Univerzita Hradec Králové

Přírodovědecká fakulta

Katedra matematiky

Sbírka úloh z teorie matic

Bakalářská práce

Autor:	Lenka Hatriková
Studijní program:	B1407 / Chemie
Studijní obor:	7507R / Bc. učitelství - všeobený základ
	1407R014 / Chemie se zaměřením na vzdělávání
	7504R015 / Matematika se zaměřením na vzdělávání
Vedoucí práce :	RNDr. Jitka Kühnová, Ph.D.
Oponent:	doc. RNDr. PaedDr. Pavel Trojovský, Ph.D.

Hradec Králové Květen 2022

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně a že jsem v seznamu použité literatury uvedla všechny prameny, z kterých jsem vycházela.

Hradec Králové dne 12. 5. 2022 Lenka Hatriková

Poděkování

Děkuji své vedoucí bakalářské práce RNDr. Jitce Kühnové, Ph.D. za pomoc, odborné konzultace a trpělivost. Poděkování patří i mé rodině za psychickou podporu.

Anotace

HATRIKOVÁ, Lenka *Sbírka úloh z teorie matic*. Hradec Králové, 2022. Bakalářská práce na Přírodovědecké fakultě Univerzity Hradec Králové. Vedoucí diplomové práce RNDr. Jitka Kühnová, Ph.D., 65 s.

Bakalářská práce se zabývá problematikou matic. V teoretické části jsou charakterizovány základní pojmy, vlastnosti a vzájemné vztahy matic, které jsou využity v následující kapitole pro řešení úloh. Sbírka úloh obsahuje řešené a neřešené příklady s výsledky.

Klíčová slova

Lineární algebra, matice, hodnost matice, operace s maticemi, matice přechodu, matice lineárního zobrazení

Annotation

HATRIKOVÁ, Lenka *A Collection of Problems on the Theory of the Matrices*. Hradec Králové, 2022. Bachelor Thesis at Faculty of Science University of Hradec Králové. Bachelor Supervisor RNDr. Jitka Kühnová, Ph.D., 65 p.

The bachelor thesis studies the problem of matrices. The theoretical part defines the basic concepts, properties and mutual relations of matrices. These concepts are used in the next chapter to solve sample problems. Collection of problems contains both solved and unsolved problems and results.

Keywords

Linear algebra, matrix, rank matrix, matrix operation, transition matrix, matrix of a linear transformation

Obsah

Úvod

V bakalářské práci bude zpracováno téma z lineární algebry, a to konkrétně matice. Lineární algebra studuje soustavy lineárních rovnic, vektorové prostory, algebraické struktury a lineární zobrazení. Matice se využívají ke zkoumání lineární nezávislosti vektorů, k nalezení souřadnic vektorů v nějaké bázi, k řešení soustav lineárních rovnic či pro popis lineárního zobrazení v souřadnicích.

Téma práce Sbírka úloh z teorie matic jsem si vybrala, protože mě práce s maticemi zajímá. Jedná se o tvůrčí činnost, která rozvíjí matematický vhled a podporuje matematické myšlení. Práce s maticemi je využívána v několika odvětvích matematiky, ale i ve fyzice, statistice a i v biologii.

Cílem mé bakalářské práce je vytvoření sbírky řešených a neřešených příkladů s výsledky. Teoretická část práce popisuje vlastnosti a vzájemné vztahy matic, které jsou následně využívány při řešení příkladů. Jsou zde charakterizovány druhy matic, hodnost matice, operace s maticemi a maticové rovnice. Vytvořená sbírka úloh nabízí řešené příklady s postupem i neřešené příklady s výsledky, které slouží k procvičení a upevnění zmíněných zákonitostí matic.

Kapitola 1

Matice

V této kapitole se budeme věnovat teorii matic, kterou potřebujeme znát pro řešení úloh. Teorie je zpracována stručně, bez důkazů. Je předpokládána určitá znalost pojmů z lineární algebry týkající se především vektorových prostorů, algebraických struktur a determinantů. Teoretické znalosti jsou čerpány z literatury uvedené na konci práce v seznamu literatury.

1.1 Definice matice a její druhy

Definice 1.1.1 Matici $A = (a_{ij})$ typu (m, n) nad polem T definujeme jako zobrazení $f : \{1, 2, 3, \dots, m\} \times \{1, 2, 3, \dots, n\} \to T$, kde $f((i, j)) = a_{ij}$.
Pro naše výpočty postačí zjednodušená definice matice, kdy matici chápeme jako obdélníkové schéma.
Definice 1.1.2 Nechť $(T, +, .)$ je libovolné pole, nechť m, n jsou nenulová přirozená čísla. Pak obdélníkové schéma tvaru

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

kde $a_{ij} \in T$ pro $i = 1, 2, 3, \dots, m$, $j = 1, 2, 3, \dots, n$, se nazývá matice A typu (m, n) nad polem T. Píšeme také $A = (a_{ij})$.

Prvky $a_{ij} \in T$ se nazývají **prvky** matice $A = (a_{ij})$ a je jich přesně mn.

Je-li prvek a_{ij} prvkem matice A, pak i je řádkový a j je sloupcový index tohoto prvku a uspořádaná dvojice (i, j) nám jednoznačně určuje polohu prvku a_{ij} v matici A.

Prvky a_{11}, a_{22}, a_{33}, $\dots$, a_{kk}, $k = min\{m, n\}$, matice A typu (m, n) tvoří **hlavní diagonálu** matice A.

Řádky matice A typu (m, n) jsou uspořádané n-tice prvků z pole T. Mluvíme o **řádkových vektorech** matice A. Uspořádaná n-tice

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \end{pmatrix} \in T^n,$$

$i = 1, 2, 3, \dots, m$, se nazývá i-tý řádek matice A.

Sloupce matice A typu (m, n) jsou tvořeny uspořádanou m-ticí prvků z pole T. Mluvíme o **sloupcových vektorech** matice A. Uspořádaná m-tice

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \in T^m,$$

$j = 1, 2, 3, \dots, n$, se nazývá j-tý sloupec matice A.

Nechť $A = (a_{ij})$ je matice typu (m, n) nad polem T. Matici A nazýváme:

- **nulová matice**, je-li $a_{ij} = 0$ pro všechna $i = 1, 2, 3, \dots, m$ a $j = 1, 2, 3, \dots, n$; značíme ji O_{mn}, respektive pouze O
- **čtvercová matice**, je-li $m = n$, pak říkáme, že matice A je řádu n
- **obdélníková matice**, je-li $m \neq n$
- **jednotková matice**, je-li matice A čtvercová matice řádu n a $a_{ii} = 1$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$, $a_{ij} = 0$; $i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$; značí se E_n, respektive E nebo také J

- **diagonální matice**, jestliže $a_{ij} = 0$; $i \neq j$, $i = 1, 2, 3, \ldots, m$, $j = 1, 2, 3, \ldots, n$;

  je-li matice A čtvercová diagonální matice, pak píšeme $A = diag(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$

  Např.:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = diag(3, 5, 8, 6)$$

- **řádková matice**, je-li $m = 1$; matice A je tedy typu $(1, n)$

- **sloupcová matice**, je-li $n = 1$; matice A je tedy typu $(m, 1)$

- **horní trojúhelníková matice**, je-li $a_{ij} = 0$ pro $i > j$; $i = 1, 2, 3, \ldots, m$, $j = 1, 2, 3, \ldots, n$

- **dolní trojúhelníková matice**, je-li $a_{ij} = 0$ pro $i < j$; $i = 1, 2, 3, \ldots, m$, $j = 1, 2, 3, \ldots, n$

- **redukovaná trojúhelníková matice**

  - leží-li každý nenulový řádek nad libovolným nulovým řádkem

  - je-li vedoucí prvek každého nenulového řádku roven 1; **vedoucím prvkem řádku** matice A nazýváme první nenulový prvek tohoto řádku

  - jestliže vedoucí prvek „vyššího“ řádku leží více vlevo než vedoucí prvek „nižšího“ řádku, tj. jsou-li a_{ij}, a_{kl} vedoucí prvky i-tého a k-tého řádku matice A a je-li $i < k$, pak také $j < l$

  - jsou-li ve sloupci, ve kterém se nachází vedoucí prvek nějakého řádku, všechny ostatní prvky nulové, tj. je-li a_{ij} vedoucí prvek i-tého řádku, pak $a_{kj} = 0$ pro každé $k \neq i$

- **matice ve schodovitém tvaru**,

  - je-li $m > 1$, pak $a_{21} = 0$

  - je-li $a_{i1} = a_{i2} = a_{i3} = \ldots = a_{ik} = 0$, pro nějaké $i \in \{1, 2, 3, \ldots, m-1\}$, $k \in \{1, 2, 3, \ldots, n-1\}$, potom $a_{i+1,1} = a_{i+1,2} = a_{i+1,3} = \ldots = a_{i+1,k+1} = 0$.

Např.:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Matice A nad polem T, která je rozdělena vodorovnými nebo svislými čarami do bloků, se nazývá **bloková matice** a zapisujeme ji ve tvaru

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix}.$$

- Dílčí matice stojící ve stejném sloupci blokové matice A mají stejný počet sloupců.

- Dílčí matice stojící ve stejném řádku blokové matice A mají stejný počet řádků.

Je-li $m = n$ a jsou-li matice $A_{11}, A_{22}, \dots, A_{nn}$ čtvercové (hovoříme o tzv. hlavní diagonále blokové matice), pak se matice A nazývá **čtvercová bloková matice** řádu n.

Např.:

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 1 & 3 & 7 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 0 & 7 & 7 & 5 \\ \hline 8 & 7 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 5 & 1 \\ \hline 5 & 0 & 3 & 4 & 7 & 1 \\ 9 & 5 & 7 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

Definice 1.1.3 Nechť $A = (A_{ij})$ je čtvercová bloková matice řádu n nad polem T. Řekneme, že matice A je

1. **bloková horní trojúhelníková**, jestliže pro každé $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$, $i > j$, je $A_{ij} = O$

2. **bloková dolní trojúhelníková**, jestliže pro každé $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$, $i < j$, je $A_{ij} = O$

3. **blokově diagonální**, jestliže pro každé $i, j = 1, 2, 3, \ldots, n$, $i \neq j$, je $A_{ij} = O$; píšeme také $A = diag(A_{11}, A_{22}, \ldots, A_{nn})$

Poznámka: Z jednotlivých matic můžeme sestavovat matice blokové.

