TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
Fakulta přírodovědně-humanitní
a pedagogická

Diferenční rovnice a jejich aplikace

Bakalářská práce

Studijní program: B1101 – Matematika
Studijní obory: 7504R015 – Matematika se zaměřením na vzdělávání
7507R036 – Anglický jazyk se zaměřením na vzdělávání

Autor práce: **Nikola Prousková**
Vedoucí práce: RNDr. Jiří Hozman, Ph.D.

Liberec 2019

TECHNICAL UNIVERSITY OF LIBEREC
Faculty of Science, Humanities
and Education

Difference Equations and Their Applications

Bachelor thesis

Study programme: B1101 – Mathematics
Study branches: 7504R015 – Mathematics for Education
7507R036 – English for Education

Author: **Nikola Prousková**
Supervisor: RNDr. Jiří Hozman, Ph.D.

Liberec 2019

Technická univerzita v Liberci
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Akademický rok: **2017/2018**

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení:	**Nikola Prousková**
Osobní číslo:	**P16000165**
Studijní program:	**B1101 Matematika**
Studijní obory:	**Matematika se zaměřením na vzdělávání** **Anglický jazyk se zaměřením na vzdělávání**
Název tématu:	**Diferenční rovnice a jejich aplikace**
Zadávající katedra:	**Katedra matematiky a didaktiky matematiky**

Zásady pro vypracování:

Nastudovat základní teorii diferencí a speciální třídy diferenčních rovnic, tzv. lineárních diferenčních rovnic.
Zaměřit se na řešení lineárních homogenních rovnic n-tého řádu s konstantními koeficienty sestavením charakteristického polynomu a určení jeho kořenů, dále i na řešení nehomogenních rovnic stejného typu metodou odhadu partikulárního řešení a metodou variace konstant.
Najít a uvést vhodné, zejména ekonomické, aplikace využívající těchto rovnic.
Požadavky:
Znalost matematiky v rozsahu základních kurzů matematické analýzy a algebry.
Schopnost aplikovat teorii na praktické úlohy.
Porozumět odbornému textu v angličtině.

Rozsah grafických prací:

Rozsah pracovní zprávy:

Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

Henzler, J. Kaňka, M.: Matematika pro ekonomy 2. Ekopress. Praha 2007.
Nagy, J. Navrátil, O.: Diferenciální a diferenční rovnice. Česká technika, ČVUT. Praha 2005.
Neusser, K.: Difference Equations for Economists. http://neusser.ch/downloads/DifferenceEquations.pdf
Osborne, M.J.: Mathematical methods for economic theory. https://mjo.osborne.economics.utoronto.ca/index.php/tutorial/index/1/fod/t
Prágerová, A.: Diferenční rovnice. SNTL. Praha 1971.

Vedoucí bakalářské práce: **RNDr. Jiří Hozman, Ph.D.**
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Datum zadání bakalářské práce: **7. května 2018**
Termín odevzdání bakalářské práce: **18. dubna 2019**

prof. RNDr. Jan Picek, CSc.
děkan

L.S.

doc. RNDr. Jaroslav Mlýnek, CSc.
vedoucí katedry

V Liberci dne 9. května 2018

Prohlášení

Byla jsem seznámena s tím, že na mou bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb., o právu autorském, zejména § 60 – školní dílo.

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci (TUL) nezasahuje do mých autorských práv užitím mé bakalářské práce pro vnitřní potřebu TUL.

Užiji-li bakalářskou práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědoma povinnosti informovat o této skutečnosti TUL; v tomto případě má TUL právo ode mne požadovat úhradu nákladů, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše.

Bakalářskou práci jsem vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím mé bakalářské práce a konzultantem.

Současně čestně prohlašuji, že tištěná verze práce se shoduje s elektronickou verzí, vloženou do IS STAG.

Datum:

Podpis:

Anotace

Tato bakalářská práce se zabývá problematikou diferenčních rovnic, především lineárních diferenčních rovnic s konstantními koeficienty. První, teoretická část této práce je věnována základům diferencí a sumací, klasifikaci diferenčních rovnic a obecnému způsobu řešení lineárních diferenčních rovnic. Nejprve se zaměříme na konstrukci fundamentálního systému řešení homogenní rovnice. Následně v případě nehomogenní rovnice jsou představeny dva způsoby řešení - metoda odhadu partikulárního řešení a metoda variace konstant. Druhá část práce se pak zabývá konkrétními aplikacemi, které lze popsat právě pomocí lineárních diferenčních rovnic s konstantními koeficienty. Naše pozornost je zaměřena především na aplikace v ekonomii, jako například současná a budoucí hodnota peněz, spoření na důchod, umořování splátky či vytváření rovnováhy na trhu. V bakalářské práci je pak prakticky ilustrováno, že ačkoliv jsou pro většinu populace diferenční rovnice nepříliš známé, setkávají se s nimi relativně běžně a případně je i používají.

Klíčová slova:

diference; sumace; lineární diferenční rovnice s konstantními koeficienty; aplikace v ekonomii

Abstract

This bachelor thesis deals with the problem of difference equations, especially linear difference equations with constant coefficients. The theoretical part of this work is devoted to the basics of differences and antidifferences, classifications of difference equations and the general way of solving linear difference equations. First, we deal with the construction of a fundamental system for solving a homogeneous equation. Subsequently, in the case of nonhomogeneous equation two methods of its solving are introduced – the method of undetermined coefficients and the method of variation of constants. The second part of the thesis deals with specific applications that can be described using linear difference equations with constant coefficients. Our attention focuses on applications in economics, such as the present and future value of money, retirement saving, amortization installments or creating a balance in the market. In the bachelor thesis it is practically illustrated that although for most of the population the difference equations are not very familiar, they encounter them relatively commonly, or even use them.

Key words:

difference; antidifference; linear differential equations with constant coefficients; application in economics

Poděkování

Tímto bych chtěla poděkovat svému vedoucímu bakalářské práce, panu RNDr. Jiřímu Hozmanovi, Ph.D. za odborné vedení práce, cenné rady, věcné připomínky, trpělivost, ochotu a vstřícnost při konzultacích a v průběhu zpracovávání bakalářské práce.

Obsah

Seznam obrázků

Seznam tabulek

Použité značení a jeho význam

x	nezávisle proměnná, argument funkce
$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
f, F, g, G	funkce
h	diferenční krok
$\Delta f(x)$	diference funkce f
$\Delta^{-1} f(x)$	sumace funkce f
m, n	index posloupnosti
$\mathbb{N}_0$	množina přirozených čísel včetně 0
$\varphi(n)$	funkce na množině $\mathbb{N}_0$
y_m, y_n	posloupnost, členy posloupnosti
P_k	polynom stupně nejvýše k
$\mathbb{C}$	množina komplexních čísel
λ, λ_j	kořen charakteristického polynomu

Úvod

Ústředním pojmem této bakalářské práce je diferenční rovnice. Jedná se o oblast matematiky, se kterou se relativně často setkávají ekonomové, ačkoliv nevědomky se objevuje již ve středoškolské látce, konkrétně v oblasti finanční matematiky, jak později ilustrujeme na vybraných příkladech.

Diferenční rovnice představují vhodnou alternativu v případech, kdy již není možné využít klasických metod, využívajících limitu funkce a diferenciální počet. V tomto případě definičním oborem, na kterém dané rovnice řešíme, je množina bodů (obvykle ekvidistantních). Místo derivací se používají diference, místo integrálů sumace a místo diferenciálních rovnic pak rovnice diferenční.

Ohlédneme-li se do historie, myšlenka počítání pomocí rekurzivních vzorců se objevuje v jednoduché formě již kolem roku 2000 př. n. l. Kolem roku 450 př. n. l. tuto myšlenku dále rozvíjejí Pythagorejci, později se problematikou zabývalo mnoho dalších slavných matematiků. Kořeny základní teorie lineárních diferenčních rovnic sahají do 18. století, kdy se jí zabývali de Moivre, Euler, Lagrange, Laplace a další. Z dnešního pohledu se diferenční rovnice, jak již bylo zmíněno, hojně využívají v ekonomii. Své místo však nalézají i ve statistice, např. pro sledování růstu populace. Velmi známá je Fibonacciho posloupnost použitá už v roce 1202 na modelování růstu populace králíků, nicméně poprvé popsána až v 17. století a vyřešena v 18. století (de Moivre). Dále se využívají také v kvantové fyzice či atomistice.

Právě již zmíněná aplikace v ekonomii byla mou hlavní motivací ke zpracování tohoto tématu, neboť z vlastní zkušenosti vím, že daná problematika je často vysvětlována pouze z pohledu ekonomického, tedy bez hlubší vazby na matematickou teorii.

Samotná bakalářská práce je uspořádána následovně. Nejprve jsou představeny a definovány dva důležité pojmy. Stejně, jako u diferenciálních rovnic se neobejdeme bez znalosti derivací a integrálů, v případě diferenčních rovnic to je diference a sumace. Následně můžeme zavést diferenční rovnice, které klasifikujeme na jednotlivé typy a ilustrujeme jejich vzájemný vztah. Jádrem bakalářské práce jsou lineární diferenční rovnice s konstantními koeficienty, pro které představíme návod, jak nalézt jejich řešení (obecné i partikulární). V poslední kapitole tyto znalosti využijeme na řešení konkrétních příkladů, se kterými se můžeme setkat v praxi.

1 Úvod do teorie diferencí

Než si představíme samotné diferenční rovnice, je potřeba zavést dva důležité pojmy. Jedním z nich je diference, tím druhým pojmem je potom sumace. Bez znalosti obou těchto termínů není možné se posunout dále. V této kapitole si tedy nejprve zavedeme samotný pojem diference, ukážeme si diferenci 1. řádu, její grafické znázornění a diferenci vyšších řádů. Následují diference některých elementárních funkcí, z nichž důležité jsou pro nás zejména polynomy. Poslední sekci věnujeme sumacím. Definice daných pojmů jsou převzaty z knihy [5].

1.1 Termín diference

Pokud v matematice hovoříme o diferenci, máme na mysli, jak již název napovídá, rozdíl, konkrétně rozdíl dvou funkčních hodnot.

Definice 1. *Je dán bod x_0 a číslo $h > 0$. Nechť funkce $f(x)$ je definována v bodech x_0 a $x_0 + h$. Diferencí funkce $f(x)$ v bodě x_0 nazýváme rozdíl $f(x_0 + h) - f(x_0)$ a značíme ji $\Delta f(x_0)$.*

Pro názornost si ukážeme diferenci na příkladech lineární a kvadratické funkce.

Příklad 1. *Vypočítejte diferenci funkcí $f_1(x) = 2x - 1$ a $f_2(x) = 3x^2 + 1$ v obecném bodě x_0 pro obecný diferenční krok h.*

Ř e š e n í: Užitím definice diference, můžeme psát

$$\begin{aligned}\Delta f_1(x_0) &= f_1(x_0 + h) - f_1(x_0) = [2(x_0 + h) - 1] - [2x_0 - 1] = 2h,\\ \Delta f_2(x_0) &= f_2(x_0 + h) - f_2(x_0) = [3(x_0 + h)^2 + 1] - [3x_0^2 + 1] = 6x_0h + 3h^2.\end{aligned}$$ ○

Na prvním příkladu si můžeme všimnout, že diferencí dané lineární funkce je konstanta $2h$, zatímco v případě kvadratické (tj. nelineární) funkce již hodnota diference záleží i na bodu x_0. Lze ukázat, že tato vlastnost platí vždy pro lineární funkce, neboť počítáme-li diferenci funkce $f(x) = ax + b$ v obecném kroku h v bodě x_0, můžeme to zapsat následovně

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0) = [a(x_0 + h) + b] - [ax_0 + b] = ah.$$

Z výše uvedeného vyplývá, že diference lineární funkce je za předpokladu konstantního diferenčního kroku také konstantní. Tuto vlastnost si později znovu ukážeme v Sekci 1.6 věnované diferencím některých elementárních funkcí.

Budeme-li namísto jednoho konkrétního bodu x_0 uvažovat body nějaké neprázdné množiny $\mathcal{M}$, můžeme pojem diference rozšířit ve smyslu funkce. Množina $\mathcal{M}$ bývá v aplikačních úlohách nejčastěji reprezentována jako množina ekvidistantních bodů, tj.

$$\mathcal{M} = \{x_0; x_0 + h; x_0 + 2h, \dots\}.$$

Definice 2. *Nechť funkce $f(x)$ je definována ve všech bodech $x \in \mathcal{M}$, kde $\mathcal{M} \neq \emptyset$. Potom $\Delta f(x)$ je funkce proměnné x, která každému bodu $x \in \mathcal{M}$ přiřazuje hodnotu $\Delta f(x)$. Tuto funkci nazýváme diferencí funkce $f(x)$ a značíme ji*

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x), \quad x \in \mathcal{M}.$$

1.2 Geometrické zobrazení diference

Diference lze také snadno graficky zobrazit. Pro názornost uvažujme dvojici lineární, resp. kvadratické funkce z předchozího Příkladu 1, resp. Příkladu 2, tj. $f_1(x) = 2x - 1$ a $f_2(x) = 3x^2 + 1$, viz Obrázek 1.1. Zvolíme jednotkový diferenční krok a spočítáme diference v bodech $\{0; 1; 2; 3\}$, viz Tabulka 1.1, která koresponduje s grafickými výstupy.

Tabulka 1.1: Diference lineární a kvadratické funkce.

x_0	$\Delta f_1(x_0)$	$\Delta f_2(x_0)$
0,0	2,0	3,0
1,0	2,0	9,0
2,0	2,0	15,0
3,0	2,0	21,0

Na grafu je zřetelné (znázorněno přerušovanou čarou), že v případě lineární funkce je diference konstantní, jak jsme si ukázali v předchozí sekci. V případě polynomu druhého stupně již diference na dané množině bodů roste.

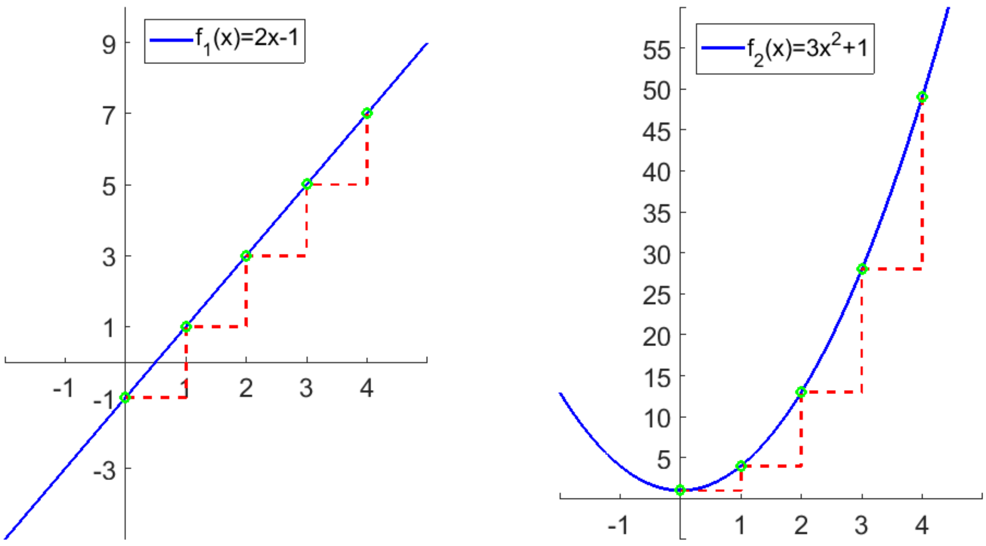
1.3 Vztah diference a derivace

Ten, kdo se již seznámil s pojmem derivace, tak se setkal i s diferencí, a ačkoliv si tento pojem blíže nedefinoval, běžně ho používal. Ukážeme si tedy nyní vztah mezi diferencí a derivací funkce a budeme ilustrovat, jak jsou tyto dva termíny spolu velmi úzce spjaty.

Připomeňme si, jak vypadá vztah pro výpočet derivace funkce (v bodě x_0), a to

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{h} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

kde Δx značí přírůstek v argumentu, tj. $\Delta x = h$. Uvědomme si, že v čitateli tohoto zlomku využíváme vztahu pro výpočet diference funkce f. Podíl $\Delta y / \Delta x$, který nazveme poměrná diference, nám značí velikost přírůstku funkce na jednotku přírůstku argumentu.



