VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MATEMATIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF MATHEMATICS

STABILITA SYSTÉMŮ OBYČEJNÝCH DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC

STABILITY ANALYSIS OF SYSTEMS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE — MILOŠ TREJTNAR
AUTHOR

VEDOUCÍ PRÁCE — Ing. PETR TOMÁŠEK, Ph.D.
SUPERVISOR

BRNO 2012

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav matematiky
Akademický rok: 2011/2012

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

student(ka): Miloš Trejtnar

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Matematické inženýrství (3901R021)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Stabilita systémů obyčejných diferenciálních rovnic

v anglickém jazyce:

Stability analysis of systems of ordinary differential equations

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Nastudovat a zpracovat problematiku stability systémů obyčejných diferenciálních rovnic. Aplikace těchto poznatků na konkrétním technickém problému.

Cíle bakalářské práce:

Student by se měl naučit orientovat se v dané problematice a zvládnout aplikovat získané poznatky na vybraném technickém problému.

Seznam odborné literatury:

Kalas, J., Ráb, M., Obyčejné diferenciální rovnice, Masarykova Univerzita, Brno 1995.
Rektorys, K. a kol., Přehled užité matematiky II, Prometheus, Praha, 1986.

Vedoucí bakalářské práce: Ing. Petr Tomášek, Ph.D.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2011/2012.

V Brně, dne 1.11.2011

L.S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.	prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc., dr. h. c.
Ředitel ústavu	Děkan fakulty

Abstrakt
Tato práce se zabývá studiem stability systémů obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu. Jsou zde uvedeny vybrané druhy stability a komentovány na konkrétních příkladech. Hlavní důraz je kladen na případ autonomních lineárních systémů, kde jsou klasifikovány jednotlivé typy singulárních bodů. V závěru práce je pak aplikována teorie stability v matematickém modelu, který popisuje vedení elektrického proudu v primárním a sekundárním vinutí transformátoru.

Summary
This thesis deals with a stability analysis of the first order systems of ordinary differential equations. There are introduced some stability approaches in the thesis and they are discussed in the several examples. The attention is focused to the case of linear autonomous systems, where the classification of the singular points is realized. The thesis is closed by the application of the stability theory in mathematical model of electric current conduction in a primary and secondary coil of a transformer.

Klíčová slova
Stabilita, systém obyčejných diferenciálních rovnic, singulární bod, fázový portrét

Keywords
Stability, ordinary differential equations system, singular point, phase portrait

TREJTNAR, M. *Stabilita systémů obyčejných diferenciálních rovnic*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2012. 52 s. Vedoucí Ing. Petr Tomášek, Ph.D.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci Stabilita systémů obyčejných diferenciálních rovnic vypracoval samostatně pod vedením Ing. Petra Tomáška, Ph.D. s použitím materiálů uvedených v referenci.

Miloš Trejtnar

Zde bych rád poděkoval svému školiteli Ing. Petru Tomáškovi, Ph.D. za vedení, věnovaný čas a cenné rady ve studované oblasti mé bakalářské práce.

Miloš Trejtnar

Obsah

1 Úvod **7**

2 Nelineární systémy **9**
2.1 Základní pojmy a definice 9
2.2 Přímá Ljapunovova metoda 18

3 Lineární systémy **23**
3.1 Základní pojmy 23
3.2 Metoda linearizace nelineárních systémů 27

4 Autonomní systémy a jejich stabilita **29**
4.1 Základní pojmy 29
4.2 Klasifikace singulárních bodů v rovině 32

5 Fyzikální aplikace teorie stability systémů ODR 1 **45**

6 Závěr **49**

7 Seznam příloh **52**

1 Úvod

Protože systémem obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu je popsáno chování mnoha reálných jevů, je této problematice věnována celá řada článků a publikací. My zde na tuto problematiku navážeme a budeme se v této bakalářské práci zabývat úlohou, kdy je třeba určit, za jakých podmínek se systém chová v určitém smyslu ustáleně. Chování uvedeného systému je popsáno jeho vlastním řešením, přičemž takových řešení může být v závislosti na počátečních podmínkách nekonečně mnoho. U většiny systému je žádoucí, aby jejich chování bylo v určitém smyslu blízké jednomu předem danému chování uvažovaného systému. Tato problematika je tedy předmětem studia stability řešení systému obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu. Nejčastěji požadujeme, aby toto chování setrvávalo v klidu nebo v periodickém pohybu. Představme si například železniční most, který je v určitém časovém okamžiku zatížen projíždějícím vlakem. Vlivem hmotnosti projíždějícího vlaku dochází k průhybu tohoto mostu, jehož matematickým modelem je systém dvou obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu. Poté co vlak opustí most, dochází k jeho odlehčení a následné oscilaci s amplitudou, která se s rostoucím časem zmenšuje, dokud most nedosáhne rovnovážné polohy, ze které byl vychýlen. V takovémto případě je časový průběh průhybu uvažovaného železničního mostu stabilní. Mohla by ovšem nastat taková situace, že by hmotnost vlaku překročila nosnost mostu, což by mělo za následek jeho prolomení a časový průběh průhybu by byl nestabilní. Teorie stability se začala budovat koncem 19. století a za její zakladatele jsou považováni H.Poincaré a A.M.Ljapunov. Od té doby byla v této oblasti popsána celá řada pojmů (typů stability) a metod. My se budeme zabývat především ljapunovskou stabilitou a tedy veškeré pojmy týkající se stability, které budou v této bakalářské práci vystupovat, chápejme v ljapunovském smyslu.

Nyní uděláme rozbor hlavních částí obsahu této práce. Ve druhé kapitole je provedena analýza jednotlivých typů ljapunovské stability řešení pro obecně nelineární systém a dále je zde zpracována základní teorie přímé Ljapunovovy metody. Třetí kapitola je věnována studiu ljapunovské stability řešení lineárních systémů. Součástí této kapitoly je také metoda, jejíž pomocí můžeme nelineární systém částečně linearizovat. Náplní čtvrté kapitoly je popis stability singulárního bodu autonomního systému a následná klasifikace tohoto bodu vzhledem k trajektoriím jeho řešení. V páté kapitole se zabýváme aplikací některých pojmů uvedených v předchozích kapitolách na

konkrétním fyzikálním příkladu z oblasti elektřiny a magnetismu. V rámci práce byly vytvořeny v programovém prostředí Maple 12 dvě aplikace, které dále využíváme ve čtvrté a páté kapitole k výpočtu a vykreslení řešení autonomních lineárních systémů. Tyto aplikace jsou přílohou práce a nesou názvy `aplfazovyportret.mw` a `apltransformator.mw`.

2 Nelineární systémy

2.1 Základní pojmy a definice

Než se začneme zabývat stabilitou řešení obyčejných diferenciálních rovnic, je třeba říci, že analýzu budeme provádět v euklidovském n-rozměrném prostoru $\mathbb{R}^n$, jehož prvky $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n)^T$ uvažujme jako uspořádané n-tice reálných čísel. Prostor $\mathbb{R}^n$ chápeme jako normovaný vektorový prostor a za normu vektoru obvykle volíme normu součtovou ($\|.\|_1$), euklidovskou ($\|.\|_2$) nebo normu čebyševovu ($\|.\|_\infty$). Tyto normy jsou definovány předpisy

$$\begin{aligned}\|\mathbf{z}\|_1 &= |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n|\,,\\ \|\mathbf{z}\|_2 &= \sqrt{(z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_n^2)},\\ \|\mathbf{z}\|_\infty &= \max\{|z_1|\,, |z_2|\,, \ldots, |z_n|\},\end{aligned}$$

kde $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n)^T \in \mathbb{R}^n$ a $|z_i|$, $i = 1, 2, \ldots, n$, značí absolutní hodnotu reálného čísla z_i. Uvedené normy jsou vzájemně ekvivalentní.

V prostoru $\mathbb{R}^n$ tedy uvažujme systém nelineárních obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= f_1(t, y_1, y_2, \ldots, y_n),\\ &\vdots\\ \dot{y}_n &= f_n(t, y_1, y_2, \ldots, y_n),\end{aligned}$$

který budeme zapisovat ve vektorovém tvaru

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}). \tag{1}$$

Předpokládejme, že funkce $\mathbf{f}$ je spojitá na množině $D = \{[t, \mathbf{y}] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $t \in I = \langle t_0, \infty)\,, \|\mathbf{y}\| < a\}$, kde $0 < a \leq \infty$. Číslo a nazýváme poloměrem množiny D. Také budeme předpokládat, že parciální derivace funkcí na pravých stranách systému (1), tj. $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, existují a jsou omezené na množině D. Dále buď $\mathbf{y}(t)$ řešením systému (1).

Úlohu, kdy chceme najít řešení systému (1), které v daném bodě τ intervalu I splní počáteční podmínku

$$\mathbf{y}(\tau) = \boldsymbol{\gamma}, \tag{2}$$

kde τ je počáteční bod (okamžik) a vektor $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^n$ je počáteční hodnota, nazýváme *počáteční úlohou* nebo také *Cauchyovou úlohou* a zapisujeme ji ve tvaru

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}), \qquad \mathbf{y}(\tau) = \boldsymbol{\gamma}. \tag{3}$$

Nyní uvedeme větu, která se vyjadřuje k existenci a jednoznačnosti řešení této počáteční (Cauchyovy) úlohy. Tato věta je postavena na základě Peanovy a Picardovy věty, jejichž znění a důkazy lze najít v [10].

Věta 2.1. *Nechť vektorová funkce* $\mathbf{f}$ *vystupující na pravé straně systému (1) je spojitá a ohraničená na nějaké oblasti* $\boldsymbol{\Omega} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *obsahující bod* $[\tau, \boldsymbol{\gamma}]$. *Pak existuje alespoň jedno řešení počáteční (Cauchyovy) úlohy (3) definované na jistém intervalu* $(\tau - \xi, \tau + \xi)$, $\xi \in R^+$. *Pokud navíc v každém bodě oblasti* $\boldsymbol{\Omega}$ *existují parciální derivace* $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, *které jsou v této oblasti* $\boldsymbol{\Omega}$ *ohraničené, tj. existuje* $L \geq 0$ *takové, že platí*

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \right| \leq L, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

potom existuje právě jedno řešení počáteční úlohy (3) definované na jistém intervalu $(\tau - \xi, \tau + \xi)$, $\xi \in R^+$.

Nechť je vektorová funkce $\mathbf{y}_0(t)$ řešením počáteční (Cauchyovy) úlohy (3), tj. $\mathbf{y}_0(t)$ je řešením systému (1), které v bodě $t = \tau$ vyhovuje počáteční podmínce (2). Existenci a jednoznačnost tohoto řešení nám vzhledem k předchozí větě zaručuje dříve kladený požadavek na funkci $\mathbf{f}$ systému (1), a sice, že funkce $\mathbf{f}$ je spojitá na množině D a také na množině D existují omezené parciální derivace $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Poznámka 2.2. Úvahy, ve kterých se zaměříme na soustavy obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu, lze aplikovat i na obyčejné diferenciální rovnice n-tého řádu, tj. $y^{(n)} = f(t, y, \dot{y}, \ldots, y^{(n-1)})$. Provedeme to tak, že obyčejnou diferenciální rovnici n-tého řádu převedeme na systém obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu a použijeme teorii stability na takto vzniklý systém.

Nyní uvedeme a rozlišíme jednotlivé typy ljapunovské stability pro obecně nelineární systém (1).

Definice 2.3. Řešení $\mathbf{y}_0(t)$ počáteční úlohy (3) se nazývá *stabilní* (podle Ljapunova), když ke každému $\tau \geq t_0$ a každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta = \delta(\tau, \varepsilon) > 0$ tak, že pro každé řešení $\mathbf{y}(t)$ systému (1) platí následující implikace:

$$\|\mathbf{y}(\tau) - \mathbf{y}_0(\tau)\| < \delta \Longrightarrow \|\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_0(t)\| < \varepsilon, \text{ pro všechna } t \geq \tau.$$

Poznámka 2.4. Předchozí definici můžeme interpretovat takto: Malé změny dat (parametrů, koeficientů) vyvolají malou změnu řešení, čímž můžeme říci, že řešení $\mathbf{y}_0(t)$ je stabilní, pokud každé řešení $\mathbf{y}(t)$, které je mu dostatečně blízké (δ-blízké) v počátečním bodě $t = \tau$ zůstane v dostatečně úzkém (ε-úzkém) válcovitém okolí řešení $\mathbf{y}_0(t)$ pro všechna $t \geq \tau$.

Poznámka 2.5. Pokud nějakému řešení systému (1) nevyhovuje podmínka stability uvedená v předchozí definici, pak o takovém řešení řekneme, že je nestabilní. Formální definici nestability zapíšeme pomocí logické negace pojmu stability.

Definice 2.6. Řešení $\mathbf{y}_0(t)$ počáteční úlohy (3) se nazývá *nestabilní* (podle Ljapunova), když existují $\tau \geq t_0$ a $\varepsilon > 0$ tak, že pro každé $\delta > 0$ existuje alespoň jedno řešení $\mathbf{y}(t)$ systému (1) pro které platí $\|\mathbf{y}(\tau) - \mathbf{y}_0(\tau)\| < \delta$ a existuje číslo $t_1 > \tau$ tak, že $\|\mathbf{y}(t_1) - \mathbf{y}_0(t_1)\| \geq \varepsilon$.

Definice 2.7. Řešení $\mathbf{y}_0(t)$ počáteční úlohy (3) se nazývá *stejnoměrně stabilní* (podle Ljapunova), když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tak, že pro každé $\tau \geq t_0$ všechna řešení $\mathbf{y}(t)$ systému (1) splňují následující implikaci:

$$\|\mathbf{y}(\tau) - \mathbf{y}_0(\tau)\| < \delta \Longrightarrow \|\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_0(t)\| < \varepsilon, \text{ pro všechna } t \geq \tau.$$

Poznámka 2.8. Definici 2.7 lze tedy obecně vyjádřit tak, že řešení $\mathbf{y}_0(t)$ je stejnoměrně stabilní právě tehdy, když je stabilní a číslo δ vystupující v definici 2.3 závisí pouze na ε a nikoli na τ. Je tedy zřejmé, že pojem stejnoměrné stability je silnější než pojem stability. To znamená, že pokud je řešeni $\mathbf{y}_0(t)$ počáteční úlohy (3) stejnoměrně stabilní je i stabilní.

