UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI

PEDAGOGICKÁ FAKULTA

Katedra matematiky

Bakalářská práce

Mgr. Mariana Jalůvková

Shodná zobrazení

Olomouc 2022 **Vedoucí práce:** Mgr. David Nocar, Ph.D.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma Shodná zobrazení vypracovala samostatně s využitím uvedených pramenů a literatury.

V Olomouci dne 21. 4. 2022 ………………………………

Mgr. Mariana Jalůvková

Poděkování

Děkuji Mgr. Davidu Nocarovi, Ph.D. za odborné vedení, cenné rady, čas, připomínky a doporučení při zpracování mé bakalářské práce. Dále děkuji pracovníkům katedry matematiky za trpělivost, otevřenost a jejich podporu v úspěšném studiu.

Obsah

Úvod

Bakalářskou práci, a především její téma, prověřujeme z několika hledisek. Z hlediska aktuálnosti tématiky je matematika, s apelem na geometrii, živá svým vlastním způsobem. Na akademické půdě jsou to způsoby objevování. Potřeby studentů prohloubit si znalosti, získat znalosti nebo alespoň věnovat čas a prostor pro nalezení cest vedoucí nejen k pochopení, respektu, docenění, ale i k seberealizaci.

Bakalářská práce má mít nádech toho, co si student při studiu osvojil, případně by chtěl rozvinout. V našem případě to byla oblast geometrie. Proto jsme uvítali možnost zvolit téma z oblasti geometrie, kde se opíráme o shodné zobrazení vyobrazené v programu Geogebra.

Tato práce si bere za cíl v teoretické rovině vymezit shodná zobrazení, která jsou doplněna o vizuální ukázky z programu Geogebra. Text práce předpokládá určitou odbornou úroveň znalostí, kterou během studia získávají studenti pedagogické fakulty. Práce cílí především na studenty, kteří hledají další informační prameny. S ohledem na to je také naším cílem čtenářům poskytnout možnosti doplnění, upevnění, případného rozšíření a prohloubení znalostí. Proto je součástí práce i přehled vybrané dostupné literatury, která se shodným zobrazením odborně věnuje.

Práci členíme do pěti kapitol. V první kapitole se věnujeme zobrazení v n-rozměrném euklidovském prostoru s apelem na shodnost. Další tři kapitoly přibližují shodné zobrazení již v konkrétních třech euklidovských prostorech. A to konkrétně shodné zobrazení v rovině, v přímce a v prostoru. Seřazena jsou v práci v uvedeném pořadí. Toto řazení je s ohledem na zaměření se primárně na shodnosti v rovině, ale za vhodné vnímáme neopomíjet i shodnost v euklidovské přímce a shodnost v euklidovském prostoru. V páté kapitole se věnujeme pramenům, které považujeme za vhodné ke studiu shodných zobrazení.

První čtyři kapitoly nemají suplovat odborné učební texty, neboť tomu by neodpovídal případný rozsah této kvalifikační práce. Věříme, že práce může být pomyslnou ochutnávkou, která studenty povzbudí ke samostudiu. Povzbudí je tím, že studentům poskytujeme přehled těch nejlepších knižních titulů, ve kterých snad naleznou ten, který jim bude nejvíce vyhovovat. Pro posouzení těchto zdrojů bylo pro nás tedy nutné podívat se na tuto tématiku shodných zobrazení blíže a věnovat se jim v prvních kapitolách. Naše pochopení tématu shodnosti projektujeme do vlastních obrázkových materiálů. Při zkoumání této tématiky viditelně využíváme právě prameny, které studentům doporučujeme.

1 Zobrazení v euklidovském prostoru

V úvodní kapitole nastíníme základní vlastnosti shodných zobrazení, souměrnost podle nadroviny a souměrnosti v euklidovském prostoru. Uváděné poznatky jsou zde pro základní přehled zobrazení v euklidovském prostoru a také pro jejich prohloubení v dalších kapitolách této práce. V poslední podkapitole jsou porovnány možné studijní texty pro hlubší rozšíření znalostí.

1.1 Základní vlastnosti shodných zobrazení

Definice 1.1.1. Zobrazení Z v n-rozměrném euklidovském prostoru přiřazuje každému bodu X právě jeden bod X´ n-rozměrného euklidovského prostoru.

Bod X nazýváme vzor. Bod X´ je obraz bodu X. Symbolicky zobrazení zapisuje $Z: X \to X'$. U je množina všech bodů útvaru. U´ je množina obrazů všech těchto bodů útvaru U, nazýváme ji obrazem útvaru U.

Samodružné body jsou body, pro které platí $X = X'$. Pro samodružný útvar zobrazení platí $U = U'$. Identita se nazývá zobrazení, kde každý bod je samodružný.

Euklidovský prostor je afinním prostorem, kde máme definován skalární součin dvou vektorů (Lávička, 2006). Ze skalárního součinu definujeme vzdálenost dvou bodů

$$|XY| = |y - x| = \sqrt{(y - x)^2}\,,$$

kterou využíváme v definici shodného zobrazení.

Definice 1.1.2. *„Zobrazení f v euklidovském prostoru se nazývá* ***shodné zobrazení*** *(též* ***shodnost****, resp.* ***izometrie****) právě tehdy, když pro každé dva body X, Y a jejich obrazy X´, Y´ platí* $|X'Y'| = |XY|$*.“* (Leischner, 2010, s. 69)

Věta 1.1.1. *Shodné zobrazení je zobrazení prosté.*

Vycházíme z toho, že dva různé body X, Y a vzdálenost obrazů těchto bodů je stejná a není nulová, tedy obrazy X´ a Y´ se sobě nerovnají, tedy se jedná o dva různé body.

Lávička (2006, s. 20) shrnuje, že shodné zobrazení má všechny vlastnosti afinit, kde navíc z definice shodného zobrazení vyplývá:

Věta 1.1.2. *„Shodná zobrazení zachovávají velikost úhlů.“*

Věta 1.1.3. *„Shodná zobrazení zachovávají obsahy a objemy.“*

Pro klasifikaci shodností bude vycházet z analytického vyjádření shodného zobrazení, proto na něj zde s předstihem upozorňujeme.

Věta 1.1.4. *Shodné zobrazení má své analytické vyjádření*

$$f: X' = XA + B, kde\ AA^T = AA^T = E.$$

E je jednotkovou maticí. Matice A bude ortogonální (ortonormální) maticí.

Dle det(A) můžeme rozlišit přímou a nepřímou shodnost, s hodnotou $det(A) = +1$ nebo $det(A) = -1$, kterou rozvádíme v kapitole shodného zobrazení v rovině.

Věta 1.1.5. *„(Věta o určenosti shodného zobrazení) Nechť je v prostoru E_n dáno n + 1 lineárně nezávislých bodů M_0, M_1, ..., M_n a n + 1 bodů M'_0, ..., M'_n. Nutnou a postačující podmínkou existence shodnosti f, která zobrazuje body M_0, M_1, ..., M_n po řadě na body M'_0, ..., M'_n je platnost vztahů $|M_iM_j| = |M'_iM'_j|$ pro všechna i, j ∈ {1, 2, ..., n}. Jsou-li tyto vztahy splněny, existuje právě jedno shodné zobrazení f s uvedenými vlastnosti.“* (Leischner, 2010, s. 70)

Výše uvedenou větu o určenosti shodného zobrazení explicitně zmiňujeme, abychom při zobrazování jednotlivých shodností v n-rozměrném prostoru využili n + 1 lineárně nezávislých bodů pro jeho jednoznačné znázornění.

1.2 Souměrnost podle nadroviny

K nadrovině ϱ v n-rozměrném eukleidovském prostoru E_n existují právě dvě shodnosti, pro které jsou všechny body nadroviny ϱ samodružné (Boček, Šedivý, 1979). Jedná se o identitu a souměrnost podle nadroviny ϱ.

Souměrnost podle nadroviny je určena nadrovinou nebo jí odpovídající dvojicí nesplývajících bodů. V případě dvojice bodů nemusíme rozlišovat vzor a obraz, neboť obrazem bodu A je bod B, a také pro bod B je obrazem bod A (involutorní zobrazení).

V případě této dvojice bodů AB z předchozího odstavce máme pro nadrovinu ϱ samodružných bodů nadrovinu souměrnosti bodů A, B. Jedná se o nadrovinu kolmou na spojnici AB a procházející středem úsečky AB.

Nadrovinu ϱ můžeme chápat jako množinu všech bodů majících od bodu A a bodu B stejnou vzdálenost.

Souměrnost podle nadroviny souvisí s přímým a nepřímým zobrazením uváděným v kapitole shodného zobrazení v rovině. Pro n-rozměrný euklidovský prostor můžeme uvádět následující dvě věty.

Věta 1.2.1. *„Každá izometrie v* $\boldsymbol{E_n}$ *se dá rozložit na nejvýše n + 1 souměrností podle nadrovin.“* (Dofková, Kopecký, 2008, s. 9)

Věta 1.2.2. *„Izometrie v* ***E**$_n$* *je právě tehdy přímé zobrazení, dá-li se rozložit na sudý počet nadrovinových souměrností a nepřímé, dáli se rozložit na lichý počet nadrovinových souměrností."* (Dofková, Kopecký, 2008, s. 10)

Se souměrností podle nadroviny se setkáme v kapitole shodného zobrazení v rovině jako s osovou souměrností, a v kapitole shodného zobrazení v prostoru jako se souměrností podle roviny.

1.3 Souměrnosti v euklidovském prostoru

V předchozí podkapitole jsme se zaměřili na involutorní shodnosti z množiny samodružných bodů nadroviny, které tvoří souměrnost podle nadroviny. Do této kapitoly spadají všechny involutorní shodnosti euklidovského prostoru.

Rozumíme tím shodnost, která není identitou, ale složení sama se sebou dává identitu (Sekanina et al., 1988). Tedy například máme bod A, pro jehož obraz platí, že $A' = B \neq A$, tedy pak $B' = A'' = A$. Konkrétně zde plyne, že střed S úsečky AB se zobrazí na střed úsečky BA. Bod S je samodružným bodem, který si můžeme označit jako prostor P_1, který je podprostorem prostoru E_n.

Pro souměrnost v euklidovském prostoru platí, že každá involutorní shodnost má alespoň jeden samodružný bod. Jestliže bychom měli prostor P_1, který by byl totožný celým s prostorem E_n, tak by se jednalo o identitu. Souměrnosti v n-rozměrném euklidovském prostoru můžeme vyjádřit pomocí následující definice a věty.

Definice 1.3.1. *„Nechť je v euklidovském prostoru* $\boldsymbol{E_n}$ *dimenze n zvolen podprostor* $\boldsymbol{P_1} = \boldsymbol{E_k}$ *dimenze k,* $0 \leq k \leq n-1$. *Souměrnost prostoru* $\boldsymbol{E_n}$ *podle podprostoru* $\boldsymbol{E_k}$ *je zobrazení f prostoru* $\boldsymbol{E_n}$ *na sebe, při kterém jsou všechny body prostoru* $\boldsymbol{E_k}$ *samodružné, pro ostatní body X je přímka Xf(X) kolmá na prostor* $\boldsymbol{E_k}$ *a střed úsečky Xf(X) leží v* $\boldsymbol{E_k}$*."* (Sekanina et al., 1988, s. 65).

