UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
KATEDRA MATEMATICKÉ ANALÝZY A APLIKACÍ MATEMATIKY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Jak velké je nekonečno?

Vedoucí bakalářské práce:
Mgr. Pavla Kouřilová, Ph.D.
Rok odevzdání: 2014

Vypracovala:
Gabriela Slavíčková
MATEKO, III. ročník

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vytvořila samostatně za vedení Mgr. Pavly Kouřilové, Ph.D. a že jsem v seznamu použité literatury uvedla veškeré zdroje, které jsem při zpracování práce použila.

V Olomouci dne 11. dubna 2014

Poděkování

Ráda bych na tomto místě poděkovala vedoucí bakalářské práce Mgr. Pavle Kouřilové, Ph.D. za ochotu, za obětavou spolupráci, za cenné rady a za čas, který mi věnovala při konzultacích. Dále chci poděkovat své rodině, která mě při studiu plně podporovala.

Obsah

Seznam použitých označení a symbolů

|AB| . . . vzdálenost bodu A od bodu B

$\emptyset$ . . . prázdná množina

$\mathbb{N}$ . . . množina všech přirozených čísel

$\mathbb{Z}$ . . . množina všech celých čísel

$\mathbb{Q}$ . . . množina všech racionálních čísel

$\mathbb{R}$ . . . množina všech reálných čísel

$\mathbb{S}$ . . . množina všech sudých přirozených čísel

$A \cup B$ . . . sjednocení množin A a B

$A \cap B$ . . . průnik množin A a B

$A \setminus B$ . . . rozdíl množin A a B

$A \subseteq B$ . . . A je podmnožinou množiny B

$A \subset B$ . . . A je vlastní podmnožinou množiny B

$P(A)$ . . . potenční množina množiny A

$A \times B$ . . . kartézský součin množin A a B

R . . . binární relace

$a \in A$ . . . a je prvkem množiny A

$\Rightarrow$ . . . implikace

$\wedge$ . . . konjunkce

$\sim$ . . . ekvivalence

$\sim, \succ, \succeq, \prec, \preceq$ . . . symboly sloužící k porovnání mohutnosti množin

$\exists$ . . . existenční kvantifikátor („existuje“)

$\forall$ . . . obecný kvantifikátor („pro všechna“)

card A . . . kardinální číslo množiny A

$\aleph_0, \aleph_1, \ldots$ . . . transfinitní kardinální čísla

∞ . . . nekonečno

$\lim_{x \to a} f(x)$ . . . limita funkce f v bodě a

$\{c_i\}_{i=1}^{\infty}$ . . . nekonečná posloupnost čísel c_i

Úvod

Téma „Jak velké je nekonečno?“ jsem si zvolila, protože je to velice zajímavá, avšak občas pro některé těžko pochopitelná oblast matematiky. Studenti se velice často dopouští chybných výpočtů, protože s nekonečny zacházejí jako s „obyčejnými“ čísly. Po přečtení této práce si uvědomí, jakých chyb se dopouští a bude pro ně jednodušší se těchto chyb vyvarovat.

Většina z nás se již s pojmem nekonečno, jak v matematických, tak i v různých filozofických disciplínách setkala. S tímto pojmem se můžeme střetnout i v běžném životě, aniž bychom si to uvědomovali. Každý z nás si již určitě nejednou pomyslel, jak je to čekání nekonečné, že vesmír je nekonečný apod. V této práci si osvětlíme, jak je to s nekonečnem z matematického hlediska.

Hlavním cílem tedy bude vysvětlení, co to vlastně „nekonečno“ je. Tato práce bude sloužit jako doplňkový studijní materiál pro studenty, kteří dostatečně nerozumí problematice nekonečných množin a chtějí zdokonalit své znalosti v této oblasti.

První kapitola nás seznámí s historií pojmu nekonečno, a to od starověku až po současnost. Uvidíme, jak se pojetí nekonečna v průběhu času změnilo. Také je zde zmínka o významných matematicích a o počátcích teorie množin.

Druhá kapitola nás seznámí s důležitými pojmy, které s teorií množin souvisí, a jejichž znalost je k pochopení nekonečna zcela nezbytná. S těmito pojmy se bude dále pracovat v následujících kapitolách.

Třetí a čtvrtá kapitola již pojednává o nekonečných množinách. Ve třetí kapitole je ukázáno, jakým způsobem se nekonečná množina může sestrojit. Dále je zde vysvětleno, jak se porovnávají velikosti množin a proč nejsou všechna nekonečna stejně velká. Ve čtvrté kapitole bude ukázáno, jak se počítá s výrazy obsahující nekonečno.

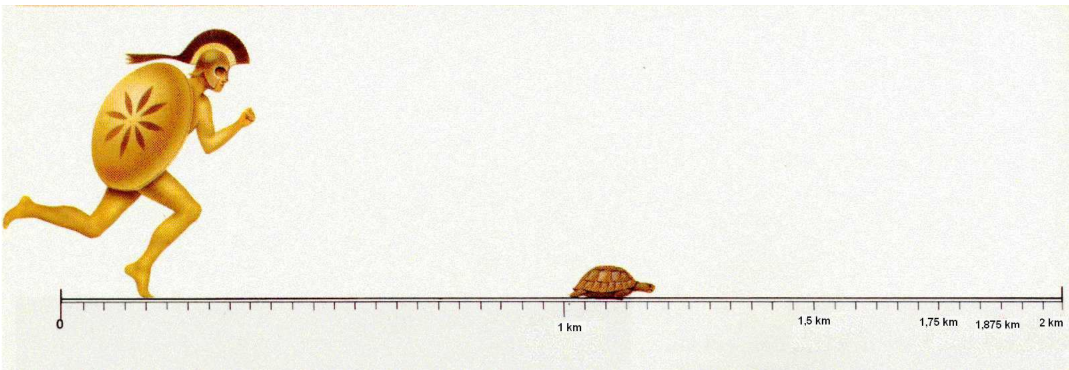
V textu budeme užívat symbol $\square$ pro označení konce důkazu a symbol $\triangle$ pro označení konce příkladu.

1 Historický úvod

V této kapitole si představíme nejstarší historii pojmu nekonečno a také význačné matematiky, zejména Bernarda Bolzana a George Cantora, kteří se nekonečnem zabývali. Dále také uvidíme, jak se chápání pojmu nekonečno v průběhu času měnilo.

Při zpracovávání této kapitoly byly využity zdroje [1], [4], [8], [9], [10], [11] a [16].

1.1 Historie pojmu nekonečno

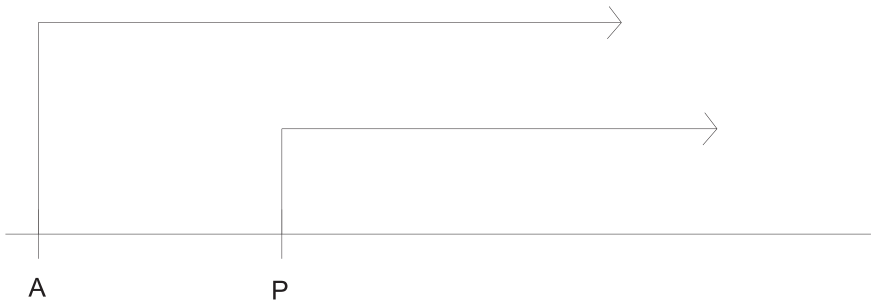


Obrázek 1: Achilles a želva. Převzato z [12].

Historie pojmu nekonečno sahá až do 5. stol. př. n. l., kdy žil významný filosof Zenón. Zenón se zabýval nekonečnem a díky němu vznikly tzv. Zenonovy paradoxy. Těmito paradoxy reagoval na všeobecně přijímaná tvrzení, že při sčítání nekonečně mnoha veličin je výsledek velký, tak jak my chceme (i kdyby byla každá veličina nekonečně malá). Při nekonečném sčítání nul dostáváme opět nulu. Jedním z paradoxů byla na příklad úloha o želvě a Achillovi. Achilles a želva spolu závodí, avšak Achilles je mnohem rychlejší než želva, proto má želva na začátku náskok. Achilles tedy startuje z daného bodu A a želva startuje z bodu P viz obrázek 2. Achilles se snaží želvu dohonit.

Přesné znění paradoxu je následující:

„Achilles a želva se pohybují přímočaře v témže směru. Achilles je



Obrázek 2: Start závodu

> mnohem rychlejší než želva, avšak aby ji dohonil, musí nejprve projít bodem P, z něhož želva vyšla. V okamžiku kdy dostihl bodu P, postoupila již želva k bodu P1. Achilles však nemůže chytit želvu, aniž by prošel bodem P1, avšak želva zatím postoupí do nového bodu P2. Je-li Achilles v P2, želva zatím dosáhne dalšího bodu P3, atd. Achilles tedy nemůže dohonit želvu.“

Tohoto poznatku využívalo mnoho velkých matematiků, mezi první z nich patřil Eudoxos (4. stol. př. n. l.) se svojí „exhaustivní“ metodou (první forma teorie limit). Díky této metodě bylo možné počítat obsahy různých útvarů, především kruhů. Eudoxova věta:

> „Při postupu v němž od nějaké veličiny M odečítáme nejprve veličinu větší než je polovina M, pak od zbytku opět odečteme veličinu větší než jeho polovina atd., dostáváme vždy po dostatečně velkém počtu kroků zbytek menší než libovolná předem daná veličina. To tedy znamená, že zbývající (nevyčerpané) části lze dle libosti změnšit.“

Matematická teorie byla ve středověku rozvíjena zejména filosofy. Zabývali se také nekonečností, k čemuž je vedlo zejména Platónovo a Aristotelovo učení (4. stol. př. n. l.). Mezi významné filosofy patřil například Origenes (3. stol.) nebo Augustin (5. stol.), kteří již v této době přišli s úvahami o aktuálním nekonečnu. Dalším významným filosofem byl Tomáš Akvinský (13. stol.). Ten zastával názor, že úsečka se skládá z menších úseček, které mají opět vlastnosti úsečky, tudíž neexistuje nejmenší úsečka. Na základě této úvahy platí, že nekonečno je nekonečně dělitelné.