Obrázek 1.1: Geometrický význam diference

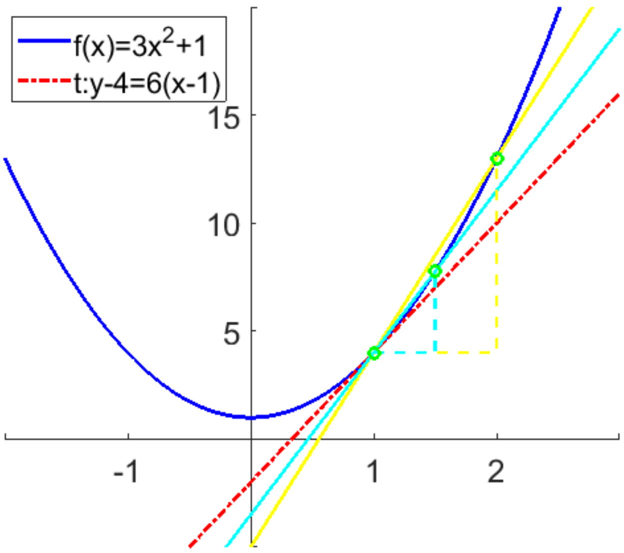
Díky tomuto úzkému vztahu můžeme derivaci poměrnou diferencí aproximovat, čehož lze často využít v případech, kdy neznáme analytický předpis funkce, a nejsme tak schopni určit derivaci dle známých pravidel. Vztah mezi diferencí a derivací ilustrujeme na následujícím příkladě.

Příklad 2. *Vypočítejte přesnou a přibližnou hodnotu derivace funkce* $f(x) = 3x^2+1$ *v bodě* $x_0 = 1$ *s diferenčním krokem* $h \in \{1{,}0; 0{,}5; 0{,}25; 0{,}125; 0{,}01; 0{,}001\}$.

Řešení: Derivace funkce v obecném bodě je $f'(x_0) = 6x_0$, resp. v bodě $x_0 = 1$ je $f'(1) = 6$. Přibližnou hodnotu derivace vyjádříme pomocí poměrných diferencí pro jednotlivé diferenční kroky, viz Tabulka 1.2, která ilustruje konvergenci poměrných diferencí k derivaci pro $h \to 0+$. Pro lepší ilustraci přikládáme také Obrázek 1.2. ◯

Tabulka 1.2: Vztah mezi poměrnou diferencí a derivací funkce.

h	x_0+h	$f(x_0+h)$	$\Delta f(x_0)$	$\frac{\Delta f(x_0)}{h}$
1,000	2,000	13,00000	9,000000	9,000
0,500	1,500	7,750000	3,750000	7,500
0,250	1,250	5,687500	1,687500	6,750
0,125	1,125	4,796875	0,796875	6,375
0,010	1,010	4,060300	0,060300	6,030
0,001	1,001	4,006003	0,006003	6,003
analytická hodnota $f'(x_0)$				6,0



Obrázek 1.2: Vztah diference a derivace

1.4 Diference vyšších řádů

Analogicky, jako pro derivace vyšších řádů, umíme pojmenovat a definovat i diference vyšších řádů, které se zavádějí obdobně, a to rekurentním postupem.

Pro názornost mějme $\Delta f(x)$ jako funkci proměnné x a označme $\Delta f(x) = g(x)$. Je-li funkce $g(x)$ definována v bodech x a $x+h$, můžeme spočítat diferenci i této funkce $g(x)$ jako $\Delta g(x) = g(x+h) - g(x)$. Po dosazení za $g(x)$ získáme

$$\begin{aligned} \Delta g(x) &= [f(x+2h) - f(x+h)] - [f(x+h) - f(x)] \\ &= f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x). \end{aligned}$$

Vztah výše je diference druhého řádu a lze tedy říci, že funkce $\Delta g(x) = \Delta(\Delta f(x))$ je druhou diferencí funkce $f(x)$.

Pojďme se ale obecně podívat na diferenci vyššího, respektive n-tého řádu. Diferenci n-tého řádu lze získat dvěma způsoby. Nejprve si ukážeme první možnost, kdy postupně počítáme diference všech nižších řádů, což často není efektivní způsob řešení.

Definice 3. *Nechť pro $x \in \mathcal{M}$ jsou definovány hodnoty $f(x)$, $f(x+h)$, $f(x+2h), \dots, f(x+nh)$, kde h je dané kladné číslo a n je přirozené číslo. Potom n-tou diferenci funkce $f(x)$, kterou značíme $\Delta^n f(x)$, definujeme rekurentně vzorcem*

$$\Delta^n f(x) = \Delta(\Delta^{n-1} f(x)), \quad \text{pro } n \geq 2,$$

kde klademe $\Delta^1 f(x) = \Delta f(x)$, $x \in \mathcal{M}$.

Poznámka 1. *Pokud bychom do $\Delta^n f(x)$ dosadili za x konkrétní číslo x_0, hovořili bychom o n-té diferenci funkce f v bodě x_0. Je důležité si uvědomit, že v takovém případě diference se nejedná o funkci, ale diferencí je již konkrétní hodnota této funkce.*

Příklad 3. *Pro funkci $f(x) = 3x^2 + 1$ vypočítejte všechny diference až do třetího řádu včetně v bodech množiny $\{0; 1; 2; 3\}$ pro jednotkový diferenční krok.*

Řešení: Nejprve si spočítáme jednotlivé diference v obecném bodě x_0 a následně dosadíme příslušné hodnoty, tj.

$$\begin{aligned}\Delta f(x_0) &= [3(x_0+1)^2+1] - [3x_0^2+1] = 6x_0+3,\\ \Delta^2 f(x_0) &= [6(x_0+1)+3] - [6x_0+3] = 6,\\ \Delta^3 f(x_0) &= [6] - [6] = 0.\end{aligned}$$

Potom $\Delta f(0) = 3$, $\Delta f(1) = 9$, $\Delta f(2) = 15$ a $\Delta f(3) = 21$. Druhá diference zadané funkce je ve všech bodech množiny rovna 6. Jelikož diference konstantní funkce je ve všech bodech množiny rovna 0, tedy i v našem případě je třetí diference dané funkce nulová na celé množině. ○

Druhým způsobem výpočtu diference n-tého řádu je použití přímo $(n+1)$ funkčních hodnot podle níže uvedené věty [5, Věta I,1].

Věta 1. *Nechť funkce $f(x)$ je definována v bodech $x, x+h, \ldots, x+nh$. Potom*

$$\Delta^n f(x) = \binom{n}{0} f(x+nh) - \binom{n}{1} f(x+(n-1)h) + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} f(x).$$

Příklad 4. *Pro funkci $f(x) = \cos(x)$ vypočítejte $\Delta^3(0)$ pro diferenční krok $h = \frac{\pi}{3}$.*

Řešení: Pro výpočet použijeme vzorec z Věty 1 pro $n = 3$, tj.

$$\begin{aligned}\Delta^3 f(0) &= \binom{3}{0}\cos\left(0+\frac{3\pi}{3}\right) - \binom{3}{1}\cos\left(0+\frac{2\pi}{3}\right)\\ &+ \binom{3}{2}\cos\left(0+\frac{\pi}{3}\right) - \binom{3}{3}\cos(0)\\ &= \cos(\pi) - 3\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 3\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos(0) = 1.\end{aligned}$$

○

1.5 Diference elementárních funkcí

Pro použití diferencí je dobré pamatovat si v obecném tvaru diference některých elementárních funkcí. Z tohoto důvodu definujeme níže polynom stupně n jako

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0.$$

Nenulovou konstantu $P_0(x) = a_0$ považujeme za polynom nultého stupně.

Nyní se seznámíme s diferencemi mocninných, exponenciálních a vybraných goniometrických funkcí v obecném tvaru podle [5, Věta I,2].

Věta 2. *Pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a pro libovolný diferenční krok h platí:*

1) *Je-li k konstanta, potom $\Delta k = 0$.*
2) *Pro $n = 1, 2, \dots$ je $\Delta x^n = P_{n-1}(x)$, kde $P_{n-1}(x)$ je jistý polynom stupně $n-1$.*
3) *Pro $q > 0$ a $q \neq 1$ je $\Delta q^x = cq^x$, kde c je jistá konstanta.*
4) *Pro libovolné číslo k je $\Delta \sin(kx) = a \sin(kx) + b \cos(kx)$, kde a a b jsou jisté konstanty.*
5) *Pro libovolné číslo k je $\Delta \cos(kx) = c \sin(kx) + d \cos(kx)$, kde c a d jsou jisté konstanty.*

V dalším si připomene (bez důkazu) pravidla pro výpočet diferencí obecných funkcí v určitém tvaru, viz [5, Věta I,3].

Věta 3. *Pro libovolné $h > 0$ a pro všechna x, pro něž jsou současně definovány $\Delta f(x)$ a $\Delta g(x)$, platí:*

1) *Diference součtu (resp. rozdílu) funkcí je rovna součtu (resp. rozdílu) jejich diferencí, tj.*
$$\Delta[f(x) \pm g(x)] = \Delta f(x) \pm \Delta g(x)$$
2) *Multiplikační konstantu k lze vytknout před diferenci, tj.*
$$\Delta[kf(x)] = k\Delta f(x).$$
3) *Diference součinu funkcí splňuje vztah*
$$\Delta[f(x)g(x)] = g(x)\Delta f(x) + f(x)\Delta g(x) + \Delta f(x)\Delta g(x).$$

Pro názornost si shrneme, jak je to s diferencí polynomů stupně n. Aplikací Věty 2 a Věty 3 dostaneme, že diferencí funkce $P_n(x)$ je opět polynom, avšak stupně nejvýše $n-1$.

Věta 4. *Pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a libovolné $h > 0$ platí*
$$\Delta P_n(x) = Q_{n-1}(x),$$
kde $Q_{n-1}(x)$ je jistý polynom stupně $n-1$.

Příklad 5. *Pro funkci $f(x) = (x^2+1)2^x$ vypočítejte diferenci s jednotkovým diferenčním krokem.*

Řešení: Funkce $f(x)$ je utvořena součinem dvou funkcí, konkrétně $f_1(x) = (x^2+1)$ a $f_2(x) = 2^x$. Využijeme tedy vztah pro výpočet diference součinu funkcí, kdy
$$\begin{aligned}\Delta f(x) &= \Delta[f_1(x)f_2(x)] = \Delta[(x^2+1)2^x] \\ &= 2^x\Delta(x^2+1) + (x^2+1)\Delta 2^x + \Delta(x^2+1)\Delta 2^x.\end{aligned}$$

Po dosazení dílčích diferencí a úpravě získáme požadovanou diferenci funkce $f(x)$
$$\begin{aligned}\Delta f(x) &= \Delta[(x^2+1)2^x] = (2x+1)2^x + (x^2+1)2^x + (2x+1)2^x \\ &= 2^x(x^2+4x+3).\end{aligned}$$
○

1.6 Sumace

S pojmem diference je velice úzce spjat termín sumace. Analogicky jak spolu souvisí pojmy derivace a integrál, tak spolu souvisí diference a sumace. Lze totiž říci, že sumace je komplementární operace k diferenci, kdy k dané diferenci funkce hledáme určitou funkci, jejíž diference je právě tato daná funkce. Ačkoliv umíme vypočítat diferenci každé funkce (existují-li funkční hodnoty v bodech x a $x+h$), sumaci neumíme vždy obecně řešit. Můžeme tak sledovat analogii s integrálním počtem, kde situace, kdy neumíme nalézt integrál každé elementární funkce, zatímco derivovat ji umíme, nastává také.

Definice 4. *Je dána funkce $f(x)$ definovaná na množině $\mathcal{M}$. Nechť funkce $F(x)$ je taková, že pro $x \in \mathcal{M}$ je $\Delta F(x) = f(x)$. Funkci $F(x)$ nazýváme sumací funkce $f(x)$ v $\mathcal{M}$ a značíme*

$$F(x) = \Delta^{-1} f(x).$$

Základní vlastnosti sumace shrnuje následující věta převzatá z [5, Věta II,5].

Věta 5. *Nechť jsou $F(x)$ a $G(x)$ dvě funkce, které mají pro $x \in \mathcal{M}$ stejnou diferenci, tj. $\Delta F(x) = \Delta G(x)$. Potom $F(x) = G(x) + p(x)$, kde $p(x)$ je libovolná periodická funkce s periodou h.*

Speciálně, bude-li $G(x) = 0$, je $\Delta G(x) = 0$, plyne z Věty 5, že vztahu $\Delta F(x) = 0$ vyhovuje libovolná periodická funkce $p(x)$ s periodou h. Například lze psát, že $F(x) = k$, kde k je libovolná konstanta, tudíž z věty vyplývá, že sumací existuje nekonečně mnoho.

Poznámka 2. *Bez újmy na obecnosti se pro snažší zápis ve zbylém textu při výpočtu sumace omezíme pouze na speciální typ periodické funkce, a to na funkci konstantní.*

Analogicky jako u diferencí si v dalším připomene (bez důkazu) pravidla pro výpočet sumací obecných funkcí, viz [5, Věta II,6].

Věta 6. *Nechť $\Delta^{-1} f(x)$ je sumace funkce $f(x)$ a $\Delta^{-1} g(x)$ je sumace funkce $g(x)$, pak platí:*

1) *Sumace součtu (resp. rozdílu) funkcí je rovna součtu (resp. rozdílu) jejich sumací, tj.*

$$\Delta^{-1}[f(x) \pm g(x)] = \Delta^{-1} f(x) \pm \Delta^{-1} g(x)$$

2) *Multiplikační konstantu k lze vytknout před sumaci, tj.*

$$\Delta^{-1}[k f(x)] = k \Delta^{-1} f(x).$$

V prvním případě (Věta 6, bod 1) hovoříme o aditivitě a v druhém případě (Věta 6, bod 2) o homogenitě operátoru sumace Δ^{-1}, opět snadno nalezneme jistou podobnost s vlastnostmi integrálu.

V následujících dvou větách popíšeme sumaci pro polynomy a exponenciální funkce v obecném tvaru, porovnej s Větou 2, body 2) a 3). Důkazy těchto vět neuvádíme, lze je odvodit stejným postupem jako v níže uvedených příkladech pro konkrétní funkce.

Věta 7. *Nechť je dán polynom $P_n(x)$ stupně n. Potom existuje polynom $Q_{n+1}(x)$ stupně $n+1$ takový, že $\Delta Q_{n+1}(x) = P_n(x)$, tj. $\Delta^{-1}P_n(x) = Q_{n+1}(x)$ pro daný libovolný diferenční krok h.*

Příklad 6. *Určete všechny funkce $F(x)$, $x \in \mathbb{R}$, pro než platí $F(x) = \Delta^{-1}(2x-1)$ s krokem $h = 0{,}5$.*

Řešení: Jelikož $F(x) = \Delta^{-1}(2x-1)$, můžeme psát $\Delta F(x) = 2x-1$, potom

$$F(x+0{,}5) - F(x) = 2x - 1.$$

Z Věty 7 a z vlastností diference víme, že hledaná funkce bude polynom druhého stupně, který můžeme zapsat ve tvaru kvadratické funkce $ax^2 + bx + c$. Tedy

$$[a(x+0{,}5)^2 + b(x+0{,}5) + c] - [ax^2 + bx + c] = 2x - 1$$

a po úpravě získáváme rovnici

$$ax + 0{,}25a + 0{,}5b = 2x - 1.$$

Metodou neurčitých koeficientů, tj. porovnáním koeficientů u příslušných mocnin, obdržíme $a = 2$ a $0{,}25a + 0{,}5b = -1$, tj. $b = -3$. Výsledkem jsou tedy funkce

$$F(x) = 2x^2 - 3x + c,$$

kde c je jistá libovolná konstanta. ○

Věta 8. *Nechť $q > 0$ a $q \neq 1$, pak pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a pro libovolný diferenční krok h platí*

$$\Delta^{-1}q^x = \frac{1}{c}q^x,$$

kde c je jistá nenulová konstanta.

Příklad 7. *Určete všechny funkce $F(x)$, $x \in \mathbb{R}$, pro než platí $F(x) = \Delta^{-1}2^x$ s krokem $h = 2$.*

Řešení: Víme, že $F(x) = \Delta^{-1}2^x$, proto $\Delta F(x) = 2^x$. Dle vlastností diference můžeme psát

$$F(x+2) - F(x) = 2^x.$$

Podle Věty 8 víme, že hledaná funkce bude mít tvar $\frac{1}{c}2^x$, proto lze psát

$$\frac{1}{c}2^{x+2} - \frac{1}{c}2^x = 2^x,$$

a z této rovnice vyjádřit neznámou $c = 3$. Nakonec podle Věty 5 všechny hledané funkce mají tvar

$$F(x) = \frac{1}{3}2^x + K,$$

kde K je jistá libovolná konstanta. ○

2 Diferenční rovnice

V následující kapitole si představíme již hlavní téma této práce – diferenční rovnice – a popíšeme jejich klasifikaci. Nejprve si ukážeme diferenční rovnice 1. a 2. typu a jak je lze mezi sebou převádět. U diferenčních rovnic 2. typu si dále uvedeme rovnice prvního a vyššího, resp. k-tého řádu. Následně předvedeme jejich převody na rekurentní vzorce. Seznámíme se také s pojmem řešení diferenční rovnice, které lze reprezentovat vzorcem pro n-tý člen posloupnosti, jež splňuje předem daný vztah.