Věta 1.3.1. *„Každá involutorní shodnost euklidovského prostoru je souměrnost tohoto prostoru podle některého podprostoru."* (Sekanina et al., 1988, s. 65).

V euklidovské rovině E_2, které je věnována jedna z následujících kapitol, jsou involutorními shodnostmi: souměrnosti osové (souměrnost podle přímky = souměrnost podle nadroviny E_2; prostor o dimenzi 1) a souměrnosti středové (prostor o dimenzi 0).

2 Shodná zobrazení v rovině

Shodnosti roviny uvádíme jako první z následujících kapitol, které se věnují konkrétním euklidovským prostorům. Shodnosti v přímce uvedeme až v kapitole další, protože hlavní díl této práce cílíme na shodnosti v rovině.

Připomene si na začátek kapitoly opět definici shodného zobrazení v rovině v jiné formulaci, která však vystihuje opět to stejné, co uvedená definice 1.1.2 v předchozí kapitole.

„Zobrazení (v rovině) je shodné zobrazení nebo také shodnost, právě když obrazem každé úsečky AB je úsečka A´B´ shodná s úsečkou AB.“ (Pomykalová, 2001, s. 124)

Pro každé shodné zobrazení v rovině uvádí Bartoňová, Květoň (2006) stručně následující vlastnosti:

- *„obrazem polopřímky AB je polopřímka A´B´;*
- *obrazy opačných polopřímek jsou opačné polopřímky;*
- *obrazem přímky AB je přímka A´B´;*
- *obrazem rovnoběžných přímek jsou rovnoběžné přímky;*
- *obrazem poloroviny pA je polorovina pA´;*
- *obrazy opačných polorovin jsou opačné poloroviny;*
- *obrazem úhlu AVB je úhel A´V´B´ shodný s úhlem AVB;*
- *obrazem útvaru U je útvar U´ shodný s útvarem U“* (Bartoňová, Květoň, 2006, s. 61).

Věta 2.1. *„Dvě shodná zobrazení Z_1, Z_2, jsou navzájem různá ($Z_1 \neq Z_2$), jestliže aspoň jeden bod má v obou zobrazeních různé obrazy“* (Vyšín, 1952, s. 69). Jestliže zobrazení nejsou různá, jsou totožná ($Z_1 = Z_2$).

Věta 2.2. Inverzní zobrazení vzhledem k zobrazení Z značíme Z^{-1} (Vyšín, 1952). Vycházíme ze shodnosti Z, kde body X´ jsou vzory a body X obrazy.

Věta 2.3. Involuce. *„Shodné zobrazení v rovině, při němž každý bod, pokud není samodružný, náleží involutorní dvojici, se nazývá involutorní.“* (Vyšín, 1952, s. 73)

Věta 2.4. *„Shodnost v rovině Z je involutorní, je-li $Z = Z^{-1}$.“* (Vyšín, 1952, s. 73)

Věta 2.5. Máme shodná zobrazení Z_1 a Z_2, kde Z_1: X = X´, Z_2: X´ = X´´, přitom platí XY = X´Y´ = X´´Y´´. Vzniká shodnost Z_3 složením Z_1 a Z_2, tedy $Z_3 = Z_1\, Z_2$. (Vyšín, 1952)

Další vlastnosti shodných zobrazení v rovině jsou obsaženy v následujících oddílech příslušné podkapitoly klasifikující shodná zobrazené v rovině. Jedna podkapitola je věnována také podobnému zobrazené v rovině, které ve speciálním případu může zachovávat vlastnosti shodného zobrazení.

Důležitou větou k připomenutí je věta 1.1.5 o určenosti shodného zobrazení. Se stejným důsledkem formuluje Šedivý (1980, s. 20) větu o určenosti shodného zobrazení v rovině takto: *„Jsou-li dány dva shodné trojúhelníky $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. Existuje právě jedno shodné zobrazení v rovině, které přiřazuje $A \to A'$, $B \to B'$, $C \to C'$.“*. Budeme tedy pro jednoznačné určení zobrazovat shodnosti v přímce pomocí trojúhelníků.

2.1 Přímá a nepřímá shodnost

Shodná zobrazení v rovině můžeme dělit podle přímé a nepřímé shodnosti

- **Přímá**: identita, posunutí (translace), otočení (rotace), středová souměrnost;
- **Nepřímá**: osová souměrnost, posunutá souměrnost.

K rozlišení přímé a nepřímé shodnosti v rovině máme hned několik postupů, které může využít. Uvedeme si zde ty poučky, které jsou v literatuře zmiňovány.

Přikládání obkresleného útvaru

Mezi prvními poučkami, které využívají největší díl názornosti, jak rozlišit přímou a nepřímou shodnost v rovině, je obkreslení útvaru, který si vystřihneme a přikládáme k druhému útvaru (Pomykalová, 2001). Jestliže nám k dokonalému překrytí stačilo útvar posunout či natočit, tak se jedná o přímou shodnost. Jestliže je nutné útvar překlopit, tak se jedná o nepřímou shodnost.

Orientací trojúhelníka

Bartoňová, Květoň (2006) využívají k přikládání průsvitné fólie a zpřesňují rozlišení shodných zobrazení. Přímá shodnost zachovává orientaci trojúhelníku a nepřímá shodnost mění jeho orientaci na opačnou.

Doležal (2006) také rozděluje shodnost na přímou, která má souhlasnou orientaci vrcholů v trojúhelníku, a nepřímou, které má nesouhlasnou orientaci vrcholů v trojúhelníku.

Rozložení na souměrnosti podle nadroviny

U složeného zobrazení můžeme využít podle věty 1.2.2 rozložení na počet nadrovinových souměrností (Dofková, Kopecký, 2008). Přímá shodnost se rozloží na sudý počet nadrovinových souměrností. Nepřímá shodnost se rozloží na lichý počet nadrovin.

Dodržujeme i větu 1.2.1, kdy o maximálním počtu složených souměrnosti podle nadroviny v n-rozměrném euklidovském prostoru.

V případě přímých a nepřímých shodností v euklidovské rovině, rozkládáme je na osové souměrnosti o sudém, případném lichém, celkovém počtu. Maximální počet pro euklidovskou rovinu je složení tří osových souměrností.

Vyšín (1952) explicitně dodává, že každou nepřímou shodnost, která není osovou souměrností, můžeme složit ze středové a osové souměrnosti, jejíž osa neprochází středem souměrnosti. Platí zde implikace. Složením středové a osové souměrnosti, kde střed souměrnosti není na ose souměrnosti, získáme nepřímou shodnost.

Maticí analytického vyjádření shodnosti

Přímou a nepřímou shodnost můžeme určit i podle determinantu matice v jeho analytickém vyjádření (Lávička, 2006). Přímá shodnost má $det(A) = +1$, nepřímá shodnost má $det(A) = -1$.

2.2 Klasifikace shodných zobrazení v rovině

Máme představu o některých shodných zobrazení v euklidovské rovině. Pro odhalení všech druhů shodností vyjdeme z představy skládání osových souměrností a následně klasifikujeme shodnosti podle samodružných bodů a směrů z rozboru rovnice analytického vyjádření shodnosti.

Skládání osových souměrností v euklidovské rovině

Všechny shodnosti v euklidovské rovině může určit také pomocí skládání osových souměrnosti v euklidovské rovině. Předpoklad vychází z věty 1.2.1, ze které plyne, že každá shodnost v euklidovské rovině vznikne součinem nejvýše tří souměrností podle nadroviny, tedy podle osové souměrnosti.

Jestliže budeme skládat postupně osové souměrnosti do počtu tří ve všech možných polohách, získáme v některých případech nový typ shodnosti, popř. dojdeme k již nalezenému typu shodnosti (Blažek, 1994).

Souměrností podle nadroviny je osová souměrnost (1). Když je osová souměrnost pouze jedna, tak není možné s ničím dalším skládat.

Složíme-li dvě osové souměrnosti, podle jejich vzájemné polohy získáme několik souměrností. Jsou-li osy dvou osových souměrností rovnoběžné, tak získáváme posunutí (2). V případě totožnosti těchto dvou os souměrnosti získáváme identitu (3). Jsou-li osy dvou souměrností různoběžné získáváme otočení (rotaci) o orientovaný úhel α(4). V případě složení dvou osových souměrností tak, že jejich osy jsou kolmé, získáváme středovou souměrnost (5).

Skládáním tří osových souměrností. V případě jejich rovnoběžní, případné shodnosti, získáváme opět osovou souměrnost (1) V případě, že všechny tři osy prochází stejným bodem, tak obdržíme opět osovou souměrnost (1). V případě, kdy alespoň dvě osy jsou různoběžné a třetí z os neprochází jejich průsečím, tak toto složení můžeme rozložit na osovou souměrnost a středovou souměrnost. Této poslední vzniklé souměrnosti říkáme posunutá souměrnost (6), popř. posunuté zrcadlení. Tím jsme pojmenovali všechna shodná zobrazení v euklidovské rovině, kterých je celkem šest (1–6).

Klasifikace podle samodružných bodů a směrů

Máme euklidovskou rovinu E_2 a kartézskou soustavu souřadnic. Je-li shodnost f, $f(X) = X'$, kde $X[x,y], X'[x',y']$, tak máme rovnice:

$$x' = ax + by + p$$

$$y' = cx + dy + q.$$

V přepisu do maticového tvaru získáváme:

$$(x',y') = (x,y)\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + (p,q).$$

Pro shodnost musí platit věta (1.1.4), že shodnost má ortogonální matici, tedy

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Po úpravě získáváme, že

$$a^2 + c^2 = 1,$$

$$ab + cd = 0,$$

$$b^2 + d^2 = 1.$$

Na základě první rovnice $a^2 + c^2 = 1$ dosadíme za $a = \cos\alpha, c = \sin\alpha$, kde $0 \leq \alpha < 360°$. Druhá rovnice po dosazení vypadá takto: $b\cos\alpha + d\sin\alpha = 0$, kde $b = -t\sin\alpha, d = t\cos\alpha$. Dosadíme do třetí rovnice: $(-t)^2\sin^2\alpha + t^2\cos^2\alpha = 1$, a upravíme na $t^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 1$. Získáváme vztah $t^2 = 1 \Rightarrow t = 1 \vee t = -1$. Rovnice shodnosti v rovině má dva možné tvary, které určují přímou a nepřímou shodnost představenou v přechozí podkapitole.

Tvar rovnice shodnosti je (pro shodnost přímou, determinant = 1)

$$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha + p$$
$$y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha + q$$

nebo (pro shodnost nepřímou, determinant = – 1)

$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha + p$$
$$y' = x\sin\alpha - y\cos\alpha + q.$$

Matice zobrazení má tvar:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Hledáním samodrodružných bodů a směrů získáme shodnosti v euklidovské rovině a jejich tvary můžeme uvést v tabulce podle samodružných bodů a samodružných směrů v následující podobě:

	Žádný samodružný směr	*Právě dva navzájem kolmé samodružné směry*	*Každý směr samodružný*
Žádný samodružný bod	–	**posunutá souměrnost** $x' = x + p$ $y' = -y$ $p \neq 0$	**posunutí**, ne identita $x' = x + p$ $y' = y + p$ $(p, q) \neq (0, 0)$
Právě jeden samodružný bod	**otočení o úhel α** $x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha$ $y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha$ $\sin\alpha \neq 0$	–	**středová souměrnost** $x' = -x$ $y' = -y$
Přímka samodružných bodů; ne identita	–	**osová souměrnost** $x' = x$ $y' = -y$	–
Každý bod je samodružný	–	–	**identita** $x' = x$ $y' = y$

Tabulka 2.2.1. Přehled shodností euklidovské roviny (Sekanina et al., 1988, s. 68)

2.2.1 Identita

Identita patří k přímým shodnostem, který má všechny body samodružné, stejně tak každý směr je samodružný. Identitu můžeme značit I.