Např.:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

Definice 1.1.4 Nechť $A = (a_{ij})$ je matice typu (m_1, n_1), $B = (b_{ij})$ je matice typu (m_2, n_2) (nad polem T). Pak matice A je rovna matici B, píšeme $A = B$ (respektive $B = A$), právě když $m_1 = m_2$, $n_1 = n_2$ a $a_{ij} = b_{ij}$ pro každé $i = 1, 2, 3, \ldots, m_1$ a $j = 1, 2, 3, \ldots, n_1$.

Definice 1.1.5 Nechť $A = (a_{ij})$ je matice typu (m, n) nad polem T. **Transponovanou maticí** k matici A rozumíme matici

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

typu (n, m) nad polem T.

Poznámka: Pro libovolnou matici A typu (m, n) platí:

- $(A^T)^T = A$
- řádkové (sloupcové) vektory matice A jsou sloupcovými (řádkovými) vektory matice A^T.

Definice 1.1.6 Nechť A je čtvercová matice řádu n nad polem T. Řekneme, že matice A je

- **symetrická matice**, právě když $A = A^T$, tj. $a_{ij} = a_{ji}$, pro $i, j = 1, 2, \ldots, n$
- **antisymetrická matice**, právě když $A = -A^T$, tj. $a_{ij} = -a_{ji}$ pro $i \neq j$ a $a_{ii} = 0$ (nad polem jehož charakteristika není 2)
- **Hermitovská matice** (samodružná matice), je-li A matice nad polem $\mathbb{C}$ a právě když $A^T = \overline{A}$, kde $a_{ji} = \overline{a_{ij}}$, a $\overline{a_{ij}}$ je číslo komplexně sdružené k číslu a_{ij}

- **ortogonální matice**, právě když je matice A regulární a platí $A^{-1} = A^T$.

Věta 1.1.1 Nechť A je čtvercová matice řádu n nad polem T, pak platí, že matici A můžeme vyjádřit pomocí součtu její symetrické a antisymetrické části. Symetrickou část definujeme výrazem $\frac{1}{2}(A + A^T)$ a antisymetrickou část definujeme výrazem $\frac{1}{2}(A - A^T)$. Pak tedy platí, že $A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$.

1.2 Elementární úpravy matic a hodnost matice

Definice 1.2.1 Nechť je dána matice $A = (a_{ij})$ typu (m, n) nad polem T. **Elementárními úpravami matice** A rozumíme následující úpravy

- vzájemná výměna dvou řádků (sloupců)
- vynásobení některého řádku (sloupce) matice A nenulovým prvkem z pole T
- přičtení k-násobku některého řádku (sloupce) k jinému řádku (sloupci) matice A; $k \neq 0$ a $k \in T$

Definice 1.2.2 Řekneme, že matice A typu (m, n) nad polem T je **řádkově** (respektive **sloupcově**) **ekvivalentní** s maticí B typu (m, n) nad polem T, právě když je možné matici B získat z matice A pomocí konečné posloupnosti elementárních řádkových (respektive sloupcových) úprav. Píšeme $A \sim B$.

Věta 1.2.1 Řádkově ekvivalentním maticím náleží tentýž vektorový prostor V generovaný řádkovými vektory těchto matic.

Věta 1.2.2 Každá matice je řádkově ekvivalentní s nějakou maticí ve schodovitém tvaru.

Věta 1.2.3 Nenulové řádky matice ve schodovitém tvaru jsou lineárně nezávislé vektory.

Definice 1.2.3 Hodností matice A typu (m, n) nad tělesem T rozumíme dimenzi vektorového prostoru generovaného jejími řádkovými vektory. Píšeme $h(A)$.

Poznámka: Z předchozích úvah plyne

- Řádkově ekvivalentní matice mají stejnou hodnost.
- Hodnost matice ve schodovitém tvaru je rovna počtu jejích nenulových řádků.

- Hodnost jednotkové matice řádu n je rovna n.

- Hodnost matice h je rovna nule, právě když A je nulovou maticí.

- Hodnost matice typu (m, n) je nejvýše rovna číslu m, tedy $h(A) \leq m$.

- Matice má hodnost h, právě když mezi jejími řádkovými vektory lze nalézt h vektorů lineárně nezávislých a když každá skupina $h + 1$ jejích řádkových vektorů je lineárně závislá.

Je tedy zřejmé, že hodnost matice A můžeme snadno nalézt tak, že matici upravíme pomocí elementárních řádkových úprav na matici ve schodovitém tvaru. Hodnost matice je pak rovna počtu jejích nenulových řádků.
Elementárním úpravám se také někdy říká úpravy neměnící hodnost matice.

Poznámka: Zmíněné vlastnosti lze aplikovat i na sloupcové vektory matice.

- Sloupcové vektory matice A typu (m, n) generují vektorový prostor, který je podprostorem vektorového prostoru T^m.

- Lze dokázat, že vektorový prostor V generovaný řádkovými vektory matice A má stejnou dimenzi jako vektorový prostor generovaný sloupcovými vektory matice A.

Definice 1.2.4 Hodností matice A rozumíme dimenzi vektorového prostoru generovaného jejími sloupcovými vektory.

Poznámka: Úpravy neměnící hodnost matice lze tedy provádět i se sloupcovými vektory matice, aniž by se změnila hodnost matice.
Řádkové (sloupcové) vektory matice A typu (m, n) jsou sloupcovými (řádkovými) vektory matice A^T a tedy platí:

$$h(A) = h(A^T) = h \wedge h \leq min\{m, n\}.$$

Definice 1.2.5 Čtvercová matice A řádu n se nazývá **regulární**, právě když $h(A) = n$.
Čtvercová matice A řádu n se nazývá **singulární**, právě když není regulární.

Poznámka: Je-li A čtvercová matice řádu n, pak se číslo $n - h(A)$ nyzývá nulita (defekt) matice A a píšeme $nulA$.

Věta 1.2.4 Nechť je matice A čtvercová matice řádu n. Pak jsou následující výroky ekvivalentní

1. matice A je regulární (singulární)
2. $h(A) = n \quad (h(A) < n)$
3. řádkové, respektive sloupcové, vektory matice A jsou lineárně nezávislé (sloupcové, respektive řádkové, vektory matice A jsou lineárně závislé)

1.3 Operace s maticemi

Definice 1.3.1 Nechť $A = (a_{ij})$ a $B = (b_{ij})$ jsou matice typu (m, n) nad polem T a nechť $r \in T$;
součtem matic rozumíme matici $C = A + B$ typu (m, n), kde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, pro $i = 1, 2, \ldots, m$ a $j = 1, 2, \ldots, n$
r-násobkem matice rozumíme matici $D = rA$ typu (m, n), kde $d_{ij} = ra_{ij}$, pro $i = 1, 2, \ldots, m$ a $j = 1, 2, \ldots, n$
Poznámka:

(1)
- Analogicky lze definovat i násobek Ar matice A prvkem r, jako matici $D = (d_{ij})$ typu (m, n) s prvky $d_{ij} = a_{ij}r$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$.
- Je zřejmé, že násobení matic prvkem z pole T je komutativní, tedy pro každý prvek $r \in T$ a každou matici A platí $rA = Ar$.
- Pro každé $r, s \in T$ platí $r(sA) = (rs)A$.
- Pro každé $r, s \in T$ platí $(r + s)A = rA + sA$.
- Pro libovolné matice A, B stejného typu platí $r(A + B) = rA + rB$.

(2) Je zřejmé, že pro libovolné matice $A, B \in M_{m,n}(T)$ platí:

(a) $(A + B)^T = A^T + B^T$

(b) $(rA)^T = rA^T$

Věta 1.3.1 Množina $M_{m,n}(T)$ všech matic typu (m,n) nad polem T je spolu s operací sčítání matic komutativní grupa.

Věta 1.3.2 Množina $M_{m,n}(T)$ všech matic typu (m,n) nad polem T tvoří vzhledem k operaci sčítání matic a násobení matic prvkem z pole T vektorový prostor dimenze mn.

Definice 1.3.2 Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu n nad polem T. **Stopou tr** matice A rozumíme součet prvků na její hlavní diagonále, tedy:

$$trA = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Věta 1.3.3 Nechť A, B jsou čtvercové matice stejného řádu nad polem T, nechť $c \in T$. Pak platí:

1. $tr(A + B) = trA + trB$
2. $tr(cA) = c(trA)$
3. $trA^T = trA$

Definice 1.3.3 Nechť $A = (a_{ij})$ je matice typu (m,p) a $B = (b_{ij})$ matice typu (p,n). Pak **součinem** matic A,B rozumíme matici $C = AB$ typu (m,n), kde

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

pro $i = 1, 2, 3, \ldots, m$ a $j = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Poznámka:

- Součin AB může být definován, ale součin BA nemusí.
- Jsou-li definovány součiny AB, BA, kde matice A je typu (m,n) a matice B typu (n,m), pak výsledek součinu AB je čtvercovou maticí řádu m, zatímco výsledek součinu BA je čtvercovou maticíc řádu n.
- Jsou-li A, B čtvercové matice řádu n, jsou oba součiny definovány a jsou to opět čtvercové matice řádu n, ale obecně **neplatí**, že $AB = BA$. Násobení matic není obecně komutativní.

Věta 1.3.4 Nechť A, B, C jsou matice odpovídajících typů nad polem T takové, aby níže uvedené součiny a součty byly definovány, a nechť r $\in T$. Pak platí

1. $(AB)C = A(BC)$
2. $A(B+C) = AB + AC \wedge (B+C)A = BA + CA$
3. $(rA)B = A(rB) = r(AB)$
4. $E_n\, A = A\, E_n = A$, kde E_n je jednotková matice řádu n a A je čtvercová matice řádu n

Věta 1.3.5 Množina $M_{n,n}(T)$ všech čtvercových matic nad polem T řádu $n, n \leq 2$, spolu se sčítáním matic a násobením matic je nekomutativní okruh s jednotkovým prvkem a s děliteli nuly.