2.1 Typy diferenčních rovnic a jejich řešení

Nejprve představíme definici diferenční rovnice, jež je analogická definici diferenciální rovnice, jestliže derivace nahradíme diferencemi příslušného řádu. Definice jsou převzaty z knihy [5].

Definice 5. *Nechť pro všechna $x \in \mathcal{M}$ je definována funkce $f(x, y, \Delta y, \Delta^2 y, \ldots, \Delta^k y)$. Rovnici tvaru*

$$f(x, y, \Delta y, \Delta^2 y, \ldots, \Delta^k y) = 0,$$

ve které je neznámou funkce $y(x)$, nazýváme diferenční rovnicí k-tého řádu 1. typu. Partikulárním řešením této rovnice nazýváme každou funkci $y(x)$, která pro všechna $x \in \mathcal{M}$ splňuje danou rovnici. Obecným řešením nazýváme vzorec zahrnující všechna partikulární řešení.

Speciálním případem diferenční rovnice 1.typu je rovnice ve tvaru $\Delta y = f(x)$, se kterou jsme se již setkali v úlohách na sumaci, viz Sekce 1.6. Obecné řešení této rovnice je tedy

$$y(x) = F(x) + p(x),$$

kde $p(x)$ je libovolná periodická funkce s periodou h, resp. jistá libovolná konstanta.

Poznámka 3. *Ve zbytku práce se bez újmy na obecnosti omezíme na diferenční krok $h = 1$ a budeme požadovat, aby bod x_0 odpovídal počátku. Tohoto předpokladu lze snadno dosáhnout substitucí $x = hn + x_0$, díky které původní definiční obor $\mathcal{M} = \{x_0, x_0 + h, x_0 + 2h, \ldots\}$ přejde na množinu $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Můžeme tak ztotožnit $y(x) = \varphi(n)$ a zavést obvyklejší značení $\varphi(n + j) = y_{n+j}$, $j = 0, 1, 2, \ldots, k$. Funkce $\varphi(n)$ definované v množině $\mathbb{N}_0$ tak odpovídají posloupnostem y_n.*

Uvedenou transformaci nezávislé proměnné v diferenční rovnici si blíže popíšeme na níže uvedeném příkladu.

Příklad 8. *Diferenční rovnici* $\Delta y = xy$ *definovanou pro* $x \in \{1{,}5; 2{,}0; 2{,}5; \dots\}$ *převeďte na rovnici s definičním oborem* $\mathbb{N}_0$.

Řešení: Pro převod se hledá taková transformace, která převádí dané definiční obory, a to podle vzorce

$$n = \frac{x - x_0}{h},$$

kde $h = 0{,}5$ a $x_0 = 1{,}5$. Po dosazení těchto hodnot můžeme vyjádřit proměnnou x jako $x = 0{,}5n + 1{,}5$. Nyní se tento výraz dosadí do původní rovnice, čímž se převede tato rovnice na diferenční rovnici s definičním oborem $\mathbb{N}_0$, tj.

$$\Delta y = (0{,}5n + 1{,}5)y.$$

○

V dalším se budeme zabývat alternativním vyjádřením diferenční rovnice na množině $\mathbb{N}_0$ jakožto rovnice 2. typu. Vyjádříme-li v diferenční rovnici 1. typu všechny diference podle Věty 1, tj.

$$\begin{aligned}
\Delta y &= \varphi(n+1) - \varphi(n) = y_{n+1} - y_n \\
\Delta^2 y &= \varphi(n+2) - 2\varphi(n+1) + \varphi(n) = y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n \\
&\vdots \\
\Delta^k y &= \varphi(n+k) - k\varphi(n+k-1) + \binom{k}{2}\varphi(n+k-2) - \ldots + (-1)^k\varphi(n) \\
&= y_{n+k} - ky_{n+k-1} + \binom{k}{2}y_{n+k-2} - \ldots + (-1)^k y_n
\end{aligned}$$

a sloučíme-li ve funkci $f(x, y, \Delta y, \Delta^2 y, \dots, \Delta^k y)$ členy se stejnými indexy, získáme novou funkci $g(n, y_n, y_{n+1}, y_{n+2}, \dots, y_{n+k})$. Tímto postupem získáme nové vyjádření původní diferenční rovnice, viz definice níže.

Definice 6. *Nechť funkce* $g(n, y_n, y_{n+1}, y_{n+2}, \dots, y_{n+k})$, *kde* $y_{n+j} = \varphi(n+j)$, *je definována pro všechna* $n \in \mathbb{N}_0$. *Rovnice tvaru*

$$g(n, y_n, y_{n+1}, y_{n+2}, \dots, y_{n+k}) = 0,$$

ve které je neznámou funkce (posloupnost) $y_n = \varphi(n)$, *nazýváme diferenční rovnicí 2. typu. Jestliže jsou v této rovnici koeficienty u* y_n *a* y_{n+k} *pro všechna* $n \in \mathbb{N}_0$ *nenulové, říkáme, že rovnice je* k*-tého řádu.*

Obecným řešením diferenční rovnice 2. typu k*-tého řádu budeme nazývat takové řešení* $y_n = \varphi(n)$, *které obsahuje* k *libovolných nezávislých konstant* $C_1, C_2, \dots, C_k$, *které se nedají nahradit menším počtem obecných konstant.*

Partikulární řešení je zvláštní případ obecného řešení, ve kterém za obecné konstanty dosadíme určité číselné hodnoty.

Při sestavování partikulárního řešení je tedy potřeba určit hodnoty konstant C_1, $C_2, \dots, C_k$. Tyto hodnoty se stanoví z počátečních podmínek, které tvoří prvních k členů posloupnosti $y_0, y_1, \dots, y_{k-1}$.

V definici obecného řešení se setkáváme s pojmem nezávislých konstant, který je úzce spjat s definicí tzv. lineárně nezávislých funkcí. Vzájemný vztah ilustrujeme také na přiloženém příkladě.

Definice 7. *Říkáme, že funkce $\varphi_1(n), \varphi_2(n), \ldots, \varphi_k(n)$, společně definované na $\mathbb{N}_0$ jsou lineárně závislé v množině $\mathbb{N}_0$, jestliže existuje aspoň jedna konstanta $C_j \neq 0$, $j = 1, 2, \ldots, k$, tak, aby pro všechna $n \in \mathbb{N}_0$ platila rovnice*

$$C_1\varphi_1(n) + C_2\varphi_2(n) + \ldots + C_k\varphi_k(n) = 0.$$

Není-li tomu tak, pak říkáme, že funkce $\varphi_1(n), \varphi_2(n), \ldots, \varphi_k(n)$ jsou lineárně nezávislé.

Příklad 9. *Dokažte, že funkce 9^n a 3^{2n+1} jsou lineárně závislé v množině $\mathbb{N}_0$.*

Řešení: Podle definice hledáme konstanty C_1 a C_2 takové, že platí

$$C_1 \cdot 9^n + C_2 \cdot 3^{2n+1} = 0.$$

Výše uvedenou rovnici upravíme a vydělíme členem 9^n, čímž získáme novou rovnici o dvou neznámých, tj.

$$C_1 + 3C_2 = 0.$$

Jednoduchou úpravou zjistíme, že $C_1 = -3C_2$, kde C_2 klademe libovolné nenulové. Protože existuje alespoň jedno netriviální řešení rovnice

$$C_1 \cdot 9^n + C_2 \cdot 3^{2n+1} = 0,$$

jsou funkce 9^n a 3^{2n+1} lineárně závislé. ○

Pro ověření lineární nezávislosti funkcí v množině $\mathbb{N}_0$ se v teorii diferenčních rovnic používá následující vlastnosti vycházející z řešitelnosti soustav lineárních algebraických rovnic. Pro detailnější výklad odkážeme čtenáře na [5, Věty III,1-2] a uvedeme zde pouze postačující podmínky pro lineární nezávislost.

Věta 9. *K tomu, aby funkce $\varphi_1(n), \varphi_2(n), \ldots, \varphi_k(n)$ byly lineárně nezávislé v množině $\mathbb{N}_0$ stačí, aby byl aspoň pro jedno $n \in \mathbb{N}_0$ determinant*

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(n) & \cdots & \varphi_k(n) \\ \Delta\varphi_1(n) & \cdots & \Delta\varphi_k(n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta^{k-1}\varphi_1(n) & \cdots & \Delta^{k-1}\varphi_k(n) \end{vmatrix} \neq 0,$$

resp. determinant

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(n) & \cdots & \varphi_k(n) \\ \varphi_1(n+1) & \cdots & \varphi_k(n+1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1(n+k-1) & \cdots & \varphi_k(n+k-1) \end{vmatrix} \neq 0.$$

2.2 Vzájemné převody rovnic a rekurentní vzorce

V literatuře se obvykle setkáme s definicí diferenční rovnice 2. typu včetně definice jejího řádu. Na následujících příkladech si ukážeme vzájemné převody mezi diferenčními rovnicemi 1. a 2. typu, a že řád rovnice nemusí být při převodu zachován.

Příklad 10. *Rovnici 1. typu $\Delta^2 y - 2\Delta y - 3y = x$ s krokem $h = 1$ převeďte na rovnici 2. typu a určete řád rovnice.*

Řešení: Zavedeme-li přirozené značení $x = n$ a $y = y_n$, pak z vlastností diference víme, že

$$\Delta y = y_{n+1} - y_n, \quad \Delta^2 y = y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n.$$

Po dosazení do zadání získáme

$$y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n - 2(y_{n+1} - y_n) - 3y_n = n,$$

a následnou úpravou

$$y_{n+2} - 4y_{n+1} = n.$$

Hledaná rovnice 2. typu však není rovnicí 2. řádu, neboť substitucí $m = n+1$ přejde na rovnici

$$y_{m+1} - 4y_m = m - 1,$$

která je pouze 1. řádu. Můžeme si všimnout, že při převodu rovnice nezůstal její řád zachován. ○

Příklad 11. *Rovnici $y_{n+2} + y_{n+1} - y_n = 0$ převeďte na rovnici 1. typu s definičním oborem $\mathbb{N}_0$ a určete řád rovnice.*

Řešení: Opět vycházíme z vlastností diference, kdy

$$\Delta y = y_{n+1} - y_n, \quad \Delta^2 y = y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n.$$

Označíme-li $y_n = y$, pak snadno vyjádříme členy

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= \Delta y + y \\ y_{n+2} &= \Delta^2 y + 2(\Delta y + y) - y = \Delta^2 y + 2\Delta y + y. \end{aligned}$$

Po dosazení do původní rovnice 2. typu máme rovnici

$$(\Delta^2 y + 2\Delta y + y) + (\Delta y + y) - y = 0,$$

kterou dále upravíme a získáme rovnici 1. typu, jejíž řád je 2, tj.

$$\Delta^2 y + 3\Delta y + y = 0.$$ ○

V závěru této kapitoly ukážeme, že ve speciálním případě můžeme diferenční rovnici 2. typu reprezentovat pomocí rekurentních vzorců pro posloupnosti, neboť pracujeme na množině $\mathbb{N}_0$. Uvažujeme tedy obecný tvar diferenční rovnice 2. typu s definičním oborem $\mathbb{N}_0$, tj.

$$g(n, y_n, y_{n+1}, y_{n+2}, \ldots, y_{n+k}) = 0,$$

kde y_n značí n-tý člen posloupnosti.

Podaří-li se nám z této rovnice explicitně vyjádřit nejvyšší člen dané posloupnosti, tj. nalezneme-li funkci G tak, že platí

$$y_{n+k} = G(n, y_n, y_{n+1}, y_{n+2}, \ldots, y_{n+k-1}),$$

získáme obecný rekurentní vzorec pro posloupnost y_n. V tomto rekurentním vzorci je hodnota $(n+k)$-tého členu posloupnosti vyjádřena pomocí jejích k předcházejících členů a nezávislé proměnné n.

Příklad 12. *Odvoďte rekurentní vzorec pro partikulární řešení diferenční rovnice*

$$y_{n+2} - y_{n+1} - y_n = 0$$

s počátečními podmínkami $y_0 = 0$ *a* $y_1 = 1$. *Vypočítejte prvních 10 členů.*

Řešení: Z počátečních podmínek známe hodnoty $y_0 = 0$ a $y_1 = 1$. Vyjádříme-li ze zadání nejvyšší člen

$$y_{n+2} = y_{n+1} + y_n,$$

zjistíme, že nová hodnota se vypočítá jako součet dvou předchozích hodnot. Tato vlastnost je charakteristická pro tzv. Fibonacciho posloupnost, kterou se nazývá nekonečná posloupnost přirozených čísel prvně popsaná italským matematikem Leonardem Pisánským na příkladu o růstu populace králíků.

Prvních 10 členů této posloupnosti nabývá následujících hodnot $y_0 = 0$, $y_1 = 1$, $y_2 = 1$, $y_3 = 2$, $y_4 = 3$, $y_5 = 5$, $y_6 = 8$, $y_7 = 13$, $y_8 = 21$ a $y_9 = 34$. ◯

3 Lineární diferenční rovnice

Nyní se pozastavíme nad problematikou lineárních diferenčních rovnic – speciální třídou diferenčních rovnic – jež zavedeme pomocí diferenční rovnice 2. typu definované v množině $\mathbb{N}_0$, viz [5].

Definice 8. *Diferenční rovnice tvaru*

$$a_0(n)y_n + a_1(n)y_{n+1} + a_2(n)y_{n+2} + \ldots + a_k(n)y_{n+k} = b(n),$$

kde $b(n)$, $a_0(n)$, $a_1(n), \ldots, a_k(n)$ jsou libovolné posloupnosti definované v $\mathbb{N}_0$, přičemž $a_0(n) \neq 0$ a $a_k(n) \neq 0$ pro $n \in \mathbb{N}_0$, nazýváme lineárními diferenčními rovnicemi k-tého řádu s nekonstantními koeficienty a pravou stranou. Posloupnosti $a_0(n)$, $a_1(n)$, $a_2(n), \ldots, a_k(n)$ nazýváme koeficienty a $b(n)$ pravou stranou.

Tato práce však bude zaměřena na řešení lineárních diferenčních rovnic s konstantními koeficienty, tudíž všechny posloupnosti $a_0(n)$, $a_1(n), \ldots, a_k(n)$ budou konstantní, tj. $a_0(n) = a_0$, $a_1(n) = a_1, \ldots, a_k(n) = a_k$, kde $a_j \in \mathbb{R}$, $0 \leq j \leq k$. Opět předpokládáme, že $a_0 \neq 0$ a $a_n \neq 0$. Pokud bude $b(n) = 0$ (nulová posloupnost), říkáme, že se jedná o lineární diferenční rovnici bez pravé strany, nazývanou také homogenní lineární diferenční rovnice, tedy

$$\sum_{j=0}^{k} a_j y_{n+j} = 0. \tag{HLDR}$$

V opačném případě, je-li $b(n) \neq 0$, se jedná o lineární diferenční rovnici s pravou stranou, nazývanou také nehomogenní lineární diferenční rovnice, tedy

$$\sum_{j=0}^{k} a_j y_{n+j} = b(n). \tag{NLDR}$$

Než si ukážeme postup řešení lineárních diferenčních rovnic, ať už homogenních nebo nehomogenních, uvedeme si existenční větu pro lineární diferenční rovnici, jejíž formulace je převzata z [5, Věta IV,1].

Věta 10. *Nechť je dáno k hodnot: y_c, $y_{c+1}, \ldots, y_{c+k-1}$ v k po sobě jdoucích bodech z definičního oboru $\mathbb{N}_0$ lineární diferenční rovnice (NLDR) k-tého řádu. Potom existuje v $\mathbb{N}_0$ jediné řešení rovnice (NLDR), které nabývá předepsaných hodnot y_c, $y_{c+1}, \ldots, y_{c+k-1}$ v daných bodech $c, c+1, \ldots, c+k-1$.*

Nutno podotknout, že tvrzení Věty 10, ačkoliv to není přímo zmíněno, platí i pro homogenní lineární diferenční rovnici, položíme-li $b(n) = 0$. V dalším se budeme zabývat otázkou, jakého tvaru jsou řešení rovnice (HLDR).

