UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Limity funkcí dvou proměnných - řešené příklady

Vedoucí bakalářské práce: **Mgr. Pavla Kouřilová, Ph.D.**
Vypracovala: **Alexandra Kobzová**
Studijní program: B1103 Aplikovaná matematika
Studijní obor Matematika-ekonomie se zaměřením na bankovnictví
Forma studia: prezenční
Rok odevzdání: 2015

BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKACE

Autor: Alexandra Kobzová

Název práce: Limity funkcí dvou proměnných - řešené příklady

Typ práce: Bakalářská práce

Pracoviště: Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

Vedoucí práce: Mgr. Pavla Kouřilová, Ph.D.

Rok obhajoby práce: 2015

Abstrakt: Práce se zabývá limitami funkcí dvou proměnných. V první kapitole jsou uvedeny základní definice a věty z teorie funkcí dvou proměnných, potřebné k vyslovení definice limity funkce dvou proměnných a následně k výpočtům.
Druhá kapitola se již zabývá limitami funkcí dvou proměnných. Nejprve jsou zavedeny důležité definice a věty týkající se dvojných limit. Následuje podkapitola zabývající se důkazy neexistencí dvojných limit - pomocí přístupu po křivkách, postupných limit a na závěr užitím převodu do polárních souřadnic. Všechny typy důkazů jsou ilustrovány na řešených příkladech. Druhá podkapitola je tvořena řešenými příklady na výpočet dvojných limit - dosazení do spojitých funkcí, algebraické úpravy, substituce a využití převodu do polárních souřadnic.
Poslední třetí kapitola je tvořena souborem příkladů k procvičení s výsledky. Některé příklady jsou doplněny o návody na řešení.

Klíčová slova: Limita, funkce dvou proměnných, řešené příklady

Počet stran: 51

Počet příloh: 0

Jazyk: český

BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

Author: Alexandra Kobzová

Title: Limits of bivariate functions - problems with solution

Type of thesis: Bachelor's

Department:
Department of Mathematical Analysis and Application of Mathematics

Supervisor: Mgr. Pavla Kouřilová, Ph.D.

The year of presentation: 2015

Abstract:

The bachelor thesis is about limits of bivariate functions. In the first chapter are mentioned definitions and theorems of bivariate functions, which are important for the definition of the limit and for following solved problems.
The second chapter is concerned with limits of bivariate functions. At first there are definitions and theorems about limits. Then is the chapter divided to two parts - in the first of them is showed how to prove that limit doesn't exist and in the second one how to calculate the limit.
The third and last chapter is consisted of the examples to practice and their results.

Key words: Limit, bivariate functions, solved problems

Number of pages: 51

Number of appendices: 0

Language: Czech

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracovala samostatně pod vedením paní Mgr. Pavly Kouřilové, Ph.D. s použitím uvedené literatury.

V Olomouci dne 4. května 2015

Poděkování

Ráda bych poděkovala vedoucí bakalářské práce za spolupráci i za čas, který mi věnovala při konzultacích.

Obsah

Úvod **7**

1 Funkce dvou proměnných **8**

2 Limity funkcí dvou proměnných **10**
2.1 Důkazy neexistence limity 13
2.1.1 Přístup po křivkách 14
2.1.2 Postupné (dvojnásobné) limity 18
2.1.3 Převod na polární souřadnice 21
2.2 Výpočty limit 25

3 Cvičení **41**
3.1 Příklady I 41
3.2 Příklady II 42
3.3 Návody na řešení a výsledky 43

Závěr **49**

Dodatek - použité vzorce **50**

Literatura **51**

Úvod

Cílem této bakalářské práce je vytvořit sbírku příkladů na limity funkcí dvou proměnných pro studenty programu Aplikovaná matematika předmětu KMA/M2N Matematika 2. Text předpokládá znalosti podmiňujícího předmětu KMA/M1N Matematika 1.

Téma řešených příkladů jsem si vybrala, protože po celou dobu studia doučuji studenty, mimo jiné vysokých škol, a ze zkušenosti vím, že každý obor má své specifické požadavky na studenty v jednotlivých kapitolách matematiky. Hodí se tedy pokud mají studenti nějaký podpůrný materiál. Já sama jsem při studiu předmětu KMA/M2N využila již vytvořené sbírky příkladů, které mi pomohly dostatečně pochopit danou problematiku. Také proto jsem se rozhodla pro vytvoření této sbírky a pokusím se ji zpracovat tak, aby byla pro studenty pomůckou k pochopení a prohloubení znalostí limit funkcí dvou proměnných.

V první kapitole své práce uvedu potřebné podklady pro vyslovení stěžejní definice limity funkcí dvou proměnných, pokračovat bude hlavní kapitola týkající se teorie limit dvou proměnných a dále pak podkapitoly zabývající se jednotlivými způsoby důkazů neexistence a výpočtů limit. Třetí poslední kapitola bude tvořena příklady na procvičení, stručnými návody k jejich řešení a výsledky.

V textu bude symbol $\triangle$ označovat konec příkladu.

1. Funkce dvou proměnných

Připomeňme si nejdříve základní definice z teorie funkcí dvou proměnných, abychom na základě jejich znalostí mohli vyslovit definici limity funkce dvou proměnných a používat příslušné značení v dalším textu.

Definice 1.1. *[9]* Uspořádanou dvojici (M, ρ), kde M je libovolná neprázdná množina a ρ je zobrazení z $M \times M$ do $\mathbb{R}$ splňující pro všechna $X, Y, Z \in M$ následující vlastnosti:

1. nezápornost: $\rho(X, Y) \geq 0$
2. symetrie: $\rho(X, Y) = \rho(Y, X)$
3. totožnost: $\rho(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X = Y$
4. trojúhelníková nerovnost: $\rho(X, Y) \leq \rho(X, Z) + \rho(Z, Y)$

nazýváme **metrický prostor**. Zobrazení $\rho : M \times M \to \mathbb{R}$ nazýváme **metrika**, číslo $\rho(X, Y)$ **vzdálenost prvků** X, Y v prostoru (M, ρ).

Poznámka 1.1. Dále budeme označením $\mathbb{R}^2$ rozumět dvojrozměrný prostor s euklidovskou metrikou: $\rho(X, Y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$, kde $X, Y \in \mathbb{R}^2$, $X = (x_1, x_2), Y = (y_1, y_2)$.

Definice 1.2. *[9]* Nechť $A \in (M, \rho)$, $\varepsilon > 0$. Množinu všech bodů $X \in (M, \rho)$, pro které platí $\rho(X, A) < \varepsilon$ nazýváme **ε-okolím bodu A v prostoru** (M, ρ) a značíme ji $U(A, \varepsilon)$; tj.:

$$U(A, \varepsilon) = \{X \in (M, \rho); \rho(X, A) < \varepsilon\}$$

Redukovaným ε-okolím bodu A nazveme množinu:

$$U^*(A, \varepsilon) = \{X \in (M, \rho); 0 < \rho(X, A) < \varepsilon\}.$$

Definice 1.3. *[4]* Nechť $B \subseteq \mathbb{R}^2$, bod H se nazývá **hromadným bodem množiny** B, jestliže v každém jeho δ-okolí leží nekonečně mnoho bodů, které patří do množiny B.

Definice 1.4. *[2]* Nechť $B \subseteq \mathbb{R}^2, B \neq \emptyset$. Zobrazení $f : B \to \mathbb{R}$ se nazývá **reálná funkce dvou reálných proměnných** a množina B se nazývá **definiční obor** této funkce a značí se D_f.

Definice 1.5. *[2]* Nechť $B \subseteq \mathbb{R}^2$ a $f : B \to \mathbb{R}$ je funkce dvou proměnných definovaná na B, $c \in \mathbb{R}$. Množinu

$$f_c = \{(x, y) \in B : f(x, y) = c\}$$

nazýváme **vrstevnice funkce f na úrovni c.**

Definice 1.6. *[10]* Říkáme, že **funkce f je v bodě (x_0, y_0) spojitá**, je-li v tomto bodě definovaná a jestliže k libovolnému $\varepsilon > 0$, existuje takové $\delta > 0$, že pro všechny body (x, y) z δ-okolí bodu (x_0, y_0) je $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$.

Věta 1.1. *[10] Nechť bod $(x_0, y_0) \in D_f$ a zároveň je hromadným bodem D_f. Pak je funkce f v tomto bodě spojitá tehdy a jen tehdy, jestliže $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.*

2. Limity funkcí dvou proměnných

Limita je nástroj k vyšetřování chování funkce v okolí nějakého bodu. Nejčastěji se zajímáme o to, jak vypadá funkce v okolí bodů nespojitosti a v okolí nevlastních bodů.

V této kapitole uvedeme základní definici limity, vlastnosti limit funkcí dvou proměnných a následně si ukážeme, jak určit limitu funkce v daném bodě, případně jak dokázat, že limita v daném bodě neexistuje.

Poznámka 2.1. Označením $(\mathbb{R}^2)^*$ budeme rozumět dvojrozměrný prostor $\mathbb{R}^2$ rozšířený o nevlastní body. Nevlastním bodem v $\mathbb{R}^2$ nazýváme bod, který má alespoň jednu souřadnici ∞ nebo $-\infty$.