Definice 2.9. Řešení $\mathbf{y}_0(t)$ počáteční úlohy (3) se nazývá *asymptoticky stabilní* (podle Ljapunova), když

(i) je stabilní (podle Ljapunova),

(ii) ke každému $\tau \geq t_0$ existuje $\delta = \delta(\tau) > 0$ tak, že pro každé řešení $\mathbf{y}(t)$ systému (1) platí následující implikace:

$$\|\mathbf{y}(\tau) - \mathbf{y}_0(\tau)\| < \delta \Longrightarrow \lim_{t \to \infty} \|\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_0(t)\| = 0.$$

Rozdíl mezi stabilitou a asymptotickou stabilitou lze ukázat na následujícím příkladu z mechaniky. Uvažujme sférickou plochu v tíhovém poli s kuličkou umístěnou uvnitř této plochy. Je zřejmé, že tato kulička zaujme rovnovážnou polohu v nejnižším bodě plochy. Pokud dojde k vychýlení kuličky vnější silou z její rovnovážné polohy, bude okolo této polohy oscilovat a dále vlivem tření a odporu vzduchu se budou amplitudy oscilací zmenšovat (v limitě se blížit k nule), tj. kulička se bude asymptoticky blížit k rovnovážné poloze (z praktického hlediska rovnovážnou polohu zaujme za konečný čas). Pak o této poloze můžeme na základě výše uvedených definic říci, že je asymptoticky stabilní. Nyní si představme ideální situaci, když tření mezi kuličkou a sférickou plochou neexistuje a pokus je realizovaný v absolutním vakuu. Pak bude kulička po vychýlení neustále oscilovat okolo rovnovážné polohy, avšak tuto polohu nezaujme. Z toho je patrné, že rovnovážná poloha kuličky je stabilní, nikoli však asymptoticky stabilní.

Z geometrického hlediska můžeme stabilitu popsat tak, že řešení, která jsou si "blízká"zůstanou "blízká"také pro všechny hodnoty $t \geq \tau$. Pokud chceme, aby platila podmínka asymptotické stability musí navíc platit, že se vzdálenost těchto řešení pro $t \to \infty$ blíží nule. Je tedy zřejmé, že asymptotická stabilita implikuje stabilitu.

Definice 2.10. Řešení $\mathbf{y}_0(t)$ počáteční úlohy (3) nazveme *stejnoměrně asymptoticky stabilní* (podle Ljapunova), když

(i) je stejnoměrně stabilní (podle Ljapunova)

(ii) existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé $\tau \geq t_0$ a pro každé řešení $\mathbf{y}(t)$ systému (1) platí následující implikace :

$$\|\mathbf{y}(\tau) - \mathbf{y}_0(\tau)\| < \delta \Longrightarrow \lim_{t\to\infty} \|\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_0(t)\| = 0.$$

Poznámka 2.11. Stejnoměrná asymptotická stabilita je na rozdíl od asymptotické stability nezávislá na výběru počátečního bodu τ. Pokud je řešení $\mathbf{y}_0(t)$ počáteční úlohy (3) stejnoměrně asymptoticky stabilní, pak je stejnoměrně stabilní a zároveň asymptoticky stabilní.

Definice 2.12. Nechť řešení $\mathbf{y}_0(t)$ počáteční úlohy (3) je asymptoticky stabilní. Množina všech bodů $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^n$, pro které platí rovnost

$$\lim_{t\to\infty} \|\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_0(t)\| = 0,$$

kde $\mathbf{y}(t)$ je libovolné řešení systému (1) se nazývá *oblast přitažlivosti* řešení $\mathbf{y}_0(t)$ počáteční úlohy (3). Je-li oblastí přitažlivosti celý prostor $\mathbb{R}^n$, pak o tomto řešení říkáme, že je *globálně asymptoticky stabilní* (podle Ljapunova).

Poznámka 2.13. Je-li řešení $\mathbf{y}_0(t)$ počáteční úlohy (3) globálně asymptoticky stabilní, pak je také stejnoměrně asymptoticky stabilní.

Definice 2.14. Řešení $\mathbf{y}_0(t)$ počáteční úlohy (3) se nazývá *exponenciálně stabilní*, pokud existují konstanty $k > 0$, $\alpha > 0$ a $\delta > 0$ takové, že pro každé $\tau \geq t_0$ je řešení $\mathbf{y}(t)$ systému (1) splňující podmínku $\|\mathbf{y}(\tau) - \mathbf{y}_0(\tau)\| < \delta$ definované pro všechna $t \geq \tau$ a platí

$$\|\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_0(t)\| \leq k \, \|\mathbf{y}(\tau) - \mathbf{y}_0(\tau)\| \exp^{-\alpha(t-\tau)},$$

kde $t \geq \tau$.

Poznámka 2.15. Protože z nerovnosti uvedené v předchozí definici plyne $\|\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_0(t)\| \leq k \, \|\mathbf{y}(\tau) - \mathbf{y}_0(\tau)\|$, je exponenciálně stabilní řešení stejnoměrně stabilní. Podmínka uvedená v definici 2.14 zaručuje také asymptotickou stabilitu.

Dále ukažme, že při ověřování podmínek stability řešení $\mathbf{y}_0(t)$ počáteční úlohy (3) stačí tyto podmínky ověřit pro jedno libovolné $\tau_0 \geq t_0$ a pak už musí platit pro všechna $\tau \geq t_0$.

Předpokládejme, že k nějakému pevně danému bodu $\tau_0 > t_0$ a ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta_0 > 0$ tak, že pro každé řešení $\mathbf{y}(t)$ systému (1) platí následující implikace:

$$\|\mathbf{y}(\tau_0) - \mathbf{y}_0(\tau_0)\| < \delta_0 \Longrightarrow \|\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_0(t)\| < \varepsilon, \text{ pro všechna } t \geq \tau_0.$$

Zvolme nyní libovolně $\tau_1 \geq t_0$ tak, že například $\tau_1 < \tau_0$ (případ $\tau_1 > \tau_0$ lze provést analogicky). Z podmínek kladených na funkci $\mathbf{f}$, které jsou uvedeny na začátku kapitoly plyne, že řešení $\mathbf{y}_0(t)$ počáteční úlohy (3) závisí spojitě na $t, \tau, \boldsymbol{\gamma}$. Potom k číslům τ_0, τ_1, δ_0 a ε existuje takové číslo $\delta_1 > 0$, že pro všechna řešení $\mathbf{y}(t)$ systému (1) splňující podmínku

$$\|\mathbf{y}(\tau_1) - \mathbf{y}_0(\tau_1)\| < \delta_1$$

a pro všechna $t \in \langle \tau_1, \tau_0 \rangle$ platí

$$\|\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_0(t)\| < \varepsilon, \qquad \|\mathbf{y}(\tau_0) - \mathbf{y}_0(\tau_0)\| < \delta_0.$$

Na základě předešlých úvah můžeme tedy říci, že pro každé řešení $\mathbf{y}(t)$ a pro každé $t \geq \tau_1$ platí následující implikace:

$$\|\mathbf{y}(\tau_1) - \mathbf{y}_0(\tau_1)\| < \delta_1 \Longrightarrow \|\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_0(t)\| < \varepsilon.$$

Ta nám zaručuje platnost podmínky stability řešení $\mathbf{y}_0(t)$ počáteční úlohy (3) pro všechna $t \geq \tau_1$. Je tedy zřejmé, že je tato podmínka splněna nejen pro pevně daný bod τ_0, ale i pro libovolně zvolený jiný bod $\tau_1 \geq t_0$. Z toho tedy plyne, že při ověřování stability řešení $\mathbf{y}_0(t)$ počáteční úlohy (3) stačí platnost její podmínky ukázat na jednom libovolně zvoleném počátečním bodě $\tau \geq t_0$. Stejné tvrzení lze uplatnit i při dokazování podmínek asymptotické stability.

Systém (1) lze pomocí lineární transformace

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) + \mathbf{y}_0(t), \tag{4}$$

kde vektorová funkce $\mathbf{x}(t)$ značí odchylku mezi řešením $\mathbf{y}(t)$ systému (1) a řešením $\mathbf{y}_0(t)$ počáteční úlohy (3), převést na nový systém

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}), \tag{5}$$

ve kterém platí $\mathbf{g}(t, \mathbf{o}) = \mathbf{o}$. Nulový vektor $\mathbf{x}(t) = \mathbf{o}$ nazveme triviálním nebo také rovnovážným řešením systému (5) (z lineární transformace (4) plyne, že se řešení $\mathbf{x}(t)$ systému (5) stane nulovým vektorem právě tehdy, když platí $\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0(t)$).

Nyní si toto tvrzení ověříme. V systému (1) tedy provedeme lineární transformaci (4). Jelikož je vektorová funkce $\mathbf{y}_0(t)$ řešením počáteční úlohy (3) platí

$$\dot{\mathbf{y}}_0 = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}_0).$$

Pak

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{y}} - \dot{\mathbf{y}}_0 = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y}_0) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x} + \mathbf{y}_0) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y}_0).$$

Označíme-li

$$\mathbf{g}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x} + \mathbf{y}_0) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y}_0),$$

dostaneme systém

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}), \qquad \mathbf{g}(t, \mathbf{o}) = \mathbf{o},$$

který je již zmíněným systémem (5) a má triviální řešení $\mathbf{x}(t) = \mathbf{o}$. Na toto triviální řešení je lineární transformací (4) zobrazeno řešení $\mathbf{y}_0(t)$ počáteční úlohy (3). Je tedy patrné, že bychom se při vyšetřování stability řešení $\mathbf{y}_0(t)$

počáteční úlohy (3) mohli omezit pouze na zkoumání stability triviálního řešení $\mathbf{x}(t) = \mathbf{o}$ systému (5) a získané výsledky následně přenést pomocí lineární transformace (4) na řešení $\mathbf{y}_0(t)$ počáteční úlohy (3). Pro všechny uvedené typy stability zřejmě platí, že řešení $\mathbf{y}_0(t)$ počáteční úlohy (3) je stabilní právě tehdy, když je stabilní triviální řešení $\mathbf{x}(t) = \mathbf{o}$ systému (5).

Poznámka 2.16. Definice uvedených typů stability bychom pro triviální řešení $\mathbf{x}(t) = \mathbf{o}$ systému (5) zavedli obdobně jako v případě řešení $\mathbf{y}_0(t)$ počáteční úlohy (3). Pro názornost uvedeme následující definici.

Definice 2.17. O triviálním řešení $\mathbf{x}(t) = \mathbf{o}$ systému (5) řekneme, že je *stabilní* (podle Ljapunova), když ke každému $\tau \geq t_0$ a každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta = \delta(\tau, \varepsilon) > 0$ tak, že pro všechna řešení $\mathbf{x}(t)$ systému (5) platí následující implikace:

$$\|\mathbf{x}(\tau)\| < \delta \Longrightarrow \|\mathbf{x}(t)\| < \varepsilon,$$

pro všechna $t \geq \tau$. Pokud navíc platí

$$\lim_{t\to\infty} \|\mathbf{x}(t)\| = 0$$

pro každé řešení $\mathbf{x}(t)$ systému (5), potom o triviálním řešení $\mathbf{x}(t) = \mathbf{o}$ systému (5) řekneme, že je *asymptoticky stabilní* (podle Ljapunova).

Nyní si shrnutou teorii stability ukážeme na konkrétních příkladech.

Příklad 2.18. Analyzujme stabilitu triviálního řešení $\mathbf{x}(t) = \mathbf{o}$ systému

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -3x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -2x_1. \end{aligned} \tag{6}$$

Obecné řešení $\mathbf{x}(t) = (x_1, x_2)^T$ systému (6) je tvaru

$$\mathbf{x}(t) = (C_1\mathrm{e}^{-2t} + \frac{1}{2}C_2\mathrm{e}^{-t}, C_1\mathrm{e}^{-2t} + C_2\mathrm{e}^{-t})^T, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Po dosazení tohoto řešení do vztahu, jež definuje euklidovskou normu, dostáváme rovnost

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}(t)\|_2 &= \sqrt{(C_1\mathrm{e}^{-2t} + \frac{1}{2}C_2\mathrm{e}^{-t})^2 + (C_1\mathrm{e}^{-2t} + C_2\mathrm{e}^{-t})^2} \\ &= \sqrt{2C_1^2\mathrm{e}^{-4t} + 3C_1C_2\mathrm{e}^{-3t} + \frac{5}{4}C_2^2\mathrm{e}^{-2t}}, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Pro každé číslo $\tau \leq t$ platí

$$\|\mathbf{x}(t)\|_2 \leq \|\mathbf{x}(\tau)\|_2 = \sqrt{2C_1^2 \mathrm{e}^{-4\tau} + 3C_1C_2\mathrm{e}^{-3\tau} + \frac{5}{4}C_2^2\mathrm{e}^{-2\tau}}.$$

Položíme-li kladné číslo $\delta = \varepsilon$ dostaneme odhad

$$\|\mathbf{x}(t)\|_2 \leq \|\mathbf{x}(\tau)\|_2 < \delta = \varepsilon, \quad t \geq \tau.$$

Ukázali jsme, že triviální řešení $\mathbf{x}(t) = \mathbf{o}$ systému (6) je stejnoměrně stabilní (stejnoměrně proto, že číslo δ je závislé pouze na ε a nikoli na τ). Jelikož pro všechna C_1, C_2 je $\lim\limits_{t\to\infty} \|\mathbf{x}(t)\| = 0$, je toto triviální řešení také globálně asymptoticky stabilní. Aby byly ověřeny podmínky všech uvedených typů stability stačí ukázat, že triviální řešení $\mathbf{x}(t)$ systému (6) je exponenciálně stabilní, tj. musí platit nerovnost

$$\|\mathbf{x}(t)\|_2 \leq k \|\mathbf{x}(\tau)\|_2 \mathrm{e}^{-\alpha(t-\tau)}.$$

Zvolíme-li $\alpha = 1$, $\tau = 0$, pak po jednoduchých úpravách dostaneme nerovnost

$$\mathrm{e}^{-t}\sqrt{2C_1^2\mathrm{e}^{-2t} + 3C_1C_2\mathrm{e}^{-t} + \frac{5}{4}C_2^2} \leq k\mathrm{e}^{-t}\sqrt{2C_1^2 + 3C_1C_2 + \frac{5}{4}C_2^2},$$

Zřejmě tedy pro každé $t \geq \tau$ existuje $k > 0$ vyhovující této nerovnosti, z čehož plyne, že triviální řešení $\mathbf{x}(t) = \mathbf{o}$ systému (6) je exponenciálně stabilní.

Příklad 2.19. Ukažme, že triviální řešení $\mathbf{x}(t) = \mathbf{o}$ systému

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -4x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 \end{aligned} \tag{7}$$

je vzhledem k počátečním podmínkám

$$x_1(\tau) = \gamma_1, \quad x_2(\tau) = \gamma_2 \tag{8}$$

stejnoměrně stabilní, nikoliv však asymptoticky stabilní.