Věta 1.3.6 Nechť A, B jsou matice nad polem T. Pak

1. $(AB)^T = B^T A^T$, jestliže A je matice typu (m,p) a B je typu (p,n)
2. $tr(AB) = tr(BA) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{p} a_{ij} b_{ji}$, jestliže A je matice typu (m,p) a B typu (p,m)

Věta 1.3.7 Nechť A je matice typu (m,n) nad polem T. Pak platí:

1. je-li B matice typu (n,p) nad polem T, pak $h(AB) \leq h(A)$ a $h(AB) \leq h(B)$
2. je-li R regulární matice řádu n, respektive S regulární matice řádu m nad polem T, pak $h(AR) = h(A)$ a $h(SA) = h(A)$

1.4 Inverzní matice, elementární transformační matice a matice přechodu

Definice 1.4.1 Nechť A,B jsou čtvercové matice řádu n nad polem T. Řekneme, že matice B je **inverzní maticí** k matici A nebo že matice A je inverzní maticí k matici B, právě když platí, že

$$AB = BA = E_n.$$

Píšeme $B = A^{-1}$, respektive $A = B^{-1}$. Matici A, ke které existuje inverzní matice, nazýváme invertibilní maticí.

Věta 1.4.1 Pokud existuje inverzní matice k matici A, pak je inverzní matice určena jednoznačně.

Věta 1.4.2 Nechť A je čtvercová matice řádu n. K matici A existuje inverzní matice, právě když je matice A regulární. Inverzní matice A^{-1} k matici A je také regulární.

Věta 1.4.3 Nechť A, B jsou regulární matice řádu n. Pak platí:

- Součin AB je regulární matice a platí $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Definice 1.4.2 Elementární transformační maticí rozumíme každou inveribilní matici, která se nejvýše na jednom místě liší od jednotkové matice. Mohou nastat dvě situace.

1. V matici jsou mimo hlavní diagonálu samé nuly. Na hlavní diagonále se vyskytují samé jednotkové prvky s výjimkou místa ii, kde stojí prvek b, $b \neq 0$. Je-li $b = 1$, pak se jedná o jednotkovou matici.
2. V matici jsou na hlavní diagonále samé jednotkové prvky. Mimo hlavní diagonálu jsou samé nuly až na jednu výjimku místa ij, kde stojí prvek b. Pokud je $b = 0$, pak se jedná o jednotkovou matici.

Poznámka:

- Dvě elementární transformační matice prvního typu, které mají na stejném místě hlavní diagonály prvek b (b^{-1}), jsou navzájem inverzní.
- Dvě elementární transformační matice druhého typu, které mají na stejném místě mimo hlavní diagonálu prvek b ($-b$), jsou navzájem inverzní.

Poznámka:

- Sloupcové elementární úpravy matice získáme násobením této matice elementárními transformačními maticemi zprava.

- Řádkové elementární úpravy matice získáme násobením této matice elementárními transformačními maticemi zleva.

Věta 1.4.4 Každá regulární matice je součinem elementárních transformačních matic.

Poznámka:

- Regulární matici A můžeme řádkovými elementárními úpravami převést na jednotkovou matici a součin B elementárních transformačních matic je roven matici A^{-1}. Pro určení matice inverzní A^{-1} k matici A tedy stačí zjistit tento součin elementárních transformačních matic.

- K nalezení zmíněné inverzní matice používáme tzv. **Jordanovu metodu**. Nechť A je regulární čtvercová matice řádu n nad polem T. K matici A připojíme jednotkovou matici E_n řádu n a vzniklou blokovou matici řádu $(n, 2n)$ upravíme pomocí elementárních řádkových (respektive sloupcových) úprav tak, aby z matice A vznikla jednotková matice E_n a z matice E_n pak vznikne hledaná inverzní matice A^{-1}. Tedy $(A|E_n) \sim \ldots \sim (E_n|A^{-1})$ (respektive $(\frac{A}{E}) \sim (\frac{E}{A^{-1}})$).

- Známe-li matice A a C, A je regulární, a potřebujeme-li vypočítat součin $A^{-1}C$, pak můžeme matici $(A|C)$ převést řádkovými (respektive sloupcovými) elementárními úpravami na matici $(E|A^{-1}C)$ (respektive $(\frac{A}{C}) \sim \ldots \sim (\frac{E}{CA^{-1}})$).

Věta 1.4.5 Nechť A je regulární čtvercová matice řádu n nad polem T. Pak k ní existuje matice inverzní, pro kterou platí vztah

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} A^*,$$

kde A^* se nazývá **adjungovaná matice** a je rovna

$$A^* = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{21} & \ldots & D_{n1} \\ D_{12} & D_{22} & \ldots & D_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{1n} & D_{2n} & \ldots & D_{nn} \end{pmatrix},$$

kde D_{ij} je algebraický doplněk prvku a_{ij}; $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Definice 1.4.3 Nechť V je netriviální vektorový prostor nad polem T dimenze n, nechť $M = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_n}\}$ a $M' = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\}$ jsou dvě báze prostoru V. Nechť dále je

$$\vec{v_1} = a_{11}\vec{u_1} + a_{21}\vec{u_2} + \ldots + a_{n1}\vec{u_n}$$

$$\vec{v_2} = a_{12}\vec{u_1} + a_{22}\vec{u_2} + \ldots + a_{n2}\vec{u_n}$$

$$\vec{v_n} = a_{1n}\vec{u_1} + a_{2n}\vec{u_2} + \ldots + a_{nn}\vec{u_n}\,,$$

tedy

$$\vec{v_j} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\vec{u_k}\,,$$

kde $j = 1, 2, \ldots, n$.

Pak matici

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

nazýváme **maticí přechodu** od báze M k bázi M'.

Poznámka:

- Je zřejmé, že matici A přechodu od jedné báze prostoru V k druhé bázi tohoto prostoru zkonstruujeme tak, že $j-$tý vektor druhé báze vyjádříme jako lineární kombinaci vektorů první báze a koeficienty této lineární kombinace pak napíšeme do $j-$tého sloupce matice A, $j = 1, 2, \ldots, n$. Matice přechodu A od báze M k bázi M' má tedy v $j-$tém sloupci souřadnice vektoru $\vec{v_j}$ vzhledem k bázi M.

- Pořadí obou bází i pořadí vektorů v bázích M, M' je podstatné a nelze je žádným způsobem zaměňovat. Jedná se o uspořádané báze.

- Matice přechodu od jedné báze k druhé bázi vektorového prostoru V musí být vždy regulární, protože je čtvercová a obsahuje ve sloupcích souřadnice bázových vektorů, které jsou lineárně nezávislé.

Věta 1.4.6 Nechť $M = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_n}\}$ a $M' = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\}$ jsou dvě báze vektorového prostoru V nad polem T. Nechť matice A je maticí přechodu od báze M k bázi M'. Potom maticí přechodu od báze M' k bázi M je matice A^{-1}.

Poznámka: Nechť $M = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_n}\}$ a $M' = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\}$ jsou dvě báze vektorového prostoru V nad polem T a nechť $A = (a_{ij})$ je matice přechodu od báze M k bázi M'. Dále nechť $\vec{w} \in V$ je takový vektor, že

$$\vec{w} = x_1\vec{u_1} + x_2\vec{u_2} + \ldots + x_n\vec{u_n}$$

$$\vec{w} = y_1\vec{v_1} + y_2\vec{v_2} + \ldots + y_n\vec{v_n}.$$

To znamená, že vektor $\vec{w}$ má v bázi M souřadnice $\{\vec{w}\}_M = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, respektive v bázi M' souřadnice $\{\vec{w}\}_{M'} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$.
Pak platí $\{\vec{w}\}_M = \{\vec{w}\}_{M'}\, A^T$, respektive $\{\vec{w}\}_M^T = A\,\{\vec{w}\}_{M'}^T$. Tímto způsobem jsou souřadnice vektoru $\vec{w}$ v bázi M vyjádřené pomocí souřadnic téhož vektoru v bázi M'.

Věta 1.4.7 Nechť $M = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_n}\}$ a $M' = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\}$ a $M'' = \{\vec{w_1}, \vec{w_2}, \ldots, \vec{w_n}\}$ jsou tři báze vektorového prostoru V nad polem T. Nechť matice A je maticí přechodu od báze M k bázi M', matice B je maticí přechodu od báze M' k bázi M''. Potom matice AB je maticí přechodu od báze M k bázi M''.

Poznámka: Nechť jsou dány báze M a M' ve vektorovém prostoru V nad polem T. Zvolíme si nějakou bázi S vektorového prostoru V vzhledem ke které se souřadnice dobře hledají. Báze S může být standardní báze v $\mathbb{R}^n$, báze $\{1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n\}$ ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}_n[x]$ polynomů stupně nejvýše n, atd. Pro výpočet matice přechodu od báze M k bázi M' použijeme vztahy z Věty 1.4.6 a Věty 1.4.7. Nechť A je matice přechodu od báze M k bázi M', B je matice přechodu od báze M k bázi S, C je matice přechodu od báze S k bázi M a D je matice přechodu od báze S k bázi M'. Pak

$$A = BD = C^{-1}D.$$

Přitom matice na pravé straně rovnosti sestavíme snadno: do sloupců matice C napíšeme souřadnice vektorů báze M vzhledem k bázi S a do sloupců matice D napíšeme souřadnice vektorů báze M' vzhledem k bázi S. Pro výpočet matice přechodu použijeme vztah z poznámky za Větou. 1.4.4, $(A|B) \sim (E|A^{-1}B)$, neboli $(C|D) \sim (E|C^{-1}D) = (E|A)$, kde A je hledanou maticí přechodu.

Dostáváme následující algoritmus:

- Do sloupců matice zapíšeme souřadnice vektorů báze M vzhledem k bázi S a vedle svislé čáry ještě souřadnice vektorů báze M' vzhledem k bázi S.
- Po eliminaci, která převede levý blok matice na jednotkovou matici, dostáváme v pravém bloku hledanou matici A, neboli matici přechodu od báze M k bázi M'.