Definice 2.1. *[2]* Nechť bod $(x_0, y_0) \in (\mathbb{R}^*)^2$ je hromadným bodem D_f. Řekneme, že **funkce** $f : D_f \to \mathbb{R}$ ***má v bodě*** (x_0, y_0) ***limitu*** $L \in \mathbb{R}^*$, jestliže ke každému okolí $U(L)$ bodu L existuje redukované okolí $U^*(x_0, y_0)$ bodu (x_0, y_0) takové, že pro každý bod $(x, y) \in U^*(x_0, y_0) \cap D_f$ platí $f(x, y) \in U(L)$. Píšeme:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L.$$

Poznámka 2.2. *[2]* Limita se nazývá **vlastní**, jestliže $L \in \mathbb{R}$, v opačném případě ($L = \pm\infty$) se nazývá **nevlastní** limita. Bod (x_0, y_0) se nazývá **limitní bod**. Limitě $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$ říkáme **dvojná limita.**

Věta 2.1. *[7] Funkce f má v bodě $(x_0, y_0) \in (R^*)^2$* ***nejvýše jednu*** *limitu.*

Věta 2.2. *[2] Nechť* $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = 0$ *a funkce* g *je* ***omezená*** *v nějakém redukovaném okolí bodu* (x_0, y_0). *Pak*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \cdot g(x,y) = 0.$$

Věta 2.3. *[10] Mají-li funkce* f *a* g *v bodě* (x_0, y_0) *limitu* A *resp.* B, *pak také funkce* $c \cdot f$ *(*$c \in \mathbb{R}$ *je libovolná konstanta),* $f \pm g, f \cdot g$ *a pro* $B \neq 0$ $\frac{f}{g}$ *mají v tomto bodě limitu a platí:*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (c \cdot f(x,y)) = c \cdot A$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f(x,y) \pm g(x,y)) = A \pm B$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f(x,y) \cdot g(x,y)) = A \cdot B$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{A}{B},$$

pokud mají výrazy na pravé straně smysl v R^*.

Věta 2.4. *[11]* (Limita složené funkce) *Buď* $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ *a* $L', L \in \mathbb{R}$. *Nechť* f *a* g *splňují:*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = L', \ \lim_{t\to L'} f(t) = L, \ \text{kde } t = g(x,y)$$

a existuje redukované okolí $U^*(x_0, y_0)$ *bodu* (x_0, y_0) *takové, že* $g(x,y) \neq L'$ *pro každé* $(x,y) \in U^*(x_0, y_0)$ *nebo je funkce* f *spojitá v* L'. *Potom*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(g(x,y)) = L.$$

Poznámka 2.3. Věta o složené funkci nám říká, že jestliže je vnější funkce $f(t)$ spojitá v bodě L' pak můžeme s limitou „vstoupit“ do složené funkce a upravit původní limitu takto:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(g(x,y)) = f\left(\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)\right).$$

Věta 2.5. *Nechť existuje redukované okolí $U^*(x_0, y_0)$ bodu (x_0, y_0) takové, že pro každé $(x, y) \in U^*(x_0, y_0)$ platí $f(x, y) = g(x, y)$. Má-li funkce g v bodě (x_0, y_0) limitu L, pak má funkce f v bodě (x_0, y_0) stejnou limitu L.*

Poznámka 2.4. Věta 2.5 je analogií věty, která platí pro limitu funkce jedné proměnné, uvedené například v [5]. Věta nám umožňuje funkci, která není definovaná v bodě (x_0, y_0) nahradit jinou funkcí, která se té původní rovná ve všech bodech kromě bodu (x_0, y_0). Vypočteme-li limitu nové funkce v bodě (x_0, y_0) dostaneme zároveň i hodnotu limity původní funkce v bodě (x_0, y_0).

Postup při výpočtech:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$

- Určíme definiční obor funkce $f(x, y)$. Je-li funkce definovaná a spojitá v daném limitním bodě, pak podle Věty 1.1 dopočítáme limitu dosazením (x_0, y_0) do $f(x, y)$. Ukážeme na příkladech 2.12-2.15.

- Pokud bod (x_0, y_0) není bodem D_f, musíme vyšetřit zda je alespoň hromadným bodem D_f viz Definice 2.1. Poté zkusíme „dosadit“, abychom určili typ limity („$\frac{0}{0}$“, „$\frac{\infty}{\infty}$“, ...).

- Dále používáme vhodné úpravy, abychom buď dokázali neexistenci - Kapitola 2.1 nebo odstranili neurčitý výraz a dopočítali hodnotu limity - Kapitola 2.2.

2.1. Důkazy neexistence limity

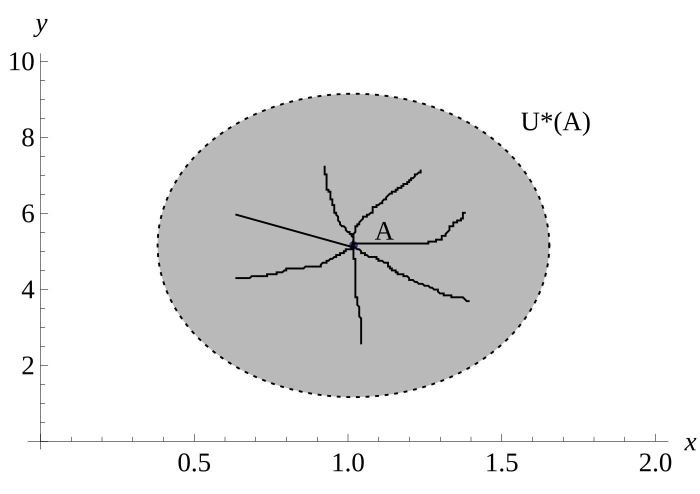
V následující podkapitole se budeme zabývat důkazy neexistencí dvojných limit. V jakém případě limita v daném bodě existuje (neexistuje)?

U výpočtu limity funkce jedné proměnné v bodě x_0 máme pouze dvě možnosti, jak se k bodu x_0 blížit - po přímce zleva $(x \to x_0^-)$ nebo zprava $(x \to x_0^+)$. Jestliže:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x,y) = \lim_{x \to x_0^+} f(x,y) = L$$

tedy pokud nezáleží na cestě po které se k bodu x_0 přibližujeme, pak existuje $\lim\limits_{x \to x_0} f(x,y)$ a rovná se L.

U funkcí dvou proměnných také platí, že $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y)$ existuje, pokud nezáleží na cestě, po které se k limitnímu bodu přibližujeme. Situace je však obtížnější, jelikož bod (x_0, y_0) je součástí roviny, a můžeme se k němu přibližovat z různých směrů po různých cestách, jak můžeme vidět na Obrázku 1. Existují-li alespoň dvě různé cesty, pro které se hodnota limity liší, $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y)$ neexistuje.



Obrázek 1: Na obrázku vidíme různé cesty, po kterých se můžeme přibližovat k limitnímu bodu $A = (x_0, y_0)$.

2.1.1. Přístup po křivkách

Probíhá-li limitní proces tak, že se bod (x, y) blíží k bodu (x_0, y_0) po určitých křivkách, což znamená, že souřadnice bodu (x, y) jsou vázány rovnicí $y = \varphi(x)$, můžeme do funkce $f(x, y)$ dosadit za $y = \varphi(x)$ a výpočet dvojné limity tak převést na výpočet limity funkce jedné proměnné $\lim\limits_{x\to x_0} f(x, \varphi(x))$.

Body (x, y) a (x_0, y_0) můžeme například proložit přímkami. Rovnice $y = \varphi(x)$ pak bude mít tvar:

$$y = \varphi(x) = k(x - x_0) + y_0,$$

kde $k \in \mathbb{R}$ je parametr.

Jestliže hodnota $\lim\limits_{x\to x_0} f(x, \varphi(x))$ závisí na parametru k, dvojná limita $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$ neexistuje. Pokud hodnota limity nezávisí na k nemůžeme o existenci dvojné limity rozhodnout - víme jen, jaká bude hodnota limity, pokud se budeme k limitnímu bodu přibližovat po přímkách. Jak ale vidíme na Obrázku 1 můžeme se přibližovat po různých křivkách. Najdeme-li ale alespoň dvě různé cesty, pro které se hodnota limity liší, pak původní dvojná limita neexistuje.

Ukažme na příkladech:

Příklad 2.1. Dokažte, že následující limita neexistuje:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2y}{x + 5y}$$

Řešení:

- $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq -\frac{x}{5}\}$

- definičním oborem je $\mathbb{R}^2$ kromě přímky $y = \frac{-x}{5}$. Bod $(0, 0)$ nepatří do definičního oboru, ale je hromadným bodem D_f. „Dosazením“ dostaneme typ limity „$\frac{0}{0}$“

- Zavedeme substituci pro limitní bod $(x_0, y_0) = (0, 0) : y = k(x-0)+0 = kx$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2kx}{x + 5kx} = \lim_{x\to 0} \frac{2kx}{x(1 + 5k)} = \frac{2k}{1 + 5k},\ k \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{5}\right\}$$

Výraz $\frac{2k}{1+5k}$ nezávisí na x a je tedy hodnotou limity. Jak ale vidíme hodnota limity závisí na k, pro různé cesty dostaneme různé hodnoty limity, proto limita v daném bodě **neexistuje**.