1.1.1 Potenciální a aktuální nekonečno

Pojetí nekonečna je dvojí, a to potenciální a aktuální. Nyní si přesněji vysvětlíme, co si pod těmito pojmy máme představit.

Nekonečno, s nímž pracovali matematici dříve, bylo nazýváno jako potenciální. V případě potenciálního nekonečna mluvíme o neukončeném procesu, avšak pohybujeme se v „konečnu". Ke každému číslu můžeme napsat další číslo a naopak i velice malé číslo můžeme vždy rozdělit na nenulové poloviny, setkáváme se tedy s nějakým nekonečným pokračováním.

Pojetí nekonečna se změnilo až v 19. století. Do této doby se nenašel nikdo, kdo by aktuální nekonečno podrobněji studoval. Občas se o něm objevila nějaká úvaha, která však od jeho zkoumání spíše odrazovala. V 19. století se jím zabýval český vědec Bernard Bolzano, který napomohl vzniku aktuálního nekonečna. Aktuální nekonečno je chápáno jako nekonečný celek. Víme, že ve vyjmenovávání přirozených čísel můžeme neustále pokračovat. Ať vyslovíme jakékoliv číslo, tak vždy za ním nalezneme neomezené množství dalších přirozených čísel. Matematici se smířili s tím, že nelze vytvořit jejich uplný seznam a vyřešili to tak, že začali množinu přirozených čísel brát, jako by to byl již hotový, uzavřený celek, který obsahuje neomezené množství čísel. Aktuální nekonečno tedy vyjadřuje nějaký nekonečný celek, který již existuje.

1.2 Bernard Bolzano

1.2.1 Život a dílo

Bernard Bolzano byl významný matematik, který se narodil v Praze roku 1781, během svého života byl profesorem na pražské univerzitě. Bolzano vyučoval náboženství a oficiálně nebyl považován za matematika, protože byl spíše samotářský typ a veškerou matematickou teorii si nastudoval sám. Během svého života vydal několik prací, například Binomická věta (1816), Ryze analytický důkaz (1816), avšak stěžejním dílem byla kniha, která byla vydána až posmrtně, s názvem Paradoxy nekonečna (1851). Tento významný matematik zemřel roku 1848.

1.2.2 Paradoxy nekonečna

V Paradoxech nekonečna se Bolzano zabýval nekonečnými množinami. Autor poukazuje na to, že v jeho době bylo mnoho vědců, kteří existenci nekonečna popírali různými tvrzeními. Bolzano tato tvrzení vyvracel. Příklad tvrzení, jež nekonečno popíralo:

> „Nekonečno nemůže existovat, protože nekonečná množina nemůže být nikdy sjednocena v celek, nemůže být nikdy myšlením obsáhnuta.“

Tento výrok, který vznikl na základě myšlenky, že k existenci celku A,B,C,.. je nejprve potřeba mít o každém prvku tohoto celku určitou představu, vyvrátil pomocí úlohy o obyvatelích většího města. Toto město můžeme chápat jako jeden velký celek složený z jednotlivých obyvatel (prvky celku), aniž bychom museli mít představu o každém obyvateli zvlášť.

Bolzano v tomto díle přišel s myšlenkou, že množina všech přirozených, a dokonce i celých čísel je nekonečná. Někteří však toto tvrzení nepřijímali a považovali ho za paradox. Avšak Bolzano dokázal jednoduchými úvahami, za pomoci přirozených čísel, že toto tvrzení je pravdivé. Řada 1, 2, 3, 4, … v tomto uspořádání nemá nejvyšší číslo, tudíž ke každému členu existuje člen následující. Z toho vyvodil, že i množina všech veličin, které představovaly celá čísla, zlomky i iracionální výrazy, je nekonečná.

V této knize se také zabýval vztahy mezi nekonečny. Přišel s úvahou, že všechna nekonečna nejsou stejně velká. Toto tvrzení ilustruje (vysvětluje) pomocí dvou polopřímek. Polopřímka, která začíná v bodě A a pokračuje do nekonečna, je větší (příp. menší) o úsek |AB| než polopřímka, která má počátek v bodě B.

Dále také přišel s následující myšlenkou. Mějme dány dvě uzavřené množiny $C, D \subset \mathbb{R}$ obsahující nekonečný počet prvků a nechť $C \subset D$. V této situaci by bylo přirozené říci, že v množině D je více prvků než v její podmnožině C. Bolzano ale ukázal, že prvky ležící v množině C lze spojit do dvojic s prvky z množiny D tak, že žádný prvek z C ani D nebude osamocen a zároveň se ani jeden prvek nebude vyskytovat ve více dvojicích. Tím vlastně zjistíme, že mají obě množiny stejný počet prvků. Toto tvrzení lze jednoduše ilustrovat následující úvahou. Mějme nekonečné množiny $C = \langle 0, 6 \rangle$ a $D = \langle 0, 10 \rangle$, tj. platí $C \subset D$. Nyní lze pomocí rovnice $6y = 10x$, kde $x \in \langle 0, 6 \rangle$ a $y \in \langle 0, 10 \rangle$ utvořit dvojice, v nichž se každá hodnota vyskytuje právě jednou.

Díky dílu Paradoxy nekonečna je Bernard Bolzano považován za předchůdce Cantorovy teorie množin.

1.3 Počátky teorie množin

Další významnou osobností je George Cantor. George Cantor (1845-1918) byl významný vědec, který se do povědomí veřejnosti zapsal jako tvůrce teorie množin. Jeho práce, ve kterých se zabýval touto problematikou, začaly vycházet v roce 1873. Cantor zavedl do oblasti matematiky úplně nové odvětví. V chápání nekonečna navázal na svatého Augustina, o nekonečnu přemýšlel jako o aktuálním, tj. o nekonečnu udávajícím velikost. Díky tomu, že chápal nekonečno jiným způsobem, než tomu bylo doposud, mohl zavést tzv. transfinitní kardinální čísla. Nejmenší nazval Alef nula ($\aleph_0$). Také našel způsob uspořádání nekonečných množin a zavedl pojem mohutnosti množiny.

Tyto nově zavedené teorie a pojmy měly zpočátku velké množství odpůrců. Mezi největší odpůrce patřil L. Kronecker (1823-1891), který se zabýval teorií čísel. Teorie množin byla v roce 1901 rozšířená o teorii míry, kterou vytvořil významný matematik H. L. Lebesgue (1875-1941). Od tohoto roku začala být Cantorova teorie přijímána mezi matematiky, hrála totiž významnou roli v teorii reálných funkcí.

V této době začalo vznikat mnoho paradoxů, kterými matematici chtěli poukázat na určité neodstatky v Cantorově teorii množin, což vedlo ke krizi teorie množin. Velice důležitým paradoxem byl tzv. Russellův paradox.

> „Je-li soubor všech objektů, které mají určitou vlastnost, množina, uvažujeme množinu všech množin, které nejsou obsaženy samy v sobě jako prvek.“

Tento paradox lze interpretovat do praxe například pomocí úlohy o holiči, který holí všechny muže, kteří se neholí sami. Nyní nám nastává otázka, zda holič holí i sám sebe. Pokud se sám holí, tak nám z toho vyplývá, že se holit nemůže, protože holí jen ty co se sami neholí. A naopak, pokud se sám neholí, tak se může holit. Tudíž se dostáváme do neřešitelné situace.

V této „krizi“ hrála významnou roli axiomatická metoda budování teorie množin, díky které nastala možnost odstranit paradoxy. Významným vědcem byl E. Zermelo (1871-1953) a jeho axiomatický systém teorie množin, v němž odmítá veškeré spory plynoucí ze známých paradoxů. Zermelovu teorii doplnil A. A. Fraenkel (1891-1965), díky nim vznikla Zermelova a Fraenkelova teorie množin. Za zmínku také stojí další teorie množin, která začala postupně vznikat, a to Gödelova a Bernaysova teorie množin.

2 Základní pojmy teorie množin

Tato kapitola slouží jako úvod do teorie množin, jsou zde vysvětleny základní pojmy, které budeme později potřebovat.

Vypracování této kapitoly bylo provedeno pomocí zdrojů [3] a [7].