Identita každý bod zobrazuje sám na sebe, tedy $X = X'$ a $X' = X$. Pro představu je možné si identitu představit jako posunutí o úsečku s nulovou délkou, popř. jako otočení o nulový úhel.

Definovat identitu můžeme jako Hruša (1964, s. 253): *„Zobrazení v rovině ϱ, které přiřaďuje každému bodu X roviny ϱ týž bod X, nazývá se identita.“*.

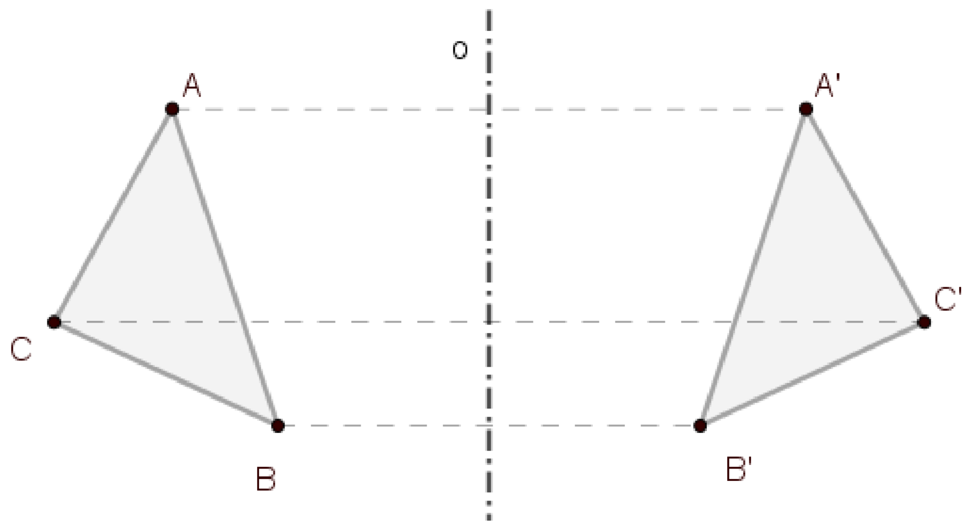
S ohledem na samodružné body Vyšín (1952, s. 74) identitu definuje: *„Má-li shodnost v rovině aspoň tři samodružné body, které neleží v přímce, je to identita.“*. Jinak řečeno toto vyplývá i z věty 1.1.5. o určenosti shodného zobrazení.

2.2.2 Osová souměrnost

Osová souměrnost je nepřímou shodností, která je zároveň shodností podle nadroviny. Nadrovinu v euklidovské rovině E_2 tvoří prostor E_1, přímka, na které leží samodružné body.

„V rovině E_2 je dána přímka o. Osovou souměrností O v rovině E_2 se nazývá množina všech takových uspořádaných dvojic [X, X′] kolmá k ose o a zároveň střed X_0 úsečky XX′ náleží přímce o. Přímka o se nazývá osa osové souměrnosti.“ (Stopenová, 2005, s. 24)

Útvary souměrně sdružené podle osy jsou dva nestejné geometrické útvary, pro které platí, že bod $X \in U_1$ je přemístitelný podle osy souměrnosti o do bodu $X' \in U_2$ (Stopenová, 2005).



Obr. 2.2.2.1 Osová souměrnost

2.2.3 Středová souměrnost

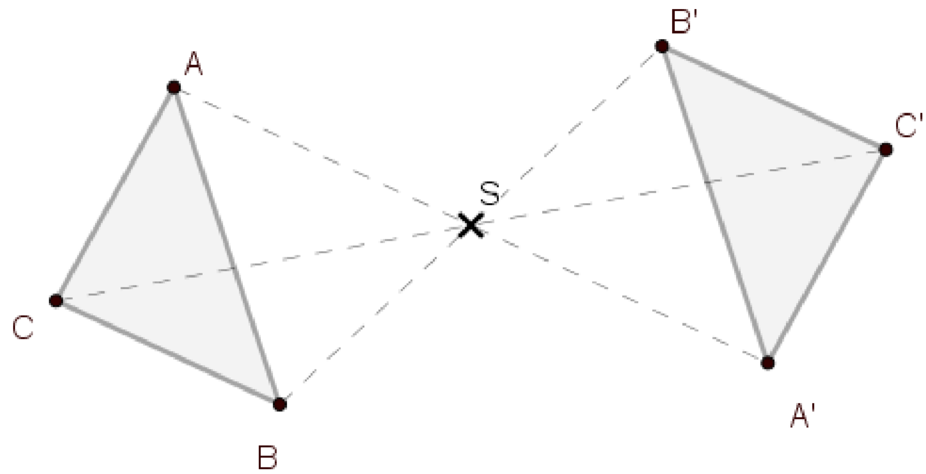
Středová souměrnost patří k přímým shodnostem. Je zvláštním případem otočení o úhel 180° kolem středu souměrnosti S. Má právě jeden samodružný bod, který je středem S středové souměrnosti. Všechny přímky procházející středem S jsou samodružnými přímkami středové souměrnosti.

„V rovině E_2 je dán bod S. Středovou souměrností S v rovině E2 se nazývá množina všech takových uspořádaných dvojic [X, X′], že pro každý bod X = S platí X′= X = S a pro každý bod $X \neq S$ je bod S středem úsečky XX′. Bod S se nazývá střed středové souměrnosti." (Stopenová, 2005, s. 27)

Obdobně jak jsou souměrně sdružené útvary podle osy souměrnosti, tak jsou útvary souměrně sdružené podle středu (Stopenová, 2005). Máme dva rozdílné geometrické útvary U_1 a U_2, které mohou každý bod $X \in U_1$ přemístit pomocí středu souměrnosti S do bodu $X' \in U_2$.

Vyšín (1952, s. 79) uvádí pro středovou souměrnost následující hlavní vlastnosti:

- *„Lze ji rozložit ve dvě osové souměrnosti, jejichž osy jsou přímky k sobě kolmé a procházejí středem S; jedna z os (kterákoli) je volitelná.*
- *Složením libovolných dvou osových souměrností, jejichž osy jsou k sobě kolmé, vznikne středová souměrnost.*
- *Souměrnost podle středu je involuce.*
- *Obrazem přímky p, která neprochází středem S je přímka, která přímku p neprotíná. Přímka p, která prochází středem S je samodružná."*



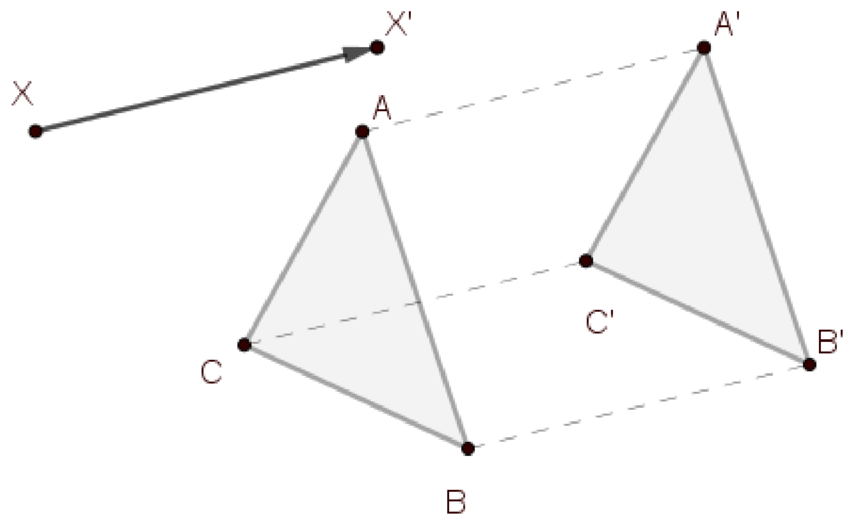
Obr. 2.2.3.1 Středová souměrnost

2.2.4 Posunutí (translace)

Posunutí neboli též translace, je přímým shodným zobrazením, přímky rovnoběžně orientované s úsečkou jsou samodružné přímky posunutí, nemá samodružné body. Není involutorním zobrazením.

S posunutím souvisí ekvipolence, uspořádané dvojice bodů (Stopenová, 2005). Orientovaná úsečka AA´ je uspořádanou dvojicí bodů [A, A´]. Máme-li uspořádané dvojice [A, B], [C, D], tak jsou tyto dvojice ekvipolentí, když úsečky AD a BC mají stejný střed S.

„V rovině je dána [M, M´]. Posunutí T (translace) je množina všech uspořádaných dvojice bodů [X, X´] takových, že uspořádané dvojice bodů [X, X´] a [M, M´] jsou ekvipolentní.



Obr. 2.2.4.1 Posunutí

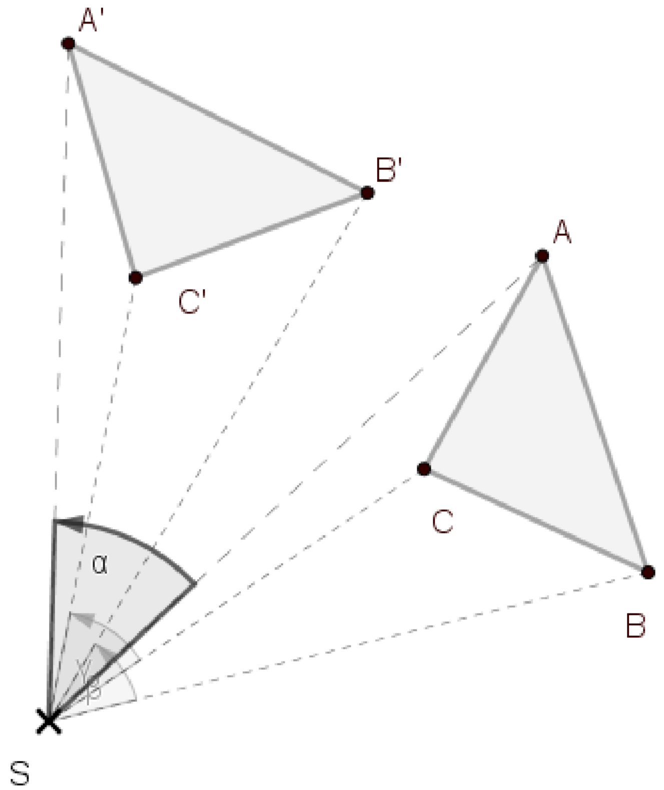
2.2.5 Otočení (rotace)

Otočení neboli rotace je přímou shodností, která má jeden samodružný bod ve středu S a žádný samodružný směr. Není involutorním zobrazením. Otočením o 180° získáme středovou souměrnost.

S otáčením souvisí pojem orientovaný úhel (Stopenová, 2005). Orientovaný úhel AVB je uspořádaná dvojice polopřímek VA, VB s počátkem v bodě V. Polopřímky jsou rameny orientovaného úhlu, počátek je vrcholem orientovaného úhlu. Můžeme zapsat: $AVB = [\rightarrow VA, \rightarrow VB]$. Orientovaný úhel AVB není totéž, co orientovaný úhel BVA.