Věta 11. *Nechť $\varphi_1(n)$ a $\varphi_2(n)$ jsou dvě různá partikulární řešení rovnice (HLDR). Potom posloupnost*

$$y_n = C_1\varphi_1(n) + C_2\varphi_2(n), \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

je také řešením rovnice (HLDR).

Známe-li tedy partikulární řešení rovnice (HLDR), potom jsme schopni najít nekonečně mnoho dalších řešení jako lineární kombinaci těchto partikulárních řešení. Z Věty 11 plyne důsledek, a sice pokud dosadíme za konstanty $C_1 = C_2 = 0$, potom je řešením rovnice (HLDR) $y_n = 0 \cdot \varphi_1(n) + 0 \cdot \varphi_2(n) = 0$ pro $n \in \mathbb{N}_0$. Tomuto řešení říkáme triviální řešení. Každá rovnice (HLDR) má tedy triviální řešení $y_n = 0$.

Pro další studium dané problematiky se seznámíme s pojmem fundamentálního systému řešení.

Definice 9. *Říkáme, že posloupnosti $\varphi_1(n)$, $\varphi_2(n), \dots, \varphi_k(n)$, které jsou partikulárním řešením (HLDR) v množině $\mathbb{N}_0$, tvoří tzv. fundamentální systém řešení, jestliže jsou posloupnosti $\varphi_1(n)$, $\varphi_2(n), \dots, \varphi_k(n)$ lineárně nezávislé.*

V praktických úlohách tak lineární nezávislost příslušné množiny funkcí ověřujeme podle Věty 9. Následující věta z [5, Věta IV,5] popisuje vztah mezi partikulárním řešením rovnice (HLDR) a jejím příslušným fundamentálním systémem.

Věta 12. *Nechť funkce $\varphi_1(n), \varphi_2(n), \dots, \varphi_k(n)$ tvoří fundamentální systém řešení rovnice (HLDR) v $\mathbb{N}_0$. Nechť $\varphi(n)$ je libovolné partikulární řešení rovnice (HLDR) v $\mathbb{N}_0$. Potom existují konstanty $C_1, C_2, \dots, C_k$ tak, že*

$$\varphi(n) = \sum_{j=1}^{k} C_j\varphi_j(n).$$

Známe-li fundamentální systém řešení rovnice (HLDR), tak jako důsledek Věty 12 lze odvodit tvar obecného řešení této rovnice, tj.

$$y_n^H = C_1\varphi_1(n) + C_2\varphi_2(n) + \cdots + C_k\varphi_k(n)$$

kde $C_1, C_2, \dots, C_k$ jsou libovolné konstanty.

Pro sestavení obecného řešení rovnice (NLDR) se pak použije následující věta, viz [5, Věta IV,6].

Věta 13. *Nechť $y_n^H = \sum_{j=1}^{k} C_j\varphi_j(n)$ je obecné řešení rovnice (HLDR) a nechť $y_n^P = \psi(n)$ je partikulární řešení rovnice (NLDR). Potom obecné řešení rovnice (NLDR) je funkce*

$$y_n = y_n^H + y_n^P.$$

V následujících částech se podrobněji podíváme na postup hledání řešení lineárních diferenčních rovnic, a to jak homogenních, tak těch nehomogenních. Daná látka je koncipována pouze jako návod, jak nalézt řešení, doplněná komentářem bez důkazů jednotlivých tvrzení. Pro detailní výklad včetně důkazů odkážeme čtenáře na zdroje [2] a [5].

3.1 Postup řešení homogenních lineárních diferenčních rovnic s konstantními koeficienty

Nejprve budeme hledat netriviální řešení rovnice (HLDR), tj. rovnice tvaru

$$a_0 y_n + a_1 y_{n+1} + \cdots + a_k y_{n+k} = 0,$$

kde $a_0, a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ jsou dané konstanty, přičemž $a_0 \neq 0$ a $a_k \neq 0$. Potom rovnici

$$a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_k\lambda^k = 0,$$

nazveme charakteristickou rovnicí diferenční rovnice. Tuto rovnici získáme dosazením partikulárního řešení $y_n = \lambda^n$ do rovnice, kde $\lambda \in \mathbb{C}$ je konstanta, a následným vydělením celé rovnice λ^n. Vzhledem k tomu, že hledáme netriviální řešení, tudíž předpokládáme $y_n \neq 0$, resp. $\lambda \neq 0$, můžeme tento krok provést. Tento předpoklad je splněn, protože $a_0 \neq 0$, a tak charakteristická rovnice nemá nulový kořen.

Můžeme si všimnout, že tato charakteristická rovnice neobsahuje proměnnou n, ale pouze jednu neznámou λ. Přecházíme tedy z diferenční rovnice na algebraickou rovnici k-tého stupně s neznámou λ. Tato rovnice má nejvýše k různých kořenů, které určují další postup. Kořeny charakteristické rovnice mohou být reálné i komplexně sdružené, kladné i záporné, různé i vícenásobné. V následujících částech si rozebereme jednotlivé možnosti.

A) Kořeny charakteristické rovnice jsou jednonásobné reálné různé.

Pokud má charakteristická rovnice k různých reálných kladných kořenů $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, obecné řešení příslušné rovnice (HLDR) můžeme zapsat ve tvaru

$$y_n^H = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n + \cdots + C_k\lambda_k^n,$$

kde $C_1, C_2, \ldots, C_k$ jsou libovolné konstanty.

Situace je poněkud komplikovanější v případě záporných reálných kořenů, jelikož hodnota λ^n, je-li $n \in \mathbb{R}$, leží obecně v oboru komplexních čísel. Tato situace však nenastane pro $n \in \mathbb{N}_0$, kdy získáme přímo reálné řešení y_n, proto tuto možnost nebereme v potaz a výše uvedený vzorec pro y_n^H platí i pro případ $\lambda_j < 0$.

B) Charakteristická rovnice má komplexně sdružené jednonásobné kořeny.

Má-li charakteristická rovnice komplexní kořeny $\lambda_{1,2} = r(\cos(\omega) \pm i\sin(\omega))$, potom partikulární řešení rovnice (HLDR) můžeme zapsat jako dvojici reálných řešení

$$\varphi_1(n) = r^n\cos(\omega n), \qquad \varphi_2(n) = r^n\sin(\omega n),$$

která jsou lineárně nezávislá. Tedy za řešení rovnice (HLDR) můžeme pak považovat i funkci

$$\varphi_{1,2}(n) = r^n\left(C_1\cos(\omega n) + C_2\sin(\omega n)\right),$$

kde C_1 a C_2 jsou opět libovolné konstanty.

C) Charakteristická rovnice má vícenásobný (s-násobný) kořen.

V tomto případě lze charakteristickou rovnici zapsat ve tvaru součinu

$$(\lambda - \lambda_1)^s P_{k-s}(\lambda) = 0,$$

kde $P_{k-s}(\lambda)$ je nenulový polynom stupně $k - s$.

Předpokládejme nejprve, že daná charakteristická rovnice má s-násobný reálný kořen λ_1, přičemž $1 < s \leq k$. Pak lze sestrojit s lineárně nezávislých partikulárních řešení příslušné diferenční rovnice, která mají následující tvar

$$\varphi_1(n) = \lambda_1^n, \qquad \varphi_2(n) = n\lambda_1^n, \qquad \dots, \qquad \varphi_s(n) = n^{s-1}\lambda_1^n.$$

Tedy funkci představující řešení rovnice (HLDR) lze pak zapsat souhrnně jako

$$\begin{aligned} \varphi_{1,2,\dots s}(n) &= C_1\varphi_1(n) + C_2\varphi_2(n) + \dots + C_s\varphi_s(n) = (C_1 + C_2 n + \dots + C_s n^{s-1})\lambda_1^n \\ &= P_{s-1}(n)\lambda_1^n, \end{aligned}$$

kde $P_{s-1}(n)$ je libovolný polynom stupně $s - 1$ s koeficienty $C_1, \dots, C_s$.

Ačkoliv se předchozí případ týkal reálných vícenásobných kořenů, lze jej s drobnou úpravou uplatnit i v situaci, kdy charakteristická rovnice má komplexně sdružené kořeny $\lambda_{1,2} = r\,(\cos(\omega) \pm i \sin(\omega))$. V tomto případě jsou partikulárními řešeními rovnice (HLDR) funkce

$$\begin{array}{llll} \varphi_1(n) = r^n \cos(\omega n), & \varphi_3(n) = n r^n \cos(\omega n), & \dots, & \varphi_{2s-1}(n) = n^{s-1} r^n \cos(\omega n), \\ \varphi_2(n) = r^n \sin(\omega n), & \varphi_4(n) = n r^n \sin(\omega n), & \dots, & \varphi_{2s}(n) = n^{s-1} r^n \sin(\omega n), \end{array}$$

resp. řešením (HLDR) je jejich libovolná (netriviální) lineární kombinace.

Nyní jsme si rozebrali, jaké mohou nastat situace při řešení homogenních diferenčních rovnic s konstantními koeficienty. V následující části si předchozí případy ilustrujeme na třech konkrétních příkladech. Jedna úloha bude mít za řešení charakteristické rovnice reálné různé kořeny, druhá úloha reálný vícenásobný kořen a poslední úloha komplexně sdružené kořeny.

Příklad 13. *Nalezněte obecné řešení rovnice* $y_{n+2} + 4y_{n+1} + 3y_n = 0$.

Ř e š e n í: Charakteristická rovnice má tvar

$$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$$

a kořeny jsou reálná čísla $\lambda_1 = -3$ a $\lambda_2 = -1$. Potom obecné řešení rovnice má tvar

$$y_n = C_1(-3)^n + C_2(-1)^n, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

○

Příklad 14. *Nalezněte obecné řešení rovnice* $y_{n+2} - 6y_{n+1} + 9y_n = 0$.

Ř e š e n í: Charakteristická rovnice je tvaru

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

a má pouze dvojnásobný reálný kořen $\lambda_{1,2} = 3$. Obecné řešení dané rovnice pak je

$$y_n = C_1 3^n + C_2 n 3^n = 3^n(C_1 + C_2 n), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \qquad \bigcirc$$

Příklad 15. *Nalezněte obecné řešení rovnice* $y_{n+2} + 4y_n = 0$.

Ř e š e n í: Kořeny příslušné charakteristické rovnice

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

jsou komplexně sdružená čísla $\lambda_{1,2} = \pm 2i$. Následně tento algebraický tvar komplexního čísla převedeme na goniometrický tvar, tj. $\lambda_{1,2} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \pm i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$. Potom obecné řešení diferenční rovnice lze psát jako

$$y_n = 2^n \left(C_1 \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}. \qquad \bigcirc$$

3.2 Postup řešení nehomogenních lineárních diferenčních rovnic s konstantními koeficienty

Častěji než s homogenními lineárními diferenčními rovnicemi se setkáváme s nehomogenními rovnicemi, tedy s rovnicemi s pravou stranou, které mají následující tvar

$$a_0 y_n + a_1 y_{n+1} + \ldots + a_k y_{n+k} = b(n),$$

kde a_0, a_1, ..., a_k jsou, stejně jako v předchozí sekci, dané reálné konstanty, přičemž $a_0 \neq 0$ a $a_k \neq 0$.

V závislosti na tvaru pravé strany můžeme k řešení použít různé metody. Má-li pravá strana speciální tvar, lze použít metodu odhadu partikulárního řešení, v obecném případě můžeme vždy použít metodu variace konstant. Obě tyto metody si podrobně popíšeme v této sekci. Poznamenejme na úvod, ať zvolíme jakoukoliv metodu, musíme nejprve najít obecné řešení přidružené homogenní rovnice

$$a_0 y_n + a_1 y_{n+1} + \ldots + a_k y_{n+k} = 0,$$

což je podle Věty 12, resp. jejího důsledku, lineární kombinace funkcí z fundamentálního systému řešení, tj. $y_n^H = \sum_{j=1}^{k} C_j \varphi_j(n)$.

A) Metoda odhadu partikulárního řešení

Tuto metodu lze použít pouze při řešení diferenčních rovnic, kdy na pravé straně jsou speciální funkce. Přesněji jde o funkce, které lze sestavit ze součtu, rozdílu a součinu funkcí k, n^s, q^n, $\sin(\alpha n)$, $\cos(\alpha n)$. Tyto funkce mají tu vlastnost, že jejich diference patří opět do stejné třídy funkcí. Této vlastnosti můžeme využít i obráceně, tzn. pokud známe výslednou funkci $b(n)$, jež je dána příslušnou kombinací výše uvedených funkcí, bude hledané partikulární řešení také funkce stejného typu. Toto řešení určíme tak, že do původní diferenční rovnice dosadíme odhadnutou funkci v obecném tvaru, který později specifikujeme metodou neurčitých koeficientů.

Zadaná nehomogenní rovnice má tedy požadovaný tvar

$$\sum_{j=0}^{k} a_j y_{n+j} = q^n \left(P_u(n)\cos(\alpha n) + Q_v(n)\sin(\alpha n)\right).$$

kde $P_u(n)$, resp $Q_v(n)$, je polynom stupně $u \geq 0$, resp. $v \geq 0$, přičemž může nastat i $q = 1$ nebo $\alpha = 0$.

Má-li charakteristická rovnice kořeny $\lambda_j \neq q(\cos(\alpha) \pm i\sin(\alpha))$, potom partikulární řešení hledáme ve tvaru

$$y_n^P = q^n \left(R_t(n)\cos(\alpha n) + S_t(n)\sin(\alpha n)\right),$$

kde $R_t(n)$ a $S_t(n)$ jsou polynomy stupně $t = \max(u, v)$.

Oproti tomu, platí-li pro některý kořen charakteristické rovnice $\lambda_j = q(\cos(\alpha) \pm i\sin(\alpha))$, potom partikulární řešení hledáme ve tvaru

$$y_n^P = n^s q^n \left(R_t(n)\cos(\alpha n) + S_t(n)\sin(\alpha n)\right),$$

kde $s \geq 1$ je násobnost daného kořene charakteristické rovnice.

Nakonec výsledné obecné řešení nehomogenní diferenční rovnice zapíšeme ve tvaru $y_n = y_n^H + y_n^P$. Výše uvedný postup si nyní uvedeme na dvou konkrétních příkladech.

Příklad 16. *Vyřešte metodou odhadu partikulárního řešení diferenční rovnici* $y_{n+2} - 4y_n = (n-1)2^n$.

Ř e š e n í: Charakteristická rovnice přidružené homogenní diferenční rovnice má tvar

$$\lambda^2 - 4 = 0$$

a její kořeny jsou $\lambda_1 = 2$ a $\lambda_2 = -2$. Tedy obecné řešení homogenní rovnice je

$$y_n^H = C_1 2^n + C_2(-2)^n, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Pravá strana diferenční rovnice je ve tvaru $P_1(n)q^n$, kde $q = 2 = \lambda_1$. Jelikož násobnost tohoto kořene charakteristické rovnice je $s = 1$, hledáme partikulární řešení ve tvaru

$$y_n^P = n^1 q^n (an + b) = 2^n(an^2 + bn).$$

Neurčité koeficienty $a, b \in \mathbb{R}$ se získají dosazením tohoto odhadu do původního zadání za y_n a y_{n+2}, tj.

$$[2^{n+2}(a(n+2)^2 + b(n+2)] - 4[2^n(an^2 + bn)] = (n-1)2^n.$$

Vydělením celé rovnice členem 2^n, roznásobením a upravením výrazů se získá rovnice

$$16an + 16a + 8b = n - 1,$$

ze které lze přejít k porovnání koeficientů u příslušných mocnin, tj.

$$\begin{aligned} 16a &= 1 \\ 16a + 8b &= -1 \end{aligned}$$

Tedy $a = \frac{1}{16}$ a $b = -\frac{1}{4}$, potom hledaným partikulárním řešením je

$$y_n^P = \left(\frac{n^2}{16} - \frac{n}{4}\right) 2^n.$$

Nakonec obecné řešení nehomogenní diferenční rovnice zapíšeme ve tvaru součtu

$$y_n = y_n^H + y_n^P = \left(\frac{n^2}{16} - \frac{n}{4} + C_1\right) 2^n + C_2(-2)^n, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

○

Příklad 17. *Vyřešte metodou odhadu partikulárního řešení diferenční rovnici* $y_{n+2} - 4y_n = \cos(2n) + 2\sin(2n)$.