1.5 Maticové rovnice typu $AX = B$

Nechť A, B jsou matice typů (m, n) a (m, k) nad polem T. Při řešení maticové rovnice $AX = B$ budeme hledat všechny matice X typu (n, k) nad polem T. Maticová rovnice $AX = B$ představuje k soustav lineárních rovnic se stejnou maticí soustavy a k různými pravými stranami. Maticová rovnice $AX = B$ má tedy řešení právě tehdy, když je $h(A|B) = h(A)$. Matice X je řešením rovnice $AX = B$ právě tehdy, když pro každé $j = 1, 2, \ldots, k$ je $j-$tý sloupec matice X řešením soustavy lineárních rovnic, která má jako matici soustavy matici A a jako sloupec pravých stran $j-$tý sloupec matice B. Při řešení maticových rovnic budeme používat stejné metody jako při řešení soustav lineárních rovnic.

Je-li A regulární matice řádu n nad polem T a B matice nad polem T taková, aby existoval součin $A^{-1}B$ (popř. součin BA^{-1}), pak $X = A^{-1}B$ (popř. $X = BA^{-1}$) je řešením maticové rovnice $AX = B$ (popř. $XA = B$).

1.6 Matice lineárního zobrazení a matice lineární transformace

Definice 1.6.1 Nechť V, V' jsou vektorové prostory nad polem T, nechť $M = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_n}\}$ je báze prostoru V a nechť $M' = \{\vec{v_1'}, \vec{v_2'}, \ldots, \vec{v_m'}\}$ je báze prostoru V'. Nechť $\varphi : V \to V'$ je lineární zobrazení a nechť platí

$$\varphi(\vec{u_1}) = a_{11}\vec{v_1'} + a_{21}\vec{v_2'} + \ldots + a_{m1}\vec{v_m'}$$

$$\varphi(\vec{u_2}) = a_{12}\vec{v_1'} + a_{22}\vec{v_2'} + \ldots + a_{m2}\vec{v_m'}$$

$$\varphi(\vec{u_n}) = a_{1n}\vec{v_1'} + a_{2n}\vec{v_2'} + \ldots + a_{mn}\vec{v_m'}$$

tj.

$$\varphi(\vec{u_i}) = \sum_{=1}^{m} a_{ji}\vec{v_j'},$$

kde $i = 1, 2, \ldots, n$.

Pak se matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

nazývá **matice lineárního zobrazení** φ vzhledem k bázím M a M'.

Poznámka: j-tý sloupec matice A je tvořen souřadnicemi vektorů $\varphi(\vec{u_j})$ vzhledem k bázi M', pro $j = 1, 2, \ldots, m$.

Věta 1.6.1 Nechť V, V' jsou vektorové prostory nad polem T, $M = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_n}\}$ je báze prostoru V a $M' = \{\vec{v_1'}, \vec{v_2'}, \ldots, \vec{v_m'}\}$ je báze prostoru V', nechť $\varphi : V \to V'$ je lineární zobrazení a A je matice typu (m, n) nad polem T. Matice A je maticí lineárního zobrazení φ vzhledem k bázím M a M' právě tehdy, když pro každý vektor $\vec{x} \in V$ platí $\{\varphi(\vec{x})\}_{M'} = \{\vec{x}\}_M.A^T$.

Důsledek: Každé lineární zobrazení $\varphi : T^n \to T^m$ se dá vyjádřit jako $\varphi(\vec{x}) = \vec{x}.A^T$, respektive $\varphi(\vec{x})^T = A.\vec{x}^T$, pro nějakou matici A typu (m, n) nad polem T.

Věta 1.6.2 Nechť V, V' jsou vektorové prostory nad polem T, $M = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_n}\}$ je báze prostoru V a $M' = \{\vec{v_1'}, \vec{v_2'}, \ldots, \vec{v_m'}\}$ je báze prostoru V' a nechť $A = (a_{ij})$ je matice typu (m, n) nad polem T. Pak existuje právě jedno lineární zobrazení $\varphi : V \to V'$, jehož matice vzhledem k bázím M a M' je rovna A.

Věta 1.6.3 Nechť $\varphi : V \to V'$ a $\psi : V' \to V''$ jsou lineární zobrazení, nechť $M = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_n}\}$ je báze prostoru V, $M' = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_m}\}$ je báze prostoru V' a $M'' = \{\vec{w_1}, \vec{w_2}, \ldots, \vec{w_k}\}$ je báze prostoru V''. Jestliže A je maticí lineárního zobrazení vzhledem k bázím M a M' a B je maticí lineárního zobrazení vzhledem k bázím M' a M'', potom je součin BA maticí složeného lineárního zobrazení $\varphi \circ \psi : V \to V''$ vzhledem k bázím M a M''.

Věta 1.6.4 Nechť V a V' jsou vektorové prostory téže dimenze n, M a M' jejich báze. Pak lineární zobrazení $\varphi : V \to V'$ je izomorfismus, právě když matice A lineárního zobrazení φ vzhledem k bázím M a M' je regulární. Matice A^{-1} je potom maticí izomorfismu $\varphi^{-1} : V' \to V$ vzhledem k bázím M' a M.
Důsledek: Nechť M a M' jsou dvě báze vektorového prostoru V. Maticí přechodu od báze M k bázi M' je matice identického izomorfismu I_V prostoru V vzhledem k bázím M' a M.

Definice 1.6.2 Nechť φ je lineární transformace prostoru V, nechť $M = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_n}\}$ je pevná báze prostoru V a platí

$$\varphi(\vec{u_1}) = a_{11}\vec{u_1} + a_{21}\vec{u_2} + \ldots + a_{n1}\vec{u_n}$$

$$\varphi(\vec{u_2}) = a_{12}\vec{u_1} + a_{22}\vec{u_2} + \ldots + a_{n2}\vec{u_n}$$

$$\varphi(\vec{u_n}) = a_{1n}\vec{u_1} + a_{2n}\vec{u_2} + \ldots + a_{nn}\vec{u_n}$$

tj.

$$\varphi(\vec{u_i}) = \sum_{=1}^{n} a_{ji}\vec{u_j},$$

kde $i = 1, 2, \ldots, n$.

Pak se matice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

nazývá **matice lineární transformace** φ v bázi M.

Poznámka: Matice lineární transformace $\varphi : V \to V$ v bázi M je vlastně maticí lineárního zobrazení $\varphi : V \to V$ vzhledem k bázím M a M.

Věta 1.6.5 Nechť M a M' jsou báze vektorového prostoru V, N a N' jsou báze vektorového prostoru V'. Nechť dále je A matice přechodu od báze M k bázi M', B je matice přechodu od báze N' k bázi N a C je matice lineárního zobrazení $\varphi : V \to V'$ vzhledem k bázím M a N. Pak BCA je matice lineárního zobrazení φ vzhledem k bázím M' a N'.

Věta 1.6.6 Nechť M, M' a M'' jsou báze vektorového prostoru V, nechť A je matice přechodu od báze M k bázi M', B je maticí přechodu od báze M' k bázi M''. Pak AB je matice přechodu od báze M k bázi M''.

Věta 1.6.7 Nechť M, M' jsou báze vektorového prostoru V, nechť P je matice přechodu od báze M k bázi M' a A je matice lineární transformace $\varphi : V \to V$ vzhledem k bázi M. Pak maticí této lineární transformace vzhledem k bázi M' je matice B taková, že $B = P^{-1}AP$.

Poznámka: Matice A a $P^{-1}AP$ jsou maticemi téže lineární transformace. Takovéto matice se nazývají **podobné**.

Věta 1.6.8 Nechť A, B jsou čtvercové matice řádu n nad polem T, nechť V je vektorový prostor nad T, $dim(V) = n$, $n \geq 1$. Pak A, B jsou matice téže lineární transformace prostoru V, právě když existuje regulární matice S taková, že $B = S^{-1}AS$.

Poznámka: Nechť M je báze prostoru V a M' je báze prostoru V'. Zvolíme si nějakou bázi S vektorového prostoru V' vzhledem ke které se souřadnice dobře hledají. Báze S může být standardní báze v $\mathbb{R}^n$, báze $\{1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n\}$ ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}_n[x]$ polynomů stupně nejvýše n, atd. Budeme hledat matici A zobrazení $\varphi : V \to V'$ vzhledem k bázím M a M'.

Nechť tedy:

- $M = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_n}\}$ je báze prostoru V, $M' = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_m}\}$ a S jsou báze prostoru V'
- A je matice lineárního zobrazení $\varphi : V \to V'$ vzhledem k bázím M a M'
- P je matice přechodu od báze M' k bázi S, tj. P je maticí identického automorfismu $I_{V'}$ vzhledem k bázím S a M'
- B je matice lineárního zobrazení φ vzhledem k bázím M a S

Pak podle Věty 1.6.3 je matice PB maticí lineárního zobrazení $\varphi \circ I_{V'} = \varphi$ vzhledem k bázím M a M', tj. $PB = A$. Jestliže matice T je maticí přechodu od báze S k bázi M', pak $P = T^{-1}$ a máme

$$A = PB = T^{-1}B.$$

Matice B obsahuje ve sloupcích souřadnice obrazů $\varphi(\vec{u_i})$ vzhledem k bázi S a matice T má ve sloupcích souřadnice vektorů $\vec{v_i}$ vzhledem k bázi S. Pro výpočet matice lineárního zobrazení použijeme úvahu $(T|B) \sim (E|T^{-1}B) = (E|A)$.

Dostáváme algoritmus:

- Do sloupců napíšeme pod sebe souřadnice vektorů $\vec{v_i}$ báze M' vzhledem k bázi S a vpravo od svislé čáry napíšeme do sloupců souřadnice vektorů $\varphi(\vec{u_i})$, $\vec{u_i} \in M$, vzhledem k bázi S.
- Po eliminaci, která převede levý blok matice na jednotkovou matici, dostáváme v pravém bloku hledanou matici A, neboli matici lineárního zobrazení φ vzhledem k bázím M a M'.

Kapitola 2

Sbírka úloh

1. Upravte matici A pomocí řádkových elementárních úprav na horní trojúhelníkový tvar matice a dolní trojúhelníkový tvar matice, jestliže

I.

$$A = \begin{pmatrix} \sin x & 1 & \cos x \\ 1 & 0 & \frac{1}{\sin x} \\ \cos x & \frac{-1}{\sin x} & -cotg\, x \end{pmatrix}$$

a) Nejprve si upravíme matici A na horní trojúhelníkový tvar.

