

Pedagogická fakulta
Jihočeské univerzity
v Českých Budějovicích



ARCHIMÉDES

Diplomová práce

Vypracoval: Petr Lazar
Vedoucí práce: RNDr. Pavel Leischner, PhD.

České Budějovice, 2007

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval
samostatně s použitím uvedené literatury.

V Českých Budějovicích, 20. 4. 2007.

Petr Lazar

Váženému panu RNDr. Pavlu

Leischnerovi, PhD. vřele děkuji za

odborné vedení této práce.

ANOTACE

Název: Archimédes

Vypracoval: Petr Lazar

Vedoucí práce: RNDr. Pavel Leischner, PhD.

Klíčová slova: Archimédes, Řecká matematika, historie matematiky, dějiny matematiky, matematika ve starověku, geometrie

Popis: Práce podává komplexní přehled o Archimédovi, jeho životě, díle a matematické invenci. Předkládá náměty na využití Archimédovy metody objevování matematických a geometrických zákonitostí ve studiu školské matematiky. Práce obsahuje příklady inspirované Archimédovou prací (vč. řešení), které je možno využít ve výuce, jak na středních, tak na základních školách. Příklady navíc předkládají alternativní způsoby řešení (které využívají elementárních matematických znalostí) obecně známých geometrických problémů – jsou proto vhodné pro využití např. v zájmové matematice.

ANNOTATION

Title: Archimedes

Author: Petr Lazar

Supervisor: RNDr. Pavel Leischner, PhD.

Key words: Archimedes, Greek mathematics, history of mathematics, mathematics in antiquity, geometry

Description: This thesis purveys complex information about Archimedes' life, his work and mathematical inventiveness. It puts suggestions how to use Archimedes' method of discovery of mathematical and geometrical relations in study of mathematics. The thesis includes problems and exercises inspired by Archimedes (including solutions). It is possible to use it in schooling on primary or secondary schools. Exercises put forward alternative ways of solution generally known geometrical problems. This solutions use elementary mathematical knowledge and they are suitable to use it in interest mathematics.

Obsah

1. Řecká matematika.....	6
2. Archimédes.....	15
2.1 Archimédovo rodiště Syrakusy.....	19
2.2 Archimédův život.....	22
2.3 Archimédovo dílo.....	26
2.3.1 O rovnováze ploch.....	35
2.3.2 O kvadratuře paraboly.....	38
2.3.3 O metodě.....	49
2.3.4 O kouli a válci.....	50
2.3.5 O spirálách.....	53
2.3.6 O konoidech a sféroidech.....	57
2.3.7 O plovoucích tělesech.....	58
2.3.8 Měření kruhu.....	61
2.3.9 Počítání písku.....	68
2.3.10 Kratochvíle.....	73
2.3.11 Poučky.....	74
2.3.12 Problém dobytka.....	76
2.3.13 Poloprávidelné mnohostěny.....	77
2.4 Archimédova statika v geometrii, teorie hmotných bodů..	79
2.5 Další úlohy inspirované Archimédem.....	86
3. Závěr.....	94
Literatura.....	95
Přílohy.....	96

1. Řecká matematika

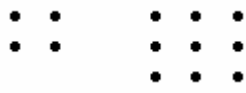
Společně s řeckou kosmologií a kosmogonií (přírodní filosofií) se začalo ve starém Řecku rodit i matematické myšlení. Některé matematické poznatky Řekové převzali od Egyptanů, některé od národů Středomoří, zejména starověké Mezopotámie. V 6. století př. n. l. je začali moderním způsobem přetvářet a rozvíjet.

Thales, první z řeckých filozofů, je považován i za prvního řeckého matematika. V Egyptě prý pomocí podobnosti trojúhelníků měřil výšku pyramid; nejspíš měřil délky stínů pyramid v okamžiku, kdy stín gnomonu (masivu pyramidy) byl stejně dlouhý jako jeho výška. Roku 585 vzbudil obdiv svou úspěšnou předpovědí zatmění Slunce; vycházel patrně z periodicity zatmění, která byla objevena ve staré Mezopotámii (jde o tzv. periodu saros – cyklus trvající 18 let a necelých 11 dnů, ve kterém se opakuje 29 zatmění Slunce a 41 zatmění Měsíce, ve stejném pořadí a velikosti). Připisuje se mu i věta o pravoúhlých trojúhelnících nad průměrem kružnice, která je dodnes jako tzv. Thaletova věta jedním z elementárních poznatků školské geometrie.

Velký rozvoj řecké matematiky nastal v 6. století pod vlivem Pythagora ze Samu, kterému je připisováno znění i důkaz proslulé Pythagorovy věty, dalšího tvrzení, které jsme se učili ve škole. Věta však byla známa a užívána v Mezopotámii asi o tisíc let dříve; z pramenů víme, že již staří Babyloňané určovali pomocí „Pythagorovy věty“ např. množství osevu potřebného na pole ve tvaru rovnoramenného trojúhelníka s danými stranami, hledali horizontální posunutí dolního konce svislého trámu o dané délce, při dané velikosti poklesu jeho vrchního konce. Bohužel nevíme, jak vypadal původní důkaz této slavné formule. První důkaz, který se dochoval, je až z přelomu 4. a 3. století př.n.l. Během dalších staletí a tisíciletí byla tato věta dokázána mnoha různými způsoby. Některé důkazy mají charakter hříček (čtverec nad přeponou pravoúhlého trojúhelníku se vhodným způsobem „rozstříhá“ a ze vzniklých dílů se složí čtverce nad oběma odvěsnami).

Pythagorejská škola věnovala velkou pozornost problematice přirozených čísel a jejich poměrů. Pythagorejci znázorňovali přirozená čísla pomocí kaménků či

mušliček rozložených do pravidelných geometrických tvarů (čtverců, obdélníků, trojúhelníků,..., ale i jehlanů apod.) a zkoumali jejich vlastnosti. Zobrazovali čísla jako body, které seskupovali do geometrických obrazců. Tak vznikl pojem „figurální číslo“, ve kterém se těsně odráží souvislost mezi pojmy „číslo“ a „geometrická prostorovost“. Např. čtvercová čísla 4, 9, ... se zobrazovala



geometricky:

Obdobně i „trojúhelníková čísla“ byla znázorňována pomocí bodů [7]. Popsali i způsob vzniku tzv. pythagorejských trojic, tj. trojic přirozených čísel x, y, z pro která je $x^2 + y^2 = z^2$. Tento vztah popisuje situaci, kdy součtem dvou čtvercových čísel je další čtvercové číslo; přitom jsou x, y, z délky stran pravoúhlého trojúhelníka (problematika pythagorejských trojic čísel byla rovněž známa ve staré Mezopotámii, svědčí o tom snad nejznámější babylonská tabulka označená Plimpton 322, která obsahuje 15 pravoúhlých trojúhelníků s celočíselnými stranami).

Pomocí poměrů přirozených čísel popsali pythagorejci základní pojmy a vlastnosti dělitelnosti (dělitel a násobek, čísla soudělná a nesoudělná atd.), vyjádřili aritmetický, geometrický a harmonický průměr ($\frac{1}{2}(a+b)$, $\sqrt{ab}$, $\frac{2ab}{(a+b)}$) a popsali

hudební intervaly. Oktáva vznikne tak, že strunu nástroje nebo vzduchový sloupec píšťaly zkrátíme na polovinu, odpovídá jí tedy poměr 1 : 2. Podobně vznikne kvinta – 2 : 3, kvarta – 3 : 4, sekunda – 8 : 9 atd. Tak je pomocí poměrů přirozených čísel vybudováno tzv. pythagorejské ladění (dnes se již prakticky neužívá, přešlo se k tzv. temperovanému ladění). Hudební intervaly byly znázorňovány na čtveřici čísel 6, 8, 9, 12; jejich poměry totiž dávají právě oktávu, kvintu, kvartu, sekundu; navíc je číslo 9 aritmetickým průměrem čísel 6 a 12 a číslo 8 jejich harmonickým průměrem. Matematický popis hudebních intervalů vnášeli pythagorejci i do svého pohledu na vesmír. Poměry průměrů nebeských sfér byly podle nich rovny právě některým „hudebním poměrům“, vesmír byl „naladěný“, a tak bylo dosaženo tzv. harmonie kosmu. Pohyb nebeských sfér vesmír ozvučoval, vznikala tak dokonalá hudba, tzv. hudba sfér. Tato dvě známá slovní spojení jsou tedy pythagorejského původu.

Pythagorejci nejprve předpokládali, že i všechny geometrické vztahy je možno popsat přirozenými čísly a jejich poměry. Domnívali se např., že každé dvě úsečky

jsou souměřitelné, tj. ke každým dvěma úsečkám a, b existuje jakási úsečka c , pro kterou $a = m \cdot c$ a $b = n \cdot c$ (poměr délek úseček a, b je tedy roven poměru $m : n$ dvou přirozených čísel). Potom jsou rovněž každé tři úsečky souměřitelné; podle těchto představ např. každému pravoúhlému trojúhelníku přísluší pythagorejská trojice čísel. Dnes víme, že každé pythagorejské trojici přísluší pravoúhlý trojúhelník. Naopak to však neplatí, existují pravoúhlé trojúhelníky, ke kterým neexistují odpovídající pythagorejské trojice celých čísel. Pythagorejská škola tak v 6. století postavila celou matematiku na aritmetický základ.

Matematické učení o harmonii, dovedené logicky do důsledku, přineslo někdy v 5. století ideu existence nesouměřitelnosti. Pythagorejci se přesvědčili, že jejich aritmetické pojetí matematiky – možnost měřit všechny věci jen celými čísly – je mylné. Dokázali totiž, že existují úsečky, které souměřitelné nejsou. Např. strana a úhlopříčka čtverce, kde a je strana čtverce a u jeho úhlopříčka, platí $\frac{u}{a} = \sqrt{2}$,

analogicky totéž platí pro stranu a úhlopříčku pravidelného pětiúhelníka. Zvolíme-li nějakou úsečku e za jednotku délky, budou mít úsečky, které jsou s úsečkou e souměřitelné, racionální délky, a úsečky, které jsou s úsečkou e nesouměřitelné, iracionální délky (viz poměr strany čtverce a jeho úhlopříčky). Proto se o objevu nesouměřitelnosti často hovoří jako o objevu iracionalit. Bohužel nevíme, jakou cestou k existenci nesouměřitelných úseček Řekové došli a jaké poznatky byly k tomuto objevu využity. Snad byla nejprve objevena nesouměřitelnost strany a úhlopříčky čtverce pomocí Pythagorovy věty a dělitelnosti (tomuto důkazu odpovídá v naší symbolice známý důkaz skutečnosti, že číslo 2 není možno v oboru racionálních čísel odmocnit: $\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2$, z rozkladu na

prvočísla obou stran rovnice vyplývá, že se levá strana nemůže rovnat pravé, proto $\sqrt{2}$ nelze vyjádřit jako racionální číslo). Místo Pythagorovy věty mohla být aplikována podobnost trojúhelníků, k důkazu mohly být rovněž využity vlastnosti čtvercových figurálních čísel. Nesouměřitelnost strany a úhlopříčky pravidelného pětiúhelníku mohla být dokázána pomocí podobnosti trojúhelníků a dělitelnosti.

Pythagorejci objev nesouměřitelnosti úzkostlivě tajili, neboť od základů popíral jejich filosofii a výklad všeho existujícího ze zákonů celých čísel. Podle legendy prozradil tajemství nesouměřitelnosti Hippasos z Metapontu, který žil kolem r. 450 př. n. l., a byl za to bohy potrestán – při ztroskotání lodi ho Poseidon utopil.

Objev nesouměřitelnosti úseček ukázal, že přirozená čísla a jejich poměry k popisu geometrického světa nestačí. Proto došlo ke změně charakteru řecké matematiky, aritmetické pojetí ustoupilo a převládlo pojetí geometrické. Jako výchozí matematické veličiny byly místo přirozených čísel vzaty veličiny geometrické, tj. délky, obsahy a objemy. I přirozená čísla byla vyjadřována geometricky jako násobky zvolené jednotkové úsečky. S geometrickými veličinami bylo třeba se naučit pracovat, rozvinula se mimo jiné tzv. řecká geometrická algebra; v geometrické podobě se objevila řada poznatků, které jsme dnes zvyklí vyjadřovat algebraicky (např. rovnost $a(b + c) = ab + ac$ byla znázorněna obdélníkem o stranách a , $b + c$, který je rozdělen na dva obdélníky o stranách a , b , resp. a , c .).

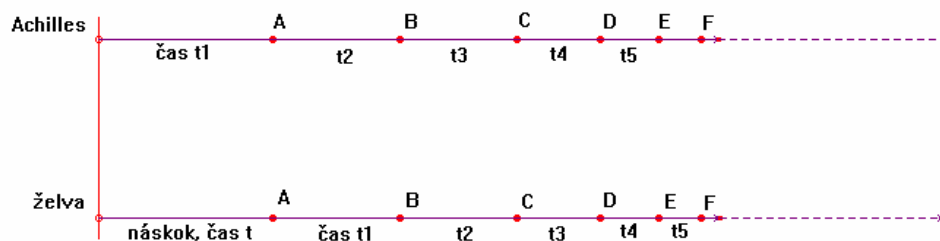
Někdy v 5. století se řeční matematici začali při budování geometrického světa opírat o konstrukce pravítkem a kružítkem. V té době se objevily tzv. klasické úlohy řecké matematiky, kvadratura kruhu, trisekce úhlu, zdvojení krychle, rektifikace kružnice a konstrukce pravidelných mnohoúhelníků. Měly být řešeny právě těmito konstrukcemi. Zformulovat je můžeme takto:

- **kvadratura kruhu:** pravítkem a kružítkem sestavit čtverec, jehož obsah je roven obsahu daného kruhu,
- **trisekce úhlu:** pravítkem a kružítkem sestavit úhel, jehož velikost je rovna třetině velikosti daného úhlu,
- **zdvojení krychle:** pravítkem a kružítkem sestavit hranu krychle, jejíž objem je roven dvojnásobku objemu dané krychle,
- **rektifikace kružnice:** pravítkem a kružítkem sestavit úsečku, jejíž délka je rovna délce dané kružnice,
- **konstrukce pravidelných mnohoúhelníků:** pravítkem a kružítkem sestavit všechny pravidelné n -úhelníky.

Více než dva tisíce let tyto úlohy inspirovaly matematiky k nejrůznějším výsledkům a úvahám. Teprve v 19. století bylo dokázáno, že pravítkem a kružítkem jsou neřešitelné. Přesněji řečeno, neřešitelná je kvadratura kruhu, zdvojení krychle a rektifikace kružnice; trisekci je možno provést jen pro některé úhly a pravidelné n -úhelníky je možno zkonstruovat jen pro některá n (první z nich jsou 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12).

Objev nesouměřitelnosti vyžadoval poměrně náročnou úvahu; svědčí o tom, že řeční matematici pronikli již v 5. století dostatečně hluboko do matematického myšlení, naučili se principům vedení důkazů a ovládli i důkazy sporem.

K rozvoji matematického myšlení přispěl i Zenon z Eleje svými aporiemi o paradoxech pohybu, z nichž nejznámější je „Achilles a želva“ (obr. 1.1). Achilles běží podstatně rychleji než želva, která však má určitý náskok. Než Achilles doběhne na místo, odkud vyběhla želva, má želva opět jakýsi náskok. Než Achilles uběhne tuto vzdálenost, má želva opět náskok atd.



Obr. 1.1 Achilles želvu nikdy nedožene, i přesto, že se vzdálenost mezi nimi stále zmenšuje, a to limitně až k nule.

Podle tehdejších představ řeckých matematiků a filozofů nebylo možno provést nekonečně mnoho úkonů, sečíst nekonečně mnoho veličin, realizovat nekonečně mnoho procesů. Proto Achilles – podle Zenona – želvu nikdy nedostihne. Problémem bylo objevit v úvaze chybu; jiný popis „závodu“ Achillea se želvou totiž Zenon odmítal (na základní škole žáci řeší obdobné problémy, např. jednoduché úlohy o tom, jak rychlejší auto dostihne pomalejší, které má nějaký náskok nebo vyjede dříve. Vedou na lineární rovnice, které se snadno vyřeší).

Důležitou inspirací byl i atomismus Demokrita z Abdér; z jeho matematických výsledků je třeba připomenout důležité zjištění: objem jehlanu a kužele je jednou třetinou objemu odpovídajícího hranolu a válce.

V 5. století dospěli řeční matematici k řadě závažných výsledků. Stále se jim však nedařilo nalézt konstruktivní řešení klasických úloh. Snažili se je proto řešit jinými metodami, věnovali se však i obecněji formulovaným úlohám. Hippokrates z Chiu (asi 450 až 400) se zabýval kvadraturou rovinných útvarů vymezených oblouky kružnic, tzv. měsíčků; sepsal matematický spis „Základy“, který se však nedochoval. Sofista Hippias z Elidy (kolem r. 420 př.n.l.) definoval kinematicky křivku kvadratrix, pomocí níž je možno provádět trisekci úhlů: uvažujeme čtverec $ABCD$, ve kterém se úsečka AB začne rovnoměrně otáčet z polohy AB do polohy AD kolem bodu A a úsečka BC rovnoměrně posouvat z polohy BC do polohy AD , přičemž oba pohyby současně začnou a současně skončí. Průsečík pohybujících se úseček vykreslí křivku kvadratrix. Vychází z bodu B a končí v bodě E , který leží na úsečce AD . Jestliže rameno AX úhlu BAX protíná křivku kvadratrix v bodě Y a kolmice spuštěná z bodu Y na úsečku AB má patu Y' , pak můžeme známým způsobem rozdělit úsečku $Y'B$ na tři stejné části a dělicí body Z'_1, Z'_2 vynést kolmicemi nazpět na křivku kvadratrix. Na ní získáme body Z_1, Z_2 . Polopřímky AZ_1, AZ_2 rozdělují úhel BAX na tři stejné části. Některé body křivky kvadratrix lze zkonstruovat pravítkem a kružítkem, jiné nikoli. Chceme-li kvadratrix nakreslit, musíme použít nějaké křivítko.

K přesnému vymezení pojmů a správné argumentaci napomohli v obecné rovině sofisté, o něco později Sokrates (469 – 399), a hlavně Platon. Ten si matematiky i matematiků velmi vážil, nad jeho Akademií byl prý nápis „Nevstupuj, kdo neovládáš geometrii“. Svou filozofií přispěl i k exaktnímu a idealizovanému chápání matematických objektů a k rozvoji abstrakce. Stýkal se s řadou matematiků ovlivněných ještě pythagorejskou školou; nejvýznamnější z nich byli Archytas z Talentu, Theaitetos z Athén (asi 414 – 369), Eudoxos z Knidu (asi 408 – 347) a bratři Menechmos (kolem 360) a Dinostratos. V té době se matematika a filozofie navzájem podstatně ovlivňovaly. Např. v dialogu „Timaios“ dal Platon vesmír a

čtyři živly (země, voda, vzduch a oheň), ze kterých byl podle tehdejších představ vytvořen svět, do souvislosti s pěti pravidelnými mnohostěny (čtyřstěn, krychle – šestistěn, osmistěn, dvanáctistěn, dvacetistěn). Proto se jim též říká platónská tělesa (pravidelný mnohostěn je těleso, jehož stěnami jsou shodné pravidelné mnohoúhelníky a v jehož vrcholech se stýká stejný počet stran a stejný počet stěn; je možno jim vepsat a opsat sféru).

Řeční matematici se též chtěli vyznat ve světě iracionalit, pokoušeli se hledat různé způsoby, kterými lze iracionality vytvářet. Na přelomu 5. a 4. století ukázal Theodoros z Eukleid (asi 460 – 399), že iracionalit je nekonečně mnoho (svědectví o tom podává Platon ve svém dialogu „Theaitetos nazvaném podle Theodorova žáka Theaiteta). Na jeho výsledky navázal ve 4. století Theaitetos z Athén, který prozkoumal několik typů iracionalit a popsal některé jejich vlastnosti (v současné symbolice jde o iracionální čísla tvaru $\sqrt{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}}$, kde a, b jsou čísla racionální, dále čísla tvaru $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ a $\sqrt{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}} + \sqrt{\sqrt{c} \cdot \sqrt{d}}$, kde součin $\sqrt{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}} \cdot \sqrt{\sqrt{c} \cdot \sqrt{d}}$ je číslo racionální, resp. číslo iracionální tvaru $\sqrt{e}$ atd.). Popsal geometrické konstrukce pěti pravidelných mnohostěnů (platónských těles) a dokázal, že žádné další takové těleso neexistuje.

Ve stejné době pracoval s iracionalitami i Archytas z Tarentu, který přišel s velmi nápaditou stereometrickou konstrukcí umožňující ke dvěma daným veličinám a, b nalézt veličiny x, y , pro které je $a : x = x : y = y : b$. Ve speciálním případě $b = 2a$ tak byla řešena úloha o zdvojení krychle: jestliže je $a : x = x : y = y : 2a$, potom je $x^2 = ay$, $2ax = y^2$, dále $x^4 = a^2 y^2 = 2a^3 x$, a tedy $x^3 = 2a^3$. Krychle, jejíž hrana má délku x , má dvakrát větší objem než krychle s hranou délky a . Opět však nešlo o konstrukci pravítkem a kružítkem.

Menechmos řešil stejný problém v rovině kinematicky; hledané hodnoty x, y získal (v dnešním pojetí) jako souřadnice průsečíku dvou parabol; tehdy se v matematice poprvé objevila kuželosečka (ze vztahů $a : x = x : y = y : b$ snadno získáme rovnice $ay = x^2$ a $bx = y^2$, tj. rovnice dvou parabol). Menechmův bratr Dinostratos studoval křivku kvadratrix a poukázal na jednu její důležitou vlastnost, která má

vztah k rektifikaci kružnice: Označíme-li písmenem o obvod kružnice o poloměru AD strany čtverce z něhož vzniká kvadratrix, je $|AE| : |AD| = |AD| : \frac{1}{4}o$, kde E je bod v němž končí křivka kvadratrix. Položíme-li $|AB| = 1$, je $|AE| = 2/\pi$, tj. v délce $|AE|$ je zakódováno číslo π .

V souvislosti s odklonem od aritmetického pojetí matematiky a rozvojem pojetí geometrického bylo zapotřebí místo teorie poměrů přirozených čísel vybudovat teorii poměrů geometrických veličin (délky, obsahů a objemů). Právě takovou teorii vytvořil ve 4. století př. n. l. Eudoxos z Knidu. Umožnila hovořit o podobnosti geometrických útvarů i v případech, kdy odpovídající úsečky nejsou souměřitelné. Tato Eudoxova teorie poměrů obsahuje základní myšlenku jedné z moderních teorií reálných čísel, které byly vytvořeny v druhé polovině 19. století, tzv. Dedekindovy teorie řezů.

Eudoxos rozpracoval i matematickou teorii pohybu planet postavenou na geocentrickém základě, je též autorem tzv. exhaustivní (vyčerpávací) metody, o které se někdy hovoří jako o starověké teorii limit a kterou velmi úspěšně aplikoval Archimédes. Základem pro tuto metodu je obecná teorie proporcí (geometrický ekvivalent teorie reálných čísel). Exhaustivní metodou bylo mimo jiné exaktně dokázáno to, co tvrdil Demokritos, že objem jehlanu a kužele je roven jedné třetině objemu odpovídajícího hranolu, resp. válce, že poměr obsahů dvou kruhů je roven poměru druhých mocnin jejich poloměrů. Exhaustivní metodu později plodně využíval právě Archimédes.

Platonův žák Aristoteles, největší myslitel starověku, obsáhl téměř všechny obory tehdejšího vědění. Mimo jiné je tvůrcem logiky, nástroje vědeckého myšlení. Ve svých spisech „Kategorie“, „O vyjadřování“, „První analytiky“, „Druhé analytiky“, „Topiky“ a „O sofistických důkazech“ (Soubor těchto Aristotelových spisů je znám pod názvem „Organon“ („Nástroj“)) studoval vymezení pojmů, stavbu výroků, úsudků, deduktivních postupů a principů dokazování; rozpracoval metodiku logického budování vědecké teorie. Výrazně tak ovlivnil metodické postupy svých následovníků.

Na přelomu 4. a 3. století vzniklo jedno z nejvýznamnějších matematických děl všech dob. Eukleides z Alexandrie sepsal „Základy“ (řecky „Stoicheia“, latinsky „Elementa“), úctyhodnou tvůrčí kompilaci, ve které v ucelené, metodicky vybroušené formě zpracoval většinu výsledků řeckých matematiků předchozích tří století. Ve třinácti knihách (kapitolách) podal aritmetické a číselně teoretické výsledky pythagorejců, Eudoxovu teorii poměrů a úměr, jeho exhaustivní metodu, Theaitetovu klasifikaci iracionalit i jeho teorii pravidelných mnohostěnů. Ve svém díle využil patrně i starší „Základy“ Hippokrata z Chiu.

O Eukleidově životě není téměř nic známo, jakési informace uvádí až v 5. stol. n. l. Proklos. Eukleides žil v době Ptolemaia I. Sotera, působil v Alexandrii při vědeckém centru Múseion, jehož součástí byla i slavná alexandrijská knihovna. Jednou se prý Ptolemaios Eukleida ptal, zda ke geometrii existuje nějaká jiná cesta, kratší než ta, kterou vyložil ve svých „Základech“. Eukleides odpověděl, že neexistuje královská cesta ke geometrii, tj. že i král musí studovat větu po větě a důkaz po důkazu stejně jako ostatní smrtelníci. Podle jiné legendy, kterou uvádí římský spisovatel Ioannes Stobaios ve druhé polovině 5. stol., se Eukleida, jeden z jeho žáků zeptal, jaký užitek bude mít ze studia geometrie. Euklides mu poručil vyplatit tři oboly, aby měl ze svého studia prospěch.

Euklides je autorem několika dalších děl. Zachovány zůstaly matematické spisy „Data“ a „O dělení obrazců“, matematicko-astronomický spis „Jevy“ a „Optika“, nauka o šíření a odrazu světla a o vidění. Ztraceny jsou jeho „Mylné úsudky“, „Prismata“, „Kuželosečky“ a „Místa na ploše“.

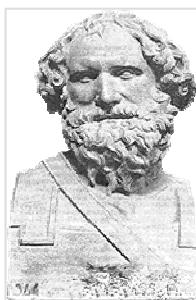
Euklidovy „Základy“ jsou nejstarším zcela dochovaným matematickým spisem pocházejícím z řeckého světa; ze starších děl řeckých matematiků máme bohužel k dispozici jen zlomky. Často se uvádí, že „Základy“ jsou po Bibli nejtěšnější, nejstudovanější a nejkomentovanější knihou západní civilizace. Výrazně ovlivnily další vývoj matematiky i jejího vyučování, a to na více než dva tisíce let. V poslední době se však duch Eukleida ze školské matematiky – hlavně pod vlivem možností, které dávají počítače – postupně vytrácí.

Přínosem Eukleidových „Základů“ byla zejména použitá metoda, logická výstavba axiomatické teorie v duchu Aristotelových požadavků; obvykle se píše, že Eukleidovy „Základy“ dovršily zrod matematiky jako vědy. „Základy“ se staly vzorem deduktivního systému, příkladem exaktního budování deduktivně pojaté matematické teorie, vzorem systematickosti, přehlednosti, koncepčnosti atd.

První kniha Základů je uvedena třidvaceti definicemi základních pojmů, pěti postuláty, ve kterých jsou zakotveny požadavky konstrukcí pravítkem a kružítkem, a devíti axiomy. Teprve potom začíná postupné, přísně logické dokazování jednotlivých výsledků. V následujících knihách postupně přibývají definice dalších pojmů s tím, jak studovaná látka postupně narůstá, jak jsou otevírána další témata a dokazovány další a další věty. Základy obsahují planimetrii, stereometrii, aritmetiku, teorii čísel i geometrickou algebru.