Řešení počáteční úlohy (7), (8) označíme $\mathbf{x}_0(t)$ a zapíšeme ve tvaru

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_0(t) = &((\sin(2\tau)\gamma_1 - 2\cos(2\tau)\gamma_2)\sin(2t) + (\cos(2\tau)\gamma_1 + 2\gamma_2\sin(2\tau))\cos(2t), \\ &-\frac{1}{2}(\sin(2\tau)\gamma_1 - 2\cos(2\tau)\gamma_2)\cos(2t) + \frac{1}{2}(\cos(2\tau)\gamma_1 + 2\gamma_2\sin(2\tau))\sin(2t))^T, \end{aligned}$$

$t \in \mathbb{R}$. Použitím součtové normy dostáváme pro toto řešení odhady

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}_0(t)\|_1 &\le \frac{3}{2}\left|\sin(2\tau)\gamma_1 - 2\cos(2\tau)\gamma_2\right| + \frac{3}{2}\left|\cos(2\tau)\gamma_1 + 2\gamma_2\sin(2\tau)\right| \le \\ &\le \frac{3}{2}\left|\sin(2\tau)\gamma_1\right| + 3\left|\cos(2\tau)\gamma_2\right| + \frac{3}{2}\left|\cos(2\tau)\gamma_1\right| + 3\left|\gamma_2\sin(2\tau)\right| \le \\ &\le \frac{3}{2}\left|\gamma_1\right| + 3\left|\gamma_2\right| + \frac{3}{2}\left|\gamma_1\right| + 3\left|\gamma_2\right| \le 6\left|\gamma_2\right| + 3\left|\gamma_1\right| \le 6\left\|\boldsymbol{\gamma}\right\|_1\end{aligned}$$

pro každé $t \ge \tau \in \mathbb{R}$ a $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2) \in \mathbb{R}^2$. Položíme-li $\delta = \frac{1}{6}\varepsilon$ dostaneme

$$\|\mathbf{x}_0(t)\|_1 \le 6\|\boldsymbol{\gamma}\|_1 < 6\delta = \varepsilon \quad \text{pro každé } t \ge \tau.$$

Z poslední nerovnosti plyne, že triviální řešení $\mathbf{x}(t) = \mathbf{o}$ systému (7) je vzhledem k počátečním podmínkám (8) stejnoměrně stabilní. Protože $\lim_{t\to\infty} \|\mathbf{x}_0(t)\|$ neexistuje, není toto triviální řešení vzhledem k počátečním podmínkám (8) asymptoticky stabilní.

Příklad 2.20. Ukažme, že triviální řešení $\mathbf{x}(t) = \mathbf{o}$ systému

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 4x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1\end{aligned} \tag{9}$$

je vzhledem k počátečním podmínkám

$$x_1(\tau) = \gamma_1, \quad x_2(\tau) = \gamma_2 \tag{10}$$

nestabilní.

Řešení počáteční úlohy (9), (10) je tvaru

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_0(t) = (&\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2(t-\tau)}(\gamma_1 + 2\gamma_2) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2(t-\tau)}(\gamma_1 - 2\gamma_2), \\ &\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2(t-\tau)}(\gamma_1 + 2\gamma_2) - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2(t-\tau)}(\gamma_1 - 2\gamma_2))^T, \quad t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Zvolíme-li libovolně čísla $\varepsilon > 0$ a τ, například $\varepsilon = 1$, $\tau = 0$, pak pro libovolné $\delta > 0$ můžeme vzít

$$\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2) = (\delta, \frac{\delta}{2}), \quad t_1 > -\frac{1}{2}\ln\frac{\delta}{2}.$$

Pomocí součtové normy dostaneme odhad

$$\|\mathbf{x}_0(t_1)\|_1 = \left|\mathrm{e}^{2t_1}(\frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2}) + \mathrm{e}^{-2t_1}(\frac{\delta}{2}-\frac{\delta}{2})\right| + \left|\mathrm{e}^{2t_1}(\frac{\delta}{4}+\frac{\delta}{4}) - \mathrm{e}^{-2t_1}(\frac{\delta}{4}-\frac{\delta}{4})\right| =$$
$$= \left|\mathrm{e}^{2t_1\delta}\right| + \left|\mathrm{e}^{2t_1}\frac{\delta}{2}\right| = \mathrm{e}^{2t_1}\frac{3}{2}\delta > \mathrm{e}^{-\ln\frac{\delta}{2}}\frac{3}{2}\delta = \frac{2}{\delta}\frac{3}{2}\delta = 3 > \varepsilon,$$

z něhož je patrné, že triviální řešení $\mathbf{x}(t) = \mathbf{o}$ systému (9) je vzhledem k počátečním podmínkám (10) nestabilní.

V další části textu této kapitoly bych rád uvedl elegantní metodu, s jejíž pomocí můžeme rozhodnout o stabilitě triviálního řešení $\mathbf{x}(t) = \mathbf{o}$ systému (5), aniž bychom znali jeho obecné řešení. Tuto metodu, známou pod názvem *Přímá Ljapunovova metoda*, vyvinul a v roce 1889 zveřejnil ruský matematik A.M. Ljapunov.

2.2 Přímá Ljapunovova metoda

Uvažujme uvedený systém obyčejných diferenciálních rovnic (5)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(t, \mathbf{x})$$

a předpokládejme, že funkce $\mathbf{g}$ je spojitá na množině $D' = \{[t, \mathbf{x}] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n,\ t \in \langle t_0, \infty)\,, \|\mathbf{x}\| < b\}$, kde $b \in \mathbb{R}^+$. Také předpokládejme, že parciální derivace $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, existují a jsou omezené na množině D'. Dále připomeňme, že pro každé $t \geq t_0$ platí $\mathbf{g}(t, \mathbf{o}) = \mathbf{o}$. Pak systém (5) má triviální řešení $\mathbf{x}(t) = \mathbf{o}$. Dále budeme uvažovat počáteční (Cauchyovu) úlohu

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}), \qquad \mathbf{x}(\tau) = \boldsymbol{\gamma}', \tag{11}$$

kde $t \leq \tau < \infty$. Tato počáteční úloha je tedy pro každý bod $[\tau, \gamma'] \in D'$ jednoznačně řešitelná. Buď $\mathbf{x}_0(t)$ řešením počáteční úlohy (11).

Nyní zaveďme pomocnou funkci $V(t, \mathbf{x})$ a předpokládejme, že má následující vlastnosti:

(i) Funkce $V(t, \mathbf{x})$ je spojitá na množině $H = \{[t, \mathbf{x}] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, t \in \langle T, \infty)\,, \|\mathbf{x}\| < B\}$, kde $t_0 \leq T < \infty$, $0 < B \leq b$.

(ii) Funkce $V(t, \mathbf{x})$ má na množině H spojité parciální derivace $\frac{\partial V}{\partial t}$, $\frac{\partial V}{\partial x_k}$, kde $k = 1, 2, \ldots, n$.

(iii) Funkce $V(t, \mathbf{o}) = \mathbf{o}$ pro každé $t \geq T$.

Každé funkci $V(t, \mathbf{x})$ můžeme na množině H přiřadit funkci $\dot{V}(t, \mathbf{x})$ definovanou předpisem

$$\dot{V}(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial x_i} g_i(t, \mathbf{x}).$$

Funkci $\dot{V}(t, \mathbf{x})$ nazveme derivací funkce $V(t, \mathbf{x})$ vzhledem k systému (5). Pokud do předchozí rovnice dosadíme za vektor $\mathbf{x}$ vektor $\mathbf{x}_0(t)$, dostaneme funkci

$$\begin{aligned}\dot{V}(t, \mathbf{x}_0(t)) &= \frac{\partial V(t, \mathbf{x}_0(t))}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(t, \mathbf{x}_0(t))}{\partial x_i} g_i(t, \mathbf{x}_0(t)) \\ &= \frac{\partial V(t, \mathbf{x}_0(t))}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(t, \mathbf{x}_0(t))}{\partial x_i} \dot{x}_{0i}(t) = \frac{\mathrm{d}V(t, \mathbf{x}_0(t))}{\mathrm{d}t},\end{aligned}$$

která je závislá pouze na parametru t. Je zřejmé, že když $\dot{V}(t, \mathbf{x}_0(t)) \leq 0$, respektive $\dot{V}(t, \mathbf{x}_0(t)) < 0$, potom je funkce $V(t, \mathbf{x})$ na množině H nerostoucí, respektive klesající podél trajektorií řešení $\mathbf{x}_0(t)$ počáteční úlohy (11).

Podle určitých vlastností funkce $V(t, \mathbf{x})$ a její derivace $\dot{V}(t, \mathbf{x})$ jsme schopni rozhodnout o stabilitě triviálního řešení daného systému. Nyní uvedeme výčet některých vlastností funkce $V(t, \mathbf{x})$, kterých vzápětí využijeme při formulaci Ljapunovových vět, jež se vyjadřují právě k typu stability či nestabilitě triviálního řešeni $\mathbf{x}(t) = \mathbf{o}$ systému (5).

Definice 2.21. Výše uvedená funkce $V(t, \mathbf{x})$ se nazývá *pozitivně*, respektive *negativně, semidefinitní* na množině H právě tehdy, když $V(t, \mathbf{x}) \geq 0$, respektive $V(t, \mathbf{x}) \leq 0$, pro každé $[t, \mathbf{x}] \in H$.

Definice 2.22. Nechť existuje funkce $W(\mathbf{x})$ nezávislá na parametru t, která je definovaná a spojitá na množině $H' = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{x}\| < B\}$, taková, že platí $W(\mathbf{o}) = \mathbf{o}$. Potom funkci $V(t, \mathbf{x})$ nazveme *pozitivně*, respektive *negativně, definitní* na množině H právě tehdy, když platí $V(t, \mathbf{x}) \geq W(\mathbf{x}) > 0$, respektive $V(t, \mathbf{x}) \leq -W(\mathbf{x}) < 0$, pro každé $[t, \mathbf{x}] \in H$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$.

Definice 2.23. Funkce $V(t, \mathbf{x})$ se nazývá *ohraničená (omezená)* na množině H právě tehdy, když existuje konstanta k taková, že pro každé $[t, \mathbf{x}] \in H$ platí $|V(t, \mathbf{x})| < k$.

Definice 2.24. Nechť funkce $V(t, \mathbf{x})$ je ohraničená (omezená) na množině H a ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ takové, že $|V(t, \mathbf{x})| < \varepsilon$ pro všechna $t > T$ a $\|\mathbf{x}\| < \delta$, pak funkce $V(t, \mathbf{x})$ má na množině H *infinitezimální horní hranici.*

Věta 2.25. *Triviální řešení* $\mathbf{x}(t) = \mathbf{o}$ *systému (5) je ljapunovsky stabilní, pokud na množině* H *existuje pozitivně, respektive negativně, definitní funkce* $V(t, \mathbf{x})$ *taková, že její derivace* $\dot{V}(t, \mathbf{x})$ *vzhledem k systému (5) je negativně, respektive pozitivně, semidefinitní.*

Věta 2.26. *Triviální řešení* $\mathbf{x}(t) = \mathbf{o}$ *systému (5) je asymptoticky ljapunovsky stabilní, pokud na množině* H *existuje pozitivně, respektive negativně, definitní funkce* $V(t, \mathbf{x})$*, která má infinitezimální horní hranici, taková, že její derivace* $\dot{V}(t, \mathbf{x})$ *vzhledem k systému (5) je negativně, respektive pozitivně, definitní.*

Věta 2.27. *Triviální řešení* $\mathbf{x}(t) = \mathbf{o}$ *systému (5) je ljapunovsky nestabilní, pokud na množině* H *existuje funkce* $V(t, \mathbf{x})$*, která má infinitezimální horní hranici, taková, že její derivace* $\dot{V}(t, \mathbf{x})$ *vzhledem k systému (5) je definitní, a pokud existuje* $t_1 \geq T$ *takové, že pro každé* $t \geq t_1$ *a* $\delta > 0$ *existuje alespoň jedno* $\mathbf{s}$*, vyhovující podmínce* $\|\mathbf{s}\| < \delta$*, pro které platí*

$$V(t, \mathbf{s})\dot{V}(t, \mathbf{s}) > 0.$$

Důkazy uvedených vět jsou podrobně popsány v [1]. Použití přímé Ljapunovovy metody si budeme ilustrovat na následujících příkladech.

Příklad 2.28. Ukažme, že triviální řešení $\mathbf{x}(t) = \mathbf{o}$ systému

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -(x_1 + 2x_2)(1 - x_1^2 - x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= -(x_2 - 3x_1)(1 - x_1^2 - x_2^2) \end{aligned} \tag{12}$$

je asymptoticky stabilní.

Vektorová funkce $\mathbf{g}(t, \mathbf{x}) = (-(x_1+2x_2)(1-x_1^2-x_2^2), -(x_2-3x_1)(1-x_1^2-x_2^2))$ je spojitá na množině $D' = \{[t, \mathbf{x}] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2,\, t \in \langle t_0, \infty) \,, \|\mathbf{x}\| < b\}$, kde $b \in \mathbb{R}^+$, a také má na této množině spojité parciální derivace $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}$, $i, j = 1, 2$. Počáteční (Cauchyova) úloha je tedy pro systém (12) jednoznačně řešitelná pro všechna $[\tau, \boldsymbol{\gamma}'] \in D'$ a zřejmě platí $\mathbf{g}(t, \mathbf{o}) = \mathbf{o}$. Zavedeme-li funkci $V(t, \mathbf{x})$ předpisem

$$V(t, \mathbf{x}) = 3x_1^2 + 2x_2^2, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2,$$

je hned patrné, že je tato funkce pro všechna $[t, \mathbf{x}] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ pozitivně definitní. Dále funkci $V(t, \mathbf{x})$ zderivujeme vzhledem k systému (12) a dostaneme

$$\begin{aligned}\dot{V}(t, \mathbf{x}) &= \frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial x_1} g_1(t, \mathbf{x}) + \frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial x_2} g_2(t, \mathbf{x}) \\ &= -6x_1(x_1 + 2x_2)(1 - x_1^2 - x_2^2) - 4x_2(x_2 - 3x_1)(1 - x_1^2 - x_2^2) \\ &= -2(1 - x_1^2 - x_2^2)(3x_1^2 + 2x_2^2).\end{aligned}$$

Vezmeme-li množinu $H = \{[t, \mathbf{x}] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2, t \in \langle T, \infty), \|\mathbf{x}\| < 1\}$, kde $t_0 \leq T < \infty$, pak funkce $V(t, \mathbf{x})$ má zřejmě na této množině infinitezimální horní hranici. Protože je tato funkce pozitivně definitní pro všechna $[t, \mathbf{x}] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$, je pozitivně definitní také na množině H. Nerovnost $\|\mathbf{x}\|_2 < 1$ zaručuje, že je výraz $(1 - x_1^2 - x_2^2)$ kladný. Stačí položit $W(\mathbf{x}) = 2(1 - x_1^2 - x_2^2)(3x_1^2 + 2x_2^2) > 0$ pro všechna $\|\mathbf{x}\| < 1$ a pak už platí $\dot{V}(t, \mathbf{x}) \leq -W(\mathbf{x}) < 0$ pro všechna $[t, \mathbf{x}] \in H$. Funkce $\dot{V}(t, \mathbf{x})$ je tedy na množině H negativně definitní. Ukázali jsme, že triviální řešení $\mathbf{x}(t) = \mathbf{o}$ systému (12) je asymptoticky stabilní.