2.1 Množiny

Definice 2.1. *Množinou* A nazýváme soubor objektů, přičemž o každém objektu jsme schopni rozhodnout, zda do množiny A patří nebo nepatří. Pokud objekt a patří do množiny A, značíme $a \in A$. Množinu, která neobsahuje žádný objekt (prvek), nazýváme *prázdná množina* a je označována symbolem $\emptyset$.

Dále uvedeme základní typy množin. Množiny rozlišujeme na konečné a nekonečné. Konečná množina je taková, která má konečný počet prvků. Množiny s nekonečným množstvím prvků se nazývají nekonečné.

Pro některé význačné číselné množiny používáme následující označení:
$\mathbb{N}$ … množina všech přirozených čísel $\{1, 2, 3, ...\}$
$\mathbb{Z}$ … množina všech celých čísel $\{..., -1, 0, 1, ...\}$
$\mathbb{Q}$ … množina všech racionálních čísel, tj. množina všech čísel, které lze zapsat jako zlomek ve tvaru $\frac{x}{y}$, kde $x, y \in \mathbb{Z}, y \neq 0$ a navíc jsou čísla x, y nesoudělná
$\mathbb{R}$ … množina všech reálných čísel, tj. množina všech racionálních čísel rozšířená o čísla iracionální (čísla, která nemůžeme zapsat ve tvaru zlomku př.: π, e)

2.2 Operace s množinami

Nyní, když máme zavedené množiny a pojmy s nimi související, je také důležité se seznámit se základními operacemi, které na množinách můžeme provádět.

Definice 2.2. *Sjednocením množin A a B* nazýváme množinu obsahující všechny prvky, které patří alespoň do jedné z množin A a B. Označujeme $A \cup B$.

Poznámka 2.1. Operaci sjednocení můžeme rozšířit na konečný počet množin $A_1, A_2, \dots\ A_n$, $n \in \mathbb{N}$, resp. nekonečný počet množin $A_1, A_2, \dots$. Označujeme $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, resp. $A_1 \ \cup \ A_2 \cup \ \dots \ = \ \bigcup_{n=1}^{\infty} \ A_n$.

Definice 2.3. *Průnikem množin A a B* nazýváme množinu obsahující všechny prvky, které patří do množiny A a zároveň do množiny B. Označujeme $A \cap B$.

Poznámka 2.2. Operaci průnik můžeme rozšířit na konečný počet množin $A_1, A_2, \dots\ A_n$, $n \in \mathbb{N}$, resp. nekonečný počet množin $A_1, A_2, \dots$. Označujeme $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$, resp. $A_1 \ \cap \ A_2 \cap \ \dots \ = \ \bigcap_{n=1}^{\infty} \ A_n$

Definice 2.4. *Rozdílem množin A a B* nazýváme množinu, jejíž prvky patří do množiny A a zároveň nepatří do množiny B. Označujeme $A \setminus B$.

Definice 2.5. Říkáme, že *množina A je podmnožinou množiny B*, jsou-li všechny prvky množiny A zároveň prvky množiny B. Označujeme $A \subseteq B$. Říkáme, že *množina A je vlastní podmnožinou množiny B* je-li $A \subseteq B$ a zároveň $A \neq B$. Píšeme $A \subset B$.

Definice 2.6. *Potenční množina množiny A* je množina, která obsahuje všechny podmnožiny množiny A. Označujeme $P(A)$.

Příklad 2.1. Pro množinu $A = \{1, 2, 3\}$ je potenční množinou množina $P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$. △

Definice 2.7. Říkáme, že *množina A se rovná množině B*, jsou-li všechny prvky množiny A zároveň prvky množiny B a naopak, tedy platí-li $A \subseteq B$ a zároveň $B \subseteq A$. Označujeme $A = B$.

2.3 Zobrazení

Zobrazení je velice důležitý pojem, se kterým se budeme setkávat, avšak dříve než si vysvětlíme, co to zobrazení je, musíme zavést ještě další dva pojmy, které se zobrazením souvisí. Nejprve zadefinujeme kartézský součin a poté binární relaci.

Definice 2.8. Nechť jsou zadány dvě neprázdné množiny A a B. *Kartézský součin množin A a B* (ozn. $A \times B$) je množina všech uspořádaných dvojic (a, b), pro které platí, že $a \in A$ a $b \in B$, tj. $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$.

Poznámka 2.3. V případě, že je alespoň jedna z množin A, B prázdná, pro kartézský součin platí, že $A \times B = \emptyset$.

Příklad 2.2. Pro množinu $A = \{1, 2, 3\}$ a $B = \{a, b, c\}$ je kartézský součin $A \times B$ roven množině $\{(1, a), (2, a), (3, a), (1, b), (2, b), (3, b), (1, c), (2, c), (3, c)\}$. $\triangle$

Již jsme schopni říct, co to kartézský součin je. Nyní se zaměříme na vysvětlení pojmu binární relace.

Definice 2.9. *Binární relace R mezi množinami A a B* je každá podmnožina kartézského součinu $A \times B$. Jestliže $(a, b) \in R$, říkáme, že prvky a a b jsou v relaci a značíme aRb.

Příklad 2.3. Nechť K je množina všech jízdních kol v Olomouci, L množina všech obyvatel Olomouce, M množina všech obyvatel Olomouce, kteří jedou právě teď na kole. Potom bude platit, že množina M je binární relace mezi množinami K a L. $\triangle$

Definice 2.10. Relace $R \in A \times A$ se nazývá
a) *reflexivní*, jestliže: $a \in A \Rightarrow aRa$,
b) *symetrická*, jestliže: $aRb \Rightarrow bRa$,
c) *tranzitivní*, jestliže: $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$.

Definice 2.11. Relace $R \in A \times A$, která je reflexivní, symetrická a tranzitivní se nazývá *ekvivalence na A*. Ekvivalenci označujeme zpravidla symbolem $\sim$ (př. $a \sim b$).

Nyní, když už chápeme kartézský součin i binární relaci, se zaměříme na vysvětlení pojmu zobrazení množin. Nadále pracujeme s neprázdnými množinami A a B .

Definice 2.12. *Zobrazením f množiny A do množiny B* rozumíme binární relaci mezi množinami A a B, která každému prvku $a \in A$ přiřadí právě jeden prvek $b \in B$. Označujeme $f : A \to B$.

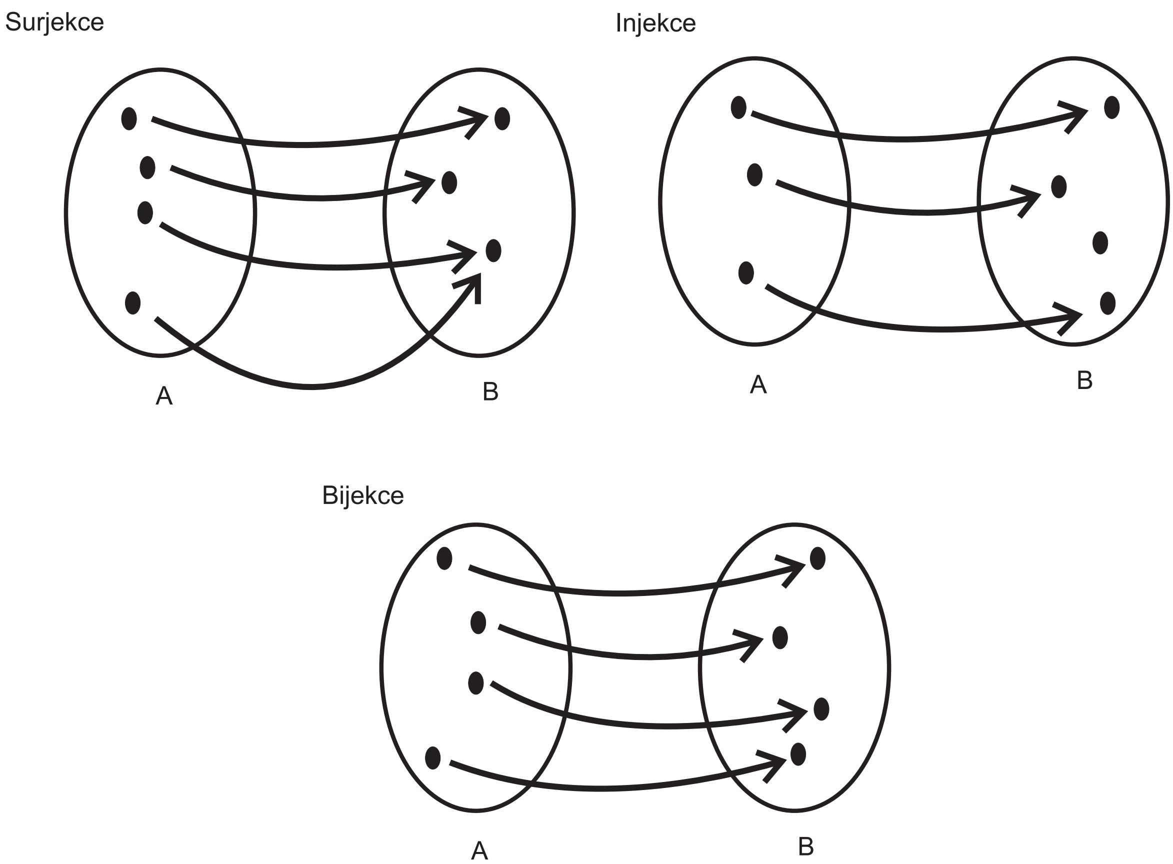
Uvažujeme-li zobrazení $f : A \to B$, kde $b = f(a)$, potom se prvek $b \in B$ nazývá obraz prvku $a \in A$ a prvek $a \in A$ se nazývá vzor prvku $b \in B$.