Pokud by se $k = -\frac{1}{5}$ přibližovali bychom se k limitnímu bodu po přímce, která není součástí definičního oboru, proto uvažujeme $k \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{5}\right\}$. $\triangle$

Příklad 2.2. Dokažte, že následující limita neexistuje:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - 2y^2}{3x^2 + y^2}$$

Řešení:

- $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
- Bod $(0,0) \notin D_f$, ale je hromadným bodem D_f. Typ limity „$\frac{0}{0}$“.
- Zavedeme substituci $y = kx$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - 2k^2x^2}{3x^2 + k^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1 - 2k^2)}{x^2(3 + k^2)} = \frac{1 - 2k^2}{3 + k^2},\ k \in \mathbb{R}$$

Hodnotou limity je výraz $\frac{1-2k^2}{3+k^2}$, jelikož závisí na parametru k, limita v daném bodě **neexistuje**. $\triangle$

Poznámka 2.5. V následujících příkladech bude limitní bod vždy hromadným bodem uvedeného definičního oboru dané funkce, a proto tato skutečnost nebude z důvodu úspory místa u jednotlivých příkladů opakována.

Příklad 2.3. Dokažte, že následující limita neexistuje:

$$\lim_{(x,y)\to(2,5)} \frac{y - 5}{x + y - 7}$$

Řešení:

- $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 7 - x\}$
- Zavedeme substituci $y = k(x-2) + 5$:

$$\lim_{x\to 2} \frac{k(x-2)+5-5}{x+k(x-2)+5-7} = \lim_{x\to 2} \frac{k(x-2)}{x+k(x-2)-2} =$$
$$= \lim_{x\to 2} \frac{k(x-2)}{(x-2)+k(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{k(x-2)}{(x-2)(1+k)} =$$
$$= \frac{k}{k+1},\ \ k \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

Po dosazení v prvním kroku, úpravách ve druhém kroku jsme si přeuspořádali jmenovatele, člen $(x-2)$ je v závorce jen, abychom si uvědomili, že ho takto můžeme celý vytknout a zkrátit. Dostaneme výslednou limitu, která však závisí na parametru k, proto limita v daném bodě **neexistuje**. △

Příklad 2.4.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3xy}{2xy+3x-y}$$

- $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq \frac{3x}{1-2x}\}$
- Budeme-li se k bodu $(0,0)$ blížit po přímkách $y = kx$ dostaneme:

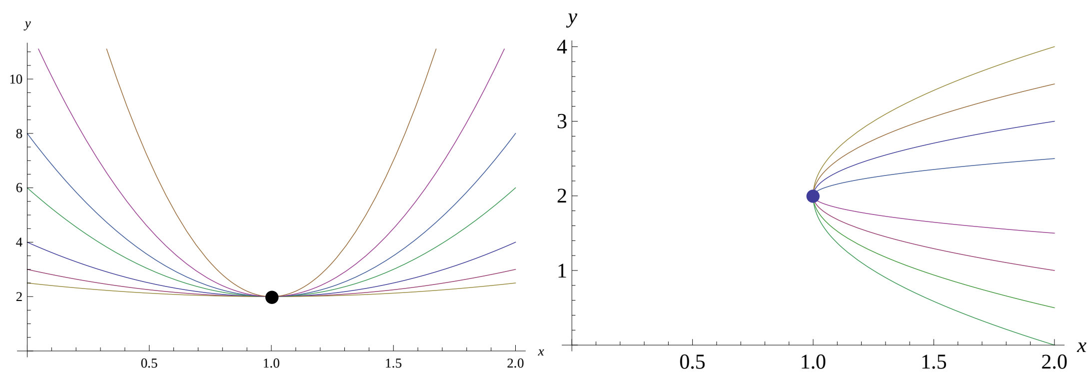
$$\lim_{x\to 0} \frac{3xkx}{2xkx+3x-kx} = \lim_{x\to 0} \frac{3kx^2}{2kx^2+3x-kx} = \lim_{x\to 0} \frac{3kx^2}{x(2kx+3-k)} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{3kx}{2kx+3-k} = 0,\ \ k \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$$

Pokud by se $k = 3$, dosadíme $y = 3x$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{9x^2}{6x^2+3x-3x} = \lim_{x\to 0} \frac{9x^2}{6x^2} = \frac{3}{2}$$

Budeme-li se k limitnímu bodu blížit po přímce $y = 3x$, dostaneme jinou hodnotu limity než když se budeme blížit po jiných přímkách, proto limita v daném bodě **neexistuje.** $\triangle$

Další možností, jak se blížit k limitnímu bodu je po skupině parabol s vrcholem v limitním bodě. Pro bod (x_0, y_0) tak zavedeme substituci: $y = k(x - x_0)^2 + y_0$ nebo $x = k(y - y_0)^2 + x$, $k \in \mathbb{R}$ je parametr.



Obrázek 2: Přibližování po parabolách pro $k > 0$. Na obrázku vlevo, je-li $y = k(x - x_0)^2 + y_0$, na obrázku vpravo, je-li $x = k(y - y_0)^2 + x$.

Příklad 2.5. *[1]* Dokažte, že daná limita neexistuje:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

Řešení:

- $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
- Nejprve zkusíme zavést substituci $y = kx$ jako v předešlých příkladech, dostaneme:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 kx}{x^4 + k^2 x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 kx}{x^2(x^2 + k^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{kx}{x^2 + k^2} = 0, \;\; k \in \mathbb{R}$$

To nám, ale o limitě funkce v daném bodě nic neříká. Zjistili jsme jen, že pokud se budeme blížit po přímkách bude limita rovná 0.

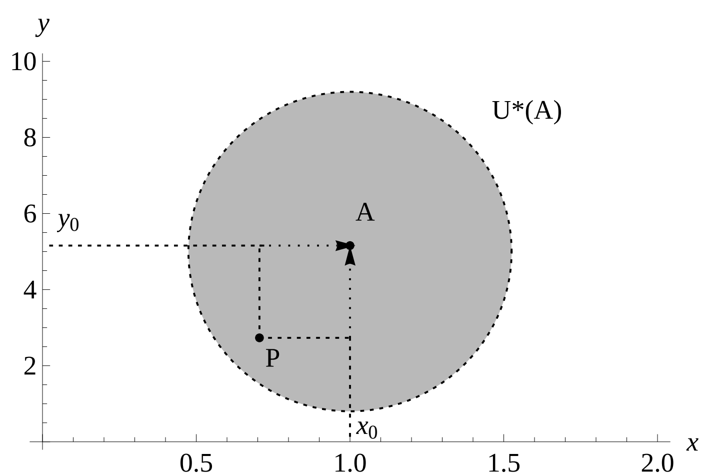
Zkusíme limitní přechod po parabolách. Zavedeme substituci $y = kx^2$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2kx^2}{x^4 + k^2x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{kx^4}{x^4(1+k^2)} = \frac{k}{1+k^2},\ k \in \mathbb{R}$$

Z výsledku vidíme, že v tomto případě bude hodnota limity záviset na parametru k. Našli jsme tedy cesty, pro které se bude hodnota limity lišit a tím jsme dokázali, že limita v daném bodě **neexistuje**. $\triangle$

2.1.2. Postupné (dvojnásobné) limity

Speciálním případem přístupu po křivkách je důkaz neexistence $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ pomocí tzv. **postupných** (**dvojnásobných**) limit. K bodu (x_0, y_0) se přibližujeme po lomených čarách rovnoběžných s osami.



Obrázek 3: Přibližování k bodu $A = (x_0, y_0)$ v případě postupných limit.

Mějme postupné limity ve tvaru:

$$L_1 = \lim_{x\to x_0}(\lim_{y\to y_0} f(x,y))$$

V tomto případě se z bodu (x, y) k bodu (x_0, y_0) blížíme nejdříve po rovnoběžce s osou y až do bodu (x, y_0) a potom po rovnoběžce s osou x až do bodu (x_0, y_0).

$$L_2 = \lim_{y\to y_0}(\lim_{x\to x_0} f(x,y))$$

Ve druhém případě se k bodu (x_0, y_0) blížíme nejdříve po rovnoběžce s osou x až do bodu (x_0, y), potom po rovnoběžce s osou y až do bodu (x_0, y_0).