Ř e š e n í: Postup řešení tohoto příkladu je stejný jako u příkladu předchozího. Nejprve se stanoví obecné řešení přidružené homogenní rovnice, analogicky k předchozímu Příkladu 16 můžeme psát

$$y_n^H = C_1 2^n + C_2(-2)^n, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Pravá strana diferenční rovnice je nyní tvaru $1^n\left(P_0(n)\cos(2n) + Q_0(n)\sin(2n)\right)$. Jelikož číslo $\pm 2i$ není kořenem charakteristické rovnice, hledáme tak partikulární řešení ve tvaru

$$y_n^P = a\cos(2n) + b\sin(2n), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Dosazením tohoto odhadu do původní diferenční rovnice obdržíme

$$[a\cos(2n+4) + b\sin(2n+4)] - 4[a\cos(2n) + b\sin(2n)] = \cos(2n) + 2\sin(2n),$$

a užitím součtových vzorců pro goniometrické funkce

$$\begin{aligned} \sin(2n+4) &= \sin(2n)\cos(4) + \cos(2n)\sin(4), \\ \cos(2n+4) &= \cos(2n)\cos(4) - \sin(2n)\sin(4) \end{aligned}$$

upravíme na tvar

$$[a\cos(4) - 4a + b\sin(4)]\cos(2n) + [-a\sin(4) + b\cos(4) - 4b]\sin(2n) = \cos(2n) + 2\sin(2n).$$

Následně porovnáme koeficienty u příslušných goniometrických funkcí

$$\begin{aligned} a\cos(4) - 4a + b\sin(4) &= 1 \\ -a\sin(4) + b\cos(4) - 4b &= 2 \end{aligned}$$

Užitím dosazovací metody, kdy z druhé rovnice vyjádříme neznámou

$$b = \frac{2 + a\sin(4)}{\cos(4) - 4}$$

a dosadíme ji do první rovnice, dostaneme

$$a\cos(4) - 4a + \frac{2 + a\sin(4)}{\cos(4) - 4}\sin(4) = 1,$$

resp.

$$a = \frac{\cos(4) - 2\sin(4) - 4}{[\cos(4) - 4]^2 + \sin^2(4)}.$$

Následně vyjádříme

$$b = \frac{2 + \frac{\cos(4) - 2\sin(4) - 4}{[\cos(4) - 4]^2 + \sin^2(4)}\sin(4)}{\cos(4) - 4}.$$

Potom hledaným partikulárním řešením je

$$y_n^P = \frac{\cos(4) - 2\sin(4) - 4}{[\cos(4) - 4]^2 + \sin^2(4)}\cos(2n) + \frac{2 + \frac{\cos(4) - 2\sin(4) - 4}{[\cos(4) - 4]^2 + \sin^2(4)}\sin(4)}{\cos(4) - 4}\sin(2n)$$

a výsledné obecné řešení nehomogenní diferenční rovnice opět zapíšeme ve tvaru součtu $y_n = y_n^H + y_n^P$. ○

B) Metoda variace konstant

Druhou metodou řešení lineárních diferenčních rovnic s pravou stranou je metoda variace konstant. Název vyplývá ze skutečnosti, že původní konstanty C_j, ve vyjádření obecného řešení přidružené rovnice (HLDR), nahradíme jistými funkcemi $C_j(n)$.

Při hledání partikulárního řešení postupujeme tak, že nejprve najdeme obecné řešení přidružené rovnice (HLDR), tj. $y_n^H = \sum_{j=1}^{k} C_j \varphi_j(n)$ a následně aplikujeme metodu variace konstant, kdy konstanty C_j zaměníme za funkce $C_j(n)$ a v tomto tvaru hledáme partikulární řešení, tj.

$$y_n^P = C_1(n)\varphi_1(n) + C_2(n)\varphi_2(n) + \cdots + C_k(n)\varphi_k(n).$$

Máme tedy k neznámých funkcí $C_j(n)$, $1 \le j \le k$, a pro jejich určení potřebujeme k podmínek. Jejich detailní odvození nalezneme v [5] a mají tvar soustavy rovnic pro neznámé diference $\Delta C_j(n)$, $1 \le j \le k$, s nulovými pravými stranami s výjimkou poslední rovnice, kdy je na pravé straně funkce $b(n)$, tj.

$$\begin{aligned}
\varphi_1(n+1)\Delta C_1 + \varphi_2(n+1)\Delta C_2 + \ldots + \varphi_k(n+1)\Delta C_k &= 0\\
\varphi_1(n+2)\Delta C_1 + \varphi_2(n+2)\Delta C_2 + \ldots + \varphi_k(n+2)\Delta C_k &= 0\\
&\vdots\\
\varphi_1(n+k-1)\Delta C_1 + \varphi_2(n+k-1)\Delta C_2 + \ldots + \varphi_k(n+k-1)\Delta C_k &= 0\\
a_k[\varphi_1(n+k)\Delta C_1 + \varphi_2(n+k)\Delta C_2 + \ldots + \varphi_k(n+k)\Delta C_k] &= b(n)
\end{aligned}$$

Jelikož funkce $\varphi_1(n), \varphi_2(n), \ldots, \varphi_k(n)$ jsou lineárně nezávislé, je matice této soustavy rovnic regulární, viz Věta 9, a proto existuje právě jedno řešení, které lze zapsat jako

$$\Delta C_1 = d_1(n), \qquad \Delta C_2 = d_2(n), \qquad \ldots, \qquad \Delta C_k = d_k(n).$$

Následně z vlastností sumace vypočítáme

$$C_j(n) = \Delta^{-1} d_j(n), \qquad 1 \le j \le k.$$

Poznamenejme, že funkce $C_j(n)$ jsou určeny jednoznačně až na aditivní konstantu (resp. periodickou funkci). Přesněji tedy můžeme psát

$$C_j(n) = \Delta^{-1} d_j(n) + K_j, \qquad K_j \in \mathbb{R}, \quad 1 \le j \le k.$$

Nezahrneme-li konstanty K_j do výše uvedeného zápisu, získáme po dosazení partikulární řešení rovnice (NLDR) ve tvaru

$$y_n^P = \sum_{j=1}^{k} \left[\Delta^{-1} d_j(n)\right] \varphi_j(n).$$

Pokud tyto konstanty do zápisu zahrneme, získáme přímo obecné řešení rovnice (NLDR), a sice

$$\begin{aligned}
y_n &= \sum_{j=1}^{k} \left[\Delta^{-1} d_j(n) + K_j\right] \varphi_j(n) = \sum_{j=1}^{k} \left[\Delta^{-1} d_j(n)\right] \varphi_j(n) + \sum_{j=1}^{k} K_j \varphi_j(n)\\
&= y_n^P + y_n^H,
\end{aligned}$$

které je opět ve tvaru součtu obecného řešení rovnice (HLDR) s jedním partikulárním řešením rovnice (NLDR). Uvedený postup si nyní ilustrujeme na příkladu.

Příklad 18. *Vyřešte metodou variace konstant rovnici* $y_{n+2} - 4y_{n+1} + 3y_n = 2$.

Ř e š e n í: Začneme řešením příslušné homogenní rovnice, jejíž charakteristická rovnice

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

má dva různé reálné kořeny $\lambda_1 = 3$ a $\lambda_2 = 1$. Potom obecným řešením příslušné homogenní rovnice je

$$y_n^H = C_1 3^n + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Dále pro nalezení řešení rovnice (NLDR) použijeme metodu variace konstant, tj.

$$y_n = C_1(n)3^n + C_2(n),$$

kde

$$\begin{aligned} 3^{n+1}\Delta C_1 + \Delta C_2 &= 0 \\ 3^{n+2}\Delta C_1 + \Delta C_2 &= 2. \end{aligned}$$

Užitím sčítací metody, přesněji odečtením první rovnice od druhé a následnou úpravou se vyjádří

$$\left(3^{n+2} - 3^{n+1}\right)\Delta C_1 = 2 \Rightarrow \Delta C_1 = \frac{1}{3^{n+1}}$$

a dopočítá se $\Delta C_2 = -1$.

V následujícím kroku je nutné využít vlastností sumace, které jsme uvedli ve Větě 8, resp. Větě 7. Podle těchto vět platí

$$C_1(n) = \frac{1}{a}3^{-n-1} + K_1, \quad C_2(n) = bn + K_2, \quad a, b, K_1, K_2 \in \mathbb{R}.$$

Neznámé konstanty a, b určíme dle definice diference jako

$$\begin{aligned} \Delta C_1 &= \left[\frac{3^{-n}}{a} + K_1\right] - \left[\frac{3^{-n-1}}{a} + K_1\right] \\ \frac{1}{3^{n+1}} &= \frac{2}{a}3^{-n-1} \\ a &= 2, \end{aligned}$$

resp.

$$\begin{aligned} \Delta C_2 &= [b(n+1) + K_2] - [bn + K_2] \\ -1 &= b. \end{aligned}$$

Příslušné funkce tedy mají tvar

$$C_1(n) = \frac{1}{2}3^{-n-1} + K_1, \quad C_2(n) = -n + K_2, \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R}$$

a po jejich dosazení do předpokládaného tvaru řešení, získáme obecné řešení

$$y_n = \left(\frac{1}{2}3^{-n-1} + K_1\right)3^n + \left(-n + K_2\right), \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R},$$

které po úpravě zapíšeme ve tvaru

$$y_n = K_1 3^n - n + K_2 + \frac{1}{6} = K_1 3^n + \widetilde{K_2} - n,$$

kde K_1 a $\widetilde{K_2} = K_2 + \frac{1}{6}$ jsou libovolné konstanty. ○

4 Aplikace

V předchozích kapitolách jsme se seznámili s pojmem diference, sumace, diferenční rovnice a ukázali jsme si postup řešení v případě lineárních rovnic. Tyto postupy jsme pro představu dále aplikovali na ilustrativních příkladech. Nyní se zaměříme na samotné využití těchto typů rovnic z praktického hlediska. Již v úvodu bylo zmíněno, že se tato práce zaměří na aplikace diferenčních rovnic v ekonomii, kde se využívají poměrně často. Mezi takové příklady patří například budoucí a současná hodnota peněz, výpočet úspor na důchod, umořování dluhu, modely na utváření tržní rovnováhy (známý pavučinový model, Cournotův model duopolu), či model ruinování hráče. V práci rozebereme výše konkrétně uvedené aplikace.

V prvních pěti sekcích si představíme aplikace řešené pomocí diferenčních rovnic prvního řádu, zbytek aplikací je pak popsán diferenčními rovnicemi druhého řádu.

4.1 Složené úročení, budoucí a současná hodnota peněz

Problematika finanční gramotnosti je v současnosti velmi aktuální. Mezi základní úlohy řadíme půjčky, spoření či pouze hodnotu peněz. Ačkoliv jsou jejich řešení popsána pomocí jednoduchých vzorců, v pozadí stojí diferenční rovnice, viz [1].

Příklad 19. *Dnes půjčíme svému známému 100 000 Kč s tím, že nám celou částku i s úroky splatí za 10 let. Jakou částku nám vrátí, je-li roční úroková míra 5%?*

Řešení: Po n letech (v našem případě $n = 10$) chceme splatit stejnou částku p_n, kterou bychom měli za stejnou dobu na spořicím účtu. Pokud bychom uložili částku $p_0 = K$ (v našem případě 100 000 Kč) na účet, na konci prvního roku bychom měli tuto částku navýšenou o úrok Ki, kde i je roční úroková míra (v našem případě $i = 0{,}05$). Další rok by se zůstatek znova úročil a takto by se pokračovalo celých n let. Celý proces bychom zapsali následně jako

$$\begin{aligned}
p_1 &= 100\,000 + 100\,000 \cdot 0{,}05 = p_0 + p_0 \cdot i = 100\,000 \cdot 1{,}05 = p_0(1+i),\\
p_2 &= [100\,000 \cdot 1{,}05] \cdot 1{,}05 = p_1(1+i) = 100\,000 \cdot 1{,}05^2 = p_0(1+i)^2,\\
&\vdots\\
p_{10} &= 100\,000 \cdot 1{,}05^{10} = p_0(1+i)^{10} \doteq 162\,889.
\end{aligned}$$

Po 10 letech by nám náš známý vrátil 163 000 Kč (zaokrouhleno na tisíce).

Druhým postupem, jak určit hodnotu členu p_{10}, je nalézt řešení homogenní diferenční rovnice

$$p_{n+1} - 1{,}05 p_n = 0,$$

kterou jsme odvodili ze skutečnosti, že následující člen posloupnosti je vždy o 5% větší než člen předchozí. Příslušná charakteristická rovnice

$$\lambda - 1{,}05 = 0$$

má pouze jeden reálný kořen $\lambda = 1{,}05$ a obecné řešení je tvaru

$$p_n = C \cdot 1{,}05^n, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Z počáteční podmínky $p_0 = 100\,000$ pak plyne, že $C = 100\,000$ a získáme stejný výsledek jako v prvním postupu, tj. $p_{10} = 100\,000 \cdot 1{,}05^{10}$. ◯

V tomto příkladě jsme si ukázali, jak spočítat budoucí hodnotu peněz. Snadno nahlédneme, že obecně lze použít vzorec na složené úročení

$$p_n = K(1+i)^n,$$

kde n je počet časových období půjčky/uložení peněz, K je půjčený/uložený kapitál a i je roční úroková míra. Daný vzorec je ve skutečnosti řešením diferenční rovnice

$$p_{n+1} - (1+i)p_n = 0$$

pro $p_0 = K$. V praxi se často ale můžeme setkat i s opačným typem úloh, kdy hledáme současnou hodnotu peněz, viz následující příklad.

Příklad 20. *Kolik peněz dnes půjčíme svému známému, vrátí-li nám za 10 let 100 000 Kč při roční úrokové míře 5%?*

Řešení: V tuto chvíli známe, na rozdíl od předchozího Příkladu 19, vrácenou částku $p_0 = 100\,000$ a chceme zjistit, jakou částku půjčíme se splatností na n let (v našem případě $n = 10$). Postup je tedy přesně opačný. Nechť p_n značí půjčenou částku se splatností na n let. Pak za každý rok před vrácením částky p_0 je tato částka snížena, tj.

$$\begin{aligned}
p_1 &= \frac{100\,000}{1{,}05} = \frac{p_0}{1+i} \\
p_2 &= \frac{\frac{100\,000}{1{,}05}}{1{,}05} = \frac{p_1}{1+i} = \frac{100\,000}{1{,}05^2} = \frac{p_0}{(1+i)^2} \\
&\vdots \\
p_{10} &= \frac{100\,000}{1{,}05^{10}} = \frac{p_0}{(1+i)^{10}} \doteq 61\,391,
\end{aligned}$$

kde $i = 0{,}05$ je roční úroková míra. Příslušná vyplacená částka 100 000 Kč tak odpovídá dnešnímu ekvivalentu 61 400 Kč (po zaokrouhlení na sta).

Analogicky jako v předchozím Příkladu 19 druhým postupem, jak určit hodnotu členu p_{10}, je nalézt řešení homogenní diferenční rovnice

$$p_{n+1} - \frac{1}{1{,}05}\, p_n = 0,$$

kterou jsme odvodili na základě vlastnosti, že následující člen posloupnosti je vždy snížen faktorem 0,05 z členu předchozího. Příslušná charakteristická rovnice

$$\lambda - \frac{1}{1{,}05} = 0$$

má pouze jeden reálný kořen $\lambda = \frac{1}{1{,}05}$ a obecné řešení je tvaru

$$p_n = \frac{C}{1{,}05^n}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Z počáteční podmínky $p_0 = 100\,000$ určíme $C = 100\,000$ a získáme stejný výsledek jako v prvním postupu, tj. $p_{10} = \frac{100\,000}{1{,}05^{10}}$. ○

Obecný postup pro výpočet současné hodnoty peněz vede na řešení homogenní diferenční rovnice

$$p_{n+1} - \frac{1}{1+i}\, p_n = 0$$

s počáteční podmínkou $p_0 = K$, jejímž řešením je posloupnost

$$p_n = \frac{K}{(1+i)^n},$$

kde n je počet časových období do vyplacení částky K a i je roční úroková míra.

Na předchozích dvou příkladech vidíme, že je podstatný rozdíl, zda máme částku 100 000 Kč nyní, nebo za několik let. Je vidět, že dnešní (současná) hodnota je nižší, než ta budoucí a rozdíl není zrovna zanedbatelný. Tedy dnes je 100 000 Kč více, než 100 000 Kč za rok, dva či více. Časová hodnota peněz je metoda, která slouží k porovnání různých investic (částek) v několika časových obdobích. Rozlišujeme budoucí a současnou hodnotu peněz, kdy současnou hodnotou rozumíme právě počáteční (vložený, půjčený) kapitál. Na druhé straně budoucí hodnota peněz nám značí počáteční kapitál navýšený o naběhlé úroky za dané období. Kromě časové hodnoty peněz jsme se také seznámili se složeným úročením. To se od toho jednoduchého liší tím, že úrok se nepočítá pouze z počátečního vloženého kapitálu, ale z vloženého kapitálu a již připsaných úroků.

