeho definici, některé vlastnosti a druhy těchto prostorů.

Dle [7] byl poprvé metrický prostor definován v roce 1906. Učinil tak Maurice René Fréchet ve své disertační práci *Sur quelques points du calcul fonctionnel*. Samotný pojem pak pochází od dalšího matematika, Felixe Hausdorffa.

Pojem vzdálenost zná každý a intuitivně si ji můžeme představit jako nezápornou hodnotu, která uvádí, jak jsou dva body od sebe daleko. Například můžeme uvažovat vzdálenost dvou bodů na reálné ose. Metrický prostor nám dává možnost definovat vzdálenost na libovolné množině, nejen na reálné ose. Můžeme tak rozšířit pojem vzdálenosti mezi body v prostoru $\mathbb{R}^n$. Nemusíme se však omezovat pouze na hledání vzdáleností mezi body v prostoru $\mathbb{R}^n$. Jsme též schopni díky metrickým prostorům aplikovat pojem vzdálenost i na množinu funkcí definovaných na stejném prostoru, což se zdá být vhodné zejména tehdy, kdy nás může zajímat, jak jsou funkce od sebe vzdáleny. Metrické prostory nám tímto otevřely nové možnosti v dalších oblastech matematiky.

Následující definice a věty jsou převzaty z [5] a [6].

Definice 1.1. Nechť M je libovolná neprázdná množina a ρ zobrazení z $M \times M$ do $\mathbb{R}$, které má pro všechna $x, y, z \in M$ následující vlastnosti:

1. $\rho(x, y) \geq 0$
2. $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
3. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
4. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$

Potom se uspořádaná dvojice (M, ρ) nazývá metrický prostor. Zobrazení $\rho : M \times M \to \mathbb{R}$ se nazývá metrika a číslo $\rho(x, y)$ se nazývá vzdáleností prvků x, y v prostoru (M, ρ).

Příklad 1.1. Neprázdnou mnoužinou M může být například množina přirozených nebo reálných čísel, ale i množina autobusových zastávek ve městě, nebo množina bankomatů či poboček bank. Na každé takovéto množině můžeme určit různé metriky, čili jakýsi předpis, jak budeme měřit vzdálenost mezi jednotlivými prvky množiny M.

Věta 1.1. *Nechť $M = \mathbb{R}^2$. Dále nechť $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Potom zobrazení*

$$\rho(x, y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$$

je metrikou na $\mathbb{R}^2$.

Definice 1.2. Zobrazení ρ uvedené ve větě 1.1, nazýváme euklidovská vzdálenost.

V rámci kurzu *Matematika 2* jsou studenti seznamováni s různými druhy metrik, nejen s euklidovskou, proto zde uvedeme pro úplnost další.

Věta 1.2. *Nechť $M = \mathbb{R}^2$. Dále nechť $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Potom zobrazení*

$$\rho_l(x, y) = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2|$$

a

$$\rho_m(x,y) = \max\left\{|y_1 - x_1|, |y_2 - x_2|\right\}$$

jsou opět metrikami na množině $\mathbb{R}^2$*.*

Definice 1.3. Zobrazení ρ_l uvedené ve větě 1.2 nazýváme listonošská vzdálenost, ρ_m, zmíněné v téže větě, pak vzdáleností maximální či maximovou.

Poznámka 1.1. Všechny zmíněné metriky můžeme rozšířit na množinu $\mathbb{R}^n$.

Speciálně u množiny $\mathbb{R}^3$ jsou zmíněné metriky nazývány následovně.

ρ	...	euklidovská vzdálenost
ρ_l	...	oktaedrická vzdálenost
ρ_m	...	kubická vzdálenost

Metrika, kterou jsme zmínili ve větě 1.1, je přesně tou, kterou užíváme při určení vzdálenosti dvou bodů z $\mathbb{R}^n$ tzv. vzdušnou čarou. Nemůžeme ale euklidovskou vzdálenost použít k určení například vzdálenosti dvou řek. Tato metrika je totiž definována na prostoru $\mathbb{R}^n$. Představme si nyní město s navzájem kolmými ulicemi, které představují množinu bodů z $\mathbb{R}^2$. Vzdálenost, kterou musíme urazit z jednoho bodu do druhého, se počítá s pomocí metriky ρ_l.

To, zda-li uvedená zobrazení jsou opravdu metrikami ve smyslu definice 1.1, čili zda splňují zmíněné čtyři podmínky, je ověřeno například v [4], kde jsou uvedeny potřebné důkazy.

V daném metrickém prostoru nás nemusí zajímat jen to, jak jsou dva body od sebe vzdáleny. Můžeme také definovat tzv. okolí bodu, jako speciální podmnožinu metrického prostoru.

Definice 1.4. Nechť $a \in (M,\rho)$, $\varepsilon > 0$. Množinu všech bodů $x \in (M,\rho)$, pro které platí $\rho(x,a) < \varepsilon$, nazýváme ε-okolím bodu a v prostoru (M,ρ) a značíme ji $\mathcal{U}(a,\varepsilon)$; tj.

$$\mathcal{U}(a,\varepsilon) = \{x \in (M,\rho); \rho(x,a) < \varepsilon\}.$$

Redukovaným ε-okolím bodu a v prostoru (M,ρ) nazýváme množinu

$$\mathcal{U}^*(a,\varepsilon) = \{x \in (M,\rho); 0 < \rho(x,a) < \varepsilon\},$$

nebo-li

$$\mathcal{U}^*(a,\varepsilon) = \mathcal{U}(a,\varepsilon) \setminus \{a\}.$$

Definice 1.5. Nechť $a \in (M,\rho), \varepsilon > 0$.

- Množina $\Omega(a,\varepsilon) = \{x \in (M,\rho); \rho(x,a) < \varepsilon\}$ se nazývá otevřená koule (zobecněná koule) se středem v bodě a a poloměrem ε. Tj. $\Omega(a,\varepsilon) = \mathcal{U}(a,\varepsilon)$;
- Množina $\overline{\Omega}(a,\varepsilon) = \{x \in (M,\rho); \rho(x,a) \leq \varepsilon\}$ se nazývá uzavřená koule se středem v bodě a a poloměrem ε;
- Množina $\mathcal{S}(a,\varepsilon) = \{x \in (M,\rho); \rho(x,a) = \varepsilon\}$ se nazývá sféra se středem v bodě a a poloměrem ε.

Příklad 1.2. Množina $\Omega(a,\varepsilon)$ v prostoru $(\mathbb{R},\rho)$ bude například představovat otevřený interval $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Podobně množina $\overline{\Omega}(a,\varepsilon)$ je v prostoru $(\mathbb{R}^3, \rho_m)$ zobrazena jako krychle se středem v bodě a a hranou o délce 2ε.

V matematické analýze je řada pojmů definována pomocí bodů, které mají své specifické vlastnosti vzhledem k nějaké množině. V následující definici jsou uvedeny některé z nich.

Definice 1.6. Nechť M je metrický prostor s metrikou ρ a nechť $A \subset M$.

- Bod $a \in A$ se nazývá vnitřní bod množiny A, jestliže existuje okolí $\mathcal{U}(a)$ bodu a tak, že $\mathcal{U}(a) \subset A$. Množina všech vnitřních bodů množiny A se nazývá vnitřek množiny A a značí se A° nebo $intA$;
- Množina A se nazývá otevřená, jestliže $A = A^\circ$.
- Bod $a \in M$ se nazývá hraničním bodem množiny A, jestliže každé jeho okolí obsahuje alespoň jeden bod z A a alespoň jeden bod z $M \setminus A$. Množinu všech hraničních bodů množiny A se nazývá hranice množiny A a značí se $h(A)$ nebo $bd(A)$.
- Sjednocení vnitřku množiny A a její hranice se nazývá uzávěr množiny A a značí se $\overline{A}$.

- Množina A se nazývá uzavřená, jestliže $A = \overline{A}$.

- Bod $a \in M$ se nazývá hromadným bodem množiny A, jestliže každé jeho okolí obsahuje nekonečně mnoho bodů z množiny A. Množina všech hromadných bodů množiny A se nazývá derivace množiny A a značí se A'.

- Bod $a \in A$, který není hromadným bodem množiny A, se nazývá izolovaným bodem množiny A. Jsou-li všechny body množiny A izolované, pak se množina A nazývá diskrétní množina A.

Poznámka 1.2. Izolovaný bod množiny A můžeme nadefinovat také jako bod $a \in A$ takový, že existuje jeho okolí, ve kterém je pouze jeden bod z množiny A, popřípadě existuje jeho redukované okolí, které neobsahuje žádný bod z množiny A.

Nejen body, ale i množiny mají určité vlastnosti. Některé jsme si definovali výše, jako například otevřenou či uzavřenou množinu. Pomocí těchto vlastností a dalších definujeme nové vlastnosti množin.

Definice 1.7. Nechť (M, ρ) je metrický prostor, kde $M = \mathbb{R}^n$. Potom

- množina $A \subset M$ se nazývá konvexní, lze-li každé dva její body spojit úsečkou ležící v A;

- množina $A \subset M$ se nazývá souvislá, lze-li každé dva její body spojit lomenou čarou, která celá leží v A;

- množina $A \subset M$ se nazývá omezená, jestliže existuje číslo $K > 0$ takové, že $A \subset \Omega(0, K)$;

- Otevřená, souvislá množina $A \subset M$ se nazývá oblast;

- Uzavřená, omezená množina $A \subset M$ se nazývá kompaktní.

2 Soubor testových otázek a jeho užití

Dosud jsme se nezabývali vzniklými otázkami ani tím, proč vlastně tento soubor otázek vznikl. V následujícím textu popíšeme, co stálo za vznikem tohoto souboru, potažmo této práce a také se zmíníme o tom, jak testování studentů probíhalo a jaké požadavky museli splnit.

2.1 Tvorba souboru testových otázek

Již v průběhu zkouškového období v letním semestru akademického roku 2011/2012 došlo k připojení dalšího mezistupně zkoušky.

V prvních termínech zkoušky docházelo k tomu, že někteří studenti chodili k ústní zkoušce nepřipraveni, nerozuměli dostatečně látce, ale hlavně neznali definice. Proto se vyučující rozhodli k tomu, že před samotnou zkouškou byly studentům vybrány dvě základní definice, které museli precizně znát, v opačném případě ztratili jeden pokus ke složení zkoušky.

Toto bylo ovšem jen prozatimní opatření z důvodu náhlé potřeby. Pro nové studenty tohoto předmětu se začal připravovat již nový mezistupeň složený z řady testových otázek. V říjnu akademického roku 2012/2013 bylo zadáno celkem osm bakalářských prací, v rámci kterých měli studenti za úkol vytvořit určitou sadu otázek. Každý ze studentů se zaměřil na určité téma-kapitolu, které je vyučováno v předmětu *Matematika 2*.

Tato práce je zaměřena na metrické prostory. Soubor otázek vznikal od zadání práce a bylo několikrát konzultováno, zda samotné otázky splňují určitou úroveň a zda jsou vhodné pro testování. Jelikož je práce matematického charakteru a prostředí *LMS Moodle*, které je cílovým úložištěm otázek, podporuje programovací jazyk $\TeX$, bylo nezbytné psát otázky v tomto programu.

V polovině letního semestru akademického roku 2012/2013 byl soubor otázek sepsán a překontrolován a mohli jsme tak přikročit k nahrávání otázek na *LMS Moodle*. Nedělo se tak však hromadně, ale byli jsme nuceni zadávat do systému jednotlivé otázky postupně. Tato práce byla nejnáročnější, neboť *LMS Moodle* pracoval s některými příkazy odlišně a bylo nutné je pozměnit. Například znak

„$“, který využíváme v TEXu k uzavírání matematických zápisů, bylo v *LMS Moodlu* nutné nahradit dvěma těmito znaky. Mimo to jsme u každé otázky nastavovali různé parametry, jako například automatické promíchávání odpovědí, požadavky pro bodování odpovědí, aby studenti nedosahovali záporných bodů apod.

Příklad 2.1. Zde je původní zdrojový zápis jedné otázky z našeho souboru:

```
\item Nechť je dána množina $M$ a bod $a \in M$. Vyberte nepravdivé
 tvrzení o množině $M$ na obrázku


\includegraphics[width=5cm]{4}
\begin{description}
\item[a)] Množina $M$ je otevřená.$\Delta$
\item[b)] Množina $M$ je konvexní, ale není souvislá.$\Delta$
\item[c)] $a\in \overline{M}$.
\item[d)] Množina $M$ je souvislá, ale není konvexní.
\end{description}
```

U prvních dvou nabízených možností je uveden příkaz „Delta“, značící správnou odpověď.

Do *LMS Moodlu* jsme do zadání úlohy vysázeli následující příkaz:

```
Nechť je dána množina $$M$$ a bod $$a \in M$$. Vyberte nepravdivé
tvrzení o množině $$M$$ na obrázku
```

Obrázek jsme vložili pomocí funkce „vložit obrázek“. Následně jsme vkládali nabízené možnosti jednu po druhé a u každé jsme nastavovali bodové ohodnocení a pod. Například zdrojový kód možnosti **a)** vypadal následovně:

```
Množina $$M$$ je otevřená.
```

Nyní zbývá představit metodiku, určenou pro samotné testování studentů. Seznámíme se zde s konkrétními požadavky na studenty a s motivací studentů, proč testy dělali.

Jak už jsme zmínili, testové otázky byly uloženy na *LMS Moodlu*, ke kterému mají studenti přístup odkudkoliv, kde je internetové připojení-samozřejmě s patřičnými přístupovými údaji.

Z databáze čítající celkem 153 otázek zaměřených na metrické prostory vygeneroval *LMS Moodle* pro každého studenta vždy 25 otázek, které tvořily jeden test. Takto vytvořený test museli studenti splnit alespoň na 80%, jinak se nemohli hlásit k ústní zkoušce. Počtem pokusů nebyli studenti limitováni a jako rozhodující skóre bylo uvažováno to nejvyšší získané. Takže i několik špatně absolvovaných testů neovlivňovalo úspěch. I po dosažení požadované hranice byl test studentům přístupný, což znamenalo, že si mohli i nadále procvičovat látku, pokud tak uznali za vhodné.

2.2 Soubor testových otázek

V následujících odstavcích se pokusíme přiblížit strukturu souboru otázek a další ukazatele jako je například poměr jednotlivých oddílů otázek k celku nebo množství nabízených odpovědí. Samotné otázky jsou umístěny na konci kapitoly.

Soubor otázek týkajících se metrických prostorů se skládá z celkem 153 otázek, rozdělených do šesti tématických okruhů. Otázky jsme rozdělili do následujících skupin: Kartézský součin, Metrika, Okolí bodu, Vlastnosti, Vztahy a Příklady. U jednotlivých otázek měli studenti na výběr čtyři nebo pět odpovědí v celkovém poměru 77 ku 76, viz Tabulka 1.

V oddílu Kartézský součin jsme se zaměřili na základní pojmy jako jsou bod roviny, prostor, souřadnice bodu atd. Uvádíme příklad 2.2, který jsme použili a zařadili do tohoto oddílu.

Příklad 2.2. Bodem prostoru $\mathbb{R}^2$ nazveme

a) Množinu všech uspořádaných trojic (x, y, z), kde $x, y, z \in \mathbb{R}$.

b) Každou uspořádanou trojici (x, y, z), kde $x, y, z \in \mathbb{R}$ a $x, y, z \neq 0$.

c) Každou uspořádanou trojici (x, y, z), kde $x, y, z \in \mathbb{R}$.

d) Čísla x, y, z, kde $x, y, z \in \mathbb{R}$.

e) Každou uspořádanou dvojici (x, y), kde $x, y \in \mathbb{R}$.

Okruh určený Metrikám jsme věnovali kromě pojmů hlavně vlastnostem metriky a definicím různých vzdáleností. Typická úloha tohoto okruhu je uvedena v příkladu 2.3.

Příklad 2.3. Zobrazení $\rho : M \times M \to \mathbb{R}$ je totožné na M, jestliže $\forall X, Y \in M$ platí

a) $\rho(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X = Y$.

b) $\rho(X, Y) = 0 \Rightarrow X = Y$.

c) $\rho(X, Y) = \rho(Y, X)$.

d) $(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X = Y$.

e) $\rho(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X > Y$.

V oddíle Okolí bodu jsme se snažili, aby studenti po procvičení těchto otázek precizně ovládali a chápali zápis okolí daného bodu a aby byli schopni určit rozdíl mezi označením bodu a poloměrem okolí bodu. Některé příklady byly zadány s konkrétními hodnotami, jak ukazuje následující situace v příkladu 2.4.

Příklad 2.4. Kolik bodů obsahuje $\mathcal{U}([0,0],3)$ v prostoru $(\mathbb{N}_0^2, \rho)$

a) 11

b) 4

c) 21

d) 9

e) 36

Do okruhu věnovanému Vlastnostem jsme zahrnuli význačné body a vlastnosti podmnožin množiny, na níž je definována metrika.

Příklad 2.5. Uzávěr množiny A lze zapsat jako $\overline{A} =$

a) $A^\circ \cup h(A)$ a značí se A'.

b) $A^\circ \cap \overline{A}$.

c) $A^\circ \cap h(A)$.

d) $A^\circ \cup h(A)$.

V oddílu Vztahy jsou otázky dle nás nejvíce zaměřeny na představivost a logiku. Tyto otázky nejlépe prověří studenta a ukáží, zda danému tématu rozumí. Uvádíme zde například, jak můžeme zapsat vztahy mezi dvěma množinami pomocí vnitřků či uzávěrů množin.

Příklad 2.6. Nechť $A \subset (X, \rho)$. Vyberte platné vztahy

a) $X \setminus (X - \overline{A}) = A^\circ$.

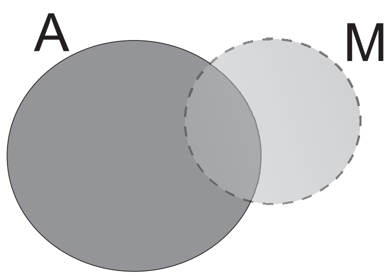
b) $X \setminus intA = \overline{X - A}$.

c) $X \setminus h(A) = intA \cap (X - \overline{A})$.

d) $X \setminus \overline{A} = int(X - A)$.

Poslední část souboru otázek jsme věnovali příkladům, abychom prověřili znalosti studentů z jiné perspektivy. Dle nás je důležité, aby byl student schopen nějakou vlastnost popsat nejen slovně, ale dokázal ji i ilustrovat na konkrétním příkladu.

Příklad 2.7. Nechť jsou dány množiny A a M. Vyberte pravdivé tvrzení o množinách A, M na obrázku



a) $\exists x \in A \cap M : x \notin A \wedge x \in M$.

b) $\exists y \in A : y \notin A \cap M$.

c) $\exists x \in A \cup M : x \in A \wedge x \notin M$.

d) $\exists z \in M : z \notin A \cup M$.