Příklad 2.29. Ukažme, že triviální řešení $\mathbf{x}(t) = \mathbf{o}$ systému

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 2x_1 - x_2 + x_1 \mathrm{e}^{x_2} \\ \dot{x}_2 &= -x_1 \cosh t - 4x_2 - x_2 \mathrm{e}^{x_1}\end{aligned} \tag{13}$$

je nestabilní.

Vektorová funkce $\mathbf{g}(t, \mathbf{x}) = (2x_1 - x_2 + x_1 \mathrm{e}^{x_2}, -x_1 \cosh t - 4x_2 - x_2 \mathrm{e}^{x_1})$ je spojitá na množině $D' = \{[t, \mathbf{x}] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2,\ t \in \langle t_0, \infty), \|\mathbf{x}\| < b\}$, kde $b \in \mathbb{R}^+$. Počáteční (Cauchyova) úloha je tedy pro systém (13) jednoznačně řešitelná pro všechna $[\tau, \boldsymbol{\gamma}'] \in D'$. Zřejmě platí $\mathbf{g}(t, \mathbf{o}) = \mathbf{o}$. Funkci $V(t, \mathbf{x})$ zavedeme předpisem

$$V(t, \mathbf{x}) = x_1^2 \cosh t - x_2^2, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2.$$

Poté ji zderivujeme vzhledem k systému (13) a dostaneme vztah

$$\begin{aligned}\dot{V}(t, \mathbf{x}) &= \frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial t} + \frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial x_1} g_1(t, \mathbf{x}) + \frac{\partial V(t, \mathbf{x})}{\partial x_2} g_2(t, \mathbf{x}) \\ &= x_1^2 \sinh t + 4x_1^2 \cosh t + 2x_1^2 \mathrm{e}^{x_2} \cosh t + 8x_2^2 + 2x_2^2 \mathrm{e}^{x_1} \\ &= \frac{1}{2} x_1^2 (\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}) + (\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t})(2x_1^2 + x_1^2 \mathrm{e}^{x_2}) + 8x_2^2 + 2x_2^2 \mathrm{e}^{x_1}.\end{aligned}$$

Vezmeme-li množinu $H = \{[t, \mathbf{x}] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2, t \geq 0, \|\mathbf{x}\| < B\}$, kde $0 < B \leq b$, pak funkce $V(t, \mathbf{x})$ má zřejmě na této množině infinitezimální horní hranici.

Položme na parametru t nezávislou funkci $W(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}x_1^2 + 2x_1^2 + x_1^2\mathrm{e}^{x_2} + 8x_2^2 + 2x_2^2\mathrm{e}^{x_1}$. Jelikož pro všechna $[t, \mathbf{x}] \in H$ platí $\dot{V}(t, \mathbf{x}) \geq W(\mathbf{x}) > 0$, je funkce $\dot{V}(t, \mathbf{x})$ na množině H pozitivně definitní. Konečně položme $t_1 \geq 0$ a $\mathbf{s} = (s_1, 0), s_1 \neq 0$, pak pro každé $t \geq t_1$ platí nerovnost

$$\begin{aligned}\dot{V}(t, \mathbf{s})V(t, \mathbf{s}) &= (\frac{1}{2}s_1^2(\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}) + (\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t})(2s_1^2 + s_1^2))s_1^2 \cosh t \\ &= s_1^2(\frac{7}{2}\mathrm{e}^t + 2\mathrm{e}^{-t})s_1^2 \cosh t = s_1^4(\frac{7}{2}\mathrm{e}^t + 2\mathrm{e}^{-t}) > 0.\end{aligned}$$

Ukázali jsme tedy, že triviální řešení $\mathbf{x}(t) = \mathbf{o}$ systému (13) je nestabilní.

Tímto končí rozbor stability, týkající se nelineárních systémů obyčejných diferenciálních rovnic a v další kapitole se budeme již zabývat systémy lineárními.

3 Lineární systémy

3.1 Základní pojmy

Protože v úvahách týkajících se stability řešení systému lineárních obyčejných diferenciálních rovnic budeme mimo jiné využívat normu čtvercové matice, uveďme nyní předpisy, jež definují obvykle používané normy matice, a sice normu sloupcovou ($\|.\|_1$), euklidovskou ($\|.\|_2$) a řádkovou ($\|.\|_\infty$).

$$\|\mathbf{M}\|_1 = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{n} |m_{ij}|, \quad \|\mathbf{M}\|_2 = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} (m_{ij})^2}, \quad \|\mathbf{M}\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |m_{ij}|,$$

kde m_{ij}, $i,j = 1,2,\dots,n$ jsou prvky matice $\mathbf{M}$ typu $n \times n$ a $|m_{ij}|$, $i = 1,2,\dots,n$, značí absolutní hodnotu prvků matice $\mathbf{M}$. Tyto normy jsou vzájemně ekvivalentní.

V euklidovském n-rozměrném prostoru $\mathbb{R}^n$ uvažujme systém obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}(t), \tag{14}$$

kde

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

je maticová funkce typu $n \times n$ a $\mathbf{b}(t)$ je n-vektorová funkce. Dále předpokládejme, že funkce $\mathbf{A}(t)$ a $\mathbf{b}(t)$ jsou spojité na intervalu $I = \langle t_0, \infty)$. Řešením systému (14) budeme rozumět vektorovou funkci $\mathbf{y}(t)$, která je spojitě diferencovatelná na intervalu I a splňuje na tomto intervalu podmínku identity $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{y}(t) + \mathbf{b}(t)$. Existenci a jednoznačnost řešení počáteční (Cauchyovy) úlohy

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}(t), \qquad \mathbf{y}(\tau) = \boldsymbol{\gamma}, \tag{15}$$

kde $\tau \in I, \boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^n$, nám zajistí předpoklady následující věty, jejíž důkaz lze nalézt v [7].

Věta 3.1. *Buďte $A(t)$ a $b(t)$ spojité funkce na intervalu I. Potom je počáteční (Cauchyova) úloha (15) jednoznačně řešitelná na celém intervalu I.*

Abychom si následující úvahy a formulace zjednodušili, převedeme systém (14) na systém, který má triviální řešení. Nechť $\mathbf{y}_0(t)$ je řešení počáteční úlohy (15), pak pomocí lineární transformace (4) dostaneme

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \dot{\mathbf{y}} - \dot{\mathbf{y}}_0 = \mathbf{A}(t)\mathbf{y} + \mathbf{b}(t) - (\mathbf{A}(t)\mathbf{y}_0 + \mathbf{b}(t)) \\ &= \mathbf{A}(t)(\mathbf{x} + \mathbf{y}_0) + \mathbf{b}(t) - (\mathbf{A}(t)\mathbf{y}_0 + \mathbf{b}(t)) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}.\end{aligned}$$

Ukázali jsme, že v případě lineárních systémů stačí namísto vyšetřování stability řešení $\mathbf{y}_0(t)$ nehomogenního systému (14) vyšetřovat stabilitu triviálního řešení $\mathbf{x}(t) = \mathbf{o}$ homogenního systému

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}. \tag{16}$$

Protože je maticová funkce $\mathbf{A}(t)$ spojitá na intervalu I, je podle věty 3.1 počáteční (Cauchyova) úloha

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(\tau) = \boldsymbol{\gamma}', \tag{17}$$

kde $\tau \in I, \boldsymbol{\gamma}' \in \mathbb{R}^n$, jednoznačně řešitelná. Buď $\mathbf{x}_0(t)$ řešení počáteční úlohy (17) a $\mathbf{U}(t)$ fundamentální matice řešení této počáteční úlohy.

Poznámka 3.2. V případě systému lineárních obyčejných diferenciálních rovnic jsou buď všechna řešení stabilní (stejnoměrně stabilní, asymptoticky stabilní, stejnoměrně asymptoticky stabilní, exponenciálně stabilní, globálně asymptoticky stabilní) anebo všechna nestabilní.

Nyní uvedeme soubor vět, které formulují nutné a postačující podmínky pro daný typ stability či nestabilitu triviálního řešení $\mathbf{x}(t) = \mathbf{o}$ systému (16).

Věta 3.3. *Triviální řešení $\mathbf{x}(t) = \mathbf{o}$ systému (16) je ljapunovsky stabilní právě tehdy, když je řešení $\mathbf{x}_0(t)$ počáteční úlohy (17) omezené pro každé $t \geq \tau$, tj. existuje $k > 0$ tak, že $\|\mathbf{x}_0(t)\| < k$.*

Věta 3.4. *Triviální řešení $\mathbf{x}(t) = \mathbf{o}$ systému (16) je ljapunovsky nestabilní právě tehdy, když existuje $t_1 > \tau$ tak, že pro všechna $t \geq t_1$, není řešení $\mathbf{x}_0(t)$ počáteční úlohy (17) omezené.*

Věta 3.5. *Triviální řešení $\mathbf{x}(t) = \mathbf{o}$ systému (16) je stejnoměrně ljapunovsky stabilní právě tehdy, když existuje $k > 0$ tak, že pro všechna $\tau \leq r \leq t < \infty$ platí*

$$\left\|\mathbf{U}(t)\mathbf{U}(r)^{-1}\right\| \leq k.$$

Věta 3.6. *Triviální řešení* $\mathbf{x}(t) = \mathbf{o}$ *systému (16) je globálně asymptoticky ljapunovsky stabilní právě tehdy, když řešení* $\mathbf{x}_0(t)$ *počáteční úlohy (17) splňuje podmínku*

$$\lim_{t\to\infty} \|\mathbf{x}_0(t)\| = 0.$$

Věta 3.7. *Triviální řešení* $\mathbf{x}(t) = \mathbf{o}$ *systému (16) je exponenciálně stabilní právě tehdy, když existují konstanty* $k > 0$, $\alpha > 0$ *tak, že pro všechna* $\tau \leq r \leq t < \infty$ *platí nerovnost*

$$\left\|\mathbf{U}(t)\mathbf{U}(r)^{-1}\right\| \leq ke^{-\alpha(t-r)}.$$

Poznámka 3.8. Implikace mezi jednotlivými typy stability zde platí stejně jako v předchozí kapitole.

Následující věta se vyjadřuje k autonomnímu lineárnímu systému obyčejných diferenciálních rovnic, kterým se budeme zabývat v kapitole 4. Tato věta je zde uvedena proto, že ji využijeme v části této práce nazvané "Metoda linearizace nelineárních systémů", která je uvedena v rámci této kapitoly.

Věta 3.9. *Triviální řešení* $\mathbf{x}(t) = \mathbf{o}$ *systému (16) s konstantní maticí* $\mathbf{A}$ *je stejnoměrně ljapunovsky stabilní právě tehdy, když všechny kořeny charakteristické rovnice matice* $\mathbf{A}$*, tj.* $a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$*, mají nekladnou reálnou část, přičemž každý kořen, který má nulovou reálnou část, má násobnost jedna.*

Triviální řešení $\mathbf{x}(t) = \mathbf{o}$ *systému (16) s konstantní maticí* $\mathbf{A}$ *je stejnoměrně asymptoticky ljapunovsky stabilní právě tehdy, když všechny kořeny charakteristické rovnice této matice mají zápornou reálnou část.*

Triviální řešení $\mathbf{x}(t) = \mathbf{o}$ *systému (16) s konstantní maticí* $\mathbf{A}$ *je ljapunovsky nestabilní právě tehdy, když alespoň jeden kořen charakteristické rovnice této matice má kladnou reálnou část.*

Předešlou větu doplníme Hurwitzovým kritériem, které udává nutnou a postačující podmínku proto, aby všechny kořeny charakteristické rovnice konstantní matice $\mathbf{A}$ byly záporné.

Věta 3.10 (Hurwitzovo kritérium)**.** *Všechny kořeny charakteristické rovnice (polynomu) konstantní matice* $\mathbf{A}$

$$f(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0, \tag{18}$$

kde $n \geq 1$, $a_0 > 0$, $a_n \neq 0$, jsou záporné právě tehdy, když všechny hlavní diagonální minory matice

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \cdots & 0 \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & \cdots & a_n \end{pmatrix} \tag{19}$$

jsou kladné. Pokud se v některém z hlavních diagonálních minorů vyskytne prvek a_m s indexem $m > n$ nebo $m < 0$, položíme $a_m = 0$. Každý Polynom (18), jehož všechny nulové body mají záporné reálné části nazýváme hurwitzovský a matici (19) nazýváme Hurwitzovou maticí.

Poznámka 3.11. Zda-li všechny nulové body polynomu (18) mají záporné reálné části či nikoliv, můžeme rozhodnout také pomocí Michajlovova kritéria, které využívá rozložení nulových bodů tohoto polynomu v komplexní rovině. Tímto kritériem se zde zabývat nebudeme, nýbrž je uvedeno v [9]

Důsledek 3.12. *V prostoru $\mathbb{R}^2$ uvažujme lineární systém obyčejných diferenciálních rovnic s konstantní maticí* $\mathbf{A}$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2. \end{aligned} \tag{20}$$

Pak triviální řešení $\mathbf{x}(t) = \mathbf{o}$ systému (20) je asymptoticky stabilní právě tehdy, když

$$a_{11} + a_{22} < 0, \quad a_{11}a_{22} > a_{12}a_{21}.$$

Důkaz. Charakteristická rovnice matice $\mathbf{A}$ je tvaru

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0. \tag{21}$$

Položme $a_1 = -(a_{11} + a_{22}), a_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, pak charakteristická rovnice matice $\mathbf{A}$ (21) přechází na tvar

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0. \tag{22}$$

Aby byla splněna podmínka asymptotické stability triviálního řešení $\mathbf{x}(t) = \mathbf{o}$ systému (20), musejí být reálné kořeny λ_1, λ_2 charakteristické rovnice matice

A (22) záporné neboli musejí být všechny hlavní diagonální minory matice $\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$ kladné, tj. musí platit

$$\det a_1 > 0, \quad \det \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} > 0.$$

Z předchozích nerovností plyne, že $a_1 > 0$, $a_2 > 0$. Podmínka asymptotické stability triviálního řešení $\mathbf{x}(t) = \mathbf{o}$ systému (20) je tedy splněna pro

$$a_{11} + a_{22} < 0, \quad a_{11}a_{22} > a_{12}a_{21}.$$

Z předchozích úvah je zřejmé, že je mnohem snažší vyšetřovat stabilitu triviálního řešení systému lineárních obyčejných diferenciálních rovnic než stabilitu triviálního řešení systému nelineárních obyčejných diferenciálních rovnic. Proto uveďme metodu, kterou je za určitých předpokladů možné systém nelineárních obyčejných diferenciálních rovnic částečně linearizovat a pomocí dále uvedených vět rozhodnout o stabilitě triviálního řešení takovéhoto systému.