Tvrzení 1. *Jestliže se $L_1 \neq L_2$, limita $f(x,y)$ v bodě (x_0, y_0)* ***neexistuje****.*

Tvrzení 1 budeme využívat při dokazování neexistence limity v následujících příkladech:

Příklad 2.6. Dokažte neexistenci:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x+y}{x-2y}$$

Řešení:

- $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq \frac{x}{2}\}$
- Vypočítáme postupné limity:

$$L_1 = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{3x+y}{x-2y}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{3x}{x} = 3$$

$$L_2 = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{3x+y}{x-2y}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{y}{-2y} = -\frac{1}{2}$$

$$L_1 \neq L_2$$

Podle Tvrzení 1 tedy $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x+y}{x-2y}$ **neexistuje**. △

Příklad 2.7. Dokažte neexistenci:

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{x-y-1}{x+y-3}$$

Řešení:

- $D_f = \{(x,y) \in R^2 : y \neq 3-x\}$

- Vypočítáme L_1, L_2:

$$L_1 = \lim_{x\to 2}\left(\lim_{y\to 1}\frac{x-y-1}{x+y-3}\right) = \lim_{x\to 2}\frac{x-1-1}{x+1-3} = \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x-2} = 1$$

$$L_2 = \lim_{y\to 1}\left(\lim_{x\to 2}\frac{x-y-1}{x+y-3}\right) = \lim_{y\to 1}\frac{2-y-1}{2+y-3} = \lim_{y\to 1}\frac{1-y}{y-1} =$$
$$= \lim_{y\to 1}\frac{(-1)(y-1)}{y-1} = -1$$

$$L_1 \neq L_2,$$

limita v daném bodě **neexistuje.** △

Příklad 2.8. Dokažte neexistenci:

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)}\frac{x^2y^2-4}{x^4+y^4-17}$$

Řešení:

- $D_f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^4+y^4\neq 17\}$

- Vypočítáme postupné limity:

$$L_1 = \lim_{x\to 2}\left(\lim_{y\to 1}\frac{x^2y^2-4}{x^4+y^4-17}\right) = \lim_{x\to 2}\frac{x^2 1^2-4}{x^4+1^4-17} =$$
$$= \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^4-16} = \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{(x^2-4)(x^2+4)} = \lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2+4} = \frac{1}{8}$$

$$L_2 = \lim_{y\to 1}\left(\lim_{x\to 2}\frac{x^2y^2-4}{x^4+y^4-17}\right) = \lim_{y\to 1}\frac{2^2y^2-4}{2^4+y^4-17} = \lim_{y\to 1}\frac{4y^2-4}{16+y^4-17} =$$
$$= \lim_{y\to 1}\frac{4(y^2-1)}{y^4-1} = \lim_{y\to 1}\frac{4(y^2-1)}{(y^2-1)(y^2+1)} = \lim_{y\to 1}\frac{4}{(y^2+1)} = \frac{4}{2} = 2$$

podle Tvrzení 1 limita funkce $\frac{x^2y^2-4}{x^4+y^4-17}$ v bodě $(2,1)$ **neexistuje.** △

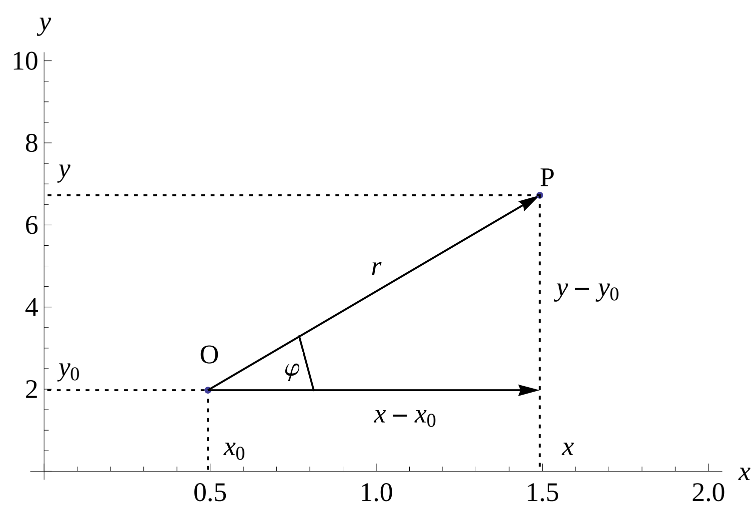
2.1.3. Převod na polární souřadnice

Dosud jsme pro popis jednotlivých bodů v rovině používali **kartézskou soustavu souřadnic**, nebo-li systém $0xy$, kde máme dvě na sebe kolmé osy, které se protínají v bodě $(0, 0)$, který nazýváme počátek. Každý bod v rovině pak můžeme popsat dvěma souřadnicemi (x_0, y_0), kde x_0 je vzdálenost od počátku ve směru osy x a y_0 vzdálenost od počátku ve směru osy y.

Existuje však více možností, jak popsat bod v rovině. Například pomocí **polární soustavy souřadnic.** Zvolíme dva pevné body v rovině O a A, bod O nazveme **pól** (počátek) a vedeme z něj polopřímku OA, kterou nazveme **polární osa**. Je pravidlem vést polopřímku OA doprava od bodu O (v kladném směru osy x).

Zvolíme bod P, pokud $P \neq O$ můžeme ho popsat pomocí dvou souřadnic $P = (r, \varphi)$, kde r je vzdálenost z O do P a φ je úhel, který svírá polární osa OA s OP (ve stupních nebo radiánech) proti směru hodinových ručiček.

Jaký je vztah mezi polárními a kartézskými souřadnicemi?



Obrázek 4: Převod z kartézských souřadnic do polárních.

Z vlastností pravoúhlých trojúhelníku víme, že:

$$\cos\varphi = \frac{x - x_0}{r}$$

(Kosinus úhlu se rovná poměru délky strany přilehlé úhlu ku délce přepony)

$$\sin\varphi = \frac{y - y_0}{r}$$

(Sinus úhlu se rovná poměru strany protilehlé úhlu ku délce přepony)
V jiném tvaru zapíšeme:

$$x = x_0 + r\cos\varphi$$

$$y = y_0 + r\sin\varphi$$

$$r \geq 0,\ \ \varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle$$

[3]

Poznámka 2.6. Převod na polární souřadnice využíváme při důkazu neexistence limity $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L^*$. Zavedeme polární souřadnice vzhledem k limitnímu bodu (x_0, y_0):

$$x = x_0 + r\cos\varphi$$

$$y = y_0 + r\sin\varphi$$

$$\varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle$$

a dostaneme

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0^+} f(x_0 + r\cos\varphi, y_0 + r\sin\varphi) = \overline{L}.$$

Je-li hodnota $\overline{L}$ závislá na φ, znamená to, že pro různé cesty dostaneme různé hodnoty limity a L^* v daném bodě neexistuje.

Nezávislost $\overline{L}$ na φ nám o L^* nic neříká - může a nemusí v daném bodě existovat.

Příklad 2.9. Dokažte neexistenci:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$$

Řešení:

- $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

- Zavedeme polární souřadnice $x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \ \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$ a převedeme tak původní dvojnou limitu na jednoduchou limitu pro $r \to 0^+$ (přibližujeme se - zmenšujeme vzdálenost k bodu $(0,0)$):

  $$\lim_{r\to 0^+} \frac{2r\cos\varphi r\sin\varphi}{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin\varphi} = \lim_{r\to 0^+} \frac{2r^2\cos\varphi\sin\varphi}{r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)} =$$

  Zkrátíme r^2 a ve jmenovateli použijeme vlastnost goniometrických funkcí (12) ze strany 50:

  $$= \lim_{r\to 0^+} \frac{2\cos\varphi\sin\varphi}{1} = 2\cos\varphi\sin\varphi = \sin 2\varphi$$

  V posledním kroku jsme využili další z vlastností goniometrických funkcí (13) ze strany 50.
  Výsledek závisí na φ, tj. na cestě, po které se budeme přibližovat k bodu $(0,0)$, a proto zadaná limita **neexistuje**. $\triangle$

Příklad 2.10. Dokažte neexistenci dané limity:

$$\lim_{(x,y)\to(3,1)} \frac{y-1}{x+2y-5}$$

Řešení:

- $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq \frac{5-x}{2}\}$

- Převedeme na polární souřadnice $x = 3 + r\cos\varphi,\ y = 1 + r\sin\varphi,$ $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle,\ r \to 0^+$:

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1 + r\sin\varphi - 1}{3 + r\cos\varphi + 2(1 + r\sin\varphi) - 5} = \lim_{r\to 0^+} \frac{r\sin\varphi}{3 + r\cos\varphi + 2 + 2r\sin\varphi - 5} =$$

$$= \lim_{r\to 0^+} \frac{r\sin\varphi}{r(\cos\varphi + 2\sin\varphi)} =$$

$$= \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi + 2\sin\varphi}$$

Výsledek závisí na φ, a proto limita v daném bodě **neexistuje**. △

Příklad 2.11. Dokažte neexistenci dané limity:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{3(x^2 + y^2)xy} \right)^2$$

Řešení:

- $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0,\ y \neq 0\}$

- Zavedeme polární souřadnice $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi, \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle,\ r \to 0^+$:

$$\lim_{r\to 0^+} \left(\frac{1 - \cos(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi)}{3(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi)r\cos\varphi r\sin\varphi} \right)^2 =$$

$$= \left(\lim_{r\to 0^+} \frac{1 - \cos(r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi))}{3r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)r^2\cos\varphi\sin\varphi} \right)^2 =$$

Nyní využijeme Vzorce (12) ze strany 50, dále pak prvního tvrzení Věty 2.3 ze strany 11 a vytkneme $\frac{1}{3\cos\varphi\sin\varphi}$ před limitu:

$$= \left(\lim_{r\to 0^+} \frac{1 - \cos(r^2 \cdot 1)}{3r^4 \cdot 1\cos\varphi\sin\varphi} \right)^2 = \left(\frac{1}{3\cos\varphi\sin\varphi} \lim_{r\to 0^+} \frac{1 - \cos(r^2)}{r^4} \right)^2 =$$

$$= \frac{1}{9\cos^2\varphi\sin^2\varphi} \left(\lim_{r\to 0^+} \frac{1 - \cos(r^2)}{r^4} \right)^2$$

Zavedeme substituci $t = r^2$ pro $r \to 0^+$ je $t \to 0^+$:

$$= \frac{1}{9\cos^2\varphi\sin^2\varphi}\left(\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{t^2}\right)^2 = \frac{1}{9\cos^2\varphi\sin^2\varphi}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{36\cos^2\varphi\sin^2\varphi}$$

Využili jsme známé limity (10) ze strany 50. Výsledek závisí na φ, proto daná limita **neexistuje** △

2.2. Výpočty limit

U příkladů 2.12-2.15 využijeme tvrzení Věty 1.1, která říká, že pokud počítáme $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ a bod (x_0, y_0) je bodem definičního oboru, ve kterém je $f(x,y)$ spojitá dostaneme hodnotu limity dosazením limitního bodu do zadané funkce.