V Tabulce 1 lze vidět konkrétní hodnoty pro jednotlivé tématické celky otázek. Z tabulky je patrné, že ačkoli je poměr otázek se čtyřmi respektive pěti možnostmi téměř stejný, u jednotlivých tématických celků je tomu naopak.

typy otázek	počet otázek	4 odpovědi	5 odpovědí	poměr otázek k celku
Kartézský součin	20	18	2	13,072%
Metrika	21	2	19	13,725%
Okolí bodu	38	10	28	24,837%
Vlastnosti	26	18	8	16,993%
Vztahy	13	13	0	8,497%
Příklady	35	32	3	22,876%
Celkem	153	77	76	100%

Tabulka 1: Tabulka znázorňující jednotlivé oddíly otázek

Na následujících několika stránkách uvádíme stěžejní část této práce, a to úplný výčet námi vytvořených otázek a odpovědí. Správné odpovědi jsou vždy označeny znakem Δ.

1. Bodem roviny $\mathbb{R}^2$ nazveme

   a) Každou uspořádanou trojici (x, y, z), kde $x, y, z \in \mathbb{R}$.

   b) Každou spořádanou dvojici (x, y), kde $x, y \in \mathbb{R}$.

   c) Všechna čísla x, y, kde $x, y \in \mathbb{R}$.

   d) Množinu všech uspořádaných dvojic (x, y), kde $x, y \in \mathbb{R}$.

   e) Každou uspořádanou dvojici (x, y), kde $x, y \in \mathbb{R}$. Δ

2. Bodem roviny $\mathbb{N}^2$ nazveme

   a) Každou uspořádanou trojici (x, y, z), kde $x, y, z \in \mathbb{N}$.

   b) Každou spořádanou dvojici (x, y), kde $x, y \in \mathbb{N}$.

   c) Každou uspořádanou dvojici (x, y), kde $x, y \in \mathbb{N}$. Δ

   d) Množinu všech uspořádaných dvojic (x, y), kde $x, y \in \mathbb{N}$.

   e) Všechna čísla x, y, kde $x, y \in \mathbb{N}$.

3. Bodem roviny $\mathbb{R}^2$ nazveme

   a) Každou uspořádanou dvojici (x, y), kde $x, y \in \mathbb{N}$.

   b) Každou uspořádanou dvojici (x, y), kde $x, y \in \mathbb{Q}$.

   c) Každou uspořádanou dvojici (x, y), kde $x, y \in \mathbb{C}$.

   d) Každou uspořádanou dvojici (x, y), kde $x, y \in \mathbb{R}$. Δ

   e) Každou uspořádanou dvojici (x, y), kde $x, y \in \mathbb{Z}$.

4. Bodem roviny $\mathbb{Q}^2$ nazveme

   a) Každou uspořádanou dvojici (x, y), kde $x, y \in \mathbb{R}$.

   b) Každou uspořádanou dvojici (x, y), kde $x, y \in \mathbb{N}$.

   c) Každou uspořádanou dvojici (x, y), kde $x, y \in \mathbb{Q}$. Δ

   d) Každou uspořádanou dvojici (x, y), kde $x, y \in \mathbb{Z}$.

   e) Každou uspořádanou dvojici (x, y), kde $x, y \in \mathbb{C}$.

5. Rovinou $\mathbb{R}^2$ nazveme

   a) Každou uspořádanou dvojici (x, y), kde $x, y \in \mathbb{R}$.

   b) Množinu všech uspořádaných dvojic (x, y), kde $x, y \in \mathbb{R}$. Δ

   c) Ani jedna z uvedených možností.

   d) Množinu všech uspořádaných trojic (x, y, z), kde $x, y \in \mathbb{R}$.

6. Souřadnicemi bodu (x, y) roviny $\mathbb{R}^2$ nazýváme

   a) Čísla x, y, kde $x, y \in \mathbb{R}^2$.

   b) Uspořádanou dvojici (x, y), kde $x, y \in \mathbb{R}$.

   c) Ani jedna z možností. Δ

   d) Čísla x, y, z, kde $x, y, z \in \mathbb{R}$.

   e) Množinu všech uspořádaných dvojic (x, y), kde $x, y \in \mathbb{R}$.

7. Bodem prostoru $\mathbb{R}^3$ nazveme

   a) Množinu všech uspořádaných trojic (x, y, z), kde $x, y, z \in \mathbb{R}$.

   b) Každou uspořádanou trojici (x, y, z), kde $x, y, z \in \mathbb{R}$ a $x, y, z \neq 0$.

   c) Každou uspořádanou trojici (x, y, z), kde $x, y, z \in \mathbb{R}$. Δ

   d) Čísla x, y, z, kde $x, y, z \in \mathbb{R}$.

   e) Každou uspořádanou dvojici (x, y), kde $x, y \in \mathbb{R}$.

8. Bodem prostoru $\mathbb{Z}^3$ nazveme

   a) Množinu všech uspořádaných trojic (x, y, z), kde $x, y, z \in \mathbb{Z}$.

   b) Každou uspořádanou trojici (x, y, z), kde $x, y, z \in \mathbb{Z}$ a $x, y, z \neq 0$.

   c) Každou uspořádanou trojici (x, y, z), kde $x, y, z \in \mathbb{R}$.

   d) Čísla x, y, z, kde $x, y, z \in \mathbb{Z}$.

   e) Ani jedna z možností. Δ

9. Bodem prostoru $\mathbb{R}^2$ nazveme

   a) Množinu všech uspořádaných trojic (x, y, z), kde $x, y, z \in \mathbb{R}$.

   b) Každou uspořádanou trojici (x, y, z), kde $x, y, z \in \mathbb{R}$ a $x, y, z \neq 0$.

   c) Každou uspořádanou trojici (x, y, z), kde $x, y, z \in \mathbb{R}$.

   d) Čísla x, y, z, kde $x, y, z \in \mathbb{R}$.

   e) Každou uspořádanou dvojici (x, y), kde $x, y \in \mathbb{R}$. Δ

10. Prostor $\mathbb{R}^3$ označujeme

    a) Ani jedna z možností.

    b) Čísla x, y, z, kde $x, y, z \in \mathbb{R}$.

    c) Uspořádanou trojici (x, y, z), kde $x, y, z \in \mathbb{R}$.

    d) Množinu všech uspořádaných trojic (x, y, z), kde $x, y, z \in \mathbb{R}$. Δ

11. Za souřadnice bodu (x, y, z) prostoru $\mathbb{R}^3$ označujeme

    a) Čísla x, y, z, kde $x, y, z \in \mathbb{Q}$.

    b) Uspořádanou trojici (x, y, z).

    c) Čísla x, y, z, kde $x, y, z \in \mathbb{N}$.

    d) Ani jedna z možností. Δ

    e) Čísla x, y, z, kde $x, y, z \in \mathbb{C}$.

12. Množinu všech uspořádaných dvojic (x, y), kde $x, y \in \mathbb{R}$, nazveme

a) Dvojrozměrným prostorem $\mathbb{R}^2$. Δ

b) Rovinou $\mathbb{R}^2$. Δ

c) Prostorem $\mathbb{R}^3$.

d) Trojrozměrným prostorem $\mathbb{R}^3$.

e) Množinou všech bodů roviny $\mathbb{R}^2$. Δ

13. Množinu všech uspořádaných dvojic (x, y), kde $x, y \in \mathbb{Z}$, nazýváme

a) Dvojrozměrným prostorem $\mathbb{R}^2$.

b) Prostorem $\mathbb{R}^3$.

c) Rovinou $\mathbb{R}^2$.

d) Ani jedna z možností. Δ

e) Množinou bodů v rovině $\mathbb{R}^2$.

14. Množina všech uspořádaných trojic (x, y, z), kde $x, y, z \in \mathbb{R}$, je

a) Dvojrozměrným prostorem $\mathbb{R}^2$.

b) Prostorem $\mathbb{R}^2$.

c) Rovinou $\mathbb{R}^2$.

d) Množina všech bodů v prostoru $\mathbb{R}^3$. Δ

e) Bodem prostoru $\mathbb{R}^3$.

15. Množina všech uspořádaných trojic (x, y, z), kde $x, y, z \in \mathbb{R}$, není

a) Dvojrozměrným prostorem $\mathbb{R}^2$. Δ

b) Prostorem $\mathbb{R}^2$. Δ

c) Rovinou $\mathbb{R}^2$. Δ

d) Množina všech bodů v prostoru $\mathbb{R}^3$.

e) Bodem prostoru $\mathbb{R}^3$. Δ

16. Množina všech uspořádaných trojic (x, y, z), kde $x, y, z \in \mathbb{Z}$, je

a) Dvojrozměrným prostorem $\mathbb{Z}^2$.

b) Prostorem $\mathbb{R}^3$.

c) Rovinou $\mathbb{R}^2$.

d) Množina všech bodů v prostoru $\mathbb{Z}^3$. Δ

e) Bodem prostoru $\mathbb{Z}^3$.

17. Množina všech uspořádaných trojic (x, y, z), kde $x, y, z \in \mathbb{N}$, je

a) Ani jedna z možností. Δ

b) Bodem prostoru $\mathbb{N}^2$.

c) Rovinou $\mathbb{R}^2$.

d) Množina všech bodů v prostoru $\mathbb{N}^2$.

e) Prostorem $\mathbb{R}^3$.

18. Každá uspořádaná trojice (x, y, z), kde $x, y, z \in \mathbb{R}$, je

a) Ani jedna z možností. Δ

b) Bod roviny $\mathbb{R}^2$.

c) Bod prostoru $\mathbb{R}^2$.

d) Souřadnice bodu roviny $\mathbb{R}^2$.

e) Souřadnice bodu prostoru $\mathbb{R}^3$.

19. Čísla x, y, kde $x, y \in \mathbb{R}$, jsou označována jako

a) Souřadnice bodu (x, y) dvojrozměrného prostoru $\mathbb{R}^2$. Δ

b) Bod (x, y) roviny $\mathbb{R}^2$.

c) Souřadnice bodu (x, y) roviny $\mathbb{R}^2$. Δ

d) Ani jedna z možností.

e) Souřadnice roviny $\mathbb{R}^2$.

20. Čísla x, y, z, kde $x, y, z \in \mathbb{R}$, jsou označována jako

a) Souřadnice prostoru $\mathbb{R}^3$.

b) Souřadnice bodu (x, y, z) prostoru $\mathbb{R}^3$. Δ

c) Ani jedna z možností.

d) Bod (x, y, z) roviny $\mathbb{R}^2$.

e) Souřadnice bodu (x, y, z) dvojrozměrného prostoru $\mathbb{R}^2$.

21. Zobrazení $\rho : M \times M \to \mathbb{R}$ je nezáporné na M, jestliže $\forall X, Y \in M$ platí

a) $(X, Y) \geq 0$.

b) $\rho(X, Y) > 0$.

c) $\rho(X, Y) \leq 0$.

d) $(X, Y) > 0$.

e) $\rho(X, Y) \geq 0$. Δ

22. Která podmínka není postačující pro to, aby zobrazení $\rho : M \times M \to \mathbb{R}$ bylo nezáporné na množině M

a) $\forall X, Y \in M (X, Y) \geq 0$. Δ

b) Jestliže $\forall X, Y \in M \rho(X, Y) \geq 0$.

c) Jestliže $\forall X, Y \in M \rho(X, Y) \leq 0$. Δ

d) Jestliže $\forall X, Y \in M \rho(X, Y) > 0$.

e) Jestliže $\forall X, Y \in M (X, Y) > 0$. Δ

23. Zobrazení $\sigma : M \times M \to \mathbb{R}$ je nezáporné na M, jestliže $\forall X, Y \in M$ platí

a) $(X, Y) \geq 0$.

b) $\rho(X, Y) > 0$.

c) $\rho(X, Y) \leq 0$.

d) Ani jedna z možností. Δ

e) $\rho(X, Y) \geq 0$.

24. Zobrazení $\rho : M \times M \to \mathbb{R}$ je totožné na M, jestliže $\forall X, Y \in M$ platí

a) $\rho(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X = Y$. Δ

b) $\rho(X, Y) = 0 \Rightarrow X = Y$.

c) $\rho(X, Y) = \rho(Y, X)$.

d) $(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X = Y$.

e) $\rho(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X > Y$.

25. Zobrazení $\sigma : M \times M \to \mathbb{R}$ je totožné na M, jestliže $\forall X, Y \in M$ platí

a) $\rho(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X = Y$.

b) $\sigma(X, Y) = \sigma(Y, X)$.

c) $\rho(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X > Y$.

d) $(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X = Y$.

e) $\sigma(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X = Y$. Δ

26. Nechť $\rho : M \times M \to \mathbb{R}$ je totožné zobrazení na M, potom $\forall X, Y \in M$ platí

a) $\rho(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X = Y$. Δ

b) $\rho(X, Y) = 0 \Rightarrow X = Y$. Δ

c) $\rho(X, Y) = \rho(Y, X)$.

d) $(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X = Y$.

e) $\rho(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X > Y$.

27. Zobrazení $\rho : M \times M \to \mathbb{R}$ je symetrické na M, jestliže $\forall X, Y \in M$ platí

a) $\rho(X, Y) = (Y, X)$.

b) $(X, Y) = (Y, X)$.

c) $\rho(X, Y) = \rho(Y, Z)$.

d) $\rho(X, Y) = \rho(Y, X)$. Δ

e) $\sigma(X, Y) = \sigma(Y, X)$.

28. Zobrazení $\sigma : M \times M \to \mathbb{R}$ je symetrické na M, jestliže $\forall X, Y \in M$ platí

a) $\rho(X, Y) = (Y, X)$.

b) $\sigma(X, Y) = (Y, X)$.

c) $\rho(X, Y) = \rho(Y, Z)$.

d) $\rho(X, Y) = \rho(Y, X)$.

e) $\sigma(X, Y) = \sigma(Y, X)$. Δ

29. Zobrazení $\rho : M \times M \to \mathbb{R}$ splňuje trojúhelníkovou nerovnost na M, jestliže $\forall X, Y, Z \in M$ platí

a) $\rho(X, Y) \leq \rho(X, Z) - \rho(Z, Y)$.

b) $\rho(X, Y) \geq \rho(X, Z) + \rho(Z, Y)$.

c) Ani jedna z možností.

d) $\rho(X, Y) \leq \rho(X, Z) + \rho(Z, Y)$. Δ

e) $\rho(X, Y) \leq \rho(X, Z) + \rho(Z, W)$.

30. Nechť $X = [x_1, x_2]$ a $Y = [y_1, y_2]$. Euklidovskou vzdáleností bodů X a Y rozumíme

a) $\rho(X, Y) = \sqrt{(y_1 + x_1)^2 - (y_2 + x_2)^2}$.

b) $\rho(X, Y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2}$.

c) $\rho(X, Y) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

d) $\rho(X, Y) = \sqrt{|y_1 - x_1| + |y_2 - x_2|}$.

e) $\rho(X, Y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$. Δ

31. Listonošská vzdálenost $\rho_l(X,Y)$ bodů $X=[x_1,x_2]$ a $Y=[y_1,y_2]$ je definována následovně

a) $\rho_l(X,Y)=|y_1+x_1|-|y_2+x_2|$.

b) $\rho_l(X,Y)=|y_1-x_1|-|y_2-x_2|$.

c) $\rho_l(X,Y)=|y_1+x_1|+|y_2+x_2|$.

d) Ani jedna z možností. Δ

e) $\rho_l(X,Y)=|y_1-y_2|+|x_1-x_2|$.

32. Maximová vzdálenost $\rho_m(X,Y)$ bodů $X=[x_1,x_2]$ a $Y=[y_1,y_2]$ je definována následovně

a) $\rho_m(X,Y)=\sup\{|y_1-x_1|,|y_2-x_2|\}$.

b) $\rho_m(X,Y)=\max\{|y_1-x_1|,|y_2-x_2|\}$. Δ

c) $\rho_m(X,Y)=\max\{|y_1-x_1|+|y_2-x_2|\}$.

d) $\rho_m(X,Y)=\min\{|y_1-x_1|,|y_2-x_2|\}$.

e) $\rho_m(X,Y)=\max\{|y_1+x_1|,|y_2+x_2|\}$.

33. Maximová vzdálenost $\rho_m(X,Y)$ bodů $X=[x_1,x_2]$ a $Y=[y_1,z_2]$ je definována následovně

a) $\rho_m(X,Y)=\sup\{|y_1-x_1|,|y_2-x_2|\}$.

b) $\rho_m(X,Y)=\max\{|y_1-x_1|,|y_2-x_2|\}$.

c) $\rho_m(X,Y)=\max\{|y_1-x_1|+|y_2-x_2|\}$.

d) $\rho_m(X,Y)=\min\{|y_1-x_1|,|y_2-x_2|\}$.

e) $\rho_m(X,Y)=\max\{|y_1-x_1|,|z_2-x_2|\}$. Δ

34. Nechť $X = [a, b, x_3]$ a $Y = [y_1, y_2, y_3]$. Oktaedrická vzdálenost bodů X a Y je číslo $\rho_l(X, Y)$, pro které platí

a) $\rho_l(X, Y) = |y_1 - a| + |y_2 - b| + |y_3 - x_3|$. Δ

b) $\rho_l(X, Y) = |y_1 - a| - |y_2 - b| - |y_3 - x_3|$.

c) $\rho_l(X, Y) = y_1 - a + y_2 - b + y_3 - x_3$.

d) $\rho_l(X, Y) = |y_1 - b| + |y_2 - x_3| + |y_3 - a|$.

e) $\rho_l(X, Y) = y_1 + a + y_2 + b + y_3 + x_3$.

35. Kubická vzdálenost bodů $X = [x_1, x_2, x_3]$ a $Y = [y_1, y_2, y_3]$ je číslo $\rho_m(X, Y)$, které je rovno

a) $\rho_m(X, Y) = \max\big\{(y_1 - x_1), (y_2 - x_2), (y_3 - x_3)\big\}$.

b) Ani jedna z možností. Δ

c) $\rho_m(X, Y) = \max\big\{|y_1 + x_1|, |y_2 + x_2|, |y_3 + x_3|\big\}$.

d) $\rho_m(X, Y) = \max |y_1 - x_1|, |y_2 - x_2|, |y_3 - x_3|$.

e) $\rho_m(X, Y) = \min\big\{|y_1 - x_1|, |y_2 - x_2|, |y_3 - x_3|\big\}$.

36. Mějme $\rho(X, Y), \rho_l(X, Y)$ a $\rho_m(X, Y)$, kde $X, Y \in (M, \rho)$. Jaké vztahy mezi těmito vzdálenostmi platí?

a) $\rho(X, Y) \leq \rho_m(X, Y) \leq \rho_l(X, Y)$, $\forall (X, Y)$.

b) $\rho_l(X, Y) \geq \rho(X, Y) \geq \rho_m(X, Y)$, $\forall (X, Y)$. Δ

c) $\rho_l(X, Y) \leq \rho(X, Y) \leq \rho_m(X, Y)$, $\forall (X, Y)$.

d) $\rho(X, Y) \leq \rho_l(X, Y) \leq \rho_m(X, Y)$, $\forall (X, Y)$.

