



# VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

## FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

## ÚSTAV AUTOMOBILNÍHO A DOPRAVNÍHO INŽENÝRSTVÍ

INSTITUTE OF AUTOMOTIVE ENGINEERING

# VÝPOČTOVÉ MODELOVÁNÍ DYNAMIKY PŘEVODOVÝCH ÚSTROJÍ

COMPUTATIONAL MODELLING OF THE TRANSMISSION DYNAMIC BEHAVIOUR

### DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

### AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. Pavel Švub

### VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. Aleš Prokop, Ph.D.

BRNO 2023



## Zadání diplomové práce

Ústav:	Ústav automobilního a dopravního inženýrství
Student:	<b>Bc. Pavel Švub</b>
Studijní program:	Automobilní a dopravní inženýrství
Studijní obor:	bez specializace
Vedoucí práce:	<b>Ing. Aleš Prokop, Ph.D.</b>
Akademický rok:	2022/23

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

### Výpočtové modelování dynamiky převodových ústrojí

#### Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Práce je zaměřena na sestavení výpočtového modelu pro simulaci dynamiky převodového ústrojí. Model bude postaven v prostředí MATLAB. Vstupem bude konkrétní geometrie převodového ústrojí, průběh provozních otáček a zátěžného krouticího momentu. Úkolem studenta je stanovení průběhu budících sil a odezvy na toto buzení na klíčových komponentech převodovky.

#### Cíle diplomové práce:

Vyhotovení rešerše v oblasti dynamiky převodových ústrojí.  
Vyhotovení výpočtového modelu na bázi MBS.  
Provedení simulací pro stavy s různým charakterem zatěžování.  
Zhodnocení dosažených výsledků a vyvození závěrů.

#### Seznam doporučené literatury:

BERND, Simeon. Computational Flexible Multibody Dynamics: A Differential-Algebraic Approach [online]. 2013, ISBN 978-3-642-35158-7. Dostupné z: <http://link.springer.com/book/10.1007/978-3-642-35158-7/page/1>.

NAUNHEIMER, Harald, Bernd BERTSCHE, Joachim RYBORZ, Wolfgang NOVAK. Automotive Transmissions. Springer Verlag, 1999, ISBN 978-3-642-16213-8.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2022/23

V Brně, dne

L. S.

---

prof. Ing. Josef Štětina, Ph.D.  
ředitel ústavu

---

doc. Ing. Jiří Hlinka, Ph.D.  
děkan fakulty

## ABSTRAKT

Tato práce se zabývá sestavením výpočtového modelu převodovky v softwaru Matlab, hlavním cílem práce je analýza dynamických zatížení vznikajících při provozu převodovky. Práce rozebírá nejdůležitější zdroje silových účinků v převodových ústrojích jako je boční vůle ozubení, tuhost záběru ozubení, tuhosti ložisek a hřídelů. Dále shrnuje základní matematické modely využívané k modelování dynamiky ozubených převodů. S využitím těchto poznatků je sestaven vlastní model dvouhřídelové převodovky s možností změny převodových stupňů. Pro řazení těchto stupňů je využita synchronizace s pružně omezenou silou. Tento model je poté podroben různým zatěžovacím stavům, a je sledována odezva jednotlivých komponent, jako je síla v ozubení, zatížení ložisek, nebo velikost chyby převodu.

## KLÍČOVÁ SLOVA

Převodovka, výpočtový model, dynamika převodových ústrojí, záběr ozubení, chyba převodu, boční vůle ozubení, vibrace

## ABSTRACT

This thesis focuses on constructing a computational model of a gearbox using Matlab software, with the main objective of analysing the dynamic loads that occur during gearbox operation. The thesis examines the most important sources of dynamic forces in gear mechanisms, such as gear backlash, gear mesh stiffness, bearing stiffness, and shaft stiffness. Furthermore, it provides an overview of basic mathematical models used for modelling the dynamics of gear transmissions. Based on these findings, a custom model of a two-shaft gearbox is developed, which also allow gear shifting. Synchronization with a flexibly limited force is utilized for gear shifting. This model is then subjected to various loading conditions to monitor the response of individual components, including gear forces, bearing loads, and the magnitude of transmission error.