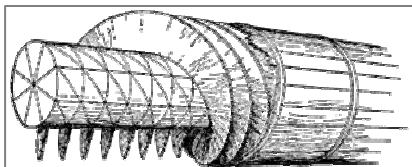
Eukleidova metoda byla v dalších stoletích a tisíciletích následována. Již Aristarchos ze Samu, Archimédes ze Syrakus a Eratosthenes z Kyreny, kteří byli o jednu či dvě generace mladší než Eukleides, postupovali ve svých dílech podobně jako on; nejprve sepsali předpoklady, ze kterých vycházeli, a teprve potom začali své výsledky exaktně odvozovat. Kvalitativní metodologickou změnu přineslo až dílo „Grundlagen der Geometrie“ Davida Hilberta (1862 – 1943) z roku 1899 [3].

2. Archimédes

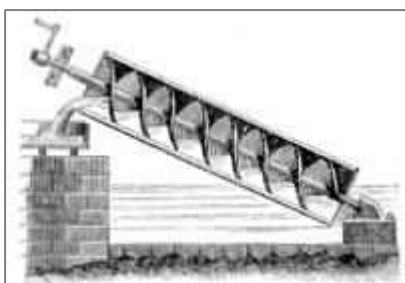


Archimédes (okolo 287 – 212 před n. l.) je zřejmě největším matematikem a mechanikem starověku. Narodil se v Syrakusách na ostrově Sicílii a tam i rozvíjel svou vědeckou práci. Podle Cicera byl Archimédes „člověkem nízkého původu“ (*humilis homunkulus*), žil chudě ve skromných poměrech, ze kterých také vzešel.

Vzdělání nabyl u svého otce, astronoma a matematika Feidia, a později v Egyptské Alexandrii, kde studoval v tzv. Múseionu, což byl jakýsi první výzkumný ústav světa; tam se sblížil s Eukleidovými žáky a s nimi si po návratu do vlasti dopisoval o odborných otázkách. Část těchto dopisů se zachovala. Archimédovu biografii napsal jakýsi Herakledes, nezachovala se však.



obr. 2.1a



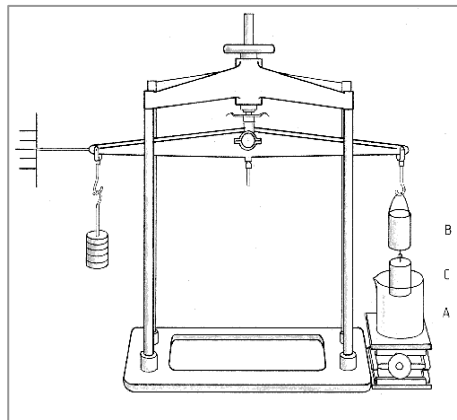
obr. 2.1b

Podle různých svědectví a pozdějších pramenů je známo, že Archimédes široce užíval svých znalostí v praxi, zejména, jak vypravuje římský historik Titus Livius, k zlepšení ekonomiky a obrany rodného města. Např. údajně vynalezl čerpadlo (Archimédův šroub), které bylo používáno k zavodňování výše položených políček hlavně v Egyptě. Původní stroj byl složen z kruhové roury, která obklopovala spirálu, roura byla umístěna v náklonu pod úhlem okolo 45 stupňů, kdy spodní konec roury byl ponořen do vody; rotace zařízení zapříčiňovala stoupání vody

v potrubí (obr. 2.1a). Zařízení se používalo např. právě k zavlažování. Modernější verze Archimédova šroubu, se skládala ze závitnice, která rotovala v otevřeném nakloněném žlabu. Stroj byl efektivní pumpou používanou k odčerpávání např. odpadních vod nebo jiných tekutých odpadů (obr. 2.1b); sám Archimédes ho prý využil k odčerpání vody z lodi Syrakusia. Těžko dnes rozhodneme, zda Archimédes vodní šnek skutečně vynalezl, nebo zda byl v Egyptě používán již dříve a Archimédes se tam s ním seznámil. V každém případě zůstane navždy spjat s jeho jménem [22].

Archimédovým asi nejznámějším objevem je hydrostatický zákon, který nese jeho jméno a podle kterého těleso ponořené do kapaliny je nadlehčováno silou, rovnající se váze vytlačené kapaliny; Archimédes použil tohoto zákona k určení skladby slitiny jejím vážením ve vodě. Tak se vypráví příběh, že Archimédes obdržel od syrakuského vládce Hierona úkol zjistit, zda nepřimísil zlatník stříbra do zlata při výrobě královské čelenky. Takto popisuje římský architekt Vitruvius zhruba o dvě

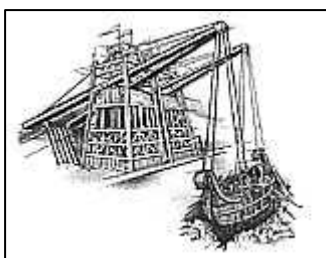
století později notoricky známý příběh o objevu, k němuž Archimédes dospěl jakýmsi náhlým osvětlením: *Když se totiž Hieron v Syrakusách povznesl ke královské moci, rozhodl se, že za štěstí, které měl při svém počínání, obětuje v nějaké svatyni zlatý věnec, který zaslíbil nesmrtelným bohům. Dal jej udělat na zakázku a zlato na něj výrobci přesně odvážil. Za nějaký čas předložil výrobce králi vkusně provedené dílo svých rukou k jeho úplné spokojenosti, přičemž se zdálo, že dodržel přesně váhu věnce.*



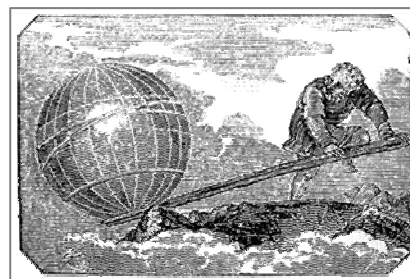
Když přišlo později ovšem udání, že zlato bylo ubráno a že do zpracovávaného věnce bylo přimíšeno stejné množství stříbra, požádal Hieron, rozmrzelý nad tím, že byl takhle podveden a že nemohl přijít na to, jak by se mohla zpronevěra prokázat, Archiméda, aby se pro něho ujal prozkoumání této záležitosti. Archimédes, který toho měl plnou hlavu, přišel náhodou do lázní a při vstupování do vany si všiml, že z ní vytéká takové množství vody ven, jak se do ní ponořovalo jeho tělo. Když mu to poskytlo vysvětlení dané otázky, nemeškal, nýbrž vyskočil samou radostí z vany, pospíchal nahý domů a všem lidem zvěstoval jasným hlasem, že objevil, po čem pátral. Vykřikoval totiž v běhu a stále heuréka, heuréka (přišel jsem na to). Vitruvius dále líčí, jak Archimédes vyřešil Hieronovu hádanku: vzal kus čistého zlata o stejné hmotnosti jako sporná čelenka. Vhodil ho do kádě s vodou a změřil objem či hmotnost vody, kterou tento kus zlata vytlačil. Tentýž proces pak zopakujeme s čelenkou. Pokud zlato i koruna vytlačí stejné množství vody, pak mají stejný objem, a koruna je tudíž vyrobena z ryzího zlata [9]. Protože se ukázalo, že koruna nebyla jen ze zlata, proces zopakoval se stříbrem; mohl postupně zjistit hustotu zlata, stříbra a materiálu věnce a usvědčit klenotníka z nepoctivosti. Zpráva o tom, jak klenotník dopadl, se nezachovala. Ale vzhledem k tomu, že šlo o vavřínový věnec vytvořený k počtě

bohům (řecky *stephanos*), tedy posvátnou věc, s níž muselo být pietně zacházeno, byl zlatník zřejmě popraven.

Popsaná metoda není založena na využití vztlaku v kapalině (hydrostatická váha). Vitruviovo podání, vcelku dosti povrchní, tedy nevysvětluje, jak Archimédes přišel na svůj geniální zákon. Teprve pozdější prameny, zejména arabské a středověké, uvádějí způsob přesnějšího určování hustoty látek založený na Archimédově zákonu bez zjišťování objemu tělesa. Stačí použít hydrostatické váhy, zvážit těleso na vzduchu (G) a pod vodou (G_v); z těchto dvou údajů ihned dostaneme poměr hustoty tělesa ρ a hustoty vody ρ_v , jako
$$\frac{\rho}{\rho_v} = \frac{G}{(G - G_v)}.$$



Archimédes byl hlavně mechanikem; používal systémů pák, kladek, kladkostrojů a šroubů při zdvímání těžkých břemen i při konstrukci vojenských metacích strojů. Od Plutarcha pochází legenda, že Archimédes pomocí kladkostroje lehkým pohybem ruky vytáhl na souš z moře těžce naložený koráb. V této souvislosti vkládá mu Pappos do úst hrdý výrok: „Dejte mi, kde bych stanul, a já pohnu zemí“. I přesto, že většinu svých technických vynálezů nikde písemně nezaznamenal – zřejmě proto, že je nepovažoval on sám za nějak mimořádné v porovnání se svou vědeckou prací (Plutarchos k tomu říká: *praktické využití mechaniky a vůbec veškerého umění a vědy považoval za nízké vykonávání řemesla, jeho vlastní ctižádost jej pudila jedině tam, kde krása a dokonalost je nesmíšená, v oblast čisté vědy, která nepřipouští srovnání s ostatním světem hmoty a při vědeckém podání je k němu v protikladu*) – právě ony ho ve své době nejvíce proslavily a díky nim se stal váženým, ctihodným a bohatým mužem.



Jeho další velmi významné objevy se týkají matematiky a geometrie. Na rozdíl od Eukleidovy snahy o soustavné uspořádání dosavadních poznatků, Archimédes vnesl do matematiky především své vlastní objevy, zejména při stanovení velikosti ploch rovinných útvarů ohraničených křivkami a velikosti povrchů a objemů těles ohraničených křivými plochami. Tyto jeho objevy se přibližují k dvanácté

Eukleidově knize a jsou začátkem myšlenek, na kterých byl budován po dvou tisících letech integrální počet v pracích Keplerových, Cavalieriho, Fermatových, Leibnizových a Newtonových. Archimédova pojednání se vyznačovala tím, že neobyčejně jasně vykládala látku a že podávala přístupně i nejobtížnější otázky. Podobně jako pojednání skoro všech antických autorů, ani Archimédovy práce neukazovaly analytické metody, jimiž se směřovalo k získání výsledků, nýbrž výsledky předkládaly v hotové podobě, vykládaly je synteticky.

Archimédes znal vzorec pro součet nekonečné geometrické řady. Odhalil poměry mezi objemem koule jí opsaného válce a kužele. Jako první určil plochu elipsy. Stanovil objem rotačního paraboloidu, elipsoidu a hyperboloidu a učinil to prakticky způsobem, který se dnes používá v integrálním počtu - uvědomíme-li si, že neznal univerzální metodu, kterou odhalil v novověku Leibniz s Newtonem – byl to na jeho dobu výjimečný výkon (na každý problém rozpracovával specifickou metodu řešení, což Leibniz ani Newton nemuseli). V geometrii zavedl původně negeometrické pojmy jako těžiště, těžnice. Jako první stanovil axióm, že přímka je nejkratší spojnice dvou bodů (Řekové znali pouze pojem přímka, pod kterým uvažovali úsečku, kterou lze libovolně natahovat) a axióm, že libovolnou úsečku lze složit z určitého počtu kratších úseček. Tyto dva axiomy později sehrály významnou úlohu v geometrii.

Archimédes byl bez nadsázky největším matematikem starověku a také – přes veškeré legendy a mýty okolo jeho počínů – zcela mimořádným vynálezcem a konstruktérem.

2.1 Archimédovo rodiště Syrakusy



obr. 2.3

Archimédovo rodiště Syrakusy na východním pobřeží Sicílie (obr. 2.3) je dnes významným administrativním a přístavním střediskem s více než 120 000 obyvateli, s ropným, cementářským a rybářským průmyslem. Jejich historie se však klene přes 27 století a dnešní turisté tam mohou na každém kroku obdivovat vzácné

antické stavby a památky. V době vrcholu své slávy a moci byly Syrakusy největším evropským městem, patřily k předním střediskům tzv. Velkého Řecka a jeho vládci snili o tom, že vybudují velkou západní říši řeckého světa, podobně jako Alexandr Makedonský rozšířil řecké panství a kulturu daleko na východ. Sicílie jako křižovatka Středomoří však byla zároveň místem střetu dalších mocenských sil antického světa – Kartaginců, Etrusků a později Římanů.



obr. 2.4 Opevnění Syrakus.

Syrakusy založili řečtí kolonisté z města Korintu kolem roku 735 před naším letopočtem. Název Syrakusy není řecký; může být fénického původu a pak by se dal přibližně přeložit jako „Skála racků“. Místo, na němž se Syrakusy nacházejí, bylo ovšem osídleno již před příchodem Řeků italickým národem Sikulů, kteří dali jméno Sicílii. Archeologové nacházejí důkazy prvotního osídlení i pozůstatky prvních řeckých obydlí, která vytvářela pravoúhlý systém ulic a městský půdorys; ten se ve staré části Syrakus zachoval dodnes. Řekové původní obyvatelstvo zčásti vyhnali a zčásti podrobili; počátky města byly jistě poznamenány krvavými střety mezi prvoobyvateli, otroky, lidovými vrstvami a vznikající pozemkovou a vojenskou šlechtou.

Řečtí osadníci založili svou kolonii na ostrově Ortygie, který byl později spojen s pevninou. V jeho centru vytékal posvátný pramen nymfy Arethusy, který byl napájen vodami jejího milence říčního boha Alfeia uctívaného spolu s bohyní jménem Alfioa. Ta byla zosobněním samé bohyně Artemidy a jako taková uctívána až v daleké Olympii.

Město Syrakusy se postupně rozrůstalo, na pevnině se rozložily dvě velké čtvrti Achradina a Neapoli. Achradina byla chráněna hradbami, vstupovalo se do ní šestinásobnou bránou (*hexapylonem*). Na náměstí Agoře, stával chrám Dia Olympského z 6. století, o němž se zmiňuje Cicero, a hrobka tyrana Thymoleona s přilehlým gymnasionem. V nové části Neapoli se v sousedství Apollonovy svatyně nachází divadlo pro 15 000 diváků, celé vytesané ve skále, a obětní oltář Hierona II., největší v celém tehdejší řeckém světě. Plošina Epipoli na přístupu k městu často

sloužila jako nástupiště nepřátelských vojsk, a proto ji Dionysios I. dal obehnat hradbami o délce více než 32 kilometrů a vybudovat na ní hrad chráněný třemi příkopy, pěti věžemi a systémem vnitřních průchodů.

Podobně jako v ostatních řeckých městských státech (s výjimkou Sparty) se v Syrakusách střídala období demokracie a tyranie, vlády svobodného lidu a samovlády úspěšného vojevůdce nebo oblíbeného politika. Tyto změny měly zpravidla podobu krvavých převratů, kdy často tisíce přívrženců poraženého režimu přicházely o život. První ze známých syrakuských vládců v 5. století, tyran Gelon I. a jeho bratr Hieron I., zahájili rozsáhlou územní expanzi; útočili na ostrov Elbu se známými nalezišti kovů, na přístavy na Korsice a na další etruská města. V roce 480 dosáhl Gelon velkého vítězství nad Kartaginci u sicilského města Himery a jeho nástupce Hieron I. v roce 474 způsobil těžkou porážku etruskému loďstvu u Kymé. Za Hierona I. působili v Syrakusách přední řečtí básníci a dramatici, například Pindaros nebo Aischylos.

Syrakuské výboje pokračovaly i po Hieronově smrti r. 466 a nástupu demokratické vlády. Za peloponéské války v r. 415 se na Sicílii vylodili Atéňané, aby se zastali měst Leontýn a Segesty proti Syrakusám. Velkou vojenskou výpravu vedl známý aténský politik a vojevůdce Alkibiades; podařilo se mu obsadit Epipoli, předpolí Syrakus. Situace se ovšem zkomplikovala, když byl spěšně odvolán do Atén, kde bylo proti němu vzneseno obvinění. Atéňanům připluli na pomoc Etruskové a Syrakusanům Sparťané. Nakonec byli Atéňané poraženi, na březích řeky Assinaro zmasakrováni a 7 000 jich bylo uvrženo do skalních kobek katakomb Latomie. Tyto jeskyně byly vyhloubeny při těžbě kamene na výstavbu Syrakus a sloužily jako státní vězení i pro další sicilská města. Cicero je považoval za jedno z nejstrašnějších míst, kde vězňové trpěli nevýslovná muka. Ti z Atéňanů, kteří přežili věznění, byli pak prodáni do otroctví.

Demokratická vláda jako obvykle postupně přivedla město ke korupci, zmatkům a nespokojenosti. Nakonec uchvátil moc oblíbený vojenský velitel Dionysios, který si nechal v roce 405 udělit titul samovládce (*stratégos autokratór*). Za jeho vlády Syrakusy opět vzkvétaly, jejich vliv se rozšířil na Jaderské moře a celou západní část Velkého Řecka. Dionysios uzavřel výhodný mír s Kartágem a začal na svůj

dvůr zvat básníky, umělce a filozofy. Sám skládal básně a tragédie nevalné úrovně a usiloval o literární slávu. Nejznámějším z návštěvníků byl filozof Platon. Dionysios se k němu zpočátku choval vlídně, ale když ho Platon se svými návrhy a radami omrzela, neváhal ho darovat spartskému vyslanci, aby ho prodal do otroctví. Platon se nicméně po smrti Dionysia do Syrakus ještě dvakrát vrátil z blízkého přátelství k jeho synu Dionysiovi Mladšímu a jeho švagru Dionovi. Za Dionysia Mladšího se rozhořela občanská válka, zesílily útoky Kartaginců a Dionysios Mladší byl v roce 356 ze Syrakus vypuzen. Korinťané pak vyslali Syrakusům na pomoc vojska pod velením ušlechtilého Thymoleona. Nastoupilo opět období demokracie, než se r. 316 vlády zmocnil Agathokles, který se stal z prostého hrnčíře „králem Západu“.

Po jeho smrti v roce 289 a krátkém neklidném období se roku 275 stal vládcem Syrakus Hieron II. (306 – 214), původně vojevůdce epirského krále Pyrrha ve válce s Kartágem. Vláda Hierona II. trvala přes 60 let a představuje poslední období rozkvětu a samostatnosti Syrakus. Za Hieronovy vlády strávil v Syrakusách převážnou část svého života i Archimédes [3].

2.2 Archimédův život

Archimédův otec Feidias byl pravděpodobně astronomem na Hieronově dvoře. Soudíme tak podle zmínky v Archimédově pojednání „Počítání písku“. Tato zmínka zní: *Feidias, tento můj otec, pak prohlašuje, že průměr Slunce je asi dvanáctinásobkem průměru Měsíce...*



obr. 2.5
Syrakuská
mince

Archimédes byl v přátelských a důvěrných vztazích s Hieronem II. (obr. 2.5), a zejména s jeho spoluvládcem a synem Gelonem II. Z poznámky životopisce Plutarcha – *Archimédes, který byl příbuzný a přítel krále Hierona...* - se obvykle usuzuje, že Archimédes byl s královskou rodinou úzce spřízněn. Zdá se však, že toto příbuzenství, pokud vůbec existovalo, nemohlo být příliš blízké, protože přežil bez úhony i převrat a vraždění

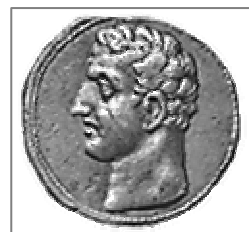
spojené se svržením Hieronova rodu, čili kdyby existovaly blízké příbuzenské vazby, byl by zřejmě zabit spolu s královským rodem.

Archimédův životopis, který údajně sepsal jeho přítel a současník Herakledes, se bohužel nezachoval. Jistý je vlastně pouze rok Archimédovy smrti 212, protože se udála v době pádu Syrakus. Na základě údaje byzantského autora Ioannese Tzetze (1110 – asi 1180) o tom, že Archimédes zemřel ve věku 75 let, odvozujeme zpětně rok jeho narození. Odkud však Tzetzes svou informaci převzal, není známo, proto rok jeho narození musíme vnímat jako přibližný.

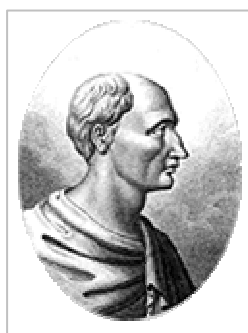


obr. 2.6

Hieron II. se za punských válek po porážce od Římanů přidal na jejich stranu a toto spojení s Římem ve střetu s Kartágem dodržoval po celou dobu své vlády. Po jeho smrti r. 214 se na trůn dostal Hieronův nezletilý vnuk



obr. 2.7



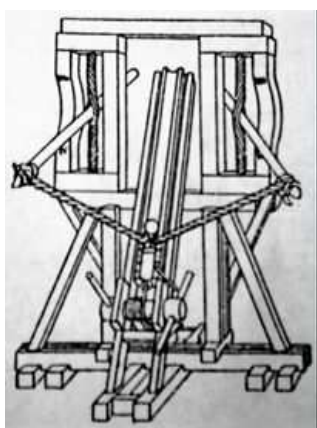
obr. 2.8

Hieronymus (obr. 2.6), člověk nehodný, neschopný a krutý, který proti sobě popudil obyvatelstvo Syrakus a byl záhy zavražděn. Hieronymus však ještě stačil obrátit kolo zahraniční politiky Syrakus, zrušil spojení s Římem a uzavřel dohodu s kartáginským vojevůdcem Hanibalem (obr. 2.7). Události nabraly rychlý spád, Syrakusy vstoupily do období vnitřních zmatků právě ve chvíli, kdy k jejich břehům připlulo početné římské válečné loďstvo a před hradbami rozložil vojevůdce

Marcellus (obr. 2.8) své legie. Marcellus byl oblíbený římský politik a úspěšný vojevůdce ve válce s Kartágem; sám Hanibal ho považoval za rovnocenného soupeře. Přitom byl Marcellus povahy mírné a velkorysé, nadšený ctitel a obdivovatel řecké vzdělanosti.

Bezprostřední záminkou k římskému útoku na Syrakusy byla zpráva o tom, že syrakuský velitel Hippokrates dal v Leontýnách pobít mnoho Římanů. Marcellus Leontýny dobyl a do Syrakus dorazila zveličená zpráva o tom, že Římané vraždí v Leontýnách všechny dospělé muže. Vyhrocená situace se již nedala zvládnout a Marcellus vytáhl proti Syrakusám. Plutarchos o tom říká: *Marcellus nyní zahájil*

útoky současně na souši i na moři; Appius Claudius velel pozemnímu vojsku, zatímco Marcellus velel loďstvu o šedesáti pětiřadkách, které byly vybaveny různými druhy vojsk a zbraní. Na pohyblivém mostu osmi navzájem svázaných lodí dal vztyčit zvláštní strojové zařízení a blížil se s ním k hradbám pln důvěry jak v obrovské rozměry důmyslného zařízení, tak ve svou slávu. To však nemělo žádnou cenu ve srovnání s vynálezy Archimédovými (na obr. 2.9a,b jsou zobrazeny dva válečné stroje).



obr. 2.9a Balista
(podle Vitruvia,
římského architekta)



obr. 2.9b Katapulta
(podle Vitruvia,
římského architekta)

V tu chvíli se Archimédes, čistý vědec oddaný abstraktním naukám, stal duší obrany rodného města. Popis těchto událostí pochází opět od Plutarcha: Když Římané zaútočili ze dvou stran, zavládly v Syrakusách zděšení a úzkostné ticho, protože se každý ve svém strachu domníval, že proti tak hrozně síle není možný odpor. Nyní spustil Archimédes svoje stroje. Na pozemní vojsko létaly střely různého druhu a obrovské kamenné bloky, které dopadaly s hlukem a neuvěřitelnou rychlostí, rozdrtily svou vahou všechny, kteří se nekryli, a způsobily zmatek v řadách vojska. Současně se z hradeb proti lodím vysunuly berany a silou obrovského tlaku shora je potápěly do hlubin nebo železnými chapadly či kleštěmi podobnými zobanům jeřábů uchopily loď, zvedly ji přídíl do výše, takže stála na zádi, a ponořily ji. Jinou loď obránci přitahovali lany a háky ke břehu a točili jí do kruhu, až narazila na skaliska pod hradbami, takže posádka lodi byla většinou zničena a zahynula. Často se stávalo, že některá loď byla úplně vyzdvižena z moře, točila se jako ve víru a vznášejíc se ve výši skýtala hrůznou podívanou; nakonec námořníci z lodi vypadli nebo byli vymrštěni a prázdná loď narazila na hradby, anebo když chapadlo povolilo, spadla do moře.

Plutarchos dále popisuje, jak Archimédes skryt za hradbami rozmístil své metací stroje s dlouhou i krátkou dráhou letu a vyděšeným Římanům se zdálo, že bojují s bohy, kteří z neviditelných prostorů na ně sesílají nejrůznější pohromy.

Vedle těchto mechanických válečných strojů se traduje i zpráva o tom, že Archimédes zapaloval římské lodi soustředěním slunečních paprsků odrazem od vyleštěných štítů jako zrcadel na určité místo vysmolených dřevěných římských galér (obr. 2.10). I přesto, že tato zpráva nebyla zaznamenána životopisem Plutarchem (máme ji od proslulého lékaře Galena někdy z poloviny druhého století), stala se tato historka trvalou součástí archimédovské tradice. I když není doložena zprávami současníků, zdá se, že ji nemůžeme zcela vyloučit. Je předmětem diskusí a úvah historiků a fyziků a byla ověřována různými experimenty. V roce 1973 řecký vědec Ionnis Sakkas dal postavit dřevěný model antické bojové lodi a pomocí 50 lesklých kovových štítů soustředil sluneční paprsky na model ve vzdálenosti 40 m. Loď se skutečně vzněla.



obr. 2.10 Tradiční představa o Archimédovi zapalujícím římské lodě

Mohlo by se zdát, že líčení obrany Syrakus a účinků Archimédových strojů je nadsazené. Nespornou skutečností však zůstává, že tato technika měla na římské vojáky značně demoralizující a demotivující účinek a že obléhání Syrakus se protáhlo na neuvěřitelné dva roky. Marcellus sice v té době postupně obsazoval další části Sicílie a porážel spojence Kartaginců, ale Syrakusy musel nakonec dobýt lstí, a nikoli přímým útokem. Vyčkal na okamžik, kdy pozornost Syrakusanů ochabla, když se oddávali oslavě bohyně Artemis za veselého popíjení. Marcellus nepozorovaně obsadil jednu z méně střežených obranných věží a ještě před rozedněním prorazil hexapylón, šestinásobnou bránu do města. Podle Plutarcha prý plakal nad krásou města, které mělo záhy propadnout drancování. Věděl, že přes rozkazy, které vydal, mu nebude moci zabránit.

Pád Syrakus je spojen i s Archimédovou smrtí. Archimédes prý jako obvykle nevěnoval pozornost svému okolí a byl pohroužen do svých geometrických úvah,

když se před ním objevil římský voják s obnaženým mečem a vyzval ho, aby ho následoval k Marcellovi. Archimédes vojáka žádal, aby počkal, než vyřeší svou úlohu. Podle tradice prý kreslil do písku geometrické obrazce a obrátil se na vojáka, patrně latinsky, známými slovy *Noli tangere circulos meos* (*Nedotýkej se mých kruhů*).

Toto líčení navozuje představu, že Archimédes kreslil kruhy do písku na zemi a že scéna se odehrávala venku. Ve skutečnosti používal jakýsi rýsovací stůl pokrytý vrstvou jemného písku a byl tedy asi uvnitř místnosti. Netrpělivý a prchlivý voják velkého učenice probodl.

Okolnosti Archimédova konce nás přesvědčují, jak pomíjivá je vojenská sláva a moc dobyvatelů ve srovnání se skutečným bohatstvím lidstva, vědeckým poznáním a kulturními hodnotami. Římská říše je dlouhá staletí v troskách a po ní mnoho dalších, zatímco Archimédovy kruhy přetrvávají. Autentičnost Archimédových posledních slov nelze doložit, podobně jako Galileiho *A přece se točí!* Stala se však součástí historické tradice a inspirovala k zamyšlení mnoho tvůrců.

Násilí spáchané římským vojákem na Archimédovi nedošlo ocenění nadřazených a Marcellus si pospíšil s prohlášením, že tento čin odsuzuje. Římané, kteří při veškeré mocenské pýše měli vůči řecké vzdělanosti pocitu méněcennosti, by jistě byli raději získali Archiméda živého a jeho schopnosti využili pro své cíle [3].