37. Mějme $\rho(X,Y), \rho_l(X,Y)$ a $\rho_m(X,Y)$, kde $X, Y \in (M,\rho)$. Jaké vztahy mezi těmito vzdálenostmi platí?

a) $\rho_l(X,Y) \leq \rho(X,Y) \leq \rho_m(X,Y)$, $\forall(X,Y)$.

b) $\rho(X,Y) \leq \rho_l(X,Y) \leq \rho_m(X,Y)$, $\forall(X,Y)$.

c) $\rho_m(X,Y) \leq \rho(X,Y) \leq \rho_l(X,Y)$, $\forall(X,Y)$. Δ

d) $\rho_m(X,Y) \leq \rho_l(X,Y) \leq \rho(X,Y)$, $\forall(X,Y)$.

38. Mějme úsečku s hraničními body A a B a metriku ρ. Nechť bod C leží na dané úsečce. Potom platí

a) $\rho(A,C) < \rho(A,B) \wedge \rho(C,B) < \rho(A,B)$.

b) $\rho(A,C) \leq \rho(A,B) \wedge \rho(C,B) \leq \rho(A,B)$. Δ

c) $\rho(A,C) \leq \rho(A,B) \wedge \rho(C,B) < \rho(A,B)$.

d) $\rho(A,C) < \rho(A,B) \wedge \rho(C,B) \leq \rho(A,B)$.

e) $\rho(A,C) \leq \rho(C,B) < \rho(A,B)$.

39. Mějme úsečku s hraničními body A a B a metriku ρ. Nechť bod C leží na dané úsečce. Potom neplatí

a) $\rho(A,C) < \rho(A,B) \wedge \rho(C,B) < \rho(A,B)$. Δ

b) $\rho(A,C) \leq \rho(A,B) \wedge \rho(C,B) \leq \rho(A,B)$.

c) $\rho(A,C) \leq \rho(A,B) \wedge \rho(C,B) < \rho(A,B)$. Δ

d) $\rho(A,C) < \rho(A,B) \wedge \rho(C,B) \leq \rho(A,B)$. Δ

e) $\rho(A,C) \leq \rho(C,B) < \rho(A,B)$. Δ

40. Mějme úsečku s hraničními body A a B a metriku ρ. Nechť bod C leží na dané úsečce mezi body A, B tak, že $C \neq A, C \neq B$. Potom platí

a) Ani jedna z možností.

b) $\rho(A, C) \leq \rho(A, B) \wedge \rho(C, B) \leq \rho(A, B)$. Δ

c) $\rho(A, C) < \rho(A, B) \wedge \rho(C, B) \leq \rho(A, B)$. Δ

d) $\rho(A, C) < \rho(A, B) \wedge \rho(C, B) < \rho(A, B)$. Δ

e) $\rho(A, C) \leq \rho(A, B) \wedge \rho(C, B) < \rho(A, B)$. Δ

41. Nechť M je libovolná neprázdná množina a ρ zobrazení z $M \times M$ do $\mathbb{R}$, které má pro všechna $X, Y, Z \in M$ vlastnosti: nezápornost, totožnost, symetrie, trojúhelníková nerovnost. Pak

a) (M, ρ) je metrický prostor, $\rho(X, Y)$ je metrika a ρ je vzdálenost prvků X a Y.

b) (M, ρ) je metrika, ρ se nazývá vzdálenost a $\rho(X, Y)$ je metrický prostor.

c) Ani jedna z možností.

d) (M, ρ) je metrický prostor, ρ je metrika a $\rho(X, Y)$ je vzdálenost prvků X a Y. Δ

e) (M, ρ) je metrický prostor, ρ je metrika a $\rho(X, Y)$ je vzdálenost prvků X, Y od M.

42. Množina $\mathcal{U}(a, \varepsilon) = \{x \in (M, \rho); \rho(x, a) < \varepsilon\}$ popisuje

a) Množinu všech bodů $x \in (M, \rho)$, pro které platí $\rho(x, a) \leq \varepsilon$.

b) ε-okolí bodu a v prostoru (M, ρ). Δ

c) $\mathcal{U}^*(a, \varepsilon) \cup \{a\}$. Δ

d) Redukované ε-okolí bodu a v prostoru (M, ρ).

e) Množinu všech bodů $x \in (M, \rho)$, pro které platí $\rho(x, a) < \varepsilon$. Δ

43. Co rozumíme ε-okolím bodu a v prostoru (M, ρ)?

a) $\mathcal{U}^*(a, \varepsilon) \cup \{a\}$. Δ

b) $\mathcal{U}(a, \varepsilon) = x \in (M, \rho); \rho(x, a) < \varepsilon$.

c) $\mathcal{U}(a, \varepsilon) = \{x \in (M, \rho); \rho(x, a) \leq \varepsilon\}$.

d) $\mathcal{U}(a, \varepsilon) = \{x \in (M, \rho); \rho(x, a) < \varepsilon\}$. Δ

e) $\mathcal{U}(a, \varepsilon) = \{x \in (M, \rho); 0 < \rho(x, a) < \varepsilon\}$.

44. Která z množin není ε-okolím bodu a v prostoru (M, ρ)?

a) $\mathcal{U}(a, \varepsilon) = \{x \in (M, \rho); \rho(x, a) \leq \varepsilon\}$. Δ

b) $\mathcal{U}(a, \varepsilon) = \{x \in (M, \rho); 0 < \rho(x, a) < \varepsilon\}$. Δ

c) $\mathcal{U}(a, \varepsilon) = \{x \in (M, \rho); \rho(x, a) < \varepsilon\}$.

d) $\mathcal{U}^*(a, \varepsilon) \cup \{a\}$.

e) $\mathcal{U}(a, \varepsilon) = x \in (M, \rho); \rho(x, a) < \varepsilon$. Δ

45. Co rozumíme ε-okolím bodu a v prostoru (M, ρ)?

a) Množinu bodů $x \in (M, \rho)$ takových, že vzdálenost bodů x a a je menší nebo rovna ε.

b) Množinu bodů $x \in (M, \rho)$ takových, že vzdálenost bodů x a a je menší než ε.

c) Množinu všech bodů $x \in (M, \rho)$ takových, že x a a je menší než ε.

d) Množinu všech bodů $x \in (M, \rho)$ takových, že vzdálenost bodů x a a je menší než ε. Δ

46. Co rozumíme ε-okolím bodu $\overline{x}$ v prostoru (M, ρ)?

a) Množinu všech bodů $x \in (M, \rho)$ takových, že vzdálenost bodů x a $\overline{x}$ je menší než ε. Δ

b) Množinu všech bodů $x \in (M, \rho)$ takových, že vzdálenost bodů a a $\overline{x}$ je menší než ε.

c) Množinu všech bodů $\overline{x} \in (M, \rho)$ takových, že x a $\overline{x}$ je menší než ε.

d) Množinu všech bodů $x \in (M, \rho)$ takových, že vzdálenost bodů x a a je menší než ε.

47. Nechť $\mathcal{U}^*(a, \varepsilon) = \big\{x \in (M, \rho); 0 < \rho(x, a) < \varepsilon\big\}$. Daný vztah určuje

a) Množinu všech bodů $x \in (M, \rho)$.

b) $\big\{a\big\} \setminus \mathcal{U}(a, \varepsilon)$.

c) Množinu vzdáleností větších než 0 a zároveň menších než ε.

d) Ani jedna z možností. Δ

48. Nechť $\mathcal{U}^*(a, \varepsilon) = \big\{x \in (M, \rho); 0 < \rho(x, a) < \varepsilon\big\}$. Daný vztah určuje

a) Množinu bodů $x \in (M, \rho)$. Δ

b) Redukované ε-okolí bodu a v prostoru (M, ρ). Δ

c) $\mathcal{U}(a, \varepsilon) \setminus \big\{a\big\}$. Δ

d) Ani jedna z možností.

e) Množinu bodů $x \in (M, \rho)$ takových, že platí $0 < \rho(x, a) < \varepsilon$. Δ

49. Redukovaným ε-okolím bodu a v prostoru (M, ρ) rozumíme

a) Ani jedna z možností. Δ

b) $\mathcal{U}^*(a, \varepsilon) = \big\{x \in (M, \rho); 0 \leq \rho(x, a) < \varepsilon\big\}$.

c) $\mathcal{U}^*(a, \varepsilon) = x \in (M, \rho); 0 < \rho(x, a) < \varepsilon$.

d) $\mathcal{U}^*(a, \varepsilon) = \big\{x \in (M, \rho); 0 < \rho(x, a) \leq \varepsilon\big\}$.

50. ε-okolím bodu a v prostoru (M, ρ) rozumíme

a) $\mathcal{U}(a, \varepsilon) = \big\{x \in (M, \rho); 0 \leq \rho(x, a) \leq \varepsilon\big\}$.

b) Ani jedna z možností.

c) $\mathcal{U}(a, \varepsilon) = \big\{x \in (M, \rho); 0 \leq \rho(x, a) < \varepsilon\big\}$. Δ

d) $\mathcal{U}(a, \varepsilon) = x \in (M, \rho); 0 < \rho(x, a) < \varepsilon$.

e) $\mathcal{U}(a, \varepsilon) = \big\{x \in (M, \rho); 0 < \rho(x, a) \leq \varepsilon\big\}$.

51. Redukovaným b-okolím bodu ε v prostoru (M, ρ) rozumíme

a) Ani jedna z možností.

b) $\mathcal{U}^*(\varepsilon, b) = \big\{x \in (M, \rho); 0 \leq \rho(x, \varepsilon) < b\big\}$.

c) $\mathcal{U}^*(\varepsilon, b) = x \in (M, \rho); 0 < \rho(x, \varepsilon) < b$.

d) $\mathcal{U}^*(\varepsilon, b) = \big\{x \in (M, \rho); 0 < \rho(x, \varepsilon) < b\big\}$. Δ

e) $\mathcal{U}^*(\varepsilon, b) = \big\{x \in (M, \rho); 0 < \rho(x, \varepsilon) \leq b\big\}$.

52. Jaký je vztah mezi $\mathcal{U}(a, \varepsilon)$ a $\mathcal{U}^*(a, \varepsilon)$?

a) $\mathcal{U}^*(a, \varepsilon) = \mathcal{U}(a, \varepsilon) \cup \big\{a\big\}$.

b) $\mathcal{U}^*(a, \varepsilon) = \mathcal{U}(a, \varepsilon) \setminus \big\{a\big\}$. Δ

c) $\mathcal{U}(a, \varepsilon) = \mathcal{U}^*(a, \varepsilon) \cap \big\{a\big\}$.

d) $\mathcal{U}^*(a, \varepsilon) = \mathcal{U}(a, \varepsilon) \cap \big\{a\big\}$.

e) $\mathcal{U}(a, \varepsilon) = \mathcal{U}^*(a, \varepsilon) \cup \big\{a\big\}$. Δ

53. Jaký je vztah mezi $\mathcal{U}(a, \varepsilon)$ a $\mathcal{U}^*(b, \varepsilon)$?

a) $\mathcal{U}^*(a, \varepsilon) = \mathcal{U}(a, \varepsilon) \cup \big\{b\big\}$.

b) $\mathcal{U}^*(a, \varepsilon) = \mathcal{U}(a, \varepsilon) \setminus \big\{a\big\}$.

c) $\mathcal{U}(a, \varepsilon) = \mathcal{U}^*(b, \varepsilon) \cap \big\{a\big\}$.

d) $\mathcal{U}^*(b, \varepsilon) = \mathcal{U}(a, \varepsilon) \cap \big\{a\big\}$.

e) Ani jedna z možností. Δ

54. $\mathcal{U}(\varepsilon, a)$ je označení pro

a) Okolí bodu a s poloměrem ε.

b) Redukované okolí bodu a s poloměrem ε.

c) Redukované okolí bodu ε s poloměrem a.

d) Okolí bodu ε s poloměrem a. Δ

55. $\mathcal{U}^*(\varepsilon, a)$ je označení pro

a) Okolí bodu a s poloměrem ε.

b) Redukované okolí bodu a s poloměrem ε.

c) Redukované okolí bodu ε s poloměrem a. Δ

d) Okolí bodu ε s poloměrem a.

56. $\mathcal{U}^*(\varepsilon, a)$ není označení pro

a) Okolí bodu a s poloměrem ε. Δ

b) Redukované okolí bodu a s poloměrem ε. Δ

c) Redukované okolí bodu ε s poloměrem a.

d) Okolí bodu ε s poloměrem a. Δ

57. Jak vypadá $\mathcal{U}(a, \varepsilon)$ v prostoru $(\mathbb{R}^2, \rho)$?

a) Otevřený čtverec.

b) Uzavřený kruh.

c) Otevřený čtverec postavený na špici.

d) Otevřený kruh. Δ

e) Uzavřený čtverec.

58. Jak vypadá $\mathcal{U}^*(a,\varepsilon)$ v prostoru $(\mathbb{R}^2,\rho)$?

a) Otevřený čtverec.

b) Uzavřený kruh.

c) Ani jedna z možností. Δ

d) Otevřený kruh.

e) Uzavřený čtverec.

59. Jak vypadá $\mathcal{U}(a,\varepsilon)$ v prostoru $(\mathbb{N}^2,\rho)$?

a) Otevřený čtverec.

b) Uzavřený kruh.

c) Ani jedna z možností. Δ

d) Otevřený kruh.

e) Uzavřený čtverec.

60. Jak vypadá $\mathcal{U}(a,\varepsilon)$ v prostoru $(\mathbb{R}^2,\rho_l)$?

a) Uzavřený čtverec postavený na špici.

b) Uzavřený čtverec.

c) Otevřený čtverec postavený na špici. Δ

d) Otevřený kruh.

e) Otevřený čtverec.

61. Jak vypadá $\mathcal{U}^*(a,\varepsilon)$ v prostoru $(\mathbb{R}^2,\rho_l)$?

a) Uzavřený čtverec postavený na špici.

b) Uzavřený čtverec postavený na špici bez bodu b.

c) Otevřený čtverec postavený na špici.

d) Otevřený čtverec postavený na špici bez bodu a. Δ

e) Uzavřený čtverec postavený na špici bez bodu a.

62. Jak vypadá $\mathcal{U}(a,\varepsilon)$ v prostoru $(\mathbb{R}^2,\rho_m)$?

a) Uzavřený kruh.

b) Uzavřený čtverec.

c) Otevřený čtverec postavený na špici.

d) Ani jedna z možností. Δ

e) Otevřený kruh.

63. Jak vypadá $\mathcal{U}^*(a,\varepsilon)$ v prostoru $(\mathbb{R}^2,\rho_m)$?

a) Ani jedna z možností. Δ

b) Otevřený čtverec.

c) Otevřený čtverec postavený na špici.

d) Otevřený čtverec bez bodu x.

e) Otevřený kruh.

64. Vyberte množinu, kterou označujeme jako $\mathcal{U}(k,l)$

a) $\big\{x \in (M,\rho); |x-l| < k\big\}$.

b) $x \in (M,\rho); |x-k| < l$.

c) $\big\{x \in (M,\rho); |l-k| < x\big\}$.

d) $\big\{x \in (M,\rho); |x-k| < l\big\}$. Δ

65. Vyberte množinu, kterou označujeme jako $\mathcal{U}(6,11)$

a) $(5,17)\setminus\{11\}$.

b) $(-5,17)\setminus\{11\}$.

c) $(-5,17)$. Δ

d) $(5,17)$.

66. Vyberte množinu, kterou označujeme jako $\mathcal{U}^*(4,3)$

a) $(1,7) \setminus \{3\}$.

b) $(-1,7) \setminus \{4\}$.

c) $(-1,7) \setminus \{3\}$.

d) $(1,7) \setminus \{4\}$. Δ

67. Vyberte množinu, kterou označujeme jako $\mathcal{U}^*(4,3)$

a) $\{3\} \setminus (1,7)$.

b) $\{4\} \setminus (-1,7)$.

c) Ani jedna z možností. Δ

d) $\{3\} \setminus (-1,7)$.

e) $\{4\} \setminus (1,7)$.

68. Kolik bodů obsahuje $\mathcal{U}([0,0],3)$ v prostoru $(\mathbb{N}_0^2, \rho)$

a) 11

b) 4

c) 21

d) 9 Δ

e) 36

69. Kolik bodů obsahuje $\mathcal{U}([0,0],3)$ v prostoru $(\mathbb{N}^2, \rho)$

a) 11

b) 4 Δ

c) 21

d) 9

e) 36

70. Kolik bodů obsahuje $\mathcal{U}^*([0,0],3)$ v prostoru $(\mathbb{N}_0^2,\rho)$

a) 20

b) 9

c) 21

d) 16

e) 8 Δ

71. Kolik bodů obsahuje $\mathcal{U}^*([0,0],3)$ v prostoru $(\mathbb{N}^2,\rho)$

a) 4 Δ

b) 3

c) 9

d) 20

e) 8

72. Nechť $M \neq \emptyset$ a ρ je metrika. $\big\{x \in (M,\rho); \rho(x,a) < \varepsilon\big\}$ je

a) Otevřená koule se středem a a poloměrem ε. Δ

b) Ani jedna z možností.

c) Otevřená koule se středem ε a poloměrem a.

d) Sféra se středem a a poloměrem ε.

e) ε-okolí bodu a. Δ

73. Nechť $M \neq \emptyset$ a ρ je metrika. $\big\{a \in (M,\rho); \rho(a,\varepsilon) < x\big\}$ je

a) Otevřená koule se středem a a poloměrem ε.

b) Otevřená koule se středem a a poloměrem x.

c) Otevřená koule se středem ε a poloměrem a.

d) Otevřená koule se středem ε a poloměrem x. Δ

e) Otevřená koule se středem x a poloměrem a.

74. Nechť $M \neq \emptyset$ a ρ je metrika. $\{a \in (M, \rho); \rho(a, x) < \varepsilon\}$ je

a) Otevřená koule se středem a a poloměrem ε.

b) Otevřená koule se středem a a poloměrem x.

c) Otevřená koule se středem ε a poloměrem a.

d) Otevřená koule se středem ε a poloměrem x.

e) Otevřená koule se středem x a poloměrem ε. Δ

75. Nechť $M \neq \emptyset$ a ρ je metrika. $\{x \in (M, \rho); \rho(x, \varepsilon) < a\}$ je

a) Otevřená koule se středem a a poloměrem ε.

b) Ani jedna z možností.

c) Otevřená koule se středem ε a poloměrem a. Δ

d) Sféra se středem a a poloměrem ε.

e) ε-okolí bodu a.

76. Nechť $M \neq \emptyset$ a ρ je metrika. $\{x \in (M, \rho); \rho(x, a) \leq \varepsilon\}$ je

a) Otevřená koule se středem a a poloměrem ε.

b) Uzavřená koule se středem x a poloměrem a.

c) Sféra se středem x a poloměrem a.

d) Sféra se středem a a poloměrem ε.

e) Uzavřená koule se středem a a poloměrem ε. Δ

77. Nechť $M \neq \emptyset$ a ρ je metrika. $\{a \in (M, \rho); \rho(a, b) = \varepsilon\}$ je

a) Sféra se středem a a poloměrem ε.

b) Uzavřená koule se středem a a poloměrem ε.

c) Uzavřená koule se středem b a poloměrem ε.

d) Sféra se středem b a poloměrem ε. Δ

e) Sféra se středem b a poloměrem a.