3.2 Metoda linearizace nelineárních systémů

Uvažujme dříve uvedený systém nelineárních obyčejných diferenciálních rovnic (5)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(t, \mathbf{x})$$

a předpokládejme, že vektorová funkce $\mathbf{g}$ je dvakrát spojitě diferencovatelná na nějakém okolí O počátku souřadnic ($O \subset D' = \{[t, \mathbf{x}] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n,\ t \in \langle t_0, \infty), \|\mathbf{x}\| < b\}$, kde $b \in \mathbb{R}^+$). Pak pomocí Taylorovy věty máme

$$\mathbf{g}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{g}(t, \mathbf{o}) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{g}(t, \mathbf{o})}{\partial x_j} x_j + \mathbf{R}(t, \mathbf{x}),$$

kde vektorová funkce $\mathbf{R}(t, \mathbf{x})$ je zbytek Taylorova polynomu. Buďte

$$a_{ij}(t) = \frac{\partial g_i(t, 0, 0, \ldots, 0)}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n,$$

prvky maticové funkce $\mathbf{A}(t)$, potom $\mathbf{g}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{R}(t, \mathbf{x})$. Dostali jsme tedy systém

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{R}(t, \mathbf{x}), \tag{23}$$

který se nazývá *systém v prvním přiblížení*. Připomeňme, že maticová funkce $\mathbf{A}(t)$ je spojitá na množině $D' = \{[t, \mathbf{x}] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n,\ t \in \langle t_0, \infty), \|\mathbf{x}\| < b\}$, kde $b \in \mathbb{R}^+$ a navíc předpokládejme, že je na množině D' spojitá také vektorová funkce $\mathbf{R}(t, \mathbf{x})$ a že platí $\mathbf{R}(t, \mathbf{o}) = \mathbf{o}$. Jelikož tuto metodu nebudeme v této práci dále používat, uvedeme pouze na ukázku dvě věty, a sice větu vyjadřující se k stejnoměrné stabilitě triviálního řešení $\mathbf{x}(t) = \mathbf{o}$ systému (23) a větu, která se týká stability, asymptotické stability a nestability triviálního řešení $\mathbf{x}(t) = \mathbf{o}$ systému (23) v případě, že matice $\mathbf{A}$ je konstantní.

Věta 3.13. *Předpokládejme, že pro všechna $\tau \leq r \leq t < \infty$ platí*

$$\left\|\mathbf{U}(t)\mathbf{U}(r)^{-1}\right\| \leq k$$

a dále nechť $\|\mathbf{R}(t, \mathbf{x})\| \leq \vartheta(t)\,\|\mathbf{x}\|$, kde $[t, \mathbf{x}] \in D'$ a ϑ je nezáporná spojitá funkce taková, že

$$\int_\tau^\infty \vartheta(r)dr < \infty$$

Potom triviální řešení $\mathbf{x}(t) = \mathbf{o}$ systému (23) je stejnoměrně stabilní.

Věta 3.14. *Nechť systém (23) je systémem v prvním přiblížení s konstantní maticí $\mathbf{A}$, přičemž vektorová funkce $\mathbf{R}(t, \mathbf{x})$ splňuje pro všechna $t \geq t_0$ podmínku*

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \to 0} \frac{\|\mathbf{R}(t, \mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|} = 0, \qquad \textit{pak}$$

(i) *triviální řešení $\mathbf{x}(t) = \mathbf{o}$ systému (23) je asymptoticky ljapunovsky stabilní právě tehdy, když všechny kořeny charakteristické rovnice matice $\mathbf{A}$ mají zápornou reálnou část.*

(i) *triviální řešení $\mathbf{x}(t) = \mathbf{o}$ systému (23) je ljapunovsky nestabilní právě tehdy, když alespoň jeden kořen charakteristické rovnice matice $\mathbf{A}$ má kladnou reálnou část.*

Tímto končí druhá kapitola a nyní se přesuňme ke studiu stability řešení autonomních systémů obyčejných diferenciálních rovnic.

4 Autonomní systémy a jejich stabilita

4.1 Základní pojmy

Systém obyčejných diferenciálních rovnic nazveme *autonomním systémem*, pokud na pravé straně tohoto systému nevyskytuje explicitně proměnná t.

Autonomní systém obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu budeme tedy uvažovat ve tvaru

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}), \tag{24}$$

kde vektorová funkce $\mathbf{f}$ je definovaná na nějaké oblasti $\mathbf{\Omega}$ v euklidovském n-rozměrném prostoru $\mathbb{R}^n$. Dále budeme předpokládat, že je tato funkce spojitá v oblasti $\mathbf{\Omega}$ a také, že počáteční (Cauchyova) úloha je pro systém (24) jednoznačně řešitelná. V této kapitole se budeme zabývat vyšetřováním stability singulárního bodu $\mathbf{y}^*$ systému (24).

Definice 4.1. Konstantní vektor $\mathbf{y}^* = (y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*)$ se nazývá *singulární bod* (rovnovážný bod, stacionární bod, klidový stav, ekvilibrium), jestliže $\mathbf{f}(\mathbf{y}^*) = \mathbf{o}$.

Abychom následující úvahy zjednodušili, převedeme systém (24) na nový systém, jehož singulárním bodem bude nulový vektor $\mathbf{o}$, tj. počátek souřadnic. Buď $\mathbf{y}(t)$ řešením systému (24), pak pomocí substituce

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}^* \tag{25}$$

dostaneme vztah

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{y}^*).$$

Označíme-li $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x} + \mathbf{y}^*)$, pak zřejmě $\mathbf{g}(\mathbf{o}) = \mathbf{o}$ a dostáváme tak nový autonomní systém obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(\mathbf{x}). \tag{26}$$

Výsledky, které při vyšetřování stability singulárního bodu $\mathbf{o}$ systému (26) získáme, lze pomocí substituce (25) převést zpět na singulární bod $\mathbf{y}^*$ systému (24). V následujících úvahách se tedy pro jednoduchost omezíme pouze na zkoumání stability singulárního bodu $\mathbf{o}$ systému (26), přičemž budeme předpokládat, že vektorová funkce $\mathbf{g}$ je spojitá na množině $D^* = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{x}\| <$

$b\}$, kde $b \in \mathbb{R}^n$, a že parciální derivace $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, jsou na množině D^* omezené. Tyto předpoklady zaručují existenci a jednoznačnost řešení $\mathbf{x}_0(t)$ počáteční (Cauchyovy) úlohy

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x}(\tau) = \boldsymbol{\gamma} \tag{27}$$

pro všechna $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^n$. Jelikož je systém (26) autonomní, můžeme bez újmy na obecnosti položit $\tau = 0$. Počáteční úloha (27) je pak tvaru

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x}(0) = \boldsymbol{\gamma}. \tag{28}$$

V této kapitole budou kromě řešení $\mathbf{x}_0(t)$ počáteční úlohy (28) vystupovat také trajektorie řešení systému (26) procházející bodem $\boldsymbol{\gamma}$. Tyto trajektorie řešení budeme chápat jako průměty grafů řešení $\mathbf{x}_0(t)$ počáteční úlohy (28) z prostoru $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ do tzv. *fázového* nebo také *stavového prostoru* $\mathbb{R}^n$, tj. prostor hodnot řešení $\mathbf{x}_0(t)$ počáteční úlohy (28). Trajektorie řešení systému (26) procházející bodem $\boldsymbol{\gamma}$ je tedy křivka definovaná předpisem

$$C(\boldsymbol{\gamma}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} = \mathbf{x}_0(t), t \in \mathbb{R}\}.$$

V dalším textu budeme také uvažovat kladné polotrajektorie řešení systému (26) vycházející z bodu $\boldsymbol{\gamma}$, tj. křivky

$$C(\boldsymbol{\gamma}^+) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} = \mathbf{x}_0(t), t \geq 0\}$$

a záporné polotrajektorie řešení systému (26) vycházející z bodu $\boldsymbol{\gamma}$, tj. křivky

$$C(\boldsymbol{\gamma}^-) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} = \mathbf{x}_0(t), t \leq 0\}.$$

Věta 4.2. *V případě autonomních systémů mohou nastat pouze tři typy trajektorií řešení systému (26). A sice*

(i) *jednobodové trajektorie (singulární body) odpovídající konstantním řešením,*

(ii) *uzavřené trajektorie (cykly) odpovídající nekonstantním periodickým řešením,*

(iii) *trajektorie, jež samy sebe neprotínají.*

Protože je křivka $C(\boldsymbol{\gamma})$ dána parametricky rovnicí $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0(t)$, pak z předpokladu existence a jednoznačnosti řešení $\mathbf{x}_0(t)$ počáteční úlohy (28) plyne, že každým bodem $\boldsymbol{\gamma}$ prochází právě jedna trajektorie řešení systému (26). Stejné tvrzení platí v případě kladné, respektive záporné polotrajektorie řešení systému (26). Nyní zavedeme jednotlivé typy ljapunovské stability pro obecně autonomní nelineární systém (26). Následující zavedení jsou pouhým přeformulováním definic uvedených v kapitole 2 s tím rozdílem, že zde namísto stability triviálního řešení $\mathbf{x}(t) = 0$ systému (26) budeme studovat stabilitu singulárního bodu $\mathbf{o}$ tohoto systému, přičemž je třeba si uvědomit, že tento singulární bod je průmětem grafu triviálního řešení $\mathbf{x}(t) = 0$ systému (26) z prostoru $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ do fázového prostoru $\mathbb{R}^n$.

Definice 4.3. O singulárním bodu $\mathbf{o}$ systému (26) řekneme, že je *stabilní* (Podle Ljapunova), když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že každá kladná polotrajektorie řešení systému (26), která vychází z nějakého bodu $\boldsymbol{\gamma}$, přičemž bod $\boldsymbol{\gamma}$ je částí δ-okolí bodu $\mathbf{o}$, leží celá v ε-okolí tohoto bodu $\mathbf{o}$.

Definice 4.4. O singulárním bodu $\mathbf{o}$ systému (26) řekneme, že je *nestabilní* (Podle Ljapunova), když existuje $\varepsilon > 0$ tak, že pro každé $\delta > 0$ existuje bod $\boldsymbol{\gamma}$, který je částí δ-okolí bodu $\mathbf{o}$ takový, že každá kladná polotrajektorie řešení systému (26) vycházející z tohoto bodu $\boldsymbol{\gamma}$ neleží celá v ε-okolí bodu $\mathbf{o}$.

Definice 4.5. O singulárním bodu $\mathbf{o}$ systému (26) řekneme, že je *asymptoticky stabilní* (Podle Ljapunova), když

(i) je stabilní (Podle Ljapunova),

(ii) existuje $\beta > 0$ takové, že každá kladná polotrajektorie řešení systému (26), která vychází z nějakého bodu $\boldsymbol{\gamma}$ ležícího v β-okolí bodu $\mathbf{o}$, konverguje pro $t \to +\infty$ k bodu $\mathbf{o}$.

Poznámka 4.6. Je-li singulární bod $\mathbf{o}$ autonomního systému (26) stabilní, pak je také stejnoměrně stabilní a podobně - je-li asymptoticky stabilní, pak je také stejnoměrně asymptoticky stabilní. Připomeňme, že toto tvrzení pro neautonomní systémy obecně neplatí.

Definice 4.7. Nechť $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0(t), t \geq 0$, je parametrická rovnice kladné polotrajektorie řešení systému (26) vycházející z bodu $\boldsymbol{\gamma}$, pak o singulárním bodu $\mathbf{o}$ řekneme, že je *globálně asymptoticky stabilní* (Podle Ljapunova) právě tehdy, když

(i) je asymptoticky stabilní (Podle Ljapunova),

(ii) pro každý bod $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^n$ platí $\lim_{t \to +\infty} \mathbf{x}_0(t) = \mathbf{o}$.

Následující část bude založena především na partiích teorie obyčejných diferenciálních rovnic uvedených v [3], [4], [7].

4.2 Klasifikace singulárních bodů v rovině

V tomto odstavci budeme studovat chování trajektorií řešení autonomních systémů obyčejných diferenciálních rovnic v okolí jejich singulárních bodů a následně určovat, zda-li jsou tyto singulární body stabilní či nikoliv. Pro snadnou představu a možnost interpretace trajektorií pomocí grafů budeme další úvahy provádět v prostoru $\mathbb{R}^2$ (v rovině). Uvažujme tedy autonomní systém dvou obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu zapsaný ve vektorovém tvaru

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{29}$$

a předpokládejme existenci a jednoznačnost každého řešení počáteční úlohy pro systém (29). Dále předpokládejme, že platí $\mathbf{f}(\mathbf{o}) = \mathbf{o}$. V následující definici rozlišíme jednotlivé typy singulárního bodu $\mathbf{o}$ systému (29).

Definice 4.8. Singulární bod $\mathbf{o}$ systému (29) se nazývá

- *střed*, pokud každým bodem $\boldsymbol{\gamma}$ ryzího okolí bodu $\mathbf{o}$ prochází uzavřená trajektorie řešení systému (29), která obsahuje ve svém vnitřku bod $\mathbf{o}$,

- *uzel*, pokud každým bodem $\boldsymbol{\gamma}$ ryzího okolí bodu $\mathbf{o}$ prochází uzavřená trajektorie řešení systému (29), která sama sebe neprotíná a pro $t \to \infty$, respektive $t \to -\infty$ se limitně blíží k bodu $\mathbf{o}$, přičemž velikost orientovaného úhlu, jež je svírán kladnou částí osy x_1 a tečným vektorem této trajektorie, má konečnou limitu. V případě, kdy zmíněná trajektorie konverguje k bodu $\mathbf{o}$ pro $t \to \infty$, mluvíme o *přitažlivém uzlu* a naopak - jestliže konverguje k bodu $\mathbf{o}$ pro $t \to -\infty$, mluvíme o *odpudivém uzlu*,

- *ohnisko*, pokud každým bodem $\boldsymbol{\gamma}$ ryzího okolí bodu $\mathbf{o}$ prochází uzavřená trajektorie řešení systému (29), která sama sebe neprotíná a pro $t \to \infty$, respektive $t \to -\infty$ se limitně blíží k bodu $\mathbf{o}$ a to tak, že velikost orientovaného úhlu, jež svírá kladná část osy x_1 s tečným vektorem této trajektorie, má nevlastní limitu. V případě, kdy zmíněná trajektorie

konverguje k bodu $\mathbf{o}$ pro $t \to \infty$, mluvíme o *přitažlivém ohnisku* a naopak - jestliže konverguje k bodu $\mathbf{o}$ pro $t \to -\infty$, mluvíme o *odpudivém ohnisku*,

- *sedlo*, pokud v ryzím okolí bodu $\mathbf{o}$ existuje pouze spočetně mnoho trajektorií řešení systému (29), které procházejí body $\boldsymbol{\gamma}$ tak, že samy sebe neprotínají a pro $t \to \infty$, respektive $t \to -\infty$ konvergují k bodu $\mathbf{o}$.