2.3 Archimédovo dílo

Archimédes nám zanechal na třináct pojednání (některá z nich o dvou knihách); některá další se nedochovala. Na základě výroků samotného Archiméda i podle vzájemné závislosti výsledků v jeho zachovaných pracích, můžeme sestavit pravděpodobné pořadí, v jakém Archimédes svoje práce sepsal:

1. O rovnováze neboli těžištích rovinných obrazců, kniha I. (*Epipedon isorhopion e kentra baron epipedon*)

2. O kvadratuře paraboly (*Tetragonismos paraboles*)
3. O rovnováze..., kniha II.
4. Poselství Eratosthenovi o mechanické metodě řešení geometrických úloh (*Peri ton mechanikon theorematon pros Eratosthenen efrodos*)
5. O kouli a válci, kniha I. a II. (*Peri sfairas kai cylindru*)
6. O spirálách (*Peri helikon*)
7. O konoidech a sféroidech (*Peri konoeideon kai sfairoeideon*)
8. O plovoucích tělesech, kniha I. a II. (*Ochumenon*)
9. Měření kruhu (*Kyklu metriesis*)
10. Počítání písku (*Psammites*)
11. Kratochvíle (*Stomachion*)
12. Poučky (*Lemmata*)
13. Problém dobytka (*Probléma boeikon*).

Vedle těchto Archimédových spisů víme o některých dalších, které se ztratily. Tak historik matematiky Pappos Alexandrijský (3. stol. n. l.) uvádí Archimédovo zkoumání vlastností polopravidelných mnohostěnů. V pojednání „Počítání písku“ Archimédes několikrát zmiňuje svou starší práci zabývající se velkými čísly pod názvem „O principech“ (*Archai*) věnovanou Zeuxippovi. Knihám „O rovnováze“ předcházelo několik dalších na toto téma, na něž se odvolává Archimédes („Základy mechaniky“, „Rovnováha“) a o nichž se zmiňuje i Pappos – „O váhách“ (*peri zygot*), „O těžišti“ (*Kentrobarycha*). Thein z Alexandrie, Olympiodoros a další uvádějí Archimédův optický spis „Katoptrika“. Archimédes napsal též pojednání o konstrukci „sféry“ (planetária) pod názvem „O stavbě koule“ (*Peri sfairopoias*) a o vodních hodinách. Arabští autoři znali další Archimédovy spisy zabývající se dotykem kružnic, vlastnostmi trojúhelníků, rovnoběžkami, základy geometrie a matematickými definicemi. Archimédův traktát o konstrukci pravidelného sedmiúhelníku zmiňuje Hábit inb Kurra (836 – 901), jehož pojednání vyšlo v německém překladu až roku 1927.

Archimédovo dílo tvoří promyšlený, systematicky uspořádaný celek. Někteří autoři dedukují, že Archimédes sledoval jakýsi celoživotní vědecký program. Časové pořadí a návaznost jednotlivých pojednání se podařilo stanovit díky tomu, že Archimédes zpravidla napřed formuloval jakési *these*, věty, které hodlá dokázat,

nebo formuloval problém k řešení a odeslal je známým, především alexandrijským matematikům k diskusi. Přitom je vyzval, aby se je sami pokusili dokázat a vyřešit. Někdy dokonce projevil určitou škodolibost; formuloval záměrně chybná tvrzení, a když je jeho adresáti „dokázali“ a zdůvodnili, sám poukázal na omyl.

V průvodních a věnovacích dopisech Archimédes prováděl jakási shrnutí svých úvah, odkazoval na své předchozí práce a svěřoval se s budoucími plány. Jeho korespondence směřovala především do Alexandrie, odkud se také jeho práce a vědecké výsledky mohly šířit dál. S alexandrijskými učiteli, s nimiž si dopisoval, se zřejmě osobně znal, a proto i předpoklad, že Archimédes v Alexandrii studoval a působil, se jeví jako plně opodstatněný. Zdá se téměř jisté, že v Egyptě pobýval opakovaně. Řecký historik Diodoros Sicilský (1. stol. př. n. l.) píše, že právě tam vynalezl Archimédes svůj vodní šnek. Může nás zarazet pouze to, že Archimédes ve svých spisech nepoužíval obecnou řečtinu (*koiné*), která se stala jazykem alexandrijských učenců, ale držel se své „syrakuštiny“, dórského dialektu ovlivněného italickou sikulštinou. Je zřejmé, že přes své občasné návštěvy v Egyptě byl celým svým životem a dílem spjat se svým rodným městem. O dalších údajných Archimédových cestách, např. do Hispánie, nemáme zaručené zprávy.

Z tehdejších alexandrijských učenců si Archimédes nejvíce vážil Konona ze Samu. Tento astronom a matematik shromáždil výsledky astronomických pozorování starých Chaldejců a svými výzkumy kuželoseček položil základ ke 4. knize Apolloniova slavného spisu „Kónika“. Archimédes mu posílal k posouzení své matematické práce a cenil si jeho úsudku. Konon však záhy zemřel a Archimédes vzpomněl jeho památky v úvodu svého pojednání „O kvadratuře paraboly“. Kononovým následníkem, i když ne zcela rovnocenným, byl další alexandrijský matematik Dositheus z Pelusie, jemuž Archimédes připsal svá pojednání „O kouli a válci“, „O konoidech a sféroidech“ a „O spirálách“.

Nejznámějším Archimédovým adresátem a vrstevníkem (snad i spolužákem) v Alexandrii byl však Eratosthenes z Kyreny (asi 276 až 194), vychovatel Ptolemaia IV., pak knihovník, a tedy vlastně správce alexandrijského Múseia. Eratosthenes byl polyhistor – filosof, básník, literární vědec, geograf, astronom. Zanechal nám první mapu, Řekům tehdy známého světa, se soustavou poledníků a rovnoběžek (nultý

poledník procházel ostrovem Rhodos) a s vyznačením výškových rozdílů, určil rozměry zeměkoule a položil základ nového kalendáře, který později zavedl Gaius Julius Caesar jako kalendář juliánský. Eratosthenes se sám za matematika příliš nepovažoval, i když *Eratosthenovo síto* jako pomůcka k postupnému vyhledávání prvočísel je snad jeho nejznámějším výtvozem. Archimédes mu věnoval svůj spis „O metodě“ a poslal mu k řešení tzv. „Problém dobytka“.

Archimédovo dílo nebylo ve starověku vydáno souborně, řada rukopisů se ztratila nebo podlehla požárům. Přesto budilo toto dílo úctu a pozornost, bylo studováno, komentováno a některé spisy byly překládány z původní dórské řečtiny do klasické řečtiny attické. Studována byla hlavně díla matematicky méně náročná, jako „O kouli a válci“ nebo „O měření kruhu“, neboť bylo málo učenců, kteří dokázali porozumět celé hloubce Archimédových matematických úvah a důkazů.

První latinské překlady Archimédových spisů, s nimiž se středověká Evropa seznamovala, byly pořízeny z arabštiny. Jako první to byl traktát „O měření kruhu“, který do arabštiny přeložil Hábit ibn Kurra. Velmi plodným překladatelem arabských textů byl ve středověku Bernard z Cremony (1114 – 1187), který přeložil z arabštiny do latiny na 90 prací antických učenců. Působil na tehdy vzkvétajících arabských střediscích učenosti ve Španělsku, zejména v Toledu, kde také zemřel. Z Archimédových prací přeložil „O měření kruhu“. Existuje však i druhý překlad této práce, přibližně z téže doby, který pořídil pravděpodobně Platon z Tivoli (kolem 1150), který působil v Barceloně. Jeho překlad je ovšem méně kvalitní a obsahuje řadu chyb.

Po zániku říše západořímské r. 476 se řecké písemnictví udržovalo v říši byzantské, k níž po určitou dobu patřil i Egypt. Byzantský matematik a architekt Anthemios Trallský, který pro císaře Justinina I. řídil výstavbu Konstantinova chrámu sv. Sofie, a jeho spolupracovník Isidor Milétský (kolem 520) komentovali Archimédova pojednání. Díky úsilí konstantinopolských matematiků se podařilo uchovat původní řecké verze Archimédových spisů, které byly později v západní Evropě postupně překládány do latiny.

Soluňský arcibiskup Leo přezdívaný Filosof nebo Iatrosofista (sepsal lékařskou encyklopedii) shromáždil v Konstantinopoli soubor Archimédových rukopisů později označený jako Kodex A. (Rukopisné knihy psané na papyru či pergamenu měly původně podobu svitků. Přibližně od 4. století začaly být vázány tak, že složené dvoulisty papyru či pergamenu, od 14. století papíru, byly spojovány řemínky, sešívány do větších složek a nazývány kodexy). V Konstantinopoli vznikl i druhý soubor Archimédových rukopisů o rovnováze a mechanice známý jako Kodex B. Třetí soubor, zvaný Kodex C, byl objeven až koncem 19. století a byl pro historii vědy vzrušujícím překvapením.

Osudy Archimédových spisů, se kterými se Evropa relativně pozdě seznamovala, nebyly zdaleka přímočaré. Významně zasáhly do matematického a fyzikálního myšlení právě v období vědecké revoluce v 17. století. Kodexy A a B se zřejmě dostaly na Sicílii za vlády Normanů a Hohenstaufů. Když Manfréd, poslední sicilský král z rodu Hohenstaufů, padl v bitvě s papežskými vojsky u Beneventa r. 1266, jeho knihovna přešla spolu s Archimédovými rukopisy do vlastnictví papeže. Později se Kodex A dostal do soukromých rukou; v roce 1491 ho vlastnil italský humanista Giorgio Valla. Obsahoval pojednání „O kouli a válci“, „O měření kruhu“, „O konoidech a sféroidech“, „O spirálách“, „O rovnováze“, „Počítání písku“ a „O kvadratuře paraboly“ s komentáři Eutokia z Askalonu (6. stol. n. l.). Valla snad Kodex A připravoval k tisku, ale nestačil ho již vydat. Po jeho smrti vystřídal tento kodex několik vlastníků a nakonec se ztratil. Existovaly však jeho kopie, z nichž byly postupně pořizovány dílčí překlady. V Evropě zřejmě kolovaly i další Archimédovy rukopisy.

Již v roce 1269 přeložil vlámský dominikán Willem van Moerbecke (1215 – 1286) větší část pojednání obsažených v Kodexu A do latiny. Moerbecke byl žákem Alberta Velikého, znalcem řečtiny a východních jazyků. Působil na papežském dvoře v městě Viterbu a zasloužil se o překlady mnoha významných děl z řečtiny a arabštiny do latiny. Moerbeckův překlad, bohužel nepřiliš dokonalý, nezahrnuje pojednání „Počítání písku“, zato však obsahuje navíc traktát „O plovoucích tělesech“, který v Kodexu A chybí. To byl také důvod, proč bylo svého času Archimédovo autorství tohoto traktátu zpochybňováno. Moerbecke měl zřejmě k dispozici další byzantský soubor Archimédových spisů, pravděpodobně Kodex B.

Jeho stopy však mizí už počátkem 14. století a nezachovaly se ani žádné jeho opisy, pokud vůbec existovaly. Řecký text pojednání „O plovoucích tělesech“ se objevil až ve 20. století. Proto měl Moerbeckův překlad, jehož původní rukopis je dnes chován ve vatikánské knihovně, tak velký význam.

Vraťme se ještě ke Kodexu A s nejdůležitějšími Archimédovými spisy. I když se nezachoval, byla pořízena řada jeho opisů, které patřily k nejvzácnějším, velmi strážným kulturním památkám (Kodex Marcianus v Benátkách, Kodex Laurentianus ve Florencii, Kodex Parisiensis ve Fontanaibleau a některé další). Latinský překlad kodexu A pořídil v roce 1450 na příkaz papeže Mikuláše V. Jakub z Cremony (zemřel kolem 1452), kněz ze San Cassiano. Z překladu bylo pořízeno několik kopií, z nichž jedna se dostala do rukou Mikuláše Kubánského (1401 – 1464) a další získal Johannes Müller, německý matematik a astronom zvaný též Regiomontanus (1496 – 1476). Ten hodlal spis vydat tiskem, došlo k tomu však až po jeho smrti. Regiomontanova kopie je uchována v Norimberku.

Vynález knihtisku v polovině 15. století umožnil rychlé šíření spisů antických filozofů a matematiků, především Euklida, Apollonia, Claudia Ptolemaia, Herona, Pappa a ovšem Archiméda. První Archimédovo dílo, které vyšlo tiskem v Benátkách roku 1503 a je dnes bibliofilskou vzácností, pořídil neapolský matematik Luca Gaurico. Obsahuje latinský překlad pojednání „Měření kruhu“ a „O kvadratuře paraboly“. Další vydání, v podstatě přetisk Gauricova textu doplněný o traktát „O plovoucích tělesech“ v Moerbeckově verzi, publikoval r. 1543 v Benátkách Niccolo Tartaglia (1500 – 1557), známý italský matematik. Právě toto vydání měl k dispozici Galileo Galilei. Tartaglia se zabýval řešením kubických rovnic a jako jeden z prvních našel vzorce později známé jako Cardanovy. Pojednání „O plovoucích tělesech“ pak vyšlo v Benátkách samostatně znovu v r. 1565.

V roce 1544 vydal v Basileji Thomas Venetius soubor všech tehdy známých Archimédových spisů v řečtině, s latinským překladem a Eutokiovými komentáři. Řecké originály byly převzaty z kopií Kodexu A a latinský překlad Jakuba z Cremony ve verzi upravené Regiomontanem. V 16. století vyšly tiskem ještě dva překlady Archiméda. Jeden byl redigován známým filozofem, lékařem a znalcem

řecké matematiky Federigem Commancinem z Urbina (1509 – 1575); vyšel r. 1558 v Benátkách a obsahoval „Měření kruhu“, „O spirálách“, „O kvadratuře paraboly“, „O konoidech a sféroidech“ a „Počítání písku“. V roce 1565 byl doplněn pojednáním „O plovoucích tělesech“. Konečně r. 1570 vydal v Palermu na Sicílii Francesco Maurolyco (1494 – 1575), italský mnich známý svými pracemi o teorii duhy, nový latinský překlad Archimédových spisů pod názvem „Admirandi Archimédes Syracusani Monumenta omnia mathematica“.

Od 17. století začíná vycházet řada nových vydání Archimédových spisů, zpravidla v řečtině s latinským překladem, ale též první překlady do živých jazyků (německého v Norimberku 1670 a Tübingenu 1798, francouzského v Paříži 1807 a dalších). Na základě arabských pramenů se také vyjasňují některé okolnosti Archimédových objevů, hlavně názvy a náměty jeho dalších, zřejmě ztracených prací. Stále ještě nebyl k dispozici řecký text důležitého traktátu „O plovoucích tělesech“. V roce 1773 německý básník a znalec literatury G. E. Lessing našel a uveřejnil matematickou úlohu zvanou „Problém dobytka“. Jde o dávný homérský motiv, který Archimédes ve veršované podobě poslal kdysi Eratosthenovi.

K velkému překvapení došlo na počátku 20. století. V roce 1899 narazil docent Petrohradské univerzity Papadopoulos-Kerameus při studiu katalogu knihovny jeruzalémského kláštera Božího hrobu na palimpsest (pergamenový svitek zbavený původního textu a popsaný textem novým) s matematickým obsahem (Kodex C). Dánský filolog a matematik J. L. Heiberg pak tento palimpsest v Konstantinopoli prostudoval a s úžasem zjistil, že původní text pochází z 10. století a obsahuje zlomky známých Archimédových pojednání, dále téměř celý řecký text „O plovoucích tělesech“ a kromě toho dosud neznámý text spisu „O metodě“ věnovaný Eratosthenovi. Později se zjistilo, že rukopis obsahuje i úryvky dílka „Stomachion“, jakési Archimédovy matematické hříčky. Zhruba ve stejné době byly objeveny arabské zlomky té práce, které rozluštil a zpracoval německý matematik a historik matematiky Heinrich Suter (1848 – 1922).

Heiberg publikoval svůj objev v roce 1907. Tato příhoda ukázala, že ani v budoucnosti nejsou vyloučena překvapení a že se můžeme dočkat objevu dalších Archimédových rukopisů. Zmíněný palimpsest se záhadným způsobem dostal do

soukromých rukou a v říjnu 1998 byl vydražen známou dražební síní Cristie's v New Yorku. Získal ho anonymní americký sběratel za 2 miliony dolarů a přislíbil, že poskytne palimpsest pro vědecká bádání.

Porozumění Archimédovým matematickým textům brání dobová notace, způsob zápisu matematických vztahů, který Archimédes používal. Proto se v novějších vydáních editoři snaží více či méně přizpůsobit tento zápis dnešnímu čtenáři. Poprvé se o to pokusil T. L. Heath r. 1897, v poslední době E. J. Dijksterhuis r. 1956. Do češtiny Archimédovo dílo přeloženo nebylo; pouze překlad pojednání o měření kruhu a o počítání písku M. Valoucha vyšel ve výročních zprávách gymnázia v Litomyšli v letech 1903 – 1906 a v nedávné době byl přetištěn Českou maticí technickou.

Archimédes bývá oprávněně označován za největšího matematika a fyzika starověku, který navíc uměl své teoretické znalosti úspěšně využít v technické praxi. Jeho vědecké dílo patří k vrcholům antického myšlení, na něž navázala až novověká matematika a fyzika.

Na rozdíl od Euklidovy snahy o soustavné uspořádání dosavadních poznatků, Archimédes vnesl do matematiky především své vlastní objevy. Archimédova pojednání se vyznačovala tím, že neobyčejně jasně vykládala látku a že podávala přístupně i nejobtížnější otázky.

Jeho pojednání nemají charakter kompilací, ale odborných publikací zveřejňujících původní výsledky. Archimédovo matematické bádání bylo zaměřeno hlavně na následující témata: obvod a obsah kruhu, obsahy rovinných útvarů ohraničených křivými čarami (parabolická úseč, závity spirály), objemy těles (koule, kulová úseč a výseč, úseče elipsoidu, paraboloidu a hyperboloidu, části válce), povrchy těles (plášť kužele, kulová plocha, kulový vrchlík), těžiště rovinných útvarů (parabolická úseč), těžiště těles (kulová úseč, úseč elipsoidu a paraboloidu), problematika tečen (spirála), vlastnosti některých posloupností a řad, vyjádření velkých přirozených čísel.

Pokud jde o fyziku, nebyl Archimédes „přírodním filozofem“ tak jako jeho předchůdci a nezabýval se úvahami o obecných vlastnostech světa, ale zaměřil se na konkrétní fyzikální problémy, především v mechanice. Vybudoval statiku jako nauku o rovnováze těles i kapalin (páka, jednoduché stroje, Archimédův zákon) do té míry, že novověká věda k ní už příliš mnoho základních poznatků nepřidala. Víme, že se zabýval i optikou a astronomií, ale tyto jeho práce se bohužel nezachovaly.

Archimédes dokázal spojit matematiku s mechanikou. Aby mohl matematický teorém logicky dokázat, musel nejprve jeho platnost nějak vytušit, uhádnout nebo získat ze zkušenosti. Jeho *heuréka*, jako výraz jakéhosi zajiskření nahromaděné intuice se stalo symbolem metody poznávání, kterou dnes nazýváme heuristická. Pak Archimédes použil svou mechanickou metodu v geometrii; podrobně ji objasnil i v poselství Eratosthenovi. Uchýlil se k názoru a analogii, obsahy rovinných obrazců a objemy těles určoval za použití pojmů o rovnováze na páce a o těžišti. Teprve nakonec, jako završení tohoto postupu, podal exaktní matematické odvození na základě axiomů.

Archimédovo dílo „Poselství Eratosthenovi“, obvykle označované zkráceně jako „O metodě“ nebo *Efodos*, bylo objeveno až začátkem 20. století. Obsahuje některé výsledky, které pak byly zpracovány v Archimédových pracích (některé dokonce v obecnějším tvaru). Archimédes zde vysvětluje svoji cestu k výsledkům.

Archimédes zdraví Eratosthena!

Poslal jsem vám dříve některé z teorémů, které jsem objevil, uvedl jsem však pouze věty a vyzval vás, abyste k nim našel důkazy... Důkazy těchto vět jsem pak zpracoval v této knize a nyní vám je posílám.

Protože ve vás vidím skutečného vědce, filozofa vynikajícího významu a zároveň obdivovatele matematického bádání, považuji za zcela vhodné pojednat v této knize o zvláštní metodě a tak vám vysvětlit, čím by tato práce mohla být pro vás podnětem k prozkoumání některých matematických problémů pomocí mechaniky.

Tato metoda je podle mého přesvědčení stejně užitečná jako samotné důkazy. Mnohé, co jsem si dříve objasnil mechanicky, jsem potom dokázal geometricky,

neboť moje úvahy založené na této mechanické metodě neměly ještě průkaznosti důkazů; lehčí je ovšem najít důkaz, když si mechanickou metodou vytvoříme představu o zkoumané otázce, než to udělat bez takových předběžných představ.

Archimédes geniálním způsobem rozpracoval Eudoxovu exhaustivní metodu a v řadě situací ji úspěšně aplikoval. Ve svých pracích rozvíjel myšlenky infinitezimálního charakteru; v určitém smyslu můžeme hovořit o výpočtech limit a určitých integrálů i o diferenciálních úvahách. Tyto jeho objevy jsou začátkem myšlenek, na kterých byl budován po dvou tisících letech integrální počet v pracích Keplerových, Cavalieriho, Fermatových, ale i Leibnizových a Newtonových. Chyběla mu však moderní symbolika, která byla v 17. století jedním z předpokladů rozvoje analytické geometrie, diferenciálního a integrálního počtu. Archimédes sice využíval techniku horních a dolních integrálních součtů, prováděl limitní přechod, ale pro každý problém, který řešil, musel objevit a rozpracovat zvláštní postup, který ho dovedl k cíli. Newton a Leibniz přišli se zcela obecnou metodou, kterou bylo možno řešit celé třídy problémů.

Psychologie Archimédova tvůrčího procesu je ilustrována četnými historkami, kdy se Archimédes soustřeďoval na vědecký problém tak, že nevnímal okolní svět a zapomínal na běžné životní úkony. Životopisec Plutarchos říká: *Archiméda vždy očarovala jakási vlastní vnitřní Siréna, takže zapomněl na jídlo a zanedbával péči o tělo, často ho násilím převedli ke koupeli a natřeli, v popelu krbu kreslil geometrické obrazce, podobně když byl po koupeli natřen olejem, prstem kreslil po svém těle křivky, jsa úplně omámen pocitem štěstí a posedlý matematickou vášní* [3].

2.3.1 O rovnováze ploch

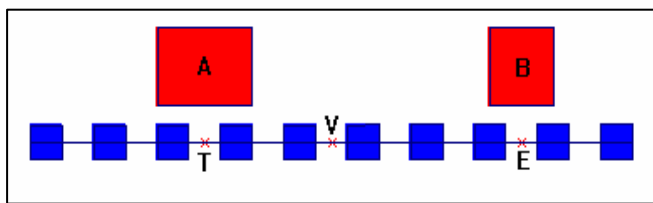
Archimédovo dílo „O rovnováze neboli těžištích rovinných obrazců“ patří k jeho prvním dochovaným dílům. Je dokladem toho, jak byl objev páky pro starověk všemocným nástrojem nejen k usnadňování práce při stavebních výkonech a násobení lidské síly, ale – jak dokazuje nejen Archimédes – k řešení i čistě matematických problémů. Archimédes je schopen díky myšlence páky odvodit a

dokázat matematické formule, odvozuje těžiště rovinných útvarů (rovnoběžníku, trojúhelníku a lichoběžníku), vypočítává obsahy obrazců a objemy těles a získané výsledky pak využívá i při praktických aplikacích.

Práce se skládá ze dvou knih, které zřejmě vznikaly s určitým časovým odstupem a opírají se o poznatky obsažené ve starších Archimédových pracích, které se bohužel nezachovaly. Jedna z nich nazvaná „O těžišti“ zřejmě obsahuje definici tohoto pojmu, protože ve spise „O rovnováze“ s ním Archimédes operuje, jako by byl už znám. Dílo vykládá principy teoretické mechaniky axiomaticky podobně jako Eukleidovy „Základy“.

Archimédes vychází z osmi postulátů rovnováhy na páce. První dva postuláty říkají: *Stejné tíhy ve stejných vzdálenostech (od bodu opory páky) jsou v rovnováze, nestejné tíhy nejsou; páka se naklání ve směru větší tíhy.*

Další dva postuláty tvrdí, že *je-li ve stavu rovnováhy něco na jedné straně páky přidáno nebo ubráno, rovnováha se naruší a páka se nakloní na stranu větší tíhy.* O těžišti se předpokládá, že *jestliže rovné a podobné obrazce splývají, splývají i jejich těžiště*, a dále že *těžiště podobných, ale nerovných obrazců je umístěno podobně.* Důležitý je postulát, který říká: *Jsou-li nějaké velikosti v určitých vzdálenostech v rovnováze, jiné velikosti s nimi ekvivalentní budou také v rovnováze v týchž vzdálenostech* (princip redukce). Poslední postulát se týká těžiště konvexních obrazců, které musí ležet uvnitř obrazce.



obr. 2.10 Velikosti A a B jsou v poměru 3:2 a jejich těžiště leží v bodech T a E. Těžiště soustavy A + B je pak v bodě V. Čtverečky jsou v podstatě závaží jednotkové hmotnosti.

Následuje 15 vět, které Archimédes dokazuje. Přitom nahrazuje části obrazců jinými obrazci vhodného tvaru tak, aby byla zachována tíha a poloha jejich těžišť; celková rovnováha se přitom nezmění. Tímto způsobem dokazuje 6. větu o

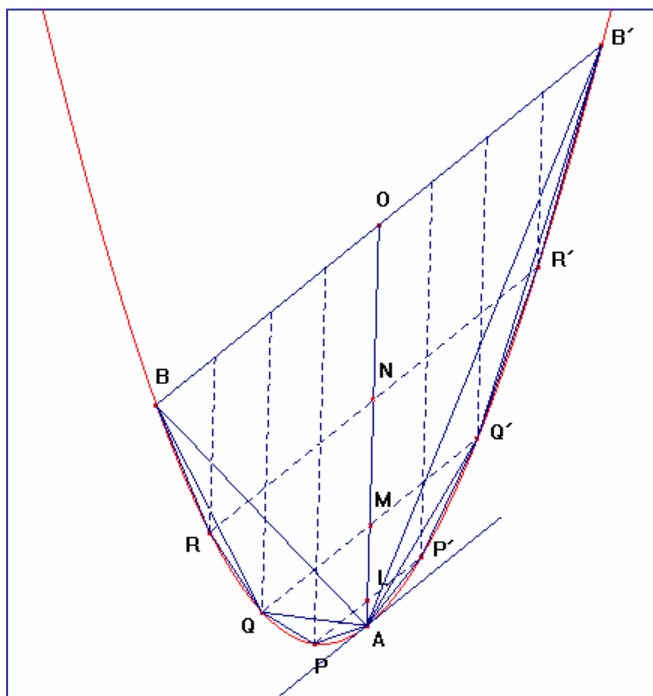
rovnováze na páce: *Souměřitelné velikosti jsou v rovnováze ve vzdálenostech nepřímě úměrných tíhám.* Souměřitelné velikosti uvažuje proto, aby mohl každou

z nich nahradit odpovídajícím počtem stejných, řekněme jednotkových velikostí, a rozložit je podél ramene páky tak, aby jejich těžiště splývalo s těžištěm původní velikosti (obr. 2.10). V 7. větě se Archimédes pokouší dokázat, že věta o rovnováze na páce platí i pro nesouměřitelné velikosti; důkaz provádí sporem.

Hlavními výsledky první knihy o rovnováze jsou věty o těžišti rovnoběžníků, trojúhelníka a lichoběžníka. Těžiště lichoběžníka leží na spojnici středů obou základů, přičemž poměr jeho vzdáleností od základů $z_1 < z_2$ je $\frac{2z_1 + z_2}{2z_2 + z_1}$.