78. Nechť $M \neq \emptyset$ a ρ je metrika. $\big\{x \in (M, \rho); \rho(x, b) = \varepsilon\big\}$ je

a) Sféra se středem x a poloměrem ε.

b) Uzavřená koule se středem x a poloměrem ε.

c) Uzavřená koule se středem b a poloměrem ε.

d) Sféra se středem b a poloměrem ε. Δ

e) Sféra se středem b a poloměrem x.

79. Nechť $\Omega(a, \varepsilon)$ je otevřená koule, $\overline{\Omega}(a, \varepsilon)$ uzavřená koule a $\mathcal{S}(a, \varepsilon)$ je sféra. Potom platí

a) $\overline{\Omega}(a, \varepsilon) = \mathcal{S}(a, \varepsilon) \cap \Omega(a, \varepsilon)$.

b) $\mathcal{S}(a, \varepsilon) = \Omega(a, \varepsilon) \setminus \overline{\Omega}(a, \varepsilon)$.

c) $\overline{\Omega}(a, \varepsilon) = \mathcal{S}(a, \varepsilon) \cup \Omega(a, \varepsilon)$. Δ

d) $\Omega(a, \varepsilon) = \overline{\Omega}(a, \varepsilon) \setminus \Omega(a, \varepsilon)$.

e) $\mathcal{S}(a, \varepsilon) = \overline{\Omega}(a, \varepsilon) \setminus \Omega(a, \varepsilon)$. Δ

80. Nechť (M, ρ) je metrický prostor a $A \subset M$. Vnitřním bodem množiny A je

a) Bod $a \in M$, jestliže existuje $\mathcal{U}(a)$ tak, že $\mathcal{U}(a) \subset A$.

b) Bod $b \in A$, jestliže existuje $\mathcal{U}(b)$ tak, že $\mathcal{U}(b) \subset A$. Δ

c) Bod $a \in M$, jestliže pro každé $\mathcal{U}(a)$ platí, že $\mathcal{U}(a) \subset A$.

d) Bod $a \in A$, jestliže existuje $\mathcal{U}(a)$ tak, že $\mathcal{U}(a) \subset A$. Δ

e) Bod $a \in A$, jestliže pro každé $\mathcal{U}(a)$ platí, že $\mathcal{U}(a) \subset A$.

81. Nechť (M, ρ) je metrický prostor a $A \subset M$. Vnitřním bodem množiny A je

a) Bod $a \in M$, jestliže $\exists\, \mathcal{U}(a)$ tak, že $\mathcal{U}(a) \subset A$.

b) Bod $b \in A$, jestliže $\exists\, \mathcal{U}(b)$ tak, že $\mathcal{U}(b) \subset A$. Δ

c) Bod $a \in M$, jestliže $\exists\, \mathcal{U}(a)$ tak, že $\mathcal{U}(a) \subset A$.

d) Bod $a \in A$, jestliže $\exists!\, \mathcal{U}(a)$ tak, že $\mathcal{U}(a) \subset A$.

e) Bod $a \in A$, jestliže $\forall\, \mathcal{U}(a)$ platí, že $\mathcal{U}(a) \subset A$.

82. Množina všech vnitřních bodů množiny A je

a) Vnitřek množiny A a značí se $intA$. Δ

b) Otevřená množina a značí se A°.

c) Otevřená množina a značí se $\overline{A}$.

d) Vnitřek množiny A a značí se $\overline{A}$.

e) Vnitřek množiny A a značí se A°. Δ

83. Množina A se nazývá otevřená, jestliže

a) $A = \overline{A} \setminus h(A)$. Δ

b) $A = \overline{A}$.

c) $A^\circ \subset A$.

d) $A = A^\circ$. Δ

e) $A = h(A)$.

84. Nechť $K(q, r)$ je r-okolí bodu q. Množina A se nazývá otevřená právě tehdy, když

a) $\forall q \in A \ \exists r < 0 : K(q, r) \subset A$.

b) $\exists q \in A \ \forall r > 0 : K(q, r) \subset A$.

c) $\forall q \in A \ \exists r > 0 : K(q, r) \subset A$. Δ

d) $\forall q \in A \ \exists r \geq 0 : K(q, r) \subset A$.

85. Nechť (M, ρ) je metrický prostor a $A \subset M$. Hraničním bodem množiny A je

a) Bod $a \in A$, jestliže každé jeho okolí obsahuje aspoň 1 bod z A a aspoň 1 bod z $M \setminus A$.

b) Bod $a \in M$, jestliže existuje $\mathcal{U}(a)$, které obsahuje aspoň 1 bod z A a aspoň 1 bod z $M \setminus A$.

c) Bod $a \in M$, jestliže každé jeho okolí obsahuje aspoň 1 bod z A a aspoň 1 bod z $M \setminus A$. Δ

d) Bod $a \in A$, jestliže existuje $\mathcal{U}(a)$, které obsahuje aspoň 1 bod z A a aspoň 1 bod z $M \setminus A$.

e) Bod $a \in M$, jestliže každé jeho okolí obsahuje právě 1 bod z A a právě 1 bod z $M \setminus A$.

86. Nechť (M, ρ) je metrický prostor a $A \subset M$. Hraničním bodem množiny A je

a) Bod $a \in A$, jestliže každé jeho okolí obsahuje právě 1 bod z A a právě 1 bod z $M \setminus A$.

b) Bod $a \in M$, jestliže existuje $\mathcal{U}(a)$, které obsahuje aspoň 1 bod z A a právě 1 bod z $M \setminus A$.

c) Ani jedna z možností. Δ

d) Bod $a \in A$, jestliže existuje $\mathcal{U}(a)$, které obsahuje právě 1 bod z A a aspoň 1 bod z $M \setminus A$.

87. Množina všech hraničních bodů množiny A je

a) Hranice množiny A a značí se $\overline{A}$.

b) Hranice množiny A a značí se $h(A)$. Δ

c) Hranice množiny A a značí se A'.

d) Hranice množiny A a značí se $bd(A)$. Δ

e) Hranice množiny A a značí se $h(A)$ nebo $bd(A)$. Δ

88. Množina A se nazývá uzavřená, jestliže

a) $A = \overline{A}$. Δ

b) $A = A'$.

c) $A = h(A)$.

d) $A = A^\circ \cup h(A)$. Δ

89. Uzávěr množiny A lze zapsat jako $\overline{A} =$

a) $A^\circ \cup h(A)$ a značí se A'.

b) $A^\circ \cap \overline{A}$.

c) $A^\circ \cap h(A)$.

d) $A^\circ \cup h(A)$. Δ

90. Nechť (M, ρ) je metrický prostor a $A \subset M$. Hromadným bodem množiny A je

a) Bod $a \in A$, jestliže každé jeho okolí obsahuje nekonečně mnoho bodů z množiny A.

b) Bod $a \in A$, jestliže existuje okolí, které obsahuje nekonečně mnoho bodů z množiny A.

c) Bod $a \in M$, jestliže existuje okolí, které obsahuje nekonečně mnoho bodů z množiny A.

d) Bod $a \in M$, jestliže každé jeho okolí obsahuje nekonečně mnoho bodů z množiny A. Δ

91. Nechť (M, ρ) je metrický prostor a $A \subset M$. Hromadným bodem množiny A je

a) Bod $a \in A$, jestliže jeho okolí obsahuje nekonečně mnoho bodů z množiny A.

b) Ani jedna z možností. Δ

c) Bod $a \in M$, jestliže jeho okolí obsahuje aspoň 1 bod z množiny A.

d) Bod $a \in M$, jestliže jeho okolí obsahuje nekonečně mnoho bodů z množiny A.

92. Množina všech hromadných bodů množiny A je

a) Hromada množiny A a značí se A'.

b) Derivace množiny A a značí se A'. Δ

c) Derivace množiny A a značí se $h(A)$.

d) Hromada množiny a značí se $hr(A)$.

e) Hromada množiny A a značí se $h(A)$.

93. Nechť (M,ρ) je metrický prostor a $A \subset M$. Izolovaným bodem množiny A je

a) Bod $a \in M$, který není hromadným bodem množiny A.

b) Bod $a \in A$, jestliže existuje $\mathcal{U}(a)$, ve kterém je pouze jeden bod z množiny A. Δ

c) Bod $a \in A$, jestliže existuje $\mathcal{U}^*(a)$, ve kterém není žádný bod z množiny A. Δ

d) Bod $a \in M$, jestliže existuje $\mathcal{U}^*(a)$, ve kterém není žádný bod z množiny A.

e) Bod $a \in A$, který není hromadným bodem množiny A. Δ

94. Množina, která obsahuje pouze izolované body, se nazývá

a) Izolovaná množina.

b) Integrace množiny.

c) Izolant množiny.

d) Diskrétní množina. Δ

95. Mějme (M,ρ), kde $M = \mathbb{R}^n$. Nechť $A \subset M$. Potom A je konvexní

a) Lze-li 2 body spojit úsečkou ležící v A.

b) Lze-li každé 2 její body spojit úsečkou ležící v A. Δ

c) Lze-li každé 2 její body spojit úsečkou.

d) Lze-li alespoň 2 její body spojit úsečkou ležící v A.

96. Mějme (M,ρ), kde $M = \mathbb{R}^n$. Nechť $A \subset M$. Potom A je konvexní

a) Lze-li 2 její body spojit úsečkou ležící v A.

b) Lze-li konečný počet bodů spojit úsečkou ležící v A.

c) Lze-li každé 2 její body spojit úsečkou ležící v A. Δ

d) Lze-li každé 2 její body spojit úsečkou neležící v A.

97. Mějme (M, ρ), kde $M = \mathbb{R}^n$. Nechť $A \subset M$. Potom A není konvexní

a) Lze-li 2 její body spojit úsečkou ležící v A. Δ

b) Lze-li konečný počet bodů spojit úsečkou ležící v A. Δ

c) Lze-li každé 2 její body spojit úsečkou ležící v A.

d) Lze-li každé 2 její body spojit úsečkou neležící v A. Δ

98. Mějme (M, ρ), kde $M = \mathbb{R}^n$. Nechť $A \subset M$. Potom A je souvislá

a) Lze-li 2 body spojit lomenou čarou ležící v A.

b) Lze-li každé 2 její body spojit lomenou čarou ležící v A. Δ

c) Lze-li alespoň 2 její body spojit lomenou čarou.

d) Lze-li alespoň 2 její body spojit lomenou čarou ležící v A.

99. Mějme (M, ρ), kde $M = \mathbb{R}^n$. Nechť $A \subset M$. Potom A je souvislá

a) Lze-li 2 její body spojit lomenou čarou ležící v A.

b) Lze-li konečný počet bodů spojit lomenou čarou ležící v A.

c) Lze-li každé 2 její body spojit lomenou čarou ležící v A. Δ

d) Lze-li každé 2 její body spojit lomenou čarou neležící v A.

100. Mějme (M, ρ), kde $M = \mathbb{R}^n$. Nechť $A \subset M$. Potom A není souvislá

a) Lze-li 2 její body spojit lomenou čarou ležící v A. Δ

b) Lze-li konečný počet bodů spojit lomenou čarou ležící v A. Δ

c) Lze-li každé 2 její body spojit lomenou čarou ležící v A.

d) Lze-li každé 2 její body spojit lomenou čarou neležící v A. Δ

101. Postačující podmínky proto, aby $A \subset M$ byla oblast, jsou

a) A je uzavřená a konvexní.

b) A je otevřená a konvexní. Δ

c) A je otevřená a souvislá. Δ

d) A je uzavřená a souvislá.

102. Kompaktní množina

a) Může být otevřená.

b) Musí být souvislá.

c) Může být konvexní. Δ

d) Musí být uzavřená. Δ

103. Diskrétní množina je

a) Konvexní.

b) Uzavřená. Δ

c) Souvislá.

d) Ani jedna z možností.

104. Derivace množiny A

a) Může být oblast.

b) Je uzavřená. Δ

c) Je otevřená.

d) Musí obsahovat vnitřní body množiny A. Δ

105. Hranice množiny A

a) Nemůže být oblast. Δ

b) Ani jedna z možností.

c) Může být otevřená.

d) Je souvislá.

106. Vyberte tvrzení, které platí pro libovolnou dvojici množin A a B

a) $\overline{A} \subset \overline{B} \Rightarrow A \subset B$.

b) $\overline{A} \subset \overline{B} \Leftrightarrow A \subset B$.

c) $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$. Δ

d) $A \subset B \Leftrightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.

107. Určete, které vztahy jsou pravdivé pro některou dvojici množin A a B, $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$

a) $\overline{A} \subset \overline{B} \Rightarrow A \subset B$. Δ

b) $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$. Δ

c) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \subset B$.

d) $\overline{A} \subset \overline{B} \Leftrightarrow A \subset B$. Δ

e) $A \subset B \Leftrightarrow \overline{B} \subset \overline{A}$. Δ

108. O kterém tvrzení nemůžeme říct, že platí pro každou dvojici množin A a B

a) $\overline{A} \subset \overline{B} \Rightarrow A \subset B$. Δ

b) $\overline{A} \subset \overline{B} \Leftrightarrow A \subset B$. Δ

c) $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.

d) $A \subset B \Leftrightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$. Δ

109. Vyberte tvrzení, které platí pro libovolnou množinu A

a) $A \subset \overline{A}$. Δ

b) $\overline{A} \subset A$.

c) $intA \subset A$. Δ

d) $A \subset intA$.

110. O kterém tvrzení nemůžeme říct, že platí pro každou dvojici množin A a B

a) $A \subset \overline{A}$.

b) $\overline{A} \subset A$. Δ

c) $intA \subset A$.

d) $A \subset intA$. Δ

111. Vyberte tvrzení, které platí pro libovolnou dvojici množin A a B, $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$

a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. Δ

b) $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cup \overline{B}$. Δ

c) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

d) $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$. Δ

112. O kterém tvrzení nemůžeme říct, že platí pro každou dvojici množin A a B

a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

b) $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cup \overline{B}$.

c) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. Δ

d) $\overline{A \cap B} \neq \overline{A} \cap \overline{B}$.

113. Nechť $A \subset (X, \rho)$. Vyberte platné vztahy

a) $X \setminus (X - \overline{A}) = A^\circ$.

b) $X \setminus intA = \overline{X - A}$. Δ

c) $X \setminus h(A) = intA \cap (X - \overline{A})$.

d) $X \setminus \overline{A} = int(X - A)$. Δ

114. Nechť $A \subset (M, \rho)$. Vyberte platné vztahy

a) $M \setminus (M - \overline{A}) = A^\circ$.

b) $M \setminus intA = \overline{M - A}$. Δ

c) $M \setminus h(A) = intA \cap (M - \overline{A})$.

d) $M \setminus \overline{A} = int(M - A)$. Δ

115. Nechť $A \subset (X, \rho)$. Vyberte neplatné vztahy

a) $X \setminus (X - \overline{A}) = A^\circ$. Δ

b) $X \setminus intA = \overline{X - A}$.

c) $X \setminus h(A) = intA \cap (X - \overline{A})$. Δ

d) $X \setminus \overline{A} = int(X - A)$.

116. Nechť $N \subset (X, \rho)$. Vyberte neplatné vztahy

a) $X \setminus (X - \overline{N}) = N^\circ$. Δ

b) $X \setminus intN = \overline{X - N}$.

c) $X \setminus h(N) = intN \cap (X - \overline{N})$. Δ

d) $X \setminus \overline{N} = int(X - N)$.

117. Nechť $A \subset (X, \rho)$. Vyberte platné vztahy

a) $X \setminus \overline{A} = intA \cap h(A)$.

b) $h(A) = X \setminus ((X - \overline{A}) \cup intA)$. Δ

c) $X \setminus \overline{A} = X \setminus (intA \cup h(A))$. Δ

d) $\overline{A} \setminus \overline{X - A} = X - intA$.

118. Nechť $A \subset (X, \rho)$. Vyberte neplatné vztahy

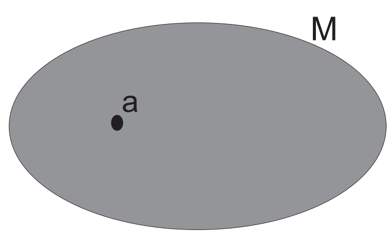
a) $X \setminus \overline{A} = intA \cap h(A)$. Δ

b) $\overline{A} \setminus \overline{X - A} = X - intA$. Δ

c) $h(A) = X \setminus ((X - \overline{A}) \cup intA)$.

d) $X \setminus \overline{A} = X \setminus (intA \cup h(A))$.

119. Nechť je dána množina M a bod $a \in M$. Vyberte pravdivé tvrzení o množině M na obrázku



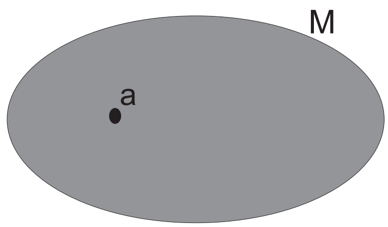
a) Bod a je hromadný bod množiny M. Δ

b) Množina M je okolí bodu a.

c) Bod a je vnitřní bod množiny M. Δ

d) Množina M je kompaktní. Δ

120. Nechť je dána množina M a bod $a \in M$. Vyberte nepravdivé tvrzení o množině M na obrázku



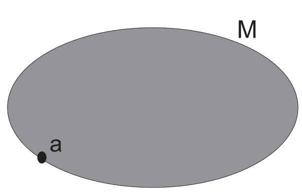
a) Množina M je okolí bodu a. Δ

b) Množina M je kompaktní.

c) Bod a je hromadný bod množiny M.

d) Bod a je vnitřní bod množiny M.

121. Nechť je dána množina M a bod $a \in M$. Vyberte pravdivé tvrzení o množině M na obrázku



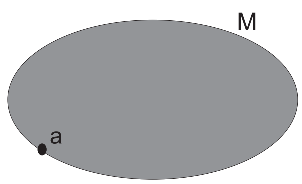
a) Množina M je konvexní. Δ

b) Bod a je vnitřní bod množiny M.

c) Množina M je okolí bodu a.

d) Bod a je hromadný bod množiny M. Δ

122. Nechť je dána množina M a bod $a \in M$. Vyberte nepravdivé tvrzení o množině M na obrázku



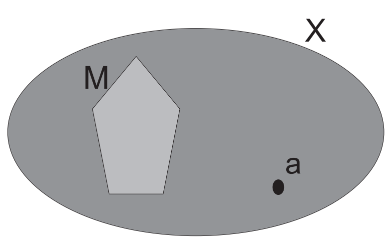
a) Bod a je hromadný bod množiny M.

b) Bod a je vnitřní bod množiny M. Δ

c) Množina M je konvexní.

d) Množina M je okolí bodu a. Δ

123. Nechť jsou dány množiny X, M a bod $a \in X$. Vyberte pravdivé tvrzení o množinách A, M na obrázku



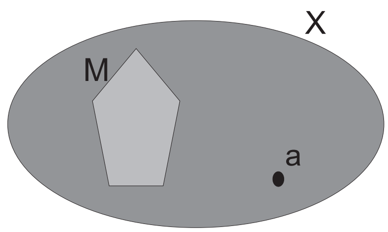
a) $\forall y \in M : y \in X$. Δ

b) $\exists! y \in X : y \notin M$.

c) $\forall y \in X : y \in M$.

d) $\exists y \in X : y \notin M$. Δ

124. Nechť jsou dány množiny X, M a bod $a \in X$. Vyberte nepravdivé tvrzení o množinách A, M na obrázku



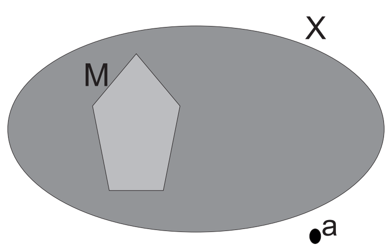
a) $\forall y \in X : y \in M$. Δ

b) $\exists y \in X : y \notin M$.

c) $\exists! y \in X : y \notin M$. Δ

d) $\forall y \in M : y \in X$.