U orientovaného úhlu určujeme kladný směr (otáčení proti směru hodinových ručiček) a záporný směr (Bartoňová, Květoň, 2006).

„V rovině je dán bod S a orientovaný úhel AVB. Otáčení R (rotace) je množina všech uspořádaných dvojic bodů [X, X´], že pro každý bod X = S platí, že X´ = X = S a pro každý bod X ≠ S platí, že orientovaný úhel XSX´ je shodný s orientovaným úhlem AVB a úsečka SX´ je shodná s úsečkou SX.“ (Stopenová, 2005, s. 32)



Obr. 2.2.6.1 Otočení

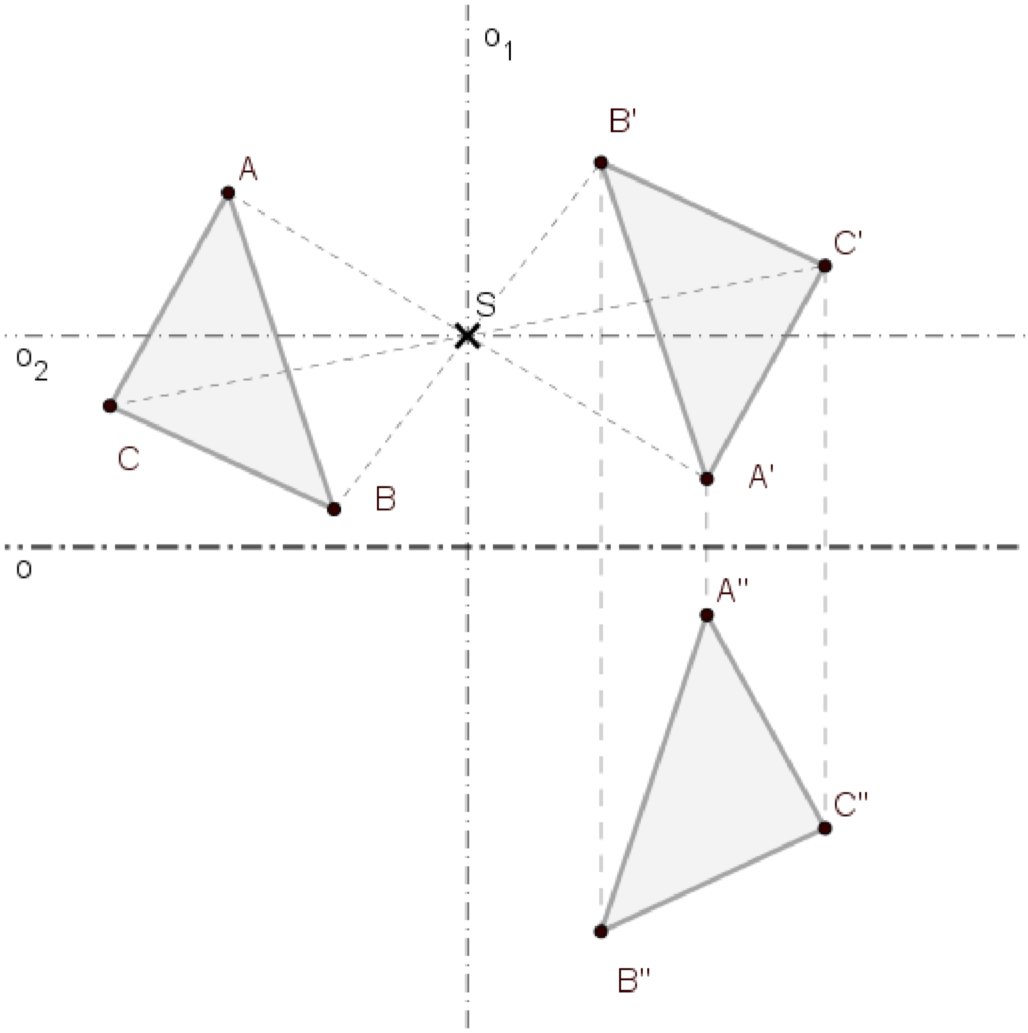
2.2.6 Posunutá souměrnost

Posunutou souměrností P rozumíme jako složenou shodnost ze souměrnosti osové a posunutí ve směru osy.

Jedná se o shodnost bez samodružných bodů. Posunutá souměrnost má samodružné vektory směru osy osové souměrnosti při rozkladu P = T ∗ O (Blažek, 1994).

„Složením tří osových souměrností O_1, O_2, O_3 s osami o_1, o_2, o_3, kde $o_1 \parallel o_2$ a zároveň $o_1 \neq o_2$ a o_3 je kolmá k o_1, vznikne posunutá souměrnost.“ (Stopenová, 1999, s. 37)

Jsou-li osy osové souměrnosti na sebe kolmé, tak získáváme středovou souměrnosti. Z předchozí věty vyplívá, že můžeme mít také složení středové souměrnosti s osovou souměrností, jejíž osa neprotíná střed S středové souměrnosti.



Obr. 2.2.6.1 Posunutá souměrnost

2.3 Podobné zobrazení

Definice 2.3.1. *„Zobrazení f euklidovského prostoru* $\boldsymbol{E}$ *do euklidovského prostoru* $\boldsymbol{E}'$ *se nazývá podobné, jestliže existuje kladné číslo k tak, že pro každé dva body* $X, Y \in \boldsymbol{E}$ *je* $|f(X)f(Y)| = k|XY|$. *Číslo k se nazývá koeficient podobného zobrazení f.“* (Sekanina et al., 1988, s. 73)

Zvláštním případem podobnosti je $k = 1$, které je shodností a říká se mu nevlastní podobné zobrazení (Stopenová, 1999).

Významným podobným zobrazením je stejnolehlost (homotetie). „*Stejnolehlost se středem S a koeficientem k je přímá podobnost, která:*

- *bodu S přiřazuje obraz* $S' = S$
- *bodu* $X \neq S$ *přiřazuje obraz X′ tak, že platí* $|SX'| = |k| \cdot |SX|$ *a přitom bod X′ leží na polopřímce XS pro* $k > 0$, *resp. bod X′ leží na polopřímce opačné k polopřímce SX pro* $k < 0$*“* (Doležal, 2006, s. 77).

Zvláštním případem shodnosti je koeficient $k = -1$, který odpovídá středové souměrnosti se středem S. Stejnolehlost s koeficientem $k = 1$ je identitou.

Složením shodného zobrazení se stejnolehlostí je možné získat jakékoliv podobné zobrazení (Stopenová, 1999).

2.4 Skládání a rozkládání shodností v euklidovské rovině E_2

Všechny shodnosti v euklidovské rovině E_2 můžeme vytvořit skládáním osových souměrností (souměrností podle nadroviny) v nejvyšším počtu tří těchto souměrností. Což vychází z věty 1.2.1.

Věta 2.4.1. Jakákoliv shodnost Z ve složení s identitou zůstane stejnou shodností Z (Vyšín, 1952). Symbolicky zapsaný vztah i s ohledem na větu 2.4 o involutorní shodnosti Z: $ZI = IZ = Z$, $ZZ^{-1} = Z^{-1}Z = I$.

Věta 2.4.2. Pro jakékoliv tři shodnosti v rovině platí: $(Z_1 Z_2) Z_3 = Z_1(Z_2 Z_3)$

Věta 2.4.3. „*Každou přímou shodnost lze složit ze dvou osových souměrností.*“ (Doležal, 2006, s. 58)

Věta 2.4.4. „*Každou nepřímou shodnost lze složit ze středové souměrnosti a osové souměrnosti.*“ (Doležal, 2006, s. 58)

Věta 2.4.5. „*Složením dvou osových souměrností, jejichž osy:*

- „*se neprotínají, dostaneme shodnost bez samodružných bodů*“ (Vyšín, 1952, s. 80). Tímto složením vznikne posunutí v rovině.
- „*jsou k sobě kolmé, vznikne středová souměrnost se středem S.*“ (Stopenová, 1999, s. 35)
- se rovnají, dostaneme identitu (Stopenová, 2005).
- jsou různoběžné, získáme otáčení se středem S jako průsečíkem os a velikostí úhlu otáčení rovnající se dvojnásobku velikosti ostrého úhlu daného osami.

Věta 2.4.6. *„Každé posunutí lze rozložit ve dvě osové souměrnosti tak, že osa jedné z nich prochází předem zvoleným bodem A“.* (Vyšín, 1952, s. 80)

Věta 2.4.7. *„Složením libovolného počtu přímých shodností dostaneme přímou shodnost.“* (Vyšín, 1952, s. 83)

Věta 2.4.8. *„Složením dvou přímých nebo dvou nepřímých shodností vznikne přímá shodnost.“* (Doležal, 2006, s. 58)

Věta 2.4.9. *„Složením přímé a nepřímé shodnosti vznikne nepřímá shodnost.“* (Doležal, 2006, s. 58)

3 Shodná zobrazení v přímce

Shodnosti v přímce se od shodností v rovině liší svou základní množinou, která je o jeden euklidovský prostor nižší. S čímž souvisí i to, že v přímce nemáme všechny shodnosti, které jsme měli v rovině.

I zde platí definice shodného zobrazení. Zobrazení f v E_1 se nazývá shodným zobrazeném v přímce E_1, právě když pro každé dva body A, B ∈ E_1 a jejich obrazy f(A) = A´, f(B) = B´ platí: |AB| = |A´B´| (Šedivý, 1987). Množinou všech zobrazení je Z.

3.1 Klasifikace shodných zobrazení v přímce

Shodnosti v přímce máme pouze v podobě identity, středové souměrnosti a posunutí (Stopenová, 2005).

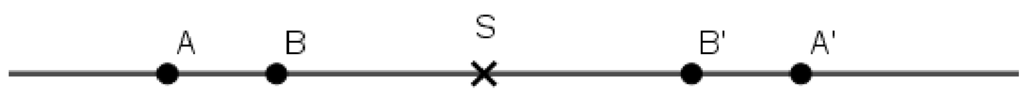
3.1.1 Identita

Identita je zobrazení přímky E_1, kde každý bod X přímky E_1 má přiřazen tentýž bod X. Platí tedy vztah X´= X. Identita je zobrazením, které má aspoň dva různé samodružné body.

3.1.2 Středová souměrnost

V přímce E_1 je bod S, střed středové souměrnosti. Středovou souměrností v přímce E_1 je množina všech uspořádaných dvojic [X, X´], kde buď X = S, a platí X´ = X =S, nebo $X \neq S$ a S je středem úsečky XX´.

Středová souměrnost je shodností na přímce s jedním samodružným bodem S. Toto shodné zobrazení Z je inolucí, platí tak vztah $Z = Z^{-1}$ (Vyšín, 1952).



Obr. 3.1.2.1 Středová souměrnost

3.1.3 Posunutí

V přímce E_1 je dána dvojice [M, M´]. Posunutí, translace, je množina všech uspořádaných dvojic bodů [X, X´] tak, že jsou s [M, M´] ekvipolentní (Stopenová, 2005).

Jedná se o shodnost na přímce, která nemá samodružné body. Také posunutí nemá žádnou involutorní dvojici (Vyšín, 1952).