Definice 2.13. Zobrazení $f : A \to B$ se nazývá

a) *surjektivní* neboli *zobrazení množiny A na množinu B*, jestliže
$\forall b \in B \ \exists a \in A : f(a) = b$,

b) *injektivní (prosté)*, jestliže má každý obraz nejvýše jeden vzor,

c) *bijektivní*, jestliže zobrazení f je surjektivní a zároveň injektivní.



Obrázek 3: Zobrazení $f : A \to B$

Příklad 2.4. Mějme množinu A, což je množina všech cestujících v autobuse. Dále označme B množinu všech sedadel. Cestujícímu $a \in A$ přiřadíme sedadlo $b \in B$, na kterém sedí. Zobrazení $f : A \to B$ je bijektivní, právě když je každé sedadlo obsazeno jedním člověkem a zároveň žádný cestující nestojí. V případě, že na každém sedadle může sedět nejvýše jeden cestující a můžou zůstat i neobsazená sedadla, se jedná o zobrazení injektivní (prosté). Pokud budou všechna sedadla obsazená, přičemž v tomto případě je přípustné i to, aby si cestující seděli na klíně (tj. dva na jednom sedadle), se bude jednat o surjekci. $\triangle$

3 Nekonečné množiny

V této kapitole se již začneme zabývat nekonečnými množinami. Nejprve zde bude ukázáno, jak se dá nekonečná množina sestrojit. Dále zadefinujeme mohutnost a kardinální číslo. Následně se zde bude pojednávat o velikosti nekonečných množin a bude vysvětleno, proč nejsou všechna nekonečna stejná.

Pochopení této problematiky je velice důležité, protože na základě těchto poznatků se provádějí nejen složité výpočty, ale i „jednodušší“ matematické operace. Studenti se při těchto výpočtech velmi často dopouští chyb. Správné pochopení nekonečných množin je důležité například při výpočtech limit.

Pro vypracování kapitoly týkající se nekonečných množin byly využity zdroje [1], [2], [5], [6], [7], [13], [14] a [15].

3.1 Axiom nekonečna

Dříve než se začneme zabývat velikostí nekonečných množin a aritmetickými operacemi, které s nimi souvisí, je potřeba pochopit, co to vlastně nekonečno je a jakým způsobem lze nekonečnou množinu sestrojit.

Existenci alespoň jedné nekonečné množiny nám zajištuje axiom nekonečna, proto si jej v této podkapitole podrobněji rozebereme.

Definice 3.1. *Nekonečná množina* je každá množina, která není konečná.

Axiom nekonečna:

$$\exists A : ((\emptyset \in A) \wedge (\forall x : x \in A \Rightarrow x \cup \{x\} \in A))$$

Tento axiom, který zaručuje existenci nekonečné množiny, nám říká, že existuje množina, která obsahuje prázdnou množinu a pro každý svůj prvek x obsahuje také prvek $x \cup \{x\}$, kde $\{x\}$ je jednoprvková množina obsahující x.

Možný způsob sestrojení nekonečné množiny:

- $\emptyset \ldots$ označíme 0
- $\emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\} = \{0\} \ldots$ označíme 1
- $\{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{0, 1\} \ldots$ označíme 2
- $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \cup \{\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{0, 1, 2\} \ldots$ označíme 3
  $\ldots$

Pokud bychom v tomto postupu neustále pokračovali, sestrojili bychom nekonečnou množinu, v tomto případě by se jednalo o množinu $\mathbb{N}_0$, což je množina přirozených čísel rozšířená o nulu.

3.2 Mohutnost, kardinální čísla

Mohutnost i kardinální čísla charakterizují velikost množiny, ale je mezi nimi významný rozdíl. Mohutnost vyjadřuje velikost množiny, avšak neudává nám přesný počet prvků v množině. Pomocí mohutnosti množiny velikosti pouze porovnáváme, můžeme rozhodnout, zda mají množiny stejnou či různou velikost. V mnoha případech však také potřebujeme zjistit, kolik prvků množina obsahuje, což nám vyjadřuje kardinální číslo. Kardinální číslo nám tedy udává přesnou velikost množiny z hlediska počtu prvků.

Definice 3.2. Říkáme, že *množiny A a B mají stejnou mohutnost* a píšeme $A \sim B$, jestliže existuje bijektivní zobrazení množiny A na množinu B. Říkáme, že *množina A má mohutnost menší nebo rovnu mohutnosti množiny B* a píšeme $A \preceq B$, jestliže existuje prosté zobrazení množiny A do množiny B. Je-li $A \preceq B$ a neexistuje bijektivní zobrazení množiny A na množinu B, píšeme $A \prec B$ a říkáme, že *množina A má menší mohutnost než množina B.*

Věta 3.1. *(Cantor, Bernstein)*
Je-li mohutnost množiny A menší nebo rovna mohutnosti množiny B a naopak

potom A a B mají stejnou mohutnost, tj.

$$(A \preceq B \wedge B \preceq A) \Rightarrow A \sim B$$

Důkaz. Důkaz Věty 3.1. najdeme v [1] na straně 78. □

Věta 3.2. *(Cantor)*
Pro libovolnou množinu A platí

$$A \prec P(A).$$

Důkaz. Ukážeme, že libovolná množina A má menší mohutnost, než její potenční množina $P(A)$, tj. neexistuje zobrazení z množiny A na $P(A)$, které je surjektivní. Důkaz provedeme sporem. Předpokladem je existence surjektivního zobrazení $f : A \to P(A)$, tj. pro každou množinu $X \in P(A)$ existuje prvek $a \in A$ tak, že $f(a) = X$. Dále si zavedeme množinu $B \subset A$, která je definována následovně

$$B = \{a \in A : a \notin f(a)\}.$$

B obsahuje prvky množiny A, které nejsou v obrazu daném zobrazením f. Protože $B \subset A$, musí existovat $a \in A$ tak, že $B = f(a)$. Dostáváme dvě možnosti:

- Pokud $a \in B$, z definice množiny B plyne $a \notin f(a)$, což je spor.
- Jestliže $a \notin B$, potom podle definice množiny B musí platit, že $a \in f(a)$, což je opět spor.

Tvrzení Cantorovy věty je nyní dokázáno. □

Z Definice 3.2. již víme, že mohutnosti množin můžeme porovnávat pomocí bijektivního a prostého zobrazení, které jsou zavedené v předchozí kapitole.

Definice 3.3. Říkáme, že množiny A, B jsou *ekvivalentní*, jestliže existuje bijektivní zobrazení $f : A \to B$.

Z Definice 3.2. a 3.3. nám vyplývá, že množiny, které mají stejnou mohutnost, jsou ekvivalentní.

Věta 3.3. *Jsou-li A, B, C libovolné množiny, potom platí:*
a) $A \sim A$
b) $A \sim B \Rightarrow B \sim A$
c) $A \sim B \wedge B \sim C \Rightarrow A \sim C$.

Důkaz. Důkaz Věty 3.3. nalezneme v [6] na str.70. $\square$

Věta 3.3. říká, že relace $\sim$ (mít stejnou mohutnost) je relace ekvivalence na množině všech množin. Tím se nám množiny rozdělí na třídy ekvivalence, přičemž v každé třídě jsou množiny se stejnou mohutností.

Příklad 3.1. Mějme dány množiny $\{1, 2, 3, \heartsuit, \clubsuit, \diamondsuit, \}$, $\{18\}$, $\{12\}$, $\{1, 8\}$, $\{12, 99\}$, $\{\clubsuit, \diamondsuit, 389\}$, $\{\heartsuit\}$. Množiny seskupíme do tříd.

- $\{18\}, \{12\}, \{\heartsuit\}$
- $\{1, 8\}, \{12, 99\}$
- $\{\clubsuit, \diamondsuit, 389\}$
- $\{1, 2, 3, \heartsuit, \clubsuit, \diamondsuit, \}$ $\triangle$

V Příkladě 3.1. vidíme, že jedna třída obsahuje pouze jednu množinu, což je možné, protože z Věty 3.3. plyne, že každá množina je v ekvivalenci sama se sebou.

Množiny ležící ve stejné třídě jsou ekvivalentní, tj. mají stejnou mohutnost. Pro kvantitativní vyjádření mohutnosti množin zavádíme tzv. kardinální čísla.

Definice 3.4. *Kardinální číslo* množiny A je symbol, který značíme card A, přičemž pro libovolné množiny A, B platí:
a) $A \sim B \Rightarrow \text{card } A = \text{card } B$,
b) $\text{card } A = \text{card } B \Rightarrow A \sim B$.