V příkladech se využívá dvou faktorů. Prvním z nich je úročitel a druhým z nich odúročitel, neboli diskontní faktor. Jak již název vypovídá, úročitel nám navyšuje počáteční kapitál a obecně ho můžeme značit jako $(1 + i)$, kde i je úroková míra. Diskontní faktor je převrácená hodnota úročitele, tedy $\frac{1}{(1+i)}$.

4.2 Současná hodnota polhůtního důchodu

Důchodem rozumíme posloupnost peněžních toků (jedná se o pravidelnou platbu, jejíž nominální hodnota se nemění) a počítáme jeho současnou hodnotu. Jedná-li se o platby na konci období (např. na konci měsíce, roku), mluvíme o polhůtním důchodu.

Příklad 21. *Jaká je hodnota důchodu vyplaceného za celé období 10 let, jestliže na konci každého roku se uskuteční platba ve výši 150 000 Kč? Roční úroková míra je 10%.*

Řešení: Nejprve si musíme uvědomit, že známe budoucí hodnotu každé vyplacené částky. Abychom mohli spočítat hodnotu vyplaceného důchodu, potřebujeme znát jejich současné hodnoty. Protože se jedná o polhůtní důchod, první částka přijde na konci období a její současná hodnota je upravena o diskontní faktor, tedy $150\,000 \cdot \frac{1}{1{,}1}$. Na konci druhého roku bude současná hodnota vyplaceného důchodu navýšena o další platbu ve výši $150\,000 \cdot \frac{1}{1{,}1^2}$. Označme p_n jako současnou hodnotu důchodu vyplaceného za n let. Platby se tedy budou každý rok kumulovat a současnou hodnotu důchodu za dané roky můžeme zapsat následovně

$$
\begin{aligned}
p_1 &= 150\,000 \cdot \frac{1}{1{,}1}, \\
p_2 &= 150\,000 \cdot \frac{1}{1{,}1} + 150\,000 \cdot \frac{1}{1{,}1^2}, \\
&\vdots \\
p_{10} &= 150\,000 \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{1{,}1^{10}}.
\end{aligned}
$$

Abychom využili znalosti diferenčních rovnic, budeme vycházet z rozdílu dvou po sobě jdoucích hodnot p_{n+1} a p_n. Jelikož každá následující hodnota je navýšena o jednu platbu upravenou o diskontní faktor příslušného roku, je právě tato upravená platba rozdílem současných hodnot vyplaceného důchodu. Obecně potom

$$p_{n+1} - p_n = 150\,000 \cdot \frac{1}{1{,}1^{n+1}}$$

Z charakteristické rovnice $\lambda - 1 = 0$ určíme $\lambda = 1$ a potom obecné řešení příslušné homogenní rovnice je $p_n^H = C$, $C \in \mathbb{R}$. Podle tvaru pravé strany diferenční rovnice hledáme partikulární řešení ve speciálním tvaru

$$p_n^P = A \cdot \frac{1}{1{,}1^{n+1}},$$

kde A je jistá reálná konstanta. Po dosazení p_n^P do diferenční rovnice získáme vztah

$$A \cdot \frac{1}{1{,}1^{n+2}} - A \cdot \frac{1}{1{,}1^{n+1}} = 150\,000 \cdot \frac{1}{1{,}1^{n+1}},$$

ze kterého vyjádříme neznámou $A = -1\,650\,000$. Potom obecné řešení dané diferenční rovnice je

$$p_n = p_n^H + p_N^P = C - 1\,650\,000 \cdot \frac{1}{1{,}1^{n+1}}.$$

Nyní pro vyjádření konstanty C využijeme znalosti počáteční podmínky, kdy hodnota důchodu na počátku období je nulová, tedy $p_0 = 0$. Po dosazení tak dostaneme rovnici

$$0 = C - 1\,650\,000 \cdot \frac{1}{1{,}1},$$

resp. určíme, že konstanta $C = 1\,500\,000$. Následně obecné řešení rovnice zapíšeme jako

$$p_n = 1\,500\,000 - 1\,650\,000 \cdot \frac{1}{1{,}1^{n+1}}.$$

Nyní máme vše potřebné pro zjištění současné hodnoty polhůtního důchodu po určité době, v našem případě po 10 letech jeho pobírání. Zvolíme-li $n = 10$, obdržíme

$$p_{10} = 1\,500\,000 - 1\,650\,000 \cdot \frac{1}{1{,}1^{11}} \doteq 921\,685.$$

Současná hodnota polhůtního důchodu, kdy pobíráme 10 let částku 150 000 Kč ročně, je ekvivalentní částce 921 685 Kč (zaokrouhleno na jednotky). ○

Pokud bychom chtěli obecný návod na řešení příkladu tohoto typu, postupovali bychom následovně. Za předpokladu, že Z je roční platba důchodu, i je nominální úroková míra a n značí počet let pobírání důchodu, má příslušná diferenční rovnice obecný tvar

$$p_{n+1} - p_n = Z \cdot \frac{1}{(1+i)^{n+1}}.$$

Stejným postupem jako v Příkladě 21, plyne z charakteristické rovnice $\lambda - 1 = 0$, resp. z jejího jediného kořene $\lambda = 1$, že obecné řešení příslušné homogenní diferenční rovnice je

$$p_n^H = C \cdot 1^n = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Partikulární řešení opět hledáme ve tvaru

$$p_n^P = A \cdot \frac{1}{(1+i)^{n+1}}, \quad A \in \mathbb{R}.$$

Dosadíme-li p_n^P do původní diferenční rovnice, získáme

$$A \cdot \frac{1}{(1+i)^{n+2}} - A \cdot \frac{1}{(1+i)^{n+1}} = Z \cdot \frac{1}{(1+i)^{n+1}},$$

a po úpravě vyjádříme $A = -Z \cdot \frac{1+i}{i}$. Obecné řešení diferenční rovnice je tedy

$$p_n = p_n^H + p_n^P = C - Z \cdot \frac{1+i}{i} \cdot \frac{1}{(1+i)^{n+1}} = C - \frac{Z}{i(1+i)^n}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Z počáteční podmínky $p_0 = 0$ plyne

$$0 = C - \frac{Z}{i} \Rightarrow C = \frac{Z}{i}.$$

Nakonec řešením dané diferenční rovnice s příslušnou počáteční podmínkou je posloupnost

$$p_n = \frac{Z}{i} - \frac{Z}{i(1+i)^n} = \frac{Z}{i}\left(1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right).$$

4.3 Úspory na důchod

Se současnou a budoucí hodnotou peněz souvisí i úspory na důchod, tedy možnost zajištění si vyššího příjmu v důchodovém věku. Jedná se o platby placené v pravidelných intervalech za účelem jejich zhodnocení pro potřeby jejich pozdějšího čerpání.

Příklad 22. *Jakou částku je nutno naspořit, aby po odchodu do důchodu za 10 let bylo možné krýt (současné) roční životní náklady ve výši 200 000 Kč (upravené o inflaci), a to po dobu 15 let, jestliže roční úroková míra je 10% a míra inflace je 5%?*

Řešení: Nechť p_n značí naspořenou částku po n letech. Hledaná hodnota odpovídá naspořené částce za 10 let, tedy p_{10}. V tento moment přestáváme spořit a začínáme čerpat částku $Z = 200\,000$ Kč ročně (upravenou o inflaci) po dalších 15 let, kdy se celá částka vyčerpá, tj. $p_{25} = 0$. Uvědomme si, že každý rok pro $n > 10$ se zbývající částka sice navýší o úrok $0{,}1 \cdot p_{n-1}$, ale zároveň sníží právě o vyplacenou částku upravenou o inflaci za n let, tj. o $1{,}05^n \cdot Z$. Pro první rok čerpání důchodu platí vztah

$$p_{11} = 1{,}1 \cdot p_{10} - 1{,}05^{10} \cdot 200\,000$$

a obecně pro částku, která nám zbývá na čerpání důchodu po n letech

$$p_{n+1} = 1{,}1 \cdot p_n - 1{,}05^n \cdot 200\,000, \quad 10 \le n < 25.$$

Po úpravě snadno odvodíme diferenční rovnici

$$p_{n+1} - 1{,}1 \cdot p_n = -1{,}05^n \cdot 200\,000, \quad 10 \le n < 25.$$

Kořenem příslušné charakteristické rovnice $\lambda - 1{,}1 = 0$ je $\lambda = 1{,}1$ a obecným řešením přidružené homogenní rovnice je tedy

$$p_n^H = C \cdot 1{,}1^n, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Nyní metodou odhadu nalezneme partikulární řešení, které hledáme ve tvaru

$$p_n^P = A \cdot 1{,}05^n, \quad A \in \mathbb{R}.$$

Tento odhad partikulárního řešení dosadíme do původní rovnice, upravíme a vyjádříme A, tj.

$$A \cdot 1{,}05^{n+1} - 1{,}1 \cdot A \cdot 1{,}05^n = -1{,}05^n \cdot 200\,000 \Rightarrow A = 4\,000\,000.$$

Obecné řešení dané diferenční rovnice je pak

$$p_n = p_n^H + p_n^P = C \cdot 1{,}1^n + 4\,000\,000 \cdot 1{,}05^n, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Neznámou konstantu C určíme podle koncové podmínky $p_{25} = 0$, neboť za 25 let budeme mít již všechny naspořené peníze vyčerpány. Tedy

$$0 = C \cdot 1{,}1^{25} + 4\,000\,000 \cdot 1{,}05^{25}$$

a po vyjádření $C = -1\,250\,188,038$ můžeme dopočítat hodnotu naspořených peněz, ze kterých se za 10 let začne vyplácet důchod. Konkrétně

$$p_{10} = -1\,250\,188,038 \cdot 1{,}1^{10} + 4\,000\,000 \cdot 1{,}05^{10} \doteq 3\,272\,913.$$

Abychom pobírali roční důchod 200 000 Kč (upravený o inflaci) po dobu 15 let, je nutno mít za 10 let naspořeno částku 3 272 913 Kč (zaokrouhleno na jednotky). ◯

Pojďme se nyní podívat na Příklad 22 obecně. Označme Z jako roční důchod, i jako roční úrokovou sazbu a π míru inflace. Dále nechť S je zbývající počet let do odchodu do důchodu, tedy doba, po kterou budeme aktivně spořit, a T je doba, po kterou budeme pobírat důchod. Naspořenou částku v n-tém roce označíme p_n. Diferenční rovnice má pak následující tvar

$$p_{n+1} - (1+i)p_n = -Z(1+\pi)^n, \quad S \leq n < S+T.$$

Příslušná charakteristická rovnice $\lambda - (1+i) = 0$ má jediný kořen $\lambda = (1+i)$ a obecné řešení přidružené homogenní diferenční rovnice je

$$p_n^H = C \cdot (1+i)^n, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Je-li $\pi \neq i$, můžeme partikulární řešení hledat ve tvaru

$$p_n^P = A \cdot (1+\pi)^n, \quad A \in \mathbb{R}.$$

Po dosazení p_n^P do původní diferenční rovnice získáme vztah

$$A \cdot (1+\pi)^{n+1} - (1+i) \cdot A \cdot (1+\pi)^n = -Z \cdot (1+\pi)^n,$$

ze kterého po zkrácení výrazem $(1+\pi)^n$ vyjádříme $A = -\frac{Z}{\pi - i}$. Obecné řešení diferenční rovnice můžeme psát ve tvaru

$$p_n = C \cdot (1+i)^n - \frac{Z}{\pi - i} \cdot (1+\pi)^n, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Z koncové podmínky $p_{S+T} = 0$ plyne

$$0 = C \cdot (1+i)^{S+T} - \frac{Z}{\pi - i}(1+\pi)^{S+T} \Rightarrow C = \frac{Z}{\pi - i} \cdot \frac{(1+\pi)^{S+T}}{(1+i)^{S+T}}.$$

Po dosazení do obecného řešení a úpravě získáme předpis pro výpočet n-tého členu posloupnosti, tj.

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{Z}{\pi - i} \cdot \frac{(1+\pi)^{S+T}}{(1+i)^{S+T}} \cdot (1+i)^n - \frac{Z}{\pi - i}(1+\pi)^n \\ &= \frac{Z}{\pi - i}\left(\frac{(1+\pi)^{S+T}}{(1+i)^{S+T}}(1+i)^n - (1+\pi)^n\right), \quad S \leq n < S+T. \end{aligned}$$

Výše uvedený postup řeší úlohu úspor na důchod, jsou-li úroková míra a míra inflace různé ($i \neq \pi$). V opačném případě $i = \pi$ by se postup při hledání partikulárního řešení musel modifikovat, neboť nově bychom řešení hledali ve tvaru

$$p_n^P = A \cdot n(1+i)^n, \quad A \in \mathbb{R}.$$

Tento případ již v práci neuvažujeme.

4.4 Umořování dluhu

S umořováním, amortizací, neboli splácením dluhu se již setkala většina lidí. Umořování je tedy proces, kdy dlužník splácí svůj dluh, vetšinou konstantními splátkami, a to v pravidelných neměnných intervalech. Pravidelná splátka se jinak nazývá anuita.

Příklad 23. *Jaká bude měsíční splátka půjčky ve výši 500 000 Kč, jestliže se tato půjčka bude splácet 10 let a roční úroková míra je 5%?*

Ř e š e n í: Od předchozích příkladů se tato úloha liší tím, že se platby neuskutečňují jednou za rok, ale každý měsíc, tj. za rok se uskuteční daná platba dvanáctkrát. Tato skutečnost se projeví při počítání s úrokovou mírou, kterou musíme vzhledem k ročnímu zadání patřičně upravit, přesněji vydělit počtem úrokových období v daném roce. Nechť p_n značí zbývající částku ke splacení po n měsících, potom nutně nultý člen před na začátku splácení, resp. poslední člen na konci všech splátek po 10 letech (120 měsících), mají hodnoty $p_0 = 500\,000$, resp. $p_{120} = 0$.

Nyní již přejdeme ke splátkám, kdy amortizace bude probíhat podle následujícího schématu. V prvním měsíci se dlužná částka p_0 navýší o měsíční úrok $\frac{0{,}05}{12} \cdot p_0$ a sníží o neznámou anuitní splátku A, tj.

$$p_1 = 500\,000\left(1 + \frac{0{,}05}{12}\right) - A.$$

Ve druhém měsíci už dlužíme částku p_1, a tak platí

$$p_2 = p_1\left(1 + \frac{0{,}05}{12}\right) - A.$$

Obecně tento proces můžeme zapsat

$$p_{n+1} = \frac{12{,}05}{12} \cdot p_n - A,$$

resp. pomocí diferenční rovnice

$$p_{n+1} - \frac{12{,}05}{12} \cdot p_n = -A, \quad 0 \le n \le 120.$$

Charakteristická rovnice $\lambda - \frac{12{,}05}{12} = 0$ má jediný kořen $\lambda = \frac{12{,}05}{12}$ a obecné řešení přidružené homogenní rovnice je

$$p_n^H = C \cdot \left(\frac{12{,}05}{12}\right)^n, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Jelikož pravou stranu diferenční rovnice tvoří pouze konstantní posloupnost, tak partikulární řešení hledáme také ve tvaru konstantní posloupnosti $p_n^P = P$, kde P je jistá reálná konstanta. Dosazením tohoto odhadu do diferenční rovnice získáme vztah

$$P - \frac{12{,}05}{12} P = -A,$$

ze kterého snadno vyjádříme $P = \frac{12A}{0{,}05}$. Potom obecným řešením diferenční rovnice je posloupnost

$$p_n = p_n^H + p_n^P = C \cdot \left(\frac{12{,}05}{12}\right)^n + \frac{12A}{0{,}05},$$

ve které máme stále dvě neznámé konstanty, jež určíme z okrajových podmínek p_0 a p_{120}. Dosazením hodnot z obou podmínek do obecného řešení, získáme soustavu dvou rovnic

$$\begin{aligned} 500\,000 &= C + \frac{12A}{0{,}05}, \\ 0 &= C \cdot \left(\frac{12{,}05}{12}\right)^{120} + \frac{12A}{0{,}05}. \end{aligned}$$

Z první rovnice si vyjádříme konstantu C a dosadíme do druhé rovnice

$$0 = \left(500\,000 - \frac{12A}{0{,}05}\right)\left(\frac{12{,}05}{12}\right)^{120} + \frac{12A}{0{,}05}.$$

Odtud, pak vypočítáme $A \doteq 5\,303$. Měsíční splátka pro daný scénář splácení půjčky tedy činí 5 303 Kč (zaokrouhleno na jednotky). ○

Nyní zobecníme postup z Příkladu 23. Označme výši půjčky D, úrokovou míru $i = \frac{r}{m}$, kde r je roční úroková míra a m je počet úrokových období v jednom roce, anuitní splátku A, celkový počet úrokových období N a zbývající hodnotu půjčky v n-tém úrokovém období p_n. Diferenční rovnice pro proces splácení má pak tvar

$$p_{n+1} - (1+i)p_n = -A, \quad 0 \le n \le N.$$

Z charakteristické rovnice $\lambda - (1+i) = 0$, resp. jejího kořenu $\lambda = (1+i)$, získáme obecné řešení přidružené homogenní rovnice

$$p_n^H = C \cdot (1+i)^n, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Partikulární řešení pak hledáme ve tvaru $p_n^P = P$ a po jeho dosazení do diferenční rovnice vypočítáme $P = \frac{A}{i}$. Obecným řešením diferenční rovnice je tedy

$$p_n = p_n^H + p_n^P = C \cdot (1+i)^n + \frac{A}{i}$$

Opět jsme dospěli k řešení se dvěma neznámými C a A, jež určíme z okrajových podmínek $p_0 = D$ a $p_N = 0$, tj.

$$\begin{aligned} D &= C + \frac{A}{i}, \\ 0 &= C(1+i)^N + \frac{A}{i}. \end{aligned}$$

Z první rovnice si vyjádříme $C = D - \frac{A}{i}$ a dosadíme do druhé rovnice

$$0 = \left(D - \frac{A}{i}\right)(1+i)^N + \frac{A}{i},$$

ze které nakonec získáme vzorec pro výpočet anuitní platby

$$A = D\frac{i(1+i)^N}{(1+i)^N - 1}.$$

4.5 Pavučinový model utváření tržní rovnováhy

Pavučinový model, který původně představil H. Moore v roce 1914 pro analýzu cyklického chování zemědělských trhů, byl jedním z prvních dynamických modelů v ekonomii, viz [3]. Model ve své nejjednodušší formě analyzuje krátkodobé cenové výkyvy na volném trhu s jednou komoditou, kde je v každém časovém období určována cenová hladina tak, aby se rovnala množství zboží reprezentující poptávku D a nabídku S. Zboží obchodované na tomto trhu není skladovatelné a je vyráběno s pevným zpožděním výroby v jednom období, tím dochází k nerovnováze na trhu.