Obr. 3.1.3.1 Posunutí

3.2 Skládání a rozkládání shodností v euklidovské přímce E_1

Věta 3.2.1. Složením dvou shodných zobrazení získáme identitu nebo posunutí (Vyšín, 1952).

Věta 3.2.2. Posunutí na přímce je možné složit dvěma souměrnostmi. Jeden střed souměrnosti může být libovolný, je však třeba mít oba středy souměrnosti vzdáleny od sebe o polovinu velikosti posunutí.

Věta 3.2.3. Složení souměrnosti a posunutí na přímce vytvoří souměrnost.

Věta 3.2.4. Složení dvou posunutí na přímce vede k identitě nebo posunutí.

Věta 3.2.5. Shodnost Z vznikla složením několika souměrností, tedy Z = S_1, $S_2 \ldots S_n$. Pokud je počet shodností sudých (n je sudé), výslednou shodností je posunutí nebo identita. Je-li celkový počet složených shodností lichý, tak výslednou shodností je souměrnost.

Věta 3.2.6. Shodnost rozložitelná na lichý počet souměrností je nepřímou shodností (souměrnost). Shodnost rozložitelná na sudý počet souměrností je přímou shodností (posunutí, identita).

4 Shodná zobrazení v prostoru

Šedivý (1987, s. 56) definuje shodná zobrazení v prostoru následovně: *„Zobrazení f prostoru E_3 se nazývá shodnou transformací (shodností), když pro každé dva body X, Y a jejich obrazy f(X), f(Y) z prostoru E_3 platí* $|XY| = |f(X)f(Y)|$.

Nechť pro shodnost v E_3 platí následující vlastnosti:

- *„Obrazem úsečky AB ve shodnosti f je úsečka f(A)f(B).*
- *Obrazem přímky AB je přímka f(A)f(B), obrazem polopřímky AB je polopřímka f(A)f(B).*
- *Obrazem bodu ležících mezi dvěma body je bod ležící mezi obrazy těchto bodů.*
- *Obraz středu dvojice bodů je střed dvojice tvořené obrazy těchto bodů.*
- *Zobrazení f je prosté zobrazení E_3 na E_3.*
- *Shodnost prostoru E_3 vzhledem na skládání zobrazení tvoří grupu.*
- *Jestliže konkrétní dvojice bodů A, B a C, D mají stejný vektor, potom konkrétní dvojice bodů f(A), F(B) a f(C), f(D) mají stejný vektor.*
- *Nechť jsou u, v libovolné dva vektory v E_3, c libovolné reálné číslo, potom platí rovnosti:*
    - $|f*(v)| = |v|$;
    - $f*(u+v) = f*(u) + f*(v)$;
    - $f*(u) . f*(v) = u . v$;
    - $f*(cu) = c\,f*(u)$.*“* (Šedivý, 1987, s. 56–57)

Shodná zobrazení v prostoru uvádíme pro ucelenost tématu. Jednotlivé shodnosti zmíníme v rámci podkapitoly klasifikace těchto shodností.

4.1 Klasifikace shodných zobrazení v prostoru

Shodná zobrazení v prostoru můžeme dělit podle přímé a nepřímé shodnosti. Shodné zobrazení f v prostoru E_3: f: $x' = Ax + b$, kde $A^T A = E$. Zde je ortogonální matice:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Mezi přímé shodnosti v E_3, pro det(A) = + 1, patří (Dofková, Kopecký, 2008):

- **Identita**: všechny body samodružné, všechny směry invariantní.

- **Otáčení kolem osy** (rotace kolem osy; otočení kolem přímky): přímka samodružných bodů, jeden invariantní směr.
- **Osová souměrnost** (souměrnost podle osy; souměrnost podle přímky): přímka samodružných bodů, jeden invariantní směr a kolmý prostor V_2 samodružných směrů s char. číslem –1.
- **Translace** (posunutí): žádný samodružný bod, všechny invariantní směry.
- **Šroubový pohyb** (torze, otočení kolem přímky složení s posunutím ve směru té přímky): žádný samodružný bod, jeden invariantní směr.

K nepřímým shodnostem v E_3, pro det(A) = – 1, patří:

- **Rovinová souměrnost** (souměrnost podle roviny; zrcadlení): rovina samodružných bodů, rovina souměrnosti je prostorem invariantních vektorů, kolmý směr k rovině je samodružný s char. číslem –1.
- **Otáčivá souměrnost** (otočená souměrnost; otočené zrcadlení; otočení kolem přímky složené se souměrností podle roviny kolmé na přímku): jeden samodružný bod a samodružný směr s char. číslem –1.
- **Středová souměrnost** (souměrnost podle středu): jeden samodružný bod, všechny samodružné směry s char. číslem –1.
- **Posunutá souměrnost** (posunuté zrcadlení; souměrnost podle roviny složená s posunutím ve směru té roviny): nemá samodružný bod, prostor V_2 invariantní samodružné směry, k němu kolmý samodružný směr s char. číslem – 1.

Shodná zobrazení v prostoru můžeme vyobrazit přehledně v následující tabulce.

	Pouze jeden samodružný směr	*Jeden samodružný směr a dále je samodružný každý směr k němu komý*	*Každý směr samodružný*
Žádný samodružný bod	**šroubový pohyb** $x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha$ $y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha$ $z' = z + r$ $r \neq 0, \sin\alpha \neq 0$	**posunutá souměrnost** $x' = x + p, y' = y + p$ $z' = -z, (p,q) \neq (0,0)$ **nebo osová souměrnost složená s posunutím ve směru té osy** $x' = -x, y' = -y,$ $z' = z + r, r \neq 0$	**translace** $x' = x + p$ $y' = y + p$ $z' = z + r$ $(p,q,r) \neq (0,0,0)$

Pouze jeden samodružný bod	**otáčivá souměrnost** $x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha$ $y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha$ $z' = -z, \sin\alpha \neq 0$	–	**středová souměrnost** $x' = -x$ $y' = -y$ $z' = -z$
Přímka samodružných bodů, žádné další samodružné body	**otočení kolem osy** $x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha$ $y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha$ $z' = z, \sin\alpha \neq 0$	**osová souměrnost** $x' = -x, y' = -y$ $z' = z$	–
Rovina samodružných bodů, žádné další samodružné body	–	**rovinová souměrnost** $x' = x, y' = y, z' = -z$	–
Všechny body samodružné	–	–	**identita** $x' = x, y' = y$ $z' = z$

Tabulka 4.1.1. Přehled shodností euklidovského prostoru (Sekanina et al., 1988, s. 72)

Pomocí grafického náhledu ED v programu Geogebra jsme vyobrazili vybraná shodná zobrazení euklidovského prostoru. Jedná se o následující čtyři zobrazení, která jsou přiložena v přílohách:

- **Příloha č. 1**: Osová souměrnost (1)
- **Příloha č. 2**: Středová souměrnost (2)
- **Příloha č. 3**: Torze (3), která je vytvořena pomocí otáčení kolem přímky (4) ve složení s posunutím (5) ve směru oné přímky
- **Příloha č. 4**: Otáčivá souměrnost (6), která je vytvořena otočením kolem přímky (4) ve složení se souměrností podle roviny (7) kolmé na přímku
- **Příloha č. 5**: Posunutá souměrnost (8), která je vytvořena souměrností podle roviny (6) ve složení s posunutím (5) ve směru té roviny

Tento výběr jsou taková shodná zobrazení, na jejichž sestrojení jsme si mohli všimnout všech shodností euklidovského prostoru. S vynecháním identity jich je osm (tedy 1–8).

5 Shodná zobrazení v literatuře

Informační charakter předchozích kapitol nemá nahradit odbornou literaturu, která je nám dostupná. Proto doporučujeme problematiku shodného zobrazení prostudovat v pramenech, které lze mít k dispozici. Některé z těchto pramenů uvádíme níže po naší zkušenosti při hledání informačních pramenů k tématice shodného zobrazení.

Přehled dostupných pramenů rozšiřuje nabídku metod, postupů, způsobů vysvětlení, které jsou v publikacích využity. Neméně důležitá je možnost ověření si praktické znalosti, či pochopení definic a vět s pomocí osvětlujících příkladů a důkazů.

S ohledem na převážně monotematické pojmenování publikací je neřadíme v abecedním pořadí. A vzhledem k tomu, že ani datum vydání publikace není stěžejní vzhledem k ustálené terminologii v této matematické oblasti, tak neřadíme publikace dle roku vydání. Řadíme nakonec jednotlivé příspěvky podle jména autora v abecedním pořadí. V případě zájmu je toto pořadí nejvhodnější pro potřeby dohledání dalších bibliografických údajů v literárních pramenech této práce.

Čtenáře chceme motivačně vybídnout k prostudování si některých starších publikací. Nenechejte se odradit datem vydání či nedostatkem informací, na jaké úrovni jsou uváděné skutečnosti v publikaci uváděny, popř. jaké všechny skutečnosti jsou v daném literárním textu čtenářům předávány. Právě ani tyto starší publikace do dnešních dní neztrácí na své informační hodnotě i v porovnání s jinými publikacemi mladšího data.

Vybrali jsme jedenáct literárních textů. Při studiu této tématiky jsme se setkali s větším počtem literárních pramenů, ale jejich přínos jsme neshledali dostatečně přínosným z pohledu informačního charakteru, který by nebyl duplikátně uváděn v některých z námi vybraných publikací. Povahu každého z námi vybraných textů stručně charakterizujeme následovně:

Matematika III: základy geometrie (Bartoňová, Květoň, 2006)

Jedná se text určený pro studenty a jejich studium. Vzhledem k záběru publikace na osvojení si základů geometrie, tak zde nalezneme poznatky v rámci shodného zobrazení v rovině. Při představování konkrétních shodností se využívá vizuální předlohy, která shodné zobrazení nenáročnému čtenáři přibližuje.

Geometrie II (Blažek, 1994)

Skripta určena pro předmět geometrie v učitelské přípravě na základní a střední školy. Velice vhodně začíná lineárním kombinováním bodů a vektorů, přechází v lineární zobrazení a končí u podobných a shodných zobrazení. Skripta jsou takto logicky uspořádána, kdy čtenář podobná a shodná zobrazení studuje na stejné úrovni od počátku při postupném čtení textu. Obě zobrazení jsou však čtenáři představena pouze v euklidovské rovině. Bohužel na rozvoj tématiky blíže pro další euklidovské prostory zde není věnována větší pozornost. Text, který je členěn do definic a vět je doplněn důkazy, případnými poznámkami a obrázky k ucelenému a přehlednému studiu této tématiky.

Základy geometrie (Doležal, 2006)

Autor textu vybírá nejnutnější znalosti, které nám v celosti a stručnosti předává. K dovysvětlení čtenářům stačí tištěné ilustrace. Velkou předností této publikace je, že se snaží spojit teorii a praxi. Konkrétně tedy při představování geometrického zobrazení v rovině se téměř vždy střídá jedna výkladová část s částí pro řešení zadané úlohy, která je často i konstrukčního charakteru. Bohužel, musíme se spokojit pouze s geometrickými zobrazeními roviny, proto je pro studenty matematiky vhodné rozšířit si záběr o jiné literární texty.