Na základě definic uvedených v předchozí části této kapitoly můžeme formulovat větu, vyjadřující se k typu stability singulárního bodu $\mathbf{o}$ systému (29) vzhledem ke klasifikaci tohoto singulárního bodu, jež je náplní předchozí definice.

Věta 4.9. *Singulární bod* $\mathbf{o}$ *systému (29) je*

(i) *stabilní, pokud je středem,*

(ii) *asymptoticky stabilní, pokud je přitažlivým uzlem nebo přitažlivým ohniskem,*

(iii) *nestabilní, pokud je odpudivým uzlem nebo odpudivým ohniskem nebo sedlem.*

Z druhé kapitoly víme, že lineární systémy obyčejných diferenciálních rovnic se z hlediska stability mnohem lépe vyšetřují než systémy, které lineární nejsou. Tohoto poznatku zde využijeme a budeme dále uvažovat autonomní lineární systém dvou obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu ve vektorovém tvaru

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \tag{30}$$

kde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ je konstantní matice typu 2×2. Připomeňme, že analýza stability triviálního řešení $\mathbf{x}(t) = \mathbf{o}$ obecného autonomního lineárního systému obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu v prostoru $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ byla provedena na konci části 3.1 této práce, přičemž nutná a postačující podmínka asymptotické stability pro náš konkrétní systém (30) je uvedena v důsledku 3.12. Dále rozlišíme případ, kdy systém (30) má právě jeden singulární bod, a sice bod $\mathbf{o}$ a případ, kdy tento systém má nekonečně mnoho singulárních bodů.

Věta 4.10. *Bod* $\mathbf{o} = (0, 0, \ldots, 0)$ *je jediným singulárním bodem systému (30) právě tehdy, když* $\det \mathbf{A} \neq 0$*, tj. právě tehdy, když* 0 *není kořenem charakteristické rovnice matice* $\mathbf{A}$

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0. \tag{31}$$

Jestliže $\det \mathbf{A} = 0$*, pak systém (30) má nekonečně mnoho singulárních bodů.*

Charakteristická rovnice matice $\mathbf{A}$ (31) má kořeny

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}).$$

V závislosti na těchto kořenech můžeme určit o jaký typ singulárního bodu $\mathbf{o}$ systému (30) se jedná a tedy rozhodnout o jeho stabilitě. Nejprve předpokládejme, že $\det \mathbf{A} \neq 0$.

Věta 4.11. *Uvažujme systém (30) s charakteristickou rovnicí matice* $\mathbf{A}$ *(31), která má kořeny* λ_1, λ_2*. Pak platí následující tvrzení:*

- *Jsou-li oba kořeny* λ_1, λ_2 *reálné a záporné, tj.* $\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0$*, pak singulární bod* $\mathbf{o}$ *je přitažlivý uzel (stabilní uzel).*

- *Jsou-li oba kořeny* λ_1, λ_2 *reálné a kladné, tj.* $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$*, pak singulární bod* $\mathbf{o}$ *je odpudivý uzel (nestabilní uzel).*

- *Jsou-li oba kořeny* λ_1, λ_2 *reálné, přičemž jeden je záporný a druhý kladný, tj.* $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$*, pak singulární bod* $\mathbf{o}$ *je sedlo.*

- *Jsou-li kořeny* λ_1, λ_2 *komplexně sdružené, přičemž mají zápornou reálnou část, tj.* $\lambda_{1,2} = \mu \pm i\nu$*, kde* $\mu < 0, \nu \neq 0$*, pak singulární bod* $\mathbf{o}$ *je přitažlivé ohnisko (stabilní ohnisko).*

- *Jsou-li kořeny* λ_1, λ_2 *komplexně sdružené, přičemž mají kladnou reálnou část, tj.* $\lambda_{1,2} = \mu \pm i\nu$*, kde* $\mu > 0, \nu \neq 0$*, pak singulární bod* $\mathbf{o}$ *je odpudivé ohnisko (nestabilní ohnisko).*

- *Jsou-li kořeny* λ_1, λ_2 *ryze komplexně sdružené, tj.* $\lambda_{1,2} = \pm i\nu$*, kde* $\nu \neq 0$*, pak singulární bod* $\mathbf{o}$ *je střed.*

V následující části tohoto odstavce si tyto poznatky ukážeme na konkrétních příkladech, kde u každého příkladu budeme analyzovat singulární bod, jeho stabilitu a provedeme diskuzi řešení daného systému. Nakonec vykreslíme tzv. *fázový portrét řešení*, tj. množinu všech trajektorií řešení daného systému. K tomuto účelu byla v programovém prostředí Maple 12 vytvořena aplikace s názvem `aplfazovyportret.mw`, která je přílohou této práce. Protože uvedených trajektorií je nekonečně mnoho a vyplňují celý fázový prostor $\mathbb{R}^2$, budeme vykreslovat jen některé z nich. Šipky, které vystupují na následujících obrázcích značí tok parametru t (času).

Příklad 4.12. Uvažujme autonomní lineární systém

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -3x_1 + 2x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - 2x_2. \end{aligned} \tag{32}$$

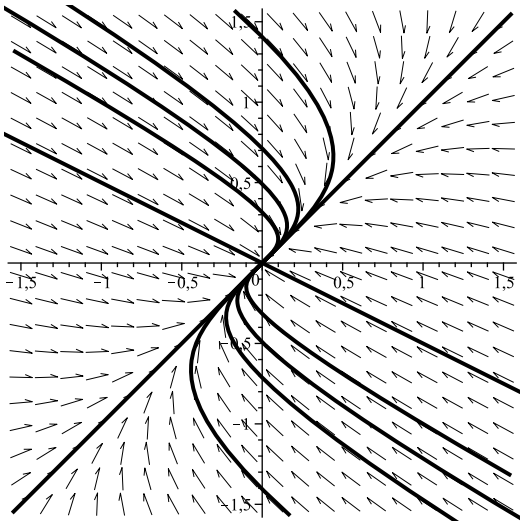
Matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ je zřejmě regulární, tzn. $\det \mathbf{A} \neq 0$ a bod $\mathbf{o}$ je tedy jediným singulárním bodem systému (32). Charakteristická rovnice matice $\mathbf{A}$ je tvaru

$$\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0.$$

Z uvedené rovnice plyne, že $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -4$. Protože jsou oba kořeny reálné a záporné, je podle věty 4.11 singulární bod $\mathbf{o}$ (32) přitažlivým uzlem a je tedy asymptoticky stabilní. Podívejme se nyní na obecné řešení systému (32), které je určeno následujícím vztahem

$$\mathbf{x}(t) = (-2C_1\mathrm{e}^{-4t} + C_2\mathrm{e}^{-t}, C_1\mathrm{e}^{-4t} + C_2\mathrm{e}^{-t})^T, \quad C_1, C_2, t \in \mathbb{R}.$$

Hned vidíme, že platí $\lim\limits_{t\to\infty} \|\mathbf{x}(t)\| = 0$. Tato podmínka zaručuje, že každá trajektorie řešení $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ systému (32) konverguje pro $t \to \infty$ k bodu $\mathbf{o}$. Z obrázku 1 je patrné, že orientovaný úhel, jež svírá kladná část osy x_1 s tečným vektorem podél každé trajektorie řešení systému (32) má pro $t \to \infty$ konečnou limitu. Tato limita je dána orientovaným úhlem příslušné polopřímkové trajektorie, která leží na jedné ze dvou přímek, jejichž rovnice lze získat volbou $C_1 = 0, C_2 \neq 0$ a $C_1 \neq 0, C_2 = 0$ v obecném řešení systému (32). Tímto jsme ověřili vlastnosti, jež jsme o singulárním bodu $\mathbf{o}$ systému (32) prohlásili. Fázový portrét řešení systému (32) je znázorněn na obrázku 1.



Obrázek 1: Fázový portrét řešení systému (32) - přitažlivý uzel

Příklad 4.13. Uvažujme autonomní lineární systém

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 3x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -4x_1 - x_2. \end{aligned} \tag{33}$$

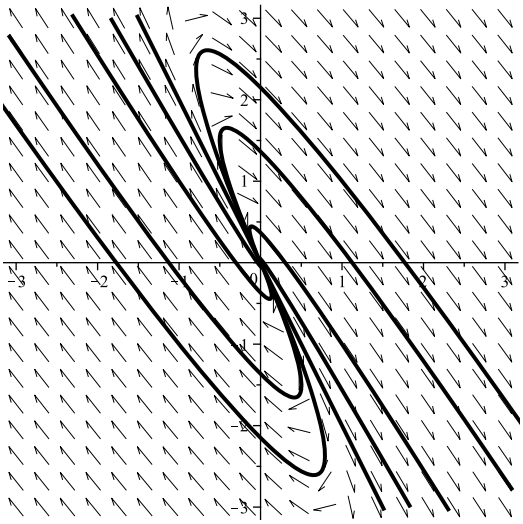
Matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$ je regulární a bod $\mathbf{o}$ je tedy jediným singulárním bodem systému (33). Charakteristická rovnice matice $\mathbf{A}$ má tvar

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0.$$

Z uvedené rovnice plyne, že $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Jelikož se jedná o reálné a kladné kořeny, tak na základě věty 4.11 můžeme říci, že singulární bod $\mathbf{o}$ systému (33) je odpudivým uzlem a tudíž je nestabilní. Nyní si ukažme souvislost mezi obecným řešením systému (33) a klasifikací singulárního bodu $\mathbf{o}$ tohoto systému. Obecné řešení systému (33) je dáno vztahem

$$\mathbf{x}(t) = (\mathrm{e}^t(C_1 + C_2 t), -\mathrm{e}^t(2C_1 + 2C_2 t - C_2))^T, \quad C_1, C_2, t \in \mathbb{R}.$$

Vidíme, že platí $\lim\limits_{t \to -\infty} \|\mathbf{x}(t)\| = 0$. Tato podmínka zaručuje, že každá trajektorie řešení $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ systému (33) se pro $t \to -\infty$ limitně blíží k bodu $\mathbf{o}$



Obrázek 2: Fázový portrét řešení systému (33) - odpudivý uzel

(pro $t \to \infty$ se od bodu $\mathbf{o}$ vzdalují), což vypovídá o nestabilitě singulárního bodu $\mathbf{o}$ systému (33). Na obrázku 2 vystupuje jako trajektorie řešení systému (33) mimo jiné také přímka. Na rozdíl od předchozího příkladu je zde tato přímka právě jedna a její parametrické vyjádření lze získat volbou konstant C_1, C_2 vystupujících v rovnici obecného řešení systému (33) a to tak, že $C_1 \neq 0, C_2 = 0$. Z obrázku 2 je patrné, že velikost orientovaného úhlu tečného vektoru podél každé trajektorie řešení systému (33) od kladné části osy x_1 má pro $t \to -\infty$ konečnou limitu (je omezena uvedenou přímkou). Tato úvaha spolu s podmínkou odpudivosti singulárního bodu $\mathbf{o}$ systému (33), tj. $\lim_{t\to-\infty} \|\mathbf{x}(t)\| = 0$, poukazuje na zmíněnou klasifikaci tohoto singulárního bodu a tedy i na jeho nestabilitu.

Příklad 4.14. Uvažujme autonomní lineární systém

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{1}{2}x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 &= -2x_1 - \frac{2}{3}x_2. \end{aligned} \tag{34}$$

Matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ -2 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$ je regulární a bod $\mathbf{o}$ je tedy jediným sin-

gulárním bodem systému (34). Charakteristická rovnice matice $\mathbf{A}$ má tvar

$$6\lambda^2 + 7\lambda - 10 = 0.$$

Řešením této rovnice dostáváme kořeny $\lambda_1 = \frac{5}{6}, \lambda_2 = -2$ a vidíme, že oba kořeny jsou reálné, přičemž jeden je kladný a druhý záporný. Nyní můžeme podle věty 4.11 říci, že singulární bod $\mathbf{o}$ systému (34) je sedlem a tudíž je nestabilní. Tato skutečnost vyplývá také z obecného řešení systému (34), které je dáno vztahem

$$\mathbf{x}(t) = (C_1 \mathrm{e}^{-2t} + C_2 \mathrm{e}^{\frac{5}{6}t}, \frac{3}{2} C_1 \mathrm{e}^{-2t} - \frac{4}{3} C_2 \mathrm{e}^{\frac{5}{6}t})^T, \quad C_1, C_2, t \in \mathbb{R}.$$

Nejprve uvažujme situaci, kdy $C_1 \neq 0, C_2 \neq 0$, pak každá trajektorie řešení systému (34) se pro $t \to \pm\infty$ vzdaluje od bodu $\mathbf{o}$. Dále pokud $C_1 \neq 0, C_2 = 0$, respektive $C_1 = 0, C_2 \neq 0$, pak trajektorií řešení systému (34) je přímka, která pro $t \to +\infty$, respektive $t \to -\infty$ konverguje k bodu $\mathbf{o}$. Vidíme tedy, že trajektorie řešení systému (34), pro něž platí $C_1 \neq 0, C_2 \neq 0$, jsou křivky, které mají pro $t \to +\infty$, respektive $t \to -\infty$ asymptotu přímku vyhovující volbě konstant $C_1 = 0, C_2 \neq 0$, respektive $C_1 \neq 0, C_2 = 0$. Z provedených úvah vyplývá, že existují jak trajektorie, které se pro $t \to +\infty$ blíží k bodu $\mathbf{o}$, tak trajektorie, které se pro $t \to +\infty$ vzdalují od bodu $\mathbf{o}$, čímž jsme ukázali, že singulární bod $\mathbf{o}$ systému (34) je sedlem. Grafická interpretace je provedena na obrázku 3.