Označíme-li p_n cenu za jednotku zboží v diskrétním čase $n \in \mathbb{N}_0$, pak stav trhu, resp. poptávka a nabídka jsou popsány v každém diskrétním čase funkcí ceny zboží jako

$$D_n = D(p_n), \qquad S_n = S(p_{n-1}), \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

Rozhodnutí o nabídce výrobců v období n je tak založeno na ceně zboží, u které očekávají, že se zachová z předchozího období $n-1$. Rovnováhou na trhu rozumíme stav, kdy množství a cena nabízeného zboží je rovno množství a ceně poptávaného statku, tj. $D_n = S_n, n \in \mathbb{N}_0$.

Pro názornost si pavučinový model představme nejprve na ilustrativním příkladě, který později zobecníme.

Příklad 24. *Uvažujte funkci poptávky $D_n = 31 - 4p_n$ a nabídky se zpožděním $S_n = 7 + 2p_{n-1}$. Rozhodněte o stabilitě trhu a určete graficky i analytickým výpočtem rovnovážnou úroveň ceny, je-li současná cena $p_0 = 2$.*

Řešení: Nejprve rozhodneme o rovnováze na trhu a určíme tzv. rovnovážnou cenu p^*. Z podmínky kladené na rovnost množství poptávky a nabídky ($D = S$) získáme rovnici pro rovnovážnou cenu

$$31 - 4p^* = 7 + 2p^*.$$

Jelikož $p^* = 4 \neq p_0$, je na trhu nerovnováha. O tom, zda tedy model bude konvergovat k rovnovážné hodnotě p^* nebo bude divergovat, rozhodne tvar řešení následující lineární diferenční rovnice

$$4p_n + 2p_{n-1} = 24,$$

kterou získáme dosazením funkčních předpisů pro poptávku a nabídku do rovnosti $D_n = S_n$. Substitucí $m = n - 1$ ji pak převedeme na tvar používaný v Kapitole 3, tj.

$$2p_{m+1} + p_m = 12$$

a následně řešíme standardním postupem. Nejprve pro přidruženou homogenní rovnici sestavíme charakteristickou rovnici

$$2\lambda + 1 = 0,$$

jejímž řešením je $\lambda = -\frac{1}{2}$. Příslušné obecné řešení homogenní rovnice má pak tvar

$$p_m^H = C\left(-\frac{1}{2}\right)^m, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Jelikož pravou stranu diferenční rovnice představuje konstantní posloupnost, tak pro partikulární řešení použijeme odhad tvaru $p_m^P = A$ a po dosazení do původní rovnice získáme

$$2A + A = 12,$$

resp. $A = 4$. Příslušné obecné řešení nehomogenní rovnice má pak tvar

$$p_m = p_m^H + p_m^P = C\left(-\frac{1}{2}\right)^m + 4, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Dále z počáteční podmínky $p_0 = 2$ určíme konstantu C následně

$$2 = C\left(-\frac{1}{2}\right)^0 + 4 \Rightarrow C = -2.$$

Po zpětné substituci má výsledné řešení tvar

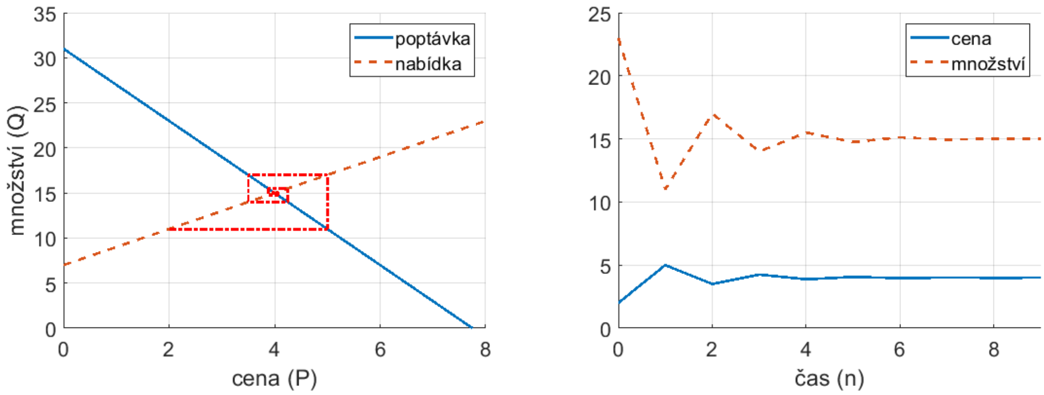
$$p_n = -2\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 4.$$

Nakonec limitním přechodem (nebo z vlastností geometrické posloupnosti)

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} -2\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 4 = 0 + 4 = 4$$

ověříme, že cena konverguje k rovnovážné poloze a model trhu je tedy stabilní.

Výše uvedené závěry dokládáme na grafických výstupech na Obrázku 4.1. V levé části je zachycen tzv. pavučinový graf a napravo vývoj diskrétních cen a množství zboží. Při konstrukci pavučinového grafu vycházíme z počáteční ceny p_0 a v souřadnicovém systému cena vs. množství vynášíme a spojujeme postupně body $[p_0, S_0]$, $[p_1, D_1]$, $[p_1, S_1]$ $[p_2, D_2]$ a podobně pro další časová období. Tyto body leží střídavě na přímkách popisujících funkce nabídky a poptávky. V případě modelu stabilního trhu tato posloupnost bodů tak konverguje k průsečíku funkcí nabídky a poptávky $[p^*, S(p^*)] = [p^*, D(p^*)]$. ○



Obrázek 4.1: Pavučinový model – konvergentní případ

Nyní přistoupíme k obecnému popisu pavučinového modelu rovnováhy trhu. Pro jednoduchost budeme stále předpokládat, že funkce poptávky a nabídky jsou lineární, tj.

$$D_n = a - bp_n, \qquad S_n = c + dp_{n-1}, \quad a, b, c, d > 0, \qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

Jinými slovy, směrnice poptávky je záporná, protože s růstem ceny poptávka klesá. Oproti tomu směrnice nabídky je kladná, neboť nabídka roste s cenou. Ústředním problémem je tedy v rámci utváření rovnováhy trhu chování posloupnosti cen $p_n, n \in \mathbb{N}_0$, která je popsána lineární diferenční rovnicí 1. řádu

$$bp_n + dp_{n-1} = a - c.$$

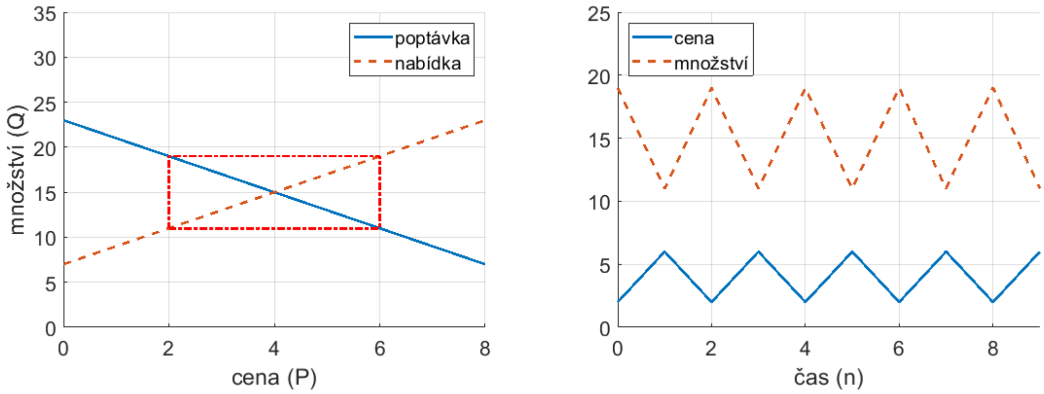
Řešení této rovnice získáme obdobně jako v předchozím příkladě z dílčích řešení

$$p_n^H = C\left(-\frac{d}{b}\right)^n, \quad p_n^P = \frac{a-c}{b+d}, \quad C = p_0 - \frac{a-c}{b+d},$$

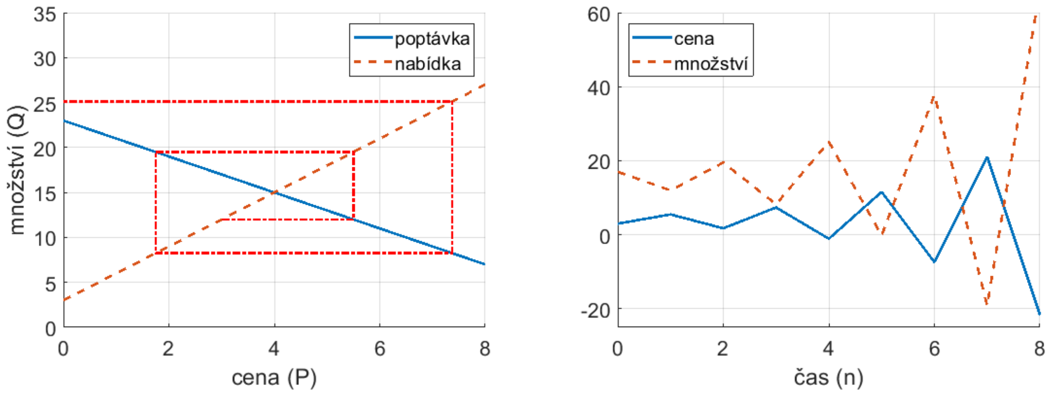
tedy

$$p_n = \left(p_0 - \frac{a-c}{b+d}\right)\left(-\frac{d}{b}\right)^n + \frac{a-c}{b+d}.$$

Na výsledné chování posloupnosti cen má tak rozhodující vliv poměr $-\frac{d}{b}$. Jelikož tento poměr je vždy záporný, bude posloupnost cen oscilovat, a to buď tlumeně, neomezeně nebo konstantně, viz [4]. Bude-li $b > d$, tak posloupnost cen konverguje k rovnovážné hodnotě a řešení označujeme za asymptoticky stabilní. Je-li $b = d$, tak cena osciluje s konstantní amplitudou kolem rovnovážné hodnoty, viz Obrázek 4.2. V případě $b < d$ řešení osciluje s rostoucí amplitudou kolem rovnovážného stavu, viz Obrázek 4.3. V posledních dvou případech hovoříme o nestabilním řešení. Výše uvedenou klasifikaci můžeme snadno také interpretovat geometricky podle směrnic příslušných přímek poptávky k_D a nabídky k_S, např. pro stabilní případ musí platit $|k_S| \leq |k_D|$ a podobně pro ostatní případy.



Obrázek 4.2: Pavučinový model – oscilace ($b = d = 2$)



Obrázek 4.3: Pavučinový model – divergentní případ ($b = 2$, $d = 3$)

Nyní se přesouváme k diferenčním rovnicím 2. řádu, kdy si představíme dva modely. Jedním z nich je ruinování hráče a druhým je Cournotův model duopolu.

4.6 Ruinování hráče

V následující části si představíme aplikaci lineárních diferenčních rovnic vyšších řádů v úlohách z pravděpodobnosti, konkrétně na případu tzv. ruinování hráče při rizikové hře.

Nyní představíme pravidla dané hry podle [6]. Předpokládejme hru pro dva hráče, které označíme X a Y. Jejich hra se skládá z posloupnosti partií, přičemž výsledky jednotlivých partií jsou na sobě nezávislé a v každé partii mohou nastat pouze dvě situace: hráč X vyhraje partii s pravděpodobností $p \in (0, 1)$ nebo ji prohraje s pravděpodobností $q = 1 - p$. Na začátku hry mají hráči k dispozici dohromady částku $z \in \mathbb{N}$, z toho hráč X právě n, kde $0 < n < z$. Vyhraje-li partii hráč X, získá od hráče Y jednotkovou částku, naopak v případě prohry vyplatí hráči Y tutéž částku. Hra končí, jakmile jednomu z hráčů klesne jeho obnos na nulu, tj. je zruinován. Podrobněji si hru vysvětlíme na modifikovaném příkladě hraní rulety z [6].

Příklad 25. *Uvažujme evropskou ruletu, která obsahuje 37 číselných políček s barevným rozložením: 18 červených, 18 černých a 1 zelené. Na začátku hry má hráč X k dispozici 10 žetonů a hráč Y (vlastník rulety) 20 žetonů, přičemž všechny žetony mají stejnou hodnotu. Strategií hráče je opakovaně sázet po 1 žetonu na červenou. Určete pravděpodobnost zruinování hráče X, resp. hráče Y.*

Řešení: Pravděpodobnost výhry hráče X v jedné partii je $\frac{18}{37}$, resp. jeho prohry je $\frac{19}{37}$. Dále označme r_n jako pravděpodobnost, že je zruinován hráč X, který právě vlastní n žetonů, kde $0 < n < 30$. V další partii mohou nastat pro hráče X pouze dva scénáře, buďto partii vyhraje, bude vlastnit $n+1$ žetonů a může být nově zruinován s pravděpodobností r_{n+1}, nebo partii prohraje, bude vlastnit $n - 1$ žetonů a může být nově zruinován s pravděpodobností r_{n-1}. Tedy musí platit

$$r_n = \frac{18}{37} r_{n+1} + \frac{19}{37} r_{n-1}.$$

Posunem v indexaci získáme homogenní lineární diferenční rovnici druhého řádu

$$r_{n+2} - \frac{37}{18} r_{n+1} + \frac{19}{18} r_n = 0$$

pro $0 \leq n \leq 30$. Pro nalezení obecného řešení sestavíme charakteristickou rovnici

$$\lambda^2 - \frac{37}{18}\lambda + \frac{19}{18} = 0,$$

která má kořeny $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_2 = \frac{19}{18}$. Příslušné řešení má pak tvar

$$r_n = C_1 + C_2 \left(\frac{19}{18}\right)^n, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

pro $0 \leq n \leq 30$.

Pro nalezení partikulárního řešení je však třeba danou diferenční rovnici doplnit okrajovými podmínkami, které plynou z koncových partií hry. Přesněji, hra končí, je-li hráč X zruinován a má tedy 0 žetonů, tj. $r_0 = 1$ (jistý jev). Nebo došlo ke zruinování hráče Y, pak hráč X má 30 žetonů, tj. $r_{30} = 0$ (nemožný jev). Na základě těchto podmínek určíme soustavu lineárních rovnic pro neznámé konstanty C_1 a C_2, tj.

