

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

Fakulta elektrotechniky  
a komunikačních technologií

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Brno, 2017

Ondrej Mihálik



**VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ**

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

**FAKULTA ELEKTROTECHNIKY**

**A KOMUNIKAČNÍCH TECHNOLOGIÍ**

FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING AND COMMUNICATION

**ÚSTAV AUTOMATIZACE A MĚŘICÍ TECHNIKY**

DEPARTMENT OF CONTROL AND INSTRUMENTATION

**HERMITEOVA ORTOGONÁLNÍ BÁZE A JEJÍ VYUŽITÍ PRO  
ZÍSKÁNÍ SPEKTRA SIGNÁLŮ**

APPLICATION OF THE HERMITE BASIS FOR SPECTRAL ANALYSIS

**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

BACHELOR'S THESIS

**AUTOR PRÁCE**

AUTHOR

**Ondrej Mihálik**

**VEDOUCÍ PRÁCE**

SUPERVISOR

**prof. Ing. Pavel Jura, CSc.**

**BRNO 2017**

# Bakalářská práce

bakalářský studijní obor **Automatizační a měřicí technika**

Ústav automatizace a měřicí techniky

**Student:** Ondřej Mihálik

**ID:** 173702

**Ročník:** 3

**Akademický rok:** 2016/17

## NÁZEV TÉMATU:

### Hermiteova ortogonální báze a její využití pro získání spektra signálů

#### POKYNY PRO VYPRACOVÁNÍ:

1. Seznamte se s časovými a frekvenčními vlastnostmi Hermiteových funkcí a vyšetřete vliv časového měřítka na jejich frekvenční spektrum.
2. V programovém prostředí Matlab implementujte Hermiteovu transformaci pro aproximaci signálů. Demonstrujte tuto transformaci na zvolených signálech. Vyšetřete chybu aproximace těchto signálů v závislosti na parametrech aproximace.
3. Výsledky doplňte grafickými ukázkami.

#### DOPORUČENÁ LITERATURA:

1. Martens JB. The Hermite transform – applications. Proceedings of the IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing. Vol. 38, No. 9, September 1990, 1607–1618.
2. Martens JB. The Hermite transform – theory. IEEE Trans Acoustics, Speech, Signal Processing. Vol. 38, No. 9, September 1990, 1595–1606.
3. Gregory Leibon: A Fast Hermite Transform, Theor. Comput. Sci. 2008 December 17; 409(2): 211–228. doi:10.1016/j.tcs.2008.09.010
4. Jeffrey A Bloom, Todd R. Reed: An Uncertainty Analysis of Some Real Functions for Image Processing Applications. Proceedings of International Conference on Image Processing, October 1997.

**Termín zadání:** 6.2.2017

**Termín odevzdání:** 29.5.2017

**Vedoucí práce:** prof. Ing. Pavel Jura, CSc.

**Konzultant:**

**doc. Ing. Václav Jirsík, CSc.**  
*předseda oborové rady*

#### UPOZORNĚNÍ:

Autor bakalářské práce nesmí při vytváření bakalářské práce porušit autorská práva třetích osob, zejména nesmí zasahovat nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a musí si být plně vědom následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení části druhé, hlavy VI. díl 4 Trestního zákoníku č.40/2009 Sb.

## ABSTRAKT

Práca je zameraná na využitie Hermiteových funkcií pre účely aproximácie signálov. Cieľom práce je preskúmať ich vlastnosti v časovej a vo frekvenčnej oblasti, konkrétne ich ortogonalitu, Fourierovu transformáciu, korene a asymptotické správanie pre vysoké rády. Ďalším predmetom práce je otázka voľby mierky týchto funkcií s cieľom minimalizovať kvadratickú chybu aproximácie signálov. Porovnáva niekoľko metód od rôznych autorov. Na záver sú navrhnuté algoritmy overené pri aproximácii jednoduchých signálov, aby bolo tieto metódy možné porovnať.

## KLÚČOVÉ SLOVÁ

Hilbertov priestor, Fourierova transformácia, Gaborova transformácia, Hermiteove polynómy, ortogonalita, optimálne parametre, časová mierka, časový posun, kvadratická chyba, spektrum

## ABSTRACT

The work is concerned with an application of the Hermite functions in signal approximation. The purpose of the work is to show their properties in time and frequency domains, namely their orthogonality, Fourier transform, zeros and asymptotic behaviour as their order becomes high. The next subject of this work is the question of scaling these functions to minimize the square error of signal approximation. Several methods proposed by different authors are discussed. Finally these algorithms are tested by approximating simple signals so that their results can be compared.

## KEYWORDS

Hilbert space, Fourier transform, Gabor transform, Hermite polynomials, orthogonality, optimal parameters, time scale, time shift, squared error, spectrum

MIHÁLIK, Ondrej. *Hermiteova ortogonálná báze a její využití pro získání spektra signálů*: bakalárska práca. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, Ústav automatizace a měřící techniky, 2017. 71 s. Vedúci práce bol prof. Ing. Pavel Jura, CSc.

## VYHLÁSENIE

Vyhlasujem, že som svoju bakalársku prácu na tému „Hermiteova ortogonální báze a její využití pro získání spektra signálů“ vypracoval samostatne pod vedením vedúceho bakalárskej práce, využitím odbornej literatúry a ďalších informačných zdrojov, ktoré sú všetky citované v práci a uvedené v zozname literatúry na konci práce.

Ako autor uvedenej bakalárskej práce ďalej vyhlasujem, že v súvislosti s vytvorením tejto bakalárskej práce som neporušil autorské práva tretích osôb, najmä som nezasiahol nedovoleným spôsobom do cudzích autorských práv osobnostných a/alebo majetkových a som si plne vedomý následkov porušenia ustanovenia § 11 a nasledujúcich autorského zákona Českej republiky č. 121/2000 Sb., o práve autorskom, o právach súvisiacich s právom autorským a o zmene niektorých zákonov (autorský zákon), v znení neskorších predpisov, vrátane možných trestnoprávných dôsledkov vyplývajúcich z ustanovenia časti druhej, hlavy VI. diel 4 Trestného zákoníka Českej republiky č. 40/2009 Sb.

Brno .....

.....

podpis autora

## POĎAKOVANIE

Rád by som sa poďakoval vedúcemu práce pánovi prof. Ing. Pavlu Jurovi, CSc. za odborné vedenie, konzultácie, trpezlivosť a jeho jedinečné podnety motivujúce k práci.

Brno .....

.....

podpis autora

# OBSAH

Úvod	12
<b>1 Základné pojmy</b>	<b>13</b>
1.1 Priestor $L_2$	13
1.2 Ortogonálna báza	14
1.3 Hermiteove polynómy	16
1.3.1 Definícia	16
1.3.2 Vlastnosti	17
1.4 Hermiteove funkcie	21
1.4.1 Definícia	21
1.4.2 Vlastnosti	23
1.4.3 Spôsoby generovania	23
1.4.4 Overenie ortonormality	25
<b>2 Frekvenčné vlastnosti Hermiteovych funkcií</b>	<b>27</b>
2.1 Fourierova transformácia	27
2.2 Gaborova transformácia	35
<b>3 Optimálna voľba mierky a časového posunu</b>	<b>38</b>
3.1 Chyba aproximácie	38
3.2 Princíp zmenšenia chyby	39
3.3 Voľba parametrov na základe tvaru signálu	39
3.3.1 Využitie doby trvania signálu	39
3.3.2 Využitie momentov signálu	40
3.4 Numerická minimalizácia chyby	42
3.4.1 Stacionárne podmienky chyby	42
3.4.2 Rekonštrukcia chyby na základe gradientu	44
3.5 Porovnanie jednotlivých metód	45
<b>4 Aproximácia konkrétneho signálu</b>	<b>47</b>
4.1 Harmonický priebeh	47
4.1.1 Využitie doby trvania signálu	47
4.1.2 Využitie momentov signálu	50
4.1.3 Využitie gradientu chyby	53
4.2 Obdĺžnikový signál	55
4.2.1 Využitie momentov signálu	56
4.2.2 Využitie doby trvania signálu	58
4.2.3 Využitie gradientu chyby	59

4.3 Porovnanie výsledkov metód . . . . .	61
<b>5 Záver</b>	<b>63</b>
<b>Literatúra</b>	<b>64</b>
<b>Zoznam symbolov, veličín a skratiek</b>	<b>65</b>
<b>Zoznam príloh</b>	<b>66</b>
<b>A Vybrané časti navrhnutého kódu</b>	<b>67</b>
A.1 Generovanie Hermiteovych polynómov . . . . .	67
A.2 Generovanie Hermiteovych funkcií . . . . .	67
A.3 Priama Hermiteova transformácia . . . . .	68
A.4 Inverzná Hermiteova transformácia . . . . .	69
<b>B Obsah priloženého CD</b>	<b>71</b>



# ZOZNAM OBRÁZKOV

1.1	Grafické priebehy prvých štyroch Hermiteových polynómov . . . . .	17
1.2	Hermiteov polynóm rádu 100 a jeho aproximácia podľa vzťahu (1.25)	18
1.3	Poloha koreňov Hermiteových polynómov . . . . .	19
1.4	Poloha najväčšieho koreňa Hermiteovho polynómu a aproximácia podľa vzťahu (1.26) . . . . .	20
1.5	Relatívna chyba aproximácie koreňa Hermiteovho polynómu vzťahom (1.26) . . . . .	20
1.6	Grafické priebehy prvých štyroch Hermiteových funkcií . . . . .	22
1.7	Hermiteova funkcia rádu 100 . . . . .	22
1.8	Hermiteova funkcia rádu 650, $\lambda = 1, t_0 = 0$ . . . . .	25
1.9	Rád jednotlivých prvkov matice E. . . . .	26
2.1	Hermiteove funkcie v časovej a vo frekvenčnej oblasti . . . . .	28
2.2	Jadro $K_{10}(t, \omega)$ . . . . .	30
2.3	Jadro $K_{100}(t, \omega)$ . . . . .	30
2.4	Jadro $K_{100}(t, \omega)$ . . . . .	31
2.5	Jadro $K_{100}(t, \omega)$ v okolí počiatku sústavy súradníc . . . . .	31
2.6	Absolútna hodnota $K_{100}(t, \omega)$ . . . . .	32
2.7	Frekvenčné spektrum aproximácie $\delta(t)$ konečným radom $\psi_n(t)$ po $N = 650$ . . . . .	33
2.8	Časový priebeh aproximácie $\delta(t)$ radom $\psi_n(t)$ po $N = 650$ . . . . .	34
2.9	Gaborov diagram funkcie $\psi_{10}$ . . . . .	36
2.10	Gaborov diagram funkcie $\psi_{600}$ . . . . .	36
2.11	Gaborov diagram, časový priebeh a spektrum funkcie $\psi_{70}$ . . . . .	37
3.1	Vplyv periódy vzorkovania $T_s$ na parametre. . . . .	41
4.1	Aproximácia signálu $f(t)$ radom Hermiteových funkcií $f_{100}(t)$ , $k = 5$ . . . . .	48
4.2	Hermiteovo spektrum signálu $f(t)$ , $t_m = 0, 5$ , $k = 5$ . . . . .	48
4.3	Aproximácia signálu $f(t)$ radom Hermiteových funkcií $f_{100}(t)$ , $k = 20$ . . . . .	49
4.4	Hermiteovo spektrum signálu $f(t)$ , $t_m = 0, 5$ , $k = 20$ . . . . .	49
4.5	Chyba v závislosti na ráde aproximácie $N$ . . . . .	50
4.6	Aproximácia signálu $f(t)$ radom Hermiteových funkcií $f_{100}(t)$ , $k = 20$ . . . . .	51
4.7	Hermiteovo spektrum signálu $f(t)$ , $t_m = 0, 5$ , $k = 20$ . . . . .	52
4.8	Chyba (plná) a jej horná hranica (prerušovaná) v závislosti na ráde aproximácie $N$ . . . . .	53
4.9	Priebeh chyby $\xi_4(\lambda, t_0)$ posunutý o integračnú konštantu, $t_m = 0, 5$ , $k = 5$ . . . . .	54
4.10	Priebeh chyby $\xi_{25}(\lambda, t_0)$ posunutý o integračnú konštantu, $t_m = 0, 5$ , $k = 5$ . . . . .	54

4.11	Chyba aproximácie na základe momentov a minimálne hodnoty chyby.	55
4.12	Minimálny potrebný rád aproximácie na základe momentov. . . . .	56
4.13	Aproximácia signálu $f(t)$ radom Hermiteovych funkcií $f_{100}(t)$ , $\epsilon = 10^{-3}$	57
4.14	Hermiteovo spektrum signálu $f(t)$ , $\epsilon = 10^{-3}$ . . . . .	57
4.15	Chyba (plná) a jej horná hranica (prerušovaná) v závislosti na ráde aproximácie $N$ . . . . .	58
4.16	Chyba aproximácie na základe trvania signálu v závislosti na ráde $N$ .	59
4.17	Priebeh chyby $\xi_5(\lambda, t_0)$ posunutý o integračnú konštantu, $\epsilon = 10^{-3}$ . . .	60
4.18	Chyba aproximácie na základe numerickej optimalizácie v závislosti na ráde $N$ . . . . .	60
4.19	Aproximácia $f_{50M}(t)$ a jej oprava $f_{50G}(t)$ ; $\epsilon = 10^{-4}$ . . . . .	61

## ZOZNAM TABULIEK

1.1	Prehľad niektorých významných ortogonálnych báz . . . . .	15
3.1	Prehľad metód pre určenie optimálnych parametrov . . . . .	46
4.1	Označenie parametrov prislúchajúcich jednotlivým metódam . . . . .	47

# ZOZNAM VÝPISOV

1.1	Realizácia rekurentného vzťahu, vyňaté z funkcie <code>HFunction</code> . . . . .	24
A.1	<code>HPolynomial</code> . . . . .	67
A.2	<code>HFunction</code> . . . . .	67
A.3	<code>HSpectrum</code> . . . . .	68
A.4	<code>HSpectrumInv</code> . . . . .	69

# ÚVOD

Fourierov rozvoj signálu pomocou harmonických funkcií ( $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $e^{jx}$ ) je len špeciálnym prípadom Fourierovej transformácie. V skutočnosti existuje množstvo iných systémov funkcií, ktoré sa dajú využiť pre Fourierovu transformáciu. Jedným z príkladov takýchto funkcií sú Hermiteove polynómy, ktorým sa venuje táto práca.

Prvá kapitola popisuje Hilbertov priestor  $L_2(a, b)$  kvadraticky integrovateľných funkcií a obsahuje dôležité definície. Následne sa zameriavam na Hermiteove polynómy a Hermiteove funkcie. Uvádzam ich základné vlastnosti, spôsoby generovania a kontrolu ortonormality vygenerovaných výsledkov.

Druhá kapitola je zameraná na časovo-frekvenčné vlastnosti týchto funkcií využitím Fourierovej transformácie, Gaborovho diagramu a transformácie jednoduchých signálov. Je tu preskúmaná možnosť využitia Hermiteových funkcií pre získanie harmonického spektra signálu.

Aby bolo možné dosiahnuť čo najlepšiu aproximáciu signálov, tretia kapitola je venovaná rôznym metódam optimálnej voľby mierky a časového posunu.

V poslednej kapitole sa nachádza konkrétne použitie navrhnutých algoritmov a ich demonštrácia na príkladoch signálu. Vďaka tomu je možné porovnať kvalitu jednotlivých metód optimálnej voľby voľných parametrov aproximácie.

# 1 ZÁKLADNÉ POJMY

V tejto časti definujem dôležité pojmy a vlastnosti všeobecnej spektrálnej analýzy. Ide o pojmy nevyhnutné v ďalších častiach práce.

## 1.1 Priestor $L_2$

Uvažujme signál, ktorý je v intervale  $(a, b)$  daný matematickou funkciou  $f(t)$ .

**Veta 1.1** *O merateľnej komplexnej funkcii  $f(t)$  reálnej premennej  $t$  hovoríme, že je integrovateľná s kvadrátom (s druhou mocninou), ak existuje (a má konečnú hodnotu) integrál*

$$\int_a^b |f(t)|^2 dt. \quad (1.1)$$

Túto vlastnosť funkcie značíme  $f \in L_2(a, b)$ , skrátene  $f \in L_2 [1]$ .

Podmienka, kvadratickej integrovateľnosti  $f(t)$  v intervale  $\langle a, b \rangle$  vlastne znamená, že signál má konečnú energiu.

**Príklad:** Funkcia  $f(t) = 1/\sqrt{t}$  v intervale  $\langle 0, 1 \rangle$  nie je kvadraticky integrovateľná, pretože

$$\int_0^1 |f(t)|^2 dt = \int_0^1 \left| \frac{1}{\sqrt{t}} \right|^2 dt = \infty.$$

**Veta 1.2** *Skalárny súčin funkcií  $f(t)$  a  $g(t)$  v priestore  $L_2(a, b)$  označujeme  $(f, g)$  a je definovaný vzťahom*

$$(f, g) = \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt, \quad (1.2)$$

kde  $\overline{g(t)}$  značí komplexne združenú funkciu k funkcii  $g(t)$ .

**Veta 1.3** *Normu funkcie značíme  $\|f(t)\|$  a je definovaná vzťahom*

$$\|f(t)\| = \sqrt{(f, f)}. \quad (1.3)$$

Kvadrát normy je energiou signálu.

**Veta 1.4** *Pre skalárny súčin platí nerovnosť*

$$|(f, g)| \leq \|f\| \cdot \|g\| \quad (1.4)$$

a nazýva sa Schwarzova nerovnosť.

**Veta 1.5** *Vzdialenosť dvoch funkcií je definovaná vzorcom*

$$\rho(f, g) = \sqrt{\int_a^b |f(t) - g(t)|^2 dt} \quad (1.5)$$

*a platia pre ňu tieto základné vlastnosti*

$$\begin{aligned} \rho(f, g) &\geq 0, \quad \rho(f, g) = 0 \quad \text{práve, ak } f = g; \\ \rho(f, g) &\leq \rho(f, h) + \rho(g, h); \\ \rho(f, g) &= \rho(g, f). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Vety 1.2 až 1.5 pochádzajú zo zdroja [2].

## 1.2 Ortogonálna báza

**Veta 1.6** *Funkcie  $f(t)$ ,  $g(t)$  sú v  $L_2(a, b)$  kolmé (ortogonálne), ak*

$$(f, g) = \int_a^b f(t)\overline{g(t)} dt = 0. \quad (1.7)$$

Ortogonalita má, ako bude neskôr ukázané, veľký význam pri spektrálnej analýze.

**Veta 1.7** *O postupnosti funkcií  $e_1, e_2, e_3, \dots$  hovoríme, že je ortogonálna v  $L_2$ , ak*

$$\begin{aligned} (e_n, e_m) &> 0 \quad \text{pre } n = m, \\ (e_n, e_m) &= 0 \quad \text{pre } n \neq m, \end{aligned} \quad (1.8)$$

*pričom  $n, m \in \mathbb{N}$ .*

**Veta 1.8** *O postupnosti funkcií  $e_1, e_2, e_3, \dots$  hovoríme, že je ortonormálna v  $L_2$ , ak je ortogonálna a navyše platí  $\|e_n\| = 1$ , teda*

$$(e_n, e_m) = \begin{cases} 1 & \text{pre } n = m \\ 0 & \text{pre } n \neq m, \end{cases} \quad (1.9)$$

*pričom  $n, m \in \mathbb{N}$ .*

**Veta 1.9** *Ortogonálna sústava  $e_1, e_2, e_3, \dots$  je úplná v  $L_2$  (tvorí bázu), ak platí aspoň jedna z týchto podmienok:*

1. *Pre každý signál  $f \in L_2$  platí*

$$\|f(t)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|(f, e_n)|^2}{\|e_n\|^2} \quad (1.10)$$

2. Pre každý signál  $f \in L_2$  platí

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f, e_n)}{\|e_n\|^2} e_n \quad (1.11)$$

3. Ku každému  $f \in L_2$  a  $\epsilon > 0$  existuje konečná lineárna kombinácia

$$f_N = \sum_{n=1}^N c_n e_n, \quad (1.12)$$

pre ktorú  $\|f - f_N\| < \epsilon$ .

**Veta 1.10** Fourierovým radom signálu  $f(x)$  vzhľadom k ortogonálnemu systému  $e_1, e_2, e_3, \dots$  sa nazýva rad

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n(t), \quad (1.13)$$

pre ktorého koeficienty platí

$$c_n = \frac{(f, e_n)}{(e_n, e_n)}. \quad (1.14)$$

**Veta 1.11** V priestore  $L_2(a, b)$  platí Parsevalova rovnosť

$$\int_a^b |f(t)|^2 dt = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2, \quad (1.15)$$

kde  $c_n$  sú zložky spektra  $f(t)$ . [2]

Tab. 1.1: Prehľad niektorých významných ortogonálnych báz

Názov	Tvar postupnosti	Interval ortogonalít (a, b)
Trigonometrické funkcie	$\{\cos nt\}$	$(0, \pi)$
Trigonometrické funkcie	$\{\sin nt\}$	$(0, \pi)$
Trigonometrické funkcie	$\{\cos nt, \sin nt\}$	$(-\pi, \pi)$
Komplexné exponenciálne funkcie	$\{e^{jnt}\}$	$(-\pi, \pi)$
Besselove funkcie	$\{\sqrt{t}J_m(\lambda_n t)\}$	$(0, 1)$
Laguerrove funkcie	$\{e^{t/2}t^{\alpha/2}L_n^{(\alpha)}(t)\}$	$(0, \infty)$
Legendrove funkcie	$\{P_n(t)\}$	$(-1, 1)$
Čebyševove funkcie	$\{\sqrt{1-t^2}T_n(t)\}$	$(-1, 1)$
Hermiteove funkcie	$\{e^{-t^2/2}H_n(t)\}$	$(-\infty, \infty)$
Pretiahnuté sférické vlnové funkcie Prolate Spheroidal Wave Functions [3]	$\{\psi_n(c, t)\}$	$(-\infty, \infty)$ $(-T/2, T/2)$



## 1.3 Hermiteove polynómy

### 1.3.1 Definícia

Hermiteove polynómy bývajú v literatúre definované rôznymi spôsobmi. Jednou z možností je vyjadriť ich ako koeficienty rozvoja takzvanej generujúcej funkcie <sup>1</sup>

$$e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}, \quad (1.16)$$

odkiaľ plynie takzvaný *Rodriguesov vzťah*

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}, \quad n \in \mathbb{N}^0. \quad (1.17)$$

Po vykonaní naznačenej derivácie dostávame

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^h \frac{(-1)^k n!}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k}, \quad (1.18)$$

kde  $h = \frac{1}{2}n$  pre párne  $n$  a  $h = \frac{1}{2}(n-1)$  pre nepárne  $n$ . [4]

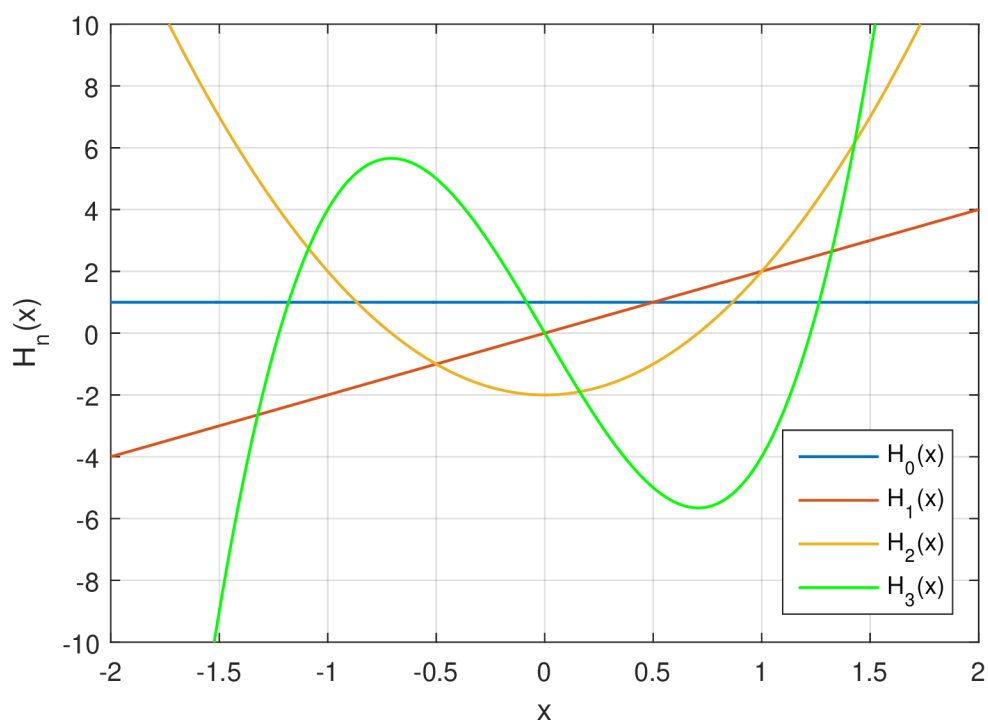
Prvých šesť polynómov má tvary

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1, \\ H_1(x) &= 2x, \\ H_2(x) &= 4x^2 - 2, \\ H_3(x) &= 8x^3 - 12x, \\ H_4(x) &= 16x^4 - 48x^2 + 12, \\ H_5(x) &= 32x^5 - 160x^3 + 120x. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Na obrázku 1.1 sú ich grafické priebehy v okolí počiatku súradnicovej sústavy. Kvôli prehľadnosti sú zobrazené prvé štyri polynómy. Vyššie rády nadobúdajú vysoké funkčné hodnoty.