Vyměníme první a druhý řádek matice. K druhému řádku přičteme $(-\sin x)$-násobek prvního řádku. K třetímu řádku přičteme $(-\cos x)$-násobek prvního řádku. K $(\sin x)$-násobku třetího řádku přičteme druhý řádek.

$$A \sim \begin{pmatrix} \sin x & 1 & \cos x \\ 1 & 0 & \frac{1}{\sin x} \\ \cos x & \frac{-1}{\sin x} & -cotg\, x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\sin x} \\ \sin x & 1 & \cos x \\ \cos x & \frac{-1}{\sin x} & -cotg\, x \end{pmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\sin x} \\ 0 & 1 & \cos x - 1 \\ 0 & \frac{-1}{\sin x} & -2cotg\, x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\sin x} \\ 0 & 1 & \cos x - 1 \\ 0 & 0 & -1 - \cos x \end{pmatrix}$$

b) Nyní si upravíme matici A na dolní trojúhelníkový tvar.

Vyměníme první a druhý řádek matice. Třetí řádek přičteme k $(\frac{1}{\sin x})$-násobku druhého řádku. Třetí řádek přičteme k $(\cos x)$-násobku prvního řádku. Vyměníme první a druhý řádek.

$$A \sim \begin{pmatrix} \sin x & 1 & \cos x \\ 1 & 0 & \frac{1}{\sin x} \\ \cos x & \frac{-1}{\sin x} & -cotg\, x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\sin x} \\ \sin x & 1 & \cos x \\ \cos x & \frac{-1}{\sin x} & -cotg\, x \end{pmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{\sin x} \\ 1+\cos x & 0 & 0 \\ \cos x & \frac{-1}{\sin x} & -cotg\, x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2\cos x & \frac{-1}{\sin x} & 0 \\ 1+\cos x & 0 & 0 \\ \cos x & \frac{-1}{\sin x} & -cotg\, x \end{pmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1+\cos x & 0 & 0 \\ 2\cos x & \frac{-1}{\sin x} & 0 \\ \cos x & \frac{-1}{\sin x} & -cotg\, x \end{pmatrix}$$

II. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

III. $A = \begin{pmatrix} 3i & 1 & i^2 \\ 2 & i & \frac{i}{3} \\ 6 & 2i & 6i \end{pmatrix}$

2. Upravte matici A pomocí sloupcových elementárních úprav na horní trojúhelníkový tvar matice a dolní trojúhelníkový tvar matice, jestliže

I.
$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 0 & 2 & \frac{-1}{\cos x} \\ \frac{-1}{\cos x} & \sin x & 2tg\, x \end{pmatrix}$$

a) Nejprve si upravíme matici A na horní trojúhelníkový tvar.

K (-2)-násobku druhého sloupce přičteme $(\cos x)$-násobek třetího sloupce. K dvojnásobku prvního sloupce přičteme $(\frac{1}{\sin x})$-násobek třetího sloupce. K $(-5 \sin x \cos x)$-násobku prvního sloupce přičteme druhý sloupec.

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 0 & 2 & \frac{-1}{\cos x} \\ \frac{-1}{\cos x} & \sin x & 2tg\,x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & \sin x \cos x - 2\cos x & \sin x \\ \frac{-1}{\sin x \cos x} & -5 & \frac{-1}{\cos x} \\ 0 & 0 & 2tg\,x \end{pmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{pmatrix} -2\cos x(7\sin x + 1) & \cos x(\sin x - 2) & \sin x \\ 0 & -5 & \frac{-1}{\cos x} \\ 0 & 0 & 2tg\,x \end{pmatrix}$$

b) Nyní si upravíme matici A na dolní trojúhelníkový tvar.
K druhému sloupci přičteme $(-\cos x)$-násobek prvního sloupce. K třetímu sloupci přičteme $(-\sin x)$-násobek prvního sloupce. K $(2\cos x)$-násobku třetího sloupce přičteme druhý sloupec.

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & \cos x & \sin x \\ 0 & 2 & \frac{-1}{\cos x} \\ \frac{-1}{\cos x} & \sin x & 2tg\,x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \frac{-1}{\cos x} \\ \frac{-1}{\cos x} & \sin x + 1 & 3tg\,x \end{pmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \frac{-1}{\cos x} & \sin x + 1 & 7\sin x + 1 \end{pmatrix}$$

II. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

III. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 + i & 0 \\ i & -2 \quad + 2i & 2 \\ 3 + i & 5 + 7i & 1 - 6i \end{pmatrix}$

3. Nalezněte rozklad matice A na symetrickou a antisymetrickou složku, pokud víte, že symetrický člen má tvar $\frac{1}{2}(A + A^T)$ a antisymetrický člen má tvar $\frac{1}{2}(A - A^T)$. (Eliáš, 1985)

a)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

– Nalezneme transponovanou matici: $A^T = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 0 & 6 & 10 \end{pmatrix}$

– Spočteme symetrický člen:

$$\frac{1}{2}(A + A^T) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 0 & 6 & 10 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8 & 1 & 1 \\ 1 & 10 & 10 \\ 1 & 10 & 20 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 5 & 5 \\ \frac{1}{2} & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

– Spočteme antisymetrický člen:

$$\frac{1}{2}(A - A^T) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \\ 0 & 6 & 10 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 5 & -1 \\ -5 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tedy $A = \begin{pmatrix} 4 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 5 & 5 \\ \frac{1}{2} & 5 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 10 \end{pmatrix}$.

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 10 & -2 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

4. Určete hodnost matice.

a)

$$A = \begin{pmatrix} \log 25 & 1 & 0 \\ \log 125 & 2 & \log \frac{1}{5} \\ \log \frac{1}{5} & \log 2 & -5 \end{pmatrix}$$

Matici upravíme pomocí elementárních řádkových úprav na matici ve schodovitém tvaru. K (-2)-násobku druhého řádku přičteme trojnásobek prvního řádku. K dvojnásobku třetího řádku přičteme první řádek. K (-1)-násobku třetího řádku přičteme druhý řádek. Podle úvah za Definicí 1.2.3 určíme hodnost matice.

$$A \sim \begin{pmatrix} \log 25 & 1 & 0 \\ \log 125 & \log 5 & \log \frac{1}{5} \\ \log \frac{1}{5} & \log 2 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2\log 5 & 1 & 0 \\ 3\log 5 & \log 5 & -\log 5 \\ -\log 5 & \log 2 & -5 \end{pmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{pmatrix} 2\log 5 & 1 & 0 \\ 0 & 3-2\log 5 & 2\log 5 \\ 0 & 1+2\log 2 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2\log 5 & 1 & 0 \\ 0 & \log \frac{1000}{25} & 2\log 5 \\ 0 & \log 40 & -10 \end{pmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{pmatrix} 2\log 5 & 1 & 0 \\ 0 & \log 40 & 2\log 5 \\ 0 & \log 40 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2\log 5 & 1 & 0 \\ 0 & \log 40 & 2\log 5 \\ 0 & 0 & 2\log 5 + 10 \end{pmatrix}$$

Výsledná matice má právě tři nenulové řádky, tedy hodnost matice $h(A) = 3$.

b) $A = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x & \cos x & \sin x \\ \sin x & 0 & -\sin x & -\cos x \\ \cos x & 3\sin x \cos x & 3\cos x & \sin x \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 2i & 1 & 2+i \\ -1 & i & 3-i \\ 5 & -3i & 2i \\ 0 & -2 & 28+10i \end{pmatrix}$

5. Určete hodnost dané matice A v závislosti na parametrech $a, b \in \mathbb{R}$.

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3-b & 3 \\ 1 & 2+a & 4 & 6 \\ 2 & 4 & b-6 & 7 \\ 1 & 2-a & 2-b & 1 \end{pmatrix}$$

(Horák, 2002)

První řádek vynásobíme (-1) a přičteme ho k druhému a čtvrtému řádku. První řádek vynásobíme (-2) a přičteme ho k třetímu řádku. Vyměníme druhý a čtvrtý řádek a druhý řádek vynásobíme (-1). Vyměníme třetí a čtvrtý řádek. Ke třetímu řádku přičteme (-1)-násobek druhého řádku. (-3)-násobek třetího řádku přičteme ke čtvrtému řádku. Čtvrtý řádek vydělíme (-2).

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3-b & 3 \\ 1 & 2+a & 4 & 6 \\ 2 & 4 & b-6 & 7 \\ 1 & 2-a & 2-b & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3-b & 3 \\ 0 & a & 1+b & 3 \\ 0 & 0 & 3b-12 & 1 \\ 0 & -a & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3-b & 3 \\ 0 & a & 1 & 2 \\ 0 & a & 1+b & 3 \\ 0 & 0 & 3b-12 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3-b & 3 \\ 0 & a & 1 & 2 \\ 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 3b-12 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3-b & 3 \\ 0 & a & 1+b & 3 \\ 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & -12 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3-b & 3 \\ 0 & a & 1+b & 3 \\ 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

I. $b \neq 0$ pak $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3-b & 3 \\ 0 & a & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-6 \end{pmatrix}$

– $a \neq 0$ pak $h(A) = 4$ pro $b \neq 6$, $h(A) = 3$ pro $b = 6$

– $a = 0$ pak $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3-b & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3-b & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & b-6 \end{pmatrix} \sim$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3-b & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b-6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3-b & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3-b & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

tedy $h(A) = 3$.

II. $b = 0$ pak $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & a & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

– $a \neq 0$ pak $h(A) = 4$

– $a = 0$ pak $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$

tedy $h(A) = 3$

Tedy $h(A) = 4 \Leftrightarrow (a \neq 0,\, b \neq 0,\, b \neq 6) \vee (a \neq 0,\, b = 0)$, respektive $h(A) = 3 \Leftrightarrow (a \neq 0,\, b = 6) \vee (a = 0,\, b \neq 0) \vee (a = 0, b = 0)$.