V případě trojúhelníka sporem dokazuje, že jeho těžiště musí ležet na těžnici, která spojuje vrchol se středem protější strany.

Druhá kniha práce o rovnováze, obsahuje 10 vět a je celá věnovaná těžišti parabolické úseče a její části odříznuté přímkou rovnoběžnou k základně. Nejprve Archimédes vepsal do úseče (obr. 2.11) trojúhelník BAB' , kde A je bod, v němž je tečna paraboly rovnoběžná s BB' . Pak vepsal do dvou nově vzniklých úsečí trojúhelníky BQA a $B'Q'B'$, a



obr. 2.11

pak stejným způsobem do nově vzniklých čtyř úsečí trojúhelníky BRQ , $B'R'Q'$ atd. Při dalším zkoumání vepsaného útvaru $BRQPAP'Q'R'B'$ Archimédes dokázal, že průměry vedené body R, Q, P, P', Q', R' , a rovnoběžné s AO dělí BB' na stejné části, zatímco přímky PP' , QQ' , RR'

rovnoběžné s BB' dělí AO v poměru lichých čísel,

takto: $AL : LM : MN : NO = 1 : 3 : 5 : 7$. Těžiště vepsaného útvaru stejně jako

parabolické úseče leží na AO (jak lze dokázat sporem). Přičemž těžiště parabolické úseče leží blíže k bodu A než těžiště útvaru vepsaného uvedeným způsobem, ovšem vzdálenost mezi těmito dvěma těžišti lze učinit menší, než je libovolná daná veličina tím, že budeme postupně zvětšovat počet stran útvaru (v podstatě limitně). Nakonec dokazuje, že pro těžiště G platí vztah $AG : GO = 3 : 2$, a následně nalézá těžiště útvaru ohraničeného parabolou a tětivami PP' , BB' [7].

2.3.2 O Kvadratuře paraboly

Název pojednání „O kvadratuře paraboly“ je nejspíš z pozdější doby, protože Archimédes neznal termín parabola, nýbrž mluvil o „Orthokonoidu“, příslušném řezu pravoúhlého kužele [7]. Přesně parabolu definoval jako řez pravoúhlého kužele rovinou, která je kolmá na jednu jeho povrchovou přímku, stejně jako to před ním udělali Eukleides a Aristaos, jejichž práce o kuželosečkách se bohužel nedochovaly. Pojednání obsahuje 24 vět a Archimédes je věnoval Kononovu žáku Dositheovi, protože Konon, jeho přítel, byl už v tu dobu po smrti. V předmluvě obhajoval prvenství svého výsledku a uvedl, že k němu dospěl pomocí poznatků z mechaniky a teprve potom jej dokázal geometricky [3]: *Když jsem slyšel, že Konon, který byl mým přítelem po celý svůj život, zemřel, a zároveň vy jste Konona znal a přitom jste zběhlý v geometrii, tak zatímco jsem truchlil pro ztrátu nejen přítele ale i velkolepého matematika, dal jsem si úkol napsat vám, neboť mým původním úmyslem bylo poslat Kononovi jistý geometrický teorém, který nebyl dříve vyšetřen, až nyní mnou, a který jsem napřed objevil mechanicky a potom dokázal geometrickými prostředky* [16].

Archimédes brilantním způsobem užívá a dále rozpracovává Eudoxovu tzv. exhaustivní (vyčerpávací) metodu – někdy je nesprávně uváděn jako její tvůrce [5]. Krátce se o této metodě zmiňme.

Základní idea výpočtu ploch křivočarých útvarů popř. objem těles vzniklých z těchto útvarů rotací – tedy idea na které vznikl integrální počet – je velmi jednoduchá. Zjišťovaný obsah (objem) aproximujeme zdola a shora pomocí

vepsaných a opsaných útvarů daného typu (čtverců, krychlí), jejichž míru známe. Intuice nám přitom napovídá, že čím „jemnější“ jsou ony útvary, tím lepší aproximaci obdržíme. Integrál pak získáme vlastně nekonečným prodloužením těchto aproximací: součtem v podstatě nekonečně mnoha nekonečně malých veličin.

Uvedená idea je natolik jednoduchá, že její kořeny lze vystopovat v dávné minulosti. Jejím autorem je Eudoxos z Knidu, který ve 4. století př. n.l. vypracoval metodu, které byl později dán název exhaustivní. Tato metoda je geniální předchůdkyní pozdějších infinitesimálních úvah. Eudoxovy práce se nám sice nedochovaly, ale jeho metoda je podrobně rozpracována v Eukleidových „Základech“, které byly napsány o několik desetiletí později.

Teoretický základ Eudoxovy úvahy můžeme dnešní symbolikou popsat následovně: jsou-li a, b reálná čísla taková, že: $0 < a < b$, pak existují taková kladná čísla $c_1, c_2, \dots, c_n < \frac{1}{2}$, pro něž platí $b \cdot c_1 \cdot c_2 \cdot \dots \cdot c_n < a$. V důkazu Eukleides užívá tvrzení, které dnes běžně označujeme jako „Archimédův axiom“: K reálným $0 < a < b$ existuje takové přirozené n , že $n \cdot a > b$.

Eudoxos sám postupoval tak, že hledanou hodnotu poměrů obsahů nebo objemů odhadl a pak sporem dokázal její logickou nutnost. Eukleides tímto způsobem v Základech odvozuje např., že: *Plochy kruhů jsou v tomtéž poměru jako čtverec jejich průměrů, nebo objem kužele je třetina válce mající tutéž podstavu a stejnou výšku.*

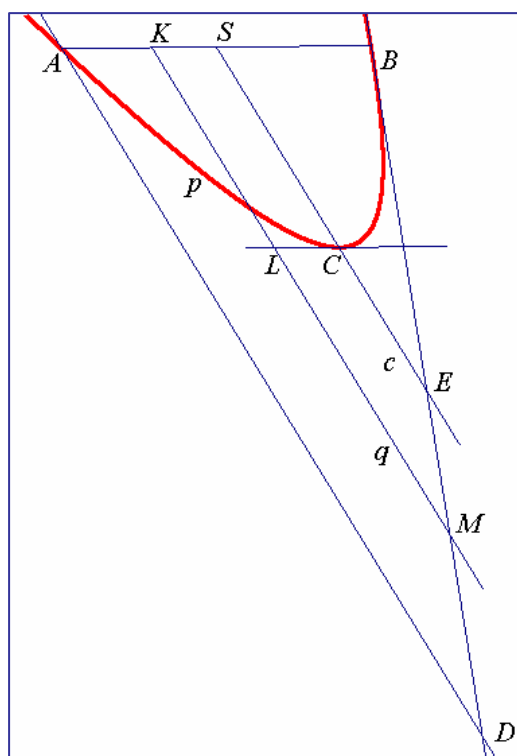
Archimédes pomocí svých fyzikálních znalostí získal odhad výsledku a posléze touto exhaustivní metodou tento výsledek dokázal. Eudoxovu metodu vyžíval dvojím způsobem:

- a) vyšetřovanou míru M aproximuje dvěma posloupnostmi $\{a_n\}, \{b_n\}$ s kladnými členy tak, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, platí $a_n < M < b_n$; hodnota S (v dnešní symbolice se vlastně jedná o společnou limitu obou posloupností) je odhad a rovnost $S = M$ dokazuje tak, že od předpokladů

$M < S, M > S$ dojde ke sporům (konkrétně zpravidla prokáže, že pro některé n platí $b_n < S$ nebo $a_n > S$);

- b) vyšetřovanou míru M vyjádří dvěma posloupnostmi $\{a_n\}, \{c_n\}$ s kladnými členy takovými, že pro každé n přirozené platí $M = a_n + c_n$, přitom pro každé $\varepsilon > 0$ dokáže najít takové n , že $c_n < \varepsilon$; hodnotu S bere z odhadu a rovnost $M = S$ dokazuje tím, že od předpokladů $M < S, M > S$ dojde ke sporům [5].

Nyní se věnujme kvadratuře paraboly. Archimédes nejprve „mechanickou metodou“ odvodil (odhadl) plochu parabolické úseče a potom pomocí exhaustivní metody geometricky dokázal platnost vyvozených výsledků. Uvažoval následujícím způsobem.



obr. 2.12

Jestliže je parabolická úseč (obr. 2.12) vymezena tětivou AB a obloukem paraboly p , pak úsečku AB nazveme základnou parabolické úseče. Vedeme-li k oblouku paraboly vymežujícímu uvažovanou úseč tečnu rovnoběžnou se základnou AB , pak bod dotyku C nazveme vrchol úseče a jeho vzdálenost od přímky AB výška úseče.

Uvažujme dále tečnu, která se paraboly p dotýká v bodě B , a přímku vedenou bodem A , která je rovnoběžná s polopřímkou SC ; jejich průsečík označme D . Polopřímku SC budeme v dalších úvahách nazývat osou paraboly (i

přesto, že je obecně různá od osy souměrnosti).

Prvních pět vět Archimédova pojednání se týká vlastností paraboly a parabolické úseče. nejdůležitější jsou tato dvě tvrzení.

(I) Jestliže je přímka c procházející bodem C rovnoběžná s osou paraboly p a protíná úsečky AB a BD po řadě v bodech S a E , potom je

$$|AS| = |BS| \quad \wedge \quad |CS| = |CE|.$$

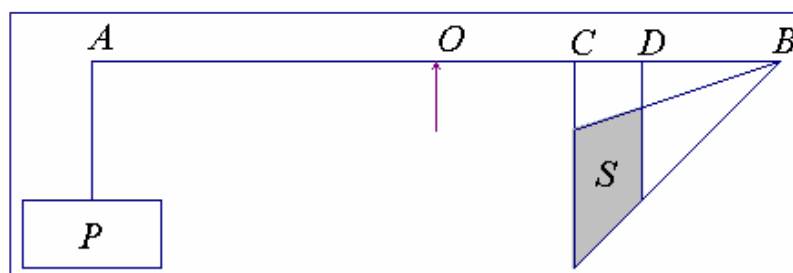
(II) Jestliže je přímka q rovnoběžná s osou paraboly a protíná úsečku AB , parabolu p a úsečku BD po řadě v bodech K , L a M , potom je

$$|AK| : |AB| = |KL| : |KM|.$$

Z tvrzení (I) zjevně vyplývá, že obsah trojúhelníku ABD je roven čtyřnásobku obsahu trojúhelníku ABC , oba trojúhelníky mají totiž stejnou základnu AB a výška trojúhelníku ABD je čtyřnásobkem výšky trojúhelníku ABC [3].

Až po této geometrické přípravě Archimédes přistupuje k vlastnímu mechanickému odvození plochy parabolické úseče. V následujícím textu velmi stručně, a pokud možno názorně, shrneme výsledky osmi vět, ve kterých jsou vyvažovány obsahy trojúhelníků a lichoběžníků na rovnoramenné páce AB podepřené v bodě O . Tyto závěry jsou důležité pro pochopení dalších úvah.

Jestliže je obsah S šedého lichoběžníku (obr. 2.13) „zavěšeného“ v bodech C a D vyvážen závažím P zavěšeným v bodě A , potom platí, že $S \cdot |CO| < P \cdot |AO| < S \cdot |DO|$ (podle [3]). Tvrzení je velmi jednoduché, ve stejné

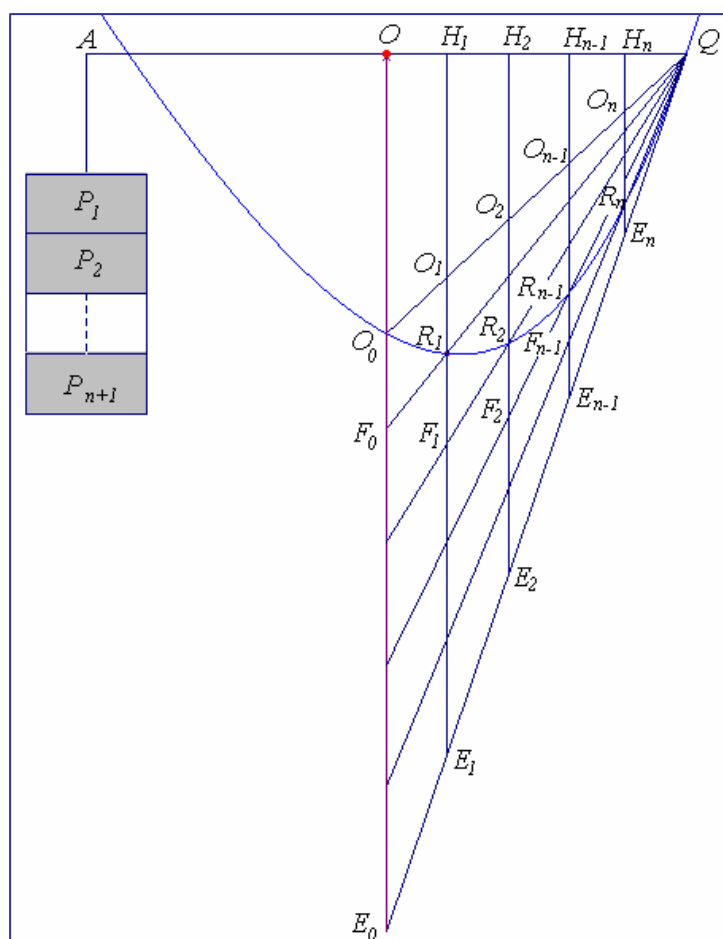


obr. 2.13

situaci lze totiž plochu S zavěsit pouze v jednom bodě X , který bude ležet mezi body C , D na OB a bude kolmým průmětem těžiště lichoběžníka na úsečku AB . V takovém případě bude rovnováha zachována. Z toho nutně plyne, že kdybychom zavěsili plochu S pouze v bodě C resp. D , dojde k převážení páky závažím P resp.

plochou S , což potvrzuje uvedenou nerovnost. Poznamenejme, že bod C může být shodný s bodem O a bod D může být shodný s bodem B (lichoběžník v tom případě přejde v trojúhelník). Zavěšený lichoběžník (resp. trojúhelník) může být pravoúhlý, tj. jedna jeho strana může ležet na úsečce OB .

Nyní Archimédes přistupuje k výpočtu vlastního obsahu parabolické úseče, přičemž využívá výsledků předchozích úvah. Nejprve odvodí a posléze exhaustivní metodou dokáže, že obsah úseče je roven jedné třetině obsahu trojúhelníku úseči opsaného a následně geometrickou úvahou dovodí a dokáže, že obsah úseče je roven čtyřem třetinám trojúhelníku úseči vepsaného.



obr. 2.14

Parabolickou úseč vymezenou parabolou p a tětivou O_0Q „zavěsíme“ na rovnoramennou páku s krajními body A , Q podepřenou v jejím středu O (obr. 2.14) tak, aby přímka OO_0 byla rovnoběžná s osou paraboly p . V bodě q vedeme k parabole p tečnu a její průsečík s přímkou OO_0 označíme E_0 . Základnu O_0Q rozdělíme body $O_1, O_2, \dots, O_n$ na $n+1$ stejných dílů a těmito body vedeme rovnoběžky s osou paraboly p . Získáme tak

průsečíky $H_1, H_2, \dots, H_n$ s úsečkou OQ , průsečíky $R_1, R_2, \dots, R_n$ s parabolou p a průsečíky $E_1, E_2, \dots, E_n$ s tečnou QE_0 . Potom vedeme polopřímky $QR_1, QR_2, \dots, QR_n$ a získáme průsečíky $F_0, F_1, \dots, F_{n-1}$.

Na páce AQ nejprve vyvážíme obsah S trojúhelníku O_0QE_0 , který je úsečkami $O_1E_1, O_2E_2, \dots, O_nE_n$ rozdělen na n lichoběžníků a jeden trojúhelník. Jejich obsahy $L_1, L_2, \dots, L_{n+1}$ (které zůstanou na původních místech) vyvážíme závažím P zavěšeným v bodě A .

Obsah S však můžeme uvažovat soustředěný do těžiště trojúhelníku O_0QE_0 , které je „zavěšeno“ v jedné třetině ramene OQ (kolmý průmět těžiště trojúhelníka na rameno OQ); odtud

$$S \cdot \frac{1}{3} |OQ| = P \cdot |AO|.$$

Protože je $|AO| = |OQ|$, je

$$P = \frac{1}{3} \cdot S.$$

Obsahy L_1 až L_{n+1} budeme nyní uvažovat zavěšené v levých, resp. pravých krajních bodech příslušných intervalů na rameni OQ páky AQ . Čili obsahy L (podle výše uvedené vlastnosti páky) budou převáženy závažím P , resp. závaží P převáží obsahy L (v prvním případě je obsah L_1 zavěšen v bodě O , takže rameno OQ nezatěžuje).

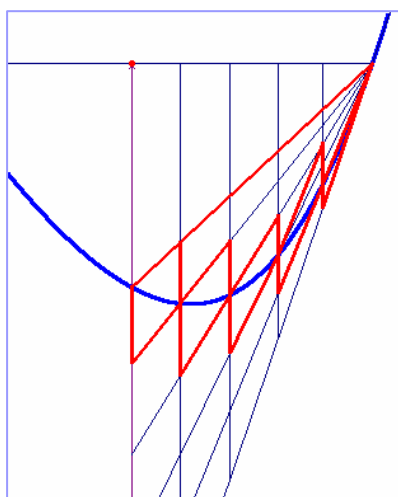
$$L_2 \cdot |OH_1| + \dots + L_{n+1} \cdot |OH_n| < P \cdot |AO| < L_1 \cdot |OH_1| + \dots + L_{n+1} \cdot |OQ|$$

Podle vlastnosti (II) paraboly lze nyní vyjádřit:

$$\frac{|OH_1|}{|OQ|} = \frac{|O_1R_1|}{|O_1E_1|}, \dots, \frac{|OH_n|}{|OQ|} = \frac{|O_nR_n|}{|O_nE_n|} \Rightarrow |OH_1| = |OQ| \cdot \frac{|O_1R_1|}{|O_1E_1|}, \dots, |OH_n| = |OQ| \cdot \frac{|O_nR_n|}{|O_nE_n|},$$

tzn. po dosazení a úpravě ($|AO| = |OQ|$) je

$$\sum_{i=1}^n L_{i+1} \cdot \frac{|O_iR_i|}{|O_iE_i|} < P < \sum_{i=1}^n L_i \cdot \frac{|O_iR_i|}{|O_iE_i|} + L_{n+1}. \quad (\#)$$



obr. 2.15

Levá strana nerovnosti vyjadřuje obsah S_R útvaru $O_1QR_nR_{n-1}\dots R_1$ úseči vepsaného (obr. 2.15), analogicky pravá strana vyjadřuje obsah S_F útvaru $O_0QE_nR_nF_{n-1}\dots R_1F_0$ parabolické úseči opsaného. Např. totiž součin $L_1 \cdot \frac{|O_1R_1|}{|O_1E_1|}$ vyjadřuje obsah lichoběžníku $O_0O_1R_1F_0$ neboť podíl $\frac{|O_1R_1|}{|O_1E_1|}$ je vlastně koeficient podobnosti lichoběžníků $O_0O_1E_1E_0$ a $O_0O_1R_1F_0$. Pro tyto obsahy platí

nerovnost (převzato z [3]):

$$S_R < \frac{1}{3} \cdot S_\Delta < S_F$$

Pro úplnost a větší názornost naznačme ještě jednu úvahu, kterou lze dospět ke stejnému výsledku. Představme si, že lichoběžník $O_1O_2E_2E_1$ je vyvážen závažím P_1 . Pro hmotnost P_1 a plochu L_2 platí:

$$L_2 \cdot |OH_1| < P_1 \cdot |AO| < L_2 \cdot |OH_2| \Rightarrow L_2 \cdot \frac{|OH_1|}{|OQ|} < P_1 < L_2 \cdot \frac{|OH_2|}{|OQ|}, \quad (##)$$

neboť $|AO| = |OQ|$. To dále platí analogicky i pro ostatní lichoběžníky.

Z toho plyne, že pokud $P_1 + P_2 + \dots + P_{n+1} = \frac{1}{3} S_\Delta = P$ vyvažuje trojúhelník OE_0Q ,

tak potom úseči vepsaný útvar musí být vyvažován menším závažím, než je P a naopak opsaný útvar větším závažím než je P [7], protože podle (II) je

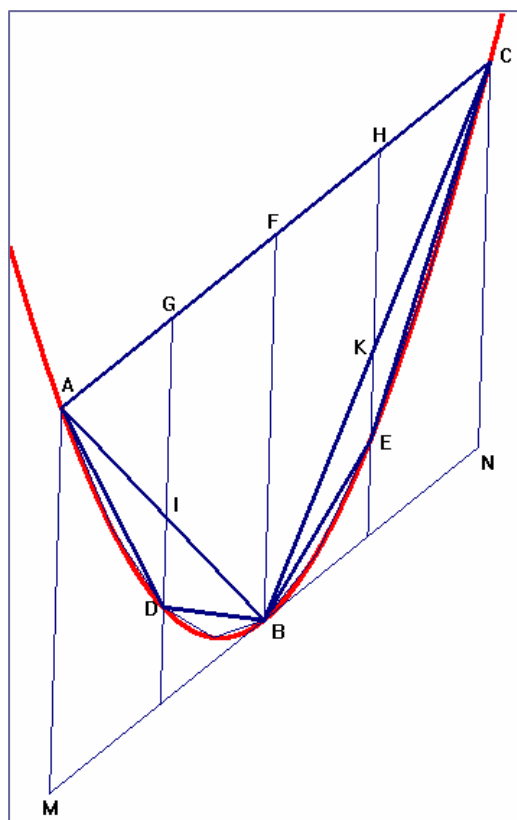
$\frac{|OH_i|}{|OQ|} = \frac{|O_iR_i|}{|O_iE_i|}, i = 1, 2, \dots, n$. Po dosazení do (##) a úpravě docházíme ke vztahu (#)

$$\sum_{i=1}^n L_{i+1} \cdot \frac{|O_iR_i|}{|O_iE_i|} < P < \sum_{i=1}^n L_i \cdot \frac{|O_iR_i|}{|O_iE_i|} + L_{n+1}, \text{ tedy ke } S_R < \frac{1}{3} \cdot S_\Delta < S_F.$$

uvažované parabolické úseče je roven $\frac{1}{3} \cdot S_{\Delta}$. Ke sporu přivedl předpoklad $S > \frac{1}{3} S_{\Delta}$

písmenem V vrchol (bod dotyku úseče s přímkou rovnoběžnou s úsečkou AQ)
 uvažované úseče, pak je její obsah roven čtyřem třetinám obsahu trojúhelníku O_0QV
 [3]. Podle označení úseče v obrázku 2.12 je obsah vyjádřen vztahem

$$S = \frac{4}{3} \cdot S_{\Delta ABC} . \quad (###)$$



obr. 2.16

Ve zbytku pojednání Archimédes exhaustivní metodou geometricky odvozuje a nakonec ve větě 24 dokazuje uvedený vztah. Než přistoupíme k vysvětlení samotného důkazu, vysvětleme několik vět, které předcházejí a jsou nezbytné pro pochopení myšlenky důkazu.

Archimédes odvodil, že trojúhelník, který má s úsečí paraboly společnou základnu a stejnou výšku, je větší než polovina úseče.

Trojúhelník ABC je polovinou rovnoběžníku $AMNC$ (obr. 2.16) tvořeného tečnou v bodě B a základnou AC s ní rovnoběžnou; AM , CN jsou vrznení věty vyplývá z toho, že úseč je menší

než rovnoběžník $ACMN$, tudíž trojúhelník, který je polovinou lichoběžníka musí nutně být větší než polovina úseče. Tento fakt analogicky platí pro trojúhelníky ADB , BEC sestrojené pomocí průměrů ID , KE rovnoběžných s FB .

Z vlastností paraboly Archimédes odvodil, že: *trojúhelník ABC je osmkrát větší než každý z trojúhelníků ADB , BEC* [5]. Trojúhelníky ADB a BEC tvoří tedy dohromady čtvrtinu ABC (každý z nich je osminou ABC a jsou dva). Do vzniklých čtyř úsečí jsou opět vepsány stejným způsobem další čtyři trojúhelníky, pro které platí totéž co pro ABC a tak pokračujeme až do nekonečna [7]. Trojúhelník ABC je tedy prvním útvarem vepsaným do úseče ABC ; druhým je sjednocení trojúhelníků ABC , ADB , BEC ; třetí se získá připojením dalších trojúhelníků se základnami AD , DB , BE , EC atd. Pro obsahy těchto útvarů platí:

(III) *Vezmeme-li jakýkoliv počet ploch tvořících spojitou proporci v poměru 4 ku 1 (8 ku 2), přičemž největší se rovná trojúhelníku vepsanému do úseče, pak všechny tyto plochy dohromady budou menší než úseč* [5].

Plocha úseče je tak postupně vyčerpávána. K původnímu obsahu trojúhelníku ABC jsou nejprve přičteny dvě jeho osminy, pak čtyři jeho čtyřiašedesátiny atd. [7]. Obsah M vepsaného útvaru, tak můžeme vyjádřit geometrickou řadou:

$$M = a + \frac{2}{8}a + \left(\frac{1}{4}a\right) \cdot \frac{2}{8} + \frac{a}{4^3} + \dots + \frac{a}{4^n},$$

kde a je plocha trojúhelníka ABC .

Na základě věty (III) konstatujeme, že M je menší než plocha úseče, byť o hodnotu menší než je libovolně malá veličina. Z toho vyplývá, že pro obsah parabolické úseče platí:

$$M + \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{4^n} = \frac{4}{3}a.$$

Vysvětlení tohoto vztahu přináší vlastní Archimédův důkaz. Začíná větou 24:

Každá úseč sevřená mezi přímkou a parabolou tvoří čtyři třetiny trojúhelníku, který s ní má společnou základnu a stejnou výšku [5].

Nechť $ADBEC$ je úseč sevřená mezi přímkou a parabolou, ABC je trojúhelník mající s úsečí společnou základnu a stejnou výšku; nechť plocha L tvoří čtyři třetiny trojúhelníku ABC . Je třeba dokázat, že tato plocha je rovna úseči $ADBEC$.

Důkaz je prováděn opět sporem:

1. Předpokládejme, že úseč je větší než plocha L . Archimédes říká: *Tehdy jsem vepsal trojúhelníky (ADB , BEC) do úsečí zbylých po stranách, vepsal jsem další trojúhelníky mající s těmito úsečemi společné základny a výšky, a potom do takto získaných úsečí stále vpisuji dvojice trojúhelníků, které s nimi mají společné základny a výšky; zbývající úseče se tedy jednou stanou menšími než ten rozdíl, o který je úseč $ADBEC$ větší než plocha L , tzn. vepsaný mnohoúhelník bude větší než plocha L , ale to není možné – docházíme tedy ke sporu! Máme plochy tvořící spojitou proporci v poměru 4:1, první je trojúhelník ABC , čtyřikrát větší než oba trojúhelníky ADB a BEC dohromady, dále tyto trojúhelníky jsou čtyřikrát větší než trojúhelníky vepsané do dalších úsečí a tak dále. Podle věty (III) je jasné, že všechny tyto plochy dohromady budou menší než čtyři třetiny největší plochy trojúhelníku ABC . Plocha L tvoří čtyři třetiny největší plochy. Z toho vyplývá, že úseč $ADBEC$ nebude větší než plocha L .*
2. Předpokládejme nyní, že úseč bude menší než plocha L . Vezměme plochu L_1 rovnou trojúhelníku ABC , potom plochu L_2 rovnou čtvrtině L_1 , dále L_3 rovnou čtvrtině L_2 a takto budeme brát ve spojitě proporci až do doby, kdy se poslední plocha ukáže být menší než ten rozdíl, o který je plocha L větší než úseč $ADBEC$. Nechť tato menší plocha je L_n ; v ten okamžik plochy L_1 , L_2 , L_3 , L_n dohromady spolu s třetinou L_n tvoří čtyři třetiny L ($M + \frac{1}{3} \frac{a}{4^n} = \frac{4}{3} a$). Ale L také tvoří čtyři třetiny L_1 ; to znamená, že L bude rovna plochám L_1 , L_2 , L_3 , L_n vzatým spolu s třetinou L_n . Protože plocha L je větší než plochy L_1 , L_2 ,

L_3, L_n o veličinu menší než L_n , ale úseč $ADBEC$ je o veličinu větší než L_n , je jasné, že plochy L_1, L_2, L_3, L_n budou větší než úseč. To ale není možné, protože podle (III), když se vezme libovolný počet ploch tvořících spojitou proporci v poměru 4:1, přičemž největší se rovná trojúhelníku vepsanému do úseče, pak všechny tyto plochy dohromady budou menší než úseč; to znamená, že úseč $ADBEC$ není menší než plocha L . Ale je také dokázáno, že nebude ani větší; tedy bude rovna ploše L . Ale plocha L tvoří čtyři třetiny trojúhelníku ABC ; to znamená, že úseč $ADBEC$ se rovná čtyřem třetinám trojúhelníku ABC [5].