---

<sup>1</sup>Pri Hermiteových polynómoch zámerne používam premennú  $x$  namiesto  $t$ . To preto, že neskôr zavediem substitúciu  $x = (t - t_0)/\lambda$ , kde  $t_0$  a  $\lambda$  sú konštanty.



Obr. 1.1: Grafické priebehy prvých štyroch Hermiteových polynómov

### 1.3.2 Vlastnosti

**Veta 1.12** Hermiteove polynómy sú ortogonálne v intervale  $(-\infty, \infty)$  s váhou  $w(x) = e^{-x^2}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = \begin{cases} 2^n n! \sqrt{\pi} & \text{pre } n = m \\ 0 & \text{pre } n \neq m. \end{cases} \quad (1.20)$$

**Veta 1.13**  $y = H_n(x)$  je riešením lineárnej diferenciálnej rovnice druhého rádu v tvare

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0, \quad (1.21)$$

ktorá sa nazýva Hermiteova rovnica. [4]

**Veta 1.14** Pre deriváciu Hermiteovho polynómu rádu  $n$  platí

$$H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.22)$$

**Veta 1.15** Hermiteove polynómy splňajú rekurentný vzťah

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.23)$$

Tento vzťah je dôležitý pre generovanie polynómov vyšších rádov. Je výhodnejší, než vzťah (1.18), pretože nevyžaduje vyčíslenie faktoriálov, ktoré sú pre veľké  $n$  výpočtovo náročné.

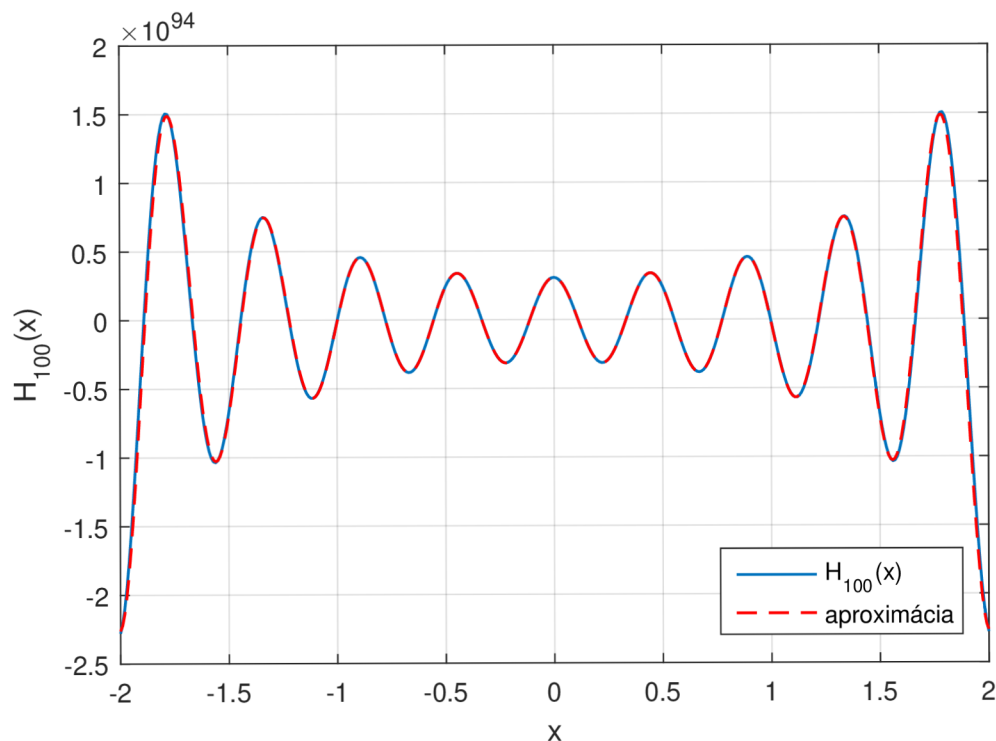
**Veta 1.16** Hermiteov polynóm rádu  $n$  je párnou funkciou pre párne  $n$  a nepárnou funkciou pre nepárne  $n$

$$H_n(x) = (-1)^n H_n(-x), \quad n \in \mathbb{N}^0. \quad (1.24)$$

**Veta 1.17** Pre  $n \rightarrow \infty$  a konečné  $x$  platí asymptotické vyjadrenie [5]

$$H_n(x) \approx 2^{\frac{n+1}{2}} n^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{n}{2}} e^{\frac{x^2}{2}} \cos\left(\sqrt{2n+1}x - \frac{n\pi}{2}\right). \quad (1.25)$$

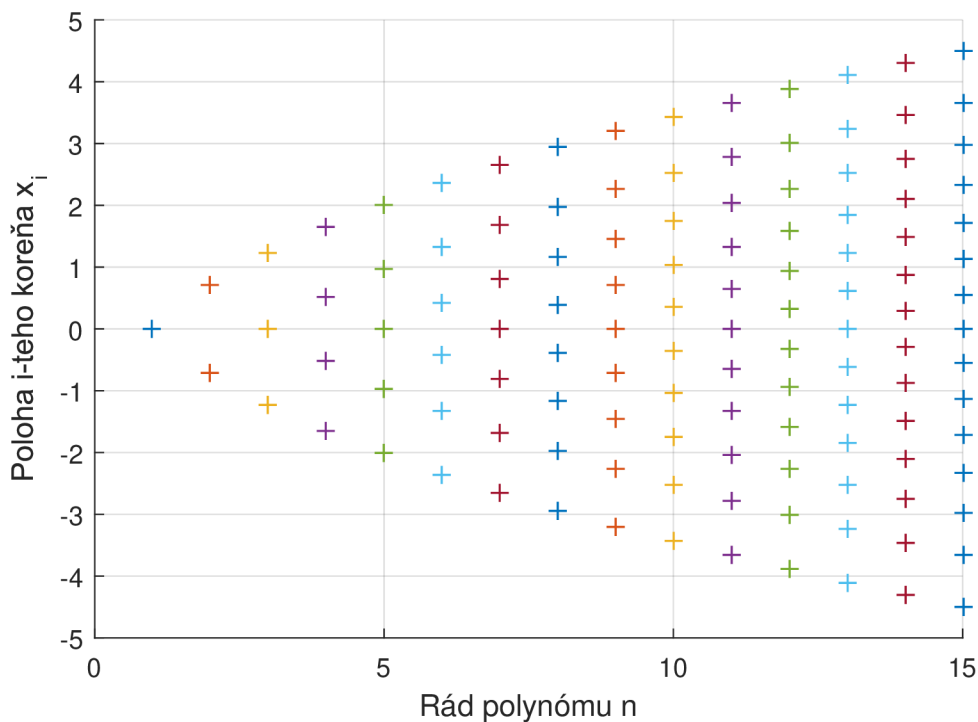
Grafický priebeh  $H_{100}(x)$  a jeho aproximáciu týmto vzťahom zobrazuje graf 1.2.



Obr. 1.2: Hermiteov polynóm rádu 100 a jeho aproximácia podľa vzťahu (1.25)

**Veta 1.18** Ortonormálny polynóm  $P_n(x)$  má  $n$  reálnych jednoduchých koreňov, ktoré ležia v intervale  $(a, b)$ . Korene  $P_n(x)$  oddeľujú korene  $P_{n+1}(x)$ . [2]

Uvedená vlastnosť sa dá pozorovať na grafických priebehoch 1.1 a 1.3.



Obr. 1.3: Poloha koreňov Hermiteovych polynómov

**Veta 1.19** Pre najväčšiu koreň  $x_m$  Hermiteovho polynómu  $H_n(x)$  rádu  $n$  platí

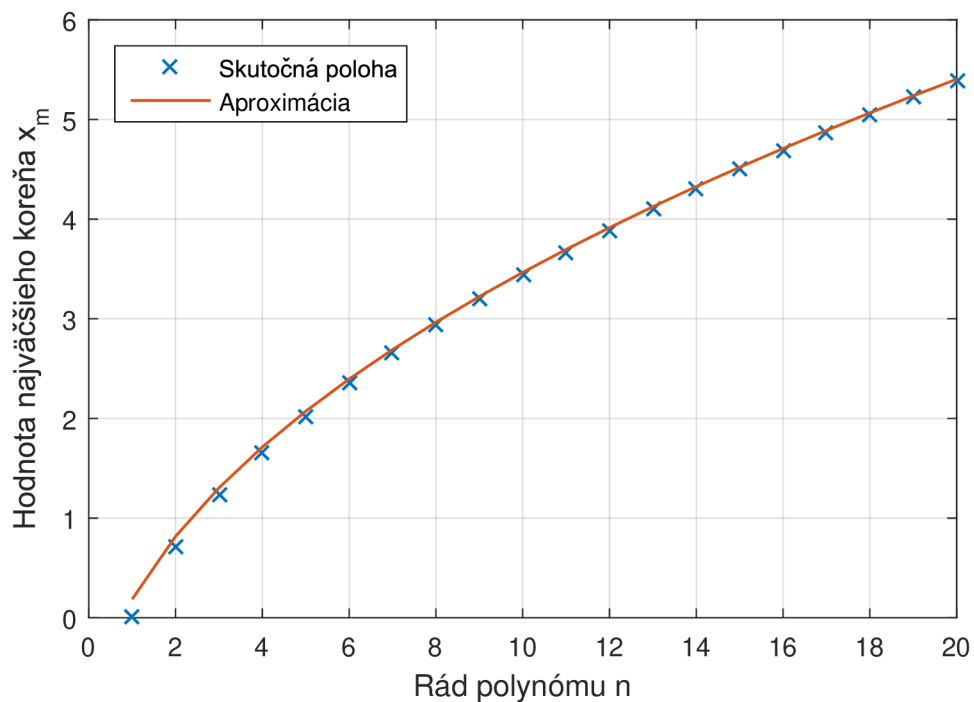
$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_m = \sqrt{2n+1} - \frac{i_1}{\sqrt{6}} \frac{1}{\sqrt[6]{2n+1}}, \quad (1.26)$$

kde  $i_1$  je prvým nenulovým reálnym koreňom Airyho funkcie  $A(x)$ ,  $i_1/\sqrt{6} \approx 1,85575$ . [6]

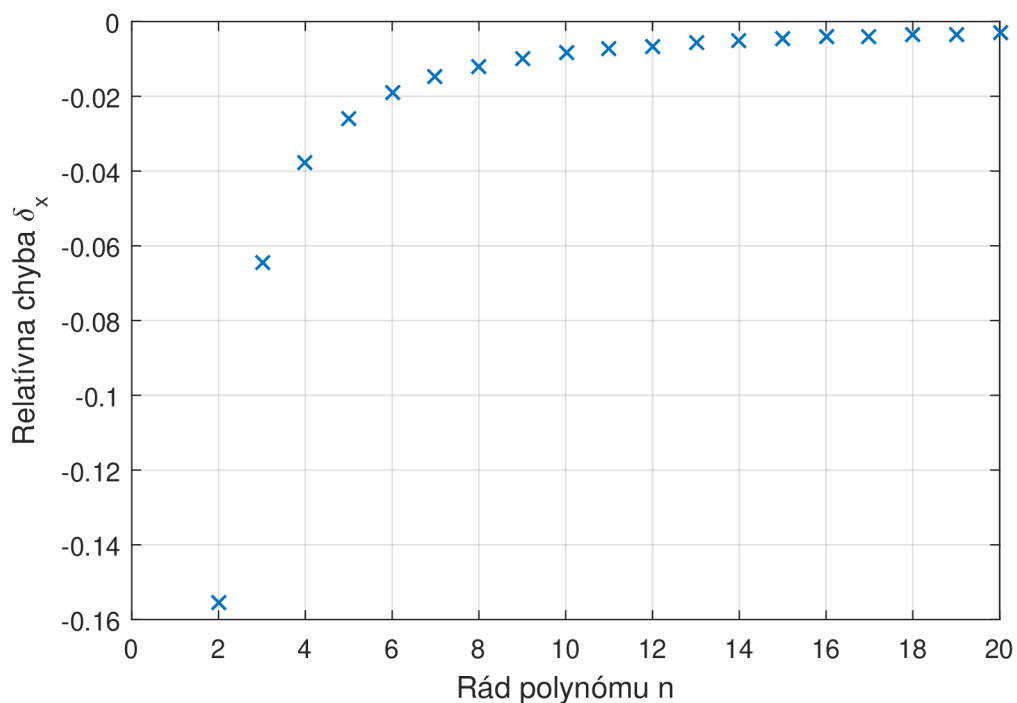
Obrázok 1.4 porovnáva skutočnú polohu koreňov s polohou získanou podľa tohto vzťahu. Na obrázku 1.5 je následne uvedená relatívna chyba aproximácie  $\delta_x$  vypočítaná podľa

$$\delta_x = \frac{(x_{m,a} - x_m)}{x_m}, \quad (1.27)$$

kde  $x_m$  je skutočná poloha koreňa a  $x_{m,a}$  je jeho aproximácia.



Obr. 1.4: Poloha najväčšieho koreňa Hermiteovho polynómu a aproximácia podľa vzťahu (1.26)



Obr. 1.5: Relatívna chyba aproximácie koreňa Hermiteovho polynómu vzťahom (1.26)

## 1.4 Hermiteove funkcie

### 1.4.1 Definícia

Ak Hermiteove polynómy vynásobíme odmocninou z váhovej funkcie a následne ich normalizujeme, získame takzvané Hermiteove funkcie v tvare

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (1.28)$$

Na tieto funkcie je možné aplikovať substitúciu  $x = (t - t_0)/\lambda$ ,

$$\psi_n(\lambda, t_0; t) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \lambda \sqrt{\pi}}} H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (1.29)$$

Parameter  $\lambda$  sa nazýva mierka, parameter  $t_0$  časový posun (v anglickej literatúre „scale“ a „time shift“).<sup>2</sup>

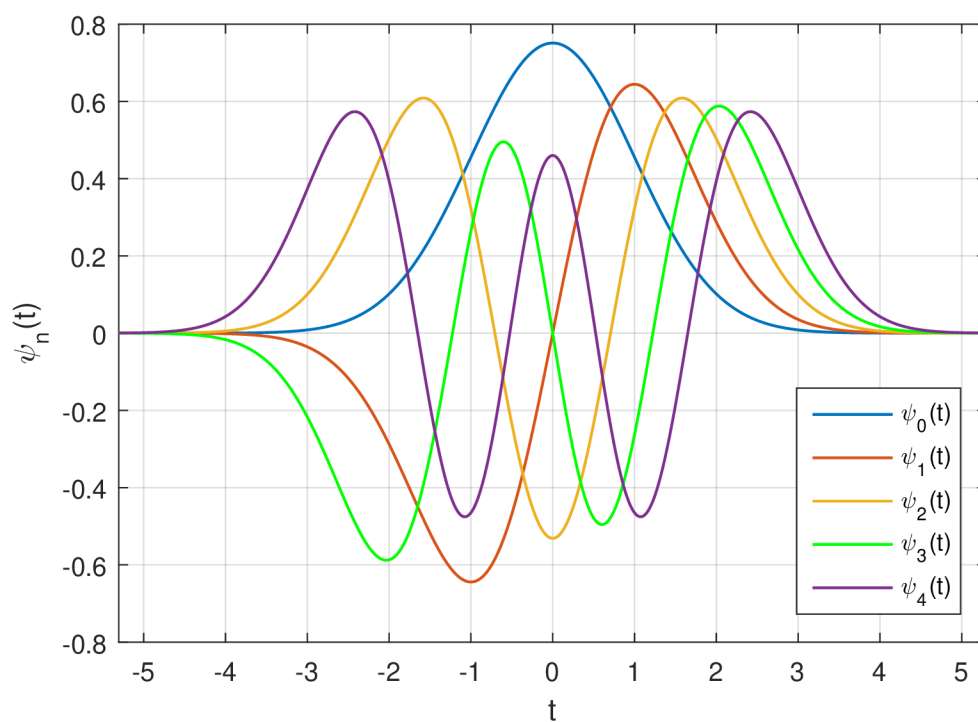
Prvých šesť funkcií má tvary

$$\begin{aligned} \psi_0(1, 0; t) &= \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}, \\ \psi_1(1, 0; t) &= \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt[4]{\pi}} t e^{-\frac{t^2}{2}}, \\ \psi_2(1, 0; t) &= \frac{1}{2\sqrt{2} \sqrt[4]{\pi}} (t^2 - 1) e^{-\frac{t^2}{2}}, \\ \psi_3(1, 0; t) &= \frac{1}{4\sqrt{3} \sqrt[4]{\pi}} (t^3 - 3t) e^{-\frac{t^2}{2}}, \\ \psi_4(1, 0; t) &= \frac{1}{8\sqrt{6} \sqrt[4]{\pi}} (t^4 - 6t^2 + 3) e^{-\frac{t^2}{2}}, \\ \psi_5(1, 0; t) &= \frac{1}{16\sqrt{15} \sqrt[4]{\pi}} (t^5 - 10t^3 + 15t) e^{-\frac{t^2}{2}}. \end{aligned} \quad (1.30)$$

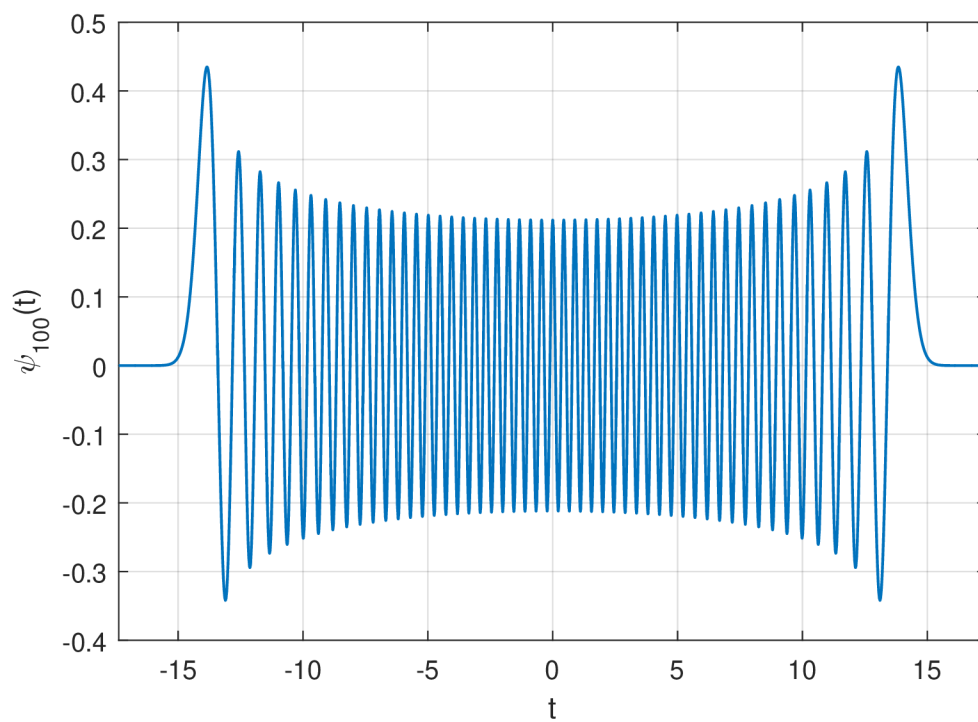
Na obrázkoch 1.6 a 1.7 sú zobrazené grafické priebehy týchto funkcií.

---

<sup>2</sup>Mierka sa prípadne uvádza aj v tvare  $\sigma = 1/\lambda$ , napríklad v článku [8]



Obr. 1.6: Grafické priebehy prvých štyroch Hermiteovych funkcií



Obr. 1.7: Hermiteova funkcia rádu 100

## 1.4.2 Vlastnosti

Je viditeľné, že pre vysoké rády sa časový priebeh Hermiteových funkcií v okolí počiatku blíži harmonickému priebehu. Využitím vzťahu (1.25) a Stirlingovho vzťahu pre  $n!$  dostávame približné vyjadrenie pre Hermiteove funkcie.

**Veta 1.20** *Pre  $n \rightarrow \infty$  a konečné  $x$  platí*

$$\psi_n(x) \approx \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{n}}} \cos\left(\sqrt{2n+1}x - \frac{n\pi}{2}\right). \quad (1.31)$$

Hermiteove funkcie sú ortonormálne v  $L_2(-\infty, \infty)$  s váhou  $w(t) = 1$ .

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(\lambda, t_0; t) \psi_m(\lambda, t_0; t) dt = \begin{cases} 1 & \text{pre } n = m \\ 0 & \text{pre } n \neq m \end{cases} \quad (1.32)$$

Dajú sa priamo využiť na získanie spektra signálu

$$c_n(\lambda, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_n(\lambda, t_0; t) dt. \quad (1.33)$$

Rôzne zdroje, napríklad [7], [8] a [9] uvádzajú postupy, ako čo najlepšie voliť parametre  $\lambda$  a  $t_0$ .

**Veta 1.21** *Hermiteove funkcie spĺňajú rekurentný vzťah*

$$t\psi_n(t) = \sqrt{\frac{n}{2}}\psi_{n-1}(t) + \sqrt{\frac{n+1}{2}}\psi_{n+1}(t). \quad (1.34)$$

**Veta 1.22** *Pre deriváciu Hermiteovej funkcie platí*

$$\psi_n'(t) = \sqrt{\frac{n}{2}}\psi_{n-1}(t) - \sqrt{\frac{n+1}{2}}\psi_{n+1}(t). \quad (1.35)$$

**Veta 1.23** *Ortogonalne polynómy spĺňajú Cristoffelovu-Darbouxovu formulu. Pre Hermiteove funkcie má tvar*

$$\sum_{n=0}^N \psi_n(x) \psi_n(y) = \sqrt{\frac{N+1}{2}} \frac{\psi_N(y) \psi_{N+1}(x) - \psi_{N+1}(y) \psi_N(x)}{x - y} \quad (1.36)$$

## 1.4.3 Spôsobý generovania

Pri generovaní báze sú kladené požiadavky na rýchlosť a presnosť. Prostredie MATLAB štandardne pracuje s typom `double` a preto považujem za rozumné prispôbiť mu algoritmy. Namiesto toho by síce bolo možné zvýšiť počet platných čísiel, s ktorými má prostredie pracovať, ale vtedy dochádza k výraznému predĺženiu času výpočtu.



Overil som, že výpočet Hermiteových polynómov, či už na základe Rodrigue-sovho vzťahu (1.18) alebo rekurentným vzťahom (1.23) nie je vhodný. Na obrázku 1.2 je vidno, že polynóm rádu 100 už v blízkosti počiatku (pre  $x < 2$ ) nadobúda funkčné hodnoty rádu  $10^{94}$ . Pri vyšších rádoch polynómov alebo pre väčšie  $x$  dochádza k prekročeniu rozsahu typu `double` a výstupom sú nepoužiteľné hodnoty `Inf`, teda nekonečno.