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= r_0 = 1, \\ C_1 + C_2 \left(\frac{19}{18}\right)^{30} &= r_{30} = 0, \end{aligned}$$

která má řešení

$$C_1 = \frac{-\left(\frac{19}{18}\right)^{30}}{1 - \left(\frac{19}{18}\right)^{30}}, \qquad C_2 = \frac{1}{1 - \left(\frac{19}{18}\right)^{30}}.$$

Jelikož hráč X má na začátku hry 10 žetonů, tak nás zajímá hodnota členu

$$r_{10} = \frac{\left(\frac{19}{18}\right)^{10} - \left(\frac{19}{18}\right)^{30}}{1 - \left(\frac{19}{18}\right)^{30}} \doteq 0{,}8235$$

která určuje pravděpodobnost jeho zruinování. Na druhou stranu případ, že dojde ke zruinování vlastníka rulety, tj. že hráč X ztrojnásobí svoji původní částku, nastane s pravděpodobností $1 - r_{10} \doteq 0,1765$. ◯

Nyní zobecníme postup uvedený v předchozím příkladě. Nechť p značí pravděpodobnost výhry hráče X a $q = 1-p$ pravděpodobnost výhry hráče Y. Předpokládejme, že oba hráči mají pro hru k dispozici celkový obnos $z \in \mathbb{N}$. Dále nechť r_n opět značí pravděpodobnost zruinování hráče X, má-li k dispozici obnos n, kde $0 \leq n \leq z$. Pak z věty o úplné pravděpodobnosti platí vztah

$$r_n = p r_{n+1} + q r_{n-1},$$

resp.

$$r_{n+2} - \frac{1}{p} r_{n+1} + \frac{q}{p} r_n = 0, \quad 0 \leq n \leq z.$$

Analogicky jako v příkladu výše sestavíme charakteristickou rovnici

$$\lambda^2 - \frac{1}{p}\lambda + \frac{q}{p} = 0,$$

která má kořeny $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_2 = \frac{q}{p}$. Dále rozlišíme dva případy: $p = q$ a $p \neq q$. Jsou-li pravděpodobnosti zruinování obou hráčů stejné ($p = \frac{1}{2} = q$), pak má charakteristická rovnice pouze jeden dvojnásobný kořen $\lambda_{1,2} = 1$ a obecné řešení má tvar

$$r_n = C_1 + C_2 n, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq n \leq z.$$

Hodnoty neznámých konstant stanovíme podle okrajových podmínek

$$\begin{aligned} C_1 &= r_0 = 1, \\ C_1 + C_2 z &= r_z = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{1}{z}. \end{aligned}$$

Příslušné řešení má pak tvar

$$r_n = \frac{z-n}{z}, \qquad 0 \le n \le z.$$

Na druhou stranu, jsou-li pravděpodobnosti zruinování hráčů různé ($p \neq q$), tak má charakteristická rovnice pouze dva různé jednoduché kořeny a obecné řešení má tvar

$$r_n = C_1 + C_2 \left(\frac{q}{p}\right)^n, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \quad 0 \le n \le z.$$

Opět neznámé konstanty stanovíme podle okrajových podmínek

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= r_0 = 1, \\ C_1 + C_2 \left(\frac{q}{p}\right)^z &= r_z = 0, \end{aligned}$$

odkud

$$C_1 = \frac{-\left(\frac{q}{p}\right)^z}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^z}, \qquad C_2 = \frac{1}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^z}.$$

Příslušné řešení má pak tvar

$$r_n = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^n - \left(\frac{q}{p}\right)^z}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^z}, \qquad 0 \le n \le z.$$

4.7 Cournotův model duopolu

Cournotův model duopolu se věnuje dynamice tvorby rovnovážné ceny, kdy na trhu s jednou komoditou působí právě dva výrobci. Model prvně zformuloval francouzský matematik A. A. Cournot v roce 1838 ve své práci zabývající se teorií konkurence. V modelu se předpokládá, že oba producenti se snaží souběžně rozhodovat o rozsahu své výroby, aby maximalizovali svůj zisk, přičemž každý producent vychází z rozsahu produkce svého konkurenta v předchozím období. Z teorie je pak známo, že na tomto Cournotově duopolním trhu se postupně vytvoří tzv. ekvilibrum s konstantními produkcemi, resp. zisky obou výrobců. Tento stav je v ekonomickém světě nazýván Cournot-Nashova rovnováha. Naším cílem bude popsat daný model za níže uvedených zjednodušení pomocí diferenčních rovnic a ilustrovat jej na konkrétním příkladě.

Nechť y_n a z_n označují produkci prvního a druhého výrobce v diskrétních časových obdobích $n \in \mathbb{N}_0$. Dále předpokládáme podle [6], že cena vztažená na jednotku produktu je určená pomocí lineární funkce

$$p_n = p(y_n, z_n) = a - b(y_n + z_n), \quad a, b > 0, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Potom zisk obou výrobců lze v každém období $n \in \mathbb{N}_0$ vyjádřit jako

$$\begin{aligned} \Pi_y &= y_n p_n - c y_n = -b y_n^2 + (a-c) y_n - b y_n z_n, \\ \Pi_z &= z_n p_n - d z_n = -b z_n^2 + (a-d) z_n - b y_n z_n, \end{aligned}$$

kde c, resp. d značí cenu výroby vztaženou na jednotku produktu pro prvního, resp. druhého výrobce. Oba výrobci se nyní souběžně snaží maximalizovat svůj zisk, tj. hledáme vrchol parabolické funkce zisku Π_y pro hodnotu y_{n+1} za fixní hodnoty z_n dle Cournotova předpokladu a obráceně pro zisk druhého producenta Π_z. Pro optimální produkce musí platit

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_y}{\partial y}(y_{n+1}, z_n) &= -2b y_{n+1} + (a-c) - b z_n = 0, \\ \frac{\partial \Pi_z}{\partial z}(y_n, z_{n+1}) &= -2b z_{n+1} + (a-d) - b y_n = 0, \end{aligned}$$

resp.

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= \frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2} z_n, \\ z_{n+1} &= \frac{a-d}{2b} - \frac{1}{2} y_n. \end{aligned}$$

Nyní můžeme přistoupit ke konkrétnímu příkladu.

Příklad 26. *Uvažujme Cournotův model duopolu s cenovou funkcí pro produkt $p_n = 10 - (y_n + z_n)$, kde y_n, z_n značí produkci jednotlivých výrobců. Počáteční stavy produkce jsou $y_0 = 4$, $z_0 = 7$ a cena výroby vztažená na jednotku produktu pro rvního výrobce je 2, resp. pro druhého výrobce je 3. Stanovte rovnovážné stavy pro produkce a zisky obou výrobců.*

Ř e š e n í: Na základě předcházejícího výkladu platí pro zisk obou výrobců v každém období $n \in \mathbb{N}_0$ vztah

$$\begin{aligned} \Pi_y &= y_n p_n - 2 y_n = -y_n^2 + 8 y_n - y_n z_n, \\ \Pi_z &= z_n p_n - 3 z_n = -z_n^2 + 7 z_n - y_n z_n, \end{aligned}$$

resp. pro jejich optimální produkce

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= 4 - \frac{1}{2} z_n, \\ z_{n+1} &= \frac{7}{2} - \frac{1}{2} y_n. \end{aligned}$$

kde $y_0 = 4$ a $z_0 = 7$.

Vyjádříme-li první rovnici vzhledem k $n+1$ namísto n, dosadíme-li tento vztah do druhé rovnice a provedeme-li ten samý postup v opačném pořadí rovnic, pak původní soustavu diferenčních rovnic prvního řádu můžeme převést na dvě lineární diferenční rovnice druhého řádu

$$
\begin{aligned}
y_{n+2} - \frac{1}{4} y_n &= \frac{9}{4}, \\
z_{n+2} - \frac{1}{4} z_n &= \frac{3}{2},
\end{aligned}
$$

kde $y_0 = 4$ a $z_0 = 7$.

Oběma rovnicím přísluší stejná přidružená homogenní rovnice s charakteristickou rovnicí

$$\lambda^2 - \frac{1}{4} = 0,$$

jejímiž kořeny jsou $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ a $\lambda_2 = \frac{1}{2}$. Příslušné obecné řešení homogenní rovnice má pak tvar

$$C_1 \left(-\frac{1}{2}\right)^n + C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Jelikož pravé strany obou diferenčních rovnic jsou konstantní posloupnosti, tak z metody odhadu plyne, že partikulární řešení jsou také konstantní posloupnosti $y_n^P = A$ a $z_n^P = B$. Dosazením do původní rovnice získáme

$$
\begin{aligned}
A - \frac{1}{4} A = \frac{9}{4} \quad &\Rightarrow \quad A = 3, \\
B - \frac{1}{4} B = \frac{3}{2} \quad &\Rightarrow \quad B = 2.
\end{aligned}
$$

Obecná řešení pro produkce obou výrobců mají tedy tvar

$$
\begin{aligned}
y_n &= C_1 \left(-\frac{1}{2}\right)^n + C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 3, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \\
z_n &= K_1 \left(-\frac{1}{2}\right)^n + K_2 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2, \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Neznámé konstanty dopočítáme z počátečních stavů produkcí, tj.

$$
\begin{aligned}
C_1 + C_2 + 3 &= y_0 = 4, \\
-\frac{1}{2} C_1 + \frac{1}{2} C_2 + 3 &= y_1 = 4 - \frac{1}{2} z_0 = \frac{1}{2},
\end{aligned}
$$

resp.

$$
\begin{aligned}
K_1 + K_2 + 2 &= z_0 = 7, \\
-\frac{1}{2} K_1 + \frac{1}{2} K_2 + 2 &= z_1 = \frac{7}{2} - \frac{1}{2} y_0 = \frac{3}{2},
\end{aligned}
$$

odkud po úpravě získáme $C_1 = 3$, $C_2 = -2$, $K_1 = 3$ a $K_2 = 2$.

Vývoj produkcí obou výrobců tak můžeme popsat pomocí posloupností

$$\begin{aligned} y_n &= 3\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3, \\ z_n &= 3\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2. \end{aligned}$$

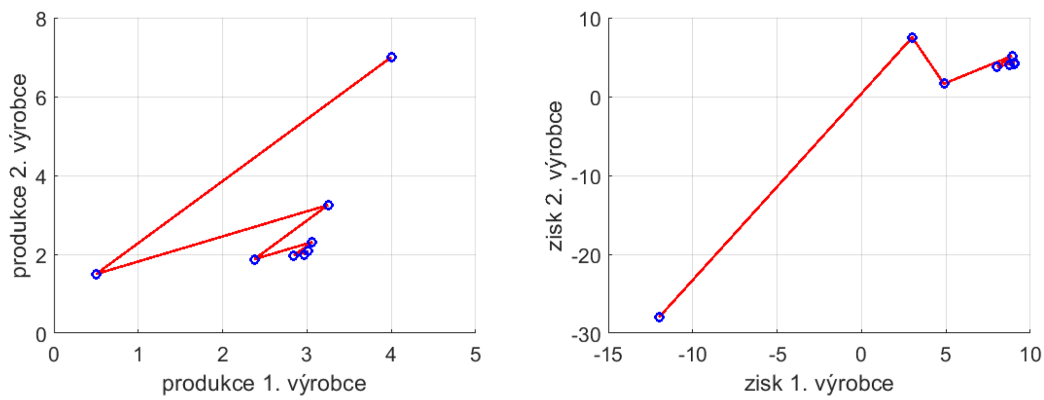
Abychom nalezli rovnovážné stavy těchto produkcí, spočítáme limity těchto posloupností

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} y_n &= \left(3\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3\right) = 3, \\ \lim_{n\to\infty} z_n &= \left(3\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2\right) = 2, \end{aligned}$$

které odpovídají ustáleným ziskům

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \Pi_y(y_n, z_n) = \Pi_y(3,2) &= -3^2 + 8\cdot 3 - 3\cdot 2 = 9, \\ \lim_{n\to\infty} \Pi_z(y_n, z_n) = \Pi_z(3,2) &= -2^2 + 7\cdot 2 - 3\cdot 2 = 4. \end{aligned}$$

Závěrem pro ilustraci uvádíme vývoj produkcí a zisků obou výrobců pomocí fázových portrétů na Obrázku 4.4. ◯



Obrázek 4.4: Cournotův model – fázové portréty produkcí a zisků pro počáteční produkce $y_0 = 4$ a $z_0 = 7$

Zobecníme-li postup ve výše uvedeném Příkladě 26, můžeme systém dvou diferenčních rovnic prvního řádu, vyjadřující jednotlivé optimální produkce, vyjádřit pomocí dvou rovnic druhého řádu se separovanými proměnnými, tj.

$$\begin{aligned} y_{n+2} - \frac{1}{4}y_n &= \frac{a - 2c + d}{4b}, \\ z_{n+2} - \frac{1}{4}z_n &= \frac{a - 2d + c}{4b}. \end{aligned}$$

Analogicky jako výše příslušná obecná řešení homogenních rovnic mají tvar

$$C_1\left(-\frac{1}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Jelikož pravé strany obou diferenčních rovnic jsou konstantní posloupnosti, tak pro partikulární řešení použijeme odhady $y_n^P = A$ a $z_n^P = B$. Dosazením do původní rovnice získáme

$$\begin{aligned} A &= \frac{a-2c+d}{3b}, \\ B &= \frac{a-2d+c}{3b}. \end{aligned}$$

Obecná řešení pro produkce obou výrobců mají tedy tvar

$$\begin{aligned} y_n &= C_1\left(-\frac{1}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{a-2c+d}{3b}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \\ z_n &= K_1\left(-\frac{1}{2}\right)^n + K_2\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{a-2d+c}{3b}, \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Známe-li počáteční hodnoty produkcí y_0 a z_0, můžeme následně dopočítat konstanty C_1 a C_2, resp. K_1 a K_2. Přesněji

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 + \frac{a-2c+d}{3b} &= y_0, \\ -\frac{1}{2}C_1 + \frac{1}{2}C_2 + \frac{a-2c+d}{3b} &= y_1 = \frac{a-c}{2b} - \frac{1}{2}z_0, \end{aligned}$$

resp.

$$\begin{aligned} K_1 + K_2 + \frac{a-2d+c}{3b} &= z_0, \\ -\frac{1}{2}K_1 + \frac{1}{2}K_2 + \frac{a-2d+c}{3b} &= z_1 = \frac{a-d}{2b} - \frac{1}{2}y_0 \end{aligned}$$

odkud po úpravě

$$C_1 = \frac{1}{2}y_0 + \frac{1}{2}z_0 - \frac{2a-c-d}{6b}, \quad C_2 = \frac{1}{2}y_0 - \frac{1}{2}z_0 + \frac{c-d}{2b},$$

resp.

$$K_1 = \frac{1}{2}z_0 + \frac{1}{2}y_0 - \frac{2a-c-d}{6b}, \quad K_2 = \frac{1}{2}z_0 - \frac{1}{2}y_0 + \frac{d-c}{2b}.$$

Nakonec provedeme-li limitní přechod v y_n a z_n, získáme rovnovážné stavy produkcí obou výrobců

$$\lim_{n\to\infty}[y_n, z_n] = \left[\frac{a-2c+d}{3b}, \frac{a-2d+c}{3b}\right],$$

kterým odpovídají konstantní zisky

$$[\Pi_y, \Pi_z] = \left[\frac{(a-2c+d)^2}{9b}, \frac{(a-2d+c)^2}{9b}\right].$$

Závěr

V této bakalářské práci jsme se zabývali diferenčními rovnicemi a představili jsme jejich praktické využití. Na základě teoretického přístupu uvedeného v první části jsme aplikovali obecné postupy řešení na vybraných úlohách z ekonomie. Kromě základních úloh z finanční matematiky jsme představili i trochu složitější příklady, popisující jednak rovnováhu statků na trhu v závislosti na nabídce a poptávce po tomto statku a jednak systém utváření rovnovážné ceny statku. Musíme však poznamenat, že o této problematice se dá psát mnohem více, neboť naše práce nezahrnula všechny možné případy. Omezili jsme se pouze na ty, které jsou v praxi nejčastější.

Reference

[1] J. Henzler, M. Kaňka: *Matematika pro ekonomy 2*, Ekopress, Praha 2007.

[2] J. Nagy, O. Navrátil: *Diferenciální a diferenční rovnice*, Česká technika, ČVUT, Praha, 2005.

[3] K. Neusser: *Difference Equations for Economists*. Dostupné online: http://neusser.ch/downloads/DifferenceEquations.pdf

[4] M. J. Osborne: *Mathematical methods for economic theory*. Dostupné online: https://mjo.osborne.economics.utoronto.ca/index.php/tutorial/index/1/fod/t

[5] A. Prágerová: *Diferenční rovnice*, Nakladatelství technické literatury, Praha, 1971.

[6] A. Pražák: *Diferenční rovnice s aplikacemi v ekonomii*, Gaudeamus, Hradec Králové, 2013.