Tím byl důkaz zcela vyčerpán. Archimédes pozdvihl Eudoxovu metodu na novou a vyšší úroveň. U Archiméda již existovaly skutečné integrální součty – dolní i horní – ve skutečnosti udělal i limitní přechod, ale na rozdíl od Newtona a Leibnize Archimédes o těchto pojmech výslovně nemluví a nepoužívá ani odpovídající symboliku. Vedle toho Archimédes užíval své metody jen ve speciálních, i když mnohých a různorodých případech, kdežto v 17. století se tato metoda stala obecnou [7].

Kolman v [7] na str. 48 uvádí: „...Archimédova metoda je sice v základní ideji příbuzná metodě určitého integrálu, že se však nemůže pokládat za správné, když někteří historikové matematiky obě tyto metody ztotožňují a tak přenášejí současné pojmy do starověku. Ještě méně oprávněné je dosti časté tvrzení, že Archimédes ve skutečnosti vážil úseč vyřezanou z nějakého stejnorodého materiálu a srovnával ji s váhou stejným způsobem zhotoveného trojúhelníka. Kromě toho Archimédes nepokládal mechanickou metodu za průkaznou v geometrii a připouštěl ji jen k předběžnému odhadu, který mu pomohl nalézt výsledek. Vycházel přitom z logické zásady, která nedovoluje „záměnu rodu druhem“. Mechanické pojmy, které mají větší počet znaků než pojmy geometrické, pokládá již Aristoteles za geometrii cizí, což však nemělo nic společného s platónským přehlížením mechaniky.“

2.3.3 O metodě

Z „Poselství Eratosthenovi o mechanické metodě řešení geometrických úloh“ byla v kapitole „Archimédovo dílo“ již uvedena krátká, nicméně podstatná citace, která demonstruje jeho způsob objevování a dokazování matematických formulí. V tomto pojednání o 16 větách se znovu odvozuje plocha parabolické úseče:

Jako první popíšeme to, co jsme jako první věc objevili pomocí mechaniky, a to, že každá úseč paraboly vytváří čtyři třetiny trojúhelníku s touž základnou a stejnou výškou ... [5].

Následují věty o těžištích hlavně rovinných útvarů (přímky a trojúhelníka), které Archimédes využívá v dalším textu. S těmito formulemi nakládá jako s již dokázanými. Uvádí také větu o těžišti kužele: *Těžiště každého kužele je bod, který dělí jeho osu tak že, část přiléhající k vrcholu kužele je trojnásobkem části přiléhající k základně.* Protože důkaz této věty, ani další výsledky týkající se kužele, nebyly nalezeny v žádném jeho díle, musela být práce o kuželu ztracena [16].

Odvození obsahu parabolické úseče bylo stručnější než v pojednání „O Kvadratuře paraboly“. Pro potřeby „dopisu Eratosthenovi“ celou úvahu Archimédes zjednodušil, a to hlavně proto, že nepřipojuje důkaz (je uveden pouze v „O kvadratuře...“) – nepotřeboval tedy v odvození mechanickou ani geometrickou přípravu pro důkaz.

Dále se dokazuje, že objem válce opsaného kouli (nebo rotačnímu elipsoidu) a majícího výšku rovnou průměru koule (nebo ose rotačního elipsoidu) se rovná třem polovinám objemu koule (nebo elipsoidu). Blíže se těmto výsledkům budeme věnovat v následující kapitole. Nalezneme zde také objem úsečí vytatých na rotačních tělesech: paraboloidu, kouli (kulovém vrchlíku), elipsoidu a dvoudílném hyperboloidu rovinou kolmou k ose.

Nakonec Archimédes stanovuje objemy dvou těles, z nichž jedno vytváří rovinný řez válce, druhé průnik dvou kruhových válců stejného průměru a vzájemně kolmých a protínajících se os [7].

2.3.4 O kouli a válci

Archimédes v dopise, kterým uvozuje první knihu pojednání *O kouli a válci*, sděluje Dositheovi, že původní své výsledky zde publikuje proto, aby se matematici mohli seznámit s důkazy a vyslovit se o jejich ceně [7]. Základními výsledky první knihy jsou důležitá tvrzení o povrchu a objemu koule a jejích částí. Archimédes je formuloval přibližně takto:

1. *Plocha povrchu koule je rovna čtyřnásobku plochy jejího největšího kruhu.*
2. *Objem koule je roven čtyřnásobku objemu kužele, jehož poloměr i výška jsou rovny poloměru koule.*

Protože konstanta π figuruje ve vzorcích pro výpočet, jak obvodu a obsahu kruhu, tak i objemu a povrchu koule (a tedy i jejích částí) – což vyplývá z výše uvedených vět, můžeme tato dvě tvrzení přeformulovat:

- (I) *Povrch koule je roven dvěma třetinám povrchu opsaného válce, tj. povrchu pláště opsaného válce.*
- (II) *Objem koule je roven dvěma třetinám objemu opsaného válce.*

$P_k = 4\pi \cdot r^2$ je povrch koule a $V_k = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$ podle formule 1. její objem, kde r je její poloměr. $P_v = 2\pi \cdot s \cdot (s + v)$ je povrch pláště válce a $V_v = \pi \cdot s^2 \cdot v$ jeho objem, kde s je poloměr podstav a v jeho výška. Pokud je válec opsaný kouli, platí $r = s$ a $v = 2r$, podle (I), je:

$$4\pi \cdot r^2 = \frac{2}{3} \cdot 2\pi \cdot r \cdot (r + 2r) \Rightarrow 4\pi \cdot r^2 = 4\pi \cdot r^2,$$

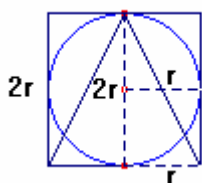
podle (II), je:

$$\frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = \frac{2}{3}\pi \cdot r^2 \cdot 2r \Rightarrow \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3.$$

Tato dvě tvrzení se dobře pamatují; mohou proto sloužit žákům a studentům pro rychlé vybavení vzorců pro výpočet povrchu i objemu koule ve školské matematice.

Druhé tvrzení má následující zajímavý důsledek:

Objemy kužele o poloměru podstavy r a výšce $2r$, koule o poloměru r a válce o poloměru r a výšce $2r$ jsou v poměru $1 : 2 : 3$.



Věta říká, že pokud $V_{ku} = \frac{2}{3}\pi \cdot r^3$ je objem kužele o

poloměru podstavy r a výšce $2r$, $V_{ko} = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$ objem koule

o poloměru r a $V_v = 2\pi \cdot r^3 = \frac{6}{3}\pi \cdot r^3$ objem válce o

poloměru podstavy r a výšce $2r$, tak potom platí $V_{ku} : V_{ko} : V_v = 1 : 2 : 3$. Což je vidět z našeho zápisu na první pohled.

Uvědomme si, že tento důsledek vlastně říká, v jakém poměru je koule s jí opsaným válcem a kužel s jemu opsaným válcem, lze tedy zpět dovodit věty (I) a (II).

3. *Povrch kulového vrchlíku je roven ploše kruhu jehož poloměr je roven vzdálenosti vrcholu vrchlíku od jeho okraje.*

Toto tvrzení lze pomocí Eukleidovy věty o odvěsně přeformulovat na nám známou formuli:

Povrch vrchlíku o výšce v odříznutého z koule o poloměru r je roven $2\pi \cdot rv$.

Jako poslední pouze uveďme větu o kulové výseči, kterou Archimédes formuloval až v 2. knize svého pojednání:

4. *Objem kulové výseče je roven objemu kužele, jehož výška je rovna poloměru koule a jehož základna má obsah rovný povrchu pláště kužele vepsaného v příslušné úseči [3].*

Jedním z dílčích výsledků tohoto pojednání je formule o povrchu pláště kužele.

Povrch pláště kužele o poloměru základny r a straně s je roven obsahu kruhu o poloměru $\sqrt{rs}$.

Důkaz byl proveden exhaustivní metodou: necht' je dán kužel, jehož základnou je kruh a o poloměru r a ploše A , a jehož stranou je s . Uvažujme dále kruh b o poloměru $d = \sqrt{rs}$ a obsahu B . Musíme tedy dokázat, že povrch pláště P uvažovaného kužele je roven B .

Předpokládejme, že $B < P$, tj. $\frac{P}{B} > 1$. Pro dostatečně velké $n \in \mathbb{N}$ je poměr ploch B_n^r opsaného a B_n^ρ vepsaného pravidelného n -úhelníku kruhu b bližší jedničce než poměr P/B :

$$\frac{P}{B} > \frac{B_n^r}{B_n^\rho} > 1$$

Označme A_n^r obsah pravidelného n -úhelníku opsaného kruhu a , P_n^r obsah pláště pravidelného n -bokého jehlanu opsaného našemu kuželi.

Protože obsahy pravidelných n -úhelníků opsaných dvěma kruhům jsou úměrné čtvercům jejich poloměrů, můžeme psát:

$$\frac{A_n^r}{B_n^r} = \frac{r^2}{p^2} = \frac{r^2}{rs} = \frac{r}{s} = \frac{A_n^r}{P_n^r}.$$

Obsahy A_n^r , resp. P_n^r jsou totiž n -násobky obsahu trojúhelníku s výškou r , resp. s a stejnou základnou. Z předchozího vztahu plyne rovnost $B_n^r = P_n^r$ (čitatelé obou zlomků se rovnají, musí se tedy rovnat i jmenovatelé). Dosadíme-li do výchozí nerovnosti, získáme vztah

$$\frac{P}{B} > \frac{P_n^r}{B_n^r},$$

a to není možné, protože $P_n^r > P \wedge B_n^r < B$. Předpoklad $B < P$ je tím přiveden ke sporu. Analogicky se přivede ke sporu předpoklad $B > P$ [3].

Druhá kniha této práce obsahuje šest úloh a tři věty. V úlohách se má sestavit koule stejně veliká jako daný kužel či válec; rozdělit kouli rovinou tak, aby objemy nebo plochy povrchů obou vrchlíků byly v daném poměru; pokud jsou dány dva vrchlíky dvou koulí, má se najít třetí podobný jednomu z nich a shodný plochou i objemem s druhým; od dané koule se má oddělit vrchlík, jehož objem by byl v daném poměru ke kuželi s toutéž základnou a výškou [7].

Archimédovo pojednání končí zajímavou větou řešící tzv. maximální problém:

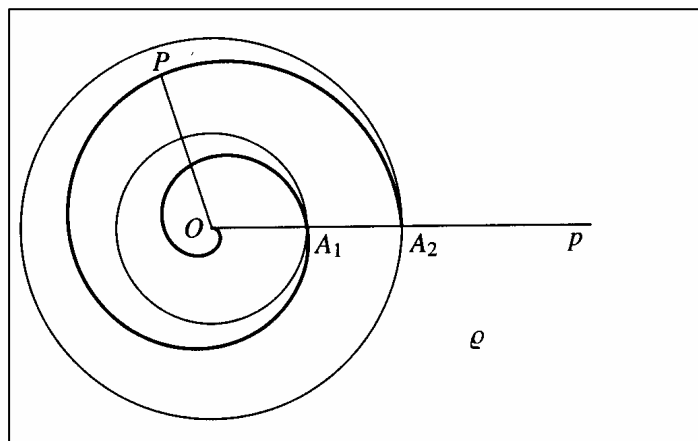
Ze všech kulových úsečí se stejným povrchem má polokoule největší objem.

2.3.5 O spirálách

Toto pojednání se skládá z 28 vět a začíná opět předmluvou věnovanou Dositheovi. Archimédes v ní lituje smrti Konóna, jako veliké ztráty pro matematiku; opravuje zde dvě poslední věty druhé knihy svého pojednání „O kouli a válci“, které Dositheovi původně sdělil v chybné formulaci [7]. Prvních 11 vět se věnuje rovnoměrnému pohybu, vlastnostem kružnic, délkám oblouků, úseček a jejich poměrů a aritmetické posloupnosti. Teprve pak přichází na řadu hlavní téma této práce – spirála.

Archimédes definuje spirálu (dnes jí běžně nazýváme Archimédova) jako čaru opisovanou bodem P pohybujícím se po polopřímce p rovnoměrně od jejího počátku O a která se zároveň rovnoměrně otáčí v rovině ρ kolem svého počátku O . Bod O je tzv. *počátek* spirály, původní poloha polopřímky p se nazývá *výchozí polopřímka*. V polárních souřadnicích je Archimédova spirála vyjádřena předpisem $r = v \cdot \varphi$, kde r je délka průvodiče, kladné reálné číslo v je rychlost bodu P na polopřímce p a proměnná φ značí úhel opsaný polopřímkou p od počátku pohybu. Příkladem aplikace Archimédovi spirály je drážka na gramofonové desce.

Nechť jsou průsečíky polopřímky p se spirálou body A_1, A_2, K, A_n . Úsečka OP se nazývá *průvodič* bodu P (obr. 2.17). Část spirály, která je vymezena počátkem O a jejím prvním průsečíkem A_1 s výchozí polopřímkou, se nazývá *první závit* spirály; část spirály, která je vymezena body A_1 a A_2 , je *druhý závit* spirály atd. Důležitou roli hrají kruhy se středem O a poloměry OA_1, OA_2, K, OA_n - jde o tzv. *první kruh*, *druhý kruh* až *n -tý kruh*.

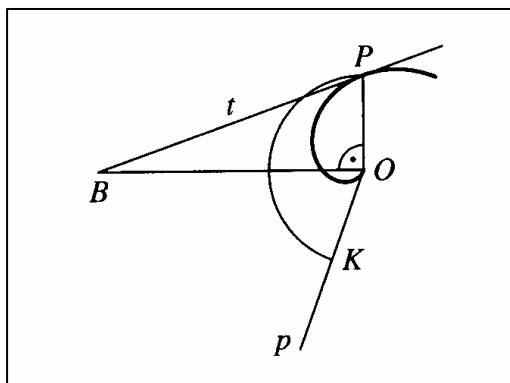


obr. 2.17

Archimédes se podrobně zabýval problematikou tečen ke spirále. Ukázal – kromě jiného – že tečny ke spirále v bodech A_1, A_2, K, A_n vytínají na kolmici vedené počátkem O k výchozí polopřímce p délky rovné obvodu prvního

kruhu, dvojnásobku obvodu druhého kruhu, trojnásobku obvodu třetího kruhu atd. (tato vlastnost Archimédovy spirály souvisí s rektifikací kružnice). Dokázal ale také obecnější výsledek (obr. 2.18):

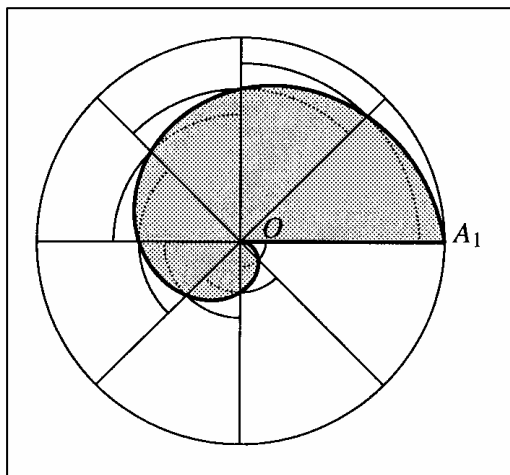
Tečna t ke spirále v libovolném jejím bodě P vytíná na kolmici vedené počátkem O k průvodiči OP délku oblouku kruhu o poloměru OP , který odpovídá úhlu opsanému průvodičem za celou dobu jeho pohybu.



obr. 2.18

Délka oblouku PK je rovna délce úsečky OB . Zdůrazněme, že tvrzení platí pro bod P ležící na kterémkoli závitě spirály. Důkaz tohoto tvrzení je veden sporem; Archimédes dokázal, že délka úsečky OB nemůže být ani větší, ani menší než délka oblouku PK .

Vrcholem tohoto Archimédova pojednání jsou výsledky, které se týkají obsahu částí roviny omezených spirálou. Ukažme nejjednodušší případ, tj. výpočet obsahu S útvaru U , který je omezen prvním závitěm spirály a úsečkou OA_1 (obr. 2.19).



obr. 2.19

Do útvaru U je možno vepsat útvar U_v , který se skládá z navzájem podobných kruhových výsečí. Útvaru U je rovněž možno opsat útvar U_o , který je složen z navzájem podobných kruhových výsečí. Obsahy těchto dvou útvarů se mohou lišit o menší hodnotu, než je jakkoli malá zvolená hodnota ε .

Archimédes v myšlenkách rozpůlil první kruh, rozpůlil vzniklé polokruhy a v půlení pokračoval tak dlouho, až byl obsah každé ze vzniklých shodných výsečí menší než konstanta ε . Získané body na oblouku spirály pak použil ke konstrukci útvarů U_o a U_v (viz obr. 2.19). Evidentně, první opsaná výseč je shodná s první vepsanou, druhá opsaná výseč je shodná s druhou vepsanou, předposlední opsaná výseč je shodná s poslední

vepsanou. Rozdíl obsahů útvarů U_O a U_V je tedy roven obsahu poslední opsané výseče, nutně proto musí být menší než ε .

Archimédes pak exhaustivně dokázal, že obsah S útvaru U je roven jedné třetině obsahu G prvního kruhu.

Nejprve předpokládal, že $S < \frac{1}{3}G$, a uvažoval opsaný útvar U_O , pro jehož obsah F platí $S < F < \frac{1}{3}G$. Poloměry $r_1, r_2, \dots, r_k$ kruhových výsečí, ze kterých se skládá útvar U_O , tvoří aritmetickou posloupnost, jejíž první člen r_1 je roven její diferenci a poslední člen r_k poloměru prvního kruhu. Podle jednoho z úvodních Archimédových výsledků tohoto díla platí pro takovouto posloupnost nerovnost

$$k \cdot r_k^2 < 3 \cdot (r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_k^2). \quad (I)$$

Obsahy našich (podobných) výsečí jsou úměrné obsahům čtverce nad jejich poloměry. Z nerovnosti (I) proto plyne, že $G < 3F$, čímž je předpoklad $S < \frac{1}{3}G$ doveden ke sporu. Analogicky je doveden ke sporu předpoklad $S > \frac{1}{3}G$.

Archimédes dále dokázal obecnější tvrzení. Vypočítal obsah útvaru omezeného částí spirály a průvodičem OB , jehož koncový bod B leží na libovolném závitě spirály. Jeho výsledek je možno vyjádřit větou:

Obsah plochy opsaného průvodičem za celou dobu jeho pohybu je roven jedné třetině obsahu kruhové „výseče“ o poloměru OB a středovém úhlu opsaném průvodičem za celou dobu jeho pohybu (pokud leží bod B na druhém závitě spirály je středový úhel větší než 360° , pokud leží na třetím je větší než 720° atd.)

2.3.6 O konoidech a sféroidech

Jako každý ze svých spisů, také pojednání „O konoidech a sféroidech“ uvádí Archimédes dopisem, který je stejně jako pojednání „O kvadratuře paraboly“ věnován Dositheovi. V úvodu Archimédes podává definice ploch, kterými se bude zabývat: rotačního paraboloidu, dvoudílného rotačního hyperboloidu a elipsoidu [7] (Archimédes sám nepoužíval tyto pojmy, jeho názvosloví uvedeme dále). Dílo obsahuje 32 vět, z nichž prvních 18 (a navíc dvě poučky) má přípravný charakter. Archimédes zde dokazuje některé vlastnosti posloupností, zejména součtů prvních n jejich členů, pak se věnuje kuželosečkám.

Parabola (hyperbola) je u Archiméda definována jako řez pravoúhlého (tupoúhlého) kužele rovinou kolmou na jednu z jeho povrchových přímek. Kružnice (elipsa) je definována jako řez ostroúhlého kužele rovinou, která protíná všechny povrchové přímky a je (není) kolmá na jeho osu.

Rotací paraboly kolem její osy vznikne rotační paraboloid (podle Archiméda *pravoúhlý konoid*), rotací hyperboly kolem osy vznikne (dvojdílný) rotační hyperboloid (*tupoúhlý konoid*), rotací elipsy kolem hlavní (*většího*), resp. vedlejší (*menšího*) osy (*průměru*) vznikne protáhlý, resp. plochý rotační elipsoid (*sféroid*) [3]. Název *konoid* je odvozen od kuželovité podoby tělesa a *sféroid* od kulovité podoby (sféry) [7].

Výsledky, uvedené ve zbytku pojednání, se týkají výpočtu objemu úsečí paraboloidu, hyperboloidu a elipsoidu. Tyto úseče jsou odříznuty rovinou, která může, ale nemusí být kolmá k ose příslušného paraboloidu, hyperboloidu či elipsoidu. Vše je postaveno na exhaustivní metodě. Archimédes ukazuje, že ke každé takové úseči existuje vepsané a opsané těleso složené z mnoha tenkých válců a že objemy takovýchto dvou těles se mohou lišit jakkoli málo. Archimédes odvodil následující výsledky týkající se úseče paraboloidu odříznuté rovinou kolmou nebo kosou k ose paraboloidu.

Objem úseče rotačního paraboloidu je roven třem polovinám objemu kužele s touž základnou a touž osou.

Z této věty vyplývá, že odřízneme-li úseč rovinou kolmou k ose paraboloidu (jeho základna je kruh) je objem úseče roven

$$\frac{1}{2}\pi \cdot r^2 v = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 v,$$

kde v je výška úseče. Archimédes uvádí další poznatek:

Poměr objemů dvou úsečí téhož rotačního paraboloidu, které jsou odříznuty dvěma různými rovinami, je roven poměru čtverců jejich os.

Následují obdobné výsledky týkající se objemů úsečí hyperboloidu a elipsoidu. Výpočet objemu rotačního elipsoidu získává Archimédes tak, že elipsoid rozdělí rovinou procházející jeho středem na dvě shodné úseče. Objem každé z nich je roven dvojnásobku objemu kužele s toutéž základnou a toutéž osou [3].

2.3.7 O plovoucích tělesech

Tento traktát vykládá ve dvou knihách základy hydrostatiky. Dílo bylo dlouho známo jen ze středověkého latinského překladu, jeho později objevený řecký rukopis stále obsahuje některá nejasná místa, o nichž historikové fyziky diskutují. Archimédes uvozuje svůj výklad dvěma postuláty. Jeden z nich říká, že: *máme-li dvě sousedící části kapaliny v téže hloubce, pak na ně působí stejným tlakem všechna kapalina vertikálně nad nimi (předpokládáme, že hladina kapaliny je volná), a ta část kapaliny, na niž působí větší boční tlak, ustupuje té, která je vystavena menšímu bočnímu tlaku.*

Tento postulát (zejména poslední jeho část) je předmětem dohadů, zda Archimédes znal zákon o šíření tlaku v kapalině (ve školské fyzice je běžně vykládán, tak že:

pokud na kapalinu působí vnější tlaková síla, pak tlak v každém místě kapaliny vzroste o stejnou hodnotu, nebo jednodušeji: tlak vyvolaný vnější silou je ve všech místech kapaliny stejný), který v 17. stol. objevil Pascal. Způsob, jak Archimédes s tímto postulátem pracuje při důkazu svých vět o silách působících na těleso ponořené do kapaliny, svědčí o tom, že měl správnou představu o hydrostatickém tlaku. Používá totiž svůj postulát při důkazech sporem, předpokládá vlastně virtuální rozdíly tlaků (jestliže kapalina „ustupuje“, není to už hydrostatika) a pak dochází k závěru, že se boční tlaky musejí vyrovnávat.

Následují věty, které Archimédes na základě uvedeného postulátu dokazuje. První z nich je vlastně čistě geometrická a uvádí vlastnosti kulové plochy. Druhá se týká tvaru vodní hladiny. Říká, že povrch jakékoliv klidné tekutiny je částí kulové plochy, jejíž střed je ve středu Země [7]. Představu o zakřivené vodní hladině Archimédes nejspíš získal pozorováním lodí mizejících za mořským obzorem (jiné možnosti totiž neměl). Dále se Archimédes zabývá vznášením těles v kapalině. Třetí věta říká:

Těleso stejně těžké jako kapalina (tj. o téže hustotě) se ponoří do kapaliny tak, že nebude vyčnívat ani se nebude dále potápět.

Důkaz sporem vychází z předpokladu, že část tělesa bude nad hladinou. Pak se porovnává objem ponořené části tělesa a stejný objem kapaliny u hladiny a ukazuje se, že by kapalina pod tělesem díky vyčnívající části musela být více stlačena a nemohl by nastat rovnovážný stav. Dále tuto větu rozvádí pro tělesa vážící méně či více než kapalina stejného objemu a důkaz provádí analogicky.

Další věty se týkají nadlehčování těles při ponoření do kapaliny. Archimédes přitom nemluví o vztlaku, ale pracuje s rozdílem síly tíhové a síly vztlakové.

Je-li těleso lehčí než kapalina násilně do kapaliny ponořeno, je puženo vzhůru silou rovnou váze, o kterou váha stejně velkého objemu kapaliny převyšuje váhu tělesa.

Je-li těleso těžší než kapalina vhozeno do kapaliny, bude klesat tak hluboko, jak bude moci, a bude v kapalině lehčí o váhu takového množství kapaliny, které zaujímá stejný objem jako těleso.

Důkaz těchto formulí se převádí na situaci o vznášení tělesa v kapalině. Myslíme si druhé těleso takové hmotnosti a objemu, aby po spojení obou těles byla jejich výsledná hustota rovna hustotě kapaliny, takže spojená tělesa se budou v kapalině vznášet. Síla, která nadlehčuje první těleso, je pak vyrovnávána silou, která působí v kapalině na těleso druhé.

Druhá kniha Archimédova pojednání se zabývá podmínkami stabilní rovnováhy plovoucích těles, především takových, jejichž příčný svislý řez má podobu parabolické úseče, jako v případě lodního trupu [3]. Kniha se skládá z deseti, matematicky poměrně náročných, vět. Archimédes uvažuje případy, kdy je základna úseče buď celá ponořená do kapaliny, nebo je zcela nad hladinou kapaliny, a dokazuje, že v těchto případech – při odklonu osy úseče o libovolný úhel od svislé polohy – se úseč vrátí do rovnovážné polohy [7]. Archimédes pracuje s těžištěm parabolické úseče, ukazuje, že těžiště tělesa a těžiště vytěsněného objemu vody musí ležet na vertikální ose plování, a to tak, aby po vychýlení této osy od svislého směru výsledné síly vracely těleso zpět do rovnovážné polohy. Formuluje podmínku, aby *metacentrum* (průsečík osy plování s vertikálou) leželo v určité výšce nad těžištěm tělesa [3]. Stejně jako v jiných svých dílech Archimédes neodhaluje metody kterými ke svým závěrům došel [7].

Celá druhá kniha, kterou není jednoduché – zejména v původní Archimédově notaci – dešifrovat a pochopit, budí velký obdiv k Archimédově geometrickému myšlení, které bez použití infinitezimálního počtu a trigonometrie dokázalo dospět k dnešním poznatkům o stabilitě plování. Dnešní konstruktéři lodí, vybavení moderní výpočetní technikou, se opírají o znalosti, které se příliš neliší od těch, které měl Archimédes [3].

Zmiňme ještě, že traktát „O plovoucích tělesech“, kterému byl podnětem rozvoj lodních staveb, potvrzuje, že Archimédes se nestavěl na stranu tehdy rozšířeného naturfilosofického a chybného pohledu na svět. Tato Aristotelova teorie říká, že

tělesa „lehčí“ směřují nahoru, a „těžší“ dolů. Archimédes se přiklání k názoru materialisty Démokrita, který soudí, že všechna tělesa směřují ke středu Země [7].