Na základe uvedených zistení som musel hľadať iný postup. Riešením je generovať Hermiteove funkcie, pre ktoré tiež existuje rekurentný vzťah (1.34).

Výpis 1.1: Realizácia rekurentného vzťahu, vyňaté z funkcie `HFunction`.

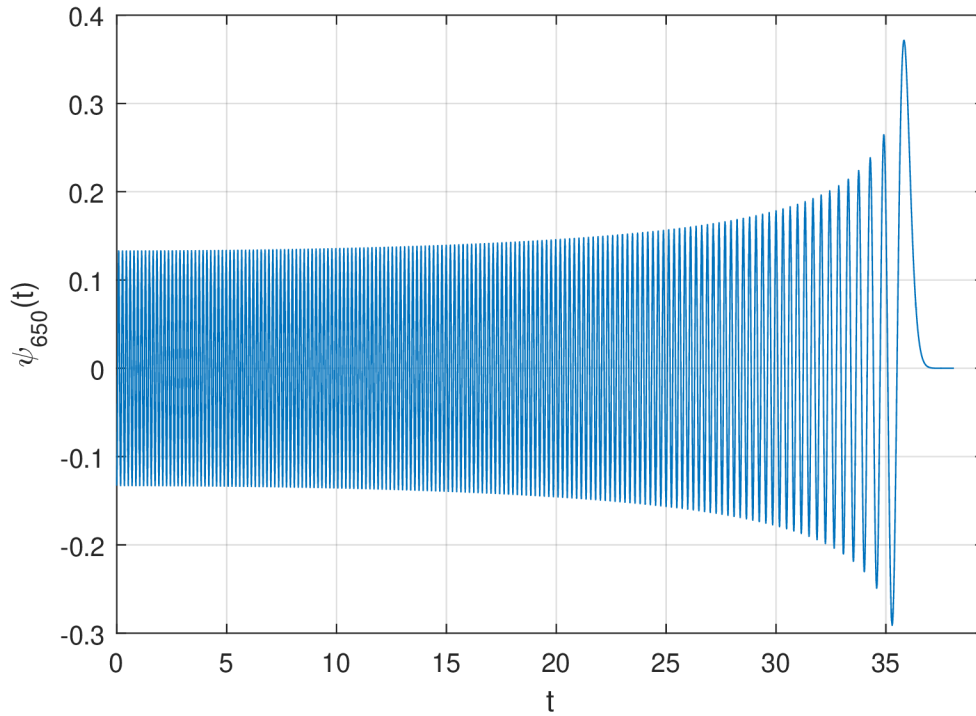
```

17 y = pi^(-1/4); % Hermite function (HF) of order 0
18 if n > 0
19     y_1 = y;
20     y = pi^(-1/4)*sqrt(2)*t; % HF of order 1
21     for k = 2:n
22         y_2 = y_1; % y_2 ... HF of order k-2
23         y_1 = y; % y_1 ... HF of order k-1
24         y = y_1.*t*sqrt(2/k) - y_2*sqrt((k-1)/k);
25     end
26 end
27 y = y.*exp(-t.^2/2)/sqrt(s);

```

Funkcie sú normalizované, v dátových typoch sú teda uložené menšie číselné hodnoty. Takýmto spôsobom sa mi podarilo generovať funkcie rádu 650. Pri vyšších rádoch a veľkých hodnotách  $t$  opäť dochádza k problému priveľkých funkčných hodnôt a výsledkom rekurentného výpočtu je hodnota `Inf`. Pri následnom vyčíslení  $e^{-\frac{t^2}{2}}$  vzniká príliš malá hodnota a je zaokrúhľená na hodnotu 0. Súčinom týchto medzi-výsledkov je neurčitý výraz `NaN`, teda `Not-a-Number`. Táto skutočnosť je výhodná, pretože nevznikajú nesprávne výsledky, ktoré by bolo potrebné zložiť kontrolovať. Užívateľ je informovaný tak, že funkcia hlási „warning“. Navyše často postačuje vyčísliť funkciu len pre  $|t| < t_m$ , kde  $t_m$  je nejaká maximálna hodnota, napríklad daná signálom. To znamená, že pre mnohé signály nie je problém realizovať ich aproximáciu Hermiteovými funkciami až do rádu niekoľko tisíc.

Na obrázku 1.8 je zobrazená časť Hermiteovej funkcie rádu 650. Je párna, preto som ju vykreslil len pre kladné hodnoty  $t$ . Pre  $t > 38$  boli vygenerované hodnoty `NaN`, preto ďalší grafický priebeh chýba.



Obr. 1.8: Hermiteova funkcia rádu 650,  $\lambda = 1, t_0 = 0$ .

#### 1.4.4 Overenie ortonormality

Za účelom kontroly ortonormality získaných funkcií som v prostredí MATLAB generoval maticu  $\mathbf{M}$  skalárnych súčinov týchto funkcií.

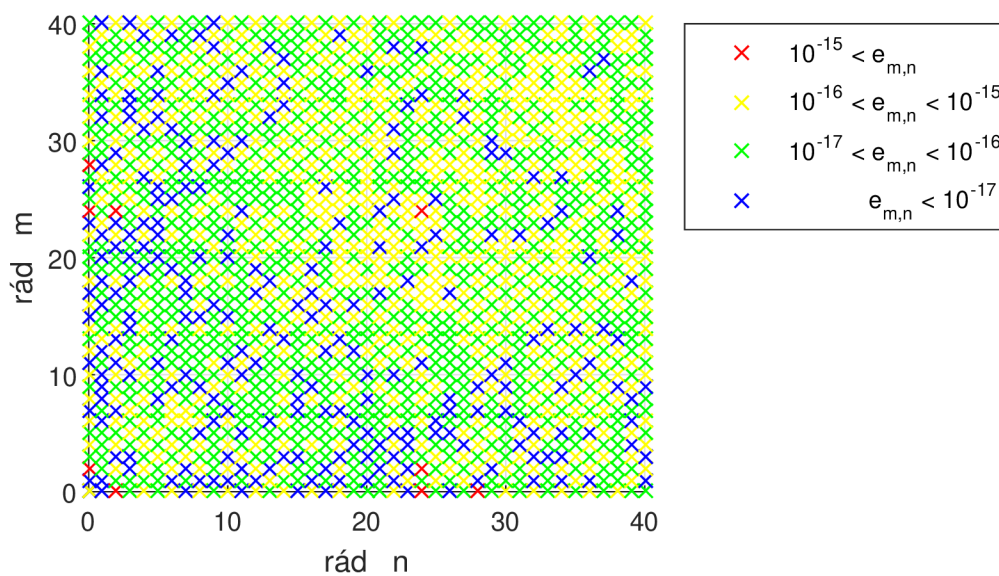
$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} (\psi_0, \psi_0) & (\psi_0, \psi_1) & \cdots & (\psi_0, \psi_N) \\ (\psi_1, \psi_0) & (\psi_1, \psi_1) & \cdots & (\psi_1, \psi_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\psi_N, \psi_0) & (\psi_N, \psi_1) & \cdots & (\psi_N, \psi_N) \end{pmatrix} \quad (1.37)$$

V ideálnom prípade by mala byť matica  $\mathbf{M}$  rovná jednotkovej matici  $\mathbf{I}$ .

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad (1.38)$$

Pre účely integrácie som použil numerickú lichobežníkovú metódu. So znižujúcou sa periódou vzorkovania  $T_s$  sa matica  $\mathbf{M}$  získaná výpočtom blíži jednotkovej matici  $\mathbf{I}$ . Rozdiel týchto dvoch matíc označím  $\mathbf{E} = \mathbf{M} - \mathbf{I}$ . Pri voľbe  $T_s = 0,01, \lambda = 1, t_0 = 0$  a maximálnom ráde  $N = 100$  sú prvky matice  $\mathbf{E}$  v absolútnej hodnote menšie než

$1,8 \cdot 10^{-15}$ . Většina prvků  $\mathbf{E}$  je rádu  $10^{-17}$  až  $10^{-16}$  nezávisle na tom, či jde o prvky diagonály alebo nie.



Obr. 1.9: Rád jednotlivých prvků matice  $\mathbf{E}$ .

## 2 FREKVENČNÉ VLASTNOSTI HERMITEOVYCH FUNKCIÍ

Kapitola popisuje Hermiteove funkcie vo frekvenčnej oblasti a demonštruje možnosť využiť Hermiteovu transformáciu pre získanie harmonického spektra. Pri výpočtoch Hermiteovej transformácie sa v tejto kapitole neprihliada na optimálnu voľbu  $\lambda$  a  $t_0$ , aby sme sa mohli plne zamerať na základné vlastnosti tejto transformácie. Všade, kde nie je napísané inak, som zvolil  $\lambda = 1$  s a  $t_0 = 0$  s, aby boli vzťahy v tejto kapitole prehľadnejšie. Týmto parametrom budú venované zvyšné dve kapitoly.

### 2.1 Fourierova transformácia

**Veta 2.1** *Pre signál  $f(t)$  môžeme v časovej oblasti definovať jeho efektívnu dobu trvania  $D$  a vo frekvenčnej oblasti efektívnu šírku spektra  $B$ , ktoré sú mierou rozptylu okolo stredných hodnôt  $t_0$  a  $\omega_0$*

$$t_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} t |f(t)|^2 dt \quad \omega_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega |F(\omega)|^2 d\omega \quad (2.1)$$

$$D = \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (t - t_0)^2 |f(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt}} \quad B = \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (\omega - \omega_0)^2 |F(\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega}} \quad (2.2)$$

**Veta 2.2** *Pre efektívnu dobu trvania signálu  $D$  a efektívnu šírku spektra  $B$  platí relácia neurčitosti*

$$DB \geq \frac{1}{2} \quad (2.3)$$

*Táto nerovnosť platí pre všetky signály.*

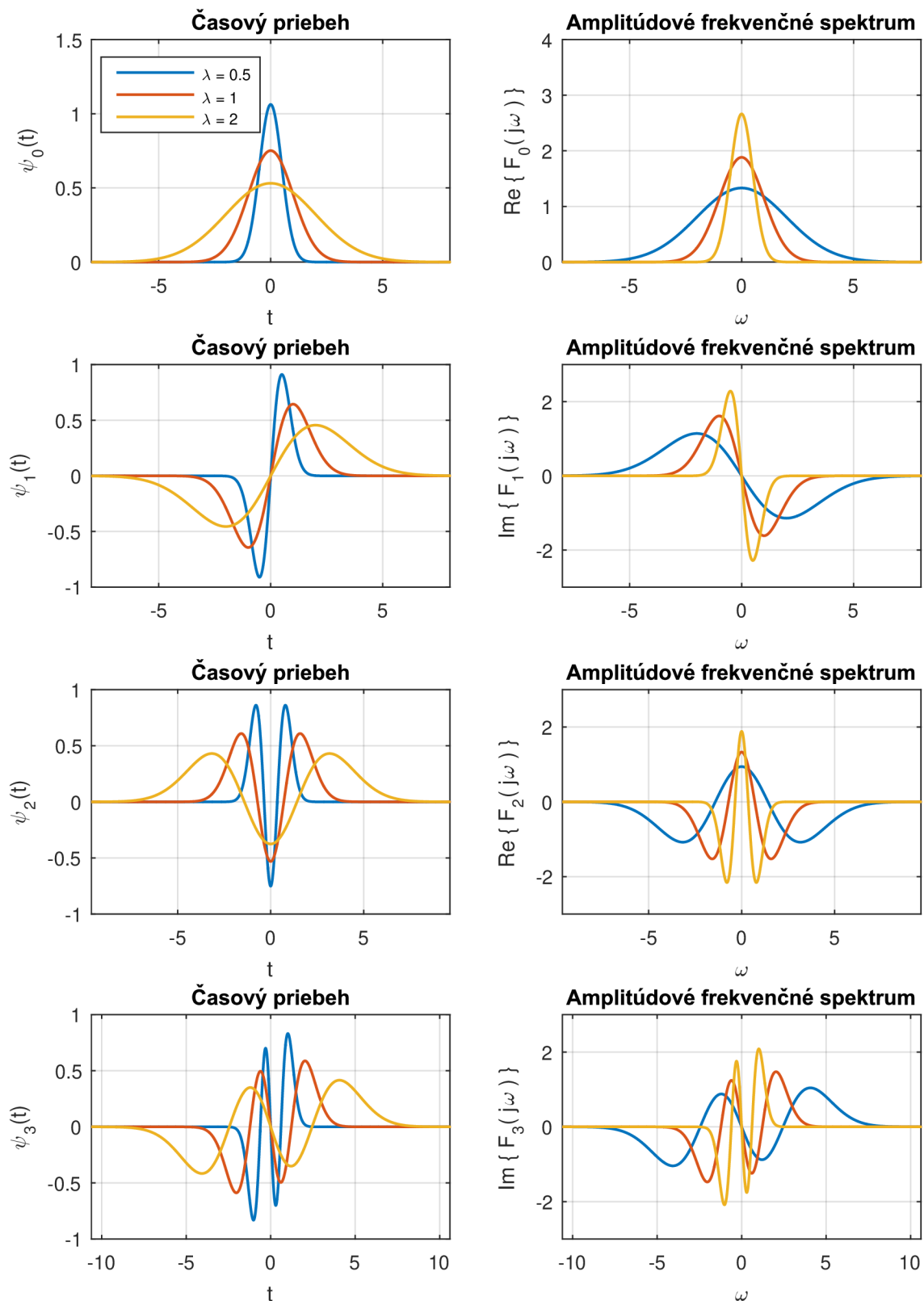
**Veta 2.3** *Fourierova transformácia Hermiteovej funkcie má tvar*

$$\mathcal{F} \{ \psi_n(t) \} = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n(t) e^{-j\omega t} dt = \sqrt{2\pi} j^{-n} \psi_n(\omega) \quad (2.4)$$

*Využitím základných vlastností Fourierovej transformácie sa dá uvedený vzťah zovšeobecniť na prípad  $\psi_n(\lambda, t_0; t)$*

$$\mathcal{F} \{ \psi_n(\lambda, t_0; t) \} = \sqrt{2\pi} j^{-n} \lambda e^{-j\omega t_0} \psi_n(\lambda\omega) \quad (2.5)$$

Hermiteove funkcie s nulovým časovým posunom majú buď reálne, alebo rýdzo imaginárne spektrum - obrázky 2.1. Tiež je pozorovateľný vplyv mierky súvisiaci s reláciou neurčitosti.



Obr. 2.1: Hermiteove funkcie v časovej a vo frekvenčnej oblasti

**Veta 2.4** Pre reláciu neurčitosti  $\psi_n(\lambda, t_0; t)$  platí

$$D_n B_n = n + \frac{1}{2} \quad (2.6)$$

kde  $D_n$  je ekvivalentná doba signálu a  $B_n$  je ekvivalentná šírka spektra  $\psi_n(\lambda, t_0; t)$ .

Majme aproximáciu signálu  $f(t)$  konečným radom Hermiteovych funkcií  $f_N(t)$ . Pre jej Fourierovu transformáciu ľahko odvodíme

$$\begin{aligned} F_N(\omega) &= \mathcal{F} \{f_N(t)\} = \sum_{n=0}^N c_n \mathcal{F} \{\psi_n(t)\} = \\ &= \sum_{n=0}^N c_n \sqrt{2\pi} j^{-n} \psi_n(\omega) = \sum_{n=0}^N \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi_n(t) dt \sqrt{2\pi} j^{-n} \psi_n(\omega) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sum_{n=0}^N \sqrt{2\pi} j^{-n} \psi_n(t) \psi_n(\omega) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) K_N(t, \omega) dt \end{aligned} \quad (2.7)$$

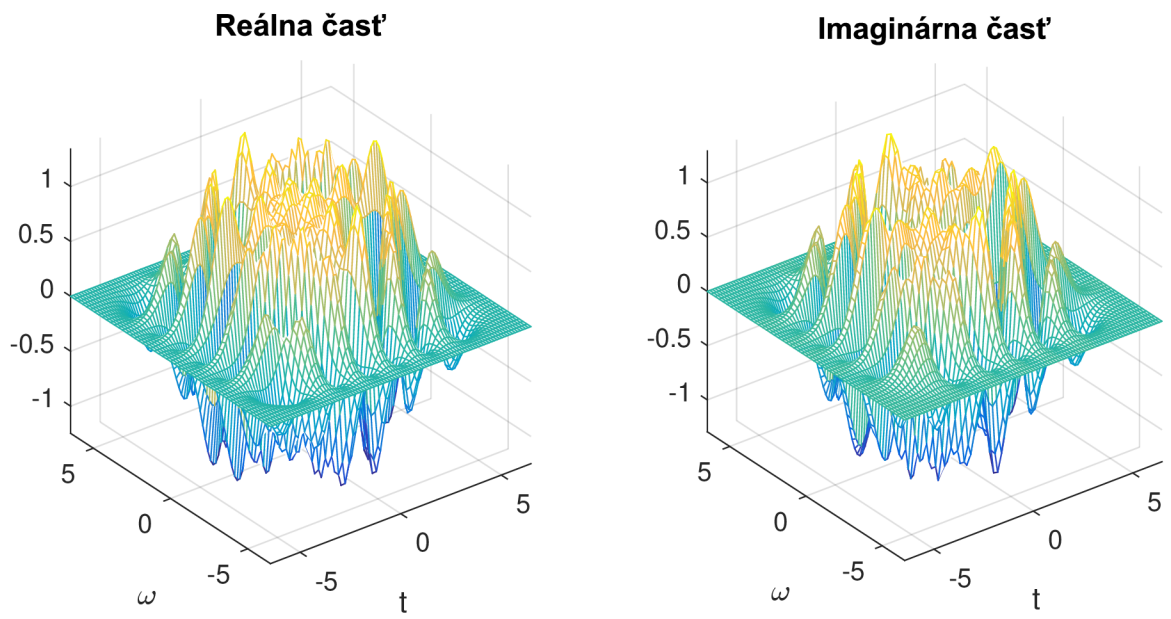
**Veta 2.5** Hermiteovo jadro Fourierovej transformácie má tvar

$$K_N(t, \omega) = \sqrt{2\pi} \sum_{n=0}^N j^{-n} \psi_n(t) \psi_n(\omega) \quad (2.8)$$

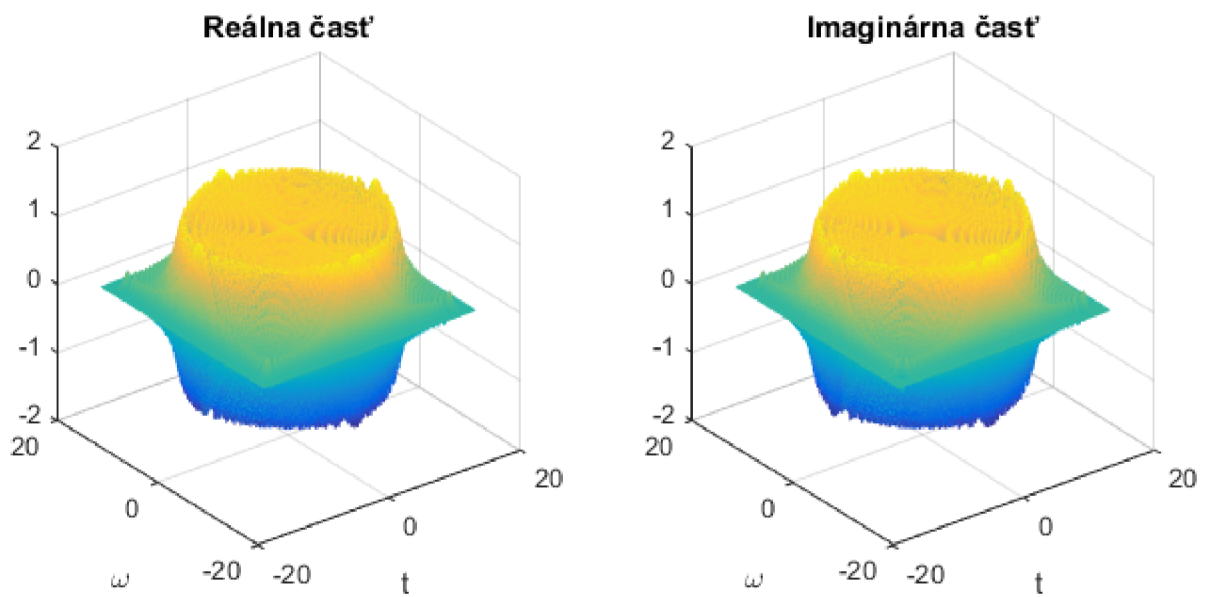
Prvé štyri jadrá majú tvary

$$\begin{aligned} K_0(t, \omega) &= \sqrt{2} e^{-\frac{t^2 + \omega^2}{2}} \\ K_1(t, \omega) &= \sqrt{2} \left(1 - j \frac{1}{2} t \omega\right) e^{-\frac{t^2 + \omega^2}{2}} \\ K_2(t, \omega) &= \sqrt{2} \left(\frac{9}{8} - j \frac{1}{2} t \omega - \frac{1}{8} t^2 \omega^2\right) e^{-\frac{t^2 + \omega^2}{2}} \\ K_3(t, \omega) &= \sqrt{2} \left(\frac{9}{8} - j \frac{9}{16} t \omega - \frac{1}{8} t^2 \omega^2 + j \frac{1}{48} t^3 \omega^3\right) e^{-\frac{t^2 + \omega^2}{2}} \end{aligned} \quad (2.9)$$

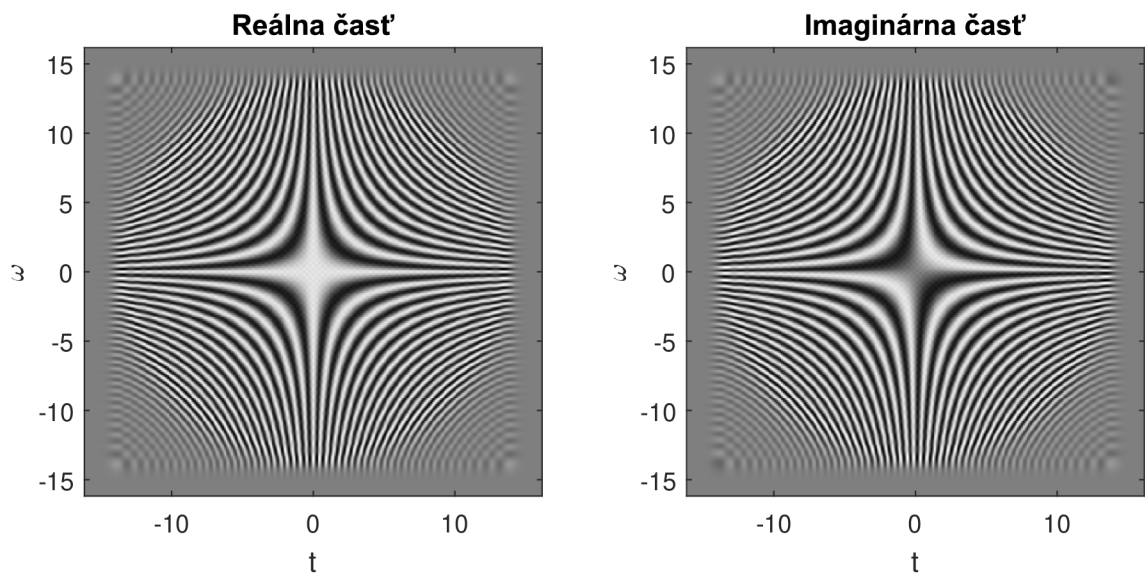
Obrázok 2.2 zobrazuje jadro  $K_{10}(t, \omega)$ , obrázok 2.3 zobrazuje jadro  $K_{100}(t, \omega)$ .