## KEYWORDS

Gearbox, computational model, dynamics of gears, gear meshing, transmission error, backlash, vibration

## BIBLIOGRAFICKÁ CITACE

ŠVUB, P. *Výpočtové modelování dynamiky převodových ústrojí*. Brno, 2023. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav automobilního a dopravního inženýrství. Vedoucí diplomové práce Aleš Prokop.



## ČESTNÉ PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že tato práce je mým původním dílem, zpracoval jsem ji samostatně pod vedením Aleše Prokopa a s použitím informačních zdrojů uvedených v seznamu.

V Brně dne 26. května 2023

.....

Pavel Švub

## PODĚKOVÁNÍ

Tímto bych chtěl poděkovat vedoucímu této diplomové práce Ing. Aleši Prokopovi, Ph.D. za odborné vedení práce a pozitivní přístup po celou dobu vypracovávání této práce. Dále bych chtěl poděkovat své rodině, za podporu během celého studia.



# OBSAH

Úvod.....	7
<b>1 Dynamika záběru ozubených kol.....</b>	<b>8</b>
1.1 Zdroje dynamického zatížení ozubených převodů .....	8
1.1.1 Chyba převodu.....	8
1.1.2 Tuhost záběru ozubení.....	9
1.1.3 Boční vůle ozubení .....	9
1.2 Přehled výpočtových modelů převodovek.....	10
1.2.1 Model převodovky se dvěma stupni volnosti .....	10
1.2.2 Model převodovky se čtyřmi nebo šesti stupni volnosti .....	11
1.2.3 Model převodovky s osmi stupni volnosti.....	12
1.2.4 Model převodovky s dvanácti stupni volnosti.....	13
<b>2 Řešení pohybových rovnic v programu Matlab.....</b>	<b>16</b>
2.1 Newmarkova integrační metoda .....	16
2.2 Porovnání numerických metod v programu Matlab .....	17
<b>3 Parametry dynamického modelu .....</b>	<b>19</b>
3.1 Tvorba modelu převodovky .....	19
3.2 Tuhosti jednotlivých částí modelu .....	20
3.2.1 Určení tuhosti ozubení.....	20
3.2.2 Tuhost uložení hřídelů .....	21
3.2.3 Torzní tuhosti hřídelů .....	22
3.3 Momenty setrvačnosti a hmotnosti .....	23
<b>4 Sestavení výpočtového modelu .....</b>	<b>25</b>
4.1 Tvorba matic popisující dynamický model.....	25
4.2 Tvorba vlivu boční zubové vůle .....	27
4.3 Změna převodových stupňů.....	28
4.3.1 Popis funkce změny převodových stupňů .....	28
4.3.2 Nastavení řadicí síly .....	30
4.4 Modální analýza dynamického modelu .....	30
<b>5 Verifikace výpočtového modelu .....</b>	<b>32</b>
5.1 Tvorba modelu v MSC ADAMS/View .....	32
5.1.1 Kontakt ozubení.....	32
5.1.2 Parametry modelu.....	33
5.1.3 Sestavení verifikačního modelu v softwaru Matlab .....	33
5.2 Porovnání výsledků modelů ADAMS a MATLAB .....	33
5.2.1 Simulace bez zahrnutí tlumení .....	34
5.2.2 Simulace s tlumením .....	35
<b>6 Výsledky simulací výpočtového modelu .....</b>	<b>37</b>
6.1 Simulace se zvyšujícími se otáčkami.....	37
6.2 Simulace s nerovnoměrným zatížením vstupu .....	39
6.2.1 Vliv nerovnoměrného zatížení na rychlost hřídelí a chybu převodu.....	40
6.2.2 Průběh tečných sil v ozubení při nerovnoměrném zatížení.....	41
6.3 Simulace průběhu řazení.....	42

---

6.3.1	Simulace řazení z druhého na první stupeň .....	42
6.3.2	Analytický výpočet doby řazení .....	45
6.4	Vliv nevyvážení hřídelů .....	47
<b>Závěr</b>	.....	<b>51</b>
<b>Použité informační zdroje</b>	.....	<b>52</b>
<b>Seznam použitých zkratk a symbolů</b>	.....	<b>54</b>

## ÚVOD

Ozubená kola, jsou jedním z nejdůležitějších mechanických převodníků, který se používá napříč všemi odvětvími a jejich využívání i v budoucnosti je nezpochybnitelné. Od doby, kdy byla první vyráběná ozubená kola dřevěná, až do dnešní doby urazila ozubená kola dlouhou cestu. Nejen co se týče materiálů používaných na jejich výrobu, ale hlavně jejich geometrie, která velmi výrazně ovlivňuje provozní charakteristiky, těchto převodů. V dnešní době se klade stále větší důraz na snižování hlučnosti těchto převodů, a to jak z důvodu legislativy, která stanovuje maximální hlukové limity, tak hlavně kvůli zákaznickým preferencím a soupeření jednotlivých výrobců ozubených kol.