125. Nechť jsou dány množiny X, M a bod $a \in M$. Vyberte pravdivé tvrzení o množinách A, M na obrázku



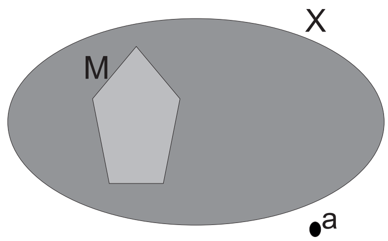
a) $\exists! y \in X : y \notin M$.

b) $\forall y \in M : y \in X$.

c) $\exists y \in X : y \notin M$. Δ

d) $\forall y \in X : y \in M$.

126. Nechť jsou dány množiny X, M a bod $a \in M$. Vyberte nepravdivé tvrzení o množinách A, M na obrázku



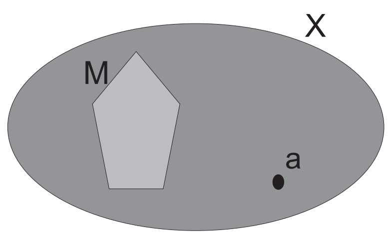
a) $\forall y \in M : y \in X$. Δ

b) $\exists y \in X : y \notin M$.

c) $\exists! y \in X : y \notin M$. Δ

d) $\forall y \in X : y \in M$. Δ

127. Jestliže bod $a \in M$, pak



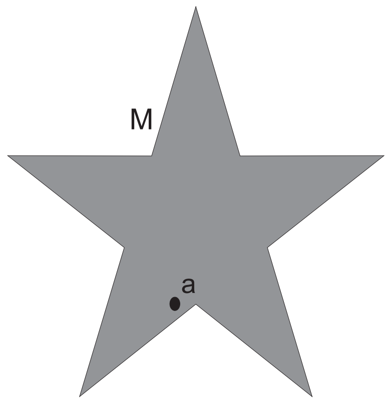
a) bod a je izolovaným bodem množiny X.

b) $\forall x \in M : x$ je hromadný bod množiny M.

c) bod a je izolovaným bodem množiny M. Δ

d) bod a je vnitřním bodem množiny X. Δ

128. Nechť je dána množina M a bod $a \in M$. Vyberte pravdivé tvrzení o množině M na obrázku



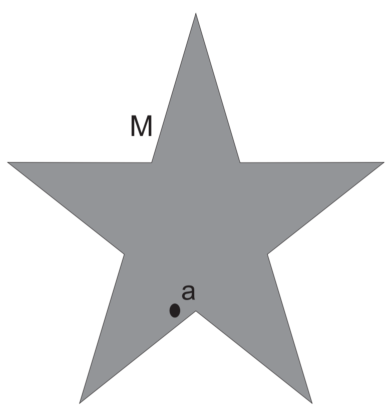
a) Množina M je souvislá, ale není konvexní. Δ

b) $a \in \overline{M}$. Δ

c) Množina M je konvexní, ale není souvislá.

d) Množina M je otevřená.

129. Nechť je dána množina M a bod $a \in M$. Vyberte nepravdivé tvrzení o množině M na obrázku



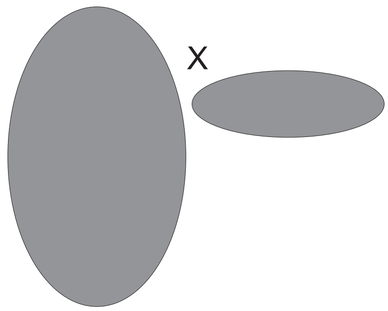
a) Množina M je otevřená. Δ

b) Množina M je konvexní, ale není souvislá. Δ

c) $a \in \overline{M}$.

d) Množina M je souvislá, ale není konvexní.

130. Nechť je dána množina X. Vyberte pravdivé tvrzení o množině X na obrázku



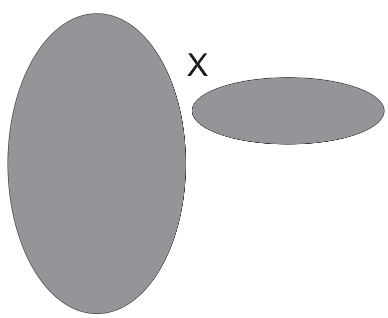
a) Množina X je derivace množiny X.

b) Množina X je kompaktní nebo souvislá. Δ

c) Množina X je konvexní.

d) Množina X je omezená. Δ

131. Nechť je dána množina X. Vyberte nepravdivé tvrzení o množině X na obrázku



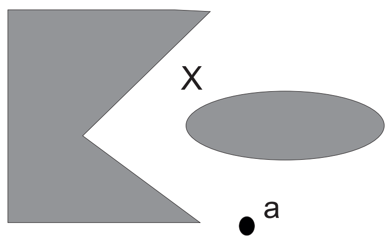
a) Množina X je konvexní. Δ

b) Množina X je omezená.

c) Množina X je derivace množiny X. Δ

d) Množina X je kompaktní nebo souvislá.

132. Nechť je dána množina X a bod $a \notin X$. Vyberte pravdivé tvrzení o množině X na obrázku



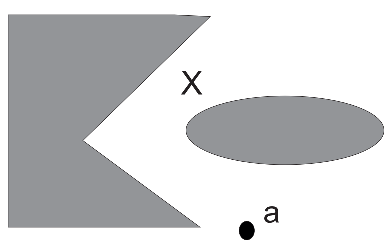
a) $M = X \cup \{a\} \Rightarrow \forall y \in M : y$ je hromadný bod množiny M.

b) $\exists K > 0 : X \subset \mathcal{U}(0, K)$. Δ

c) Bod a je izolovaným bodem množiny X.

d) Jednoprvková množina $A = \{a\}$ je diskrétní množina A. Δ

133. Nechť je dána množina X a bod $a \notin X$. Vyberte nepravdivé tvrzení o množině X na obrázku



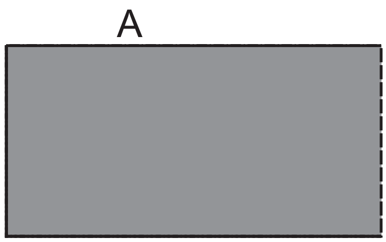
a) Bod a je izolovaným bodem množiny X. Δ

b) $M = X \cup \{a\} \Rightarrow \forall y \in M : y$ je hromadný bod množiny M. Δ

c) Jednoprvková množina $A = \{a\}$ je diskrétní množina A.

d) $\exists K > 0 : X \subset \mathcal{U}(0, K)$.

134. Nechť je dána množina $A \subset M$. Vyberte pravdivé tvrzení o množině A na obrázku



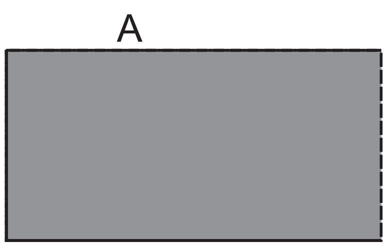
a) $\forall x \in A : x$ je vnitřní bod množiny A.

b) $\exists x \in M : x \in A' \wedge x \notin A$. Δ

c) $\forall x \in A : x$ je hromadný bod množiny A. Δ

d) $\forall x \in \overline{A} : x \in A$.

135. Nechť je dána množina $A \subset M$. Vyberte nepravdivé tvrzení o množině A na obrázku



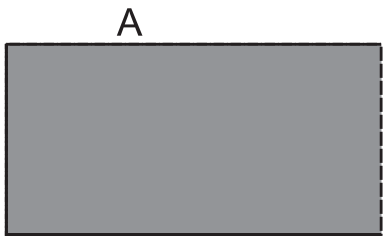
a) $\exists x \in M : x \in A' \wedge x \notin A$.

b) $\forall x \in A : x$ je hromadný bod množiny A.

c) $\forall x \in A : x$ je vnitřní bod množiny A. Δ

d) $\forall x \in \overline{A} : x \in A$. Δ

136. Nechť je dána množina A. Vyberte pravdivé tvrzení o množině A na obrázku



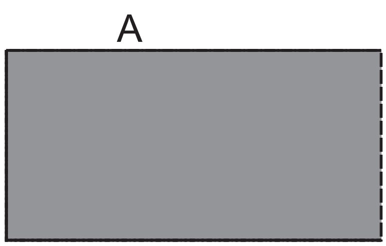
a) Množina A je omezená. Δ

b) Množina A je otevřená nebo konvexní. Δ

c) Množina A je uzavřená nebo otevřená.

d) Množina A je souvislá a zároveň to není oblast. Δ

137. Nechť je dána množina A. Vyberte nepravdivé tvrzení o množině A na obrázku



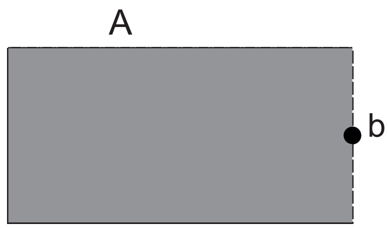
a) Množina A je otevřená nebo konvexní.

b) Množina A je omezená.

c) Množina A je souvislá a zároveň to není oblast.

d) Množina A je uzavřená nebo otevřená. Δ

138. Nechť je dána množina $A \subset M$ a bod $b \in A$. Vyberte pravdivé tvrzení o množině A na obrázku



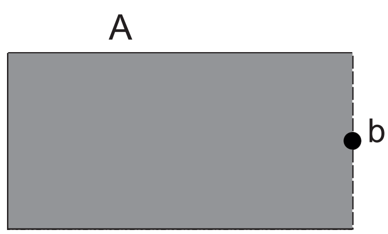
a) $\exists x \in M : x \in A' \wedge x \notin A$. Δ

b) $\forall x \in \overline{A} : x \in A$.

c) $\forall x \in A : x$ je hromadný bod množiny A. Δ

d) $\forall x \in A : x$ je vnitřní bod množiny A.

139. Nechť je dána množina $A \subset M$ a bod $b \in A$. Vyberte nepravdivé tvrzení o množině A na obrázku



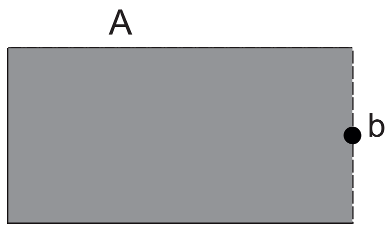
a) $\forall x \in \overline{A} : x \in A$. Δ

b) $\forall x \in A : x$ je hromadný bod množiny A.

c) $\forall x \in A : x$ je vnitřní bod množiny A. Δ

d) $\exists x \in M : x \in A' \wedge x \notin A$.

140. Nechť je dána množina A a bod $b \in A$. Vyberte pravdivé tvrzení o množině A na obrázku



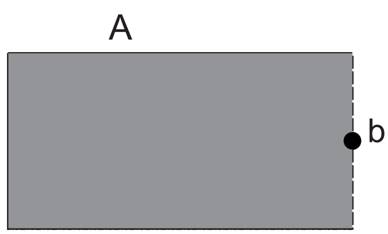
a) Množina A je souvislá a zároveň to není oblast. Δ

b) Množina A je omezená. Δ

c) Množina A je otevřená nebo konvexní. Δ

d) Množina A je uzavřená nebo otevřená.

141. Nechť je dána množina A a bod $b \in A$. Vyberte nepravdivé tvrzení o množině A na obrázku



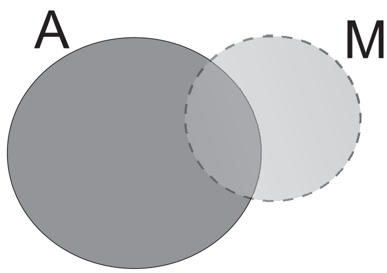
a) Množina A je souvislá a zároveň to není oblast.

b) Množina A je uzavřená nebo otevřená. Δ

c) Množina A je omezená.

d) Množina A je otevřená nebo konvexní.

142. Nechť jsou dány množiny A a M. Vyberte pravdivé tvrzení o množinách A, M na obrázku



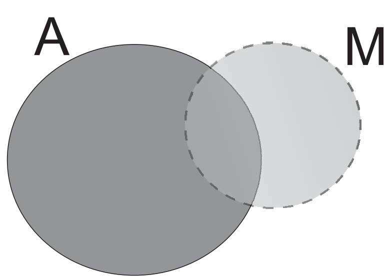
a) $A \cup M$ je souvislá. Δ

b) $A \cup M$ je konvexní.

c) $A \cap M$ je oblast.

d) Průsečíky kružnic náleží do množiny $A \cap M$.

143. Nechť jsou dány množiny A a M. Vyberte nepravdivé tvrzení o množinách A, M na obrázku



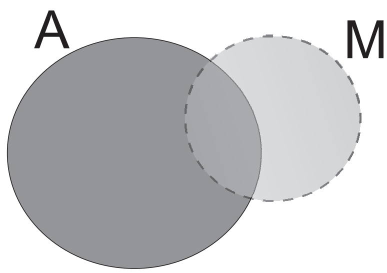
a) Průsečíky kružnic náleží do množiny $A \cap M$. Δ

b) $A \cap M$ je oblast. Δ

c) $A \cup M$ je souvislá.

d) $A \cup M$ je konvexní. Δ

144. Nechť jsou dány množiny A a M. Vyberte pravdivé tvrzení o množinách A, M na obrázku



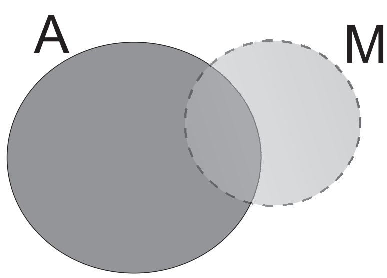
a) $\exists x \in A \cap M : x \notin A \wedge x \in M$.

b) $\exists y \in A : y \notin A \cap M$. Δ

c) $\exists x \in A \cup M : x \in A \wedge x \notin M$. Δ

d) $\exists z \in M : z \notin A \cup M$.

145. Nechť jsou dány množiny A a M. Vyberte nepravdivé tvrzení o množinách A, M na obrázku



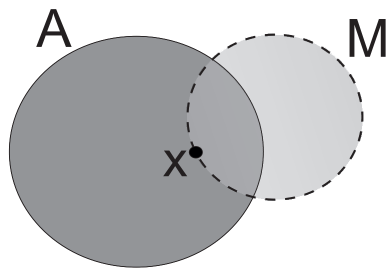
a) $\exists z \in M : z \notin A \cup M$. Δ

b) $\exists x \in A \cap M : x \notin A \wedge x \in M$. Δ

c) $\exists x \in A \cup M : x \in A \wedge x \notin M$.

d) $\exists y \in A : y \notin A \cap M$.

146. Nechť jsou dány množiny A, M a bod x. Bod x náleží do množiny



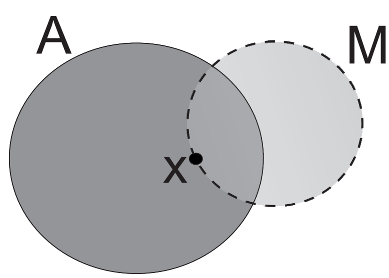
a) $A \cap M$.

b) $\overline{M}$. Δ

c) $A \setminus M$. Δ

d) $A \cup M$. Δ

147. Nechť jsou dány množiny A, M a bod x. Bod x nenáleží do množiny



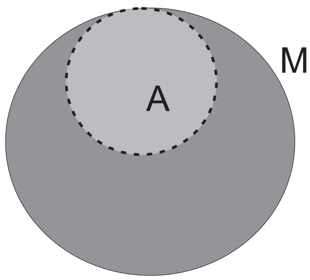
a) $A \cup M$.

b) $A \cap M$. Δ

c) $A \setminus M$.

d) $\overline{M}$.

148. Nechť jsou dány množiny A a M. Vyberte pravdivé tvrzení o množinách A, M na obrázku



a) $M \setminus A$ je uzavřená množina. Δ

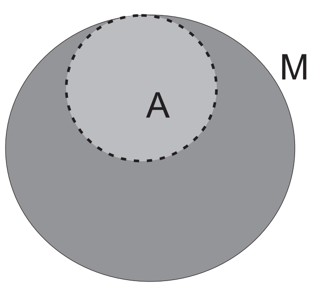
b) $M \setminus \overline{A}$ je otevřená množina.

c) $A \cup M$ je uzavřená množina. Δ

d) $A \cap (M \setminus A)$ je uzavřená množina. Δ

e) $A \cap (M \setminus A)$ je otevřená množina. Δ

149. Nechť jsou dány množiny A a M. Vyberte nepravdivé tvrzení o množinách A, M na obrázku



a) $A \cap (M \setminus A)$ je uzavřená množina.

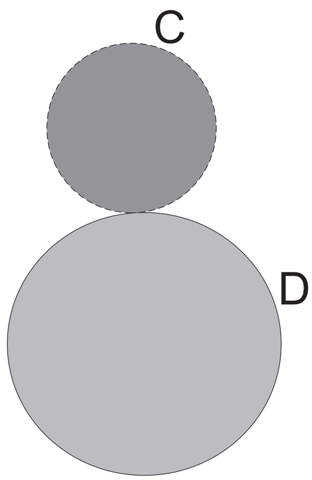
b) $M \setminus A$ je uzavřená množina.

c) $A \cup M$ je uzavřená množina.

d) $M \setminus \overline{A}$ je otevřená množina. Δ

e) $A \cap (M \setminus A)$ je otevřená množina.

150. Nechť jsou dány množiny C a D. Vyberte pravdivé tvrzení o množinách C, D na obrázku



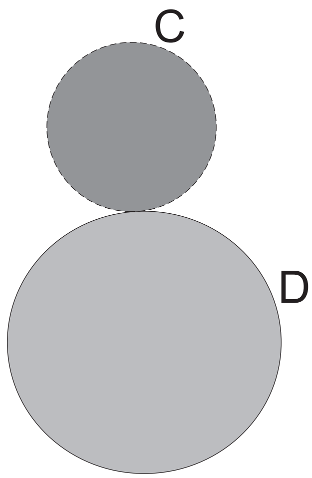
a) $C \cup D$ je souvislá množina. Δ

b) $\exists x \in (C \cap D) : x \in D$.

c) $C \cup D$ je kompaktní množina.

d) $\exists x \in C \wedge \exists y \in D : x = y$.