Vypočítejte limity následujících funkcí:

Příklad 2.12.

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x+y+1}{x+y+3}$$

Řešení:

- $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq -3 - x\}$
- Bod $(1,0) \in D_f$ a $f(x,y)$ je spojitá v tomto bodě.
- Limita se rovná funkční hodnotě v tomto bodě, kterou dostaneme dosazením $x = 1, y = 0$ do funkčního předpisu:

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x+y+1}{x+y+3} = \frac{1+0+1}{1+0+3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

△

Příklad 2.13.

$$\lim_{(x,y)\to(e^3,2)} \frac{\ln x + 5}{y}$$

Řešení:

- $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y \neq 0\}$
- $(e^3, 2) \in D_f,\ f(x,y)$ je spojitá v $(e^3, 2)$
- Zkusíme dosadit:

$$\lim_{(x,y)\to(e^3,2)} \frac{\ln x + 5}{y} = \frac{\ln e^3 + 5}{2} = \frac{3+5}{2} = 4$$

Pro výpočet logaritmu jsme využili vlastnosti logaritmu (4) ze strany 50 △

Příklad 2.14.

$$\lim_{(x,y)\to(1,3)} (3e^{xy} + 2xy^2)$$

Řešení:

- $D_f = \mathbb{R}^2$
- $(1,3) \in D_f,\ \ f(x,y)$ je spojitá v bodě $(1,3)$
- Dosadíme do funkce bod $(1,3)$:

$$\lim_{(x,y)\to(1,3)} (3e^{xy} + 2xy^2) = 3e^{1\cdot 3} + 2\cdot 1\cdot 3^2 = 3e^3 + 18$$

△

Příklad 2.15.

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \left[\left(2 - \frac{x+y}{x^2y^2}\right) \cos\frac{3}{5 + x^2y^2}\right]$$

Řešení:

- $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0,\ y \neq 0\}$
- Bod $(1,1) \in D_f$, $f(x,y)$ je v tomto bodě spojitá
- Dosadíme:

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \left[\left(2 - \frac{x+y}{x^2y^2}\right)\cos\frac{3}{5+x^2y^2}\right] = \left[\left(2 - \frac{1+1}{1^2\cdot 1^2}\right)\cos\frac{3}{5+1^2\cdot 1^2}\right] =$$
$$= 0 \cdot \cos\frac{3}{6} = 0$$

△

V následujících příkladech (2.16-2.21) si ukážeme, jak vypočítat limitu $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ v bodech, které nepatří do D_f. Budeme mimo jiné využívat tvrzení Věty 2.5 ze strany 12 a vzorců na rozklad mnohočlenu uvedených v Dodatku na straně 50.

Vypočítejte limity:

Příklad 2.16.

$$\lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{x^3+y^3}{x^2-y^2}$$

Řešení:

- $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \neq y^2\}$
- Bod $(-1,1) \notin D_f$, ale je hromadným bodem D_f. „Dosazením“ dostaneme limitu typu „$\frac{0}{0}$“.
- Upravíme předpis funkce a využijeme tvrzení Věty 2.5:

$$\lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{x^3+y^3}{x^2-y^2} = \lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{(x-y)(x+y)} =$$
$$= \lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{x^2-xy+y^2}{x-y} = \frac{(-1)^2-(-1)\cdot 1+1^2}{-1-1} =$$
$$= -\frac{3}{2}$$

V prvním kroku jsme rozložili výraz v čitateli podle Vzorce (2) a výraz ve jmenovateli podle Vzorce (1). Poté jsme zkrátili výraz $(x+y)$ a dosadili bod $(-1,1)$ do upraveného předpisu funkce. $\triangle$

Příklad 2.17.

$$\lim_{(x,y)\to(3,3)} \frac{x^3-y^3}{x^4-y^4}$$

Řešení:

- $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 \neq y^4\}$
- Upravujeme podobně jako v minulém příkladě pomocí vzorců na rozklad mnohočlenů (4), (1):

$$\lim_{(x,y)\to(3,3)} \frac{x^3-y^3}{x^4-y^4} = \lim_{(x,y)\to(3,3)} \frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{(x^2-y^2)(x^2+y^2)} =$$
$$= \lim_{(x,y)\to(3,3)} \frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{(x-y)(x+y)(x^2+y^2)} =$$
$$= \lim_{(x,y)\to(3,3)} \frac{(x^2+xy+y^2)}{(x+y)(x^2+y^2)} = \frac{3^2+3\cdot 3+3^2}{(3+3)(3^2+3^2)} =$$
$$= \frac{27}{108} = \frac{1}{4}$$

$\triangle$

Příklad 2.18.

$$\lim_{(x,y)\to(-2,-2)} \frac{(x+y)^2-16}{x+y+4}$$

Řešení:

- $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq -4-x\}$
- Čitatele upravíme podle Vzorce (1):

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(-2,-2)} \frac{(x+y)^2-16}{x+y+4} &= \lim_{(x,y)\to(-2,-2)} \frac{((x+y)-4)((x+y)+4)}{x+y+4} = \\ &= \lim_{(x,y)\to(-2,-2)} x+y-4 = -2-2-4 = -8\end{aligned}$$

$\triangle$

Příklad 2.19.

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \sqrt{x^2+y^2-4}$$

- $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \geq 4\}$
- Bod $(1,1) \notin D_f$ a není ani hromadným bodem D_f. Proto nemá smysl limitu v daném bodě počítat. $\triangle$

Příklad 2.20. *[6]*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$$

Řešení:

- $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\} \setminus \{(0,0)\}$
- Použijeme obrat známý z výpočtu limit u funkcí jedné proměnné - rozšíříme čitatele i jmenovatele výrazem $(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)$, abychom se pomocí

Vzorce (1) zbavili odmocniny ve jmenovateli:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} \cdot \frac{\sqrt{x^2+y^2+1}+1}{\sqrt{x^2+y^2+1}+1} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)}{(\sqrt{x^2+y^2+1})^2-1^2} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)}{x^2+y^2+1-1} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)}{x^2+y^2} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2+y^2+1}+1}{1} = \frac{\sqrt{0^2+0^2+1}+1}{1} = 2$$

△

Příklad 2.21.

$$\lim_{(x,y)\to(3,3)} \frac{x^2-y^2}{3x^2+5x-5y-3xy}$$

Řešení:

- $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq -\frac{5}{3},\ x \neq y\}$
- Výraz ve jmenovateli upravíme pomocí Vzorce (1) na $(x-y)(x+y)$. Zkusíme vydělit jmenovatele výrazem $(x-y)$, který nám vytváří „$\frac{0}{0}$“. Dostaneme:

$$(3x^2+5x-5y-3xy) : (x-y) = 3x+5$$

Pak tedy:

$$\lim_{(x,y)\to(3,3)} \frac{x^2-y^2}{3x^2+5x-5y-3xy} = \lim_{(x,y)\to(3,3)} \frac{(x-y)(x+y)}{(x-y)(3x+5)} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(3,3)} \frac{x+y}{3x+5} = \frac{3+3}{3\cdot 3+5} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$$

△

Dále si ukážeme, že je možné vhodnou substitucí převést dvojnou limitu na limitu funkce jedné proměnné. U výpočtů budeme využívat známých limit funkce jedné proměnné, uvedených v Dodatku na straně 50.
Vypočítejte limity funkcí v daných bodech:

Příklad 2.22.

$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{\sqrt{xy^2}-1}{\sqrt[3]{xy^2}-1}$$

Řešení:

- $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy^2 \geq 0,\ \ xy^2 \neq 1\}$
- Zavedeme substituci $t^6 = xy^2$, pro $(x,y) \to (1,-1)$ je $t \to 1$:

$$\lim_{t\to1} \frac{\sqrt{t^6}-1}{\sqrt[3]{t^6}-1} = \lim_{t\to1} \frac{t^3-1}{t^2-1} = \lim_{t\to1} \frac{(t-1)(t^2+t+1)}{(t-1)(t+1)} = \lim_{t\to1} \frac{t^2+t+1}{t+1} = \frac{3}{2}$$

△

Příklad 2.23.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(3x+y)}{3x+y}$$

Řešení:

- $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq -3x\}$
- Zavedeme substituci $3x+y=t$, pro $(x,y) \to (0,0)$ je $t \to 0$, dostaneme:

$$\lim_{t\to0} \frac{\sin t}{t}$$

Podle (6) ze strany 50 platí:

$$\lim_{t\to0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

△

Příklad 2.24.

$$\lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{y}{\operatorname{tg}(xy)}$$

Řešení:

- $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{\pi}{2} + k\pi \leq xy \leq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ xy \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

- Upravíme funkci tak, abychom mohli limitu převést pomocí substituce na známou limitu (9):

$$\lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{y}{\operatorname{tg}(xy)} = \lim_{(x,y)\to(2,0)} \left(\frac{\operatorname{tg} xy}{y}\right)^{-1} = \lim_{(x,y)\to(2,0)} \left(\frac{\operatorname{tg} xy}{y} \cdot \frac{x}{x}\right)^{-1}$$

Nyní rozdělíme na dvě limity $A = \lim_{(x,y)\to(2,0)} x^{-1}$ a $B = \lim_{(x,y)\to(2,0)} (\frac{\operatorname{tg} xy}{xy})^{-1}$ a vyřešíme:

$$A = \lim_{(x,y)\to(2,0)} x^{-1} = \lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$$

$$B = \lim_{(x,y)\to(2,0)} \left(\frac{\operatorname{tg} xy}{xy}\right)^{-1} = \left(\lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{\operatorname{tg} xy}{xy}\right)^{-1}$$

Zavedeme substituci $xy = t$, pro $(x,y) \to (0,0)$ je $t \to 0$:

$$B = \left(\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{tg} t}{t}\right)^{-1} = 1^{-1} = 1$$

Výsledná limita se podle Věty 2.3 ze strany 11 rovná

$$\lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{y}{\operatorname{tg}(xy)} = A \cdot B = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

△

Příklad 2.25.