Geometrie 3 (Dofková, Kopecký, 2008)

Text, který pochází z naší Alma Mater, Univerzity Palackého v Olomouci. Název textu odráží poptávku na studenty pedagogické fakulty, kteří studují některý z kurzů, který se rozsahově zabývá uvedenými tématy v textu. Jedním z uvedených témat je i shodné zobrazení. Strukturou se text zaměřuje pouze na udání teorie v podobě definic, vět a důkazů. Případné poznámky, možnosti využití jsou nastíněny autory na počátku kapitoly či v jejich shrnutí. Nenalezneme zde cvičení s výsledky, na kterých by čitatel prakticky uplatnil nabyté vědomosti a ověřil si tak jejich dostatečné porozumění. V tématu shodného zobrazení je však vhodně pamatováno na n-rozměrné prostory, konkrétním představením v přímce, rovině a prostoru.

KMA/G2 GEOMETRIE 2: Pomocný učební text (Lávička, 2006)

Pomocný učební text autorem určený pro studenty Fakulty aplikovaných věd a Fakulty pedagogické Západočeské univerzity v Plzni. Učební text začíná ve stručnosti afinním zobrazením, aby ve stejné stručnost představil shodná a podobná zobrazení. Stručnost se pozitivně projevuje ve způsobu předávání informací, kdy definice jsou v textu vyznačeny a případně některé informace uvedeny v tabulkách pro důslední znázornění určitého kritéria. Text myslí i na další zobrazení, jako jsou sférická zobrazení. S ohledem na stručnost textu zde nenalezneme konkrétní příklady. Vše je formulováno v obecné rovině. Tedy zde nejsou ani případná cvičení, která by plnila kontrolní funkci úrovně porozumění textu.

Geometrická zobrazení (Leischner, 2010)

Publikace, která se bere za předěl mezi literaturou zábavnou a literaturou odbornou. V knize se nerozebírají všechny geometrická zobrazení, ale pouze afinní zobrazení. Vzhledem k převaze odbornosti zde máme mnoho poznatků, které jsou čtenáři předkládány pomocí přehledných způsobů. Tyto způsoby využívají pro svůj výklad názorné obrázky. Většina vět, které jsou čtenáři předloženy mají hned uveden důkaz. V případě analogického důkazu s jiným dříve uvedeným je konkrétní provedení důkazu již ponecháno na čtenáři.

Matematika pro gymnázia (Pomykalová, 2001)

Jelikož je nám text předkládán v podobě učebnice pro gymnázia, tak je zde vždy vyznačena jedna nejhlavnější myšlenka či definice. V rámci tohoto dílu Planimetrie je zde probíráno zobrazení v rovině na konkrétních zobrazeních. Vhodná publikace pro vhled do problematiky, osvěžení některých drobností. Obdobně na tom je i díl Stereometrie, ve kterém je řešeno zobrazení v prostoru. Pro studenty matematiky však je to publikace nedostačující, protože zde nepracujeme např. se souměrností nadroviny a jinými skutečnosti, které by odpovídaly znalostem shodného zobrazené v n-rozměrném euklidovském prostoru obecně. Součástí učebnice jsou i cvičení, ke kterým je dostupný klíč na konci.

Geometrie II (Sekanina et al., 1988)

Autorem zamýšlená publikace pro studenty učitelského směru matematiky. Poměrně malý prostor věnovaný zobrazeném v euklidovském prostoru je využit maximálně, kdy autor vhodně využívá matematickou terminologii. Nejvíce je zde věnováno základním vlastnostem zobrazení v obecné podobě, což ocení náročnější čtenáři. Autor klade důraz i na přehlednost, kdy shodnosti roviny a prostoru jsou shrnuty v přehledné tabulce. Oddechovou částí v textu jsou dobrovolné úkoly, jejich výsledky jsou na konci publikace.

Základy matematiky (Stopenová, 2005)

Jedná se původně o učební text určený budoucím učitelům na 1. stupni základní školy. S ohledem na to je toto dobrou publikací pro přehledný první náhled do tohoto tématu shodnosti. Autorka nevyužívá přílišné zatěžující terminologie, která by čtenáře mátla, ale naopak velice systematicky postupuje od relaci zobrazení, shodnosti úseček, úhlů, trojúhelníků až ke shodnému zobrazení. Primárně se zde autorka zaměřuje na shodná zobrazení v rovině, ale neopomíjí v dostatku shodné zobrazení v přímce. Shodné zobrazení v prostoru je zde spíše jako pomyslná praktická ochutnávka z vybraných shodných zobrazení v prostoru. Text je vhodný ke samostudiu, neboť je zde dostatek aktivit a úkolů, ke kterým je na konci klíč řešení.

Geometria 2: Pre študentov matematiky učitelského štúdia na univerzitách a pedagogických fakultách (Šedivý et al., 1987)

Jak název napovídá, máme zde text primárně určený studentům matematiky na pedagogické fakultě. Slovenský text se z počátku zaměřuje pouze na udání nejstěžejnějších definic a vět, ale nakonec se v jednotlivých částech dostatečným způsobem věnuje shodný zobrazením a euklidovskému prostoru v podobě přímky, roviny i prostoru. Text obsahuje několik příkladů a jejich řešení.

Elementární geometrie I (Planimetrie) (Vyšín, 1952)

I když se jedná o publikaci staršího data, tak pro studenty matematiky na pedagogické fakultě, bylo mohlo být pročítání této publikace velice příjemně tráveným časem. Příjemným zjištěním je, že autor tuto publikaci zamýšlel jako učebnici právě pro posluchače pedagogické fakulty zaměřené na matematiku. Publikace je členěna od základních polohových vlastností, přes které se postupně dostává na shodná zobrazení v přímce a rovině. Většina uvedených definic a vět měly komentář, důkaz či jasnou návaznost s větou další v takovém tempu, které se dalo stíhat. Stručné věty autora mezi jednotlivými definici vytváří dojem uceleného textu.

A i když text na první pohled působí jednotvárně, tak naopak je to i jeho výhodou, kdy tento fakt může u čtenáře vyvolat potřebu přečíst celou kapitolu, aby určitý díl tématu byl vhodně čtenářem pochopen. Samozřejmě, pro některé čtenáře toto může být na první pohled odrazující, je však vždy možné při individuálním studiu zvolit vlastní tempo vstřebávání znalostí.

Pro čtenáře může být možná na škodu, že zde nejsou připojeny poznatky shodného zobrazení v prostoru, neboť autor textu se zaměřuje na elementární geometrii v rozsahu planimetrie, jak napovídá vlastní název textu.

5.1 Porovnání

Uvědomujeme si, že každý čtenář si volí svá vlastní kritéria, faktory, na jejich základě se rozhodne čerpat z vybraného literárního pramene. Proto se níže uváděné porovnání opírá především o obsahové skutečnosti. Mezi kritéria jsme zařadili:

Zobrazení v E_n

V tomto kritériu se nám jedná především o uchopení nějakých základních vlastní platný v n-rozměrných euklidovských prostorech, a tak i čtenáři představovaných. Do tohoto kritéria zařazuje i skutečnosti, jako jsou např. souměrnosti podle nadrovin.

Shodnosti v E_1

I když klasifikací shodných zobrazení se jedná o nejméně početnou skupinu různých pojmenovaných shodností, tak při představení shodných zobrazení v přímce explicitním způsobem může být čtenářem chápáno jako možnost prostudovat témat shodného zobrazení v ucelenosti.

Shodnosti v E_2

Shodná zobrazení v rovině jsou nejčastěji v textech zmiňovány, proto nemohou být opomenuto jako jedno z kritérií.

Shodnosti v E_3

Shodná zobrazení v prostoru jsou logickým vyústěním v další kritérium, ze kterého čtenář přehledně může zjistit, kde může najít jejich konkrétní klasifikaci, popř. i jejich podobu s ohledem na jejich vlastnosti.

Příklady

Toto je kritériem, pod kterým čtenář nalezne kontrolní aparát, do kterého spadají řešené příklady, cvičení, konkrétní úlohy, kontrolní otázky. Součástí kontrolního aparátu předpokládáme i přístup ke klíči, řešení, na jehož základě může čtenář jednoznačně určit svou znalost či neznalost ve studované problematice.

Pro přehlednost jsme vybraná kritéria vložili do přehledové tabulky, kde „ano“ značí splnění kritéria a „ne“ jeho absencí v textu.

	Zobrazení v E_n	*Shodnosti v E_1*	*Shodnosti v E_2*	*Shodnosti v E_3*	*Příklady*
(Bartoňová, Květoň, 2006)	ne	ne	ano	ne	ano
(Blažek, 1994)	ne	ne	ano	ne	ne
(Doležal, 2006)	ne	ne	ano	ne	ano
(Dofková, Kopecký, 2008)	ano	ano	ano	ano	ne
(Lávička, 2006)	ano	ne	ano	ano	ne
(Leischner, 2010)	ano	ne	ano	ano	ne
(Pomykalová, 2001)	ne	ne	ano	ne	ano
(Sekanina et al., 1988)	ano	ne	ano	ano	ano
(Stopenová, 2005)	ne	ano	ano	ano	ano
(Šedivý et al., 1987)	ano	ano	ano	ano	ano
(Vyšín, 1952)	ne	ano	ano	ne	ne

Tabulka 5.1. Porovnání publikací se zaměřením na téma shodnosti

Porovnání v této podobě netvoříme pro vyhodnocení, která z publikací dle námi zvolených kritérií je nejkomplexnější. Protože tato komplexnost na první pohled nemusí znamenat, že je tou nejlepší publikací k vlastnímu studiu čtenáře.

Apelujeme spíše na to, že jestliže máme potřebu prohloubit vědomosti v některé z oblastí, které kritérium postihuje, tak tímto získáváme rychlý nástroj k nalezení potenciálně vhodného studijního materiálu.

Věříme, že datum vydání některých titulů nebude u čtenářů problémem v podobě nedostupnosti této publikace. I tato možnost může nastat, proto vždy určitá skutečnost zastižena v některém z vybraných kritérií se jako splněné kritérium nevyskytuje pouze u jednoho pramene, ale je možné tyto skutečnosti čerpat i z jiných zdrojů.

Závěr

Kvalifikační práce se zaměřovala na shodná zobrazení v euklidovské rovině, ale i v euklidovské přímce a v euklidovském prostoru. Vybraná shodná zobrazení byla doplněna obrázky znázorňující příslušná shodná zobrazení. Obrázky byly vytvořeny pomocí programu Geogebra. Literatura, ze které byly předpoklady o shodném zobrazení čerpány, byla zhodnocena a porovnána pouze na úrovni vybraných kritérií zaměřených na obsahovou stránku pramenů. Cíl práce byl v tomto ohledu splněn.

Za přínos bereme nejen

Seznam použité literatury a pramenů

BARTOŇOVÁ, Eva a Pavel KVĚTOŇ. *Matematika III: základy geometrie*. Ostrava: Obchodní akademie Orlová, 2006. ISBN 978-80-87113-06-6.

BLAŽEK, Vladimír. *Geometrie II.* Ústí nad Labem: Univerzita J. E. Purkyně, 1994. ISBN 80-7044-070-8.

BOČEK, Leo a Jaroslav ŠEDIVÝ. *Grupy geometrických zobrazení*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1979.

DOLEŽAL, Jiří. *Základy geometrie*. Ostrava: Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava, 2006. ISBN 80-248-1202-9.

DOFKOVÁ, Radka a Milan KOPECKÝ. *Geometrie 3*. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2008.