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & a & b \\ 1 & a & -1 & 1 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 & 2b & 1 & 7 \\ -1 & 1 & 1 & 2a & -2 & b \\ 2 & 3b & 3 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ a & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & b \end{pmatrix}$

(Horák, 2002)

6. Pro dané matice nalezněte součin AB a součin BA, pokud existují.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 5 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 5 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 11 & 9 \\ 4 & 28 \end{pmatrix}, \ BA \text{ neexistuje.}$$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 7 \\ -4 & 0 & 6 & 1 \\ 2 & 11 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ (Horák, 2002)

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ (Olšák, 2013)

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ (Olšák, 2013)

e) $A = \begin{pmatrix} 1+i \\ 3-i \\ -i \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1+3i & 1+2i & 2 \end{pmatrix}$ (Horák, 2002)

7. Určete $h(A), h(B), h(AB), h(BA)$.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 0 & 11 & 30 \\ 0 & -2 & 9 \\ 0 & 4 & 16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & 9 \\ 0 & 11 & 30 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 34 \\ 0 & 0 & 56 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

tedy $h(A) = 3$

$$B \sim \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 17 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ tedy } h(B) = 2$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 19 & 9 \\ 0 & 18 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$$

$$AB \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 19 & 9 \\ 0 & 18 \\ 8 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 39 \\ 0 & 18 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ tedy } h(AB) = 2.$$

Součin BA neexistuje.

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 10 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 8 & 2 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 4 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & i & 1+i \\ 2+i & 5-i & -1-i \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} i & 3-2i \\ -2-2i & 1 \end{pmatrix}$

8. Pro dané matice A, B, C určete jejich součin ABC.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 6 & -5 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 9 \\ 6 & 15 & 27 \end{pmatrix}$$

$$(AB)C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 9 \\ 6 & 15 & 27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 6 & -5 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -6 & -18 & 12 \\ 12 & -6 & -18 & 12 \end{pmatrix}$$

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 7 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & -3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1+i & 2 \\ -i & 3+i \\ 1 & 2-i \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & i \\ 1+2i & 3+2i \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2-i & i & 1+i \\ -2+i & 0 & 1-i \end{pmatrix}$

9. Pro zadané matice A, B, C spočtěte následující matice, jestliže

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 & 5 \\ 1 & -6 & 0 & 5 \\ 5 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \text{ a}$$

a) $(A+B)(B^T+C)$

$$(A+B) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 & 5 \\ 1 & -6 & 0 & 5 \\ 5 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 8 \\ 6 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(B^T+C) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A+B)(B^T+C) = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 8 \\ 6 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & 20 & 6 \\ 30 & 19 & 9 \\ 28 & 16 & 18 \end{pmatrix}$$

b) $(A+B)(A+B)^T$

c) $A(B^T+C)$

d) $(B^T+C)A$

10. Vypočítejte:

a) $A^2 - A - E$, pro $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Řešení:

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 12 & 8 & 0 \\ 10 & 17 & 8 & 14 \\ 22 & 26 & 20 & 10 \\ 8 & 3 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^2-A=\begin{pmatrix}3&12&8&0\\10&17&8&14\\22&26&20&10\\8&3&6&-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2&0&4\\3&1&2&0\\2&5&3&1\\-1&2&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&10&8&-4\\7&16&6&14\\20&21&17&9\\9&1&5&-1\end{pmatrix}$$

$$(A^2-A)-E=\begin{pmatrix}2&10&8&-4\\7&16&6&14\\20&21&17&9\\9&1&5&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&10&8&-4\\7&15&6&14\\20&21&16&9\\9&1&5&-2\end{pmatrix}$$

b) A^3-3A^2-5A, pro $A=\begin{pmatrix}1&1&0&3\\1&3&2&0\\0&5&-1&2\\2&0&0&4\end{pmatrix}$

11. Dokažte, že pro všechna $n\in\mathbb{Z}^+$ platí

a)

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}1&n&\frac{n(n-1)}{2}\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}$$

(Horák, 2002)

Důkaz. Důkaz tvrzení provedeme pomocí matematické indukce.

1. Pro $n=1$:

$$L=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}^1=\begin{pmatrix}1&1&\frac{1(1-1)}{2}\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=P$$

2. Předpokládejme, že $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}1&n&\frac{n(n-1)}{2}\\0&1&n\\0&0&1\end{pmatrix}$, platí pro $n\geq 1$ (indukční předpoklad).

   Dokážeme, že tvrzení platí pro $n+1$, tj. že platí

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}^{n+1}=\begin{pmatrix}1&n+1&\frac{n(n+1)}{2}\\0&1&n+1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

$$\text{Pak} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{n} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tedy tvrzení platí pro každé $n \in \mathbb{Z}^+$.

□

b) $$\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{n} = \begin{pmatrix} 1 & na & \frac{nab}{2}(n-1) + nc \\ 0 & 1 & nb \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(Horák, 2002)}$$

12. Nalezněte, pokud to lze, alespoň tři matice A typu $(2,2)$, tak aby platilo

a) $A^2 = O_2$

b) $A^2 = E_2$

c) $A^2 = A$

(Olšák, 2013)

13. Nalezněte k matici A její inverzní matici A^{-1} pomocí Jordanovy metody a elementárních řádkových úprav. Výsledek ověřte pomocí Definice 1.4.1 inverzní matice.

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & 0 & -14 & 5 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 14 & -5 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Hledanou inverzní maticí je matice $A^{-1} = \begin{pmatrix} 14 & -5 & 2 & -5 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ -7 & 3 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ověření:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 & -5 & 2 & -5 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ -7 & 3 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

14. Nalezněte k matici A její inverzní matici A^{-1} pomocí Jordanovy metody a elementárních sloupcových úprav.

a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & -8 & -3 \\ \hline 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 8 & -3 \\ \hline 1 & 3 & 2 & 7 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -1 \\ \hline 1 & 3 & 2 & 23 \\ 0 & -2 & -2 & -14 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 4 & -3 & 186 & -23 \\ -2 & 2 & -114 & 14 \\ 0 & 0 & 18 & -2 \\ 0 & 0 & -24 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 2 & -3 & 31 & -23 \\ -1 & 2 & -19 & 14 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \end{array}\right)$$

Tedy

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 31 & -23 \\ -1 & 2 & -19 & 14 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 & -6 \\ -4 & -1 & 6 & -10 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(Eliáš, 1985)

15. Nalezněte adjungovanou matici A^* k matici A.

a)
$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 & 2 \\ 10 & 1 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix}
\begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
-\begin{vmatrix} 10 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 10 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 10 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
\begin{vmatrix} 10 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 10 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 10 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
-\begin{vmatrix} 10 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 10 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 10 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}
\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

16. Určete A^{-1} pomocí adjungované matice A^*.

a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Nalezneme adjungovanou matici A^*.

$$A^* = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

2. Nalezneme determinant matice A např. pomocí Sarusova pravidla.

$$detA = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (6+0+1) - (0+4+1) = 2$$

3. Pro matici A^{-1} pak platí: $A^{-1} = \frac{1}{detA}.A^*$, tj. $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(Dvořáková, 2016)

17. Pro matice A, B určete součin $A^{-1}B^{-1}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

(Šimsová, 2009)

18. Vypočítejte matici $X = 3A^T.2(A - E)^{-1}$ pro

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

19. Ověřte, že pro zadanou matici $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

platí rovnost $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

20. Nalezněte matici přechodu A od báze M k bázi M', jestliže

a) $M = \{(2,-3),(-1,1)\} = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}\}$,
   $M' = \{(1,0),(0,-2)\} = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}\}$

jsou báze vektorového prostoru $\mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$, kde $\vec{u_1} = (2,-3)$, $\vec{u_2} = (-1,1)$, $\vec{v_1} = (1,0)$, $\vec{v_2} = (0,-2)$.

Podle Definice 1.4.3 máme:

$\vec{v_1} = a_{11}\vec{u_1} + a_{21}\vec{u_2}$

$\vec{v_2} = a_{12}\vec{u_1} + a_{22}\vec{u_2}$, tj.

$(1,0) = a_{11}(2,-3) + a_{21}(-1,1)$

$(0,-2) = a_{12}(2,-3) + a_{22}(-1,1)$

Rozepsáním těchto rovností dostaneme dvě soustavy lineárních rovnic se stejnou maticí soustavy, které můžeme řešit zároveň.

$1 = 2a_{11} - a_{21} \qquad 0 = 2a_{12} - a_{22}$

$0 = -3a_{11} + a_{21} \qquad -2 = -3a_{12} + a_{22}$

Tedy

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right)$$

a $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ je hledanou maticí přechodu.

b) $M = \{(1,2,1),(2,-1,3),(-2,3,2)\}$,
$M' = \{(-5,9,2),(6,-10,5),(-1,2,9)\}$

Při hledání matice přechodu A využijeme algoritmus za Větou 1.4.7. Uvažujme standardní bázi S. Souřadnice vektorů obou bází vzhledem k bázi S tvoří následující blokovou matici, pro kterou platí úvaha z poznámky za Větou 1.4.4, tedy máme:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & -5 & 6 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 9 & -10 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 & 5 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & -5 & 6 & -1 \\ 0 & 5 & -7 & -19 & 22 & -4 \\ 0 & -1 & -4 & -7 & 1 & -10 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & -5 & 6 & -1 \\ 0 & 5 & -7 & -19 & 22 & -4 \\ 0 & 0 & -27 & -54 & 27 & -54 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & -5 & 6 & -1 \\ 0 & 5 & -7 & -19 & 22 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & -5 & 15 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Hledaná matice přechodu A má tvar $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

c) $M = \{(1,2,0,0),(0,1,1,0),(1,0,0,-1),(1,1,-1,1)\}$,
$M' = \{(2,2,0,0),(3,3,-1,0),(2,4,0,1),(2,3,1,-1)\}$

(Horák, 2002)

21. K bázím M a M' z předchozích příkladů nalezněte matici přechodu B od báze M' k bázi M.

a) $M = \{(2,-3),(-1,1)\}$
$M' = \{(1,0),(0,-2)\}$

b) $M = \{(1,2,1),(2,-1,3),(-2,3,2)\}$
$M' = \{(-5,9,2),(6,-10,5),(-1,2,9)\}$

Známe bázi M a M', dále známe matici přechodu A od báze M k bázi M',

tj. matici $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Nyní podle Věty 1.4.6 stačí nalézt matici inverzní k matici A, kde $B \sim A^{-1}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & 3 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 8 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

Hledanou maticí přechodu od báze M' k bázi M je matice $B = \begin{pmatrix} 8 & 5 & -1 \\ 6 & 4 & -1 \\ -5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

c) $M = \{(1,2,0,0),(0,1,1,0),(1,0,0,-1),(1,1,-1,1)\}$,
$M' = \{(2,2,0,0),(3,3,-1,0),(2,4,0,1),(2,3,1,-1)\}$

22. Jsou dány dvě báze M a M' a souřadnice vektoru $\vec{x}$ vzhledem k bázi M. Najděte souřadnice vektoru $\vec{x}$ vzhledem k bázi M', jestliže

a) $M = \{(1,1,1),(2,-1,2),(3,1,-1)\}$, $M' = \{(1,0,0),(-1,0,2),(0,1,1)\}$
$\{\vec{x}\}_M = (4,2,-2)$
K řešení využijeme vztah $\{\vec{x}\}_M = \{\vec{x}\}_{M'} A^T$ z poznámky za Větou 1.4.6.