151. Nechť jsou dány množiny C a D. Vyberte nepravdivé tvrzení o množinách C, D na obrázku



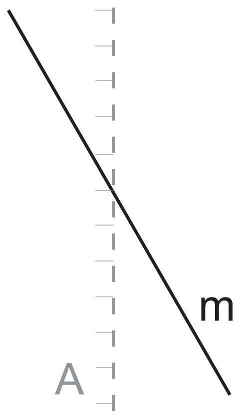
a) $C \cup D$ je souvislá množina.

b) $\exists x \in C \wedge \exists y \in D : x = y$. Δ

c) $\exists x \in (C \cap D) : x \in D$. Δ

d) $C \cup D$ je kompaktní množina. Δ

152. Nechť jsou dány polorovina A a přímka m. Vyberte pravdivé tvrzení o situaci na obrázku



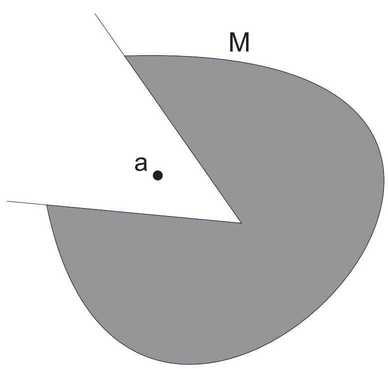
a) $(X = A \cap m) \Rightarrow \exists K > 0 : X \subset \mathcal{U}(0, K)$.

b) $A \cap m$ je uzavřená nebo otevřená množina.

c) Ani jedna z možností. Δ

d) $\exists! c \in m : c \notin A$.

153. Nechť je dána množina M a bod $a \notin M$. Vyberte pravdivé tvrzení o množině M na obrázku



a) Ani jedna z možností. Δ

b) Bod a je izolovaný bod množiny M.

c) $\forall x \in M \exists y \in M : |xy| \notin M$, kde $|xy|$ je úsečka x, y.

d) Množina M je souvislá a konvexní.

e) $\exists x \in M : x$ není hromadný bod množiny M.

3 Vyhodnocování testů

3.1 Teorie tvorby testů

Tvorba testů je rozsáhlý a relativně složitý proces, který by měl procházet určitými stupni vývoje, jak je uvedeno například v [13] a [14]:

V následujícím textu budeme otázkou rozumět položku testu. Neuchylujeme se pouze k tvorbě otázek, ale i různých úloh.

1. Určení cíle. Autor testu by si měl ujasnit, čeho chce plánovaným testováním dosáhnout. To je důležité zejména pro další fázi, aby byl schopen použít vhodnou formu otázek, popřípadě úloh a také aby obsah těchto úloh odpovídal nejenom cíli, ale také cílové skupině testovaných jedinců. Závěrečné hodnocení studentů 9. třídy ZŠ by nemělo zřejmě velkou vypovídací hodnotu, kdyby se testy týkaly kvantové fyziky či molekulární biologie.

2. Vytvoření souboru otázek. Ještě před samotným započetím tvorby otázek by si měl tvůrce ujasnit, jaký typ otázek bude využívat. Zda se přikloní k dichotomickým otázkám (typicky otázky s možnostmi ANO/NE), nebo otázkám s více možnostmi nabízených odpovědí. Dále se nabízí zařadit do možností právě jednu správnou odpověď nebo naopak více správných odpovědí. O tomto by měli být dopředu informováni testovaní jedinci. Důležité v této fázi je také počet otázek. Doporučuje se vytvořit více otázek, než je uvažováno, kolik se jich ve skutečnosti použije. To souvisí s tím, že některé nevyhovující otázky budou vyřazeny. Některé zdroje [13] uvádějí, že je optimální dvojnásobné množství.

3. Sestavení testu. Poté nastává fáze sestavit jednotlivé otázky do nějakého celku a vytvořit tak jeden test. Opět se nabízí alternativy, jak toho dosáhnout. V jednom případě se předem vyberou určité otázky a seřadí se pevně dle určitých kritérií. Druhou možnost jsme využili my: Soubor otázek se vloží do tzv. banky úloh, ze které je poté při samotném testování vybrán nějakým způsobem daný počet otázek.

4. Pilotáž. V tomto okamžiku je potřeba vytvořený test vyzkoušet, zda je vyhovující a zda disponuje těmi funkcemi, které po testu požadujeme. Je proto vhodné vybrat reprezentativní vzorek jedinců takových, kteří jsou podobni těm, na kterých plánujeme provádět testování. Následně na takovémto vzorku provedeme pilotáž, přičemž se snažíme navodit takové podmínky, které budou panovat při ostrém testování, abychom dosáhli věrohodných dat.

5. Vyhodnocení. Závěrečnou fází tvorby testů se zabývá položková analýza. Ta spočívá v rozboru jednotlivých otázek, testu jako celku, určením vztahů mezi jednotlivými položkami apod. V dnešní době tuto práci za nás dělají různé programy a na nás je pouze správně přečíst údaje a dle toho se zařídit. Po vyhodnocení je tedy důležité identifikovat ty otázky, které obsahují nějakou chybu, ať už špatně označenou správnou odpověď nebo nevhodně položené otázky či odpovědi, a takovéto otázky buď zcela vyloučit nebo vhodně opravit.

To je pouze nástin toho, jak by asi tvorba testů měla probíhat. Toto však není předmětem této práce, podrobněji se o problematice přípravy a tvorby testů pojednává v [15].

3.2 Vyhodnocování testů v LMS Moodlu

Mezi programy, které vyhodnocují testy, patří i *LMS Moodle*. Na konci testování nám poskytuje několik užitečných údajů, statistik, které můžeme použít pro vyhodnocení celého testu. Nekončíme tedy pouze u toho, že bychom ohodnotili jednotlivé výkony studentů, ale můžeme také zjistit, zda a které otázky dělaly studentům velké problémy nebo zda je vůbec vhodné některé otázky příště použít.

K tomu však potřebujeme znát správnou interpretaci jednotlivých statistik, u kterých není zprvu jasné, co značí a jak se vypočtou. A tím se budeme v následujícím textu zabývat. Pokusíme se nyní jednoduše vysvětlit některé ukazatele a následně si je ukážeme na konkrétních vybraných otázkách. Budeme se bavit zejména o facility indexu, diskriminačním indexu a diskriminační účinnosti. Ještě než si vysvětlíme, co zmíněné pojmy znamenají a jak je lze interpretovat, následuje Obrázek 1, na kterém lze názorně vidět, v jaké formě *LMS Moodle* poskytuje data. Pro další práci s daty je možné údaje vyexportovat například do excelovského souboru.

Ot.č.	Název úlohy	Pokusy	Facility index	Směrodatná odchylka	Diskriminační index	Diskriminační účinnost
1	Náhodná (Funkce více proměnných)	9	37.04%	45.47%	0.75%	0.84%
2	Náhodná (Funkce více proměnných)	9	40.74%	34.47%	36.99%	39.01%

Obrázek 1: Náhled na výstup dat v LMS Moodlu

3.2.1 Teorie

Následující text vychází z [10], [11] a z [12].

Nežli tak učiníme, je nutné si zavést značení, abychom byli schopni správně chápat jednotlivé matematické zápisy. Mimo to vyřkneme nejprve určité předpoklady.

Níže zmíněné statistiky jsou vytvořeny pro takové testy, kde mají studenti k dispozici pouze jeden pokus a tento dokončili. Vzhledem k tomu, že my jsme studentům umožnili dělat více testů, dostáváme se do rozporu s předchozí větou. Nicméně *LMS Moodle* v tomto případě považuje pokusy jednoho studenta za nezávislé, což znamená, že předpokládáme, že tyto pokusy byly absolvovány několika studenty. My se nejdříve zaměříme na situaci, kdy každý student má k dispozici pouze jeden pokus. Následně tento přepoklad rozšíříme a okomentujeme.

Ve výpočtových vzorcích se vyskytuje následující značení:

Dle [10] písmeno s označuje studenta z množiny studentů S, kteří dokončili test. Dále, jeden test se skládá z několika položek, které jsou umístěny na pozicích

$p \in P$. Pro nás je $P = \{1, 2, \ldots, 25\}$. Neznamená to nic jiného, než že jeden test je tvořen 25 otázkami.

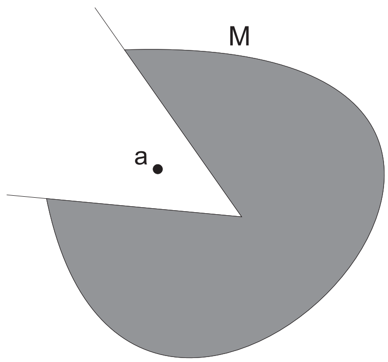
Jelikož jsou jednotlivé testy generovány z banky úloh, ve které je více otázek, než položek v testu, je potřeba rozlišovat pozici v testu od položky. Položkou $i \in I$ rozumíme konkrétní otázku z banky úloh. Proto $I = \{1, 2, \ldots, 153\}$. Nechť S^i je množina studentů, v jejichž pokuse se vyskytla položka i.

Bodové ohodnocení, které může student získat na p-té pozici, nabývá svého minima a maxima. Označíme je $x_p(min)$ a $x_p(max)$. *LMS Moodle* má hodnotu $x_p(min)$ nastavenou na nule. To značí, že studenti nejsou penalizováni, tedy nemohou dostat záporné body. To se však může změnit nastavením parametrů testů. Pokud bychom uvažovali záporné hodnocení studentů, čili bychom je penalizovali za nesprávné odpovědi, pak by se hodnota $x_p(min)$ stala zápornou. Jaké výše by nabývala, by záleželo na tom, zda mohou u otázky zaškrtnout pouze jednu, nebo více možností.

Předpokládejme nyní, že mají studenti k dispozici více voleb k označení nabízených možností. Za tohoto předpokladu mohou v nejhorším případě označit pouze špatné možnosti. $x_p(min)$ by nabývala hodnoty -100% z maximálního přiděleného počtu bodů p-té pozici v testu. V testu metrické prostory jsou všechny pozice ohodnoceny čtyřmi body (tak, aby za celý test mohli studenti dosáhnout maximálně 100 bodů), tedy v takovém případě by hodnota $x_p(min)$ byla vždy -4 body.

Pokud bychom předpoklad zúžili a studenti by měli k dispozici pouze jednu možnost k označení nabízené alternativy, pak bychom $x_p(min)$ mohli nastavit různě. První možností by bylo, že $x_p(min)$ by závisela na počtu nabízených špatných odpovědí uvedených u otázky na p-té pozici v testu. Tedy že by střední hodnota bodů získaných u otázky byla nulová. Uveďme si to na konkrétním příkladu 3.1, vybrali jsme poslední otázku ze souboru testových otázek.

Příklad 3.1. Nechť je dána množina M a bod $a \notin M$. Vyberte pravdivé tvrzení o množině M na obrázku



a) Ani jedna z možností. Δ

b) Bod a je izolovaný bod množiny M.

c) $\forall x \in M \exists y \in M : |xy| \notin M$, kde $|xy|$ je úsečka x, y.

d) Množina M je souvislá a konvexní.

e) $\exists x \in M : x$ není hromadný bod množiny M.

Správná odpověď, možnost **a)**, je ohodnocena 100% bodů ze čtyř možných. Zbylé čtyři možnosti jsou obodovány -25% z maximálního počtu bodů. Student by tak mohl v tomto případě získat za správnou odpověď plný počet bodů a nebo za špatnou odpověď ztratit jeden bod. $x_p(min)$ by tedy byla -1.

Druhou možností a z hlediska bodování otázek logičtější by bylo ohodnotit všechny špatné odpovědi pevnou zápornou hodnotou, čímž bychom odstranili závislost na počtu špatných odpovědí. Každá špatná odpověď by tak mohla být ohodnocena například -50% nebo -100%.

Jestliže bychom měli jednotlivé položky testu ohodnoceny různým počtem bodů, pak bychom $x_p(max)$ našli v databázi ve sloupečku quiz_question_instances. grade. My však máme všechny otázky ohodnoceny stejně, jak jsme již uvedli, a proto bude tato hodnota v našem případě činit 4 body.

$x_p(s)$ značí získané body studenta s u otázky na pozici p. Zřejmě pak platí $x_p(min) \leq x_p(s) \leq x_p(max)$. Nás ale bude zajímat hlavně studentovo dosažené skóre u i-té otázky. Takovou hodnotu označíme $x^i(s)$. Dále označme celkové dosažené skóre v testu jednoho studenta s jako $T_s = \sum_{p \in P} x_p(s)$. Budeme též potřebovat vyjádřit celkové skóre studenta v testu sníženém o skóre, dosaženého u otázky na p-té pozici, a to proto, abychom později byli schopni určit vztah mezi získanými body na dané pozici a body získanými ve zbytku testu. Použijeme tento vztah:

$$X_p(s) = T_s - x_p(s) \tag{3.1}$$

.

Můžeme uvažovat také průměrné bodové zisky na pozici, na položku a také na tzv. zbytky počítané podle předchozího vzorce (3.1).

$$\overline{x}_p = \frac{1}{S} \sum_{s \in S} x_p(s) \tag{3.2}$$

$$\overline{x}^i = \frac{1}{S^i} \sum_{s \in S^i} x^i(s) \tag{3.3}$$

$$\overline{X}_p = \frac{1}{S} \sum_{s \in S} X_p(s) \tag{3.4}$$

$$\overline{T} = \frac{1}{S} \sum_{s \in S} T_s, \tag{3.5}$$

Dále budeme potřebovat příslušné rozptyly.

$$V(x_p) = \frac{1}{S-1} \sum_{s \in S} (x_p(s) - \overline{x}_p)^2 \tag{3.6}$$

$$V(x^i) = \frac{1}{S^i - 1} \sum_{s \in S^i} (x^i(s) - \overline{x}^i)^2 \tag{3.7}$$

$$V(T) = \frac{1}{S-1} \sum_{s \in S} (T_s - \overline{T})^2 \tag{3.8}$$

Nyní nám již zbývá uvést kovariance dvou veličin.

$$C(x_p, X_p) = \frac{1}{S-1} \sum_{s \in S} (x_p(s) - \overline{x}_p)(X_p(s) - \overline{X}_p) \tag{3.9}$$

$$C(x^i, T) = \frac{1}{S^i - 1} \sum_{s \in S^i} (x^i(s) - \overline{x}^i)(T_s - \overline{T}) \tag{3.10}$$

V předešlých vzorcích jsme uvedli několik značení, která je potřeba vysvětlit. Veličina x_p popisuje dosažené body v testu na p-té pozici, přičemž hodnoty $x_p(s)$ jsou jejími realizacemi. Podobně tak náhodná veličina x^i udává počet bodů získaných u i-té položky. Analogicky se tato veličina realizuje hodnotami $x^i(s)$. Veličina T pak značí celkové skóre v jednom testu.

3.2.2 Moodle 1.9

Každý program se v čase vyvíjí a jinak tomu není u *LMS Moodlu*. Jelikož se ve zdrojích ([10],[12]) některé výpočty statistik mírně liší v závislosti na verzi, popíšeme si postupně dvě z nich a začneme starší verzí.

Facility index

Facility index, v českém zdroji uváděný jako snadnost, je dán vzorcem

$$FI(i) = \frac{\overline{x}^i}{x^i(max)}. \tag{3.11}$$

Nejdříve se podívejme, jakých hodnot tento index nabývá. Řekli jsme, že *LMS Moodle* má přednastavený minimální počet bodů u jedné otázky na nulu a tedy nedochází k tomu, že by studenti získali záporné body, proto začněme tímto předpokladem-nebudeme penalizovat. Student může mít umožněno pouze jedno označení nabízených alternativ a nebo více možností. V obou případech tento index nabývá hodnot $\langle 0; 1 \rangle$. Pokud studenti nemohou získat záporné body u dané otázky, nejhorší průměr, jakého mohou dosáhnout, je 0 bodů. Dosazením do vzorce (3.11), získáme dolní mez zmíněného intervalu. Pokud by všichni studenti získali maximální počet bodů, průměr by se rovnal právě tomuto počtu a opět dosazením do patřičného vzorce dostáváme horní mez uvedeného intervalu.

Nyní se zaměřme na situaci, kdy bude moci každý student označit pouze jednu alternativu a za nesprávnou odpověď bude penalizován. V případě, že bychom špatné odpovědi obodovali tak, jak bylo naznačeno v příkladu 3.1, pak by dolní mez intervalu Facility indexu byla rovna podílu $-\frac{1}{k}$ z maximálního počtu bodů, kde k je počet špatných odpovědí u otázky. U druhého způsobu bodování (pevně stanovený minimální počet bodů) by byl tento pevně stanovený počet bodů dolní mezí intervalu. Horní mez zůstává opět 1.

A zbývá už jen předpoklad penalizace se současnou možností označit více odpovědí. V tomto případě pokud by každý student označil všechny nesprávné možnosti, každý by získal -100% z maximálního možného počtu bodů dané otázky a tedy podobnou úvahou jako v předešlých případech, dostaneme dolní mez intervalu rovnu -1. Horní mez bude opět rovna jedné.

Nyní k významu Facility indexu. V prvním případě, kdy jsme uvažovali nepenalizování studentů a možnost označit pouze jednu odpověď, lze tento index vynásobením stem interpretovat jako v procentech vyjádřený podíl studentů, kteří odpověděli na danou otázku správně. Každý totiž může získat buď plný počet bodů a nebo žádný. V ostatních případech je tomu jinak. Připouštíme penalizování studentů, čímž se průměrný počet bodů snižuje a neodpovídá průměrnému počtu studentů, kteří správně odpovídali. V případě, kdy mají studenti více možností zaznačit odpověď a nejsou penalizováni, mohou odpovědět jak na správnou, tak i špatnou odpověď a opět dochází k poklesu průměrného počtu bodů. Význam Facility indexu je potom následující: Značí v procentech vyjádřený podíl průměrného počtu bodů k maximálnímu možnému počtu získaného jedním studentem.

Diskriminační index

Tento ukazatel, respektive jeho hodnota, nám poskytuje informaci o tom, jak dobře daná otázka rozlišuje mezi dobrými a mezi horšími studenty. Studenti jsou seřazeni podle dosažených výsledků v celém testu a následně se vezme třetina nejlepších a třetina nejhorších studentů a u každé skupiny se sečtou poměrná skóre dosažená u dané otázky a tyto sumy se od sebe odečtou. Z úpravy výrazu (3.12) plyne, že vypočteme průměrné dosažené skóre u otázky studentů, kteří patří do lepší třetiny studentů a průměrné skóre studentů, kteří patří do horší skupiny a nakonec se tyto údaje od sebe odečtou. Matematické vyjádření uvedené v [12] jsme s použitím značení, které jsme si zavedli, upravili do následujícího tvaru:

$$DI(i) = \frac{\sum_{s \in S_T} \frac{x^i(s)}{x^i(max)} - \sum_{s \in S_B} \frac{x^i(s)}{x^i(max)}}{\frac{S}{3}}, \tag{3.12}$$

kde S_T je množina studentů, kteří patří do horní třetiny a analogicky S_B je množina studentů z dolní třetiny. Vzorec můžeme následně upravit:

$$\frac{\sum_{s \in S_T} \frac{x^i(s)}{x^i(max)} - \sum_{s \in S_B} \frac{x^i(s)}{x^i(max)}}{\frac{S}{3}} = \frac{\sum_{s \in S_T} \frac{x^i(s)}{\frac{S}{3}} - \sum_{s \in S_B} \frac{x^i(s)}{\frac{S}{3}}}{x^i(max)} =$$

$$= \frac{\overline{x}^i_T - \overline{x}^i_B}{x^i(max)} = FI_T - FI_B,$$

kde jsme využili toho, že $x^i(max)$ nezávisí na s a toho, že množiny S_T a S_B jsou co do počtu prvků stejné jako $\frac{S}{3}$. Dále $\overline{x}^i_T$ je průměrné skóre u i-té otázky počítané pro lepší třetinu studentů a $\overline{x}^i_B$ je průměrné skóre u i-té otázky počítané pro horší třetinu studentů. Úpravou jsme zjistili, že se jedná o rozdíl Facility indexů počítaných přes jednotlivé třetiny a tedy pokud bychom předpokládali nezáporné hodnocení studentů a možnost zaznačit pouze jednu odpověď, jednalo by se o rozdíl počtu správných odpovědí v rámci nejlepší skupiny a počtu správných odpovědí v rámci nejhorší skupiny.