HRUŠA, Karel, Emil KRAEMER, Jiří SEDLÁČEK, Jan VYŠÍN a Rudolf ZELINKA. *Přehled elementární matematiky.* 4., nezměněné vyd. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1964.

LÁVIČKA, Miroslav. *KMA/G2 GEOMETRIE 2: Pomocný učební text* [online]. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2006 [cit. 2022-02-16]. Dostupné z: https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~halas/Geometrie/Lavicka_G2.pdf

LEISCHNER, Pavel. *Geometrická zobrazení*. České Budějovice: Jihočeská univerzita, 2010. ISBN 978-80-7394-243-4.

POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia*. *Planimetrie.* 4. vyd. Praha: Prometheus, 2001. ISBN 80-7196-174-4.

SEKANINA, Milan, Leo BOČEK, Milan KOČANDRLE a Jaroslav ŠEDIVÝ. *Geometrie II*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1988.

STOPENOVÁ, Anna. *Matematika II: geometrie s didaktikou*. Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 1999. ISBN 80-7067-978-6.

STOPENOVÁ, Anna. *Základy matematiky*. 3. 2. vyd. Olomouc: Univerzita Palackého, 2005. ISBN 80-244-1069-9.

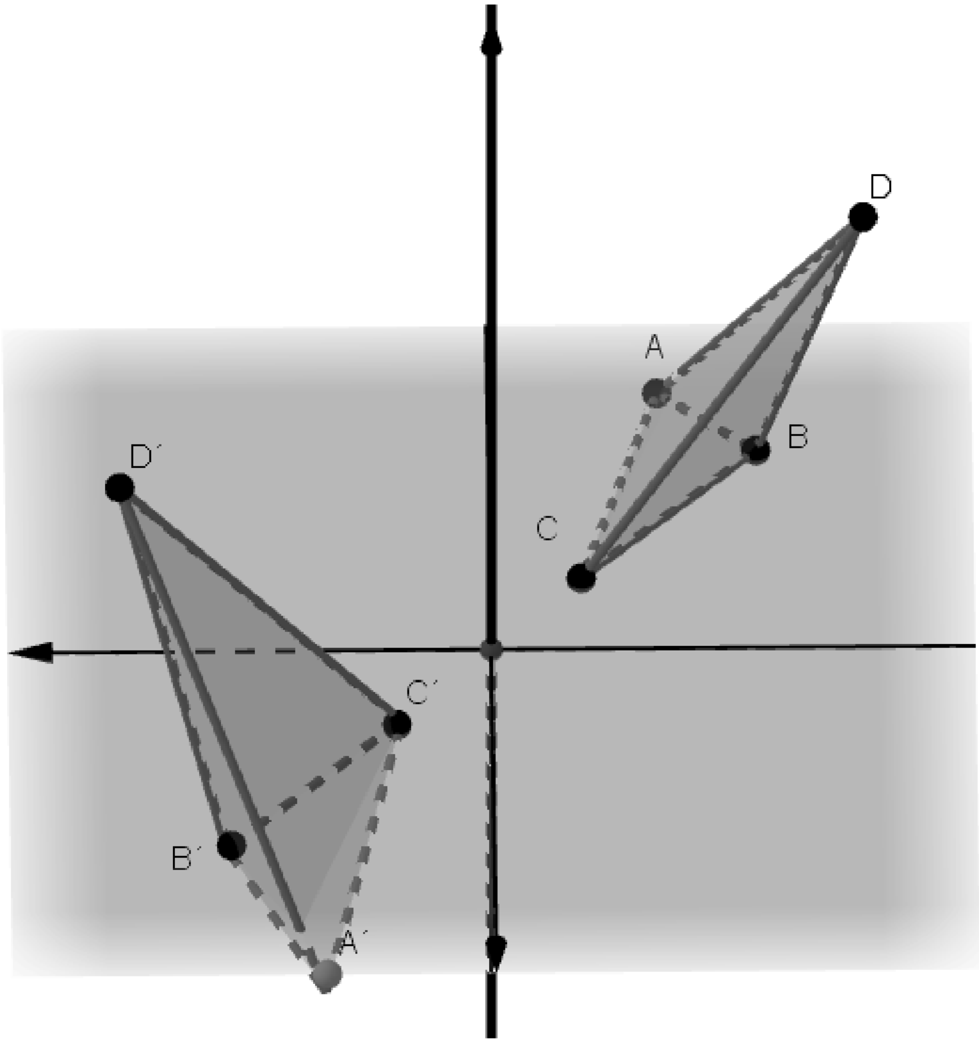
ŠEDIVÝ, Jaroslav. *Shodnost a podobnost v konstrukčních úlohách*. Praha: Mladá fronta, 1980. Škola mladých matematiků.

ŠEDIVÝ, Ondrej, Miloš BOŽEK, Ján DUPLÁK, Pavel KRŠŇÁK a Marián TRENKLER. *Geometria 2: Pre študentov matematiky učitelského štúdia na univerzitách a pedagogických fakultách.* Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo Bratislava, 1987.

VYŠÍN, Jan. *Elementární geometrie I (Planimetrie).* Praha: Přírodovědecké vydavatelství, 1952.