I. Nejprve nalezneme matici přechodu A od báze M k bázi M'.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -3 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 8 & 0 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 6 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -3 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 24 & 0 & 0 & -2 & 22 & 26 \\ 0 & 6 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -3 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{12} & \frac{11}{12} & \frac{13}{12} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right),$$

Tedy $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{12} & \frac{11}{12} & \frac{13}{12} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$

Protože hledáme souřadnice vektoru $\vec{x}$ vzhledem k bázi M', tak platí $\{\vec{x}\}_{M'} = \{\vec{x}\}_M (A^{-1})^T$. Budeme tedy hledat matici A^{-1}.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -\frac{1}{12} & \frac{11}{12} & \frac{13}{12} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 11 & 13 & 12 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & -3 & -1 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 11 & 13 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 12 & 12 & 6 & 0 \\ 0 & 8 & 12 & 12 & 0 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 11 & 13 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -48 & -48 & 48 & -48 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 11 & 0 & -1 & 13 & -13 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 0 & -2 & -7 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{7}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Tedy

$$\{\vec{x}\}_{M'} = \{\vec{x}\}_M . (A^{-1})^T = (4, 2, -2). \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = (7, 5, 0)$$

II. Nalezneme matici přechodu B od báze M' k bázi M.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{7}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Z poznámky za Větou 1.4.6 máme:

$$\{\vec{x}\}_{M'} = \{\vec{x}\}_M.B^T = (4, 2, -2). \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = (7, 5, 0)$$

III. Ze vztahu $\{\vec{x}\}_M = \{\vec{x}\}_{M'} A^T$ plyne $\{\vec{x}\}_{M'}^T = A^{-1}\{\vec{x}\}_M^T$. Podle poznámky za Větou 1.4.4 pak snadno určíme $\{\vec{x}\}_M^T$:

$$(A\,|\,\{\vec{x}\}_M^T) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{1}{12} & \frac{11}{12} & \frac{13}{12} & 4 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & 2 \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 11 & 13 & 48 \\ 1 & 1 & -1 & 12 \\ 1 & -3 & -1 & -8 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 11 & 13 & 48 \\ 0 & 12 & 12 & 60 \\ 0 & 8 & 12 & 40 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 11 & 13 & 48 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 11 & 13 & 48 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 11 & 0 & 48 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Tedy $\{\vec{x}_{M'}\} = (7, 5, 0)$.

b) $M = \{(2, 1), (3, 2)\}$, $M' = \{(2, 2), (-1, 0)\}$

$\{\vec{x}_M\} = (1, 3)$

c) $M = \{(1, 1), (2, -1)\}$, $M' = \{(1, 0), (-1, 2)\}$

$\{\vec{x}_M\} = (4, 2)$

d) $M = \{(3,1,-1),(2,3,1),(1,-2,-3)\}$, $M' = \{(1,2,2),(1,3,5),(1,2,3)\}$

$\{\vec{x}_M\} = (2,0,-1)$

(Olšák, 2013)

23. Z maticových rovnic vyjádřete neznámou matici X.

a) $3A + 2X = B - 4C$

Řešení:

$3A + 2X = B - 4C$

$2X = B - 4C - 3A$

$X = \frac{1}{2}(B - 4C - 3A)$

b) $XA - A = E$

Řešení:

$XA - A = E$

$XA = E + A$

$X = (E + A)A^{-1}$

c) $3A^T - \frac{1}{2}X = 2B$

d) $3X + E = 2A$

e) $B^T - 2X + 3E = A^T - B$

f) $AXA^{-1} = E$

g) $AX = BX + C$

h) $AX + X + A = O$

i) $X = XA + B$

j) $XA = (X - B)B$

k) $XA - E = 2X + A$

(Dvořáková,2016)

24. Nalezněte matici X.

a) $BX = BAC$ pro $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

Řešení:

$BX = BAC$

$X = B^{-1}BAC$, tedy $X = AC = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 14 \\ 7 & -17 \end{pmatrix}$

b) $BXA = C$ pro $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

c) $XA = B$ pro $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

d) $A^T XB = C$ pro $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -3 & -5 & -7 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}$

e) $XA = B - 3E$ pro $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

f) $A^T AX = A^T B$ pro $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 7 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

(Šimsová, 2009)

25. Najděte matici A lineárního zobrazení φ, definovaného takto:
$\forall f(x) : \varphi(f(x)) = f'(x)$ vzhledem k bázím M a M', jestliže:

a) $\varphi : \mathbb{R}_4[x] \to \mathbb{R}_3[x]$

$M = \{x, x^2 + x, 2x^2 - 1, x^3 + x^2, x^4 + 3x\}$ je báze prostoru $\mathbb{R}_4[x]$.

$M' = \{1 - x, x^3 - x + 3, -x^2 - x, x^3 - 2x + 1\}$ je báze prostoru $\mathbb{R}_3[x]$.

b) $\varphi : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_2[x]$

$M = \{x+2, x^2, x^2+1, x^3-3x\}$ je báze prostoru $\mathbb{R}_3[x]$.

$M' = \{1, x+1, x^2\}$ je báze prostoru $\mathbb{R}_2[x]$.

c) $\varphi : \mathbb{R}_4[x] \to \mathbb{R}_3[x]$

$M = \{3, 2x+1, x^2+x, x^3-x, x^4\}$ je báze prostoru $\mathbb{R}_4[x]$.

$M' = \{2, 3x+1, 2x^2-2, x^3\}$ je báze prostoru $\mathbb{R}_3[x]$.

Řešení:

a) $\varphi : \mathbb{R}_4[x] \to \mathbb{R}_3[x]$

$M = \{x, x^2+x, 2x^2-1, x^3+x^2, x^4+3x\}$ je báze prostoru $\mathbb{R}_4[x]$.

$M' = \{1-x, x^3-x+3, -x^2-x, x^3-2x+1\}$ je báze prostoru $\mathbb{R}_3[x]$.

Postupovat při hledání matice lineárního zobrazení φ budeme pomocí algoritmu uvedeného v poznámce za Větou 1.6.8.

Nejprve nalezneme obrazy vektorů báze M v zobrazení φ.

$\varphi(x) = 1$

$\varphi(x^2+x) = 2x+1$

$\varphi(2x^2-1) = 4x$

$\varphi(x^3+x^2) = 3x^2+2x$

$\varphi(x^4+3x) = 4x^3+3$

Nalezneme souřadnice obrazů vektorů báze M ve standardní bázi $S = \{1, x, x^2, x^3\}$.

$\{\varphi(x)\}_S = (1,0,0,0)$

$\{\varphi(x^2+x)\}_S = (1,2,0,0)$

$\{\varphi(2x^2-1)\}_S = (0,4,0,0)$

$\{\varphi(x^3+x^2)\}_S = (0,2,3,0)$

$\{\varphi(x^4+3x)\}_S = (3,0,0,4)$

Nalezneme souřadnice vektorů báze M' vzhledem k bázi S.

$\{1-x\}_S = (1,-1,0,0)$

$\{x^3-x+3\}_S = (3,-1,0,1)$

$\{-x^2-x\}_S = (0,-1,-1,0)$

$\{x^3-2x+1\}_S = (1,-2,0,1)$

Do sloupců matice zapíšeme souřadnice vektorů báze M' vzhledem k bázi S a vpravo od svislé čáry napíšeme do sloupců souřadnice obrazů vektorů báze M vzhledem k bázi S. Matici pak upravíme na tvar $(E\,|\,A)$, kde A je matice lineárního zobrazení φ vzhledem k bázím M a M'.

$$\left(\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -2 & 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 1 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 1 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 1 & 3 & 4 & 2 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 1 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 3 & 4 & -1 & -5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|ccccc} 3 & 9 & 0 & 0 & 4 & 6 & 4 & -1 & 4 \\ 0 & 6 & -3 & 0 & 2 & 6 & 8 & 7 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -1 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|ccccc} 3 & 9 & 0 & 0 & 4 & 6 & 4 & -1 & 4 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 2 & 6 & 8 & -2 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -1 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 3 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & 2 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 1 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -1 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -1 & -\frac{8}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{17}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 1 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -1 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{array}\right)$$

Hledanou maticí A lineárního robrazení φ je $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -3 & -8 & 2 & -17 \\ 1 & 3 & 4 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & 0 \\ -1 & -3 & -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Kapitola 3

Výsledky

1.

II. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 44 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

III. $A = \begin{pmatrix} 3i & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 15 & 8i & 0 \\ 3 & i & 3i \end{pmatrix}$

2.

II. $A = \begin{pmatrix} 0 & -16 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -12 & 0 \end{pmatrix}$

III. $A = \begin{pmatrix} 9-17i & 1-6i & 0 \\ 0 & -i & 2 \\ 0 & 0 & 1-6i \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ i & -1-i & 0 \\ 3+i & -3+i & -1+3i \end{pmatrix}$

3.

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & \frac{17}{2} \\ \frac{17}{2} & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

4.

b) $A = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x & \cos x & \sin x \\ 0 & (\sin x)^2 & \sin 2x & 1 \\ 0 & 0 & \sin 2x(2 - 3\cos x) & 1 - 3\cos x \end{pmatrix}$, tedy $h(A) = 3$.

c) $A = \begin{pmatrix} 2i & 1 & 2+i \\ 0 & -1 & 4+7i \\ 0 & 0 & 10-2i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, tedy $h(A) = 3$

5.

b) $h(A) = 2$ pro $(a = 3,\, b = 2) \vee (a = -5,\, b = 2)$.
Nebo $h(A) = 3$ pro $(a \neq 3, a \neq -5,\, b \neq 2)$.

c) $h(A) = 3$ pro každé $a, b \in \mathbb{R}$.

d) $h(A) = 2$ pro $(a = 0,\, b = 3)$.
Nebo $h(A) = 3$ pro $(a = 0,\, b \neq 3) \vee (a \neq 0,\, b = 3)$.
Nebo $h(A) = 4$ pro $(a \neq 0,\, b \neq 3)$.