2.3.8 Měření kruhu

Snad nejznámějším Archimédovým pojednáním je spis „Měření kruhu“. Právě v něm odvodil s dosud nevídanou přesností číslo, které dnes známe jako Ludolphovo (Ludolph van Ceulen, (1540-1610) holandský matematik), a pro nějž užíváme symbolu π .

Z díla se zachoval zlomek obsahující pouze tři věty. A navíc – podle jazyka jakým je psáno – soudíme, že je pouhým přepisem, nebo dokonce jakýmsi konspektem, původního Archimédova originálu [7].

V první větě tohoto spisu je vyslovena a dokázána důležitá věta o vztahu obvodu a obsahu kruhu:

Obsah kruhu je roven obsahu pravoúhlého trojúhelníku, jehož délky odvěsen jsou rovny poloměru a obvodu kruhu.

Pokud označíme o obvod, S obsah a r poloměr kruhu je možno tuto formuli přepsat dnešní symbolikou:

$$S = \frac{1}{2} \cdot o \cdot r,$$

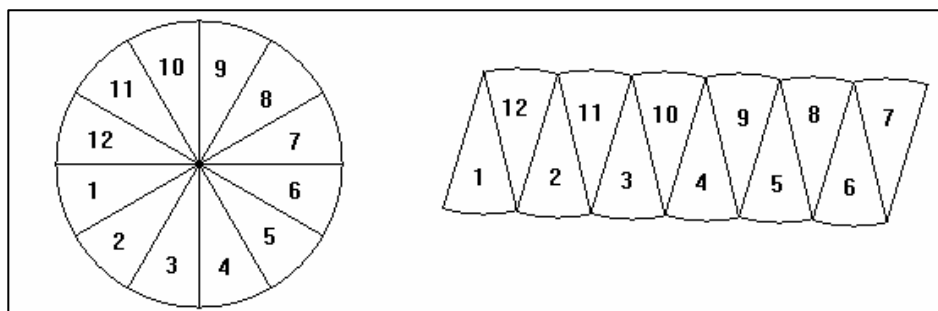
neboť pro plochu T pravoúhlého trojúhelníka, platí $T = \frac{1}{2} \cdot o \cdot r$ a $T = S$ [3].

Důkaz Archimédes provedl exhaustivní metodou. Stejně jako v jiných obdobných situacích, přivedl ke sporu nerovnosti $S > T$ a $T > S$ (S je obsah uvažovaného kruhu a T obsah pravoúhlého trojúhelníka s odvěsnami rovnými obvodu o a poloměru r kruhu).

1. Předpokládejme, že je $S > T$ a že jsou do daného kruhu vepsány pravidelné n -úhelníky. Při dostatečně velkém n se bude obsah S_n vepsaného n -úhelníku od hodnoty S lišit méně, než se od ní liší T , platí tedy $S > S_n > T$. Nerovnost $S_n > T$ ovšem nemůže platit, protože hodnota S_n je součtem obsahů n (vepsaných) trojúhelníků, jejichž výšky jsou menší než r a součet délek jejich základů je menší než o . Tím je předpoklad $S > T$ přiveden ke sporu.

2. Předpokládejme, že je $S < T$ a že jsou danému kruhu opsány pravidelné n -úhelníky. Pro dostatečně velké n se bude obsah S_n opsaného n -úhelníka od hodnoty S lišit méně, než se od ní liší T , tzn. platí nerovnost $T > S_n > S$. Což není z analogických důvodů k předešlému předpokladu možné. Je tedy dokázána rovnost $S = T$.

Tento důkaz bývá někdy uváděn ve zjednodušené verzi: rozdělíme-li kruh na n shodných výsečí, ze kterých konkrétním způsobem (obr. 2.20) sestavíme jistý křivočarý útvar, tak poroste-li n do nekonečna, z křivočarého útvaru se stane („v nekonečnu“) obdélník, o stranách r a $\frac{1}{2}o$ (jeho obsah bude roven součinu $r \cdot \frac{1}{2} \cdot o$).



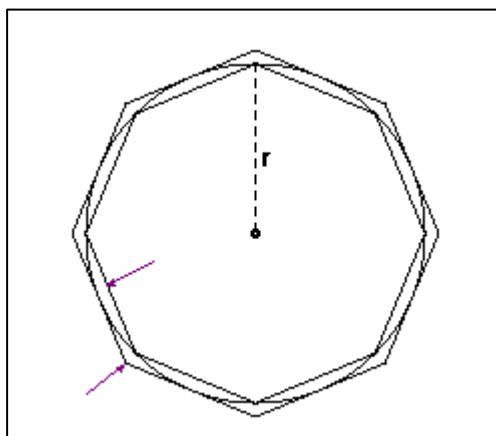
obr. 2.20

Druhá věta tohoto pojednání uvádí přibližnou hodnotu poměru plochy kruhu a čtverce jeho průměru. Zřejmě byla při přepisu originálu omylem předřazena větě třetí, protože je jejím důsledkem [3]; budeme se jí proto věnovat později. Nejzajímavější je právě třetí věta, v níž se nalézají přibližná hodnota čísla π . Tato věta zní:

Pro obvod o a průměr d libovolného kruhu platí nerovnosti

$$3\frac{10}{71} < \frac{o}{d} < 3\frac{1}{7}.$$

Archimédes odhadl obvod kruhu obvodem vepsaného a opsaného pravidelného 96 úhelníku [3]. Jeho základní myšlenka byla velmi triviální, intuice i nám velí, že vepíšeme-li do dané kružnice libovolný mnohoúhelník, bude jeho obvod menší než délka kružnice; pokud naopak kolem kružnice mnohoúhelník opíšeme, bude jeho obvod větší než délka dané kružnice. Čím kratší budou jejich jednotlivé strany, tedy čím větší bude počet jejich úhlů, tím menší bude rozdíl mezi obvodem vepsaného a opsaného mnohoúhelníku a tím více se budou jejich obvody blížit obvodu kružnice. Tato myšlenka by neměla valného praktického významu, bez možnosti dosti přesně spočítat obvody zmíněných mnohoúhelníků. Ze znalostí současné matematiky tento úkol není problém – zřejmě bychom použili známé vzorce s goniometrickými funkcemi. Uvědomme si ale, že Archimédes neměl k dispozici ani kalkulačku, ani tabulky, ale hlavně naší matematickou symboliku. Jeho bravurní geometrický výkon, při výpočtu obvodů opsaných a vepsaných n -úhelníků budí veliký obdiv, považujeme proto za účelné tento postup přesně popsat.



obr. 2.21

Označme $P_n(r)$, resp. $Q_n(r)$ obvod pravidelného n -úhelníku vepsaného, resp. opsaného kružnici o poloměru r (obr. 2.21). Archimédes zjistil, že ze známých hodnot obvodů $P_n(r)$ a $Q_n(r)$ lze pomocí základních aritmetických operací (sčítání, odečítání, násobení, dělení a odmocňování) vypočítat obvody pravidelných mnohoúhelníků, které mají oproti původním

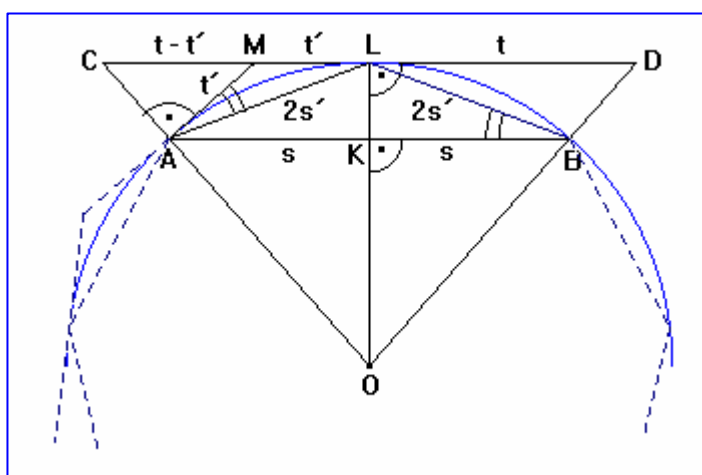
mnohoúhelníkům dvojnásobný počet stran, tedy obvody $P_{2n}(r)$ a $Q_{2n}(r)$. Na obr. 2.22 je bod O středem uvažované kružnice, její tětiva AB (se středem K a délkou $2s$) je stranou vepsaného n -úhelníku, tětivy AL , BL (délky $2s'$) jsou sousedními

stranami vepsaného $2n$ -úhelníku, tečná úsečka CD (se středem L a délkou $2t$) je stranou opsaného n -úhelníku. Tečné úsečky AM , ML (délky t') jsou polovinami sousedních stran opsaného $2n$ -úhelníku (všechny zmíněné mnohoúhelníky jsou pravidelné). Pro takto definované mnohoúhelníky platí vztahy:

$$P_n(r) = n \cdot 2s, \quad Q_n(r) = n \cdot 2t, \quad P_{2n}(r) = 2n \cdot 2s', \quad Q_{2n}(r) = 2n \cdot 2t'. \quad (\text{I})$$

Z podobnosti trojúhelníků MAC , OLC a OKA s přihlédnutím k rovnosti $|AO| = |LO|$ plynou vztahy:

$$\frac{t'}{t-t'} = \frac{|AM|}{|MC|} = \frac{|LO|}{|OC|} = \frac{|AO|}{|OC|} = \frac{|AK|}{|CL|} = \frac{s}{t}.$$



obr. 2.22

Z rovnosti obou krajních zlomků vyjádříme t' pomocí s a t :

$$t' = \frac{st}{s+t}. \quad (\text{II})$$

Podle věty o obvodovém a úsekovém úhlu jsou úhly ABL a LAM shodné, tzn., že rovnoramenné trojúhelníky ABL a ALM jsou podobné. Pro poměry délek jejich stran tudíž platí:

$$\frac{2s'}{2s} = \frac{|AL|}{|AB|} = \frac{|AM|}{|AL|} = \frac{t'}{2s'},$$

z nichž vyjádříme s' pomocí s a t' :

$$s' = \sqrt{\frac{st'}{2}}. \quad (\text{III})$$

Dosadíme-li rovnosti (II) a (III) do vztahů (I) po úpravě, kterou naznačme:

$$Q_{2n}(r) = 4n \frac{\frac{P_n(r) \cdot Q_n(r)}{4n^2}}{\frac{P_n(r) + Q_n(r)}{2n}} = \frac{2n \cdot P_n(r) \cdot Q_n(r)}{n(P_n(r) + Q_n(r))}, \quad (\text{protože } s = \frac{P_n(r)}{2n}, t = \frac{Q_n(r)}{2n})$$

(podobně lze ukázat pro $P_{2n}(r)$), získáme dotyčné Archimédovy vzorce, které umožňují aritmetický výpočet obvodů opsaného a vepsaného $2n$ -úhelníku pomocí obvodů opsaného a vepsaného n -úhelníku:

$$Q_{2n}(r) = \frac{2P_n(r)Q_n(r)}{P_n(r) + Q_n(r)}, \quad P_{2n}(r) = \sqrt{P_n(r)Q_{2n}(r)} \quad (n \geq 3). \quad (\text{IV})$$

Význam těchto vzorců je následující. Známe-li pro některé k hodnoty $P_k(r)$ a $Q_k(r)$ (jak je tomu např. pro $k = 4$ nebo $k = 6$), můžeme pomocí (IV) postupně počítat hodnoty členů rekurentní posloupnosti

$$Q_k(r), P_k(r), Q_{2k}(r), P_{2k}(r), Q_{4k}(r), P_{4k}(r), \dots, Q_{2nk}(r), P_{2nk}(r), \quad (\text{V})$$

které dnes běžně říkáme Archimédova posloupnost. Z geometrického významu hodnot $P_k(r)$, $Q_k(r)$ můžeme usoudit, že posloupnost (V) konverguje k hodnotě $2\pi \cdot r$, neboť limitou každé takové posloupnosti (bez ohledu na volbu k) je hledaná délka kružnice.

Archimédes se zabýval výpočtem hodnot deseti členů

$$\begin{aligned} Q_6(r), P_6(r), Q_{12}(r), P_{12}(r), Q_{24}(r), \\ P_{24}(r), Q_{48}(r), P_{48}(r), Q_{96}(r), P_{96}(r) \end{aligned} \quad (\text{VI})$$

Archimédovy posloupnosti, přičemž uvažoval hodnotu poloměru $r = \frac{1}{2}$ (pro kterou se délka kružnice $2\pi \cdot r$ rovná přímo číslu π). Jako výsledek získal oboustranný odhad čísla π ve tvaru:

$$3,14084K = \frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7} = 3,14285K$$

Tyto meze jsou tedy obecně vyjádřeny nerovnostmi $P_n(r) < \pi < Q_n(r)$, a jsou tím „sevěřenější“, čím je index n větší. Po přibližném výpočtu čísel (VI), Archimédes dospěl k dolnímu resp. hornímu odhadu čísla

$$P_{96}(1/2) > \frac{96 \cdot 66}{2017 \frac{1}{4}}, \quad \text{resp.} \quad Q_{96}(1/2) < \frac{96 \cdot 153}{4673 \frac{1}{2}}.$$

Násobení v čitatelích je pouze naznačeno a ve jmenovatelích jsou ponechána čísla ve smíšeném tvaru, aby byla zachována autentičnost zlomků z Archimédova díla.

Protože takové zlomky jsou příliš složité pro další početní operace, nahradil je Archimédes blízkými zlomky $\frac{223}{71}, \frac{22}{7}$ (tento zlomek se dodnes používá ve školské matematice jako vhodná náhrada za π , neboť se s ním dobře počítá), které mají menší čitatele a jmenovatele. Dnes již přesně nevíme, jak takové vhodné aproximace Archimédes objevil.

Uvědomme si, že Archimédes při výpočtu musel odvést téměř nadlidský výkon, protože neznal poziční systém zapisování čísel. Naše obvyklá poziční soustava má

za základ číslo 10; čísla zapsaná v desítkové soustavě můžeme podle všeobecně známých algoritmů písemně sčítat, odčítat, násobit a dělit na zadaný počet platných číslic (existuje i způsob jak písemně odmocňovat). Zdůrazněme, že Archimédes mohl zapisovat pouze čísla přirozená, ostatní (necelá) musel vyjadřovat poměry přirozených čísel, tedy jako zlomky. Proto i určování druhých odmocnin musel Archimédes nahrazovat odhadem. V první etapě výpočtů musel odhadnout číslo $\sqrt{3}$, protože obvody pravidelných šestiúhelníků jsou dány vzorci $P_6(1/2) = 3$, $Q_6(1/2) = 2\sqrt{3}$. Archimédes si byl vědom, že pokud tento odhad neprovede dost přesně bude v průběhu výpočtu docházet ke ztrátě kvality výsledků. Pro $\sqrt{3}$ zvolil až neuvěřitelně přesný odhad:

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780},$$

o čemž svědčí rovnost (převzato z [12]):

$$\frac{1351}{780} - \frac{265}{153} = \frac{1}{39780}.$$

Archimédův výpočet π byl mnohokrát opakován, modifikován a modernizován. Všichni jeho následovníci při svých výpočtech zachovali základní myšlenku vpisování a opisování mnohoúhelníků. Např. roku 1220 reprodukoval Archimédův výpočet ve svém spise „Practica geometriæ“ Leonardo Pisánský (asi 1170 až 1240), roku 1573 François Viète (1540-1603), roku 1593 Adrien van Roomen – Romanus (1561-1615) [3].

Již zmíněný Ludolph van Ceulen hodnotu čísla, které dnes nese jeho jméno stanovil na 32 desetinných míst. Dosáhl toho celoživotními numerickými výpočty. Vyšel z počáteční hodnoty $k = 4$ a po šedesátem užití rekurentní dvojice vzorců (IV) dospěl k následujícím odhadům (které uveřejnila jeho žena až po Ceulenově smrti v r. 1615):

$$P_n(1/2) > \underline{3,1415926535897932384626433832795028839541}$$

$$Q_n(1/2) < \underline{3,1415986535897932384626433832795028846831}, \text{ pro } n = 2^{62},$$

čárkou jsou podtrženy skupiny číslic, ve kterých se vypsane hodnoty shodují s hledaným číslem π [12].

Druhá věta pojednání „O měření kruhu“ uvádí přibližnou hodnotu poměru obsahu kruhu a obsahu opsaného čtverce jako $\frac{11}{14}$ (v naší symbolice $\frac{S}{d^2} = \frac{11}{14}$, kde S je obsah kruhu a d jeho průměr). V první větě byl odvozen vztah pro obsah S , který lze přepsat ve tvaru $S = \frac{1}{4} \cdot o \cdot d$. Ve třetí větě je pak jako horní odhad poměru o/d (π)

uvedena hodnota již citovaná $\frac{22}{7}$, z čehož vyplývá:

$$\frac{S}{d^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{o}{d} \approx \frac{11}{14}.$$

Proto je nanejvýš pravděpodobné, že v Archimédově originálu byla věta druhá na místě třetí [3].

2.3.9 Počítání písku

K nejobdivovanějším Archimédovým technickým výtvorům patří konstrukce planetária neboli *sféry*. Mnozí lidé před Archimédem se pokoušeli mechanicky napodobit pohyb nebeské koule, otáčející se se svými souhvězdími kolem Země. Archimédův technický důvtip však zřejmě dokázal sestrojít zařízení mnohem dokonalejší, poháněné hydraulicky, které napodobovalo nezávislý pohyb Slunce, Měsíce a planet na pozadí sféry stálic. Tento Archimédův vynález se po pádu Syrakus dostal do rukou římských vítězů. V průběhu historie však jeho stopy mizí. Skoro všichni pozdější významní římsští autoři (Cassiodorus, Ovidius, Cicero, Sextus Empiricus, Lactantius ...) Archimédovu konstrukci opěvují, a dokonce používají jako zdroj filosofie: mohl-li člověk jako Archimédes sestrojít napodobeninu, proč by

Bůh nemohl sestrojít originál? Archimédes patrně popsal tento svůj přístroj ve spise „O konstrukci sféry“ („Peri sfairospoiias“), který se však nedochoval. Není pochyb o tom, že Archimédes prováděl astronomická měření pomocí přístrojů, které sám konstruoval. Titus Livius se o něm zmiňuje jako o pozorovateli nebe a hvězd, Klaudios Ptolemaios uvádí, že určil délku roku, Ambrosius Macrobius (kolem 400) připomíná jeho měření vzájemných vzdáleností Slunce a Měsíce, planet a jejich poloh vůči sféře stálé.

V Archimédově době našla řecká astronomie dva důvtipné způsoby měření, které umožnily zjistit poměr vzdáleností Slunce a Měsíce a rozměry zeměkoule. Aristarchos z Samu (asi 310-230) měřil úhel mezi směry ke středu Slunce a ke středu Měsíce v situaci, kdy obě tělesa jsou nad obzorem a Slunce nám osvětluje právě polovinu měsíčního kotouče.

Druhým pozoruhodným výkonem bylo Eratosthenovo měření velikosti obvodu, resp. průměru zeměkoule. Eratosthenes měřil úhlovou vzdálenost středu Slunce od zenitu v Alexandrii v poledne při letním slunovratu. Věděl, že v tom okamžiku je Slunce právě v zenitu v Syeně (dnešní Asuán), městě ležícím přibližně na stejném poledníku jako Alexandrie a zároveň na obratníku. Bylo totiž známo, že v Syeně v pravé poledne při letním slunovratu svítí Slunce na dno hlubokých studní. Změřený úhel odpovídá středovému úhlu příslušného oblouku poledníkové kružnice. Ze známé vzdálenosti obou měst určil Eratosthenes zemský obvod na 252 tisíc stadií, a tedy její průměr na 80 000 stadií. Pokud Eratosthenes používal egyptské stadion rovné 158 m, dostal by průměr zeměkoule 12 673 km, což je dosti přesný odhad, protože ve skutečnosti je průměr zeměkoule 12 756 km.

Jediný dochovaný spis, v němž se Archimédes zabývá astronomickými otázkami, a dokonce popisuje některá svá astronomická měření, je „Počítání písku“, které je známé též pod řeckým názvem „Psammités“ nebo latinským „Arenarius“. Věnoval je králi Gelonovi II.

Cíl spisu je hlavně aritmetický. Archimédes se snaží králi vysvětlit, že matematika umí vyjádřit a zapsat libovolně velké číslo. Řekové zapisovali čísla pomocí písmen řecké abecedy, která byla odvozena z abecedy fénické. Čísla 1, 2, ..., 9 byla značena

prvními devíti písmeny této abecedy $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \theta$, čísla 10, 20, ..., 90 dalšími devíti písmeny $\iota, \kappa, \lambda, \mu, \nu$ atd., čísla 100, 200, ..., 900 také devíti písmeny, tj. $\rho, \sigma, \tau, \upsilon, \phi, \dots$ Řecká abeceda však měla jen 25 písmen, proto bylo třeba využít i dvě zastaralá písmena *koppa* a *sampi* pro označení čísel 90 a 900. Pomocí písmen bylo tedy možné vyjádřit čísla od 1 do 999. Např. číslo 341 bylo zapisováno $\tau'\mu'\alpha'$ nebo $\overline{\tau\mu\alpha}$ - číselné záznamy byly odlišovány od slov např. čárkami, pruhy apod. Když bylo třeba zapsat větší čísla, bylo pro tisíce využito opět prvních devět písmen abecedy, ale pro odlišení od jednotek byly přidávány čárky ještě dole před písmeny. Např. zápis $\overline{\delta\phi\lambda\beta}$ označoval číslo 4 532. Pro číslo 10 000 měli Řekové termín *myriada*. Desetitisíce někdy zapisovali také pomocí prvních devíti písmen abecedy, pod nimiž připisovali písmeno *M*, nebo nad ně dělali dvě tečky. Zápisy čísel větších než 10 000 však nebyly ustálené.

Řeční matematici se numerickému počítání, tzv. *logistice*, nevěnovali, dávali přednost teoretickým úvahám, zvláště geometrickým. Archimédes však byl nejen teoretickým matematikem, ale navíc počtářem, který své teoretické znalosti potřeboval aplikovat do praktických, technicky zaměřených problémů. Numerické výpočty prováděl patrně na počítací desce (abaku) a výsledky (a nejspíše i mezivýsledky) si zapisoval výše uvedeným způsobem pomocí písmen. Vytvořil zajímavý způsob, pomocí něhož mohl slovně vyjádřit obrovská čísla; popsal ho v nedochovaném spisku „Archai“ („O principech“) a použil ve svém „Počítání písku“.

Jednoduchým způsobem došel od „největšího čísla“, od myriady, k ještě většímu číslu, k myriádě myriád, tj. k číslu 10^8 . Čísla

$$1, 2, K, 10^4, 10^4 + 1, K, 2 \cdot 10^4, 2 \cdot 10^4 + 1, K, 3 \cdot 10^4, K, 10^4 \cdot 10^4 = 10^8$$

nazval *prvními čísly* (tzv. *první oktáda*). *Druhámi čísly* (*druhá oktáda*) nazval čísla

$$10^8 + 1, 10^8 + 2, K, 2 \cdot 10^8, 2 \cdot 10^8 + 1, K, 3 \cdot 10^8, K, 10^8 \cdot 10^8 = 10^{16},$$

třetími čísly (třetí oktáda) čísla $10^{16} + 1, K, 10^{38}$ a takových posloupností přirozených čísel (oktád) vytvořil myriadu myriad, tj dospěl až k číslu

$$10^{10^8 \cdot 8}.$$

Čísla od jedné do tohoto čísla nazval čísla *první periody*.

Po číslech první periody následují čísla *druhé periody*: *prvními čísly (první oktáda)* druhé periody jsou čísla

$$10^{10^8 \cdot 8} + 1, K, 10^8 \cdot 10^{10^8 \cdot 8}.$$

Druhou periodu ukončuje 10^8 -tá oktáda, která končí číslem

$$10^{10^8 \cdot 8} \cdot 10^{10^8 \cdot 8} = (10^{10^8 \cdot 8})^2.$$

Tak se dostaneme až k 10^8 -té periodě, která končí číslem

$$(10^{10^8 \cdot 8})^{10^8} = 10^{10^{16} \cdot 8},$$

což je číslo, které má 80 tisíc bilionů nul. Archimédes nazývá toto číslo řecky *myriakis myriostas periodu myriakis myrioston arithmon myriai myriades*, a Kolman v [7] na straně 154 uvádí, že „tj. číslo, ... na jehož zápis by se potřebovalo vzdálenosti větší než pětistý násobek vzdálenosti od Země ke Slunci, kdyby každá nula zaujímala jeden milimetr.“

Pro tak nepředstavitelně velké číslo nemáme ani my ani Archimédes žádné praktické uplatnění. Archimédes dokazoval, že jeho systém je více než dostatečný k vyjádření počtu pískových zrněk, která by zaplnila vesmír [7]. „Staré řecké přísloví praví, že množství zrněk písku uniká počtu (*psammos arithmon peripefeugen*)“ (převzato z [2], str. 59). Archimédes se pokoušel odhadovat počet jemných písečných zrněk syrakuských pláží, která by zaplnila celý vesmír. V jeho

systému velkých čísel mu vyšel směšně malý výsledek – někde mezi osmými čísly první periody.

Svoje dílo „Počítání písku“ Archimédes otevírá dopisem:

Někteří se domnívají, králi Gelone, že počet písku jest nesčíslný; a to, tvrdím, nejen toho, jenž jest v okolí Syrakus a v ostatní Sicílii, ale i na všelike zemi ať obydlené ať neobydlené. Někteří však nemyslí, že jest neomezený, ale že přece nebyl tak veliký udán, jenž by převyšoval jeho množství. ...Pokusím se ti dokázati důkazy geometrickými, ...že mezi čísla námi jmenovanými převyšují některá nejen počet písku v množství rovném zemi tak vyplněné, ...ale i v množství rovném vesmíru... [3]

Archimédes si vesmír představoval jako kouli, jejíž mezí je sféra stálic. Archimédes určil rozměry sféry stálic a konstatoval, že je 10^{12} krát větší než sféra, jejíž hlavní kružnicí je dráha Země. Předpokládal, že jedno zrnko písku představuje 10^{-4} části zrnka máku a zrnko máku že má zase průměr rovný $\frac{1}{14}$ šířky palce. Na základě těchto údajů stanovil, že počet zrněk písku ve vesmíru bude menší než 10^{63} .

Poznamenejme, že astronomické údaje s nimiž Archimédes operuje a o něž opírá svoje úvahy při výpočtu zrněk písku ve vesmíru, byly na jeho dobu mimořádně přesné, i když úmyslně používal jejich maximální hodnoty. Nejdelší kružnici kolem zeměkoule považuje za rovnou 300 000 stadií, tj. 55 000 km (předpokládáme, že užíval stadion, která měřila 185 m; v téže době se však užívalo i jiných stadií, např. egyptské, která měřila necelých 158 m, kterou pravděpodobně užíval již zmíněný Eratosthenes), přičemž skutečná hodnota je asi 42 000 km. Poloměr Slunce pokládal za nejvýše 30krát větší než poloměr Země (ve skutečnosti to je 109krát), vzdálenost Země od Slunce pokládal za rovnou 5 miliardám stadií, tj. 925 milionů km (ve skutečnosti je tato vzdálenost 150 miliónů kilometrů), průměr sféry nehybných hvězd za rovný 9,25 biliónů km, tj. skoro jeden světelný rok ($9,46 \cdot 10^{12}$ km), tedy číslo stejného řádu, jako je dnes známá vzdálenost od nejbližší hvězdy Proxima Centauri, která činí 4,2 světelného roku [7].