Obr. 2.2: Jadro  $K_{10}(t, \omega)$

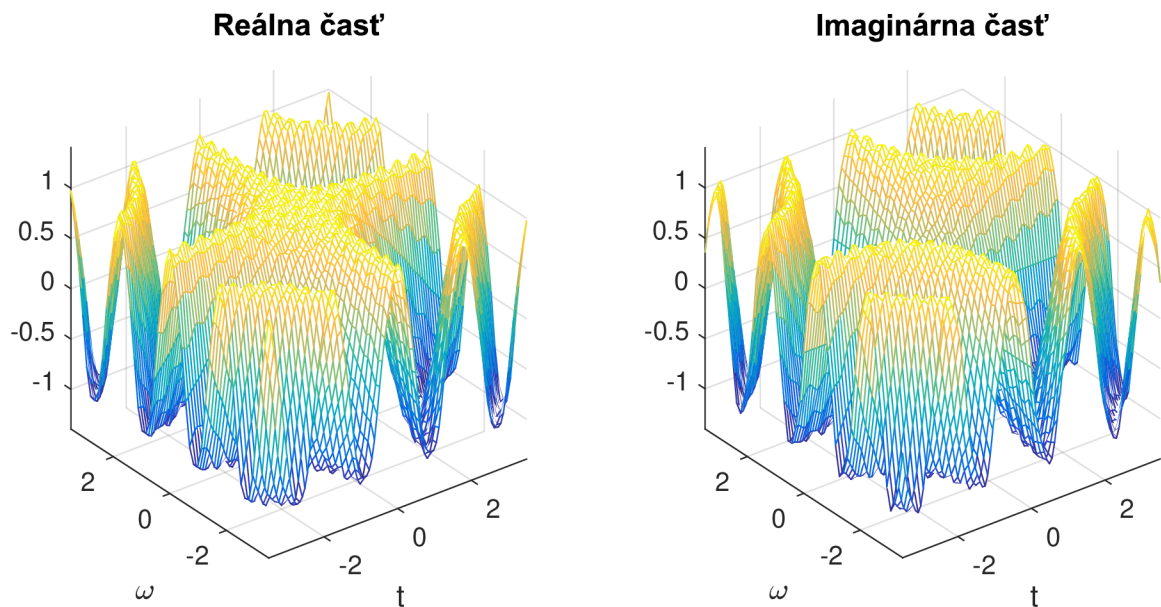


Obr. 2.3: Jadro  $K_{100}(t, \omega)$



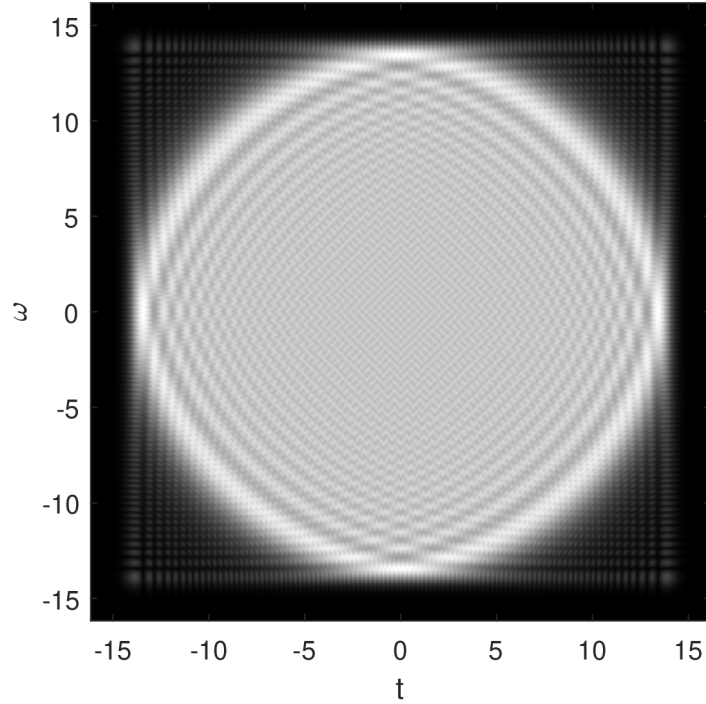
Obr. 2.4: Jadro  $K_{100}(t, \omega)$

Na obrázku 2.4 minimálnym hodnotám prislúcha čierna farba, nule šedá a maximálnym hodnotám zodpovedá biela.



Obr. 2.5: Jadro  $K_{100}(t, \omega)$  v okolí počiatku sústavy súradníc



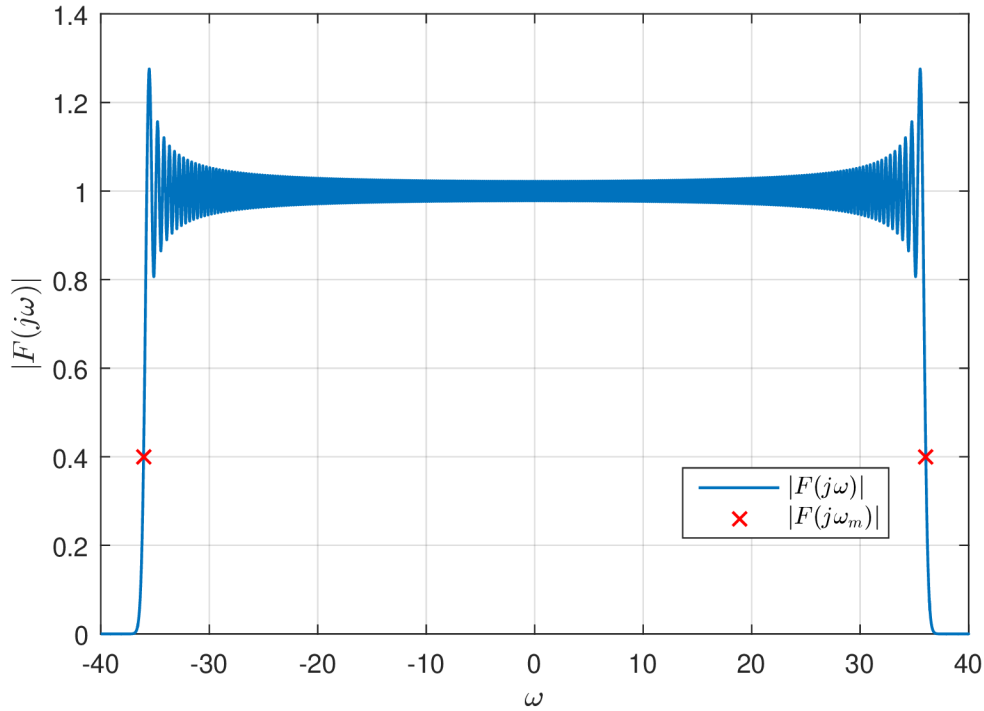


Obr. 2.6: Absolútna hodnota  $K_{100}(t, \omega)$

Na obrázku 2.6 je dodatočne zobrazená absolútna hodnota  $K_{100}(t, \omega)$ , pričom nulovej funkčnej hodnote je priradená čierna farba.

Uvedené jadro je možné využiť pre získanie Fourierovej transformácie signálu. Preskúmame teda, aký vplyv má rád jadra  $N$  na získané spektrum skúmaného signálu. Vhodným bude signál  $f(t) = \delta(t)$ . Pre jeho spektrum platí  $\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$ , vďaka čomu budeme môcť dobre pozorovať vplyv  $N$ .

$$\begin{aligned}
 F_N(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)K_N(t, \omega)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)K_N(t, \omega)dt = \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\sqrt{2\pi} \sum_{n=0}^N j^{-n}\psi_n(t)\psi_n(\omega)dt = \sqrt{2\pi} \sum_{n=0}^N j^{-n}\psi_n(\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\psi_n(t)dt = \\
 &= \sqrt{2\pi} \sum_{n=0}^N j^{-n}\psi_n(\omega)\psi_n(0) = \sqrt{2\pi} \sum_{n=0}^N \psi_n(\omega) |\psi_n(0)|
 \end{aligned} \tag{2.10}$$



Obr. 2.7: Frekvenčné spektrum aproximácie  $\delta(t)$  konečným radom  $\psi_n(t)$  po  $N = 650$

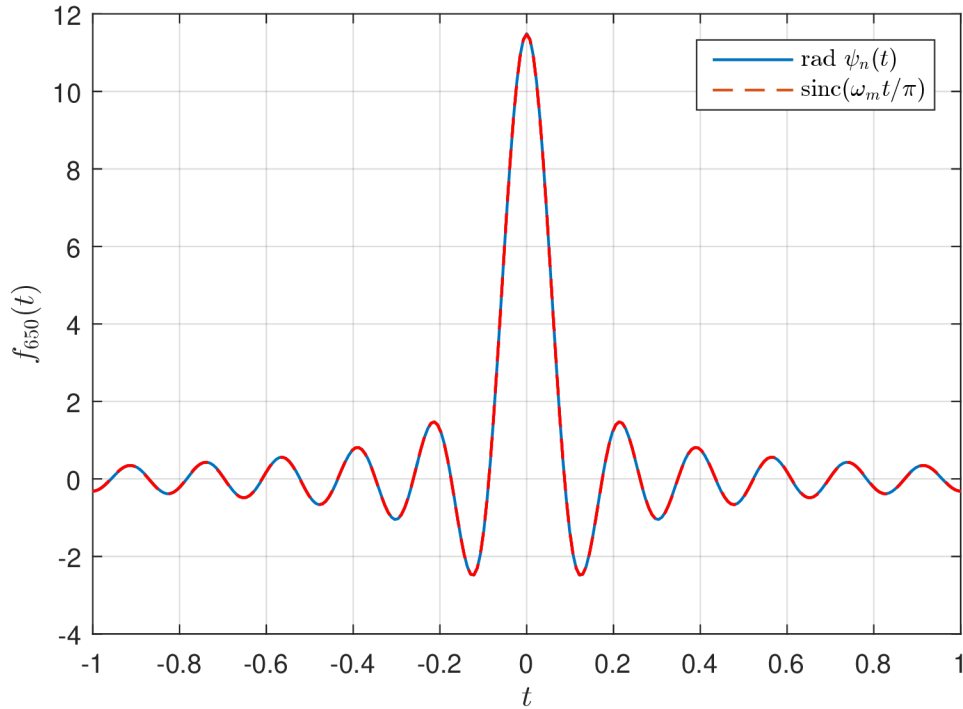
Na grafickom priebehu 2.7 je vidno, že získané spektrum sa blíži frekvenčnej charakteristike ideálnej dolnej priepuste s medznou frekvenciou  $\omega_m \approx \sqrt{2N}$ . Vieme, že jej impulzovou charakteristikou by mala byť funkcia  $\sin t/t$ . Nájďme teda Hermiteov rad  $f_N(t)$  pre signál  $f(t) = \delta(t)$ .

$$f_N(t) = \sum_{n=0}^N \psi_n(t)c_n = \sum_{n=0}^N \psi_n(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\psi_n(t)dt = \sum_{n=0}^N \psi_n(t)\psi_n(0) \quad (2.11)$$

Na túto sumu je možné aplikovať Christoffelovu-Darbouxovu formulu (1.36) a preto

$$f_N(t) = \sqrt{\frac{N+1}{2}} \frac{\psi_N(0)\psi_{N+1}(t) - \psi_{N+1}(0)\psi_N(t)}{t} \quad (2.12)$$

Pre  $N = 650$  sa aproximácia  $f_{650}$  odlišuje od  $\text{sinc}(\sqrt{2N}t/\pi)$  relatívnou kvadratickou chybou o veľkosti 0,3 %.



Obr. 2.8: Časový priebeh aproximácie  $\delta(t)$  radom  $\psi_n(t)$  po  $N = 650$

**Príklad:** Majme komplexný signál  $f(t) = e^{+j\omega_0 t}$ . Pre jeho Fourierovu transformáciu s využitím  $K(t, \omega)$  odvodíme

$$\begin{aligned}
 F_N(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)K_N(t, \omega)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{+j\omega_0 t} \sum_{n=0}^N \sqrt{2\pi} j^{-n} \psi_n(t) \psi_n(\omega) dt = \\
 &= \sqrt{2\pi} \sum_{n=0}^N j^{-n} \psi_n(\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{+j\omega_0 t} \psi_n(t) dt
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Výčíslime tento integrál využitím substitúcie a vzťahu (1.24)

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{+j\omega_0 t} \psi_n(t) dt &= \left| \begin{array}{l} t = -u \\ dt = -du \\ t = -\infty \Leftrightarrow u = +\infty \\ t = +\infty \Leftrightarrow u = -\infty \end{array} \right| = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega_0 u} \psi_n(-u) du = \\
 &= (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega_0 u} \psi_n(u) du = j^{2n} \mathcal{F} \{ \psi_n(t) \} = \sqrt{2\pi} j^n \psi_n(\omega_0)
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Dostávame

$$F_N(\omega) = 2\pi \sum_{n=0}^N \psi_n(\omega_0) \psi_n(\omega) \tag{2.15}$$

Na túto sumu je možné aplikovať Christoffelovu-Darbouxovu formulu (1.36) a preto

$$F_N(\omega) = 2\pi \sqrt{\frac{N+1}{2}} \frac{\psi_N(\omega_0)\psi_{N+1}(\omega) - \psi_{N+1}(\omega_0)\psi_N(\omega)}{\omega - \omega_0} \quad (2.16)$$

Preskúmame teraz, ako sa bude získaný výraz správať pre veľké hodnoty  $N$ . Využitím vzťahu (1.31) a vzťahov známych z goniometrie môžeme vzťah (2.16) upraviť na

$$F_N(\omega) \approx 2\sqrt{2N} \frac{\sin\left[\frac{(\omega - \omega_0)\sqrt{2N}}{2}\right]}{(\omega - \omega_0)\sqrt{2N}} \quad \text{pre } N \rightarrow \infty \quad (2.17)$$

Je zaujímavé, že rovnaký výsledok dostaneme, ak budeme hľadať Fourierovu transformáciu  $f(t)$  a budeme predpokladať, že signál  $f(t)$  má obmedzenú dobu trvania v intervale  $(-\sqrt{2N}, +\sqrt{2N})$

$$f(t) = \begin{cases} \sin \omega_0 t & \text{pre } |t| \leq \sqrt{2N} \\ 0 & \text{pre } |t| > \sqrt{2N} \end{cases} \quad (2.18)$$

teda v oblasti, kde majú Hermiteove funkcie nezanedbateľné funkčné hodnoty.

## 2.2 Gaborova transformácia

Gaborova transformácia je krátkodobá Fourierova transformácia (STFT) s oknom  $g(t)$  v tvare Gaussovej krivky.

**Veta 2.6** *Pre Gaborov diagram signálu  $f(t)$  platí*

$$G(t, \omega) = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-a(\tau-t)^2} e^{-j\omega\tau} d\tau \right|^2 \quad (2.19)$$

Pri  $a = 0,5$  je diagram  $\psi_n(t)$  kruhovo symetrický.

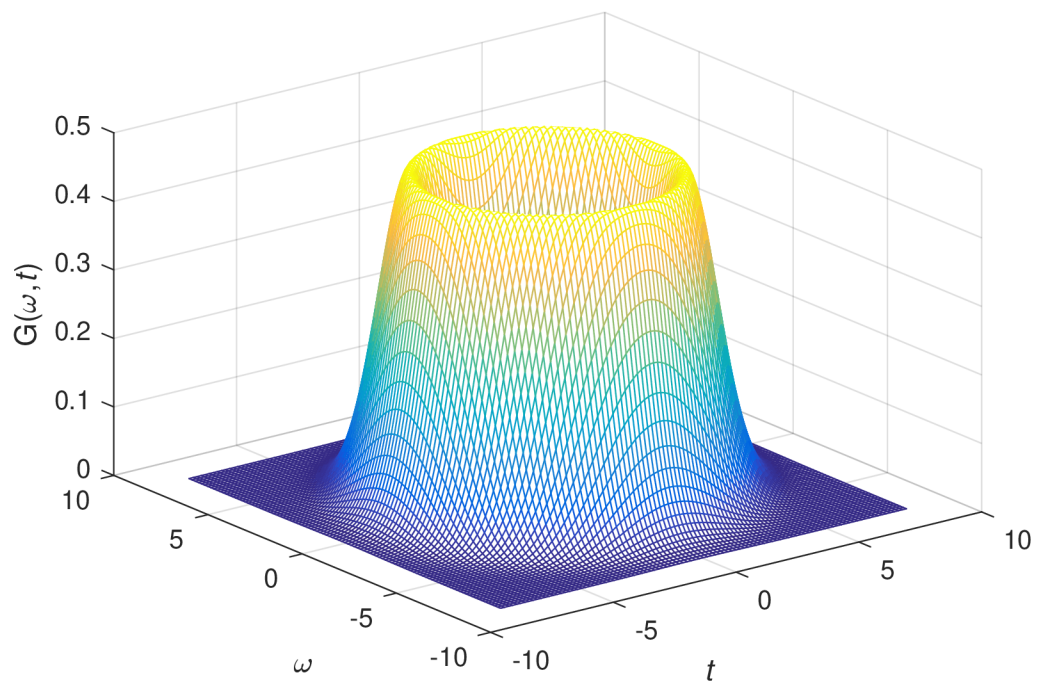
**Veta 2.7** *Gaborov diagram Hermiteovej funkcie  $\psi_n(t)$  má tvar [10]*

$$G_n(t, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} (t^2 + \omega^2)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{4}(t^2 + \omega^2)} \quad (2.20)$$

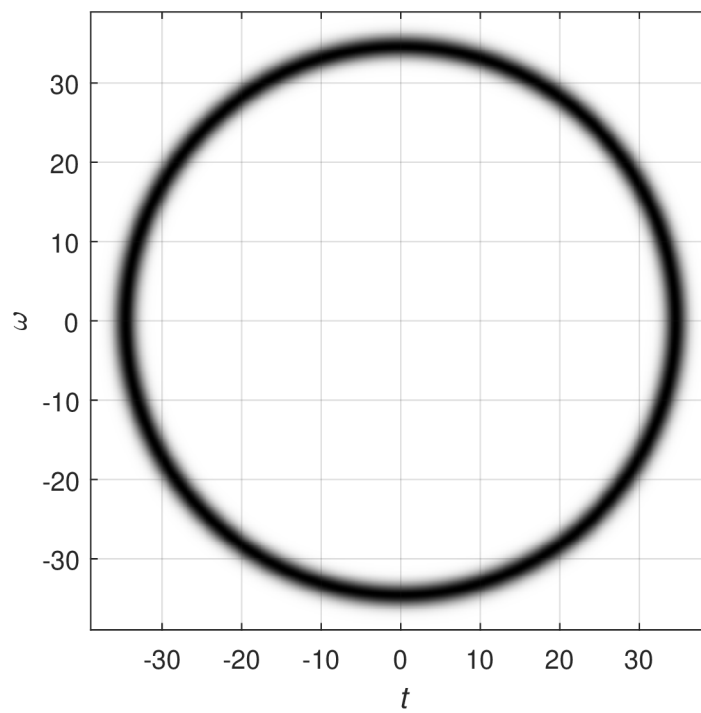
**Veta 2.8** *Pre súradnice  $[t_m, \omega_m]$  maximálnych hodnôt Gaborovho diagramu  $\psi_n(t)$  platí*

$$t_m^2 + \omega_m^2 = 2n, \quad (2.21)$$

*Diagram má stred v počiatku sústavy súradníc  $[0; 0]$  a polomer  $\sqrt{2n}$ . [10]*

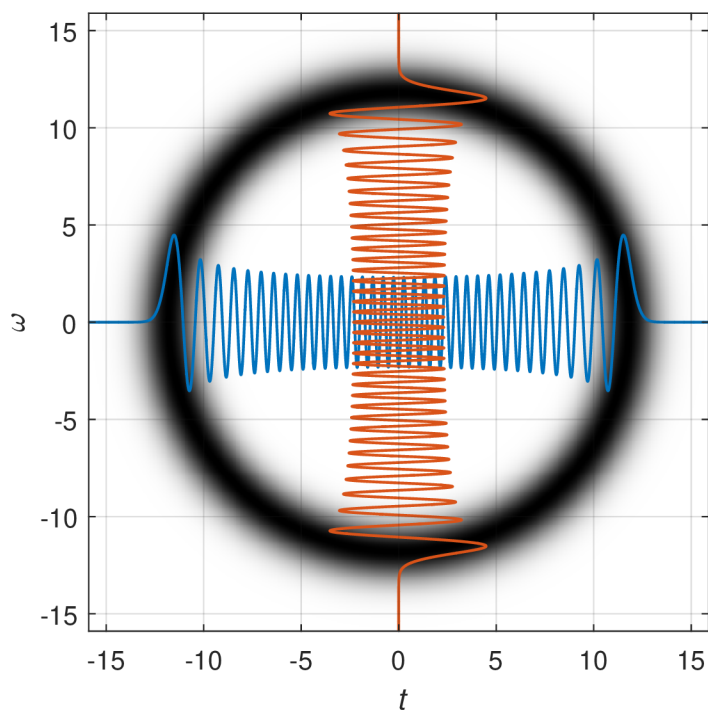


Obr. 2.9: Gaborov diagram funkcije  $\psi_{10}$



Obr. 2.10: Gaborov diagram funkcije  $\psi_{600}$

Diagram nám poskytuje detailnú informáciu o postupných zmenách frekvencie Hermiteových funkcií so zmenou času. Aby bola súvislosť medzi týmto diagramom a časovým priebehom Hermiteovej funkcie zreteľnejšia, oba priebehy sú vynesené v grafe 2.11. Z týchto priebehov je zrejmé, že uhlová frekvencia  $\omega$  sa v čase  $t \approx -\sqrt{2n}$  najprv prudko zvýši a potom sa v okolí počiatku blíži svojej maximálnej hodnote  $\omega \approx \sqrt{2n}$ , až kým v  $t \approx +\sqrt{2n}$  opäť neklesne k nule.



Obr. 2.11: Gaborov diagram, časový priebeh a spektrum funkcie  $\psi_{70}$

### 3 OPTIMÁLNA VOĽBA MIERKY A ČASOVÉHO POSUNU

Pri aproximácii signálu konečným počtom členov spektra je žiadúce zabezpečiť, aby bol rozdiel medzi skutočným signálom a jeho náhradou čo najmenší. Hermiteove funkcie majú možnosť voľby mierky a časového posunu. Vhodnou voľbou týchto parametrov je možné zabezpečiť čo najväčšiu zhodu medzi signálom a jeho vyjadrením konečným radom Hermiteových funkcií. Táto kapitola porovnáva jednotlivé metódy, ktoré rôznymi postupmi hľadajú takéto optimálne parametre.

#### 3.1 Chyba aproximácie

Ako kritérium chyby použijem kvadratické kritérium, pričom veľkosť kvadratickej chyby budem v ďalšom texte značiť  $\xi$ . Výhodou kritéria je, že existujú viaceré možnosti jeho minimalizácie a zároveň je jednoduché na výpočet.

**Veta 3.1** *Pre energiu  $E$  rozdielu signálov  $f(t)$  a  $g(t)$  platí*

$$E = \int_a^b |f(t) - g(t)|^2 dt. \quad (3.1)$$

**Veta 3.2** *Pre signál  $f(t)$  a jeho aproximáciu  $f_N(t)$  radom ortonormálnych funkcií až po rád  $N$  platí, že energia ich rozdielu je rozdielom ich energií*

$$\xi_N(\lambda, t_0) = \int_a^b |f(t) - f_N(\lambda, t_0; t)|^2 dt = \int_a^b |f(t)|^2 dt - \int_a^b |f_N(\lambda, t_0; t)|^2 dt. \quad (3.2)$$

*Prípadne vyjadrené pomocou členov spektra*

$$\xi(\lambda, t_0) = \int_a^b |f(t)|^2 dt - \sum_{n=0}^N |c_n(\lambda, t_0)|^2. \quad (3.3)$$

Vetu je možné dokázať využitím Parsevalovej identity (1.15). Na základe tejto vety je zrejmé, že pre kvadratickú chybu priamo platí vzťah

$$\xi(\lambda, t_0) = \sum_{n=N+1}^{\infty} |c_n(\lambda, t_0)|^2. \quad (3.4)$$

Napokon je vhodné definovať relatívnu chybu

$$\xi_r = \frac{\xi}{\int_a^b |f(t)|^2 dt} = 1 - \frac{\sum_{n=0}^N |c_n|^2}{\int_a^b |f(t)|^2 dt} \quad (3.5)$$

## 3.2 Princíp zmenšenia chyby

Spektrum signálu je závislé na mierke a časovom posune podľa rovnice (1.33). Táto závislosť môže byť vysvetlená tým, že pri zmene parametrov  $\lambda$  alebo  $t_0$  sa energia spektra zachová (1.15), ale dôjde k jej prerozdeleniu medzi jednotlivé zložky  $c_n$ .