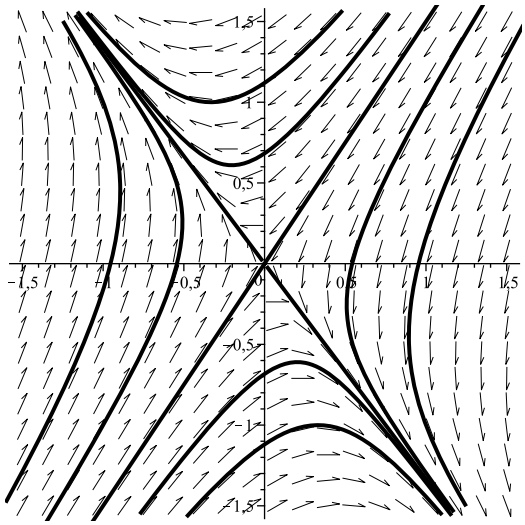
Příklad 4.15. Uvažujme autonomní lineární systém

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -3x_1 - 5x_2 \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 - x_2. \end{aligned} \tag{35}$$

Matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ je regulární a bod $\mathbf{o}$ je tedy jediným singulárním bodem systému (35). Charakteristická rovnice matice $\mathbf{A}$ má tvar

$$\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0.$$

Řešením této rovnice dostáváme dva komplexně sdružené kořeny se zápornou reálnou částí, a sice $\lambda_{1,2} = -2 \pm 3\mathrm{i}$. Tato skutečnost nám podle věty 4.11 říká, že singulární bod $\mathbf{o}$ systému (35) je přitažlivým ohniskem, což znamená, že



Obrázek 3: Fázový portrét řešení systému (34) - sedlo

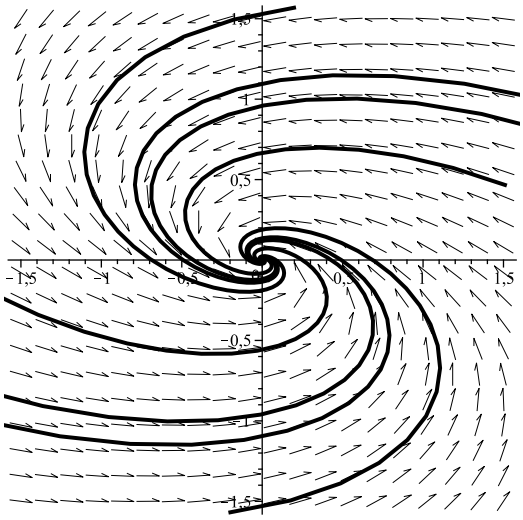
je asymptoticky stabilní. Dále uvažujme obecné řešení systému (35), které je ve tvaru

$$\mathbf{x}(t) = (\mathrm{e}^{-2t}(C_1 \sin(3t) + C_2 \cos(3t)),\\ -\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-2t}((C_1 - 3C_2)\sin(3t) + (3C_1 + C_2)\cos(3t)))^T, \quad C_1, C_2, t \in \mathbb{R}.$$

Protože funkce $\sin(3t)$, $\cos(3t)$ jsou omezené a funkce e^{-2t} konverguje pro $t \to \infty$ k nule, platí, že $\lim_{t\to\infty} \|\mathbf{x}(t)\| = 0$. Tímto jsme ukázali, že každá trajektorie řešení $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ systému (35) se pro $t \to \infty$ limitně blíží k bodu $\mathbf{o}$. Na obrázku 4 vidíme, že orientovaný úhel, který svírá kladná část osy x_1 s tečným vektorem každé trajektorie řešení systému (35), pro $t \to \infty$ neomezeně roste. Pomocí předešlých úvah jsme na základě obecného řešení systému (35) shrnuli vlastnosti singulárního bodu $\mathbf{o}$ systému (35) a sice, že tento bod je přitažlivým ohniskem a je asymptoticky stabilní.

Příklad 4.16. Uvažujme autonomní lineární systém

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 3x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -4x_1 + 3x_2. \end{aligned} \tag{36}$$



Obrázek 4: Fázový portrét řešení systému (35) - přitažlivé ohnisko

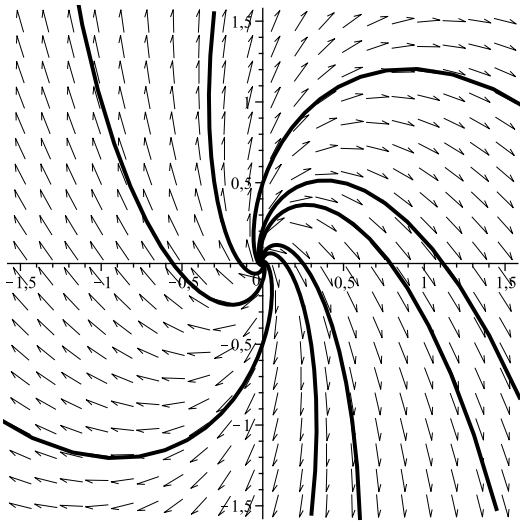
Matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ je regulární a bod $\mathbf{o}$ je tedy jediným singulárním bodem systému (36). Charakteristická rovnice matice $\mathbf{A}$ je tvaru

$$\lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0.$$

Řešením této rovnice získáváme dva komplexně sdružené kořeny s kladnou reálnou částí $\lambda_{1,2} = 3 \pm 2\mathrm{i}$. Na základě věty 4.11 jsme ukázali, že singulární bod $\mathbf{o}$ systému (36) je odpudivým ohniskem a tudíž je nestabilní. Rozhodnout o stabilitě či nestabilitě singulárního bodu $\mathbf{o}$ systému (36) můžeme také z obecného řešení systému (36), které má tvar

$$\mathbf{x}(t) = (\mathrm{e}^{3t}(C_1 \sin(2t) + C_2 \cos(2t)), 2\mathrm{e}^{3t}(C_1 \cos(2t) - C_2 \sin(2t)))^T,$$

kde $C_1, C_2, t \in \mathbb{R}$. Jelikož funkce $\sin(2t)$, $\cos(2t)$ jsou omezené a funkce e^{3t} konverguje pro $t \to -\infty$ k nule, platí, že $\lim_{t \to -\infty} \|\mathbf{x}(t)\| = 0$. Tato podmínka zaručuje, že každá trajektorie řešení $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ systému (36) se pro $t \to \infty$ vzdaluje od bodu $\mathbf{o}$ a tento bod je tedy nestabilní. Na obrázku 5 vidíme, že orientovaný úhel sevřený kladnou částí osy x_1 a tečným vektorem každé trajektorie řešení systému (36) pro $t \to -\infty$ neomezeně roste, což z hlediska klasifikace singulárního bodu $\mathbf{o}$ systému (36) poukazuje na odpudivý



Obrázek 5: Fázový portrét řešení systému (36) - odpudivé ohnisko

uzel. Těmito úvahami jsme shrnuli a ověřili vyřčené závěry týkající se tohoto singulárního bodu s využitím obecného řešení systému (36).

Příklad 4.17. Uvažujme autonomní lineární systém

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 - x_2. \end{aligned} \tag{37}$$

Matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ je zřejmě regulární a bod $\mathbf{o}$ je tudíž jediným singulárním bodem systému (37). Charakteristická rovnice matice $\mathbf{A}$ má tvar

$$\lambda^2 + 1 = 0.$$

Z uvedené rovnice plyne, že $\lambda_{1,2} = \pm \mathrm{i}$, což znamená, že tyto kořeny jsou ryze komplexně sdružené a singulární bod $\mathbf{o}$ systému (37) je podle věty 4.11 středem a tudíž je stabilní. Trajektorie řešení systému (37) jsou uzavřené křivky a body, které na nich leží, rotují při $t \to \infty$ okolo tohoto singulárního bodu. Pomocí obecného řešení systému (37), které je tvaru

$$\mathbf{x}(t) = (C_1 \sin t + C_2 \cos t, (C_2 - C_1)\cos t + (C_1 + C_2)\sin t)^T, \quad C_1, C_2, t \in \mathbb{R}.$$

nyní určíme, o jaký typ uzavřené křivky se jedná. Nejprve pro zjednodušení tohoto výrazu zavedeme substituci

$$C_1 = C\cos\varphi, \quad C_2 = C\sin\varphi, \qquad \text{kde } \varphi \in \langle -\pi, \pi \rangle .$$

Po dosazení této substituce do výrazu, jež definuje obecné řešení systému (37) a následných úpravách dostaneme soustavu dvou rovnic

$$\begin{aligned} x_1(t) &= C\sin(t+\varphi), \\ x_2(t) &= C(\sin(t+\varphi) - \cos(t+\varphi)). \end{aligned}$$

Vyjádříme-li z první rovnice $\sin(t+\varphi)$ a dosadíme do druhé, pak po jednoduchých úpravách získáme vztah

$$2{x_1}^2(t) - 2x_1(t)x_2(t) + {x_2}^2(t) = C^2, \quad C \neq 0.$$

Uvedená rovnice je rovnicí elipsy. Provedené úvahy můžeme tedy shrnout tak, že trajektorie řešení systému (37) jsou elipsy a singulární bod **o** systému (37) je střed. Je tedy zřejmé, že body ležící na trajektoriích řešení systému (37) se v závislosti na čase pohybují po těchto trajektoriích okolo singulárního bodu **o** systému (37), přičemž žádný z nich nikdy nezaujme takovou polohu, aby vzdálenost mezi tímto bodem a singulárním bodem **o** systému (37) byla v limitě rovna nule. Tímto jsme připomněli, že singulární bod **o** systému (37) je stabilní a ukázali jsme, že není asymptoticky stabilní. Grafická interpretace řešení uvedeného systému je znázorněna na obrázku 6.

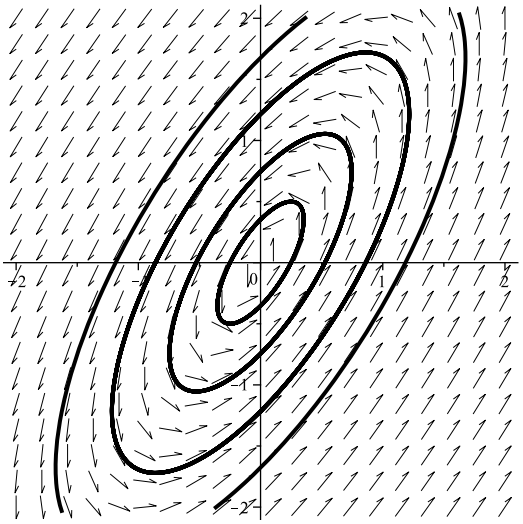
Nyní si na následujícím příkladu ukážeme situaci, kdy singulární bod **o** není jediným singulárním bodem daného systému.

Příklad 4.18. Uvažujme autonomní lineární systém

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 - 2x_2. \end{aligned} \tag{38}$$

V tomto případě je na rozdíl od předchozích příkladů matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ singulární a systém (38) má tedy nekonečně mnoho singulárních bodů, mezi nimiž je také bod **o**, který budeme dále vyšetřovat. Charakteristická rovnice matice **A** má tvar

$$\lambda^2 + 3\lambda = 0.$$



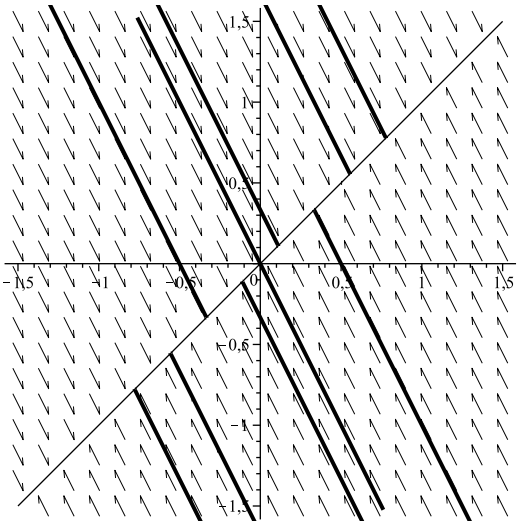
Obrázek 6: Fázový portrét řešení systému (37) - střed

Z uvedené rovnice plyne, že $\lambda_1 = 0$ a $\lambda_2 = -3$. Protože nulový kořen λ_1 je jednoduchého typu, tj. má násobnost jedna a druhý kořen λ_2 je záporný, můžeme na základě věty 3.9, uvedené v předchozí kapitole, prohlásit, že singulární bod **o** systému (38) je stabilní. Nyní se podívejme na obecné řešení systému (38), které má tvar

$$\mathbf{x}(t) = (C_1 + C_2 \mathrm{e}^{-3t}, -2C_2 \mathrm{e}^{-3t} + C_1)^T, \quad C_1, C_2, t \in \mathbb{R}.$$

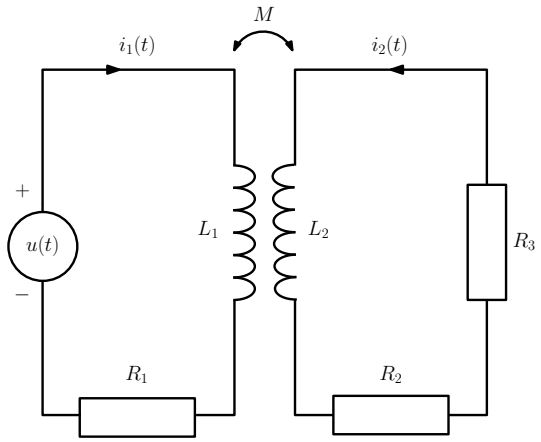
Položíme-li kladné číslo $\delta = \varepsilon$, pak zřejmě platí, že $\|\mathbf{x}(t)\| \leq \|\mathbf{x}(0)\| < \delta = \varepsilon$, což zaručuje, že každá kladná polotrajektorie řešení systému (38), která vychází z bodu $\mathbf{x}(0)$ ležícího v δ-okolí singulárního bodu **o** systému (38), leží celá v ε-okolí tohoto singulárního bodu. Tímto jsme na základě obecného řešení systému (38) dokázali stabilitu singulárního bodu **o**. Dále vidíme, že pokud $C_2 = 0, C_1 \neq 0$, pak řešení systému (38) je konstantní podél přímky, jejíž rovnice je $x_1 = x_2$. Na této přímce leží nekonečně mnoho singulárních bodů systému (38). Případ kdy $C_2 \neq 0, C_1 = 0$ zobrazuje přímka daná rovnicí $x_1 = -\frac{1}{2}x_2$.

Můžou nastat samozřejmě i jiné případy systému (30), jehož singulární bod **o** není jediným singulárním bodem. Dalším případ, který muže nastat je, že jeden kořen charakteristické rovnice matice **A** je nulový a druhý kladný.



Obrázek 7: Fázový portrét řešení systému (38)

Takovýto systém má opět nekonečně mnoho singulárních bodů podél určité přímky procházející počátkem neboli singulárním bodem **o**, který je pak podle věty 3.9 nestabilní. Nakonec, jsou-li oba kořeny charakteristické matice **A** nulové, má daný systém také nekonečně mnoho singulárních bodů, přičemž singulární bod **o** je nestabilní. Pokud navíc platí, že matice **A** je nulová, pak tyto singulární body vyplňují celý fázový prostor $\mathbb{R}^2$.