3.2.1 Kardinální číslo konečných množin

Příklad 3.2. Nyní navážeme na Příklad 3.1., v němž jsme si vytvořili jednotlivé třídy. Kardinální čísla těchto množin budou následující:

- $\{18\}, \{12\}, \{\heartsuit\} \ldots$ množiny této třídy budou mít kardinální číslo rovno jedné, protože se jedná o třídu obsahující jednoprvkové množiny
- $\{1, 8\}, \{12, 99\} \ldots$ množiny této třídy budou mít kardinální číslo rovno dvěma, protože se jedná o třídu obsahující dvouprvkové množiny
- $\{\clubsuit, \diamondsuit, 389\} \ldots$ množiny této třídy budou mít kardinální číslo rovno třem, protože se jedná o třídu obsahující tříprvkové množiny
- $\{1, 2, 3, \heartsuit, \clubsuit, \diamondsuit\} \ldots$ množiny této třídy budou mít kardinální číslo rovno šesti, protože se jedná o třídu obsahující šestiprvkové množiny $\triangle$

Pro konečné množiny je kardinální číslo konečné a vyjadřuje přesný počet prvků dané množiny.

Speciálním případem konečné množiny je prázdná množina $\emptyset$. Pro kardinální číslo prázdné množiny platí card $\emptyset = 0$, protože prázdná množina je ekvivalentní pouze sama se sebou a neobsahuje žádný prvek. Ná základě těchto poznatků můžeme vidět, že kardinální čísla konečných množin jsou vyjádřena pomocí celých nezaporných čísel.

Definice 3.5. Kardinální číslo nazýváme *konečné (finitní)*, jestliže vyjadřuje kardinalitu (mohutnost) konečné množiny. V případě, že kardinální číslo vyjadřuje kardinalitu nekonečné množiny, říkáme, že kardinální číslo je *nekonečné (transfinitní)*.

Příklad 3.3. Nechť je dána množin $A = \{a, b, c, -5, -22, 18, 1000\}$, kardinální číslo množiny A se bude rovnat počtu prvků, které do dané množiny náleží, tedy bude platit card $A = 7$. $\triangle$

Nyní již víme, jak určíme velikost (kardinalitu) konečných množin, což je zcela triviální. Dále si také musíme vysvětlit, jak je to s kardinalitou množin nekonečných.

3.3 Velikost nekonečných množin

Nejprve je důležité vědět, že máme dva základní typy nekonečných množin, a to spočetné a nespočetné. Při určování kardinality nekonečných množin hraje významnou roli množina $\mathbb{N}$ všech přirozených čísel.

Definice 3.6. Množina se nazývá *spočetná*, má-li stejnou mohutnost jako množina přirozených čísel $\mathbb{N}$. Množina, která je konečná nebo spočetná, se nazývá *nejvýše spočetná.* Množina, která není nejvýše spočetná se nazývá *nespočetná.*

Věta 3.4. *Libovolná množina $A \subset \mathbb{N}$ je konečná, nebo má mohutnost stejnou jako $\mathbb{N}$.*

Důkaz. Důkaz Věty 3.4. nalezneme v [6] na straně 72. □

Z předešlé věty nám vyplývá, že jakákoliv množina, která je nekonečná nebude mít menší mohutnost, než je mohutnost množiny všech přirozených čísel $\mathbb{N}$.

3.3.1 Spočetné množiny

Jak již víme, spočetné množiny jsou ty množiny, které mají stejnou mohutnost jako množina přirozených čísel. Nyní se spočetným množinám budeme věnovat podrobněji. Nejprve si řekneme, jak je kardinální číslo množiny přirozených čísel definováno a dále na kardinalitu spočetné množiny navážeme některými význačnými vlastnostmi spočetných množin.

Poznámka 3.1. Všechny spočetné množiny mají stejné kardinální číslo $\aleph_0$, píšeme

$$\operatorname{card} \mathbb{N} = \aleph_0.$$

Žádná množina, která je konečná, nikdy nemá stejnou mohutnost, jako její vlastní podmnožina. Nekonečné množiny však tuto vlastnost nemají, což popisuje následující věta.

Věta 3.5. *Nekonečná podmnožina spočetné množiny je spočetná. Každá nekonečná množina obsahuje spočetnou podmnožinu.*

Důkaz. Důkaz Věty 3.5. najdeme v [7] na straně 30. $\square$

Příklad 3.4. Množina přirozených čísel $\mathbb{N}$ má stejnou mohutnost, jako její vlastní podmnožina sudých přirozených čísel $\mathbb{S}$, jelikož existuje bijektivní zobrazení $f : \mathbb{N} \to \mathbb{S}$ definované předpisem $f(n) = 2n, \forall n \in \mathbb{N}$. Bijektivní zobrazení přiřazuje každému obrazu právě jeden vzor, je to vzájemně jednoznačné zobrazení.
V tomto případě každému sudému číslu náleží právě jedno číslo přirozené a naopak, každému přirozenému číslu náleží číslo sudé. Tohle se může zdát na první pohled nesmyslné, každého totiž ihned napadne, že sudých čísel je o polovinu méně, než čísel přirozených. Opak je ale pravdou, protože ke každému přirozenému číslu umíme určit jeho dvojnásobek, a naopak, každé sudé číslo můžeme vydělit dvěma.

$$
\begin{array}{ccc}
1 \longrightarrow 2 & \qquad & 2 \longrightarrow 1 \\
2 \longrightarrow 4 & & 4 \longrightarrow 2 \\
3 \longrightarrow 6 & & 6 \longrightarrow 3 \\
4 \longrightarrow 8 & & 8 \longrightarrow 4 \\
 & \cdots &
\end{array}
$$

Vidíme tedy, že bude platit

$$\text{card } \mathbb{N} = \text{card } \mathbb{S} = \aleph_0.$$

Obdobné úvahy lze použít na všechny množiny, které jsou ekvivalentní s množinou přirozených čísel $\mathbb{N}$, např. množina $\mathbb{N}$ rozšířená o prvky $\{a, b, c, \bigcirc, \heartsuit\}$ apod. $\triangle$

Věta 3.6. *Je-li množina A i množina B spočetná, pak je jejich kartézský součin $A \times B$ opět množina spočetná.*

Důkaz. Důkaz Věty 3.6. nalezneme v [6] na str. 73. $\square$

Nyní zmíníme důležitou vlastnost spočetných množin.

Věta 3.7. *Nechť množina I je spočetná, dále $\forall i \in I$ je A_i spočetná. Potom $\bigcup_{i \in I} A_i$ je množina spočetná.*

Důsledek 3.1. *Mějme spočetné množiny* $A_1, A_2, \ldots, A_n$, *kde* $n \in \mathbb{N}$. *Pak* $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ *je množina spočetná.*

Důkaz. Důkaz Věty 3.7. a Důsledku 3.1. nalezneme v [7] na straně 32. □

Jinými slovy, nejvýše spočetné sjednocení spočetných množin je opět množina spočetná. Na základě těchto poznatků můžeme dokázat následující větu.

Věta 3.8. *card* $\mathbb{N} =$ *card* $\mathbb{Q} =$ *card* $\mathbb{Z} = \aleph_0$

Důkaz. Víme, že množina všech přirozených čísel $\mathbb{N}$ je spočetná.

Nyní ukážeme, že je spočetná také množina všech racionálních čísel $\mathbb{Q}$. Z druhé kapitoly víme, že $\mathbb{Q}$ je množina všech čísel, které lze zapsat jako zlomek ve tvaru $\frac{x}{y}$, kde $x, y \in \mathbb{Z}, y \neq 0$. Navíc jsou čísla x, y nesoudělná (mají pouze jednoho společného dělitele, a to číslo 1). Nyní budeme uvažovat pouze kladná racionální čísla. Každé kladné racionální číslo $q \in \mathbb{Q}^+$ lze zapsat jako podíl $\frac{x}{y}$ nesoudělných přirozených čísel. Těchto podílů je maximálně tolik jako dvojic $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Z Věty 3.6. plyne, že takových dvojic bude nejvýše spočetně mnoho. Záporná racionální čísla $p \in \mathbb{Q}^-$, jsou stejná jako kladná racionální čísla $q \in \mathbb{Q}^+$ s tím rozdílem, že mají opačné znaménko. Bude jich opět spočetně mnoho. Z Důsledku 3.1. vyplývá, že sjednocení spočetných množiny je opět množina spočetná. Sjednotíme-li množinu spočetnou s množinou konečnou, dostáváme množinu spočetnou. Množina všech racionálních čísel $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^- \cup \{0\}$ je tedy také množina spočetná.

Obdobnou úvahou dokážeme spočetnost množiny všech celých čísel $\mathbb{Z}$. Množina kladných celých čísel $\mathbb{Z}^+$ je totožná s množinou všech přirozených čísel $\mathbb{N}$, je to tedy množina spočetná. Množina záporných čísel $\mathbb{Z}^-$ obsahuje stejná čísla jako množina $\mathbb{Z}^+$, pouze s opačným znaménkem. $\mathbb{Z}^-$ je tedy opět množina spočetná. Opět vycházímě z Důsledku 3.1. Množina celých čísel $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$ je množina spočetná, protože sjednocení s množinou konečnou nám spočetnost neovlivní.