V praxi môžeme z rozličných dôvodov vypočítať len  $N+1$  prvých členov spektra. Pri vhodnej voľbe parametrov  $\lambda$  a  $t_0$  je možné dosiahnuť to, že čo najväčšia časť energie bude v koeficientoch  $c_0$  až  $c_N$ . Vďaka tomu sa minimalizuje energia zvyšných členov ( $c_{N+1}$  a vyšších), ktorých celková energia je priamo kvadratickou chybou  $\xi_N$  (3.4).

Je zrejmé, že chyba  $\xi$  bude závislá na zadanom signále  $f(t)$ , mierke  $\lambda$ , posune  $t_0$  a ráde aproximácie  $N$ . Predpokladajme, že optimalizačná úloha bude začínat pevne danými  $f(t)$  a  $N$ . Tieto parametre určujú tvar závislosti  $\xi_N(\lambda, t_0)$  a teda na nich závisia súradnice  $\lambda$  a  $t_0$  globálneho minima chyby. Považujem za rozumné očakávať, že úspešná metóda minimalizácie chyby by mala čo najlepšie využívať tieto dve vstupné informácie - signál  $f(t)$  a rád aproximácie  $N$ .

## 3.3 Voľba parametrov na základe tvaru signálu

### 3.3.1 Využitie doby trvania signálu

Ide o najjednoduchší spôsob odhadu mierky  $\lambda$  a časového posunu  $t_0$ . Využíva skutočnosť, že spracúvaný signál  $f(t)$  býva často navzorkovaný iba na konečnom intervale  $(-t_m, t_m)$ .

$$f(t) = \begin{cases} g(t) & \text{pre } |t| \leq t_m \\ 0 & \text{pre } |t| > t_m \end{cases} \quad (3.6)$$

kde  $t_m > 0$ .

Predpokladajme, že hľadáme aproximáciu konečným radom Hermiteových funkcií až po rád  $N$ . Potom je rozumné voliť mierku tak, aby funkcia najvyššieho rádu  $\psi_N(\lambda, t_0; t)$  vyskytujúca sa v aproximácii *presne pokryla celý interval*  $(-t_m, t_m)$ .

Otázkou je, ako *pokryť celý interval*, pretože Hermiteova funkcia je (mimo svojich koreňov) nenulová a k nule sa asymptoticky blíži so vzrastajúcim  $t$  do nekonečna. Za jej „koniec“ by sme mohli považovať napríklad polohu jej najväčšieho koreňa danú vzťahom (1.26), alebo polohu posledného inflexného bodu, pre ktorú približne platí  $t = \sqrt{2N+1}$ .

Pre jednoduchosť za „koniec“ zvolím inflexný bod, rovnako, ako článok [7]. Pre



optimálnu mierku na symetrickom intervale platí <sup>1</sup>

$$\hat{\lambda}_{\text{sym}} = \frac{t_m}{\sqrt{2N+1}} \quad (3.7)$$

Túto úvahu je možné zovšeobecniť na nesymetrický interval  $(t_{m1}, t_{m2})$ , kedy

$$f(t) = \begin{cases} g(t) & \text{pre } t \in (t_{m1}, t_{m2}) \\ 0 & \text{pre } t \in (-\infty, t_{m1}) \cup (t_{m2}, +\infty) \end{cases} \quad (3.8)$$

potom nie je náročné odvodiť optimálne parametre

$$\hat{t}_0 = \frac{t_{m1} + t_{m2}}{2} \quad \hat{\lambda} = \frac{t_{m2} - t_{m1}}{2\sqrt{2N+1}} \quad (3.9)$$

### 3.3.2 Využitie momentov signálu

Opäť ide o metódu, ktorá skúma tvar signálu  $f(t)$ , ale využíva viac informácií, než predchádzajúca metóda. Zohľadňuje napríklad rozloženie energie alebo strmosti hrán signálu. Tieto vlastnosti sa premietnu do takzvaných „momentov“ signálu  $f(t)$ . Momenty sú dané vzťahmi

$$\begin{aligned} m_k &= \int_a^b t^k f^2(t) dt \quad \text{pre } k = 0, 1, 2 \\ m_3 &= \int_a^b [f'(t)]^2 dt. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Článok [9] uvádza, že chyba  $\xi_N(\lambda, t_0)$  je zhora ohraničená, platí

$$\xi_N(\lambda, t_0) \leq \frac{m_3 \lambda^4 - m_0 \lambda^2 + m_2 - 2t_0 m_1 + t_0^2 m_0}{2(N+1)\lambda^2} \quad (3.11)$$

Je zrejmé, že táto horná hranica má minimum pre

$$\hat{t}_0 = \frac{m_1}{m_0} \quad (3.12)$$

$$\hat{\lambda} = \sqrt[4]{\frac{m_0 m_2 - m_1^2}{m_0 m_3}} \quad (3.13)$$

Získali sme optimálne parametre určené na základe tvaru signálu. Garantujú, že pre chybu takto zvolenej aproximácie signálu  $f(t)$  bude platiť

$$\xi_N(\hat{\lambda}, \hat{t}_0) \leq \frac{2\sqrt{m_0 m_3 (m_0 m_2 - m_1^2)} - m_0^2}{2(N+1)m_0} \quad (3.14)$$

---

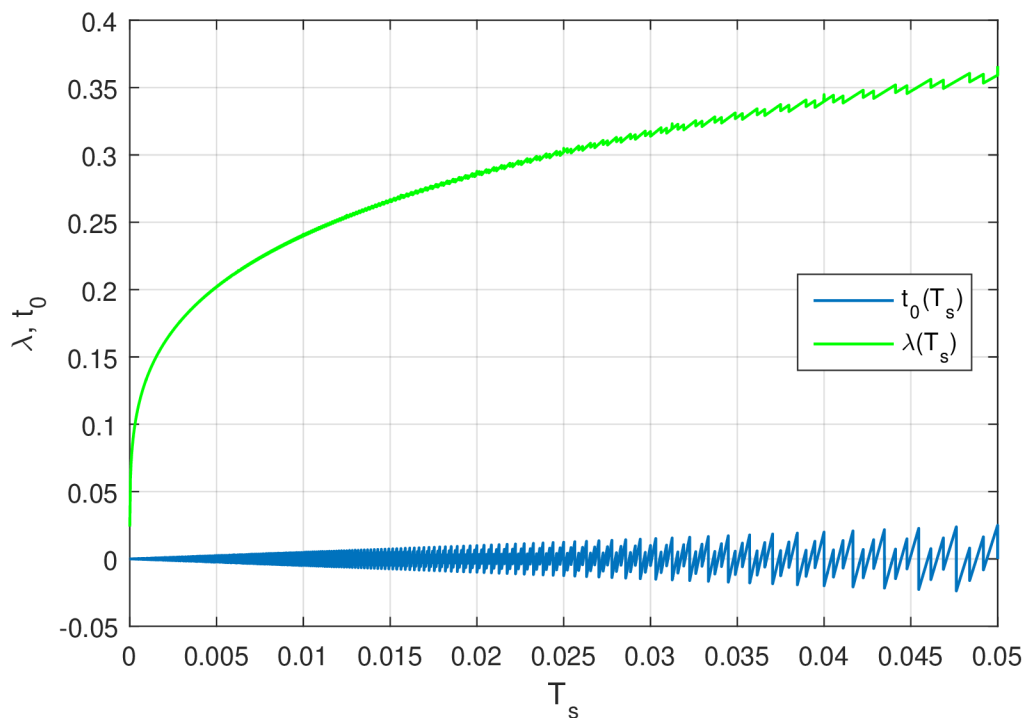
<sup>1</sup>V ďalšom texte budem parametre, ktoré sú výstupom danej metódy, značiť so striedkou na odlíšenie od parametrov, ktoré nie sú považované za optimálne.

Avšak, treba mať na pamäti, že sme našli globálne minimum horného ohraničenia chyby, nie minimum chyby samotnej. Parametre  $\hat{t}_0$  a  $\hat{\lambda}$  sú veľmi dobrou voľbou pre signály, ktoré neobsahujú *nespojivosti prvého druhu* (skoky)[9]. Lahko sa presvedčíme, že v opačnom prípade metóda stráca význam. Dostávame  $\xi_N(\lambda, t_0) \leq \infty$  a  $\hat{\lambda} = 0$ , pretože  $m_3 = \infty$ .

Pre numerickú integráciu využívam lichobežníkovú metódu. V takom prípade sa pri navzorkovaní signálu predpokladá, že jeho funkčná hodnota sa medzi bodmi vzorkovania vždy mení lineárne. Skoky potom nemajú nekonečný sklon, ale stále zostávajú isté komplikácie. Pri numerickom výpočte momentu  $m_3$  môžu nastať problémy spojené s numerickým derivovaním a numerickou integráciou. Hodnota derivácie v mieste skoku je silno závislá na perióde vzorkovania  $T_s$ , pretože  $T_s$  priamo určuje „šírku“ skoku. Pre jednoduchý signál (okno) v tvare

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{pre } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{pre } |t| > 1 \end{cases} \quad (3.15)$$

je závislosť optimálnych parametrov zobrazená na obrázku 3.1. V ideálnom prípade (pre  $T_s \rightarrow 0$ ) sa mierka naozaj blíži nule ( $\hat{\lambda} \rightarrow 0$ ). Ak bude perióda  $T_s$  príliš malá, môže sa stať, že ani Hermiteova funkcia najvyššieho rádu nachádzajúca sa v aproximácii nepokryje celý priebeh signálu  $f(t)$ . Konvergencia potom nie je zaručená ani pri pomerne veľkom počte členov  $N$  (rádovo stovky členov).



Obr. 3.1: Vplyv periódy vzorkovania  $T_s$  na parametre.

Ďalej si treba všimnúť, že na rozdiel od predchádzajúcej metódy, pri tejto nemá rád aproximácie  $N$  žiadny vplyv na výsledné parametre. Pri malom  $N$  môžu byť mierka získaná touto metódou nevyhovujúca, ba dokonca o niekoľko rádov vzdialená od optimálnej hodnoty.

### 3.4 Numerická minimalizácia chyby

Niekedy sa stáva, že chyba  $\xi_{rN}(\hat{\lambda}, \hat{t}_0)$ , ktorej parametre sú určené predchádzajúcimi metódami, neklesá pod rozumnú hodnotu ani pri pomerne vysokom ráde aproximácie. V takom prípade je stále možné skúsiť pozmeniť parametre  $\lambda$  a  $t_0$  s cieľom minimalizovať  $\xi_N(\lambda, t_0)$ .

Napríklad by bolo možné použiť nektorú zo známych numerických metód minimalizácie nelineárnej funkcie viacerých premenných. Takýto postup by znamenal potrebu vyčísliť spektrá pre rôzne hodnoty  $\lambda$  a  $t_0$ , pričom by sa nakoniec využilo len jedno z týchto spektier. Na prvý pohľad je zrejmé, že takýto postup by bol nesmierne neefektívny. V ďalšom texte sa budem zaoberať metódami, ktoré sú výpočtovo menej náročné.

#### 3.4.1 Stacionárne podmienky chyby

Článok [9] uvádza, že pre parciálne derivácie chyby  $\xi_N(\lambda, t_0)$  platia nasledujúce vzťahy

$$\frac{\partial \xi_N(\lambda, t_0)}{\partial t_0} = -\frac{\sqrt{2}\sqrt{N+1}}{\lambda} c_N(\lambda, t_0) c_{N+1}(\lambda, t_0), \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial \xi_N(\lambda, t_0)}{\partial \lambda} = 2\gamma_{N+1} c_{N-1}(\lambda, t_0) c_{N+1}(\lambda, t_0) + 2\gamma_{N+2} c_N(\lambda, t_0) c_{N+2}(\lambda, t_0) \quad (3.17)$$

kde

$$\gamma_n = -\frac{\sqrt{n}\sqrt{n-1}}{2\lambda}.$$

Vyplýva z nich, že gradient chyby  $\nabla \xi_N(\lambda, t_0)$  je závislý iba na štyroch členoch spektra. Vypočítať gradient je teda omnoho jednoduchšie, než vypočítať chybu samotnú.

Autori článku [9] navrhujú numericky hľadať stacionárny bod  $\xi_N(\lambda, t_0)$ , pre ktorý platí

$$\nabla \xi_N(\lambda, t_0) = \mathbf{0} \quad (3.18)$$

Aby bola rovnosť splnená, musí platiť aspoň jedna z podmienok

$$c_k(\lambda, t_0) = c_{k+1}(\lambda, t_0) = 0, \quad k = N-1, N, N+1 \quad (3.19)$$

a preto odporúčajú vyriešiť sústavu dvoch nelineárnych rovníc (3.19) pre konkrétne  $k$  využitím Newtonovej iteračnej metódy.

Pri snahe realizovať tento postup som narazil na niekoľko problémov. Chyba má za bežných podmienok nesmierne veľký počet lokálnych extrémov a preto je výsledkom nájsť len jedného (náhodného) lokálneho minima. Celkovo je veľmi nepravdepodobné nájsť globálne minimum.

Navyše podmienka (3.18) je splnená v každom stacionárnom bode, teda aj v lokálnom maxime. Nie je postačujúcou podmienkou lokálneho extrému a preto je potrebné kontrolovať napríklad Sylvestrovu kritérium, podľa ktorého je existencia lokálneho minima potvrdená, ak je splnená podmienka

$$\frac{\partial^2 \xi_N(\lambda, t_0)}{\partial \lambda^2} > 0 \quad (3.20)$$

alebo

$$\frac{\partial^2 \xi_N(\lambda, t_0)}{\partial t_0^2} > 0 \quad (3.21)$$

a determinant

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \xi_N(\lambda, t_0)}{\partial \lambda^2} & \frac{\partial^2 \xi_N(\lambda, t_0)}{\partial \lambda \partial t_0} \\ \frac{\partial^2 \xi_N(\lambda, t_0)}{\partial \lambda \partial t_0} & \frac{\partial^2 \xi_N(\lambda, t_0)}{\partial t_0^2} \end{vmatrix} \quad (3.22)$$

je kladný. Toto kritérium si vyžaduje výpočet druhej derivácie chyby, pre ktorú som odvodil vzťahy

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi_N(\lambda, t_0)}{\partial \lambda^2} &= 2\gamma_{N+1} [c_{N+1} (\gamma_{N-1} c_{N-3} - \gamma_{N+1} c_{N+1}) + c_{N-1} (\gamma_{N+1} c_{N-1} - \gamma_{N+3} c_{N+3})] + \\ &+ 2\gamma_{N+2} [c_{N+2} (\gamma_N c_{N-2} - \gamma_{N+2} c_{N+2}) + c_N (\gamma_{N+2} c_N - \gamma_{N+4} c_{N+4})] - \\ &- \frac{2}{\lambda} (\gamma_{N+1} c_{N-1} c_{N+1} + 2\gamma_{N+2} c_N c_{N+2}) \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi_N(\lambda, t_0)}{\partial \lambda \partial t_0} &= -2\beta_{N+1} [c_{N+1} (\gamma_N c_{N-2} - \gamma_{N+2} c_{N+2}) + c_N (\gamma_{N+1} c_{N-1} - \gamma_{N+3} c_{N+3})] + \\ &+ \frac{2}{\lambda} \beta_{N+1} c_N c_{N+1} \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial^2 \xi_N(\lambda, t_0)}{\partial t_0^2} = 2\beta_{N+1} [c_{N+1} (\beta_N c_{N-1} - \beta_{N+1} c_{N+1}) + c_N (\beta_{N+1} c_N - \beta_{N+2} c_{N+2})] \quad (3.25)$$

kde

$$\beta = \frac{\sqrt{n}}{\lambda\sqrt{2}}; \quad \gamma_n = -\frac{\sqrt{n}\sqrt{n-1}}{2\lambda}.$$

### 3.4.2 Rekonštrukcia chyby na základe gradientu

Z vyššie uvedených dôvodov som sa rozhodol navrhnúť inú metódu minimalizácie. Spočíva v tom, že namiesto priameho výpočtu chyby podľa vzťahu (3.3) vypočítam gradient chyby a ten následne numericky integrujem

$$\int \nabla \xi_N(\lambda, t_0) \cdot (d\lambda, dt_0) = \xi_N(\lambda, t_0) + C \quad (3.26)$$

Vidno, že získaná funkcia je voči skutočnej chybe posunutá o integračnú konštantu  $C$ . To v skutočnosti vôbec nie je problém, pretože hľadáme iba polohu minima, a jeho funkčná hodnota pre nás nie je dôležitá. Je zrejmé, že takto získaná funkcia  $\xi_N(\lambda, t_0) + C$  je pre hľadanie minima chyby rovnako vhodná ako samotná chyba, ale jej výpočet je omnoho jednoduchší (namiesto  $N$  koeficientov spektra stačí vypočítať štyri).

**Podstata postupu pre nájdenie minima sa dá zhrnúť takto:**

1. Náhodne alebo využitím niektorej z vyššie uvedených metód zvolím počiatočné hodnoty  $\hat{\lambda}$  a  $\hat{t}_0$ .
2. Využitím vzťahov (3.16) a (3.17) vypočítam gradient v  $M^2$  bodoch nachádzajúcich sa v okolí  $\hat{\lambda}$  a  $\hat{t}_0$ .
3. Numerickou integráciou gradientu vypočítam  $\xi_N(\lambda, t_0) + C$  v týchto  $M^2$  bodoch.
4. Vyberiem súradnice toho bodu, ktorému prislúcha najnižšia funkčná hodnota  $\xi_N(\lambda, t_0) + C$  a tieto nové hodnoty uložíam do  $\hat{\lambda}$  a  $\hat{t}_0$ .
5. Podľa potreby môžem opakovať postup od bodu 2.

Pri vhodnej voľbe skúmaného okolia metóda naozaj vedie k odhaleniu globálneho minima  $\xi_N(\lambda, t_0)$ .

**Voľba okolia:** Ak už mám zvolené počiatočné hodnoty  $\hat{\lambda}$  a  $\hat{t}_0$ , zvolím obdĺžnikové okolie týchto hodnôt. Toto okolie rovnomerne navzorkujem v sieti bodov o rozmeroch  $M \times M$ . Počet výpočtových operácií je (približne) priamo úmerný  $M^2$ . Za vhodnú voľbu považujem  $10 \leq M \leq 100$ .

Keďže výpočet môžeme uskutočniť len v konečnom počte bodov, okolie by nemalo byť príliš veľké. Veľké okolie znamená veľké rozostupy medzi bodmi vzorkovania a tie spôsobujú, že numerická integrácia prestáva dávať správne výsledky. Funkčné hodnoty v jednotlivých bodoch sú potom nesprávne a polohu minima nie je možné odhaliť. Naopak, príliš malé okolie neumožňuje preskúmať oblasti vzdialené od počiatočného odhadu parametrov a preto môže brániť odhaleniu globálneho minima chyby.<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup>Za bežných podmienok sa stáva, že počiatočný odhad leží v jednom z lokálnych miním a chyba pri malom posunutí najprv vo všetkých smeroch narastá, ale pri dostatočne veľkom posunutí začne opäť klesať k nižším hodnotám. Ide o prípad, kedy globálne minimum „leží až za kopcom“ a kvôli malým rozmerom okolia „za tento kopec nedovíďme“.

**Numerická integrácia:** Pre numerickú integráciu som použil Eulerovu modifikovanú metódu[11]. Ak poznáme chybu v nejakom bode  $[\lambda, t_0]$ , potom je možné približne vypočítať chybu v inom, blízkom bode využitím vzťahov

$$\xi_N(\lambda_{i+1}, t_0) \approx \xi_N(\lambda_i, t_0) + \frac{\lambda_{i+1} - \lambda_i}{2} \left( \frac{\partial \xi_N(\lambda_i, t_0)}{\partial \lambda} + \frac{\partial \xi_N(\lambda_{i+1}, t_0)}{\partial \lambda} \right) \quad (3.27)$$

$$\xi_N(\lambda, t_{0,i+1}) \approx \xi_N(\lambda, t_{0,i}) + \frac{t_{0,i+1} - t_{0,i}}{2} \left( \frac{\partial \xi_N(\lambda, t_{0,i})}{\partial t_0} + \frac{\partial \xi_N(\lambda, t_{0,i+1})}{\partial t_0} \right) \quad (3.28)$$

Keďže hlavným problémom tejto metódy je potreba výpočtu  $\nabla \xi_N(\lambda, t_0)$  vo veľkom počte bodov, hľadal som spôsob, akým by sa dal znížiť ich počet bez toho, aby došlo ku zväčšeniu chyby numerickou integráciou.

Predpokladal som, že jednou z možností by bolo zlepšenie integrácie tým, že by som nahradil lichobežníkovú aproximáciu  $\nabla \xi_N(\lambda, t_0)$  aproximáciou kubickým splajnom. Pre nájdenie kubického splajnu medzi dvoma bodmi je potrebná nie len znalosť funkčných hodnôt v týchto bodoch, ale aj znalosť prvých derivácií integrovanej funkcie. Potrebujeme teda vypočítať deriváciu gradientu využitím vzťahov (3.23) a (3.25).

Je vidno, že pri splajnovej integrácii je potrebný výpočet ôsmich koeficientov spektra, čo je dvojnásobok oproti lichobežníkovej integrácii. Nanešťastie sa ukázalo, že k výraznému zlepšeniu získaných výsledkov použitím splajnu nedôjde, pretože druhá derivácia v jednotlivých bodoch vzorkovania príliš prudko mení svoju hodnotu. Nepresnosť integrácie býva najmä v mieste skokovej zmeny  $\xi(\lambda, t_0)$ . Tento skok je oveľa jednoduchšie lepšie navzorkovať, než sa snažiť odhadnúť jeho tvar na základe vyšších derivácií v nejakom inom bode.

### 3.5 Porovnanie jednotlivých metód

Je zrejmé, že jednotlivé metódy minimalizácie chyby sa líšia najmä svojou výpočtovou náročnosťou, tým, ako pracujú s  $f(t)$  a  $N$  a tiež tým, do akej miery sa im podarí chybu minimalizovať. Prvé dve odlišnosti som zhrnul do krátkej tabuľky, ale samotnej kvalite výsledkov jednotlivých metód bude venovaná až nasledujúca kapitola.

Tab. 3.1: Prehľad metód pre určenie optimálnych parametrov

Metóda na základe	Náročnosť	Využitie dostupných informácií
Doby trvania signálu	0	$N$ a trvanie $f(t)$
Momentov signálu	4	len momenty $f(t)$ , ignoruje $N$
Stacionárnych podmienok chyby	1 až 20 (podľa tvaru $\xi_N(\lambda, t_0)$ )	$N$ aj $f(t)$ prostredníctvom gradientu
Rekonštrukcie chyby využitím gradientu	400 až 40 000 (podľa nastavenia užívateľa)	$N$ aj $f(t)$ prostredníctvom gradientu

Náročnosť udáva počet numerických integrácií v časovej oblasti, ktoré metóda vyžaduje. Prvé dve metódy skúmajú signál priamo a preto nevyžadujú veľké množstvo výpočtov. Naopak, druhé dve metódy sa riadia iba gradientom chyby, a aby boli úspešné, musia „preskúmať“ čo najväčšiu oblasť gradientu.

Výhodným postupom na zníženie výpočtovej náročnosti je využiť viaceré metódy v správnom poradí. Napríklad použiť výstup prvej (najmenej náročnej) metódy ako počiatočné podmienky poslednej (najnáročnejšej metódy) vyzerá ako jedno z rozumných riešení.