Obrázek 8: Schéma uvažovaného elektrického obvodu

5 Fyzikální aplikace teorie stability systémů ODR 1

V této části práce budeme vyšetřovat stabilitu časově proměnných elektrických proudů $i_1(t)$ a $i_2(t)$ procházejících elektrickým obvodem, který je znázorněn na obrázku 8. Uvedený obvod se skládá z transformátoru, k jehož primárnímu vinutí je v okamžiku τ připojen zdroj časově proměnného elektrického napětí $u(t)$, které je dáno vztahem $u(t) = \varsigma \sin \omega t$, kde ς je amplituda napětí a ω je úhlová frekvence napětí. K sekundárnímu vinutí transformátoru je připojen dvojpól (jednobran). Tento dvojpól zde vystupuje jako rezistor s konstantním elektrickým odporem R_3. Vidíme, že do obvodu jsou zařazeny také dva rezistory s konstantními elektrickými odpory R_1, R_2 a tyto rezistory zde zastupují odpory vinutí v primární a sekundární větvi transformátoru. Transformátor sestává ze dvou cívek navinutých na společném jádru, přičemž tyto cívky s ním nejsou vodivě spojeny. Na základě Faradayova zákona a vztahů, jež definují vlastní a vzájemnou indukčnost cívek, napíšeme dvě rovnice, které se vyjadřují k časově proměnnému elektromotorickému napětí na primárním a sekundárním vinutí transformátoru. První, respektive druhá, rovnice bude algebraickým součtem elektomotorických napětí buzených na primární, respektive sekundární, cívce procházejícími elektrickými proudy

primárním a sekundárním vinutím transformátoru. Máme tedy

$$u_{L_1}(t) = L_1 \frac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t} + M \frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t}, \quad u_{L_2}(t) = L_2 \frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t} + M \frac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t}. \tag{39}$$

Dále pomocí druhého Kirchhoffova zákona dostaneme rovnici pro primární, respektive sekundární větev uvažovaného elektrického obvodu, a sice

$$u_{L_1}(t) + u_{R_1}(t) = u(t) \qquad \text{pro každé } t \geq \tau,$$

respektive

$$u_{L_2}(t) + u_{R_2}(t) + u_{R_3}(t) = 0 \qquad \text{pro každé } t \geq \tau.$$

Dosadíme-li do těchto rovnic vztahy (39) a za hodnoty elektrických napětí příslušné součiny elektrických odporů a proudů podle Ohmova zákona, dostaneme

$$\begin{aligned} L_1 \frac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t} + M \frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t} + R_1 i_1(t) &= u(t), \\ M \frac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t} + L_2 \frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t} + R_2 i_2(t) + R_3 i_2(t) &= 0 \end{aligned}$$

pro každé $t \geq \tau$. Z této soustavy rovnic vyjádříme složky $\frac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t}$, $\frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t}$, čímž dostaneme systém lineárních obyčejných diferenciálních rovnic ve tvaru

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t} &= -\frac{R_1 L_2}{L_1 L_2 - M^2} i_1(t) + \frac{M(R_2 + R_3)}{L_1 L_2 - M^2} i_2(t) + \frac{L_2}{L_1 L_2 - M^2} u(t), \\ \frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t} &= \frac{M R_1}{L_1 L_2 - M^2} i_1(t) - \frac{L_1(R_2 + R_3)}{L_1 L_2 - M^2} i_2(t) - \frac{M}{L_1 L_2 - M^2} u(t) \end{aligned} \tag{40}$$

pro každé $t \geq \tau$. Položíme-li

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\frac{R_1 L_2}{L_1 L_2 - M^2}, \quad a_{12} = \frac{M(R_2 + R_3)}{L_1 L_2 - M^2}, \quad b_1(t) = \frac{L_2}{L_1 L_2 - M^2} u(t), \\ a_{21} &= \frac{M R_1}{L_1 L_2 - M^2}, \quad a_{22} = -\frac{L_1(R_2 + R_3)}{L_1 L_2 - M^2}, \quad b_2(t) = -\frac{M}{L_1 L_2 - M^2} u(t), \end{aligned}$$

pak systém (40) přejde na tvar

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t} &= a_{11} i_1(t) + a_{12} i_2(t) + b_1(t), \\ \frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t} &= a_{21} i_1(t) + a_{22} i_2(t) + b_2(t). \end{aligned} \tag{41}$$

Odvodili jsme tedy systém, jehož řešením lze získat vztahy popisující časový průběh elektrických proudů $i_1(t)$ a $i_2(t)$. V programu Maple 12 jsem vytvořil aplikaci, která pro námi zadané veličiny $L_1, L_2, M, R_1, R_2, R_3$ a $u(t)$ řeší autonomní lineární systém (41), vykresluje grafy funkcí řešení $i_1(t), i_2(t)$ a fázový portrét těchto řešení. Tato aplikace je přílohou této práce a nese název `apltransformator.mw`. Dále se budeme zabývat konkrétní situací, kde uvedené vztahy a hodnoty budou generovány právě touto aplikací, přičemž konstanty vždy zaokrouhlíme na tři desetinná místa. Uvažujme tedy elektrický obvod z obrázku 8 s následujícími vstupy

$$L_1 = 4H, \quad L_2 = 3H, \quad M = 3.4H, \quad R_1 = 2.5\Omega, \quad R_2 = 1\Omega, \quad R_3 = 100\Omega,$$
$$u(t) = 250\sin(100\pi t)V.$$

Systém (41) má pro zadané veličiny tvar

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t} &= -17.045i_1(t) + 780.455i_2(t) + 1704.545\sin(100\pi t), \\ \frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t} &= 19.318i_1(t) - 918.182i_2(t) - 1931.818\sin(100\pi t). \end{aligned} \tag{42}$$

Elektrické proudy $i_1(t), i_2(t)$ procházející obvodem jsou v čase $\tau = 0$ nulové a počáteční podmínky jsou tedy tvaru

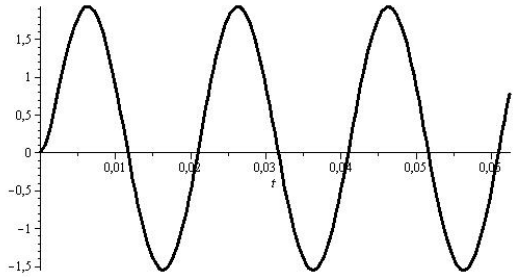
$$i_1(0) = 0, \quad i_2(0) = 0. \tag{43}$$

Pak řešením počáteční úlohy (42), (43) je vektorová funkce

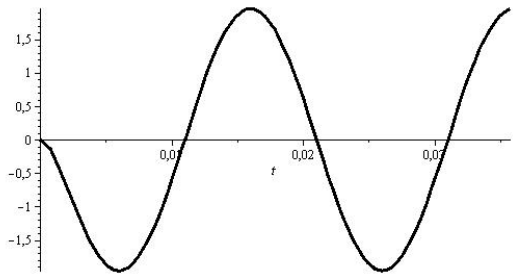
$$\begin{aligned} \mathbf{i}(t) =& (0.192\mathrm{e}^{-0.614t} + 0.531\mathrm{e}^{-934.613t} + 1.581\sin(100\pi t) - 0.723\cos(100\pi t), \\ & 0.004\mathrm{e}^{-0.614t} - 0.625\mathrm{e}^{-934.613t} + 0.621\sin(100\pi t) - 1.858\cos(100\pi t))^T, \end{aligned}$$

jejíž časový průběh jednotlivých složek $i_1(t)$, $i_2(t)$ je znázorněn na obrázcích 9, 10. Nyní se budeme zabývat stabilitou řešení $\mathbf{i}(t)$ počáteční úlohy (42), (43). Z kapitoly 3 víme, že namísto zkoumání stability řešení $i(t)$ počáteční úlohy (42), (43) stačí zkoumat stabilitu triviálního řešení $\mathbf{i}_h(t) = \mathbf{o}$ homogenního systému

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}i_{h_1}(t)}{\mathrm{d}t} &= -17.045i_{h_1}(t) + 780.455i_{h_2}(t), \\ \frac{\mathrm{d}i_{h_2}(t)}{\mathrm{d}t} &= 19.318i_{h_1}(t) - 918.182i_{h_2}(t), \end{aligned} \tag{44}$$



Obrázek 9: Časový průběh elektrického proudu $i_1(t)A$



Obrázek 10: Časový průběh elektrického proudu $i_2(t)A$

které se ve fázovém prostoru $\mathbb{R}^2$, podle teorie uvedené v kapitole 4, zobrazí na singulární bod $\mathbf{o} = [0,0]$ tohoto systému. Protože je matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -17.045 & 780.455 \\ 19.318 & -918.182 \end{pmatrix}$ regulární, je tento bod $\mathbf{o} = [0,0]$ jediným singulárním bodem systému (44). Řešením charakteristické rovnice matice $\mathbf{A}$, tj.

$$\det \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -17.045 - \lambda & 780.455 \\ 19.318 & -918.182 - \lambda \end{pmatrix} = 0,$$

dostáváme kořeny $\lambda_1 = -0.614$, $\lambda_2 = -934.613$. Jelikož jsou oba kořeny záporné, je podle věty 4.11 singulární bod $\mathbf{o}$ systému (44) přitažlivým uzlem, což znamená že je asymptoticky stabilní a tudíž je asymptoticky stabilní také řešení $\mathbf{i}(t)$ počáteční úlohy (42), (43). Grafem řešení $\mathbf{i}(t)$ počáteční úlohy (42), (43) je křivka, která se při $t \to \infty$ limitně blíží k partikulárnímu řešení $\mathbf{i}_p(t)$ počáteční úlohy (42), (43), tj. řešení systému

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}i_{p_1}(t)}{\mathrm{d}t} &= 1704.545 \sin(100\pi t), \\ \frac{\mathrm{d}i_{p_2}(t)}{\mathrm{d}t} &= -1931.818 \sin(100\pi t), \end{aligned}$$

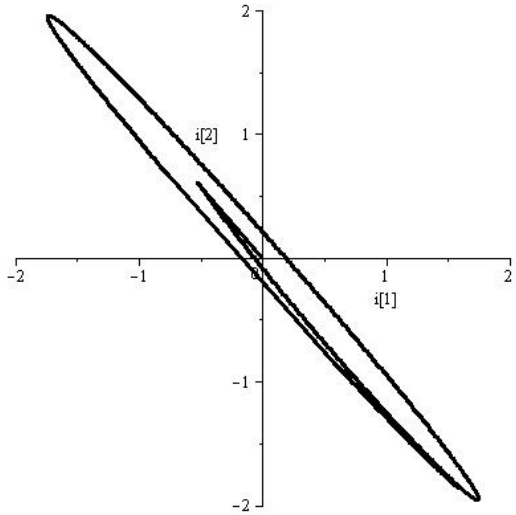
které má tvar

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_p(t) =& (1.581 \sin(100\pi t) - 0.723 \cos(100\pi t), \\ & 0.621 \cos(100\pi t) - 1.858 \sin(100\pi t))^T. \end{aligned} \tag{45}$$

Na obrázku 11 je předešlá úvaha znázorněna ve fázovém prostoru $\mathbb{R}^2$. Závěrem tedy můžeme říci, že se elektrické proudy $i_1(t)$, $i_2(t)$, které po zapojení zdroje elektrického napětí do studovaného obvodu, procházejí primárním a sekundárním vinutím transformátoru za nějaký čas t v závislosti na vstupním napětí $u(t)$ ustálí.

6 Závěr

Cílem bakalářské práce bylo nastudovat a zpracovat teorii stability systémů obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu a následně ji aplikovat na konkrétním technickém problému. Jak již bylo uvedeno v úvodu, je v této práci popsána stabilita obecně nelineárních systémů, lineárních systémů



Obrázek 11: Fázový portrét řešení $i_1(t)$ počáteční úlohy (42), (43)

a systémů autonomních. Práce je provázena příklady, na kterých jsou interpretovány druhy stability daného systému a v případě autonomních systémů byla provedena klasifikace jeho singulárního bodu. V páté kapitole je zpracována aplikace stability na lineárním autonomním systému, jehož řešení popisuje časový průběh elektrických proudů procházejících primárním a sekundárním vinutí transformátoru. K této práci byly vypracovány v programu Maple 12 dvě aplikace, které řeší a vykreslují fázové portréty řešení lineárních autonomních systémů. Tyto aplikace mají názvy `aplfazovyportret.mw`, `apltransformator.mw`. Cíle práce byly tedy splněny.

Reference

[1] CESARI, L. *Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations*. Berlin: Springer - Verlag, 1959.

[2] ČERMÁK, J., A. ŽENÍŠEK. *Matematika III*. Brno: AKADEMICKÉ NAKLADATELSTVÍ CERM, 2001. ISBM 80-214-2010-3.

[3] DIBLÍK, J., M. RŮŽIČKOVÁ. *Obyčajné diferenciálne rovnice*. 1. vyd. Žilina: Žilinská univerzita, 2008. ISBN 978-80-8070-891-7.

[4] FRANCŮ, J. *Obyčejné diferenciální rovnice*. 2004. Dostupné z: www.math.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=1272.

[5] HALLYDAY, D., R. RESNICK a J. WALKER. *Fyzika: Vysokoškolská učebnice obecné fyziky*. Část 3, Elektřina a magnetismus. vyd. 1. Brno: VUTIUM a PROMETHEUS Praha. 2000. ISBN 80-214-1868-0.

[6] JIRÁSEK, F., J. BENDA, S. ČIPERA a M. VACEK. *Sbírka řešených příkladů z matematiky III: Okrajové úlohy pro diferenciální rovnice druhého řádu, soustavy obyčejných diferenciálních rovnic a jejich stabilita, počet pravděpodobnosti, matematická statistika, nomografie*. 1. vyd. Praha: SNTL-Nakladatelství technické literatury, 1989. ISBN 80-03-00106-4.

[7] KALAS, J., M. RÁB. *Obyčejné diferenciální rovnice*. 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 1995. ISBN 80-210-1130-0.

[8] NAGY, J. *Elementární metody řešení obyčejných diferenciálních rovnic*. 1. vyd. Praha: SNTL- Nakladatelství technické literatury, 1978.

[9] NAGY, J. *Stabilita řešení obyčejných diferenciálních rovnic*. 2. vyd. Praha: SNTL-Nakladatelství technické literatury, 1983.

[10] ŽENÍŠEK, A. *Vybrané kapitoly z matematické analýzy*. 2. vyd. Brno: PC-DIR Real, 1999. ISBN 80-214-1507-X, str.41,45.

7 Seznam příloh

1. CD s bakalářskou prací ve formátu pdf a programy `aplfazovyportret.mw`, `apltransformator.mw`.

2. CD s programy `aplfazovyportret.mw`, `apltransformator.mw`.