S rozvojem elektromobility, kde odpadl významný zdroj hluku v podobě spalovacího motoru a byl nahrazen mnohem tišším pohonem, se ukazuje, že hlavním zdrojem hluku v pohonných ústrojích jsou ozubené převody. Právě snaha snižovat hlučnost ozubených kol je jedním z hlavních důvodů tvorby dynamických simulací ozubených převodů. Tyto simulace se hlavně zaměřují na stanovení budících frekvencí a určením kritických provozních stavů. Díky znalostem získaných z těchto simulací lze navrhnout komponenty převodových ústrojí tak, aby nedocházelo k jejich buzení a tím minimalizovat vznik hlukových emisí. Tento způsob vývoje také šetří náklady, jelikož nemusí být vytvářeno velké množství fyzických prototypů a realizováno jejich náročné testování.

# 1 DYNAMIKA ZÁBĚRU OZUBENÝCH KOL

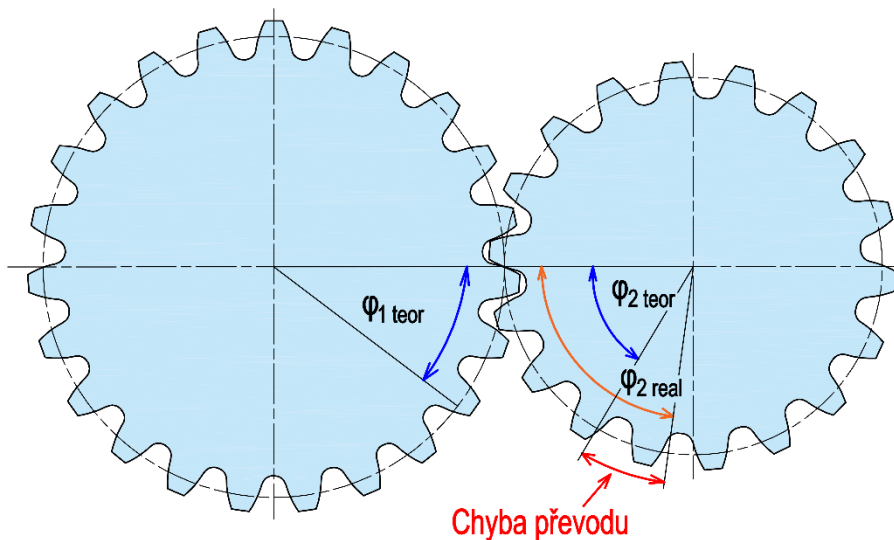
V první části této práce jsou popsány hlavní zdroje dynamických zatížení převodovek, tyto silové účinky mají hlavní vliv na hlučnost a životnost ozubených převodů. Jelikož je náročné předpovídat, jak se bude ozubení chovat za různých podmínek a k jakým zatížením bude docházet, sestavují se matematické modely, které se pokoušejí co nejuvěrněji popsat dynamiku ozubených převodů. Základní typy těchto matematických modelů jsou popsány v další části této kapitoly.

## 1.1 ZDROJE DYNAMICKÉHO ZATÍŽENÍ OZUBENÝCH PŘEVODŮ

U ozubených kol je hlavním zdrojem dynamických sil záběr ozubení. Toto dynamické zatěžování se může ve formě vibrací šířit, například přes ložiska na převodovou skříň a způsobovat významné hlukové emise. V následujících kapitolách jsou blíže popsány hlavní zdroje těchto dynamických sil.

### 1.1.1 CHYBA PŘEVODU

Chyba převodu popisuje kvalitu záběru ozubení, čím je její hodnota nižší, tím je lepší záběr ozubení. Základní definice chyby přenosu je dle [1] definována jako, odchylka dokonalého přenosu pohybu spoluzabírajících kol, viz Obr. 1. Dvojice kol, která mají na vstupu i výstupu konstantní rychlost otáčení, mají nulovou chybu převodu. Chyba převodu má významný vliv na dynamiku převodového ústrojí. Nerovnoměrné otáčení kol způsobuje vznik dynamických sil, které způsobují vibrace a ty se projevují hlukem a v nejhorším případě mohou mít za následek významné snížení životnosti převodového ústrojí [2].