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{1-\cos 3xy}{y^2}$$

Řešení:

- $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$

- Upravíme, abychom pomocí substituce převedli na známou limitu (10):

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{1-\cos 3xy}{y^2} = \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(1-\cos 3xy)9x^2}{y^2 9x^2}$$

Nyní rozdělíme na dvě limity:

$$A = \lim_{(x,y)\to(1,0)} 9x^2 = 9$$

$$B = \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{1-\cos 3xy}{9x^2y^2}$$

Zavedeme substituci $t = 3xy$ pro $(x, y) \to (1, 0)$ je $t \to 0$

$$\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t^2} = \frac{1}{2}$$

Podle Věty 2.3 ze strany 11 platí:

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{1-\cos 3xy}{y^2} = A \cdot B = 9 \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

△

Příklad 2.26.

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} (1+xy)^{\frac{2}{xy}}$$

- $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > -1,\ xy \neq 0\}$

- Zavedeme substituci $xy = t$ (když $(x, y) \to (0, 1)$ tak $t \to 0$) a dostaneme:

$$\lim_{t\to 0} (1+t)^{\frac{2}{t}} = e^2$$

Využili jsme znalosti limity (7) ze strany 50. △

Příklad 2.27.

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\ln(1+xy^2)}{x}$$

Řešení:

- $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy^2 > -1,\ x \neq 0\}$

- Upravíme, abychom mohli využít znalosti limity (8):

  $$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\ln(1+xy^2)}{x} = \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\ln(1+xy^2)y^2}{xy^2}$$

  Rozdělíme na dvě limity:

  $$A = \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\ln(1+xy^2)}{xy^2}$$

  Zavedeme substituci $t = xy^2$, pro $(x,y) \to (0,1)$ je $t \to 0$:

  $$A = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

  $$B = \lim_{(x,y)\to(0,1)} y^2 = 1$$

  $$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\ln(1+xy^2)}{x} = A \cdot B = 1 \cdot 1 = 1$$

△

Příklad 2.28.

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,1)} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{2x^2}{x+y}}$$

Řešení:

- $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{x} > -1,\ x \neq 0,\ y \neq -x\}$
- Typ limity „1^∞“
- Upravíme, využijeme Vzorce (5) a tvrzení Věty 2.4 ze strany 11 o složené funkci:

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,1)} e^{\ln(1+\frac{1}{x})^{\frac{2x^2}{x+y}}} = \lim_{(x,y)\to(\infty,1)} e^{\frac{2x}{x+y}\ln(1+\frac{1}{x})^x} = e^{\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,1)} \frac{2x}{x+y}\ln(1+\frac{1}{x})^x}$$

Nyní vyřešíme:

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,1)} \frac{2x}{x+y} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

Rozdělíme na dvě limity:

$$A = \lim_{(x,y)\to(\infty,1)} \frac{2x}{x+y} = \lim_{(x,y)\to(\infty,1)} \frac{2x+2y-2y}{x+y} =$$
$$= \lim_{(x,y)\to(\infty,1)} \left(\frac{2(x+y)}{x+y} - \frac{2y}{x+y}\right) = \lim_{(x,y)\to(\infty,1)} \left(2 - \frac{2y}{x+y}\right) = 2-0 = 2$$

$$B = \lim_{(x,y)\to(\infty,1)} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \ln\left[\lim_{(x,y)\to(\infty,1)} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right] = \ln e^1 = 1$$

Využili jsme základní limity 11 ze strany 50.

Podle Věty 2.12 ze strany 25 tedy:

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,1)} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{2x^2}{x+y}} = e^{\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,1)} \frac{2x}{x+y}\ln(1+\frac{1}{x})^x} = e^{A\cdot B} = e^{2\cdot 1} = e^2$$

△

V Kapitole 2.1 jsme se seznámili s polárními souřadnicemi. Za určitých podmínek můžeme převodu na polární souřadnice využít také u výpočtů dvojných limit. Platí následující věta:

Věta 2.6. *[2] Funkce f má v bodě (x_0, y_0) limitu rovnou L, jestliže existuje nezáporná funkce g splňující $\lim\limits_{r \to 0^+} g(r) = 0$ taková, že:*

$$|f(x_0 + r\cos\varphi, y_0 + r\sin\varphi) - L| < g(r)$$

pro každé $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$ a $r > 0$ dostatečně malá.

Speciálně, platí-li pro transformaci do polárních souřadnic

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0^+} h(r)g(\varphi),$$

kde $\lim\limits_{r\to 0^+} h(r) = 0$ a funkce $g(\varphi)$ je omezená pro $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$, pak

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = 0.$$

Příklad 2.29. Vypočítejte limitu funkce:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5x^3 + 3y^3}{x^2 + y^2}$$

Řešení:

- $D_f = R^2 \setminus \{(0,0)\}$
- Převedeme na polární souřadnice: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $r \to 0^+$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{5r^3\cos^3\varphi + 3r^3\sin^3\varphi}{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} = \lim_{r\to 0^+} \frac{r^3(5\cos^3\varphi + 3\sin^3\varphi)}{r^2 \cdot 1} =$$

$$= \lim_{r\to 0^+} \underbrace{r}_{0} \underbrace{(5\cos^3\varphi + 3\sin^3\varphi)}_{omezená} = 0$$

Vytkli jsme v čitateli i jmenovateli r v příslušné mocnině a zkrátili. Ve jmenovateli jsme použili znalost Vzorce (12) ze strany 50. Zda je funkce

$(5\cos^3\varphi + 3\sin^3\varphi)$ omezená pro $\varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle$ ověříme nalezením minima a maxima na daném intervalu: $-5 \leq 5\cos^3\varphi + 3\sin^3\varphi \leq 5$. V závěru jsme užili tvrzení Věty 2.6 ze strany 36.

Příklad 2.30.

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x(x-1)^2 + y^2}{(x-1)^2 + y^2}$$

Řešení:

- $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$
- Zavedeme polární souřadnice: $x = 1 + r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $r \to 0^+$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle$:

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{(1 + r\cos\varphi)(1 + r\cos\varphi - 1)^2 + r^2\sin^2\varphi}{(1 + r\cos\varphi - 1)^2 + r^2\sin^2\varphi} =$$

$$= \lim_{r\to 0^+} \frac{(1 + r\cos\varphi)r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi}{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} =$$

$$= \lim_{r\to 0^+} \frac{r^2\cos^2\varphi + r^3\cos^3\varphi + r^2\sin^2\varphi}{r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)} =$$

$$= \lim_{r\to 0^+} \frac{r^2(\cos^2\varphi + r\cos^3\varphi + \sin^2\varphi)}{r^2 \cdot 1} =$$

$$= \lim_{r\to 0^+} (\underbrace{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}_{1} + r\cos^3\varphi) = \lim_{r\to 0^+} (1 + r\cos^3\varphi) =$$

$$= 1 + \lim_{r\to 0^+} \underbrace{r}_{0} \underbrace{\cos^3\varphi}_{\textit{omezená}} = 1 + 0 = 1$$

△

Příklad 2.31. Vypočítejte limitu funkce:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^4 + y^4)}{x^2 + y^2}$$

Řešení:

- $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

- Upravíme, abychom mohli využít Vzorce (6):

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^4+y^4)\sin(x^4+y^4)}{(x^4+y^4)(x^2+y^2)}$$

  Rozdělíme na dvě limity:

$$A = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^4+y^4)}{x^4+y^4}$$

  Zavedeme substituci $x^4+y^4=t,\ t\to 0$, dostaneme:

$$A = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

  Druhou limitu vyřešíme převodem na polární souřadnice $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $r\to 0^+$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle$ a využitím tvrzení ve Větě 2.6:

$$B = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$$

$$B = \lim_{r\to 0^+} \frac{r^4\cos^4\varphi + r^4\sin^4\varphi}{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} = \lim_{r\to 0^+} \frac{r^4(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi)}{r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)} =$$

$$= \lim_{r\to 0^+} \underbrace{r^2}_{0} \underbrace{(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi)}_{\textit{omezená}} = 0$$

  Platí $\frac{1}{2} \le \cos^4\varphi + \sin^4\varphi \le 1$, hodnota zadané limity je podle Věty 2.3 rovna:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^4+y^4)}{x^2+y^2} = A\cdot B = 1\cdot 0 = 0$$

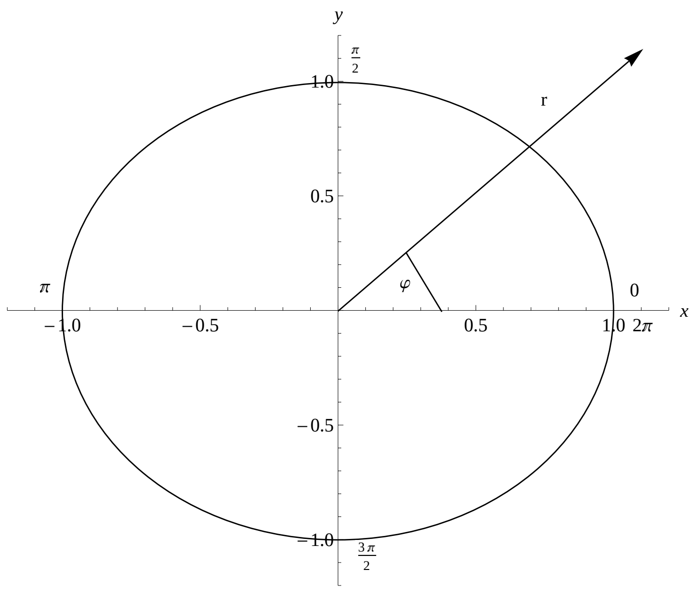
△

Příklad 2.32.