## 4 APROXIMÁCIA KONKRÉTNEHO SIGNÁLU

Ako ukážku správnej funkcie navrhnutých algoritmov uvádzam ich použitie na dvoch jednoduchých príkladoch. Cieľom bude tiež ukázať správanie jednotlivých metód voľby optimálnych voľných parametrov, skrátene *optimalizačných metód*. Aby bolo vždy jednoznačné, ktorej metóde prislúchajú získané parametre, zavediem nasledujúce označenie

Tab. 4.1: Označenie parametrov prislúchajúcich jednotlivým metódam

Metóda na základe	Optimálne parametre
Doby <i>trvania</i> signálu	$\hat{\lambda}_T, \hat{t}_{0T}$
<i>Momentov</i> signálu	$\hat{\lambda}_M, \hat{t}_{0M}$
Rekonštrukcie chyby využitím <i>gradientu</i>	$\hat{\lambda}_G, \hat{t}_{0G}$

### 4.1 Harmonický priebeh

Signál  $f(t)$ , ktorý sa budem snažiť aproximovať pomocou Hermiteových funkcií má predpis

$$f(t) = \begin{cases} \sin \omega_0 t & \text{pre } |t| \leq t_m \\ 0 & \text{pre } |t| > t_m \end{cases} \quad (4.1)$$

Aby bolo možné aplikovať *metódu momentov*, nesmie  $f(t)$  obsahovať skoky. Signál bude spojitý, ak

$$t_m = k \frac{T}{2} = k \frac{\pi}{\omega_0}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (4.2)$$

kde  $T = 2\pi/\omega$  je perióda sínusovej časti signálu. Potom  $k$  priamo označuje počet periód.

#### 4.1.1 Využitie doby trvania signálu

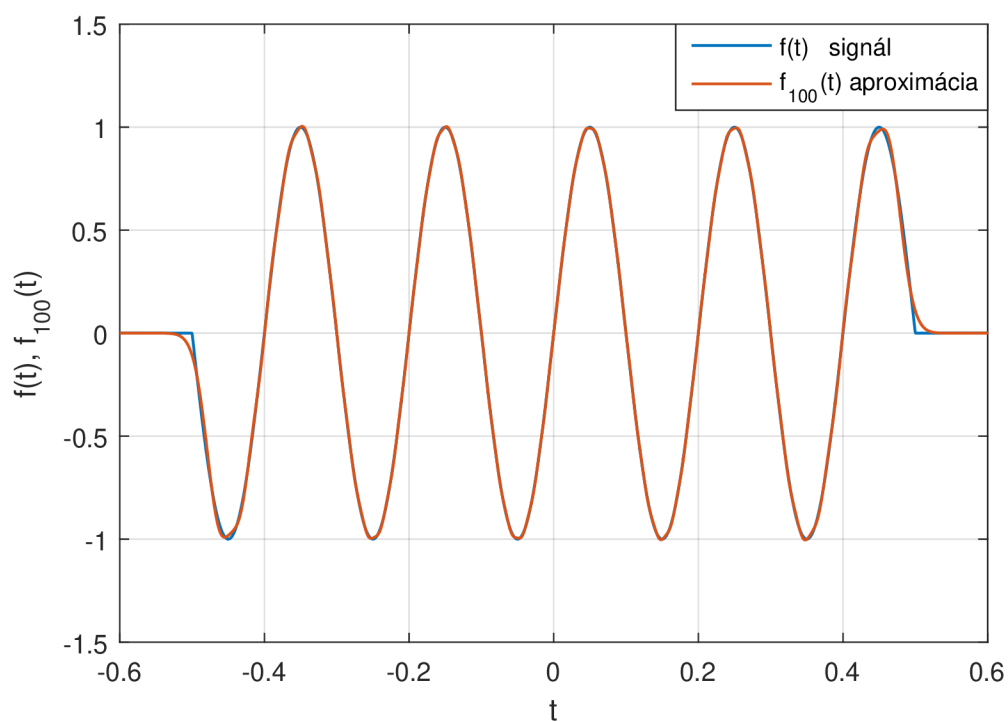
Ako prvú preskúmajme najjednoduchšiu metódu. Podľa (3.9) môžeme pre tento signál odhadnúť

$$\hat{t}_{0T} = 0 \quad \hat{\lambda}_T = \frac{t_m}{\sqrt{2N+1}} \quad (4.3)$$

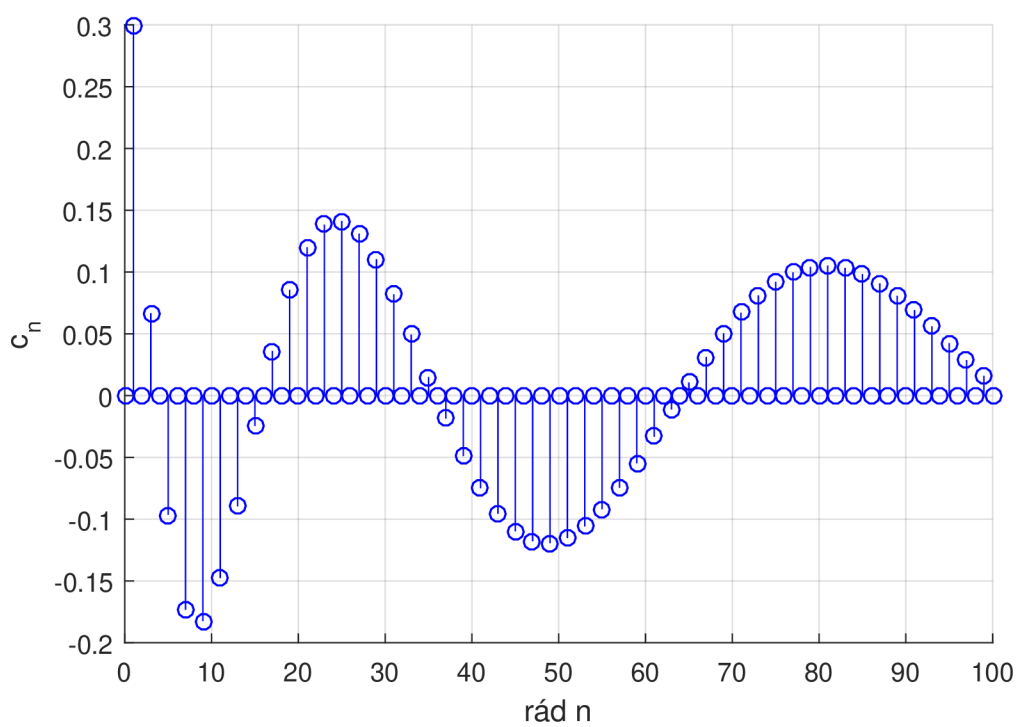
Pre každé  $N = 0, 1, 2, \dots, 100$  som vyčíslil  $\hat{\lambda}_T(N)$ , realizoval aproximáciu  $f_N(t)$  a na jej základe určil  $\xi_{rN}(\hat{\lambda}_T, \hat{t}_{0T})$ .

Grafické priebehy 4.1 a 4.3 obsahujú príklad aproximácie harmonického signálu  $f(t)$  konečným radom Hermiteových funkcií  $f_{100}(t)$ , pričom  $t_m = 0, 5$ ,  $k = 5$ , respektíve  $k = 20$ . Obrázky 4.2 a 4.4 zobrazujú Hermiteove spektrá týchto aproximácií.

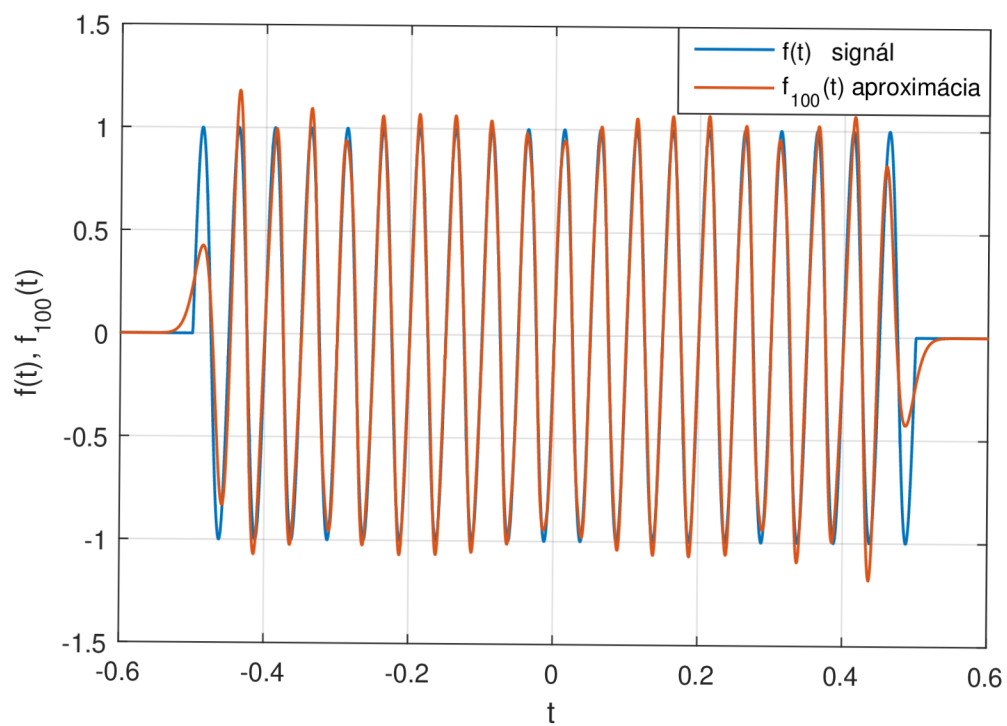




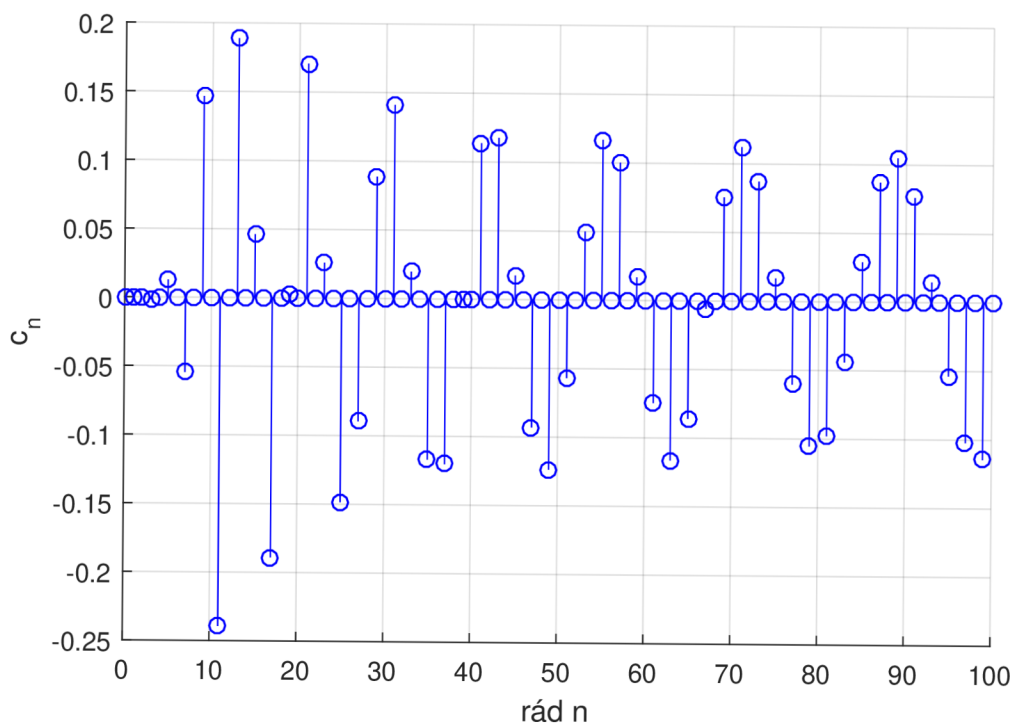
Obr. 4.1: Aproximácia signálu  $f(t)$  radom Hermiteových funkcií  $f_{100}(t)$ ,  $k = 5$ .



Obr. 4.2: Hermiteovo spektrum signálu  $f(t)$ ,  $t_m = 0, 5$ ,  $k = 5$

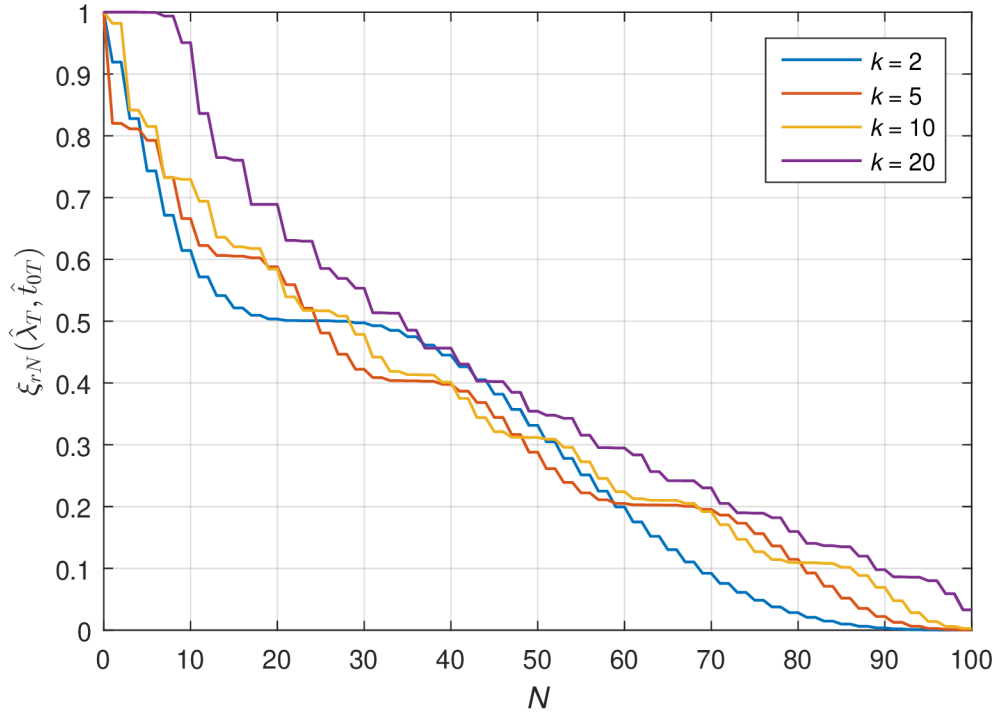


Obr. 4.3: Aproximácia signálu  $f(t)$  radom Hermiteových funkcií  $f_{100}(t)$ ,  $k = 20$ .



Obr. 4.4: Hermiteovo spektrum signálu  $f(t)$ ,  $t_m = 0, 5$ ,  $k = 20$

Výsledná relatívna chyba aproximácií signálov je na obrázku 4.5. Pri voľbe mierky podľa vzťahu (4.3) bude mať na relatívnu chybu  $\xi_{rN}(\hat{\lambda}_T, \hat{t}_{0T})$  vplyv počet periód signálu  $k = t_m \omega_0 / \pi$ , ale nie jeho mierka. Mierku signálu zmeníme, ak napríklad zvýšime uhlovú frekvenciu  $\omega_0$  na dvojnásobok, ale  $k$  zachováme. Vtedy  $t_m$  klesne na polovicu.  $f(t)$  bude mať kratšiu dobu trvania, čo sa prejaví poklesom  $\hat{\lambda}_T$  na polovicu. Hermiteove funkcie sa primerane skrátia a opäť pokryjú signál rovnako. Nedôjde ku zmene  $\xi_{rN}(\hat{\lambda}_T, \hat{t}_{0T})$ .



Obr. 4.5: Chyba v závislosti na ráde aproximácie  $N$ .

### 4.1.2 Využitie momentov signálu

Preskúmame teraz, či analytické parametre na základe momentov prinesú zmenšenie kvadratickej chyby. Pre ich výpočet je potrebné určiť momenty podľa vzťahu (3.10).

$$\begin{aligned}
 m_0 &= t_m - \frac{1}{2\omega_0} \sin 2\omega_0 t_m \\
 m_1 &= 0 \\
 m_2 &= \frac{t_m^3}{3} - \frac{t_m^2}{2\omega_0} \sin 2\omega_0 t_m - \frac{t_m}{2\omega_0^2} \cos 2\omega_0 t_m + \frac{1}{4\omega_0^3} \sin 2\omega_0 t_m \\
 m_3 &= \omega_0^2 t_m + \frac{\omega_0}{2} \sin 2\omega_0 t_m
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Vďaka voľbe (4.2) dôjde ku zjednodušeniu vzťahov na tvary

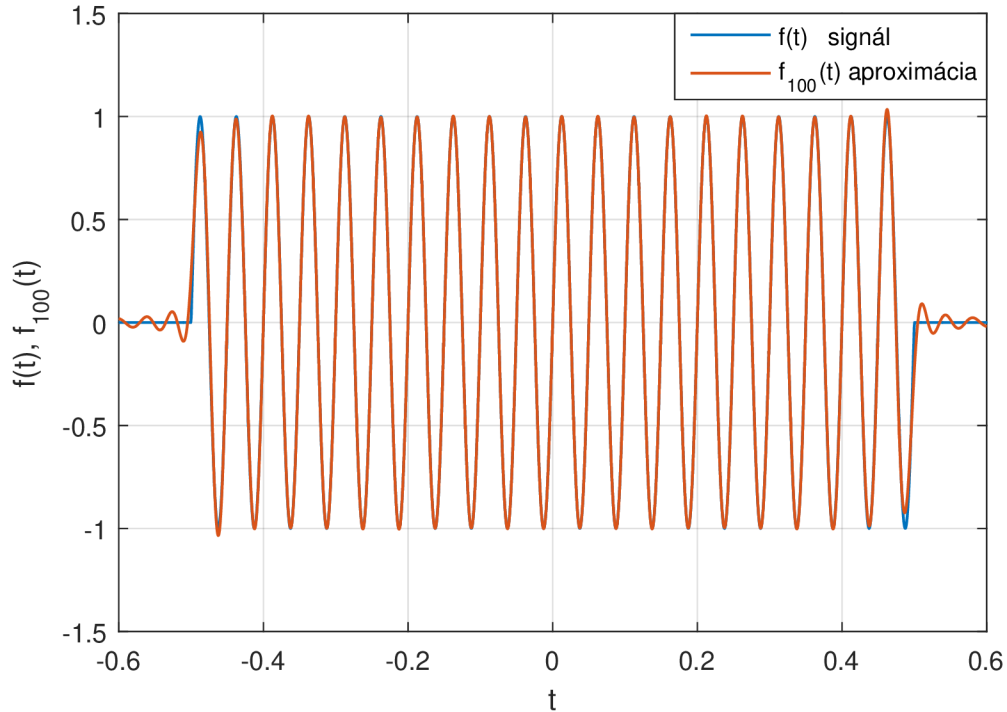
$$\begin{aligned}
 m_0 &= t_m \\
 m_1 &= 0 \\
 m_2 &= \frac{2k^2\pi^2 - 3}{6k^2\pi^2} t_m^3 \\
 m_3 &= k^2\pi^2 \frac{1}{t_m}
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Použitím vzťahov (3.12), (3.13) a po následnej úprave dostávame pre optimálne parametre

$$\begin{aligned}
 \hat{t}_{0M} &= 0 \\
 \hat{\lambda}_M &= \frac{1}{\omega_0} \sqrt[4]{\frac{2\pi^2 k^2 - 3}{6}} = t_m \frac{\sqrt[4]{2\pi^2 k^2 - 3}}{k\pi\sqrt[4]{6}}.
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

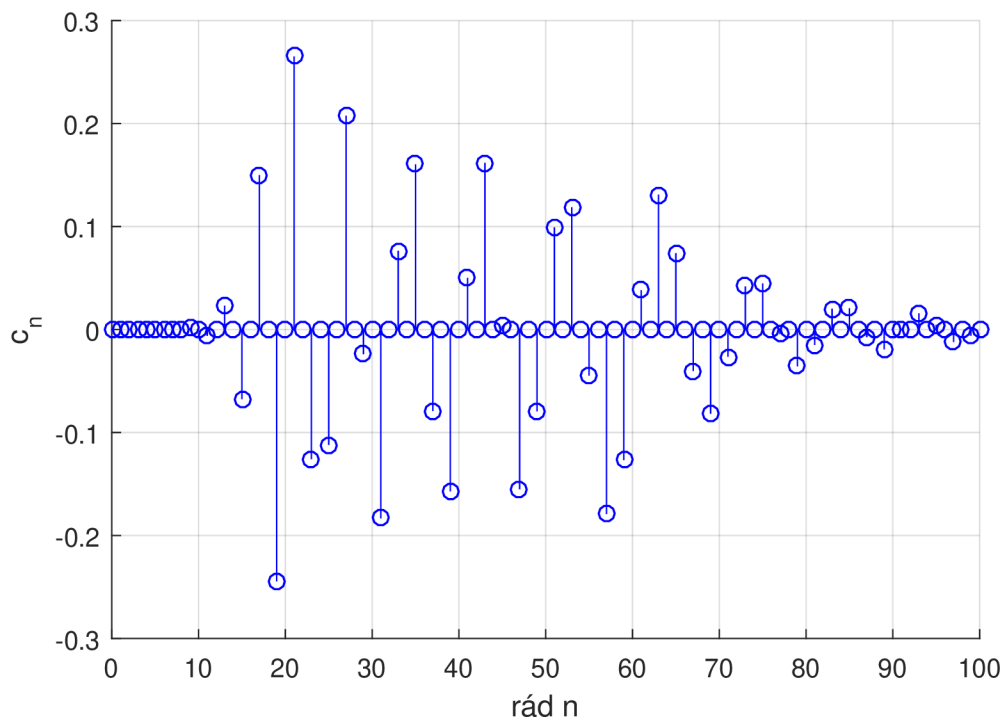
Zrejme ide o rozumný výsledok, že mierka by mala byť priamo úmerná dobe trvania signálu, ale (oproti predchádzajúcej metóde) s faktorom nejako závislým na počte periód.

Je viditeľné, že použitie momentov zabezpečilo menšiu chybu  $\xi_{rN}$ , než metóda na základe doby trvania signálu. Došlo k výraznému zlepšeniu časového priebehu aproximácie signálu na obrázku 4.6 oproti priebehu na obrázku 4.3.



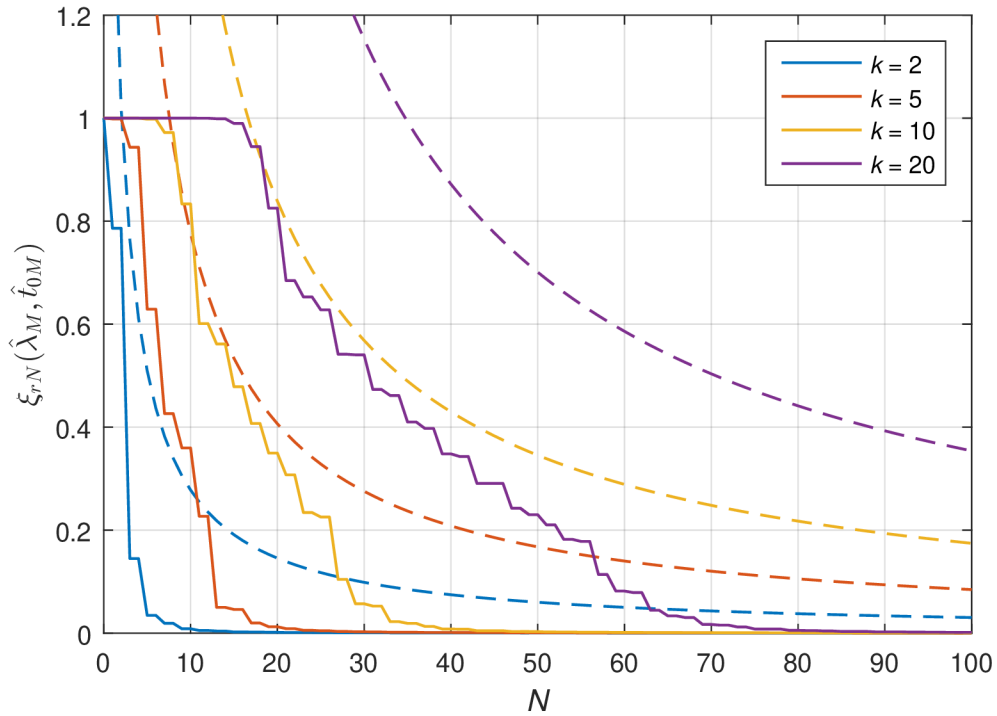
Obr. 4.6: Aproximácia signálu  $f(t)$  radom Hermiteových funkcií  $f_{100}(t)$ ,  $k = 20$ .

Spektrum signálu na Obr. 4.7 tiež potvrdzuje zvýšenie kvality aproximácie oproti Obr. 4.4. Vidíme, že sa energia spektra presunula do nižších členov spektra na úkor energie vyšších členov, čo potvrdzuje teoretické úvahy v častiach 3.1 a 3.2.