Obr. 1 Znáornění chyby převodu

Chybu převodu lze rozdělit na statickou a dynamickou [3, 4]. Statická chyba převodu je způsobena výrobními nepřesnostmi, do kterých patří odchylka tvaru zubů, tak i montážní nepřesnosti ozubených kol. Dále na ni má významný vliv proměnná tuhost ozubení, způsobená střídáním počtu zubů v záběru, která je blíže popsána v kapitole 1.1.2. Dynamická chyba převodu je mnohem komplexnější, vzniká při provozu a vliv na ni má celá řada faktorů jako například mazání, vibrace převodové skříně, deformace hřídelů, ložisek a nepravidelné opotřebení. Tyto chyby jsou obtížnější k detekci, protože mohou být způsobeny mnoha

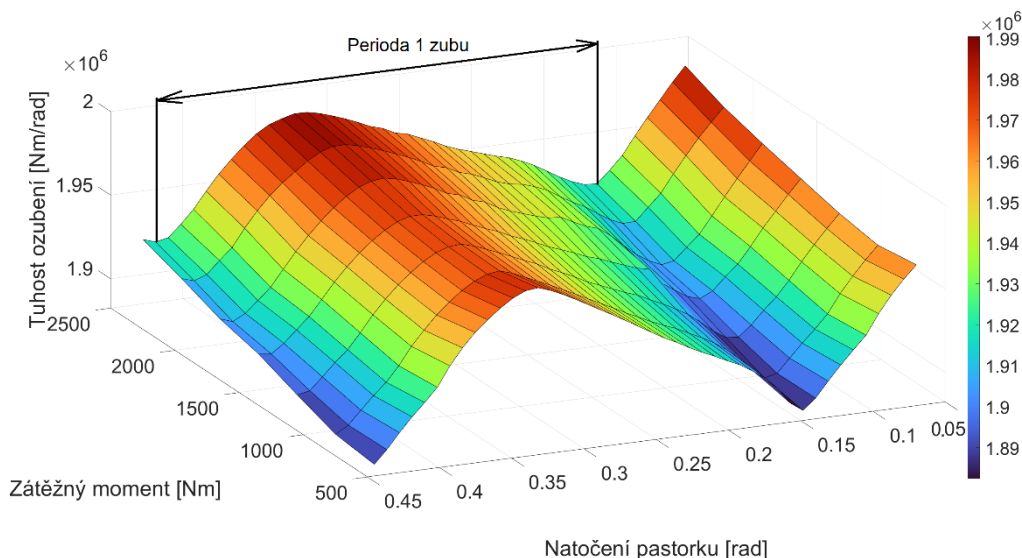
faktory, které nelze vždy správně predikovat. K určení dynamické chyby převodu, proto byla sestrojena celá řada matematických modelů, jejichž přehled je podrobněji popsán v kapitole 1.2.

### 1.1.2 TUHOST ZÁBĚRU OZUBENÍ

Tuhost záběru ozubení je jedním z nejvýznamnějších parametrů ovlivňující vznik dynamických zatížení v ozubení. Hodnota této tuhosti není konstantní v průběhu záběru ozubení, a tím vzniká v systému dynamické buzení. Hlavní vliv na tuhost záběru ozubení má úhel natočení zubu, při otáčení ozubeného soukolí se totiž střídají jeden a dva páry zubů v záběru, také se posouvá bod dotyku ozubení s čímž se mění délka ramena, na kterém působí síla na zub.

Další parametr, který má na tuhost vliv je velikost působícího momentu. S tím, jak roste působící moment dochází k ohybu zatížených zubů, a nezatížené zuby se tak dostávají do záběru dříve [3]. Velikost vlivu působícího momentu na tuhost záběru ozubení není tak velká jako závislost na natočení pastorku, viz Obr. 2.

Graf průběhu tuhosti záběru ozubení v závislosti na natočení pastorku a velikosti působícího momentu je zobrazen na Obr. 2. Tato tuhost je ozubení byla zjištěna pomocí MKP analýzy. Tato analýza proběhla na pastorku s 21 zuby, tudíž perioda jednoho zubu je 0,299 rad. V grafu je tato perioda označena v rozmezí od 0,15 do 0,45 rad natočení pastorku.