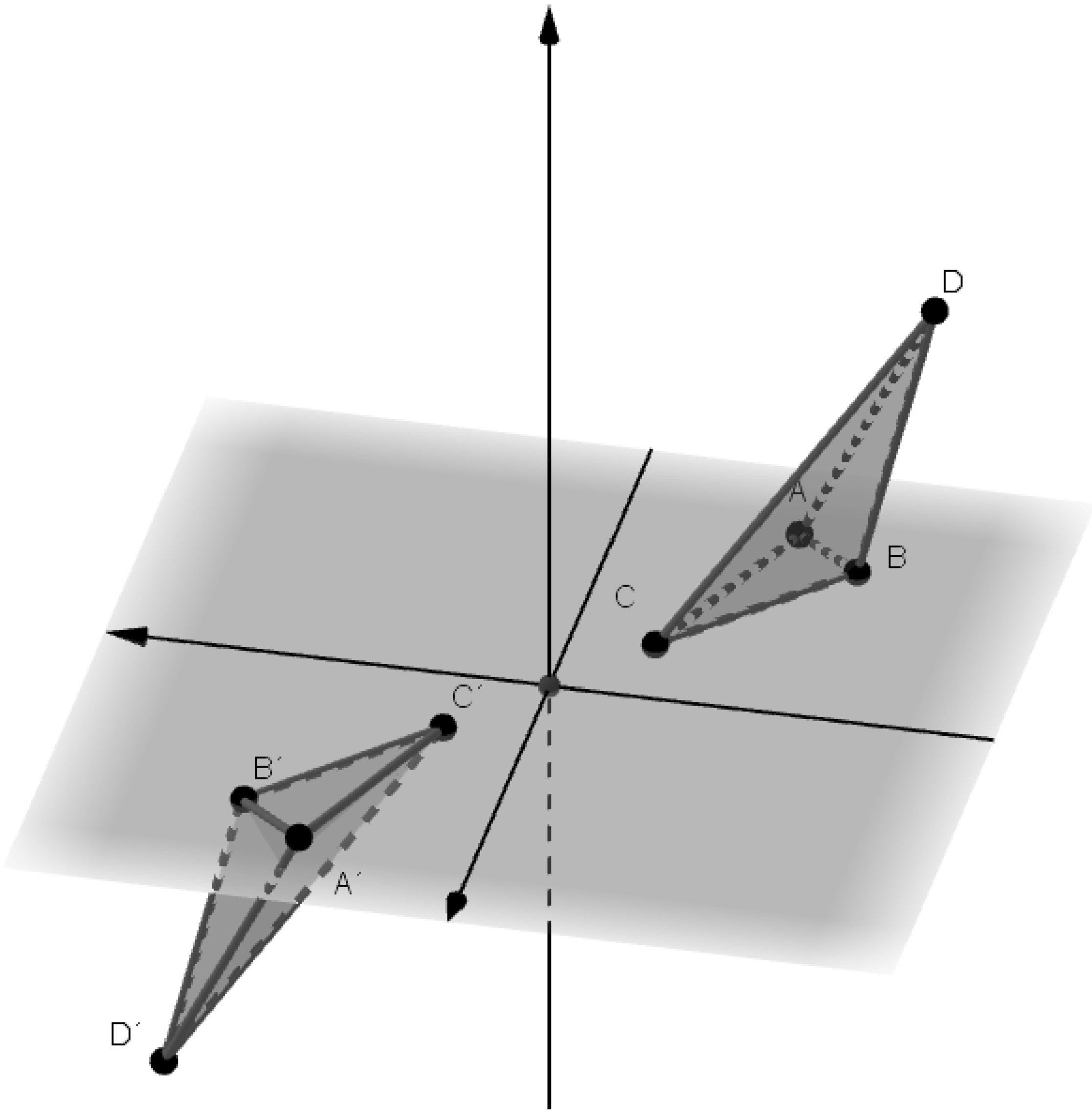
Seznam příloh

Příloha č. 1: Osová souměrnost



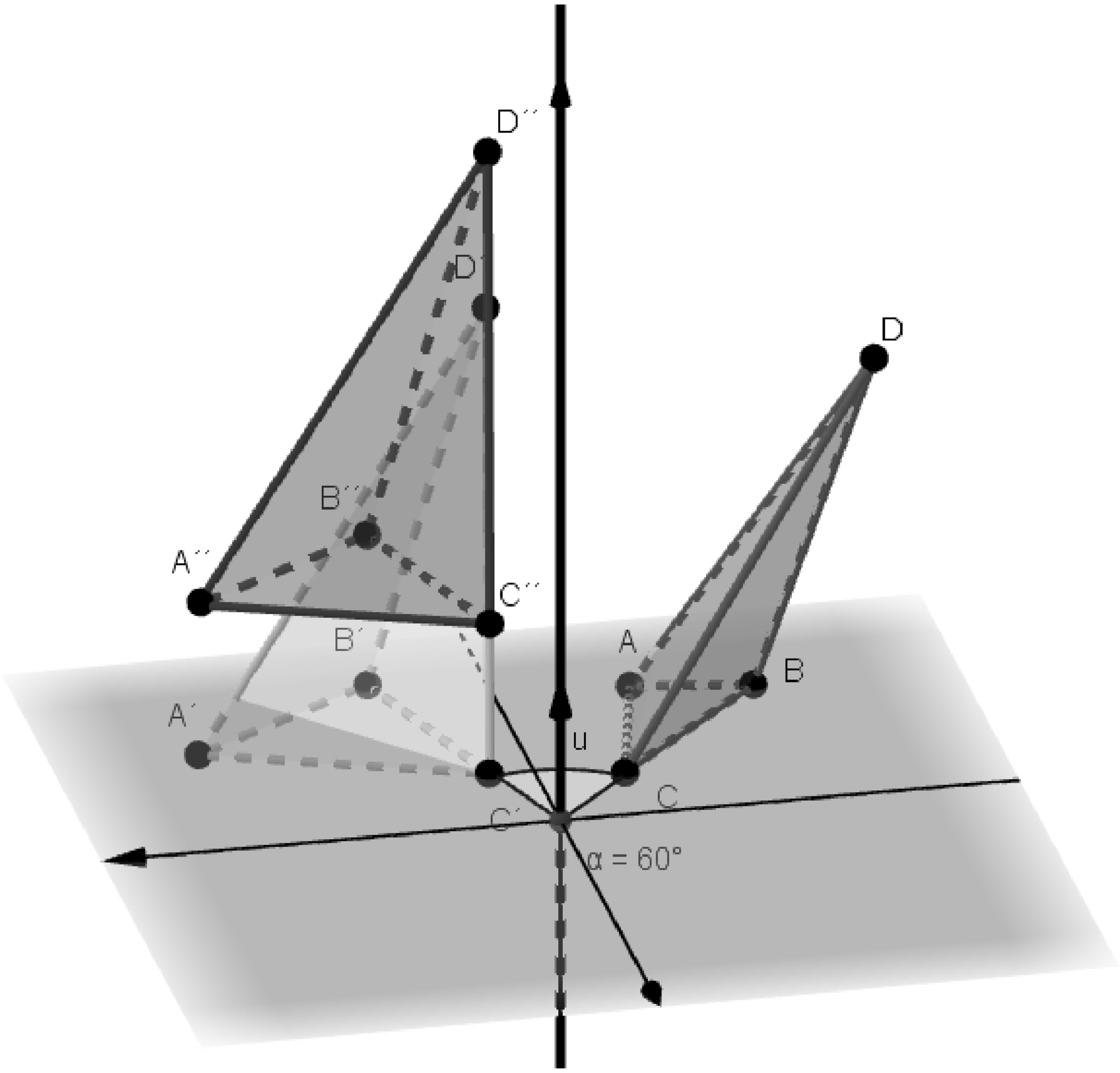
Obr. I: Osová souměrnost

Příloha č. 2: Středová souměrnost



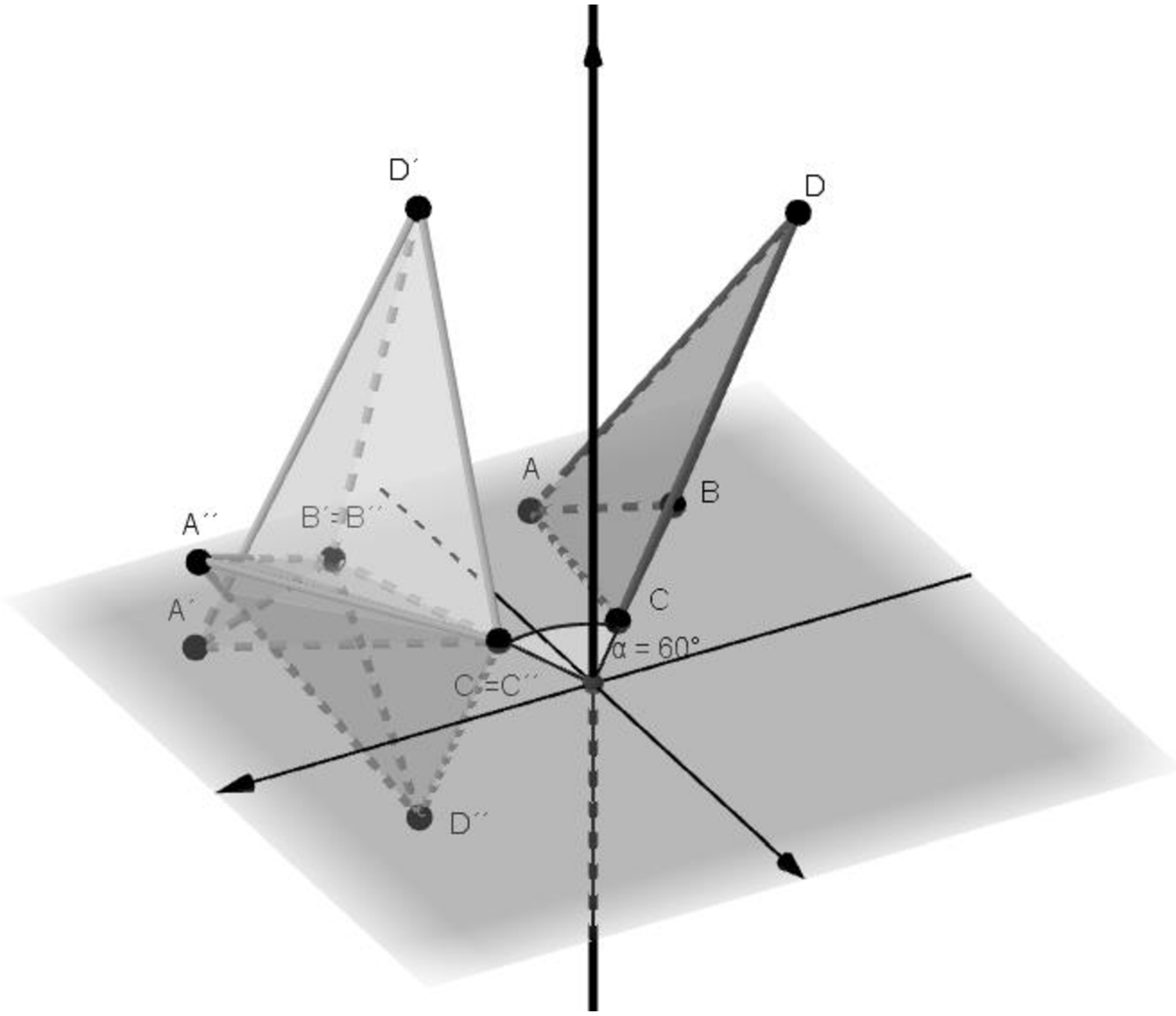
Obr. II: Středová souměrnost

Příloha č. 3: Torze



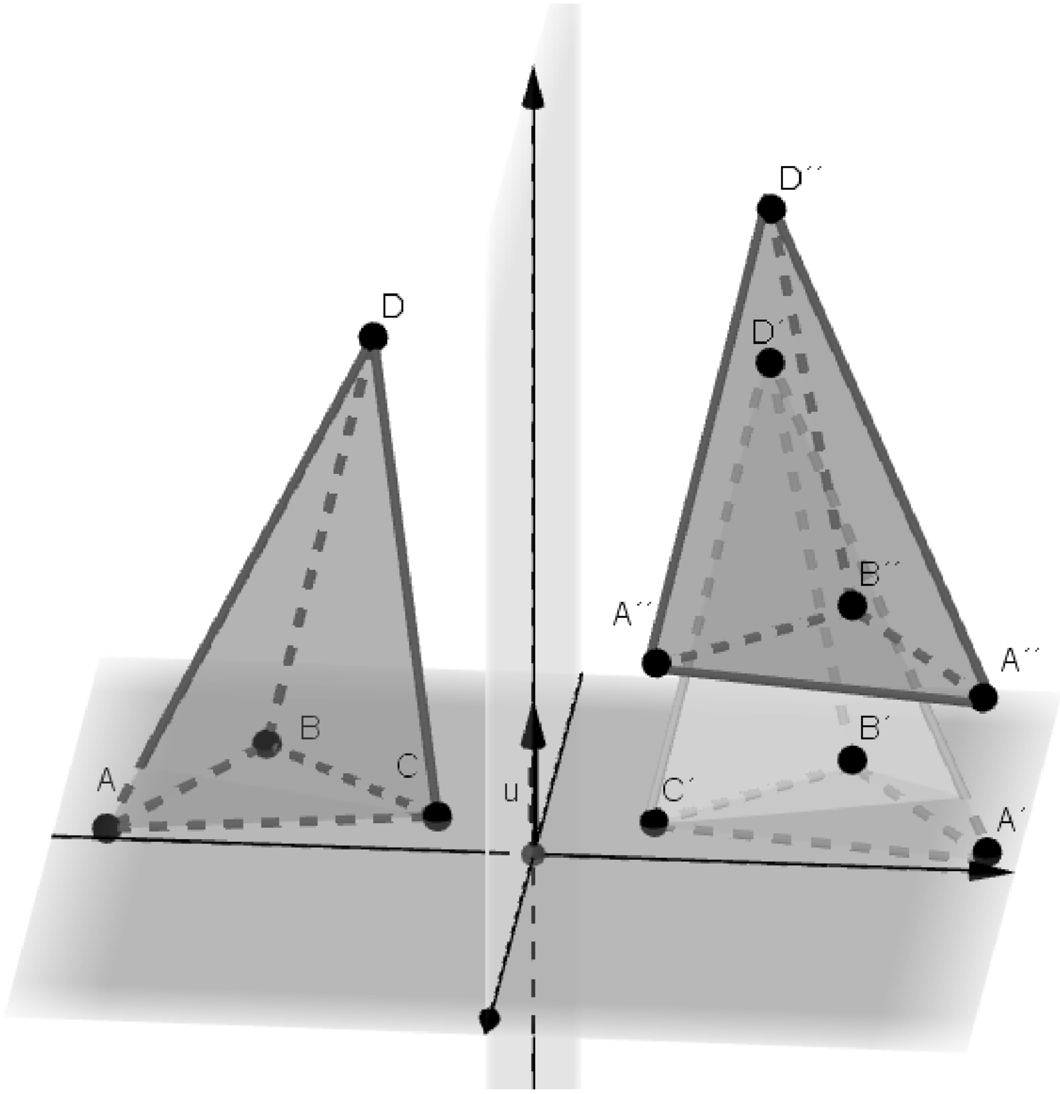
Obr. III: Torze, která je vytvořena pomocí otáčení kolem přímky ve složení s posunutím ve směru oné přímky

Příloha č. 4: Otáčivá souměrnost



Obr. IV: Otáčivá souměrnost, která je vytvořena otočením kolem přímky ve složení se souměrností podle roviny kolmé na přímku

Příloha č. 5: Posunutá souměrnost



Obr. V: Posunutá souměrnost, která je vytvořena souměrností podle roviny ve složení s posunutím ve směru té roviny

Anotace

Jméno a příjmení:	Mgr. Mariana Jalůvková
Katedra:	Katedra matematiky
Vedoucí práce:	Mgr. David Nocar, Ph.D.
Rok obhajoby:	2022

Název práce:	Shodná zobrazení
Název v angličtině:	Isometry
Anotace práce:	Bakalářská práce se zaměřuje na shodná zobrazení. Je členěna do pěti kapitol. Kapitola jedna až čtyři se zabývají shodnými zobrazeními obecně, shodnými zobrazeními v přímce, shodnými zobrazeními v rovině, shodnými zobrazeními v prostoru. Pátá kapitola porovnává dostupnou literaturu. Shodná zobrazení jsou vykreslena v programu Geogebra.
Klíčová slova:	shodná zobrazení, identita, osová souměrnost, středová souměrnost, posunutí, otočení, posunutá souměrnost
Anotace v angličtině:	The bachelor thesis focuses on isometry. It is divided into five chapters. Chapters one to four deal with isometry in general, isometry in a straight line, isometry in a plane, identical views in space. The fifth chapter compares the available literature. Identical views are drawn in Geogebra.
Klíčová slova v angličtině:	isometry, identity, axial symmetry, central symmetry, translation, rotation, displaced symmetry
Přílohy vázané v práci:	Příloha č. 1: Osová souměrnost Příloha č. 2: Středová souměrnost Příloha č. 3: Torze Příloha č. 4: Otáčivá souměrnost Příloha č. 5: Posunutá souměrnost
Rozsah práce:	36 stran
Jazyk práce:	Český jazyk