Diskriminační index může nabývat hodnot $\langle -1; 1 \rangle$. Jeli záporný, znamená to, že na danou otázku odpovědělo správně více studentů z horší skupiny než studentů ze skupiny lepší. Takové otázky jsou pro testování nevhodné a měly by být nahrazeny jinými.

Diskriminační koeficient

Jako ukazatel výkonosti slouží i tento korelační koeficient. Výpočet provedeme pomocí tohoto vzorce:

$$DK(i) = \frac{C(x^i, T)}{\sqrt{V(x^i)V(T)}} \tag{3.13}$$

DK nabývá hodnot z intervalu $\langle -1; 1\rangle$ jako je tomu i v případě DI. Nabývá-li tento ukazatel hodnot blížících se jedné, znamená to, že výše dosaženého počtu bodů u dané otázky pozitivně závisí na výši získaného celkového počtu bodů. Jinými slovy, studenti, kteří byli v celém testu úspěšní, byli úspěšní i u této otázky a naopak studenti, kteří test nezvládli, nezvládli ani tuto otázku. Je-li DK záporný, ukazuje to na situaci, kdy špatní studenti odpovídali lépe na danou otázku, než ti lepší. Takovéto otázky by se v našem testu neměly vyskytovat, neboť našim záměrem je rozlišovat dobré a špatné studenty.

Rozdílem mezi DI a DK je ten, že DI využívá pouze dvou třetin informací dostupných z výsledků testů, tedy DK poskytuje kvalitnější informaci o rozlišování mezi studenty. Dále DI rozřazuje studenty do skupin a porovnává skupiny studentů, kdežto DK porovnává konkrétní výsledky jednotlivých studentů.

3.2.3 Moodle 2.0

Ve verzi 2.0 se oproti předchozí verzi objevily určité modifikace, které si popíšeme a porovnáme s údaji popsanými v předchozí podkapitole. Nutno podotknout, že zde se již uvádějí statistiky zvlášť vztažené k pozici v testu a zvlášť k položce. Rozlišovat tak budeme opět indexováním.

Facility index

Uvedeme nejprve vzorec:

$$FI_p = 100\frac{\overline{x}_p - x_p(min)}{x_p(max) - x_p(min)} \tag{3.14}$$

Uvedli jsme již výše, že hodnota $x_p(min)$ je přednastavena na nulu. Porovnáním s (3.11) vidíme, že za tohoto předpokladu jsou indexy totožné. Výhodou Facility indexu definovaného dle (3.14) je to, že ve všech možných případech (možnost (ne)penalizace, možnost jednoho či více značení odpovědí) nabývá vždy hodnot $\langle 0; 1\rangle$. Můžeme tak porovnávat stejné otázky z různě nastavených testů. S pozměněným vzorcem (3.14) dochází i ke změně v interpretaci u předpokladu, kdy mohou studenti označit jednu odpověď a zároveň jsou penalizováni. Je stejná jako je tomu v případě nepenalizování studentů. Dokažme to.

Důkaz:

Mějme k studentů, kteří odpoví špatně. Získají tedy $x(min)$ bodů. Dále nechť $n-k$ je počet studentů, kteří odpověděli správně a získali tak $x(max)$ bodů. n je počet studentů, kteří odpovídali na danou otázku. Po dosazení do vzorce (3.14) upravme:

$$\frac{\frac{kx(min)+(n-k)x(max)}{n}-x(min)}{x(max)-x(min)}=\frac{\frac{kx(min)+(n-k)x(max)-nx(min)}{n}}{x(max)-x(min)}=$$

$$=\frac{\frac{(k-n)x(min)+(n-k)x(max)}{n}}{x(max)-x(min)}=\frac{\frac{(n-k)(x(max)-x(min))}{n}}{x(max)-x(min)}=\frac{n-k}{n}$$

□

FI_p tedy udává stejně jako v případě nepenalizování v procentech vyjádřený podíl studentů, kteří odpověděli správně. Za předpokladu, kdy mají studenti možnost zaškrtnout více alternativ, vyjadřuje FI_p opět pouze v procentech vyjádřený podíl průměrného počtu bodů k maximálnímu možnému počtu získaného jedním studentem.

Diskriminační index

U tohoto ukazatele již dochází k výrazné změně. Připomeňme, že ve starší verzi byl definován na základě rozdílů průměrů jednotlivých skupin. V novější verzi je tento index definován následujícím vztahem:

$$DI_p = 100\frac{C(x_p, X_p)}{\sqrt{V(x_p)V(X_p)}}. \tag{3.15}$$

Vyjadřuje přesně to, co je u starší verze *LMS Moodlu* popsáno u Diskriminačního koeficientu. Zde je to však vztaženo k množině X_p a ne k T. Dle [10] je tato statistika ovlivněna hodnotou FI_p. Píše se zde, že aby DI_p dosáhlo hodnoty 100%, je nutné, aby Facility index nabýval hodnoty 50% nebo jinými slovy, pokud se FI_p realizuje hodnotou blízkou hranicím intervalu hodnot, jichž může FI_p nabývat, pak bude DI_p malé.

Dle nás je tento závěr mylný. Pokud by byl DI_p definován pomocí vzorce (3.12), pak by tomu tak zčásti opravdu bylo. Jestliže by FI_p byl opravdu blízký nule či stu, znamenalo by to, že u dané otázky všichni studenti dosáhli na přibližně stejnou hodnotu bodů. Pokud bychom potom dle výsledků tyto studenty rozdělili do skupin na lepší a horší třetinu a vypočítali jejich průměrné hodnoty, užitím vztahu (3.12) bychom od sebe odečítali podobné hodnoty a tedy DI by byl opravdu malý. Bylo by tomu tak ale v případě jakékoliv hodnoty FI_p, pokud by všichni studenti získali stejný počet bodů nebo minimálně lišící se počet bodů.

Podmínka, že Facility index musí mít hodnotu 50%, aby DI_p bylo rovno stu, je už hodně nepřesná. Aby DI_p bylo rovno stu, stačí, aby studenti z horní skupiny získali všichni maximální počet bodů a studenti z horší skupiny nezískali žádné body. Pak by rozdíl průměrů jednotlivých skupin byl roven opravdu stu. Ale Facility index by ovlivňovaly hodnoty i ze střední skupiny. Takže pokud bychom uvažovali krajní možnosti, tak by studenti ze střední skupiny mohli mít také nula bodů a Facility index by byl roven jedné třetině. Naopak, pokud by studenti ze střední skupiny získali maximální počet bodů, jako studenti z horní skupiny, pak by FI_p byl roven dvou třetinám.

V systému Moodle 2.0 je však DI_p definován pomocí vztahu (3.15) a hodnoty, kterých tento ukazatel nabývá, jsou ovlivněny pouze vztahem mezi veličinami x_p a X_p. Velikost Facility indexu do hodnoty DI_p nepromlouvá. Ostatně to lze vidět na simulaci dat.[1] Získají-li však studenti u dané otázky téměř stejné body popřípadě totožné, je interpretace Diskriminačního indexu složitá. Toto eliminuje Diskriminační účinnost.

Diskriminační účinnost

Dle [10] se tento ukazatel snaží odhadnout, jak dobrý je DI_p vzhledem k obtížnosti otázky. Vzorec pro výpočet si uvedeme následovně:

$$DE_p = 100\frac{C(x_p, X_p)}{C_{max}(x_p, X_p)}. \tag{3.16}$$

[1]Simulace je uložena na přiloženém CD ve složce Data v souboru Simulace.xlsx

$C_{max}(x_p, X_p)$ vypočteme pomocí vzorce (3.9). Ještě před samotným výpočtem ale hodnoty x_p a X_p seřadíme dle velikosti. Budeme tak uvažovat, že první student dosáhl nejmenšího bodového ohodnocení na dané pozici a i v testu a poslední student naopak dosáhl jak na pozici, tak i v celém testu nejvyššího skóre. $C_{max}(x_p, X_p)$ tak vlastně udává maximální možnou kovarianci mezi veličinami x_p a X_p na daném souboru dat.

DE_p se málokdy realizuje sty procenty, což je vzhledem k její definici vcelku zřetelné, hodnot nad 50% by však měla dosahovat. V opačném případě není diskriminační účinnost dané pozice příliš velká a indikuje to na nevhodnou otázku.

Nyní zmíníme již ukazatele vztahující se ke konkrétní otázce. Tyto ukazatelé pro nás budou mnohem důležitější, neboť předešlé statistiky analyzovaly pozici v testu a jelikož na stejné pozici se v různých testech objevovaly různé položky, postrádají pro nás význam. I přesto jsme se rozhodli je zde zmínit, neboť se domníváme, že pochopení uvedených statistik je snadnější právě z pohledu pozic v testu, než z pohledu položek. Pokud se navíc rozhodneme složit test z otázek, které budou na pevné pozici, je výhodné znát statistiky vztažené k pozici.

Statistiky vztažené ke konkrétní položce jsou založeny na podobném principu, jako výše zmíněné statistiky. Jejich interpretace je tak obdobná, a proto zde uvedeme už pouze vztahy, pomocí nichž se jednotlivé ukazatele vypočtou.

$$FI^i = 100 \frac{\overline{x}^i - x^i(min)}{x^i(max) - x^i(min)} \tag{3.17}$$

$$DI^i = 100 \frac{C(x^i, T)}{\sqrt{V(x^i)V(T)}} \tag{3.18}$$

$$DE^i = 100 \frac{C(x^i, T)}{C_{max}(x^i, T)} \tag{3.19}$$

Zastavit se musíme jen u posledních dvou vzorců. Je zřejmé, že se mírně liší od svých alternativ, a to konkrétně tím, že místo $V(X^i)$ uvažujeme $V(T)$. Je to z toho důvodu, že veličinu X^i nemůžeme definovat. i-tá otázka totiž může být navolena v různých pokusech na různé pozice v testu s různými vahami. Z toho důvodu používáme místo toho veličinu T.

Jak jsme uvedli na začátku kapitoly 3.2.1, až doposud jsme předpokládali, že každý student měl k dispozici pouze jeden pokus. Též jsme uvedli, že v našem případě měli studenti k dispozici neomezený počet pokusů. Musíme tedy některé interpretace doplnit či pozměnit. Předpokládejme tedy druhou možnost, kdy studenti mají k dispozici více pokusů. Předně v takovém případě s bude značit jeden pokus z množiny všech spuštěných a dokončených testů S. Dále například $x_p(s)$ bude značit počet bodů u otázky na p-té pozici, kterých dosáhl nějaký student v s-tém spuštěném testu.

Výpočty výše zmíněných statistik jsou stejné, liší se pouze informace, kterou nám poskytují. U Facility indexů (zde nezáleží, mluvíme-li o vztahu (3.11) nebo o (3.14)) jsme zmínili dvě formulace. První z nich byla, že při výše popsaných předpokladech, popisuje v procentech vyjádřený podíl studentů, kteří na danou otázku odpověděli správně. Při současném předpokladu lze interpretaci přeformulovat do následujícího tvaru: Jde o v procentech vyjádřený podíl testů, ve kterých byla označena správná odpověď. Ve druhém případě jsme mluvili o tom, že Facility index označoval opět v procentech vyjádřený podíl průměrného počtu bodů k maximálnímu možnému počtu získaného jedním studentem. Tentokrát budeme mluvit o v procentech vyjádřeném podílu průměrného počtu bodů k maximálnímu možnému počtu získaného v jednom testu.

3.3 Vyhodnocení otázek

V předchozích sekcích jsme se seznámili s tím, co vybrané statistiky znamenají, jakým postupem se k nim dopracujeme a také to, co si pod nimi představit. V této kapitole se podíváme na několik vybraných otázek, které byly použity v testování, a podíváme se na jejich statistiky. Na základě nich se poté pokusíme vyjádřit názor, jak by mělo být s takovými otázkami naloženo. Dosud jsme ale neposkytli informace, na základě kterých by se mohli uživatelé *LMS Moodlu* rozhodnout, kdy je ještě daná otázka dobrá a kdy už není. K tomu poslouží následující dvě Tabulky 2 a 3, které jsme převzali z [11].

FI^i	Význam
5 a méně	Extrémně těžká nebo obsahuje vadu
6-10	Velmi obtížná
11-20	Obtížná
20-34	Středně těžká
35-64	Vhodná pro průměrné studenty
66-80	Poměrně snadná
81-89	Snadná
90-94	Celmi snadná
95-100	Extrémně snadná

Tabulka 2: Tabulka s hodnotami Facility indexu

DI^i	Význam
50 a více	Velmi dobrá diskriminace
30-50	Přiměřená diskriminace
20-29	Slabá diskriminace
0-19	Velmi slabá diskriminace
0 a méně	Pravděpodobně vadná otázka

Tabulka 3: Tabulka s hodnotami Diskriminačního indexu

Vybrali jsme celkem pět otázek a to tak, abychom zde uvedli položky s různými hodnotami. Nevyhýbáme se tedy špatným otázkám, chceme tu ukázat, jak by měla probíhat samotná interpretace jednotlivých údajů. Zbylé údaje je možno nalézt v excelovském souboru M2.xlsx. K dispozici jsou též data od nových studentů z kurzu *Matematika 1* v akademickém roce 2013/2014. Tato data naleznete v souboru M1N.xlsx.[2]

Nyní následují vybrané otázky a jejich hodnocení.

Příklad 3.2. 38. Mějme úsečku s hraničními body A a B a metriku ρ. Nechť bod C leží na dané úsečce. Potom platí

a) $\rho(A,C) < \rho(A,B) \wedge \rho(C,B) < \rho(A,B)$.

b) $\rho(A,C) \leq \rho(A,B) \wedge \rho(C,B) \leq \rho(A,B)$. Δ

c) $\rho(A,C) \leq \rho(A,B) \wedge \rho(C,B) < \rho(A,B)$.

d) $\rho(A,C) < \rho(A,B) \wedge \rho(C,B) \leq \rho(A,B)$.

e) $\rho(A,C) \leq \rho(C,B) < \rho(A,B)$.

- $FI : 25\%$
- $DI : 7,97\%$
- $DE : 7,40\%$

Na základě těchto údajů můžeme vidět, že u této otázky bylo dosaženo průměrně jen 25% bodů z maximálního počtu, tedy konkrétně 1 bod. S využitím Tabulek 2 a 3 můžeme konstatovat, že otázka byla pro studenty, kteří na ni odpovídali, středně těžká, můžeme říci dokonce obtížná. Vzhledem k velice nízkým hodnotám DI a DE je výkonnost otázky, čili schopnost rozlišovat dobré studenty od špatných velmi slabá. To je důvod k tomu, abychom tuto otázku již nepoužívali.

[2] Soubory M2.xlsx a M1N.xlsx naleznete na přiloženém CD ve složce Data.

Příklad 3.3. 50. ε-okolím bodu a v prostoru (M, ρ) rozumíme

a) $\mathcal{U}(a, \varepsilon) = \{x \in (M, \rho); 0 \leq \rho(x, a) \leq \varepsilon\}$.

b) Ani jedna z možností.

c) $\mathcal{U}(a, \varepsilon) = \{x \in (M, \rho); 0 \leq \rho(x, a) < \varepsilon\}$. Δ

d) $\mathcal{U}(a, \varepsilon) = x \in (M, \rho); 0 < \rho(x, a) < \varepsilon$.

e) $\mathcal{U}(a, \varepsilon) = \{x \in (M, \rho); 0 < \rho(x, a) \leq \varepsilon\}$.

- $FI : 47,50\%$
- $DI : 100,00\%$
- $DE : 86.28\%$

Zde máme příklad vhodné otázky. Hodnoty Diskriminačního indexu i Účinnosti jsou velmi vysoké. To svědčí o velmi dobré diskriminační schopnosti. Otázky s takovými údaji je dobré zařadit do testu.

Příklad 3.4. 86. Nechť (M, ρ) je metrický prostor a $A \subset M$. Hraničním bodem množiny A je

a) Bod $a \in A$, jestliže každé jeho okolí obsahuje právě 1 bod z A a právě 1 bod z $M \setminus A$.

b) Bod $a \in M$, jestliže existuje $\mathcal{U}(a)$, které obsahuje aspoň 1 bod z A a právě 1 bod z $M \setminus A$.

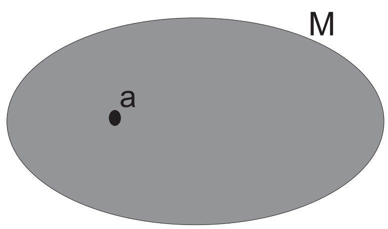
c) Ani jedna z možností. Δ

d) Bod $a \in A$, jestliže existuje $\mathcal{U}(a)$, které obsahuje právě 1 bod z A a aspoň 1 bod z $M \setminus A$.

- $FI : 30,77\%$
- $DI : -100,00\%$
- $DE : -43,11\%$

Facility index u této otázky je ještě poměrně vhodný, ale podíváme-li se na Ukazatele výkonnosti, je zřejmé, že otázka je nejspíše vadná. Údaje značí, že zatímco studenti, kteří dopadli v celém testu dobře, u této položky zcela propadli. Důvodem může být to, že nabízené odpovědi jsou delší, než by mělo být a studenti byli ztraceni. Otázky by měly být pokud možno jasné a stručné. Nabízí se zde tedy otázku vhodně upravit a zařadit ji do nového testování. Nedoporučuje se však zařadit ji ihned po opravě do ostrého testování.

Příklad 3.5. 120. Nechť je dána množina M a bod $a \in M$. Vyberte nepravdivé tvrzení o množině M na obrázku



a) Množina M je okolí bodu a. Δ

b) Množina M je kompaktní.

c) Bod a je hromadný bod množiny M.

d) Bod a je vnitřní bod množiny M.

- $FI : 60,14\%$
- $DI : 66,89\%$
- $DE : 14,22\%$

FI indikuje, že otázka byla relativně snadná na zodpovězení. Diskriminační schopnost je také uspokojivá, není tomu však s Účinností. Kovariance mezi získanými body u otázky a body získanými v celém testu je pouze na 14,22% svého maxima. Tuto otázku bychom doporučili zařadit do testu pouze jako motivační prvek, aby studenti nebyli stresováni příliš těžkým testem.