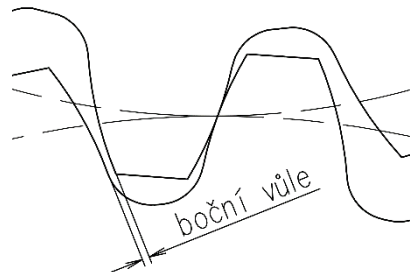
Obr. 2 Tuhost ozubení v závislosti na zátěžném momentu a natočení pastorku

### 1.1.3 BOČNÍ VŮLE OZUBENÍ

Boční vůle v ozubení je mezera mezi ozubenými profily dvou kol, když jsou ozubené kola v kontaktu. Boční vůle ozubení může být způsobena různými faktory, jako jsou nepřesnosti výroby, nesprávné uložení ozubených kol nebo opotřebení ozubených kol. Znázornění této boční vůle je na Obr. 3.

Při pohybu ozubených kol se může vlivem boční vůle ozubení, objevit krátkodobé oddělení ozubených profilů a následně jejich rychlé spojení. Tento náraz boků zubů, způsobí širokopásmové buzení, které vyvolává velké dynamické zatížení a může mít velký vliv na životnost ozubení. Tento náraz může být při každém kontaktu silnější nebo slabší, což

způsobuje nepravidelný zvuk, tento zvuk se nazývá řinčení nebo klepání. K tomuto jevu dochází hlavně u převodů s nízkým zatížením [3], nebo v případě nepravidelného zatěžování převodovky, typicky ve spojení se spalovacím motorem. Při tomto zatěžování dochází k torznímu kmitání hřídelů, které také může začít způsobovat rázy vlivem boční vůle.



Obr. 3 Boční zubová vůle

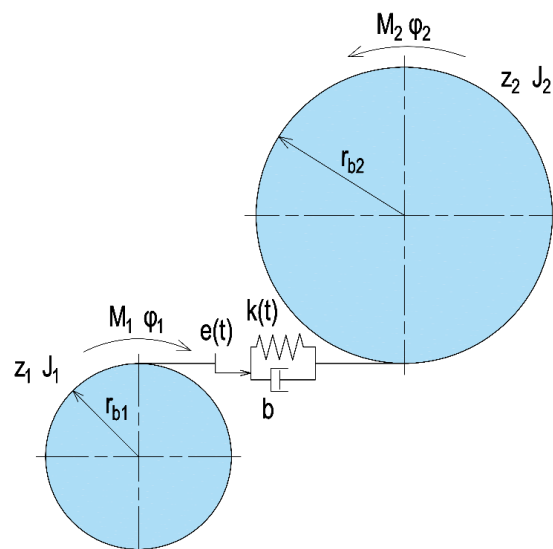
Aby k tomuto jevu docházelo co nejméně jsou moderní motory vybaveny dvouhmotými setrvačníky a tlumiči torzních kmitů, tyto komponenty redukuje torzní vibrace a eliminují posuv ozubených kol, který by jinak způsoboval „řinčení“.

## 1.2 PŘEHLED VÝPOČTOVÝCH MODELŮ PŘEVODOVEK

Dynamickým modelováním převodových systémů se zabývalo velké množství výzkumů. Přehledem těchto matematických dynamických modelů se zabývá například [5–8, 10], tyto publikace popisují matematické modely od nejjednodušších se dvěma stupni volnosti až po složité modely s dvanácti a více stupni volnosti. Některé modely jsou blíže představeny v následujících kapitolách.

### 1.2.1 MODEL PŘEVODOVKY SE DVĚMA STUPNI VOLNOSTI

Jedná se o nejjednodušší model dynamiky převodovky, je zobrazen na Obr. 4. Tento model se skládá ze dvou kotoučů, které jsou spojeny pružinou s tlumičem, reprezentující záběr zubů. Tento model zohledňuje proměnnou tuhost záběru, která závisí na úhlu natočení kola, předpokládá konstantní tlumení  $b$  a také předpokládá, že kola jsou zatížena vysokým kroučícím momentem, kde se neprojeví boční vůle ozubení.