Protože všechna Archimédova díla měla navýsost praktický význam, zůstává velkou otázkou, proč „Počítání písku“ vzniklo. Nemohlo sloužit praktickým potřebám, protože ani denní život, ani věda tehdejší doby nepotřebovala tak velká čísla, která jsou zde prezentována. Kolman v [7] na str. 154 k tomu říká: „Vzniklo z abstraktních, teoretických a světonázorových zájmů, aby se prověřily tehdejší představy o existenci „posledního čísla“, o nemožnosti „sečíst písek v moři“ a aby přesvědčivě ukázalo sílu abstrahujícího lidského myšlení.“

2.3.10 *Kratochvíle*



Na sklonku 19. století byly nalezeny dva zlomky Archimédova ztraceného spisu „Stomachion“ (překlad „Kratochvíle“ je převzat z [3] str. 24). Toto slovo je nejspíš odvozeno z řeckého slova stomach, které lze přeložit jako „to, co vyvolává zlost“. Dílo popisuje hlavolam, který rozvíjí představivost a vynalézavost.

V řecké verzi jde o obdélník, jehož délky stran jsou v poměru 1 : 2, v arabské o čtverec. Tento útvar je rozdělen na 14 částí (11 trojúhelníků, 2 čtyřúhelníky a 1 pětiúhelník). Šlo zřejmě o to, sestavit z těchto částí výsledný obdélník, resp. čtverec.

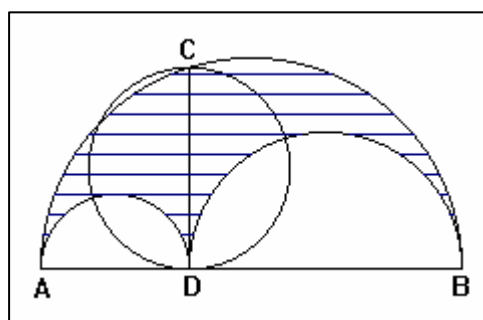
Stomachion mohl také sloužit „negeometricky“. Jeho čtrnáct částí lze totiž mnoha způsoby poskládat tak, že vzniknou siluety lidí a zvířat v různých polohách, tvary různých předmětů, známých uměleckých děl atd. (např. jinoch, lukostřelec, slepice, kohout, zajíc, býk, lev, mlýn ...). Pravidla zřejmě zněla: jednotlivé části lze skládat vedle sebe i přes sebe, není je nutné dávat těsně k sobě, ale musí se použít všechny.

Protože zmínky o Stomachionu jsou již v antické literatuře, domníváme se, že ho Archimédes nejspíš neobjevil, jen popsal jeho konstrukci a výpočty obsahů jednotlivých dílů [3].

2.3.11 Poučky

V latinském překladu z arabštiny se zachovalo pojednání „Lemmata“ („Liber Assumptorum“), neboli „Poučky“ (někteří autoři – např. Kolman v [7] na str. 155 – uvádí „Předpoklady“). Dílo se skládá z 15 vět a je jen přetlumočením ztraceného originálu. Archimédes se zde věnuje problematice kružnic, tečen, sečen, obsahů rovinných útvarů vymezených polokružnicemi, délek oblouků kružnic, kružnic vepsaných do útvarů ohraničených polokružnicemi a úsečkami apod. Některé formule jsou dokazovány velmi jednoduše, kdy se využívá základních poznatků (např. Thaletova nebo Pythagorova věta), jiné jsou obtížnější.

Např. 7. věta tvrdí, že obsah kruhu, který je opsán čtverci, je roven dvojnásobku obsahu kruhu, který je tomuto čtverci vepsán. Průměr většího, resp. menšího kruhu je totiž roven délce úhlopříčky, resp. strany uvažovaného čtverce, a ty jsou v poměru $\frac{\sqrt{2}}{1}$. Plochy kruhů nad těmito úsečkami jako průměry jsou tedy v poměru $\frac{2}{1}$ [3].

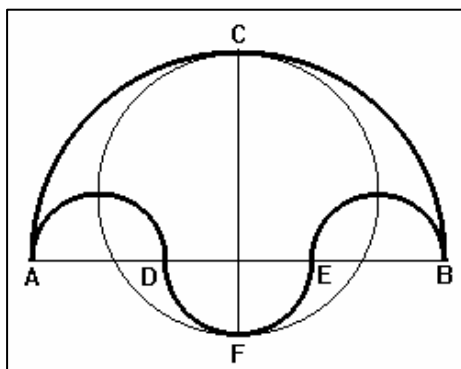


obr. 2.23

Ve třech větách je studován útvar nazvaný *arbelos*, jehož podoba připomíná knajp – ševcovský nůž, omezený třemi polokružnicemi (obr. 2.23).

Ve čtvrté větě je ukázáno, že obsah vyšrafovaného útvaru v obr. 2.23 roven obsahu kruhu nad průměrem CD . Důkaz

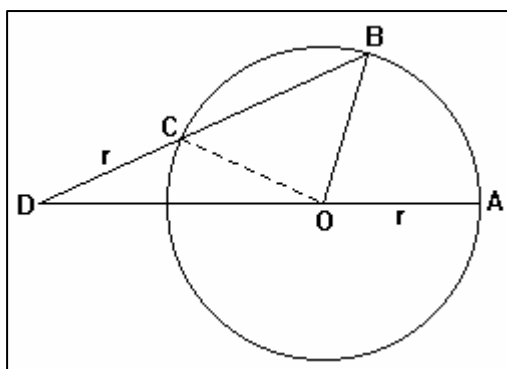
tohoto tvrzení je velmi jednoduchý, stačí nám k němu znalost školské geometrie (budeme se mu věnovat v kapitole *Další úlohy inspirované Archimédem*). V téže situaci je v páté větě dokázáno, že kružnice dotýkající se oblouků AB , AD a úsečky CD , resp. oblouků AB , BD a úsečky CD mají stejný průměr. V 6. větě je vypočten průměr kružnice vepsané do útvaru *arbelos*, tj. kružnice dotýkající se oblouků AB , AD a BD (v závislosti na poloze bodu D na úsečce AB).



obr. 2.24

Ve 14. větě je ukázáno, že plocha útvaru (v obrázku 2.24 ohraničeného silnou čarou) omezeného čtyřmi oblouky kružnic (tzv. *sálos*, *salínon*) je roven obsahu kruhu nad průměrem CF .

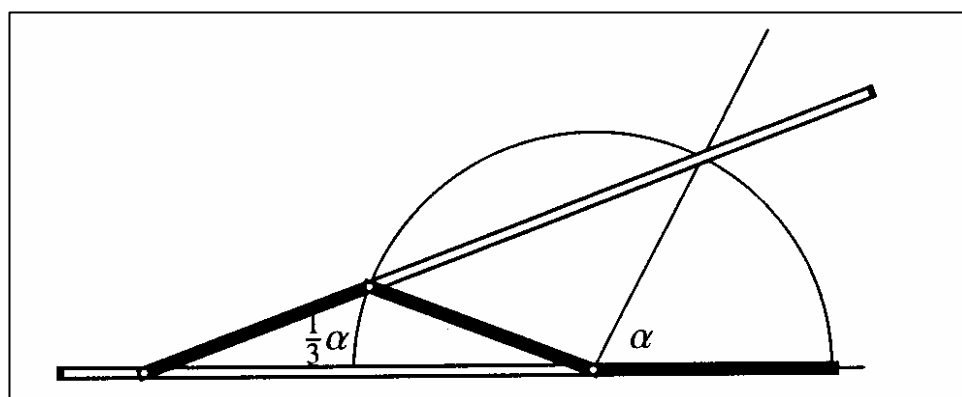
Z osmé věty tohoto díla vyplývá skutečnost znázorněná na obr. 2.25. Pokud je délka úsečky DC rovna poloměru r kružnice, je velikost úhlu BOA trojnásobkem velikosti úhlu CDO . Dokáže se to snadno pomocí elementárních geometrických poznatků.



obr. 2.25

Na této větě je založena jedna z nestandardních metod trisekce úhlu, která využívá pravítko se dvěma vyznačenými body X, Y . Je-li dán úhel velikosti α a máme-li sestrojít jeho třetinu, sestrojíme nejprve kružnici k o poloměru $r = |XY|$ se středem O ve vrcholu daného úhlu. Na jeho ramenech vyznačíme body A, B kde

$|AO| = |BO| = r$. Nyní vedeme bodem B přímkou tak, aby kružnici proťala v bodě C a přímkou AO v bodě D tak, aby $|DC| = r$. Tuto přímku ale nelze sestrojít



obr. 2.26

„eukleidovsky“. Pravítko přiložíme k bodu B tak, aby bod X „padl“ na kružnici k a

bod Y „padl“ na přímku AO . Pak podle pravítka vedeme přímku a získáme tak úhel CDO , jehož velikost je $\frac{1}{3}\alpha$. Touto metodou provádí trisekci úhlů jednoduchý přístroj znázorněný na obr. 2.26 [3].

2.3.12 Problém dobytka

V 19. století byla objevena ve starém řeckém kodexu v knihovně vévody Augusta zajímavá matematická úloha, která byla předními odborníky na historii řecké matematiky J. L. Heibergem a P. Taneryim připsána Archimédovi. Podle legendy tuto úlohu zaslal Eratosthenovi k vyřešení. Nejčastěji je uváděna pod názvem „Problém dobytka“ (*The Cattle-problem*), ale objevují se i názvy jako „Úloha dobytka“, „Kraví úloha“, „Úloha o Heliových býcích“ nebo „Problémy Archimédes“. Tato úloha zní:

Řekni mi, příteli, přesný počet Heliova skotu. Pečlivě mi vypočítej, není-li ti moudrost cizí, kolik ho bylo, když se jednou pásł na nivách ostrova Sicílie, rozdělen do čtyř stád. Každé stádo bylo jinak zbarveno; první bylo mléčně bílé, ale druhé zářilo zcela tmavou černí. Třetí pak bylo hnědé, čtvrté strakaté; v každém měli býci v počtu velikou převahu. A tito byli (býci) nyní v takovémto poměru: bílí se rovnali v počtu hnědým vzatým dohromady s třetinou a polovinou černých, ó příteli. Dále množství černých bylo rovno čtvrtině a pětině strakatých zvětšených o všechny hnědé. Nakonec musíš počet strakatých býků položit rovný, příteli, šestině a sedmině bílých s přičteným ještě množstvím hnědých.

Jinak však tomu bylo s kravami: ty s bílou srstí byly rovny třetině a čtvrtině černého skotu, krav i býků. Dále černé krávy byly rovny čtvrtině a pětině strakatého stáda, když byli počítáni jak býci, tak krávy. Právě tak byly strakaté krávy pětinou a šestinou všeho (dobytka) s hnědou srstí, když šel na pastvu. Nakonec hnědé krávy byly šestinou a sedminou celého stáda s bílou srstí.

Můžeš-li mi říci přesně, můj příteli, kolik skotu tam bylo dohromady a také kolik bylo krav každé barvy a dobře živených býků, pak tě věru právem nazývají zdatným v počtech.

Ještě tě však nepočítají k mudrcům; nuže pojď tedy a řekni mi, jak se to má dále:

Když se spojil celkový počet černých a bílých býků, pak zde stáli uspořádání stejně do šířky jako do hloubky; širé sicilské nivy byly zcela zaplněny tím množstvím býků. Když se však postavili dohromady hnědí a strakatí, pak byl vytvořen trojúhelník, jeden stál na špičce a nechyběl žádný z hnědých a strakatých býků, ani jeden jiné barvy se mezi nimi nenašel.

Když jsi to také vypátral a v duchu pochopil a uveď mi poměr, příteli, který se nalézá v každém stádu, pak můžeš pyšně vykračovat jako vítěz, protože teď tvá vědecká sláva jasně září [3].

Úkolem je tedy zjistit, kolik je bílých, černých, strakatých a hnědých býků a krav pasoucích se na Sicílii ve čtyřech stádech boha Helia. Zadání vede na sedm lineárních rovnic s osmi neznámými. Tuto úlohu lze použít i jako zajímavý problém ve školské matematice.

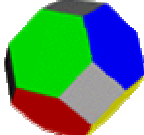
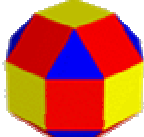
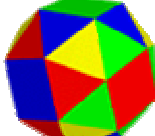
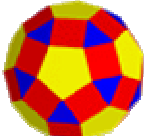
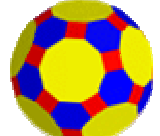
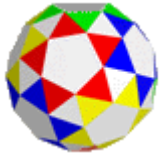
2.3.13 Poloprávidelné mnohostěny

Pappos Alexandrijský (3. stol. n. l.) se zmiňuje ve svém díle „Matematická sbírka“ o Archimédově pojednání o tzv. poloprávidelných mnohostěnech. Toto dílo se bohužel nedochovalo.

Pravidelný mnohostěn je těleso, jehož všechny stěny jsou shodné pravidelné mnohoúhelníky a v jehož každém vrcholu se stýká stejný počet stěn i stejný počet hran. Každému pravidelnému mnohostěnu je možno opsat i vepsat kouli. Takových mnohostěnů existuje pět: čtyřstěn, krychle, osmistěn, dvanáctistěn a dvacetistěn.

Stěnami poloprávidelného mnohostěnu jsou shodné pravidelné mnohoúhelníky dvou nebo tří typů, přičemž v každém jeho vrcholu se setkává ve stejném pořadí stejný počet stěn stejného typu. Archimédes objevil 13 takovýchto těles. Jsou jednoduchým či složitějším způsobem odvozena z pravidelných mnohostěnů. Deset těles má stěny dvou typů, tři tělesa stěny tří typů, počet jejich stěn je 8, 14, 26, 32,

38, 62 a 92. V následující tabulce jsou zobrazena všechna tělesa, která Archimédes objevil. Je zde uveden počet vrcholů v , hran h a stěn s [17].

		
$v = 12, h = 18, s = 8$	$v = 12, h = 24, s = 14$	$v = 24, h = 36, s = 14$
		
$v = 24, h = 36, s = 14$	$v = 32, h = 56, s = 26$	$v = 48, h = 72, s = 26$
		
$v = 30, h = 60, s = 32$	$v = 60, h = 90, s = 32$	$v = 60, h = 90, s = 32$
		
$v = 24, h = 60, s = 38$	$v = 60, h = 120, s = 62$	$v = 120, h = 180, s = 62$
		
$v = 60, h = 150, s = 92$		

2.4 Archimédova statika v geometrii, teorie hmotných bodů

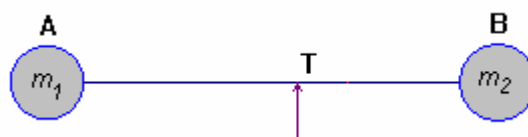
Vývoj školské matematiky zapříčinil, že historicky první důkaz věty o těžnicích trojúhelníku, který podal Archimédes, je současnou matematickou veřejností téměř zapomenut. Připomíná se nám však v samotném názvu těžnice, odvozeném od slova tíha. Archimédes totiž dospěl ke geometrickým pojmům těžnice a těžiště cestou abstrahování fyzikálního pojmu tíha (hmotnost), zkoumal *centrum tíhy* u konkrétních těles a následně výsledky zobecnil. V této kapitole se vrátíme k Archimédovým poznatkům o těžišti trojúhelníka a pokusíme se je aplikovat na další situace, které Archimédes nestudoval. Tím na několika příkladech demonstrujeme uplatnění Archimédovy (fyzikální) metody ve školské geometrii.

Archimédes využíval statiku pro odvození čistě geometrických výsledků. Z dnešního pohledu postupoval přísně vědecky: vybudoval statiku jako axiomatickou teorii. Každé těleso nebo útvar byl pro Archiméda složením hmotných bodů. Uvažoval například o hmotných úsečkách složených z množiny hmotných bodů apod. V našem výkladu budeme tedy užívat místo pojmu těleso, pojem hmotná soustava, což lépe vystihuje geometrickou stránku věci. Každou přímku, která prochází těžištěm hmotné soustavy, nazveme těžnicí dané soustavy.

Uvedme nyní tři Archimédovy axiomy, které budeme užívat v dalším výkladu. V předešlých kapitolách jsme se snažili o co největší přiblížení původním Archimédovým formulacím, nyní již budeme věty převádět do nám známé symboliky. Axiom II. byl již uveden a vysvětlen v kapitole „Kvadratura paraboly“ a Axiom III v kapitole „O rovnováze ploch“.

Axiom I. *Každá hmotná soustava má právě jedno těžiště.*

Axiom II. (Zákon páky) *Těžiště dvojice hmotných bodů A, B o hmotnostech m_1, m_2 , je takový bod T úsečky AB , pro který platí $m_1|AT| = m_2|BT|$ (viz následující obrázek).*

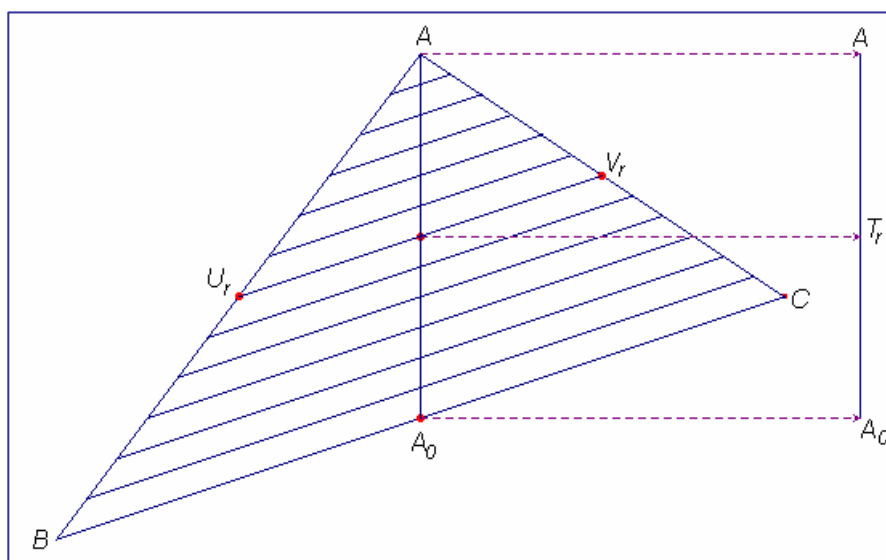


Axiom III. (Princip redukce) *Těžiště hmotné soustavy se nezmění, zaměníme-li libovolnou její část (tzv. podoustavu) jedním hmotným bodem splývajícím s těžištěm této podoustavy a majícím celou její hmotnost.*

Nyní se podívejme jaké geometrické výsledky lze z uvedených tří axiomů odvodit. První uveďme jak lze podle Archiméda dojít k těžišti trojúhelníka.

1. Těžiště trojúhelníka

Představme si, že z tenké homogenní destičky je vyroben model obecného trojúhelníka ABC . Abychom určili jeho těžiště, postupujeme jako Archimédes. Rozložme celý trojúhelník na velké množství tenkých „pásků“ rovnoběžných se stranou BC . V „limitním“ případě jsou tyto pásky hmotné úsečky $U_r V_r$ (obr. 2.27).

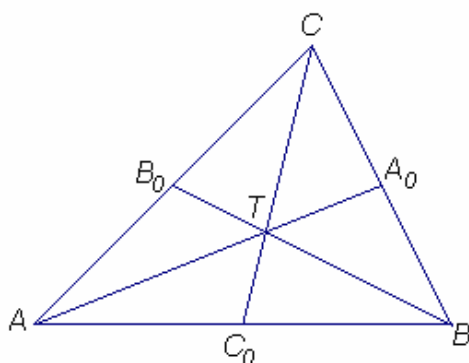


obr. 2.27

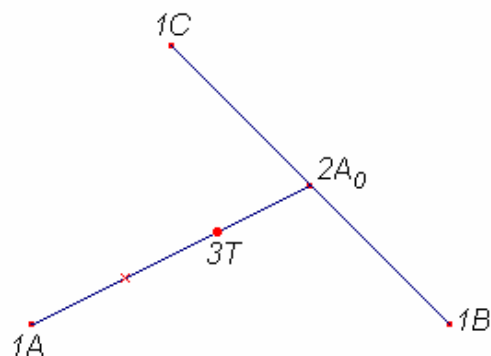
Protože každá úsečka $U_r V_r$ je homogenní, je jejím těžištěm střed této úsečky (je-li hmotná soustava středově souměrná podle bodu X , pak tento bod X je jejím těžištěm, protože podle Axiomu III každou dvojici souměrných bodů o téže – např.

jednotkové – hmotnosti lze zaměnit těžištěm této dvojice s hmotností obou bodů dohromady, kterým je však podle zákona páky bod X), označme ho T_r . Podle Axiomu III můžeme každou úsečku $U_r V_r$ zaměnit hmotným bodem T_r , jehož tíha je přímo úměrná délce úsečky $U_r V_r$. Proto těžiště T našeho modelu trojúhelníku ABC splývá s těžištěm soustavy hmotných bodů T_r , které vyplňují spojnice vrcholu A se středem A_0 strany BC . To ale znamená, že bod T leží na těžnici AA_0 , a to blíže konce A_0 , protože u tohoto konce mají body T_r větší hmotnost (úsečka BC je nejdelší).

Zopakujme naši úvahu pro rozklad trojúhelníku na úsečky rovnoběžné se stranou AB respektive AC . Docházíme k závěru, že bod T leží na všech třech těžnicích AA_0 , BB_0 , CC_0 (obr. 2.28a). Jinými slovy, tyto tři úsečky procházejí jedním bodem a tím je těžiště T .



obr. 2.28a



obr. 2.28b

Předloženou úvahou jsme ještě neodpověděli na otázku, v jakém poměru se těžnice trojúhelníku navzájem dělí. Pro vyřešení problému Archimédes místo destičky ve tvaru trojúhelníku ABC uvážil soustavu tří hmotných bodů A , B , C o téže hmotnosti (rovné určité jednotce). Takovou soustavu S budeme zapisovat ve tvaru:

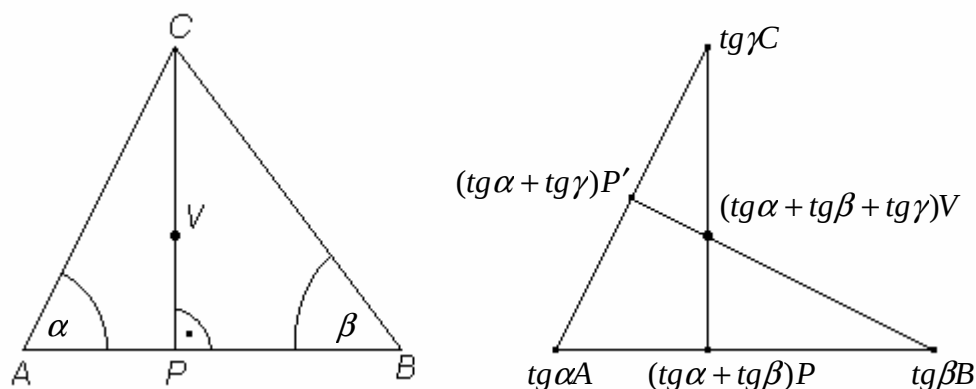
$$S = \{1A, 1B, 1C\},$$

kde kladné číslo před označením bodu značí jeho hmotnost. Zaměníme-li podle Axiomu III dvojici bodů $1B$, $1C$ hmotným bodem $2A_0$, zjistíme, že těžiště T soustavy S leží na úsečce AA_0 a přitom (podle zákona páky) $|AT| : |A_0T| = 2 : 1$ (obr. 2.28b). Podobně redukcí na soustavy $\{1B, 2B_0\}$ respektive $\{1C, 2C_0\}$ dospějeme

k závěru: *Těžiště soustavy S leží na všech třech těžnicích AA_0 , BB_0 , CC_0 a dělí každou z nich v poměru $2 : 1$ (ve směru od vrcholu ke straně). Zdůrazněme, že toto tvrzení jsme po vzoru Archiméda odvodili jednoduchou úvahou o vhodné třibodové hmotné soustavě S , a to nezávisle na předchozím výkladu o modelu trojúhelníku, sestaveném z nekonečně mnoha hmotných úseček.*

2. Ortocentrum trojúhelníku

Nechť CP je výška ostroúhlého trojúhelníku ABC s vnitřními úhly α, β, γ (obr. 2.29 vlevo).



obr. 2.29

V takovém trojúhelníku platí rovnost:

$$|AP| \cdot \operatorname{tg} \alpha = |BP| \cdot \operatorname{tg} \beta = |CP|,$$

na kterou lze pohlížet jako na zákon páky pro dvojici hmotných bodů A, B o hmotnostech $\operatorname{tg} \alpha$ resp. $\operatorname{tg} \beta$. Zvolíme-li proto hmotnosti vrcholů A, B, C jako

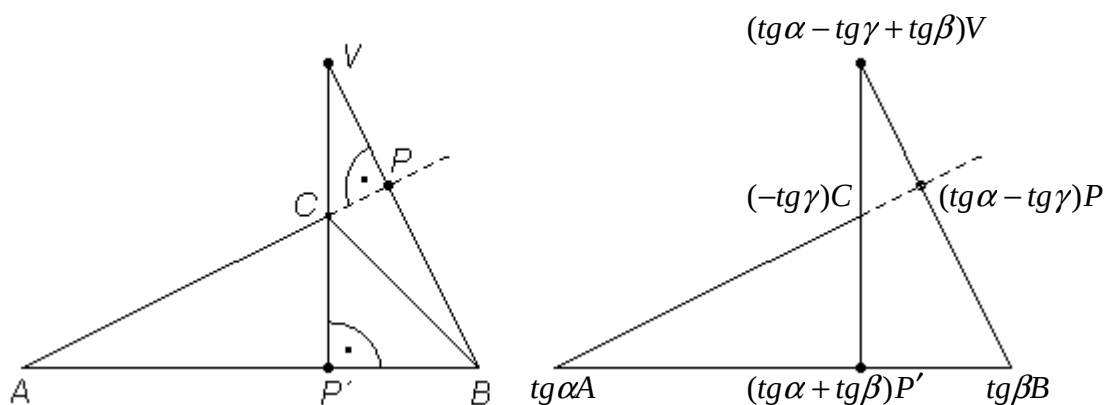
$$m_A = \operatorname{tg} \alpha, \quad m_B = \operatorname{tg} \beta, \quad m_C = \operatorname{tg} \gamma,$$

usoudíme, že těžiště této trojice hmotných bodů leží na každé ze tří výšek trojúhelníku ABC (obr. 2.29 vpravo). Dokázali jsme tak, že výšky trojúhelníku procházejí jedním bodem, zvaným ortocentrum. Navíc můžeme ihned doplnit,

v jakém poměru se výšky navzájem dělí. Protože ortocentrum V je těžištěm dvojice bodů $\{tg\gamma C, (tg\alpha + tg\beta)P\}$, pro velikosti $|CV|, |PV|$ (vlastně ramena páky), platí:

$$|CV| \cdot tg\gamma = |PV| \cdot (tg\alpha + tg\beta) \Rightarrow |CV| : |PV| = (tg\alpha + tg\beta) : tg\gamma.$$

Tento způsob lze aplikovat na libovolný trojúhelník. V případě tupouhlého trojúhelníku je jedna z hmotností vrcholů záporná (obr. 2.30), v případě pravoúhlého trojúhelníku „nekonečně velká“.

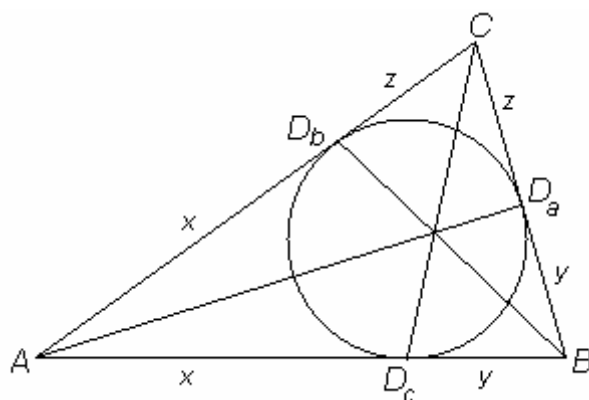


obr. 2.30

3. Body dotyku vepsané kružnice

Do libovolného trojúhelníku ABC vepíšme kružnici a označme D_a, D_b, D_c její body dotyku se stranami trojúhelníku (obr. 2.31). Obvod trojúhelníku ABC je těmito body rozdělen na tři dvojice shodných úseček, jejichž délky označíme takto:

$$|AD_b| = |AD_c| = x, \quad |BD_c| = |BD_a| = y, \quad |CD_a| = |CD_b| = z.$$



obr. 2.31

Nyní „nadělíme“ vrcholům trojúhelníku hmotnosti tak, aby se bod D_a stal těžištěm dvojice bodů B, C , bod D_b těžištěm dvojice bodů A, C a nakonec bod D_c těžištěm dvojice bodů A, B . Bude-li

$$m_A = \frac{1}{x}, \quad m_B = \frac{1}{y}, \quad m_C = \frac{1}{z},$$

pak skutečně body D_a, D_b, D_c budou těžišti stran trojúhelníka BC, AC, AB , protože platí rovnosti

$$|AD_b| \cdot \frac{1}{x} = |D_bC| \cdot \frac{1}{z} \Rightarrow x \cdot \frac{1}{x} = z \cdot \frac{1}{z}, \quad |AD_c| \cdot \frac{1}{x} = |D_cB| \cdot \frac{1}{y} \Rightarrow x \cdot \frac{1}{x} = y \cdot \frac{1}{y}, \dots$$

Odtud plyne, že těžištěm celé trojice ABC bude společný bod úseček AD_a, BD_b a CD_c . Dokázali jsme tak tvrzení: *Spojíme-li každý vrchol daného trojúhelníku s bodem dotyku vepsané kružnice na protější straně, dostaneme tři úsečky, které procházejí jedním bodem* (tzv. Gergonnův bod).