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$$

Řešení:

- $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
- „Dosazením“ dostaneme typ limity „$\frac{\infty}{\infty}$“
- Převedeme do polárních souřadnic $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$, $r \to \infty$:



Obrázek 5: Bod (∞, ∞) leží v prvním kvadrantu, proto se φ může pohybovat pouze od $(0, \frac{\pi}{2})$. Přibližujeme-li se k bodu (∞, ∞) musíme zvětšovat vzdálenost od počátku, proto $r \to \infty$.

$$\lim_{r\to\infty} \frac{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi}{r^4\cos^4\varphi + r^4\sin^4\varphi} = \lim_{r\to\infty} \frac{r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}{r^4(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi)} =$$

$$= \lim_{r\to\infty} \underbrace{\frac{1}{r^2}}_{0^+} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos^4\varphi + \sin^4\varphi}}_{\textit{omezená}} = 0$$

Využili jsme platnosti $1 \leq \frac{1}{\cos^4\varphi + \sin^4\varphi} \leq 2$, dále pak tvrzení Věty 2.6 ze strany 36.

- Druhou možností výpočtu je zavést substituci $x = \frac{1}{u},\ y = \frac{1}{v}$, $u \neq 0, v \neq 0$ a převést limitu na typ, který známe z předešlých příkladů:

$$\lim_{(u,v)\to(0^+,0^+)} \frac{\frac{1}{u^2}+\frac{1}{v^2}}{\frac{1}{u^4}+\frac{1}{v^4}} = \lim_{(u,v)\to(0^+,0^+)} \frac{\frac{v^2+u^2}{u^2v^2}}{\frac{v^4+u^4}{u^4v^4}} = \lim_{(u,v)\to(0^+,0^+)} \frac{(v^2+u^2)u^4v^4}{(v^4+u^4)u^2v^2} =$$

$$= \lim_{(u,v)\to(0^+,0^+)} \frac{(v^2+u^2)u^2v^2}{(v^4+u^4)}$$

Nyní převedeme do polárních souřadnic: $u = r\cos\varphi,\ v = r\sin\varphi$, $r \to 0^+$, $\varphi \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$:

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi)r^2\cos^2\varphi r^2\sin^2\varphi}{r^4\cos^4\varphi + r^4\sin^4\varphi} =$$

$$= \lim_{r\to 0^+} \frac{r^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)r^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{r^4(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi)} = \lim_{r\to 0^+} \frac{r^6\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{r^4(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi)} =$$

$$= \lim_{r\to 0^+} \underbrace{r^2}_{0} \underbrace{\frac{\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{\cos^4\varphi+\sin^4\varphi}}_{omezená} = 0$$

Využili jsme platnosti $0 \leq \frac{\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{\cos^4\varphi+\sin^4\varphi} \leq \frac{1}{2}$ a tvrzení Věty 2.6 ze strany 36. Ukázali jsme si, jak je možné limitu v nevlastním bodě převést na limitu ve vlastním bodě. $\triangle$

3. Cvičení

Poslední kapitola slouží k procvičování znalostí výpočtů limit funkcí dvou proměnných. Je tvořena třemi podkapitolami - první a druhá obsahují zadání příkladů, ve třetí je uveden stručný návod na řešení a výsledek příkladů z první podkapitoly a výsledky příkladů z druhé podkapitoly.

3.1. Příklady I

Vyšetřete, zda existují limity v daném bodě, pokud ano určete jejich hodnotu:

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2y^2+4}-2}{x^2+y^2}$
2. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2}{y^2-4x+2y}$
3. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)} \frac{x+2y}{\sqrt{x^2+y^2}}$
4. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2-y^2}{x^3-y^3}$
5. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2+2y^3}{x^2+3y^2}$
6. $\lim\limits_{(x,y)\to(3,-3)} (1+x+y)^{\frac{2}{x+y}}$
7. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} \frac{(x-y)^2-1}{x-y-1}$
8. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$
9. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{x^2-y^2}{3x^2+5xy+2y^2}$
10. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5x}{3x+2y}$
11. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2-y^2}{x^2-2y+2x-xy}$
12. $\lim\limits_{(x,y)\to(5,3)} \frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{y+1}}{x-y-2}$
13. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\mathrm{tg}(4x+2y)}{2x+y}$
14. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x-3y}{x+y}$
15. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2+y^2}$
16. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^3$
17. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x^2-1}{y-2}$
18. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2}$
19. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,\infty)} \left(1+\frac{1}{y}\right)^{\frac{y}{x+y}}$
20. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x+y)}{x+y}$
21. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{11-\sqrt{121-xy}}{xy}$
22. $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{2x+y}{x^2-xy+y^2}$

3.2. Příklady II

Vyšetřete, zda existují limity v daném bodě, pokud ano určete jejich hodnotu:

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,3)} \frac{x^3+1}{2y(x+1)}$
2. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x-y}{x+4y}$
3. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,-1)} \frac{\sin(2x+4y)}{x+2y}$
4. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(2x+y)}{x^2+y^2}$
5. $\lim\limits_{(x,y)\to(\frac{\pi}{2},1)} \frac{1-\cos xy}{2y}$
6. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y}{x^6+y^3}$
7. $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,3)} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{3x}{2x+y}}$
8. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\sqrt{x+y}-1}{\sqrt[3]{x+y}-1}$
9. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{3x^2-y^2}{x^2+y^2}$
10. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,2)} \frac{x^2-4}{2xy-4y+5x-10}$
11. $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x+3y}{x^2+y^2}$
12. $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,3)} \frac{y-3}{2x+y-1}$
13. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x+y+1}-1}{x+y}$
14. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)} \frac{(x-2)^2+3y^2}{(x-2)^2+y^2}$
15. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} (1+x-y)^{\frac{3}{x-y}}$
16. $\lim\limits_{(x,y)\to(-2,-1)} \frac{(x-y)^2-1}{x-y+1}$
17. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x-y}{3x+2y}$
18. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x-1)^2+y(y-1)^2}{(x-1)^2+(y-1)^2}$
19. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} \frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{y}}{x-y-1}$
20. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\ln(3+e^x)}{x+y}$
21. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)} \frac{\ln(1+xy)}{3y}$
22. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^3+y^3}{x^2+y^2}$
23. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x}{x+y}$
24. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}$
25. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} \frac{3}{(x-2)^2+(y-1)^2}$
26. $\lim\limits_{(x,y)\to(3,-3)} \frac{x^2-y^2}{x+y}$
27. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2-y}{x^3-y^2}$
28. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{tg}(2x+y)}{2x+y}$
29. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)} \frac{\sqrt{(x-2)^2+y^2+4}-2}{(x-2)^2+y^2}$
30. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \frac{1-\cos xy}{xy}$

3.3. Návody na řešení a výsledky

Příklady I:

1.
   - $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
   - $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2y^2+4}-2}{x^2+y^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2y^2+4}+2}{\sqrt{x^2y^2+4}+2} =$$
     $$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{x^2y^2+4}+2} = 0 \cdot \frac{1}{4} = 0$$

2.
   - $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R} : 4x \neq y(y+2)\}$
   - $y = kx$:
     $$\lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{k^2x^2 - 4x + 2kx} = 0, \ k \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$$
     $y = 2x$:
     $$\lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{4x^2 - 4x + 4x} = \frac{1}{2}$$
     $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2}{y^2-4x+2y}$ **neexistuje.**

3.
   - $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
   - $$\lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{x+2y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 1$$

4.
   - $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 \neq y^3\}$
   - S využitím Vzorců (1), (3) ze strany 50 a tvrzení Věty 2.5 ze strany 12:
     $$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2-y^2}{x^3-y^3} = \frac{2}{3}$$

5. • $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

• Vypočítáme postupné limity:

$$L_1 = 3,\ L_2 = 0$$

$$L_1 \neq L_2$$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2+2y^3}{x^2+3y^2}$ **neexistuje**.