Obr. 4.7: Hermiteovo spektrum signálu  $f(t)$ ,  $t_m = 0,5$ ,  $k = 20$

V grafe 4.8 je plnou čiarou zobrazená závislosť relatívnej kvadratickej chyby  $\xi_{rN}(\hat{\lambda}_M, \hat{t}_{0M})$  na maximálnom ráde  $N$  aproximácie signálu. Prerušovanou čiarou je zobrazená analyticky určená horná hranica chyby podľa vzťahu (3.14). Vidno, že nerovnosť je splnená pre všetky skúmané  $N$  s pomerne veľkou rezervou. Určite však bude zaujímavé preskúmať aj dolné ohraničenie  $\xi_{rN}(\lambda, t_0)$ . To môžeme nájsť tak, že použijeme numerickú metódu, aby preskúmala okolie  $\hat{\lambda}_M, \hat{t}_{0M}$ .



Obr. 4.8: Chyba (plná) a jej horná hranica (prerušovaná) v závislosti na ráde aproximácie  $N$ .

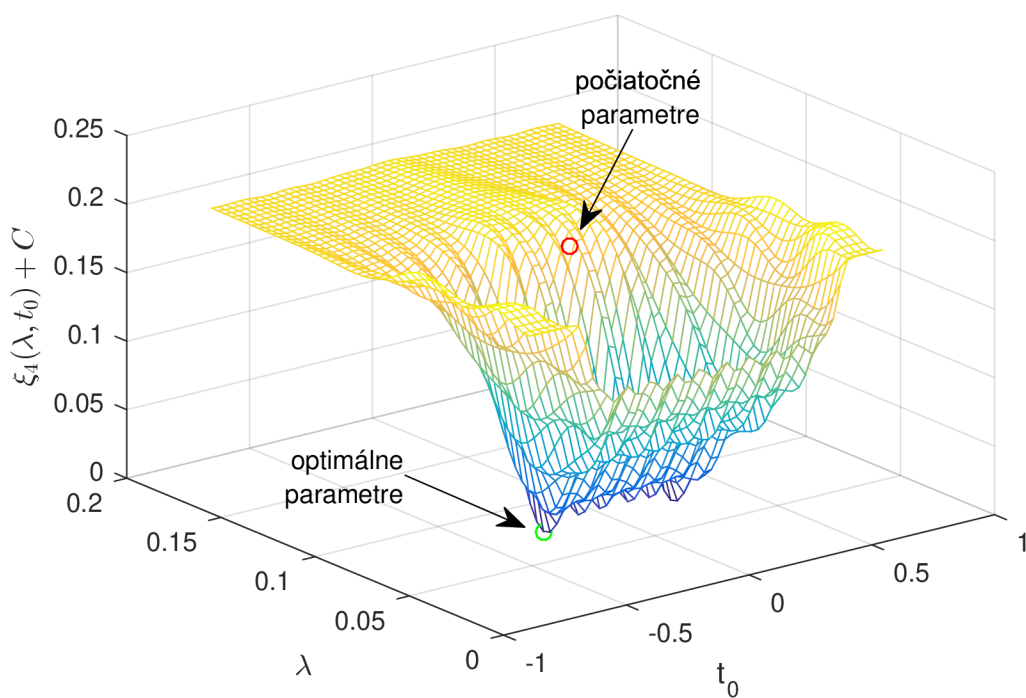
### 4.1.3 Využitie gradientu chyby

Ako počiatočný odhad som použil  $\hat{\lambda}_T, \hat{t}_{0T}$ . Aby došlo k nájdeniu globálneho minima chyby, nastavil som veľmi vysoký počet skúmaných bodov  $M^2 = 10\,000$ . Skúmané okolie som zvolil nasledovne

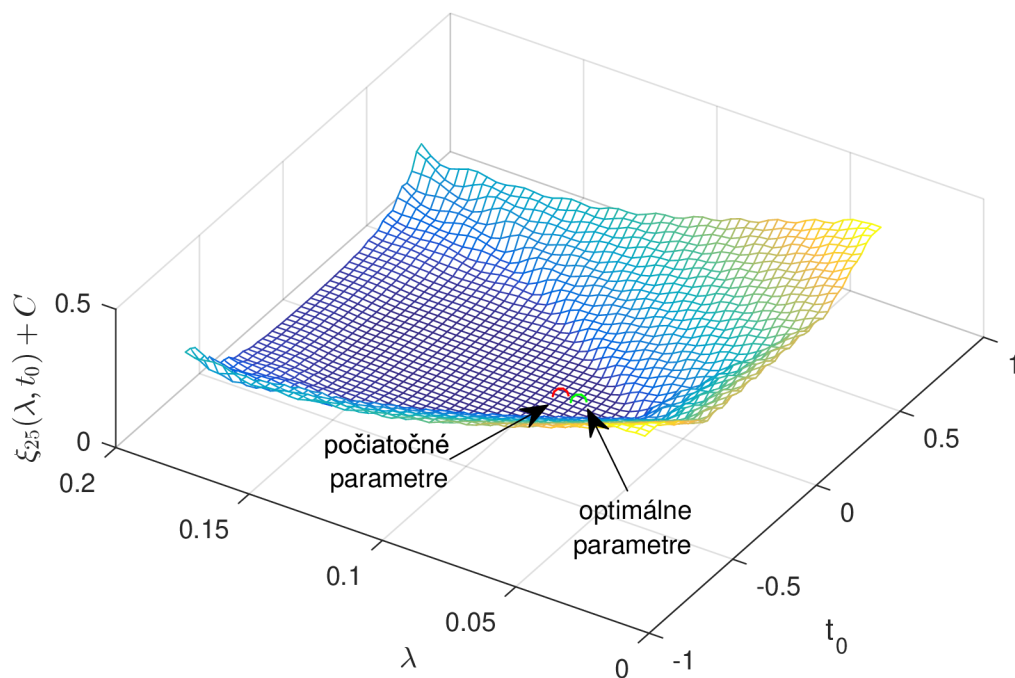
$$0,3\hat{\lambda}_M \leq \lambda \leq 2\hat{\lambda}_M \quad - \quad 0,5t_m \leq t \leq 0,5t_m \quad (4.7)$$

V takto zvolenej oblasti bol vypočítaný gradient a ten bol je následne numericky integrovaný. Výsledkom je sieť  $100 \times 100$  bodov. Z nich je možné vybrať ten, ktorému prislúcha najnižšia funkčná hodnota  $\xi_N(\lambda, t_0) + C$ .

Pre malé  $N$  dokáže numerická metóda zlepšiť voliteľné parametre a znížiť tým  $\xi_N$ . S narastajúcim  $N$  však vzniká oblasť, v ktorej je chyba zanedbateľne malá. Pre ešte väčšie  $N$  sa táto oblasť postupne ďalej rozširuje. Pri vysokom ráde aproximácie prestáva záležať na voľbe  $\lambda, t_0$ .

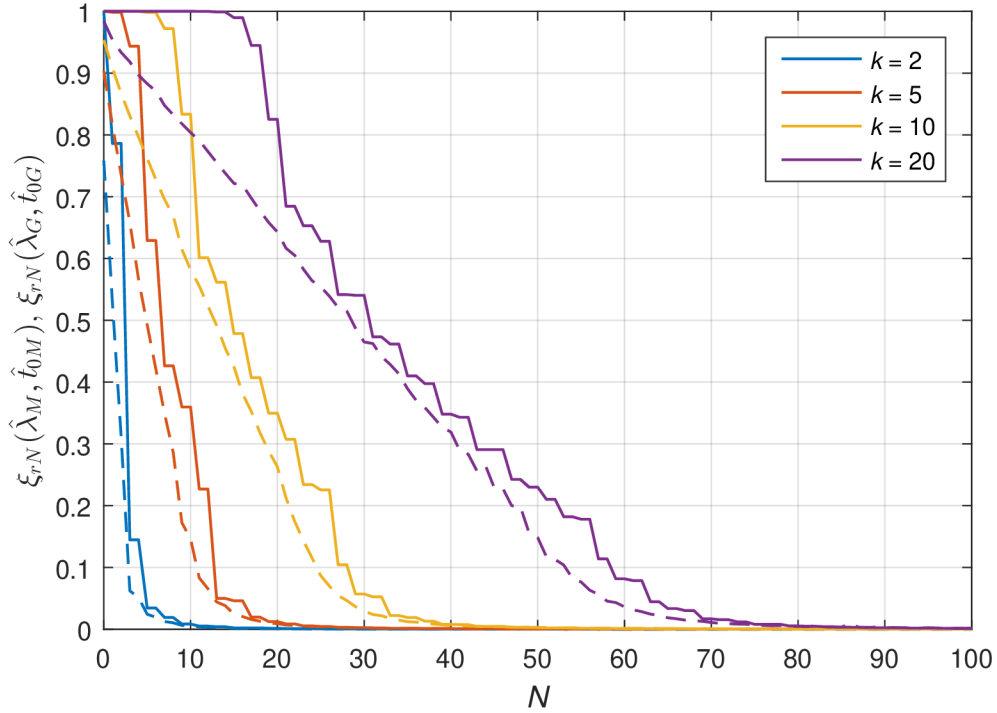


Obr. 4.9: Priebeh chyby  $\xi_4(\lambda, t_0)$  posunutý o integračnú konštantu,  $t_m = 0,5$ ,  $k = 5$ .



Obr. 4.10: Priebeh chyby  $\xi_{25}(\lambda, t_0)$  posunutý o integračnú konštantu,  $t_m = 0,5$ ,  $k = 5$ .

Celý postup som zopakoval pre všetky rády  $N$ . Obrázok 4.11 zobrazuje chybu aproximácie s parametrami na základe momentov (plná čiara) a minimálnu možnú chybu zodpovedajúcu danému  $N$  (prerušovaná čiara). Pre malé  $N$  bolo chybu možné ďalej minimalizovať. Treba však pripomenúť, že táto numerická minimalizácia si vyžiadala o štyri rády vyšší počet výpočtových operácií než výpočet momentov.



Obr. 4.11: Chyba aproximácie na základe momentov a minimálne hodnoty chyby.

## 4.2 Obdĺžnikový signál

V predchádzajúcej časti sme mali možnosť vidieť, že *metóda momentov* zabezpečila pri malej výpočtovej náročnosti veľmi rýchlu konvergenciu aproximácie signálu. Mohlo by sa teda zdať, že voliteľné parametre na základe momentov budú vždy ideálnou voľbou. Na nasledujúcom príklade ukážem, že to nemusí vždy byť pravda.

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{pre } |t| \leq 1 - \frac{\epsilon}{2} \\ \frac{1-|t|}{\epsilon} + \frac{1}{2} & \text{pre } 1 - \frac{\epsilon}{2} < |t| \leq 1 + \frac{\epsilon}{2} \\ 0 & \text{pre } 1 + \frac{\epsilon}{2} < |t| \end{cases} \quad (4.8)$$

Signál som zvolil podobne, ako článok [9], ale na rozdiel od uvedeného článku na signále preskúmame aj správanie ostatných *optimalizačných metód*. Ide o okno, pričom dobu trvania hrán udáva  $\epsilon \in (0; 1)$ .



### 4.2.1 Využitie momentov signálu

Pre momenty opäť ľahko odvodíme

$$\begin{aligned} m_0 &= 2 - \frac{\epsilon}{3} \\ m_1 &= 0 \\ m_2 &= -\frac{\epsilon^3}{60} + \frac{\epsilon^2}{6} - \frac{\epsilon}{3} + \frac{2}{3} \\ m_3 &= \frac{2}{\epsilon} \end{aligned} \tag{4.9}$$

a pre optimálne parametre metódy na základe momentov dostávame

$$\begin{aligned} \hat{t}_{0M} &= 0 \\ \hat{\lambda}_M &= \sqrt[4]{\frac{-\epsilon^4 + 10\epsilon^3 - 20\epsilon^2 + 40\epsilon}{120}} \approx \sqrt[4]{\frac{\epsilon}{3}} \end{aligned} \tag{4.10}$$

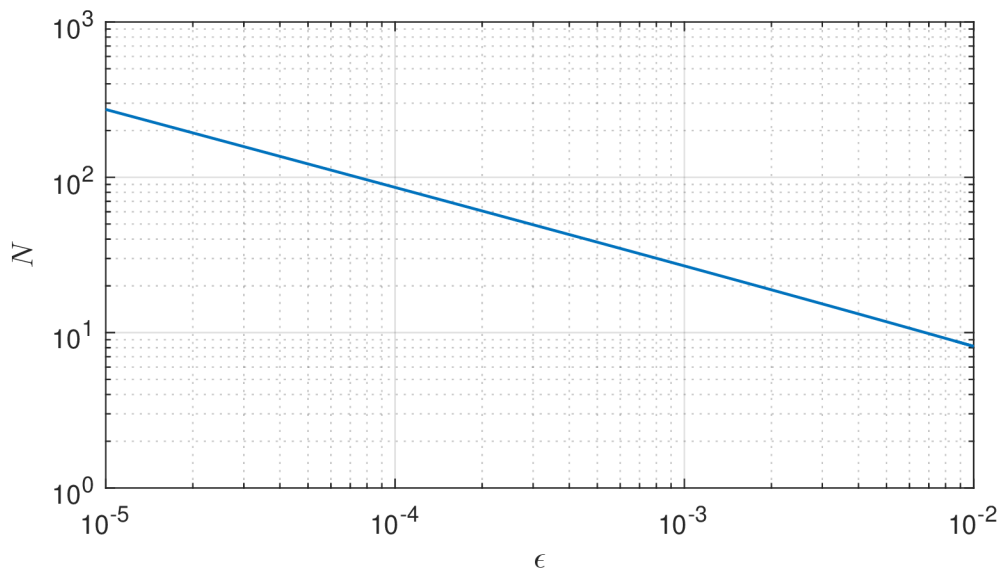
Vidíme, že  $\lambda_M$  je v podstate závislá len na strmosti hrán signálu.

Pri tomto signáli môžeme urobiť jednoduchý odhad minimálneho počtu členov aproximácie potrebných na to, aby bola kvadratická chyba rozumne malá. Podľa vzťahu (3.7) môžeme na základe doby trvania signálu predpokladať, že minimálna rozumná mierka je

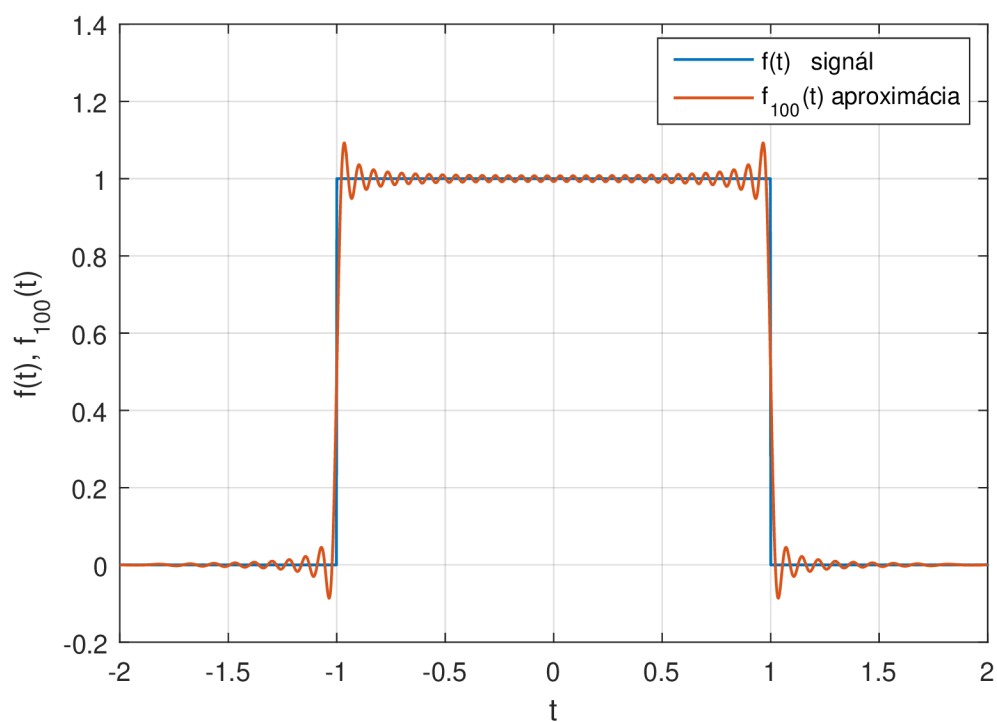
$$\hat{\lambda}_T = \frac{1}{\sqrt{2N+1}} \tag{4.11}$$

Porovnaním vzťahov (4.10) a (4.11) dostávame približný odhad

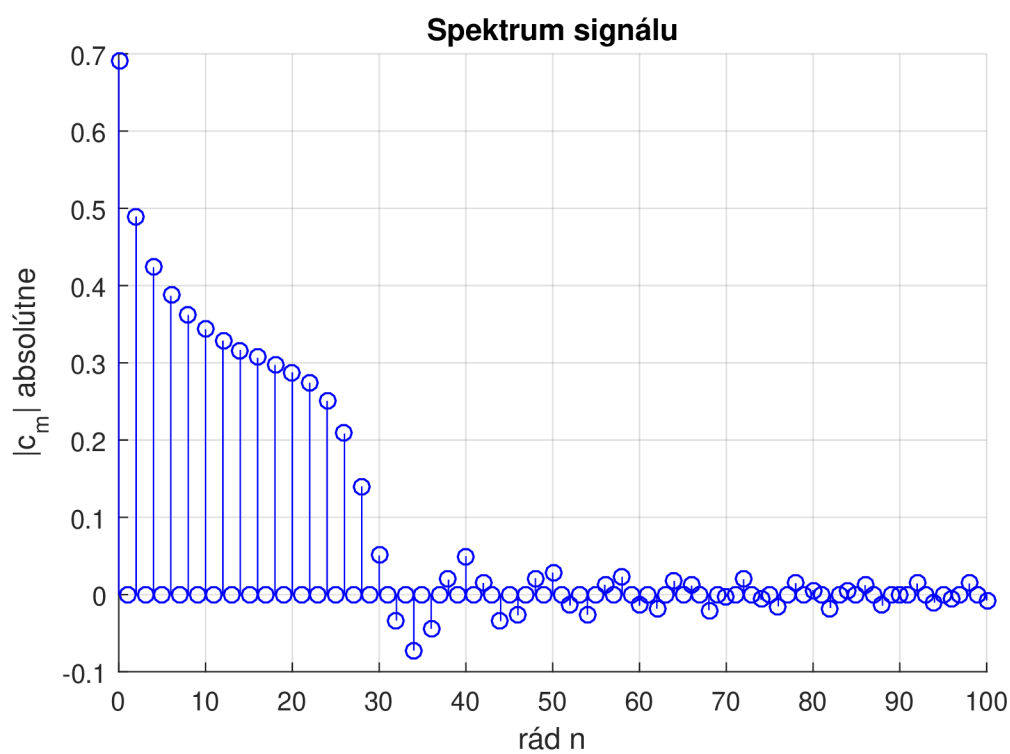
$$N \geq \frac{\sqrt{3/\epsilon} - 1}{2} \tag{4.12}$$



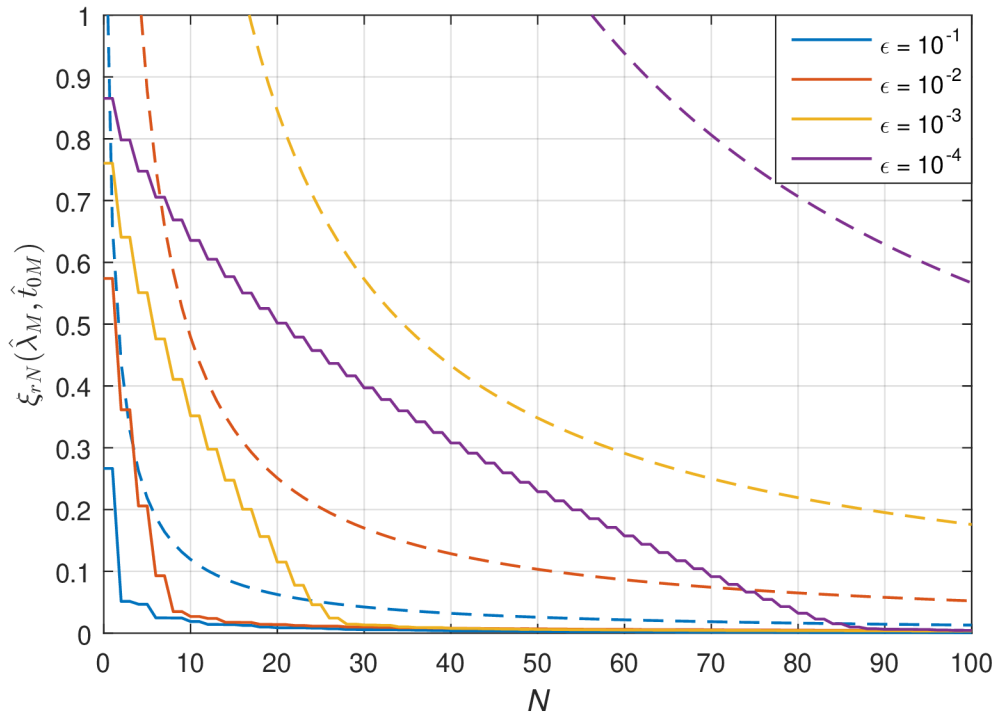
Obr. 4.12: Minimálny potrebný rád aproximácie na základe momentov.



Obr. 4.13: Aproximácia signálu  $f(t)$  radom Hermiteových funkcií  $f_{100}(t)$ ,  $\epsilon = 10^{-3}$



Obr. 4.14: Hermiteovo spektrum signálu  $f(t)$ ,  $\epsilon = 10^{-3}$



Obr. 4.15: Chyba (plná) a jej horná hranica (prerušovaná) v závislosti na ráde aproximácie  $N$ .

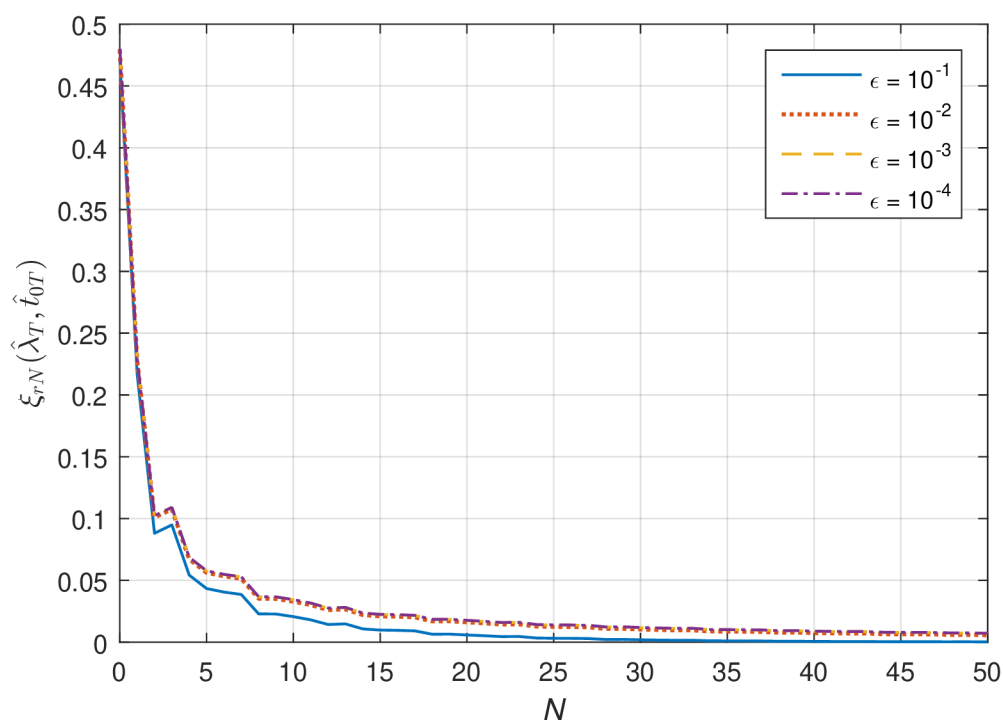
Je zrejme, že s klesajúcou dobou trvania hrán signálu naozaj dochádza k potrebe väčšieho počtu členov aproximácie signálu. Všimnime si súvislosť medzi grafmi 4.12 a 4.15. Obrázok 4.15 naozaj potvrdzuje, že približné úvahy vedúce ku vzťahu (4.12) o minimálnom potrebnom ráde boli správne.