Dokázali jsme tedy, že tvrzení Věty 3.8. je pravdivé. □

Na závěr si zmíníme jednu velice zajímavou úlohu, kterou vymyslel významný německý matematik David Hilbert (1862 - 1943). Pomocí úlohy "Hilbertův hotel

Nekonečno" uvidíme, že s nekonečnem nemůžeme zacházet úplně stejně jako s klasickými čísly.

Hilbertův hotel Nekonečno:

Hilbertův hotel se od normálních hotelů liší tím, že obsahuje nekonečný a přitom spočetný počet pokojů. V hotelu pracujete jako recepční, všechny pokoje jsou plně obsazeny a nyní se objeví nový návštěvník, který se chce v hotelu ubytovat. Jakým způsobem budete tuto situaci řešit, aby jste nepřišli o žádného hosta? Je tato situace vůbec řešitelná?

Jelikož hotel obsahuje nekonečný počet pokojů, tak situaci můžete vyřešit, a to velice jednoduše. Musíte poprosit všechny hosty v hotelu, aby se přesunuli do pokoje s číslem o jedno vyšší, než má jejich stávající pokoj. Tedy host z pokoje č. 1 se přesune do pokoje č. 2, host z pokoje č. 2 se přesune do pokoje č. 3, a tak dále. Nyní můžete nového zákazníka ubytovat v pokoji s číslem 1.

Obdobně můžeme řešit i situaci, kdy se v hotelu chce ubytovat spočetně mnoho nových hostů. V tomto případě se stávající hosté musí přesunout do pokojů s dvojnásobnými čísly, než mají jejich současné pokoje. Nové zákazníky je nyní možné ubytovat v pokojích s lichými čísly, kterých je nekonečný počet.

Avšak nyní se může stát, že nově příchozí hosté nebudou se službami spokojeni, proto se rozhodnou hotel opustit. Tato situace pro vás nebude vyhovující, protože všechny liché pokoje budou prázdné a hotel zůstane z poloviny neobsazený. I pro danou situaci existuje v tomto hotelu řešení. Hosté se přesunou zpět do pokojů s čísly o polovinu menšími, než mají jejich pokoje nyní. Opět budete mít plně obsazený hotel, i když žádní noví zákazníci nepřijeli.

3.3.2 Nespočetné množiny

V předchozím textu jsme si vyjasnili, jaká je velikost (kardinalita) množin spočetných, nyní se budeme věnovat množinám nespočetným.

Věta 3.9. *Mějme množinu všech reálných čísel* $\mathbb{R}$ *a nechť* I *je interval* $(0, 1)$. *Potom jsou* I *a* $\mathbb{R}$ *nespočetné množiny.*

Důkaz. V důkazu se využívá postupu, který se nazývá Cantorova diagonální metoda. Ukážeme si, že interval I je nespočetná množina, to nám zaručí nespočetnost množiny všech reálných čísel $\mathbb{R}$, protože interval I je podmnožinou množiny $\mathbb{R}$. Důkaz provedeme sporem. Základním předpokladem tedy bude, že množina $(0, 1)$ je spočetná. V tom případě můžeme všechna reálná čísla z intervalu I seřadit do prosté posloupnosti $\{c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n, \ldots\}$. Bude tedy existovat prosté zobrazení množiny všech přirozených čísel $\mathbb{N}$ na interval $(0, 1)$. Všechna reálná čísla c_i pro $i = 1, 2, 3, ...$ je možné vyjádřit pomocí desetinného rozvoje. Dostaneme následující posloupnost desetinných rozvojů:

$$
\begin{gathered}
c_1 = 0, c_{1,1}c_{2,1}c_{3,1} \ldots c_{n,1} \ldots \\
c_2 = 0, c_{1,2}c_{2,2}c_{3,2} \ldots c_{n,2} \ldots \\
c_3 = 0, c_{1,3}c_{2,3}c_{3,3} \ldots c_{n,3} \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
c_n = 0, c_{1,n}c_{2,n}c_{3,n} \ldots c_{n,n} \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{gathered}
$$

kde $c_{i,j} \in \{0, 1, \ldots, 9\}, \forall i, j \in \mathbb{N}$.

Nyní sestrojíme další číslo $b \in (0, 1)$, a ukážeme, že v posloupnosti $\{c_i\}_{i=1}^{\infty}$ není. Nechť

$$b = 0, b_1b_2b_3 \ldots b_n \ldots,$$

kde platí

$$b_i = \begin{cases} 2 \text{ jestliže } c_{i,i} = 1, \\ 1 \text{ jestliže } c_{i,i} \neq 1. \end{cases}$$

$\forall i = 1, 2, 3, \ldots$.

Číslo b není rovno číslu c_1, protože se od c_1 liší číslicí na prvním desetinném místě. Obdobně číslo b není rovno číslu c_2, protože se liší od c_2 číslicí na druhém desetinném místě. Bude tedy platit, že $b \neq c_i$, protože se od c_i liší číslicí na i-tém desetinném místě pro $i = 1, 2, \ldots$. Z toho nám vyplývá, že $b \in (0, 1)$

a zároveň $b \notin \{c_i\}_{i=1}^{\infty}$, což je spor a dokazuje to nespočetnost množiny $(0, 1)$. Tvrzení Věty 3.9. je nyní dokázáno. Nespočetná bude tedy i množina $\mathbb{R}$, protože platí, že $I \subset \mathbb{R}$. $\square$

S tímto poznatkem úzce souvisí hypotéza kontinua, jejíž objev byl důležitým zlomem v teorii množin.

Hypotéza kontinua:

Problematice nekonečných množin se jako první začal věnovat G. Cantor, který poprvé v roce 1878 vyslovil domněnku o tom, že všechny podmnožiny reálných čísel $\mathbb{R}$ jsou spočetné nebo mají mohutnost kontinua, tj. neexistuje žádná nespočetná množina, kterou nemůžeme zobrazit na množinu reálných čísel $\mathbb{R}$. Tato Cantorova domněnka začala být nazývána, jako *hypotéza kontinua*. Jinými slovy, hypotéza kontinua nám říká, že mezi mohutností množiny přirozených čísel $\mathbb{N}$ a mohutností množiny reálných čísel $\mathbb{R}$, kterou značíme $\aleph_1$, neexistuje žádná "střední" mohutnost. Cantor definoval hypotézu kontinua jako

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1.$$

Cantor byl o této myšlence přesvědčen, avšak nikdy se mu ji nepovedlo dokázat. Otázka hypotézy kontinua byla otevřená až do roku 1940. V tomto období se touto problematikou zabýval Kurt Gödel, který ukázal, že hypotézu kontinua nelze v teorii množin vyvrátit. Zůstala tedy otázka, zda lze hypotézu kontinua dokázat. V 60. letech významný matematik Paul Cohen zjistil, že hypotéza kontinua nemůže být v teorii množin dokázána. Tímto byla otázka hypotézy kontinua uzavřena, neboť byla ukázána její nezávislost na axiomech teorie množin (Zermelo-Fraenkelova teorie množin).

Cantorovy objevy byly velice důležitými v oblasti matematiky, jeho nejdramatičtějším objevem bylo vyjádření velikostí nekonečných množin pomoci kardinálních čísel $\aleph_0, \aleph_1, \ldots$. Dále také přišel s myšlenkou, že nekonečna nejsou jen nespočetná, ale dokonce neukončitelná. Zjistil, že existuje nekončící stoupající hierarchie nekonečen a že neexistuje žádné největší nekonečno, které by obsahovalo všechna ostatní.

Mějme dánu libovolnou nekonečnou množinu, k ní můžeme vždy vytvořit množinu, která je nekonečně krát větší. To se provede velice jednoduše, a to pomocí potenční množiny. Nejprve si ukážeme na příkladě určení kardinálního čísla potenční množiny množiny konečné. Poté si ukážeme, jak určíme kardinální číslo potenční množiny množiny nekonečné.

Příklad 3.5. Mějme množinu X, která obsahuje tři prvky $\{A, B, C\}$. Na základě toho, co již známe, můžeme vytvořit její potenční množinu, pro kterou bude platit

$$P(X) = \{\{\emptyset\}, \{A\}, \{B\}, \{C\}, \{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}, \{A, B, C\}\}.$$

Pro kardinální číslo potenční množiny $P(X)$ bude tedy platit

$$\text{card } P(X) = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 = 2^3 = 2^{card(X)}.$$

△

Příklad 3.6. Nyní budeme pro názornost uvažovat množinu všech přirozených čísel $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Obdobně jako v předešlém příkladě bude pro její potenční množinu platit, že má celkem $2^{card(\mathbb{N})}$ prvků. Tímto způsobem ze spočetné množiny všech přirozených čísel $\mathbb{N}$, která má mohutnost $\aleph_0$, vytvoříme pomocí potenční množiny množinu nespočetnou. Nebude tedy existovat ekvivalence mezi množinou $\mathbb{N}$ a její potenční množinou $P(\mathbb{N})$. △

Potenční množina všech přirozených čísel $P(\mathbb{N})$ je „nejjednodušší“ nespočetná množina, která má mohutnost kontinua.