6. • $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > -1-x,\ x \neq -y\}$

• Řešíme pomocí substituce $x+y=t$, pro $(x,y) \to (3,-3)$ je $t \to 0$ a znalosti limity (7) ze strany 50:

$$\lim_{(x,y)\to(3,-3)} (1+x+y)^{\frac{2}{x+y}} = e^2$$

7. • $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq x-1\}$

• Upravíme pomocí Vzorce (1) ze strany 50:

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{(x-y)^2-1}{x-y-1} = 2$$

8. • $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

• Převedeme do polárních souřadnic $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $r \to 0^+$, po úpravě dostaneme:

$$\lim_{r\to 0^+} \underbrace{r}_{0} \underbrace{(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)}_{\text{omezená}} = 0$$

Podle Věty 2.6 ze strany 36:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = 0$$

9. • $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq -x,\ y \neq -\frac{3}{2}x\}$

- Vydělením jmenovatele výrazem $(x+y)$, užitím Vzorce (1) ze strany 50 v čitateli a krácením se zbavíme neurčitého výrazu, dostaneme:

$$\lim_{(x,y)\to(1,-1)} \frac{x^2-y^2}{3x^2+5xy+2y^2} = 2$$

10. - $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq -\frac{3}{2}x\}$
    - $y = kx$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{5x}{3x+2kx} = \frac{5}{3+2k},\ \ k \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\}$$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ **neexistuje**.

11. - $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq -2,\ y \neq x\}$
    - Rozložíme čitatele podle vzorce 1 ze strany 50 a jmenovatele vydělíme výrazem $(x-y)$ dostaneme:

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2-y^2}{x^2-2y+2x-xy} = \frac{2}{3}$$

12. - $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1,\ y \geq -1,\ y \neq x-2\}$
    - Rozšíříme výrazem

$$\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{y+1}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{y+1}}$$

dostaneme:

$$\lim_{(x,y)\to(5,3)} \frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{y+1}}{x-y-2} = \frac{1}{4}$$

13. - $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{\pi}{2} + k\pi < 4x+2y < \frac{\pi}{2} + k\pi,\ y \neq -2x,\ k \in \mathbb{Z}\}$
    - Upravíme, abychom mohli zavést substituci $t = 4x+2y,\ t \to 0$ a využít známé limity (9) ze strany 50. Dostaneme:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{tg}(4x+2y)}{2x+y} = 2$$

14. • $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq -x\}$

• Využijeme postupných limit:

$$L_1 = 2,\ L_2 = -3$$

$$L_1 \neq L_2$$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x-3y}{x+y}$ **neexistuje**.

15. • $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

• Zavedeme substituci $t = x^2 + y^2$, pro $(x,y) \to (0,0)$ je $t \to 0^+$:

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t} = \infty$$

16. • $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

• Převedeme do polárních souřadnic $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle,\ r \to 0^+$. Dostaneme:

$$\lim_{r\to 0^+} \left(\frac{r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi}{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} \right)^3 = \cos^3 2\varphi$$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)^3$ **neexistuje**.

17. • $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 2\}$

• $y = k(x-1) + 2$:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{k(x-1)+2-2} = \frac{2}{k},\ k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x^2-1}{y-2}$ **neexistuje**.

18. • $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

- Převedeme do polárních souřadnic $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,$ $\varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle,\ r \to 0^+$. Podle Věty 2.6 ze strany 36:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = 0$$

19.
- $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{y} > -1,\ y \neq 0,\ y \neq -x\}$
- Využijeme Vzorce (5) ze strany 50 a tvrzení Věty 2.4 ze strany 11:

$$\lim_{(x,y)\to(2,\infty)} \left(1+\frac{1}{y}\right)^{\frac{y}{x+y}} = e^{\lim\limits_{(x,y)\to(2,\infty)} \frac{1}{x+y}\ln\left(1+\frac{2}{y}\right)^y} = e^{0\cdot 2} = 1$$

20.
- $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq -x\}$
- Upravíme, abychom mohli využít známé limity (10) ze strany 50. Dostaneme:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x+y)}{x+y} = 0$$

21.
- $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \leq 121,\ xy \neq 0\}$
- Rozšíříme výrazem $\frac{11+\sqrt{121-xy}}{11+\sqrt{121-xy}}$ a upravíme pomocí Vzorce (1), dostaneme:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{11-\sqrt{121-xy}}{xy} = \frac{1}{22}$$

22.
- $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - xy + y^2 \neq 0\}$
- Převedeme na polární souřadnice $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $\varphi \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$, $r \to \infty$, po úpravách dostaneme:

$$\lim_{r\to\infty} \underbrace{\frac{1}{r}}_{0} \cdot \underbrace{\frac{2\cos\varphi + \sin\varphi}{1-\sin\varphi\cos\varphi}}_{\text{omezená}} = 0$$

Platí, že $-5 \leq \frac{2\cos\varphi+\sin\varphi}{1-\sin\varphi\cos\varphi} \leq 5$, podle Věty 2.6 ze strany 36

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{2x+y}{x^2-xy+y^2} = 0$$

Příklady II:

1. $\frac{1}{2}$
2. **neexistuje**
3. 2
4. 0
5. $\frac{1}{2}$
6. **neexistuje**
7. 1
8. $\frac{3}{2}$
9. 1
10. $\frac{4}{9}$
11. 0
12. **neexistuje**
13. $\frac{1}{2}$
14. **neexistuje**
15. e^3
16. -2
17. **neexistuje**
18. 1
19. $\frac{1}{2}$
20. $\ln 4$
21. $\frac{2}{3}$
22. 0
23. **neexistuje**
24. 0
25. $+\infty$
26. 6
27. **neexistuje**
28. 1
29. $\frac{1}{4}$
30. 0

Závěr

Cílem práce bylo vytvořit sbírku řešených příkladů na limity funkcí dvou proměnných.

V první kapitole jsem uvedla základní definice a věty zabývající se funkcemi dvou proměnných, potřebné pro vyslovení definice limity, případně k výpočtům.

Druhá kapitola se již věnuje limitám. V úvodu je uvedena definice limity a základní vlastnosti dvojných limit. Dále je kapitola členěna do dvou podkapitol. První se zabývá důkazy neexistencí dvojných limit pomocí přístupu po křivkách, postupných limit a převodu do polárních souřadnic. Každá metoda je nejprve teoreticky popsána a následně ilustrována na příkladech. Ve druhé podkapitole jsou uvedeny metody výpočtů dvojných limit, ukázané přímo na řešených příkladech.

Třetí kapitola je tvořena souborem příkladů k procvičení, stručnými návody k jejich řešení a výsledky.

Tvorbou této práce jsem prohloubila své znalosti v oblasti funkcí dvou proměnných, práce se systémem TEX a v softwaru Wolfram Mathematica.

Doufám, že práce bude sloužit studentům z nižších ročníku k dostatečnému pochopení limit funkcí dvou proměnných.

Dodatek - použité vzorce

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \tag{1}$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \tag{2}$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \tag{3}$$

$$\log_a a^n = n,\ a > 0,\ n \in \mathbb{R} \tag{4}$$

$$a^b = e^{\ln a^b} = e^{b \ln a},\ a > 0,\ b \in \mathbb{R} \tag{5}$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1 \tag{6}$$

$$\lim_{t \to 0} (1+t)^{\frac{k}{t}} = e^k,\ k \in \mathbb{R} \tag{7}$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1 \tag{8}$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{tg} t}{t} = 1 \tag{9}$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{1 - \cos t}{t^2} = \frac{1}{2} \tag{10}$$

$$\lim_{t \to \pm\infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k,\ k \in \mathbb{R} \tag{11}$$

$$\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1,\ \varphi \in \mathbb{R} \tag{12}$$

$$\sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi,\ \varphi \in \mathbb{R} \tag{13}$$

$$\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi,\ \varphi \in \mathbb{R} \tag{14}$$

Literatura

[1] Adams R. A.: *Calculus: a complete course.* New York : Addison-Wesley, 1991

[2] Došlá Z., Došlý O.: *Diferenciální počet funkcí více proměnných (3.vydání).* Brno: Masarykova univerzita, 2010.

[3] Grossman, S. I.: *Calculus (Second edition).* New York: Academic Press, Inc., 1981

[4] Hájek, J.: *Cvičení z matematické analýzy: Diferenciální počet funkcí více proměnných.* Brno: Masarykova Univerzita, fakulta pedagogická 1996.

[5] Kouřilová P., Pavlačková M.: *Základy matematické analýzy a jejich aplikace v ekonomii.* Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2013.

[6] Moskowitz M. A., Paliogiannis F.:: *Functions of Several Real Variables.* Singapour: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. 2011

[7] Moučka, J., Rádl P.: *Matematika pro studenty ekonomie.* Praha: Grada Publishing, a.s., 2010.

[8] Musilová J., Musilová P.: *Matematika pro porozumění i praxi: netradiční výklad tradičních témat vysokoškolské matematiky II/2.* Brno: Vutium, 2012.

[9] Rachůnková I.: *Matematická analýza - metrické prostory.* Olomouc: Rektorát Univerzity Palackého v Olomouci, 1987

[10] Rektorys K. a kol.: *Přehled užité matematiky I. (7. vydání).* Praha: Prometheus, 2000

[11] Vybrané partie z matematické analýzy I. - diferenciální počet funkcí více proměnných [online], dostupné z: http://projects.math.slu.cz/AM/activ/soubory/opory/VybrPart.pdf. [cit. 2015-04-15]