6.

b) $AB = \begin{pmatrix} 0 & 81 & 39 & 5 \\ 5 & 42 & 3 & -15 \end{pmatrix}$, BA neexistuje

c) $AB = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 15 & 17 & 37 \\ 10 & 13 & 15 & 17 & 34 \\ 4 & 1 & 4 & 11 & 21 \\ 9 & 7 & 6 & 13 & 28 \end{pmatrix}$, BA neexistuje

d) $AB = \begin{pmatrix} 55 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 3 & 6 & 9 & 12 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 25 \end{pmatrix}$

e) $AB = \begin{pmatrix} -2+4i & -1+3i & 2+2i \\ 6+8i & 5+5i & 6-2i \\ 3-i & 2-i & -2i \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} -2+4i & 5+5i & -2i \end{pmatrix}$

7.

b) $h(A) = 2$, $h(B) = 3$ a $h(AB) = 3$, součin BA neexistuje

c) $h(A) = 2$, $h(B) = 2$, $h(AB) = 2$ a $h(BA) = 2$

d) $h(A) = 2$, $h(B) = 2$ a $h(BA) = 2$, součin BA neexistuje

8.

b) $ABC = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 6 & 19 & 2 \\ 3 & -1 & 57 & -35 & 1 \end{pmatrix}$

c) $ABC = \begin{pmatrix} 2+4i & -7+5i & 8+12i \\ -19-3i & -4+i & 14+6i \\ -1+3i & -3+7i & 14+4i \end{pmatrix}$

9.

b) $(A+B)(A+B)^T = \begin{pmatrix} 76 & 59 & 44 \\ 59 & 73 & 50 \\ 44 & 50 & 56 \end{pmatrix}$

c) $A(B^T + C) = \begin{pmatrix} 24 & 16 & -3 \\ 5 & 5 & 3 \\ 11 & 7 & 9 \end{pmatrix}$

d) $(B^T + C)A = \begin{pmatrix} 20 & 2 & -12 & 18 \\ 5 & 2 & -6 & 15 \\ 17 & 4 & -9 & 8 \\ 8 & 0 & -9 & 25 \end{pmatrix}$

10.

b) $A^3 - 3A^2 - 5A = \begin{pmatrix} 13 & 13 & 0 & 28 \\ 21 & 9 & 14 & 27 \\ 4 & 39 & -19 & 45 \\ 4 & 10 & 4 & 32 \end{pmatrix}$

11.

b) *Důkaz.* Tvrzení dokážeme opět pomocí matematické indukce.

1. pro $n = 1$:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^1, \ P = \begin{pmatrix} 1 & a & \frac{ab}{2}(1-1)+c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ tj. } L = P$$

2. Předpokládejme, že $\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & na & \frac{nab}{2}(n-1)+nc \\ 0 & 1 & nb \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, platí pro $n \geq 1$ (indukční předpoklad).

Dokážeme, že tvrzení platí pro $n+1$, tj. že platí

$$\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & (n+1)a & \frac{(n+1)ab}{2}n+(n+1)c \\ 0 & 1 & (n+1)b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pak $\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^1 =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & na & \frac{nab}{2}(n-1)+nc \\ 0 & 1 & nb \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (n+1)a & \frac{(n+1)ab}{2}n+(n+1)c \\ 0 & 1 & (n+1)b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tedy tvrzení platí pro každé $n \in \mathbb{Z}^+$. □

12.

a) Např.: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

b) Např.: $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}0&2\\\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}$

c) Např.: $A=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}2&-1\\2&-1\end{pmatrix}$

13.

b) $A^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1\\3&-2\end{pmatrix}$

c) $A^{-1}=\begin{pmatrix}-1&2&-1\\-2&1&0\\-3&-1&2\end{pmatrix}$

d) $A^{-1}=\begin{pmatrix}3&-\frac{5}{3}&\frac{1}{3}\\-4&\frac{5}{2}&-\frac{1}{2}\\1&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

e) $A^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1&1&3\\3&-2&3&4\\0&0&0&1\\-1&1&-1&-2\end{pmatrix}$

14.

b) $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-3&1&0\\9&-3&1\end{pmatrix}$

c) $A^{-1}=\begin{pmatrix}3&0&1&0\\-2&2&-2&1\\0&2&-3&2\\-1&1&-2&1\end{pmatrix}$

d) $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\-1&1&0&0&0\\0&-1&1&0&0\\-5&4&-1&1&-1\\1&-1&-1&0&1\end{pmatrix}$

15.

b) $A^* = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & -7 & -1 \end{pmatrix}$

c) $A^* = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 6 & 4 & -8 \end{pmatrix}$

d) $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

e) $A^* = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

16.

b) $A^{-1} = -\frac{1}{18} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$

c) $A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

d) A^{-1} neexistuje, protože $detA = 0$

e) $A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

17. $A^{-1}B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\frac{5}{3} \\ 2 & -2 & \frac{4}{3} \\ 5 & -3 & \frac{17}{3} \end{pmatrix}$

18. $X = \begin{pmatrix} 78 & 0 & -30 & 0 \\ 0 & 78 & 0 & 0 \\ -30 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

19. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

20.

b) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

21.

b) $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

c) $B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

22.

b) $\{\vec{x}_{M'}\} = \frac{1}{2}(7, -8)$

c) $\{\vec{x}_{M'}\} = (9, 1)$

d) $\{\vec{x}_{M'}\} = (2, -6, 9)$

23.

c) $X = 6A^T - 4B$

d) $X = \frac{1}{3}(2A - E)$

e) $X = \frac{1}{2}(B^T + 3E - A^T + B)$

f) $X = E$

g) $X = (A - B)^{-1}C$

h) $X = -(A + E)^{-1}A$

i) $X = B(E - A)^{-1}$

j) $X = B^2(B - A)^{-1}$

k) $X = (A + E)(A - 2E)^{-1}$

24.

b) $X = B^{-1}CA^{-1} = \begin{pmatrix} 24 & 13 \\ -34 & -18 \end{pmatrix}$

c) $X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

d) $X = (A^T)^{-1}CB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

e) $X = (B - 3E)A^{-1} = -\frac{1}{16}\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 14 & 4 \end{pmatrix}$

f) $A^TA = C$, kde C je čtvercová matice, která by měla být regulární. Dostáváme vztah $CX = A^TB$, tedy $X = C^{-1}A^TB = \frac{1}{1083}\begin{pmatrix} -378 \\ 402 \end{pmatrix}$

25.

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{6} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Závěr

Cílem bakalářské práce bylo vytvoření sbírky úloh z teorie matic, která bude obsahovat přehledně zpracovanou teorii, vzorově řešené příklady a sbírku úloh s výsledky. Domnívám se, že stanovený cíl byl splněn. Vytvořila jsem sbírku, která obsahuje téměř 100 příkladů, z nich je 23 vzorově vyřešeno a u ostatních jsou uvedeny výsledky. Více než 40 příkladů jsem vymyslela sama a další jsem převzala z literatury uvedené v seznamu literatury. Všechny příklady jsem samostatně spočítala a výsledky jsou tedy autorským řešením.

Díky bakalářské práci jsem si prohloubila a upevnila znalosti z oblasti lineární algebry týkajících se matic. Významným přínosem, pro mě osobně, bylo velké zdokonalení se v psaní matematických textů v programu LaTeX, ve kterém je celá práce napsána.

Sbírka úloh z teorie matic by se mohla využít při výuce rozšiřujícího učiva matematiky na středních školách, především gymnáziích, v rámci hodin matematických seminářů a dále v prvních ročnících vysokých škol zaměřených na matematiku, informatiku nebo jiné technické obory, kde jsou znalosti z teorie matic žádoucí.

Literatura

[1] BEČVÁŘ, J. *Lineární algebra* 1. vyd. Praha, 2000. ISBN 80-85863-61-8.

[2] BLAŽEK, J. *Algebra a teoretická aritmetika* Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1983.

[3] DVOŘÁKOVÁ, S. a BORŮVKOVÁ, J. *Lineární algebra: příklady* 2. rozšířené vydání. Jihlava: Vysoká škola polytechnická Jihlava, 2016. ISBN 978-80-88064-27-5.

[4] ELIÁŠ, J., HORVÁTH, J. a KAJAN, J. *Zbierka úloh z vyššej matematiky 1. časť.* 6. vyd. Bratislava: Alfa, 1985.

[5] HORÁK, P. *Cvičení z algebry a teoretické aritmetiky I.* Vyd.2. Brno: Masarykova univerzita, 2002. ISBN 80-210-1853-4.

[6] OLŠÁK, P. *Úvod do algebry, zejména lineární* Praha: České vysoké učení technické, 2013. ISBN 978-80-01-05291-4

[7] OLŠÁK, P. *Lineární algebra* [online]. Praha, Verze textu 31.7.2007 [cit. 28. 3. 2022]. Dostupné z: http://petr.olsak.net/ftp/olsak/linal/linal.pdf

[8] PROCHÁZKA, L., NĚMEC P., BICAN L., KEPKA T. *Algebra* Praha: Academia, 1990. ISBN 80-200-0301-0.

[9] ŠIMSOVÁ, J. *Sbírka úloh z matematiky: lineární algebra* 2. vyd. Ústí nad Labem: Univerzita J.E. Purkyně v Ústí nad Labem, 2009. ISBN 978-80-7414-184-3.

[10] AUTOR NEZNÁMÝ. *I. ČÁST Sbírka úloh z lineární algebry a geometrie* [online]. Brno, 2021 [cit. 17. 3. 2022]. Dostupné z: https://is.muni.cz/el/sci/podzim2021/M1110/um/sbirky_prikladu/sbirky_prikladu_pro_fi/la2_sbirka.pdf