4. Střed vepsané kružnice

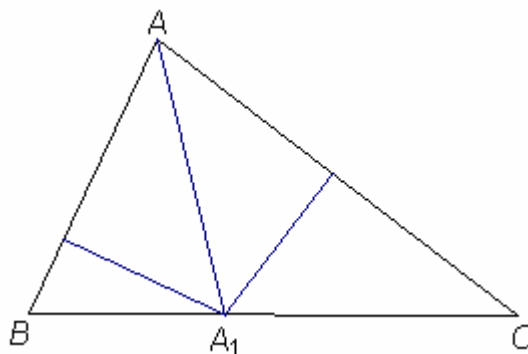
Uvažujme opět obecný trojúhelník ABC a položme si otázku, kde leží těžiště O trojice jeho vrcholů o hmotnostech

$$m_A = |BC|, \quad m_B = |AC|, \quad m_C = |AB|.$$

Bod O je průsečík příček AA_1 , BB_1 a CC_1 , kde A_1 , B_1 , C_1 jsou ty body stran BC , AC resp. AB , pro které (podle Axiomu III) platí úměra

$$\frac{|BA_1|}{|CA_1|} = \frac{|BA|}{|CA|}, \quad \frac{|CB_1|}{|AB|} = \frac{|CB|}{|AB|}, \quad \frac{|AC_1|}{|BC_1|} = \frac{|AC|}{|BC|}.$$

Vzhledem k tomu, že podíl $|BA_1| : |CA_1|$ udává poměr obsahů trojúhelníků BA_1A a CA_1A (mají totiž společnou výšku z vrcholu A , viz obr. 2.32), plyne z první rovnosti, že tyto dva trojúhelníky mají shodné výšky na strany AB a AC . Jinými slovy, bod A_1 má od stran AB a AC stejnou vzdálenost, takže přímka AA_1 je osa úhlu BAC . To znamená, že bod O je středem kružnice vepsané trojúhelníku ABC [11].

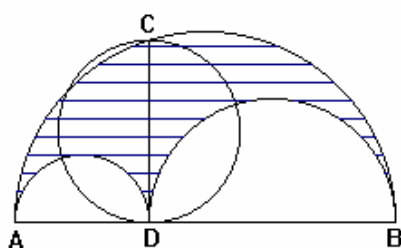


obr. 2.32

Tyto čtyři příklady demonstrují, jak lze využít Archimédovi způsoby řešení při studiu školské geometrie. Dávají k dispozici návod k tvorbě alternativních příkladů např. pro středoškolskou zájmovou matematiku. V následující kapitole uvedeme další úlohy inspirované Archimédovými poznatky.

2.5 Další úlohy inspirované Archimédem

Úvodní čtyři úlohy této kapitoly jsou řešitelné se znalostmi matematiky základní školy; další čtyři využívají znalostí středoškolské geometrie. Po zadání každého příkladu následuje návod na řešení, který má žákovi nebo studentovi napovědět. U 1. až 4. příkladu navíc uvádíme i samotné řešení. Příklady 5 až 8 navazují na úlohy z kapitoly 2.4 (Archimédova statika v geometrii).



obr. 2.33

V kapitole „Poučky“ této diplomové práce jsme se zmínili o útvaru, jež Archimédes nazýval *arbelos*, a který nám připomíná obuvnický nůž. Archimédes dokázal, že plocha tohoto nože (na obr. 2.33 obsah vyšrafované plochy) je roven obsahu kruhu sestrojeného nad průměrem CD .

- 1. Příklad:** Dokaž (podobně jako Archimédes), že obsah obuvnického nože (na obr. 2.33 je označen jako vyšrafovaná plocha) je roven obsahu kruhu nad průměrem CD .

Návod k 1. řešení: Nejdříve vyjádři plochu „arbelos“ pomocí poloměrů jednotlivých půlkružnic. Důkaz dokončíš užitím Thaletovy věty a Euklidovy věty v výšce.

Návod k 2. řešení: Uvědom si, že pravoúhlé trojúhelníky ABC , ACD a BCD si jsou podle Pythagorovy věty podobné. Pomocí obsahů polokruhů nad jejich stranami lze vyjádřit obsah polokruhu nad průměrem CD – použiješ-li správně Pythagorovu větu.

1. řešení: Označme poloměry polokružnic po řadě podle velikosti r_1, r_2, r_3 a poloměr kružnice nad průměrem CD označme r . Platí, že

$$r_1 + r_2 = r_3. \quad (\text{I})$$

Potom obsah vyšrafované plochy je:

$$\frac{1}{2}\pi \cdot r_3^2 - \frac{1}{2}\pi \cdot r_2^2 - \frac{1}{2}\pi \cdot r_1^2, \quad (\text{II})$$

po dosazení (I) za r_3 a úpravě dostáváme vztah pro obsah obuvnického nože:

$$\pi \cdot r_1 r_2. \quad (\text{III})$$

Podle Thaletovy věty je trojúhelník ABC pravoúhlý a podle Eukleidovy věty o výšce platí:

$$|AB| \cdot |BC| = |BD|^2 \Rightarrow 2r_1 \cdot 2r_2 = (2r)^2 \Rightarrow r_1 \cdot r_2 = r^2,$$

po dosazení do (III), získáme hledaný vztah [12]:

$$\pi \cdot r_1 r_2 = \pi \cdot r^2.$$

2. řešení: Toto řešení nevyužívá znalosti vztahů pro výpočet obsahu kruhu. Podle Thaletovy věty je trojúhelník ABC pravoúhlý. Ze zobecněné Pythagorovy věty vyplývá, že trojúhelníky ABC , ACD a BCD jsou podobné (protože ACD a BCD jsou pravoúhlé a jsou zároveň sestrojeny nad stranou pravoúhlého trojúhelníka ABC). Obsah S vyjádříme jako rozdíl obsahu polokruhu nad průměrem AB a obsahů polokruhů nad průměry AD a BD . Obsah polokruhu nad průměrem AB nahradíme součtem obsahů polokruhů nad průměry AC a BC (podle Pythagorovy věty). Od obsahu polokruhu nad průměrem AC odečteme obsah polokruhu nad průměrem AD , od obsahu polokruhu nad průměrem BC odečteme obsah polokruhu nad průměrem BD . Dostaneme dvakrát obsah polokruhu nad průměrem CD , což je obsah kruhu nad průměrem CD . Takto nejspíše postupoval při důkazu i Archimédes [3].

V kapitole „O kouli a válci“ jsme uvedli vztah pro objem koule, válce a kužele. Tuto úlohu, kterou řešil Archimédes, lze také použít ve školské matematice.

2. Příklad: Na Archimédově náhrobním kameni byl vytesán – podle jeho přání – válec s vepsanou koulí. Archimédes pro tyto dva útvary a ještě pro kužel

(vepsaný do válce) odvodil určitý poměr. Dokázal bys i ty odvodit v jakém poměru je objem válce, koule a kužele?

Návod: Nejprve si vyjádři známými vzorci objemy jednotlivých těles a potom se je snaž porovnat – měl bys dospět k hledanému poměru.

Řešení: Pokud je $V_{ku} = \frac{2}{3} \pi \cdot r^3$ objem kužele o poloměru

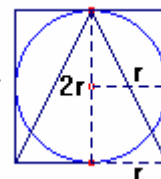
podstavy r a výšce $2r$, $V_{ko} = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3$ objem koule o

poloměru r a $V_v = 2\pi \cdot r^3$ objem válce o poloměru podstavy

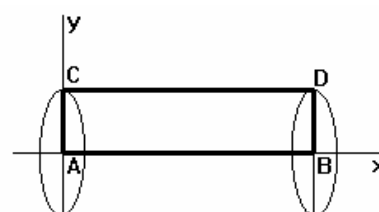
r a výšce $2r$, tak potom skutečně platí $V_{ku} : V_{ko} : V_v = 1 : 2 : 3$. Protože po vydělení

poměru $V_{ku} : V_{ko} : V_v$ výrazem $\pi \cdot r^3$, získáme $\frac{2}{3} : \frac{4}{3} : \frac{6}{3}$, z toho plyne (po vydělení

$2/3$) hledaný poměr.

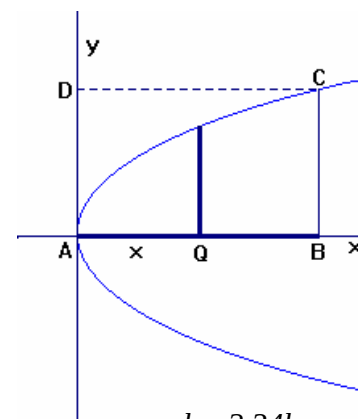


- 3. Příklad:** Pokud necháme obdélník v obr. 2.34a otáčet okolo svojí strany AB , vytvoří válec. Na obr. 2.34b je znázorněna křivka $y = \sqrt{x}$. Pokud se tato křivka bude otáčet okolo úsečky AB vytvoří těleso, kterému říkáme rotační paraboloid. Archimédes obě tyto rotační tělesa nakreslil do jednoho obrázku a vypočítal vztah mezi jejich objemy. Zkus to také.



obr. 2.34a

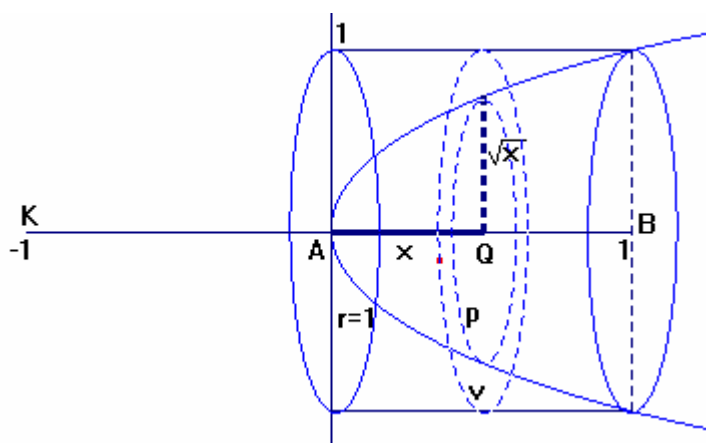
Návod: Archimédes užíval pro podobné výpočty vlastnosti páky. Těleso, jehož hledal objem, postupně „rozřezal“ a vyvažoval na páce (tyto pravidla jsou vyložena v kapitole „Kvadratura paraboly“ a „O rovnováze ploch“, kde jsou uvedeny základní vztahy pro páku). Pokud hledanému paraboloidu opíšeš válec, jehož objem znáš, mohlo



obr. 2.34b

by se ti podařit tuto úlohu vyřešit. Uvědom si také, kde je těžiště válce, protože ho budeš muset nějak zavěsit na páku. Zkus si tedy vzpomenout na své znalosti o páce a zamyslet se, jak by tato úloha šla vyřešit.

Řešení: Obě tělesa, jak válec, tak paraboloid rozříznul Archimédes v bodě Q (viz obr. 2.33c), pro který platí $|AQ| = x$. Řezem válce je kruh v o poloměru $r = 1$ a obsahem $S = \pi$. Řezem paraboloidu je kruh p s poloměrem $r' = \sqrt{x}$ a obsahem



obr. 2.33c

$S' = \pi(\sqrt{x})^2 = \pi \cdot x$. Kruh p nyní přeneseme do bodu K a bod A vnímáme jako bod opory páky. Páka je v rovnováze pokud platí:

$$x\pi \cdot 1 = \pi \cdot x. \quad (I)$$

Tento vztah říká, že páka je v rovnováze, pokud součin hmotnosti tělesa a vzdálenosti bodu zavěšení od bodu opory na jednom rameni páky se rovná téměř součinu na druhém rameni páky.

Každý kruh p přenesený do bodu K je tímto způsobem vyvážen odpovídajícím kruhem v ponechaným na původním místě. Těžiště válce je ve vzdálenosti $\frac{1}{2}$ od bodu A, proto po přenesení všech řezů paraboloidu, nastane rovnováha, když:

$$V_p \cdot 1 = V_v \cdot \frac{1}{2},$$

neboť podle vztahu (I) je celý objem paraboloidu (tíha objemu válce) vyvažován celým objemem válce, který je zavěšen ve vzdálenosti $\frac{1}{2}$ od bodu opory A.

Objem našeho válce je tedy π (jeho výška a poloměr základny je 1) a objem paraboloidu je $\frac{1}{2}$.

Zobecněné řešení: Položíme-li velikost $|KA|$ rovnou obecnému číslu l a velikost $|AB|$ obecnému číslu v (výška válce), vztah (I) můžeme přepsat:

$$l \cdot \pi (\sqrt{x})^2 = x \cdot \pi \cdot r^2.$$

Pro poloměr řezu válce platí $r = \sqrt{v}$, proto po úpravě předešlého vztahu dostáváme:

$$l = r^2 = v. \quad (\text{II})$$

Těžiště válce leží ve vzdálenosti $\frac{v}{2}$ od bodů A, B, proto po přenesení všech řezů paraboloidu nastane rovnováha, pokud:

$$V \cdot l = \frac{v}{2} \pi \cdot r^2 v,$$

kde V je objem paraboloidu. Po dosazení (II) do předešlého vztahu, dostáváme:

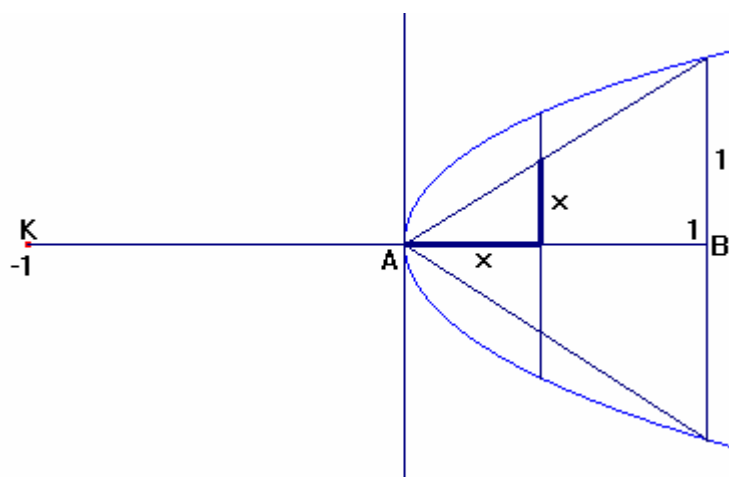
$$V \cdot v = \frac{v}{2} \pi \cdot r^2 v,$$

po úpravě $V = \frac{1}{2} \pi \cdot r^2 v = \frac{1}{2} V_v$. A protože je $r^2 = v$ pro objem V platí:

$$V = \frac{1}{2} \pi \cdot r^4.$$

4. Příklad: Na základě znalostí z předešlého příkladu, zkus určit těžiště rotačního paraboloidu. Zkus využít vepsaný kužel.

Řešení: Řezem kužele je kruh s poloměrem x , řezem paraboloidu je kruh s poloměrem $\sqrt{x}$ (viz obr. 2.34). Jejich obsahy jsou $\pi \cdot x^2$ a $\pi \cdot x$. Páka je



obr. 2.34

v rovnováze, pokud je $1 \cdot \pi \cdot x^2 = x \cdot \pi \cdot x$. Kruhový řez kužele umístíme vlevo od bodu P do bodu K (ve vzdálenosti 1 od bodu P), čímž vyvážíme řez paraboloidu na jeho místě. Po přenesení všech řezů kužele do bodu K platí pro rovnováhu:

$$1 \cdot V_k = t \cdot V_p,$$

kde t je poměr, ve kterém těžiště paraboloidu rozdělí úsečku (výšku paraboloidu) AB . Po dosazení za V_k, V_p získáme:

$$t = \frac{2}{3}.$$

Toto řešení lze podobně jako ve 3. příkladě zobecnit pro libovolnou výšku a poloměr základny paraboloidu [4].

5. Příklad: Získejte základní poznatky o těžišti obecného čtyřstěnu $ABCD$.

Návod: Použijte úvahu o čtveřici hmotných bodů o jednotkové tíze (podobně jako v oddílu 1. kapitoly 2.4). Použijte přitom také redukované soustavy typu $\{2E, 2F\}$, kde E a F jsou středy libovolné dvojice protilehlých hran čtyřstěnu $ABCD$.

6. Příklad: Zjistěte, zda těžiště modelu obecného čtyřúhelníku vyrobeného z homogenního materiálu je totožné s těžištěm čtveřice jeho vrcholů o stejné hmotnosti.

Návod: Dokažte nejdříve, že polohy „plošného“ těžiště T_p a „vrcholového těžiště“

T_v libovolného konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ jsou určeny vektory $KT_p = \frac{1}{3}KE'$ a

$KT_v = \frac{1}{2}KL$, kde bod K je střed úhlopříčky AC , bod L střed úhlopříčky BD , bod E

průsečík těchto úhlopříček. Bod E' je bod souměrně sdružený s bodem E podle středu L . Stejná vyjádření platí také pro nekonvexní čtyřúhelníky $ABCD$ obsahující úhlopříčku AC .

7. Příklad: Libovolnému trojúhelníku lze připsat tři kružnice tak, že každá z nich se dotýká jedné strany trojúhelníku a prodloužení dvou ostatních stran. Dokažte, že tři úsečky, z nichž každá spojuje vrchol daného trojúhelníku s bodem dotyku připsané kružnice na protější straně, procházejí jedním bodem.

Návod: Vyjádřete délky šesti úseček, na které je rozdělen obvod trojúhelníku vrcholy a body dotyku, pomocí délek stran trojúhelníku. Tak zjistíte, že jde (jako v úvaze z oddílu 3 kapitoly 2.4) o tři dvojice shodných úseček.

8. Příklad: Určete, kde leží těžiště tenkého homogenního drátu, který je vytvarován do obvodu daného trojúhelníku ABC .

Návod: Jde vlastně o soustavu tří homogenních hmotných úseček AB , AC , BC o hmotnostech přímo úměrných jejich délkám. Těžiště každé této úsečky leží v jejím středu. Podle Axiomu III můžeme naši soustavu tří hmotných úseček zaměnit trojicí bodů o hmotnostech rovnajícím se délkám stran trojúhelníka. Poznamenejme, že těžiště hmotné soustavy se nezmění, vynásobíme-li hmotnosti všech jejích prvků stejným kladným číslem – vhodnou volbou tohoto kladného čísla se úloha převede na úlohu z posledního oddílu kapitoly 2.4 [11].

3. Závěr

Práce si vytkla cíl vyčerpávajícím způsobem uvést a podrobně rozebrat všechna známá Archimédova díla a zasadit je do kontextu řecké matematiky. Podává – doufejme komplexní – přehled o Archimédovi, jeho životě, díle a matematické invenci.

Další ambicí je nabídnout učitelům základních a středních škol alternativní výukový materiál pro hodiny matematiky. Snažil jsem se předložit konkrétní náměty na využití Archimédovy metody objevování matematických a geometrických zákonitostí ve studiu školské matematiky a geometrie. Uvedené příklady ukazují alternativní způsoby řešení (které využívají elementárních matematických znalostí) obecně známých geometrických problémů – jsou proto, podle mého názoru, vhodné pro využití např. v zájmové matematice.

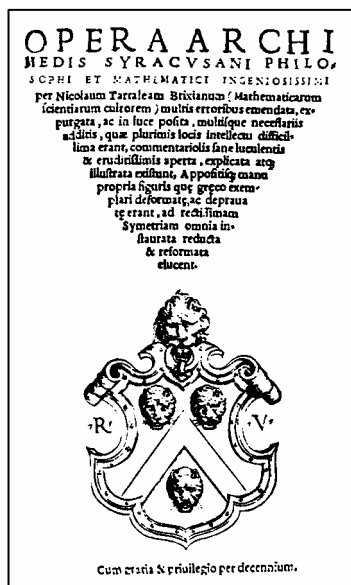
Snad se podaří inspirovat zasvěceného čtenáře k tvorbě dalších úloh či hledání problémů, které lze řešit popsanými metodami. Věřím, že alespoň části této diplomové práce by mohly nalézt využití ve výuce, jak na středních, tak na základních školách či v kroužcích zájmové matematiky.

LITERATURA:

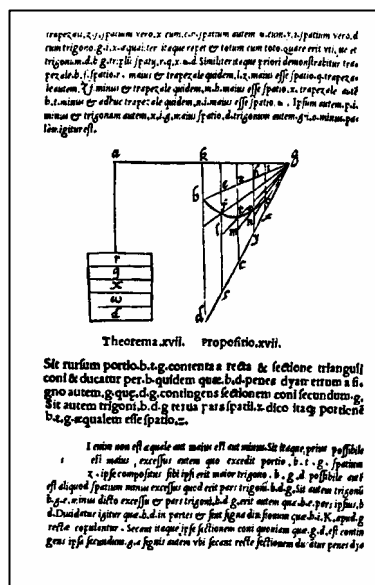
- [1] Abailard, P., Berg, L., S.: Dictionary of scientific biography, Volume I, Charles Scribner's sons, New York, 1970
- [2] Bartsch, H., J., Matematické vzorce, přeložil a upravil Zdeněk Tichý, Mladá fronta, Praha, 2000
- [3] Bečvář, J., Štoll, I.: Archimédes, největší vědec starověku, Prometheus, 2005
- [4] Bero, P.: Matematici, já a ty, Mladé letá, Bratislava, 1989
- [5] Fuchs, E.: Od měření obsahů a objemů k infinitesimálnímu počtu. In: sborník Historie matematiky I: seminář pro vyučující na středních školách, Jevíčko, 1994, str. 109 – 118. Editori: J Bečvář, E. Fuchs
- [6] Hazewinkel, M.: Encyclopaedia of mathematics. Volume 1, A-B, Dordrecht: Kluwer, 1988
- [7] Kolman, A.: Dějiny matematiky ve starověku, Academia, Praha, 1968
- [8] Kuřina, F.: Umění vidět v matematice, SPN, Praha, 1989
- [9] Macrone, M.: Od Aristotela k virtuální realitě, přeložil Stanislav Pavlíček, Brána Knižní klub, 1999
- [10] Polák, J.: Přehled středoškolské matematiky, Prometheus, Praha, 1997
- [11] Šimša, J.: Archimédova statika v geometrii. In: Rozhledy matematicko – fyzikální, číslo 1/1997 (str. 14 – 24), číslo 2/1997 (str. 57 – 64)
- [12] Šimša, J.: Výpočet čísla π z obvodů pravidelných mnohoúhelníků, 1. část. In: Rozhledy matematicko – fyzikální, číslo 1/2005 (str. 6 – 14)
- [13] Švrček, J., Vanžura, J.: Geometrie trojúhelníka, Polytechnická knihnice, Praha, 1988
- [14] Biographien bedeutender Mathematiker, Volk und Wissen, Berlin, 1983
- [15] The McGraw-Hill encyclopedia of world biography, McGraw-Hill, New York, 1973
- [16] <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Matematici/Archimedes.html>
- [17] <https://www.math.nyu.edu/~corres/Archimedes/Solids/Pappus.html>
- [18] <http://www.nndb.com/people/746/000087485/>
- [19] http://www.nahste.ac.uk/isaar/GB_0237_NAHSTE_P1090.html
- [20] <http://www-maths.mcs.st-and.ac.uk/~gmp/gmpANA.html>
- [21] <http://www.math.tamu.edu/~don.allen/history/archimed/archimed.html>
- [22] <https://www.math.nyu.edu/~corres/Archimedes/Screw/SourcesScrew.html>
- [23] <https://www.mcs.drexel.edu/~corres/Archimedes/eoutens.html>

Seznam příloh:

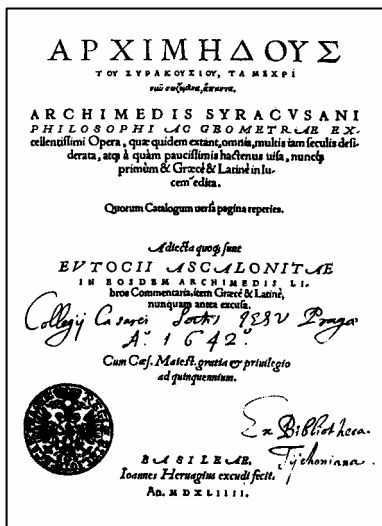
- 1) **Příloha č. 1:** Tartagliovo vydání Archimédových pojednání, Benátky 1543,
- 2) **Příloha č. 2:** Řecké vydání souborného Archimédova díla doplněné latinským překladem a Eutokiovými komentáři, Basilej 1544,
- 3) **Příloha č. 3:** Řecko-latinské vydání Archiméda, Paříž 1615,
- 4) **Příloha č. 4:** Profil Archiméda na antické rytině,
- 5) **Příloha č. 5:** Podobizna Archiméda (vytvořená podle busty viz příloha č. 7) na sovětské pohlednici z roku 1957,
- 6) **Příloha č. 6:** Pojednání „O plovoucích tělesech“, Benátky 1565,
- 7) **Příloha č. 7:** Údajná Archimédova busta z Národního muzea v Neapoli na italské poštovní známce,
- 8) **Příloha č. 8:** Obálka knihy „The Works of Archimédes“, Dover Publications, Inc., New York, U.S.A. 2002. Toto dílo vyšlo poprvé v roce 1897 se stejným názvem a následně v roce 1912 s názvem „The Method of Archimédes“, obě tato vydání editoval Thomas Little Heath (1861 – 1940), který je považován za předního světového odborníka v oblasti historie matematiky. Kniha je považována za nejlepší anglicko-jazyčný přehled Archimédovi práce [16],
- 9) **Příloha č. 9:** Měsíční kráter „Archimédes“ (82 km široký),
- 10) **Příloha č. 10:** Disk CD s textem této diplomové práce ve formátu pdf.



Příloha č. 1a



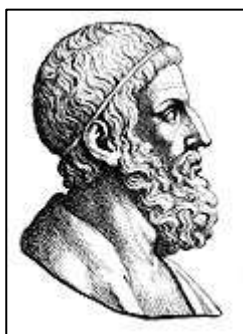
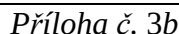
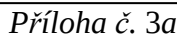
Příloha č. 1b



Příloha č. 2a



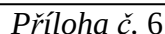
Příloha č. 2b



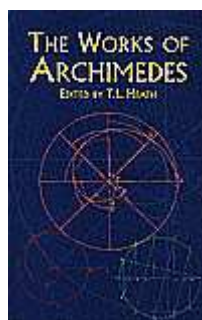
Příloha č. 4



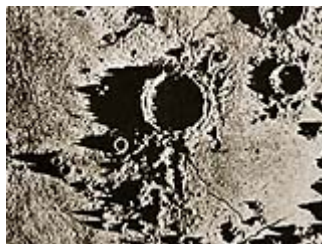
Příloha č. 5



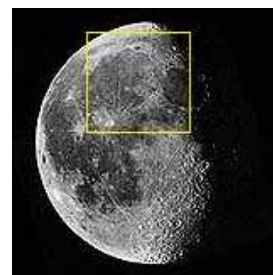
Příloha č. 7



Příloha č. 8



Příloha č. 9a



Příloha č. 9b