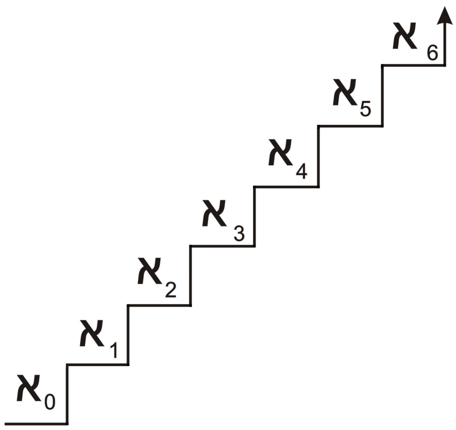
Věta 3.10. *Reálná čísla mají mohutnost kontinua, a platí*

$$card\, \mathbb{R} = 2^{\aleph_0} = card\, P(\mathbb{N}) = \aleph_1.$$

Důkaz. Důkaz Věty 3.10. v [6] na str. 87. □

Tímto způsobem můžeme dále vytvářet nekonečné množiny s čím dál větší mohutností, a to tak, že vytvoříme potenční množinu potenční množiny $P(\mathbb{N})$, která bude mít mohutnost $\aleph_2$, a tak můžeme pokračovat dále. Takto dostaneme hierarchii rostoucích nekonečen viz obrázek 4.

Nyní nám nastává otázka, kolik takových nekonečen vůbec je. Na obrázku 4 můžeme vidět, že nekonečna neustále stoupají a zvětšují se. Dostáváme tedy posloupnost kardinálních čísel $\{\aleph_0, \aleph_1, \ldots\}$, která vyjadřují čím dál větší nekonečna. Všechna tato kardinální čísla jsou transfinitní. Jednotlivá kardinální čísla v této posloupnosti mají indexy patřící do množiny $\mathbb{N}_0$, která je spočetná a má mohutnost $\aleph_0$, nekonečen je tedy spočetně mnoho. Výše zmíněné úvahy popisuje zobecněná hypotéza kontinua.



Obrázek 4: Nekonečně stoupající „věž“ nekonečen.

Zobecněnou hypotézu kontinua zformuloval v roce 1908 F. Hausdorff následujícím vztahem

$$2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

3.4 Shrnutí

Nyní si tedy shrneme, co jsme se vlastně v předchozím textu dozvěděli.

Již víme, že velikost množiny vyjadřuje mohutnost, pomocí které však množiny pouze porovnáváme. Zda mají množiny stejnou mohutnost zjišťujeme pomocí bijektivního zobrazení mezi nimi. Pokud mezi množinami existuje bijektivní zobrazení, značí to stejnou mohutnost daných množin.

Velikost množiny se dá také vyjádřit číslem, kvantitativní vyjádření mohutnosti se provádí pomocí kardinálních čísel. Máme dva typy kardinálních čísel, a to finitní a transfinitní.

Finitní kardinální čísla udávají mohutnost konečných množin a jsou vyjádřena přirozenými čísly rozšířenými o nulu, tj. $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Finitní kardinální čísla značí přesný počet prvků, které daná množina obsahuje.

Transfinitní kardinální čísla vyjadřují mohutnosti nekonečných množin, a to jak spočetných, tak nespočetných, značí se $\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2, \ldots$.

Existují tedy dva druhy nekonečných množin, a to spočetné a nespočetné. Množiny, které jsou nekonečné spočetné mají stejnou mohutnost jako množina všech přirozených čísel $\mathbb{N}$. Mohutnost spočetných množin se značí $\aleph_0$.

Kardinální čísla $\aleph_1$, $\aleph_2, \ldots$ již vyjadřují velikosti množin nekonečných nespočetných. Jejich velikost se zvyšujícím se indexem roste. Transfinitních kardinálních čísel je nekonečně mnoho, avšak ve smyslu spočetného nekonečna.

Na základě všech poznatků, které jsme zjistili v této kapitole, jsme již schopni říct, že všechna nekonečna opravdu nejsou stejně velká.

4 Počítání s nekonečny

V této doplňkové kapitole si představíme symbol ∞, který se používá v matematice pro vyjádření nekonečna.

Pro zpracování této kapitoly byl využit zdroj [5].

Nyní si vysvětlíme, jaké aritmetické operace lze při počítání s nekonečny užít a také kdy výraz obsahující nekonečno chápeme jako neurčitý. Základními aritmetickými operacemi je míněno sčítání, odčítání, násobení, dělení a mocnění celým mocnitelem, pro zjednodušení budeme uvažovat mocnění přirozeným mocnitelem. Než se začneme těmito operacemi zabývat, musíme si nejprve vysvětlit, co to je rozšířená reálná osa.

Víme, že reálná čísla nemají největší ani nejmenší prvek, proto je v některých případech nutné množinu reálných čísel $\mathbb{R}$ rozšířit o nevlastní čísla. Množinu rozšířených reálných čísel označíme $\mathbb{R}^*$ a bude pro ni platit

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}.$$

Setkáváme se zde s novým označením ∞, které symbolizuje nekonečno nezávisle na velikosti, zahrnuje tedy všechna nekonečna. Jelikož nekonečna nemají stejnou velikost, nastávají zde problémy při různých výpočtech. S nekonečny nemůžeme pracovat jako s „normálními čísly“, proto si nyní ukážeme základní aritmetické operace, ve kterých se počítá s nevlastními čísly.

U sčítání a odčítání nekonečen musíme dávat pozor, protože výraz $+\infty - \infty$ není definován. Vysvětlíme si, proč tomu tak je.

Jak jsme se dozvěděli v předchozí kapitole, všechna nekonečna nemají stejnou velikost, od čehož se „neurčitost“ výrazu $+\infty - \infty$ odvíjí.

Příklad 4.1. Budeme-li uvažovat spočetná nekonečna, například množinu všech přirozených čísel $\mathbb{N}$ a množinu všech sudých přirozených čísel $\mathbb{S}$, tak bude platit

$$\operatorname{card} \mathbb{N} = \operatorname{card} \mathbb{S} = \aleph_0.$$

Pro rozdíl těchto množin bude platit

$$„\text{card } \mathbb{N} - \text{ card } \mathbb{S}“ = \text{card } (\mathbb{N} \setminus \mathbb{S}) = \aleph_0.$$

Protože pokud od přirozených čísel odečteme sudá čísla, tak nám zůstane množina všech lichých čísel, která mají mohutnost rovnu opět $\aleph_0$. Dostáváme zde vlastně výraz

$$„\infty - \infty = \infty“.$$

$\triangle$

Příklad 4.2. Jako další příklad si uvedeme opět množinu všech přirozených čísel $\mathbb{N}$ a množinu všech přirozených čísel rozšířenou o 5 prvků $\mathbb{N} \cup \{a, b, c, \bigcirc, \heartsuit\}$, kterou si označíme M. Nyní bude opět platit

$$\text{card } \mathbb{N} = \text{card } M = \aleph_0.$$

Pro rozdíl těchto množin bude platit

$$„\text{card } M - \text{card } \mathbb{N}“ = \text{card } (M \setminus \mathbb{N}) = 5.$$

Po odečtení všech přirozených čísel $\mathbb{N}$ bude množina M obsahovat pouze 5 prvků. Zde bude platit

$$„\infty - \infty = 5“.$$

$\triangle$

Příklad 4.3. Nyní budeme uvažovat i nespočetná nekonečna, a to množinu reálných čísel $\mathbb{R}$ a interval $I = (0, 1)$, který je také nespočetný. Víme, že

$$\text{card } \mathbb{R} = \text{card } I = \aleph_1$$

Pro jejich rozdíl bude platit

$$„\text{card } \mathbb{R} - \text{ card } I“ = \text{card } (\mathbb{R} \setminus I) = \aleph_1.$$

Nyní dostáváme

$$„\infty - \infty = \infty“.$$

$\triangle$

Příklad 4.4. Pro názornost si ještě ukážeme, co bude platit pro rozdíl reálných a přirozených čísel. Pro jejich mohutnosti platí

$$\text{card } \mathbb{N} = \aleph_0, \text{ card } \mathbb{R} = \aleph_1.$$

Rozdíl bude vypadat následovně

$$„\text{card } \mathbb{R} - \text{card } \mathbb{N}“ = \text{card } (\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}) = \aleph_1.$$

Opět dostaneme

$$„\infty - \infty = \infty“.$$

$\triangle$

Vidíme, že ve všech příkladech vyšel jiný výsledek. Výsledky Příkladů 4.1., 4.3. a 4.4. jsou ∞, avšak pokaždé tento symbol vyjadřuje jinou velikost. Na základě těchto úvah tedy vidíme, že nekonečna mezi sebou opravdu nemůžeme odečítat, protože všechna nekonečna nejsou stejně velká a nelze tedy bez bližších informací jednoznačně určit, co pro rozdíl $+\infty - \infty$ bude platit.

Nyní tedy můžeme jednotlivé aritmetické operace rozebrat a ukázat, jak se s nevlastními čísly počítá.

Sčítání

Mějme dána libovolná reálná čísla $a_1, a_2, .., a_n$, kde $n \in \mathbb{N}$. V případě, že se alespoň jedno reálné číslo $a_1, a_2, .., a_n$ rovná $+\infty$, bude platit

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = +\infty.$$

Pokud se nám v součtu vyskytne alespoň jednou $-\infty$ a zároveň se nevyskytne $+\infty$, tak bude platit

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = -\infty.$$

Nastane-li však situace, že se mezi sčítanci vyskytne $+\infty$ i $-\infty$, tak součet $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ není definován, tj. $+\infty + (-\infty)$ není definováno. Proč tomu tak je, již bylo vysvětleno.