Příklad 3.6. 18. Každá uspořádaná trojice (x, y, z), kde $x, y, z \in \mathbb{R}$, je

a) Ani jedna z možností. Δ

b) Bod roviny $\mathbb{R}^2$.

c) Bod prostoru $\mathbb{R}^2$.

d) Souřadnice bodu roviny $\mathbb{R}^2$.

e) Souřadnice bodu prostoru $\mathbb{R}^3$.

- FI : 50%
- DI : 100%
- DE : 100%

Poslední otázku jsme vybrali opět s vynikajícími hodnotami ukazatelů. Jak lze vidět, průměrně zde studenti získávali polovinu bodů, což je vzhledem k typu otázky mírně překvapující. Rozlišovací schopnost má však tato otázka výbornou. Tato otázka se tedy rozhodně může zařadit do ostrého testování.

Je potřeba zmínit, že uvedené hodnoty ukazatelů jsou závislé na dané množině studentů. To znamená, že ikdyž je rozlišovací schopnost otázky výborná, platí to pro skupinu studentů, kteří na danou otázku odpovídali a tedy nově testované studenty již nemusí tak dobře rozlišovat.

4 Aplikace souboru otázek v praxi

4.1 Výuka - testování

V následujících odstavcích se pokusíme přiblížit, jakým způsobem probíhala výuka, respektive tedy testování v předmětu *Matematika 2*.

V průběhu semestru museli studenti splnit různé testy a projít mnoha mezistupni, než se mohli pokusit obstát u ústní zkoušky. Aby mohli absolvovat zápočtový test, museli nejprve splnit několik podmínek. Vyjma docházky museli též splnit určitým způsobem průběžné testy. Každý týden na začátku cvičení se psal test z probrané látky z minulého cvičení. Takový test se skládal ze dvou příkladů. Pro zdárné složení testu musel student získat alespoň jeden ze dvou bodů, tedy uspět alespoň v jednom příkladu.

Takových testů bylo v průběhu semestru devět. Pokud studenti splnili více než polovinu takových testů, tedy alespoň pět, mohli přistoupit k zápočtovému testu. V opačném případě museli absolvovat tzv. předzápočtový test, který zahrnoval učivo z celého semestru.

Ke zvládnutí předzápočtového testu měli studenti k dispozici tři pokusy, stejně tak jako u zápočtového testu. Zápočtový test se skládal z pěti příkladů a jak je zvykem, úspěšné zvládnutí tohoto testu bylo nezbytným předpokladem k zapsání se na termín zkoušky.

Zkouška tohoto předmětu byla rozdělena na dvě části a to písemnou část a ústní. Písemná část probíhala vždy v pondělí a po jejím úspěšném zvládnutí mohl student přikročit k ústní části, která se konala v úterý a ve středu (bylo na studentovi, který den si vybere). Písemná část se skládala ze tří příkladů na témata, která se probírala ke konci semestru a nemohla tak být zařazena do zápočtového testu. V případě, že student uspěl, ale nezvládl ústní část, tato písemná část se převáděla do dalších pokusů, čili po úspěšném zvládnutí písemné části se již nemusel touto částí zabývat.

Hlavním rysem zkoušky bylo losování otázek pomocí hodu kostkou. Podrobně se rozborem zkoušky zabýváme dále.

4.2 Užití testů

Na závěr práce bychom velice rádi zmínili fakt, o kterém se málo hovoří. Tím je problém zkoušení, se kterým se potýkají snad všichni učitelé. Čas pro zkoušení jednotlivých studentů je daný a je nemožné odzkoušet celou teorii nastudovanou během daného semestru. Proto se dala přednost losování otázky, čímž necháváme defakto možnost úspěchu studentů na náhodě, zda si dotyčný vylosuje tu či onu otázku.

Konkrétně v našem předmětu *Matematika 2* se otázky losují hodem kostky, kdy pro každý počet ok je přiřazena dvojice otázek s tím, že po padnutí „šestky" háže student znovu (k dispozici je pouze 5 dvojic otázek).

Předpokládejme nyní, že student se nenaučil resp. nepochopil natolik, aby u zkoušky obstál, jednu dvojici otázek, popřípadě jednu otázku, což je ekvivalentní neúspěchu. Pravděpodobnost toho, že si vylosuje právě tu dvojici otázek, co neumí, je rovna hodnotě $\frac{1}{5}$.

Důkaz:

Uvažujme, že žák např. neumí otázku umístěnou pod padnutím dvou ok na kostce. Za přepokladu správné kostky (padnutí každé strany má stejnou pravděpodobnost) je tedy pravděpodobnost neúspěchu studenta u zkoušky rovna tomu, že při hodu kostkou padnou právě 2 oka. Dle klasické pravděpodobnosti [3] je pravděpodobnost tohoto jevu rovna $P(\{\omega_2\}) = \frac{1}{6}$, kde ω_2 je jev označující padnutí dvou ok. V případě, že by padlo 6 ok, znamenalo by to opakování hodu a tedy student by měl opětovně šanci vylosovat si „nechtěnou" otázku. Tento jev označme $\omega_2^{'}$. Pravděpodobnost tohoto jevu by byla rovna $P(\{\omega_2^{'}\}) = \frac{1}{6}\frac{1}{6} = \frac{1}{36}$. Ve druhém jevu ovšem může opět padnout „šestka", dostáváme se tedy k nekonečné geometrické řadě. Zapsat ji můžeme takto: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6^n}$. Označme první člen $a_1 = \frac{1}{6}$ a kvocient $q = \frac{1}{6}$. Součet této nekonečné geometrické řady spočteme pomocí vzorce $\frac{a_1}{1-q}$. Získáme tak právě hodnotu $\frac{1}{5}$, kterou označíme za pravděpodobnost toho, že si student vylosuje otázku, na kterou není dostatečně připraven.

□

Dále nás může zajímat, jaká bude zřejmě pravděpodobnost toho, že si nevylosuje dvojici otázek, které neumí. Obdobnou úvahou jako v předchozím případě lze dokázat, že pravděpodobnost takového jevu by byla rovna hodnotě $\frac{4}{5}$, což je logické, neboť se jedná o jev opačný k jevu popsanému v předchozím důkazu.

Porovnáním spočtených pravděpodobností, zjistíme, že pravděpodobnost toho, že si student vylosuje otázku, kterou neovládá, je 4 krát menší, než pravděpodobnost toho, že si vylosuje otázku, kterou umí.

Tento nepřehlednutelný fakt nás inspiroval k vytvoření opatření, která by poněkud snížila možnost úspěchu studenta u zkoušky. A to i přesto, že ovládá dané učivo v téměř celém svém rozsahu. Opatření by mohla také zvýšila možnosti vyučujících otestovat studentovy znalosti v co nejširším rosahu učiva. V následujících kapitolách pojednáme o těchto jednolivých opatřeních, pro která jsme vytvořili již dříve zmíněný soubor testových otázek.

4.2.1 Současná metoda

V letním semestru akademického roku 2012/2013 došlo k vůbec prvnímu využití tohoto souboru otázek. V této metodě slouží testové otázky jako jedna z instancí zkoušky tohoto předmětu, ke kterému byly vytvořeny. Aby se mohli studenti přihlásit k samotné zkoušce, museli mít splněn alespoň jeden test z metrických prostorů na 80 %. V průběhu semestru byl umožněn studentům přístup ke kurzu na e-learningovém portálu, kde jim byl u každého pokusu namíchán náhodně test a takových testů mohli dělat teoreticky nekonečně mnoho.

Výhody

Nespornou výhodou tohoto modelu je zcela jistě fakt, že student si učivo procvičí v takové míře, aby byl schopen vnímat látku správně. A to z toho důvodu, že není úplně snadné překonat 80 % hranici úspěšnosti hned prvním testem. Dále to dává možnost studentovi svobodné volby procvičit se podle jeho vlastních potřeb. I když má splněno, může si jednotlivé testy zkoušet dále, má-li o to zájem.

Asi největší výhodu spatřujeme v tom, kvůli čemu byly testy vytvořeny. Studenti, alespoň ne v takovém počtu, jako dosud, po tomto testování již nechodí ke zkoušce bez nutných znalostí a nevystavují se zbytečnému tlaku při neúspěšné zkoušce.

Nevýhody

Jedinou, o to až fatálnější nevýhodu této metody spatřujeme v tom, že splnit jednotlivý test mají studenti možnost kdekoliv, kde je připojení k internetu. Mnohé studenty to může nabádat k tomu, že místo toho, aby si test zkusili, radši zaplatí nějakému studentovi s lepšími znalostmi, přihlásí se mu na svůj účet a nechají si test splnit cizím studentem. V takovém případě postrádá tento systém opodstatnění, ale nutno podotknout, že tím šidí zejména sebe sami, neboť učitelé tento fakt jednoduše zjistí při zkoušení.

Právě jsme popsali současný stav, ve kterém se nacházíme. Následující metoda, kterou navrhujeme místo současné metody, je zároveň cílem celého „projektu“ tvorby testových otázek. Současná metoda je tak jakýmsi mezistupněm, kdy dochází k ověřování jednotlivých otázek.

4.2.2 Metoda autoškola

Tato metoda se snaží eliminovat zásadní nevýhodu předchozího modelu a to sice využitím procesu, který je znám především těm, kteří již absolvovali nějaký kurz autoškoly. Metoda autoškola dává studentům možnost si testy procvičovat doma a to zcela dobrovolně a není stanovena žádná procentuální hranice úspěchu. Jde pouze o to, aby se studenti seznámili s typy otázek.

Po této fázi procvičování následuje již samotná zkouška z předmětu. Zůstává zachována písemná i ústní část zkoušky, jen s tím doplněním, že druhý den zkoušky, před ústní částí, absolvují studenti na počítačích v učebně jeden pokus testu. Pokud uspějí, pokračují již standardně ústní částí. V opačném případě ztrácejí jeden pokus.

Výhody

Tuto metodu považujeme za nejlepší, neboť využívá metodiku, která je již řadu let úspěšně využívána při testování znalostí uchazečů o řičičské oprávnění.

Mimo to, zde již není možnost jakéhokoliv podvádění, neboť u zkoušky jsou zde studenti sami za sebe, tudíž je v jejich zájmu se v průběhu roku procvičovat.

Výhodná může být i ta skutečnost, že při procvičování nejsou studenti pod žádným tlakem vyvolaným možným neúspěchem, tak jako by tomu mohlo být v případě první metody, kde jsou vystaveni potřebě překonat určitou procentuální hranici. Může se tedy zdát, že pokud není student pod jakýmkoliv tlakem, dokáže jednotlivé otázky lépe vnímat, pochopit a potažmo pochopit celou látku oproti studentovi, jehož hlavní vidinou bude překonání hranice úspěchu.

Nevýhody

I v tomto modelu se vyskytuje chyba, nicméně není natolik vážná, aby nemohl být používán. Ve fázi procvičování se mohou studenti otázky a odpovědi zpaměti naučit, aby poté neměli u zkoušky problém test splnit. Toto riziko je ovšem malé, neboť v otázkách je zabudováno několik „ochranných mechanismů“.

Například automatické promíchávání odpovědí nebo fakt, že otázky nejsou číselně ani jinak odlišitelně označené. Jako nejlepší mechanismus ale považujeme množství otázek. Je nepravděpodobné, aby se setkali se všemi otázkami vzhledem ke způsobu, jakým necháváme studenty si otázky procvičovat.

Čistě teoreticky to možné je, ale v praxi nemají studenti tolik času a musíme uvažovat také, že nejsou procvičováni pouze otázkami z tohoto souboru otázek, ale z několika dalších, které byly vypracovány za stejným účelem, jako tento.

Zbylé dvě metody již nejsou natolik vhodné, aby se reálně uvažovalo o jejich použitelnosti, avšak zmiňujeme je zde pro úplnost, aby si čtenář mohl udělat představu o škále možného uplatnění.

4.2.3 Metoda zápočtový test

Princip tohoto modelu je triviální. Test složený z vytvořených otázek se píše opět v počítačové učebně, jako tomu bylo v předchozí metodě, avšak je zahrnut místo zápočtového testu. To znamená, že klasický zápočtový test je zcela nahrazen touto formou. V tomto modelu se nepočítá s procvičováním, takže se studenti setkají s otázkami až u zápočtového testu.

Výhody

V současné době se během semestru ani během zápočtu studenti nesetkávají s testováním, kde by museli prokázat porozumění nad probíranou látkou, k tomu dochází až při samotné ústní zkoušce, kdy však mnoho studentů neuspěje. Proto se zdá být vhodné považovat tuto metodu za přínosnou pro studenty, neboť tento test je především o pochopení látky. Studenti tak získávají nový pohled na věc a mohou být tak lépe připraveni k samotné ústní zkoušce.

Nevýhody

Nahrazení početního testu tímto, řekněme, logickým testem dochází naopak k absenci testování početních znalostí studentů. Ten samý fakt se tedy na jednu stranu chová jako pozitivum, ale na stranu druhou, ho považujeme za negativní zásah do systému. Přichází tak v potaz zanechat současný zápočet a přidat k němu tuto možnost a vytvořit tak dvoustupňový zápočet, ale to je již otázkou jiného modelu.

4.2.4 Metoda písemná zkouška

Tento model je založen na stejném principu jako model předcházející. Tedy v tomto modelu se počítá s nahrazením písemné zkoušky testováním na počítačích. Rozdělení „písemné zkoušky“ a ústní na jednotlivé dny by opět zůstalo zachováno.

Výhody

Zcela logicky, byť se jedná o alternativu metody zápočtového testu, tento model postrádá výše zmíněnou výhodu v kapitole 4.2.3. Tedy v tom smyslu, že po absolvování tohoto testu nemají studenti defakto žádný časový prostor k využití této zkušenosti při ústní zkoušce. Tato metoda tedy nedisponuje žádnou velkou výhodou, proč by se měla využívat v praxi.

Nevýhody

Pokud pomineme to, co jsme zmínili v předchozím odstavci, můžeme poukázat na další zápor tohoto modelu. Celá zkouška, jak testová, tak ústní, by byla zaměřena pouze na pochopení látky a logické uvažování studentů. Ti by tak nemohli takřka vůbec prokázat početní znalosti nabyté během semestru, na druhou stranu, k tomuto by mohl dobře posloužit zápočet.

4.3 Zhodnocení

Na uvedených možnostech, jak tento soubor otázek uplatnit, lze vidět, že každý model či metoda má nějaké špatné vlastnosti, avšak zdá se, že metoda autoškola by se dala považovat za nejlepší možnost, jak jsme zmínili.

Samozřejmě existuje mnoho dalších možností, jak by se testy daly využít. Například nahrazení průběžných testů nebo mírné pozměnění výše zmíněných metod jak jsme nastínili na konci kapitoly 4.2.3. Pro představu jsou však dle nás výše zmíněné metody dostačující.

Závěr

Cílem této práce bylo vytvořit soubor testových otázek na téma metrické prostory a sepsat je do podoby vhodné pro testování studentů.

První kapitolu jsme věnovali potřebné teorii, kterou jsme využili při tvorbě otázek. Ve druhé kapitole jsme uvedli důvod, proč soubor otázek vznikl a zmínili jsme se zde též o tom, co bylo potřeba pro tvorbu učinit. Na závěr kapitoly jsme vložili samotný soubor otázek.

Ve třetí kapitole se pojednává o teorii tvorby otázek a hlavně o základních ukazatelích, pomocí kterých lze výsledky testů vyhodnotit. Uvedli jsme zde základní ideu, na které jsou statistiky založeny a jak je lze interpretovat. Vysvětlili jsme také v jednoduchosti některé vztahy mezi veličinami.

Poslední kapitola je zaměřena na popis, jakým způsobem probíhalo průběžné hodnocení studentů předmětu *Matematika 2* a je zde zmíněno také to, jak je možno uvedený soubor otázek použít.

Vzhledem k rozsahu této práce jsme se statistikami rozebranými ve třetí kapitole nezabývali podrobně, a proto by bylo více než vhodné se jimi v navazující práci věnovat a podrobně jednotlivé ukazatele popsat. Především pak ty, které jsou vztaženy k položkám. Díky tomu, že jsme nechali aplikovat testy i na studenty prvního ročníku následujícího akademického roku, nabízí se v budoucnu v další práci také porovnat jednotlivé ročníky a jejich úspěšnost v testech. Dále by se nabízelo porovnat, která skupina otázek (skupiny byly zmíněny v tabulce 1) byla pro studenty snadná a která nikoliv.

Celou práci jsem sepsal za pomoci programovacího jazyku TEX. Kvůli omezené podpoře formátů obrázků, jsem byl nucen využít zkušební verzi programu CorelDRAW X5 a CorelDRAW X6. Použitím těchto programů spolu s TEXem jsem nabyl mnoho nových zkušeností a při zpracovávání samotného textu jsem získal nové vědomosti, které mne obohatily.

Doufáme, že cíl této práce byl naplněn a že soubor otázek a odpovědí poslouží k testování studentů co nejlépe.

Literatura

[1] Kosmák, L., Potůček, R.: Metrické prostory. Academia, Praha, 2004.

[2] Rachůnková, I.: Matematická analýza - metrické prostory. Rektorát Univerzity Palackého, Olomouc, 1987.

[3] Hron, K., Kunderová, P.: Základy počtu pravděpodobnosti a metod matematické statistiky. Vydavatelství Univerzity Palackého, Olomouc, 2013.

[4] Šalát, T.: Metrické priestory, Vydavateľstvo technickej a ekonomickej literatúry, Bratislava, 1981.

[5] http://elearning-math.upol.cz/pluginfile.php/5845/mod_resource/content/1/KMA_M1N_03.pdf [online 27. 3. 2014] (1. část skript o metrických prostorech).

[6] http://elearning-math.upol.cz/pluginfile.php/6033/mod_resource/content/2/KMA_M1N_04.pdf [online 27. 3. 2014] (2. část skript o metrických prostorech).

[7] http://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/138531/PokrokyMFA_23-1978-6_2.pdf [online 5. 10. 2013] (Článek o Mauriceovi Reném Fréchetovi).

[8] http://www.psp.cz/sqw/sbirka.sqw?cz=247&r=2000 [online 25. 2. 2014] (Zákon č. 247/2000 Sb.).

[9] http://www.psp.cz/sqw/sbirka.sqw?cz=167&r=2002 [online 25. 2. 2014] (Vyhláška č. 167/2002 Sb.).

[10] http://docs.moodle.org/dev/Quiz_statistics_calculations [online 27. 2. 2014] (Výpočet statistik na Moodlu).

[11] http://docs.moodle.org/dev/Quiz_report_statistics [online 6. 3. 2014] (Popis statistik na Moodlu).

[12] http://docs.moodle.org/archive/cs/V%C3%BDsledky_testu
[online 6. 3. 2014] (Statistiky starší verze moodlu).

[13] https://scio.cz/o-vzdelavani/teorie-a-metodika-testu/obecny-uvod/vyvoj-testu/ [online 28. 3. 2014] (Teorie a metodia testu).

[14] http://www.cermat.cz/didakticke-testy-1404034141.html
[online 28. 3. 2014] (Konstrukce testu).

[15] http://www.wikiskripta.eu/index.php/F%C3%B3rum:Testy#Cyklus_p.C5.99.C3.ADpravy_testu [online 28. 3. 2014] (Příprava testu).