### 4.2.2 Využitie doby trvania signálu

Predpokladajme, že signál  $f(t)$  je navzorkovaný napríklad v intervale  $t \in (-2; +2)$ . Keďže táto metóda nijakým spôsobom nezohľadňuje skutočný priebeh signálu v rámci uvedeného intervalu, pre odhad optimálnych parametrov bude platiť

$$\hat{t}_{0T} = 0 \quad \hat{\lambda}_T = \frac{2}{\sqrt{2N+1}} \quad (4.13)$$

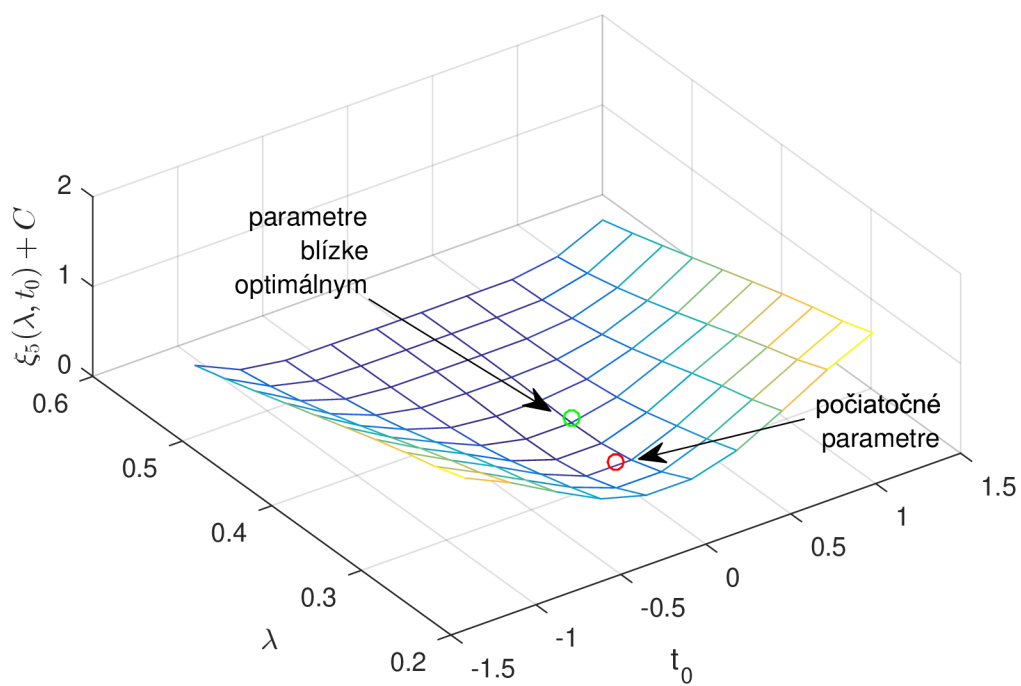
Takto zvoleným parametrom zodpovedá kvadratická chyba aproximácie signálu uvedená na obrázku 4.16. Kvalita aproximácie je prakticky nezávislá na strmosti hrán okna a navyše je výrazne lepšia než pri použití momentov signálu.



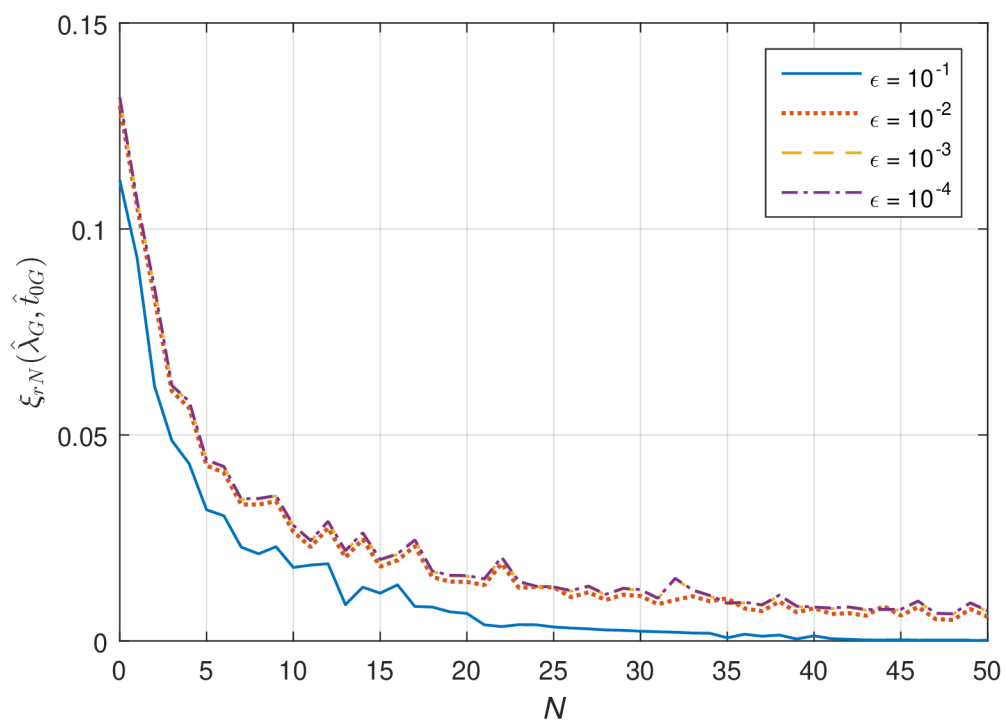
Obr. 4.16: Chyba aproximácie na základe trvania signálu v závislosti na ráde  $N$ .

### 4.2.3 Využitie gradientu chyby

Pre uvedený signál sa ukázali voliteľné parametre odhadnuté na základe doby trvania signálu ako veľmi dobrá voľba, ale na počiatkový odhad mierky som použil vzťah (4.11). Počet skúmaných bodov som zvolil  $M^2 = 100$  a preto má skúmaná oblasť rozmery  $10 \times 10$  bodov. Na obrázku 4.17 vidno, že pri veľkých rozstupoch medzi bodmi vzorkovania sa nijaký z bodov nemusí nachádzať dostatočne blízko globálneho minima a preto neodhalíme úplné minimum chyby. To zároveň vysvetľuje, prečo nie sú grafické priebehy 4.18 monotónne klesajúce.

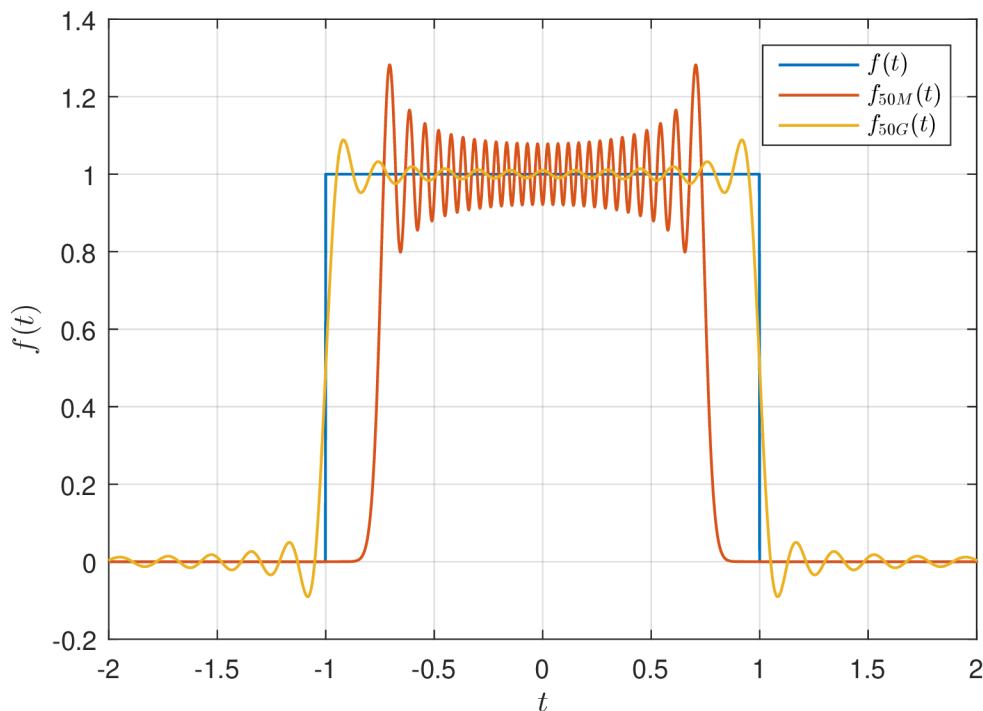


Obr. 4.17: Priebeh chyby  $\xi_5(\lambda, t_0)$  posunutý o integračnú konštantu,  $\epsilon = 10^{-3}$ .



Obr. 4.18: Chyba aproximácie na základe numerickej optimalizácie v závislosti na ráde  $N$ .

Použitie numerickej metódy opäť prinieslo ďalšie zmenšenie  $\xi_{rN}$  optoti predchádzajúcim metódam. Ak by sme nemali k dispozícii vhodný počiatočný odhad, akým je vzťah (4.11), mohli by sme jednoducho využiť napríklad výsledné parametre momentov. Obrázok 4.19 porovnáva aproximáciu signálu s využitím parametrov na základe momentov  $f_{50M}(t)$  a aproximáciu, ktorej parametre boli zlepšené využitím numerickej optimalizácie  $f_{50G}(t)$  rádu 50. Došlo k výraznému zmenšeniu relatívnej kvadratickej chyby z  $\xi_{r50}(\hat{\lambda}_M, \hat{t}_{0M}) \doteq 0,229$  na  $\xi_{r50}(\hat{\lambda}_G, \hat{t}_{0G}) \doteq 0,006$ .



Obr. 4.19: Aproximácia  $f_{50M}(t)$  a jej oprava  $f_{50G}(t)$ ;  $\epsilon = 10^{-4}$

### 4.3 Porovnanie výsledkov metód

Na dvoch jednoduchých signáloch, ktoré sú v praxi celkom bežné, sme mali možnosť vidieť, ako sa správajú jednotlivé metódy optimálnej voľby voľných parametrov aproximácie signálu konečným radom Hermiteovych funkcií.

Metóda využívajúca trvanie signálu je nenáročná na výpočet. Na obrázkoch 4.5 a 4.16 vidno, že všetky krivky sú si v podstate podobné. Takmer nezávisia na počte periód harmonického priebehu alebo strmosti hrán okna. Metóda zabezpečí približne rovnako rýchlu konvergenciu aproximácie, bez ohľadu na zložitosť spracúvaného signálu.

Metóda využívajúca momenty signálu zohľadňuje aj zložitosť spracúvaného signálu. Môže zabezpečiť lepšie parametre než predchádzajúca metóda, najmä pri signáloch, ktoré nemajú strmé hrany. V prípade, že signál obsahuje mnoho prudkých hrán, narastá veľkosť momentu  $m_3$  a získaná mierka môže byť nevyhovujúca. Aproximácia signálu si potom vyžaduje veľmi veľký počet členov spektra, ako naznačuje obrázok 4.12.

Numerické hľadanie globálneho minima chyby aproximácie využitím gradientu dáva najlepšie výsledky a dokáže úplne minimalizovať kvadratickú chybu. Nájdenie globálneho minima  $\xi_N(\lambda, t_0)$  znamená najväčšiu výpočtovú náročnosť spomedzi uvedených metód.

## 5 ZÁVER

V práci sa mi podarilo preskúmať základné teoretické poznatky o Hermiteových polynómoch a Hermiteových funkciách. Tieto poznatky som potom previedol do kódu v prostredí MATLAB R2015b, pričom napísaný kód som postupne zdokonaľoval a výsledkom je možnosť generovať Hermiteove funkcie do rádu asi 650. Vlastnosti získaných funkcií som preskúmal v časovej a vo frekvenčnej oblasti využitím Fourierovej a Gaborovej transformácie. Napokon som overil tri spôsoby voľby optimálnych parametrov, ktoré sa navzájom dopĺňajú a umožňujú minimalizovať chybu aproximácie. Ukázalo sa, že rozumná metóda nájdenia optimálnych parametrov aproximácie je využitie doby trvania signálu. V prípade, že je potrebné nájsť globálne minimum chyby, je možné využiť metódu na základe gradientu chyby aproximácie.

Uvedomujem si, že algoritmy, ktoré som v rámci tejto práce vytvoril by sa dali neustále zlepšovať. Napríklad pri numerickom hľadaní mierky by sa dala rozumnejšie voliť sieť bodov, v ktorých je počítaný gradient a tým by sa znížila výpočtová náročnosť. Algoritmus generovania Hermiteových funkcií by sa ešte dal upraviť tak, aby bolo možné generovať vyššie rády. Tieto a podobné úpravy neboli potrebné pre získanie výsledkov, ktoré v práci uvádzam a preto som ich vynechal. V prípade potreby by bolo možné uskutočniť uvedené zmeny.



# LITERATÚRA

- [1] REKTORYS, Karel. *Přehled užití matematiky. 2.*, opr. vyd. Praha: Nakladatelství technické literatury, 1968. Česká matice technická (SNTL).
- [2] HARDY, Godfrey Harold a Werner ROGOSINSKI. *Fourierovy řady*. Přeložil Alois KUFNER. Praha: SNTL-Nakladatelství technické literatury, 1971.
- [3] SLEPIAN, David; POLLAK, Henri O. Prolate Spheroidal Wave Functions, Fourier analysis and Uncertainty II. *Bell System Technical Journal*. Janury 1961, pp. 43-63.
- [4] ANDREWS, Larry C. *Special functions of mathematics for engineers*. 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1992. ISBN 0070018480.
- [5] LEBEDEV, Nikolaj Nikolajevič. *Speciální funkce a jejich použití: vysokoškolská příručka pro elektrotechnické fakulty : určeno inženýrům ve výzkumu a posluchačům vysokých škol technických*. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1956. Řada theoretické literatury.
- [6] SZEGO, Gabor. *Orthogonal polynomials*. American Mathematical Society, Providence, Rhode island, 1939.
- [7] LEIBON, Gregory. A Fast Hermite Transform, *Theoretical Computer Science* 2008 December 17; 409: 211–228.
- [8] DEN BRINKER, Albertus C.; BELT, Harm JW. Optimal free parameters in orthonormal approximations. *IEEE transactions on signal processing*, 1998, 46.8: 2081-2087.
- [9] E SILVA, T. Oliveira; BELT, H. J. W. On the determination of the optimal center and scale factor for truncated Hermite series. In: *European Signal Processing Conference, 1996. EUSIPCO 1996. 8th*. IEEE, 1996. str. 1-4.
- [10] FLANDRIN, Patrick. *A note on reassigned Gabor spectrograms of Hermite functions*. 2012, pp.15.
- [11] Euler method. *Wikipedia, The Free Encyclopedia* [online]. [cit. 27.5.2017] Dostupné z:  
[https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Euler\\_method&oldid=779889360](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Euler_method&oldid=779889360)

## ZOZNAM SYMBOLOV, VELIČÍN A SKRATIEK

$H_n$	Hermiteov polynóm rádu $n$
$\psi_n$	Hermiteova funkcia rádu $n$
$\mathcal{F}$	priama Fourierova transformácia
$\mathcal{F}^{-1}$	inverzná Fourierova transformácia
$\xi_N$	kvadratická chyba aproximácie signálu rádu $N$
$\xi_{rN}$	relatívna kvadratická chyba aproximácie signálu rádu $N$
$L_2(a, b)$	priestor kvadraticky integrovateľných funkcií
$\mathbb{N}$	množina prirodzených čísel
$\mathbb{N}^0$	množina prirodzených čísel (s prvkom 0)
$\lambda$	časová mierka Hermiteovej funkcie - time scale
STFT	krátkodobá Fourierova transformácia - short-time Fourier transform
$t_0$	časový posun Hermiteovej funkcie - time shift
$T$	perióda
$\omega_0$	uhlová frekvencia harmonického signálu

# ZOZNAM PRÍLOH

<b>A</b>	<b>Vybrané časti navrhnutého kódu</b>	<b>67</b>
A.1	Generovanie Hermiteovych polynómov . . . . .	67
A.2	Generovanie Hermiteovych funkcií . . . . .	67
A.3	Priama Hermiteova transformácia . . . . .	68
A.4	Inverzná Hermiteova transformácia . . . . .	69
<b>B</b>	<b>Obsah priloženého CD</b>	<b>71</b>

# A VYBRANÉ ČASTI NAVRHNUTÉHO KÓDU

## A.1 Generovanie Hermiteovych polynómov

Výpis A.1: HPolynomial

```
1 function [ OUT_value ] = HPolynomial( n, x )
2 % HPOLYNOMIAL(n,x) generates Hermite polynomials
3 % x time vector
4 % n order
5 Hn_2 = ones(1,length(x));
6 Hn_1 = 2*x;
7 switch n
8     case 0
9         OUT_value = Hn_2;
10    case 1
11        OUT_value = Hn_1;
12    otherwise
13        for i = 1:n-1
14            OUT_value = 2*x.*Hn_1 - 2*i*Hn_2;
15            Hn_2 = Hn_1;
16            Hn_1 = OUT_value;
17        end
18 end
```

## A.2 Generovanie Hermiteovych funkcií

Výpis A.2: HFunction

```
1 function [ y ] = HFunction( t, n, s, t0 )
2 %HFUNCTION Evaluates the Hertmite function of order n at
3     point t
4 % HFUNCTION(t,n,t0,s) uses
5 % t time, can be scalar or vector
6 % n order of Hermite function
7 % s time scale
8 % t0 time shift
9 % scales Hermite function to HF((t-t0)/s)
10 % HFUNCTION(t,n) uses default parameters t0 = 0; s = 1
11 if ~exist('s','var') % default scale value
```

```

11     s=1;
12 end
13 if ~exist('t0','var') % default time shift
14     t0=0;
15 end
16 t = (t-t0)/s; % substitution
17 y = pi^(-1/4); % Hermite function (HF) of order 0
18 if n > 0
19     y_1 = y;
20     y = pi^(-1/4)*sqrt(2)*t; % HF of order 1
21     for k = 2:n
22         y_2 = y_1; % y_2 ... HF of order k-2
23         y_1 = y; % y_1 ... HF of order k-1
24         y = y_1.*t*sqrt(2/k) - y_2*sqrt((k-1)/k);
25     end
26 end
27 y = y.*exp(-t.^2/2)/sqrt(s);
28 if ~isempty(find(isnan(y),1)) % check if there are NaN
    values
29     warning('Unable to evaluate function. Order too high.
        ');
30 end
31 end

```

## A.3 Priama Hermiteova transformácia

Výpis A.3: HSpectrum

```

1 function [ c, s0, t0 ] = HSpectrum( f, t, N, s0, t0 )
2 %HSPECTRUM(f,t,N) Evaluates Hermite spectrum of signal f
3 % f signal vector
4 % t time vector
5 % N maximal order of Hermite function in the
    approximation
6 if ~exist('t0','var')
7     t0=0;
8 end
9 if ~exist('s0','var') % default scale value
10     [s0,t0] = HScaleM(f,t);
11 end

```

```

12 c = zeros(1,N+1);
13 t_HF = (t-t0)/s0; % substitution
14 HF = pi^(-1/4)/sqrt(s0);
15 c(1) = trapz(t,f.*HF.*exp(-t_HF.^2/2));
16 if N > 0
17     HF_1 = HF;
18     HF = pi^(-1/4)*sqrt(2)*t_HF/sqrt(s0);
19     c(2) = trapz(t,f.*HF.*exp(-t_HF.^2/2));
20     for k = 2:N
21         HF_2 = HF_1; % y_2 ... HF of order k-2
22         HF_1 = HF; % y_1 ... HF of order k-1
23         HF = HF_1.*t_HF*sqrt(2/k) - HF_2*sqrt((k-1)/k);
24         if ~isempty(find(isinf(HF),1)) % check if there
                are Inf values
25             warning('Unable to evaluate function. Order
                too high. Higher coefficients c will be
                replaced by zeros!')
26             break
27         else
28             c(k+1) = trapz(t,f.*HF.*exp(-t_HF.^2/2));
29         end
30     end
31 end
32 end

```

## A.4 Inverzná Hermiteova transformácia

Výpis A.4: HSpectrumInv

```

1 function [ f ] = HSpectrumInv( c, t, s0, t0 )
2 %HSPECTRUMINV( c, t, s, t0 ) Evaluates iverse Hermite
   transform
3 % c vector containing spectrum coefficients
4 % t time vector
5 % s0 time scale
6 % t0 time shift
7 if ~exist('t0','var')
8     t0=0;
9 end
10 if ~exist('s0','var')

```

```

11     s0 = 1;
12 end
13 t_HF = (t-t0)/s0; % substitution
14 HF = pi^(-1/4)/sqrt(s0);
15 f = c(1)*HF.*exp(-t_HF.^2/2);
16 N=length(c)-1;
17 if N > 0
18     HF_1 = HF;
19     HF = pi^(-1/4)*sqrt(2)*t_HF/sqrt(s0);
20     f = f + c(2).*HF.*exp(-t_HF.^2/2);
21     for k = 2:N
22         HF_2 = HF_1; % y_2 ... HF of order k-2
23         HF_1 = HF; % y_1 ... HF of order k-1
24         HF = HF_1.*t_HF*sqrt(2/k) - HF_2*sqrt((k-1)/k);
25         if ~isempty(find(isinf(HF),1)) % check if there
                are Inf values
26             warning('Unable to evaluate function. Order
                too high. Higher coefficients c will be
                replaced by zeros!')
27             break
28         else
29             f = f + c(k+1)*HF.*exp(-t_HF.^2/2);
30         end
31     end
32 end
33 end

```

## B OBSAH PRILOŽENÉHO CD

Priložené CD obsahuje:

1. Tento dokument.
2. Funkcie:
  - HFunction.m - generuje Hermiteove funkcie
  - HMaxRoot.m - vracia polohu najväčšieho koreňa Hermiteovho polynómu
  - HPlotcm.m - vykreslenie členov spektra
  - HPolynomial.m - generuje Hermiteove polynómy
  - HRoots.m - nájde všetky korene Hermiteovych polynómov
  - HScaleG.m - vracia voliteľné parametre určené na základe gradientu
  - HScaleM.m - vracia voliteľné parametre určené na základe momentov
  - HSpectrum.m - priama Hermiteova transformácia
  - HSpectrumInv.m - inverzná Hermiteova transformácia
3. Demonštračné skripty:
  - aprox\_sinG.m - voľba parametrov na základe gradientu
  - aprox\_sinM.m - voľba parametrov na základe momentov signálu
  - aprox\_sinT.m - voľba parametrov na základe doby trvania signálu
  - aprox\_windowG.m - voľba parametrov na základe gradientu
  - aprox\_windowM.m - voľba parametrov na základe momentov signálu
  - aprox\_windowT.m - voľba parametrov na základe doby trvania signálu
  - boxcars.m - aproximácia signálu obsahujúceho tri okná
  - fourier\_spectrum.m - využitie Hermiteovho jadra pre harmonickú analýzu signálu
  - grafy\_HF.m - grafické priebehy Hermiteovych funkcií
  - korene\_HF.m - poloha koreňov Hermiteovych polynómov
  - polynomy.m - grafické priebehy Hermiteovych polynómov
  - preverenie\_ortonormality.m - kontrola kvality generovaných funkcií
  - priepustnostHT.m - vplyv rádu Hermiteovho jadra na získané harmonické spektrum signálu
  - spektrum\_2sinus.m - spektrum signálu obsahujúceho dve frekvenčne blízke harmonické zložky
  - time\_frequency.m - Gaborova transformácia Hermiteovych funkcií
  - vplyv\_kroku.m - vplyv kroku na momenty signálu
  - window\_signal.m - zlepšenie voliteľných parametrov na základe momentov využitím gradientu

Súbory boli vytvorené a otestované v prostredí MATLAB R2015b.