Odčítání

Výrazy $(+\infty) - (+\infty)$, $(-\infty) - (-\infty)$ nebudeme definovat. Máme-li opět dána libovolná reálná čísla $a_1, a_2, .., a_n$, kde $n \in \mathbb{N}$. Definujeme $a_1 - a_2 - \ldots - a_n = a_1 + (-a_2) + \ldots + (-a_n)$, má-li součet na pravé straně smysl, tj. je definován.

Násobení

Opět budeme uvažovat libovolná reálná čísla $a_1, a_2, .., a_n$, kde $n \in \mathbb{N}$. Bude-li alespoň jedno číslo rovno $+\infty$ nebo $-\infty$, tak klademe

$$a_1.a_2.\ldots.a_n = +\infty.$$

v případě, že se zde bude vyskytovat sudý počet záporných činitelů.
Pokud počet záporných činitelů bude lichý, tak bude platit

$$a_1.a_2.\ldots.a_n = -\infty.$$

Rovnosti budou platit pouze v případě, že se mezi čísly $a_1, a_2, .., a_n$ nevyskytne 0, protože $0.(+\infty)$ a $0.(-\infty)$ není definováno.

Dělení

Pro tuto operaci platí následující vztahy:

$$\frac{a}{+\infty} = \frac{a}{-\infty} = 0, \forall a \in \mathbb{R}$$
$$\frac{+\infty}{a} = \frac{1}{a}(+\infty), \forall a \in \mathbb{R}, \text{ kde } a \neq 0$$
$$\frac{-\infty}{a} = \frac{1}{a}(-\infty), \forall a \in \mathbb{R}, \text{ kde } a \neq 0$$

Výraz $\frac{a}{b}$ není definován, je-li $a, b \in \{+\infty, -\infty\}$.

Mocnění přirozeným mocnitelem

Při výpočtech bude platit:

$$(+\infty)^n = +\infty, \forall n \in \mathbb{N}$$
$$(-\infty)^n = +\infty, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ která jsou sudá}$$
$$(-\infty)^n = -\infty, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ která jsou lichá}$$

I v případě této operace se setkáme s výrazem který není definován, a to $(\pm\infty)^0$.

Nyní vysvětlíme, proč není definován výraz $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Mnoho lidí chybně říká, že tento podíl by byl roven číslu 1 (příp. -1), což není pravda, protože nekonečné množiny nejsou stejně velké. Nelze tedy opět jednoznačně určit, čemu by se podíl rovnal a proto je $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ považován za neurčitý výraz.

Také jsme se dozvěděli, že $0.(+\infty)$ a $0.(-\infty)$ není definováno a to proto, že $\pm\infty$ i 0 mají významnou vlastnost. Pokud vezmeme jakékoliv „obyčejné“ číslo a vynásobíme ho 0, vždy dostaneme jako výsledek 0. V opačném případě, pokud jakékoliv „obyčejné“ číslo vynásobíme $\pm\infty$, tak jako výsledek dostaneme $\pm\infty$. Bylo by tedy složité určit, čemu by se výrazy $0.(+\infty)$ a $0.(-\infty)$ rovnaly.

To stejné bude platit i u mocnění přirozeným mocnitelem, v případě, že jakékoliv číslo kromě 0 a $\pm\infty$ umocníme číslem 0, dostaneme vždy číslo 1. V opačném případě, vezmeme-li $(\pm\infty)$ a umocníme ho jakýmkoliv číslem mimo 0 dostaneme opět $(\pm\infty)$. Proto tedy $(\pm\infty)^0$ není definováno.

Nakonec si ještě zmíníme, ve které oblasti matematiky se s neurčitými výrazy setkáváme. Je tomu tak především v teorii limit, kde se studenti často dopouštějí mnoha chyb, k čemuž je vede nesprávné počítání výrazů obsahujících nevlastní čísla. Při výpočtech limit se můžeme například setkat s neurčitými výrazy $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$. To je řešeno L'Hospitalovou metodou.

Tato metoda dostala název podle francouzského matematika G. F. de l'Hospitala, který ji publikoval, avšak skutečným autorem byl švýcarský matematik Johann Bernoulli. L'Hospitalova metoda využívá derivace funkce jedné proměnné v případě, kdy při výpočtu limit dostaneme výraz typu $\frac{\infty}{\infty}$ příp. $\frac{0}{0}$. Při výpočtu užíváme (za splnění jistých předpokladů viz např. [5]) vzorec

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Nyní si však ukážeme pro názornost pouze příklady, v nichž se vyskytuje neurčitý výraz $\frac{\infty}{\infty}$.

Příklad 4.5. Nyní si vypočítáme několik příkladů, ve kterých použijeme při výpočtu stejný postup. Nejprve „dosadíme ∞" do dané funkce a dostaneme neurčitý výraz ve tvaru $\frac{\infty}{\infty}$. Proto užijeme L'Hospitalovu metodu. Uvidíme, že pokaždé vyjde podíl dvou nekonečen jinak.

- $\lim_{x\to\infty} 2xe^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = [\frac{\infty}{\infty}] = [L'H] = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = 0$
- $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-9}{x-3} = [\frac{\infty}{\infty}] = [L'H] = \lim_{x\to\infty} \frac{6x}{1} = \frac{\infty}{1} = \infty$
- $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2-9}{x-3} = [\frac{\infty}{-\infty}] = [L'H] = \lim_{x\to-\infty} \frac{6x}{1} = \frac{-\infty}{1} = -\infty$
- $\lim_{x\to\infty} \frac{8x+7}{2x} = [\frac{\infty}{\infty}] = [L'H] = \lim_{x\to\infty} \frac{8}{2} = \frac{8}{2} = 4$ △

Po prostudování této kapitoly by již studenti měli být schopni lépe rozumnět nekonečným množinám a výpočtům, které zahrnují nevlastní čísla. Také by se již měli vyvarovat chybám, kterých se při těchto výpočtech dopouštěli.

Závěr

Teorie množin je velice zajímavá oblast matematiky, avšak tato problematika je velice rozsáhlá a složitá. Její podrobné zpracování by přesahovalo rámec bakalářské práce.

Doufám, že tato bakalářské práce poslouží studentům (i dalším zájemcům) nahlédnout do teorie množin. Vysvětlila jsem základní pojmy, které s touto oblastí matematiky souvisí, a jejich základní vzájemné vztahy. Zpracovala jsem úvod do problematiky nekonečných množin, vysvětlila jsem, jak je nekonečno definováno a že nekonečna mohou mít různou velikost. Na závěr jsem pak uvedla a ukázala na příkladech, kdy je výraz obsahující nekonečna chápán jako neurčitý výraz a proč tomu tak je.

Při zpracování bakalářské práce jsem zdokonalila své znalosti týkající se teorie množin, především množin nekonečných. Také jsem se naučila pracovat v programu TEX.

Literatura

[1] Balcar,B., Štěpánek, P., *Teorie množin*, 2. vydání. Praha: Academia, 2001

[2] Barrow, J. D., *Kniha o nekonečnu*, 1. vydání. Praha a Litomyšl: Ladislav Horáček- Paseka, 2007

[3] Bartsch, H. J., *Matematické vzorce*, 1. vydání. Praha: SNTL, 1983

[4] Bolzano, B., *Paradoxy nekonečna*, 1.vydání. Praha: Nakladatelství Československé akademie věd, 1963

[5] Brabec, J., Martan, F., Rozenský, Z., *Matematická analýza 1*, 2. vydání. Praha: SNTL, 1989

[6] Fuchs, E.,*Teorie množin pro učitele*, 1.vydání. Brno: Masarykova univerzita, 1999

[7] Karásek, J., Skula, L., *Lineární algebra*, 1.vydání. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2005

[8] Kolman, A., *Dějiny matematiky ve starověku*, Praha: Academia, nakladatelství Československé akademie věd, 1969

[9] Mareš, M.: *Příběhy matematiky*, 1.vydání. Příbram: Pistorius & Olšanská, 2008

[10] Struik, D. J., *Dějiny matematiky*, 1. vydání. Praha: Orbis, 1963

[11] Vopěnka, P., *Horizonty nekonečna: Matematický pohled na svět*, Praha: Moraviapress, 2004

[12] Achilles a želva [online], dostupné z: http://absolventi.gymcheb.cz/2008/sttezka/cssmatika/zavod.html, [citováno 2.11.2013].

[13] Infinity: You Can't Get There From Here [online], dostupné z: http://platonicrealms.com/minitexts/Infinity-you-cant-get-there-from-here/, [citováno 22.3.2014].

[14] Relace ekvivalence [online], dostupné z: http://www.matematika.cz/relace-ekvivalence, [citováno 20.3.2014].

[15] Cantorova věta [online], dostupné z: http://www.cs.wikipedia.org/wiki/Cantorova_věta, [citováno 2.4.2014].

[16] Russelův paradox [online], dostupné z: http://www.cs.wikipedia.org/wiki/Russelův_paradox, [citováno 19.11.2013].