Obr. 4 Výpočtový model převodovky se dvěma stupni volnosti

Tento model je popsán pomocí následujících rovnic [7].

$$J_1 \ddot{\varphi}_1 = r_1 k(t) [-r_1 \varphi_1 + r_2 \varphi_2 + e(t)] + r_1 b [-r_1 \dot{\varphi}_1 + r_2 \dot{\varphi}_2 + \dot{e}(t)] + M_1(t) \quad (1)$$

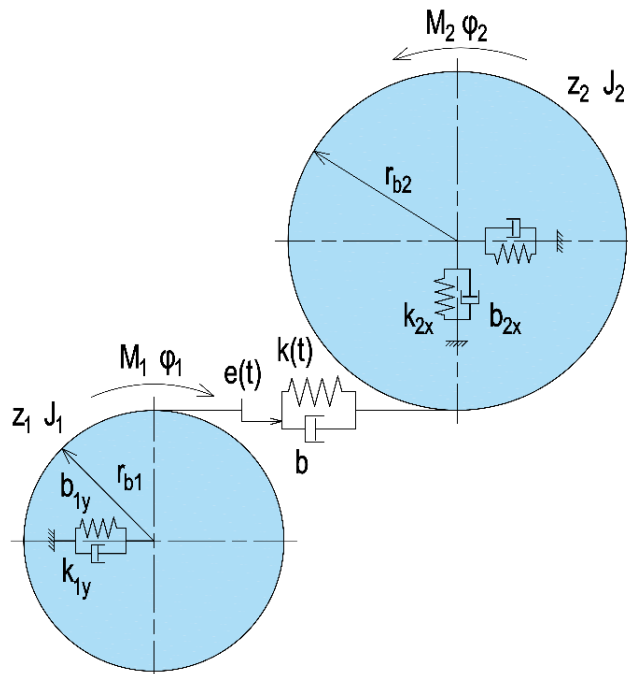
$$J_2 \ddot{\varphi}_2 = r_2 k(t) [r_1 \varphi_1 - r_2 \varphi_2 - e(t)] + r_1 b [r_1 \dot{\varphi}_1 - r_2 \dot{\varphi}_2 - \dot{e}(t)] + M_2(t) \quad (2)$$

Kde  $J_1$  a  $J_2$  jsou momenty setrvačnosti ozubených kol.  $\varphi_1, \varphi_2$  je natočení ozubených kol v radiánech,  $r_1$  a  $r_2$  jsou poloměry ozubených kol.  $k(t)$  je tuhost záběru ozubení která je proměnná v čase a  $e(t)$  je hodnota boční vůle ozubení, které se mění v závislosti na tom, zda se kontakt zubů nachází na jejich pozitivní nebo negativní straně.

V nejjednodušším případě lze považovat tuhost záběru  $k(t)$  za konstantní, tento předpoklad, je však velice nepřesný. Pro zlepšení reálnosti výsledků, může být tuhost popsána například s využitím funkce sinus, zadáním experimentálně změřených hodnot tuhosti, anebo pomocí hodnot tuhosti získaných MKP analýzou záběru ozubení.

### 1.2.2 MODEL PŘEVODOVKY SE ČTYŘMI NEBO ŠESTI STUPNI VOLNOSTI

Tuhost hřídele, ložisek a skříně převodovky mají také nezanedbatelný vliv na dynamiku ozubení, proto byl vytvořen model se čtyřmi a šesti stupni volnosti. Základem tohoto modelu jsou opět dva kotouče spojené pružnou vazbou jako u modelu se dvěma stupni volnosti, pouze došlo k přidání pružných vazeb na uložení kol. Model se čtyřmi stupni volnosti má pružně uložená kola pouze v jednom směru viz kolo 1 na Obr. 5, zatímco model se šesti stupni volnosti má pružně uložená kola ve dvou směrech viz kolo 2 na Obr. 5. Každý disk tak má volnou jednu rotaci a jednu nebo dvě translace podle zvoleného modelu.



Obr. 5 Výpočtový model převodovky se čtyřmi stupni volnosti (kolo 1) a šesti stupni volnosti (kolo 2)

Na natočení ozubených kol má kromě velikosti deformace ozubení také vliv deformace ložisek, jelikož při posunu os ozubených kol, dojde také k mírnému natočení ozubených kol. Tento dynamický model je popsán pomocí následujících rovnic [9].

$$F_t = k(t) [y_1 - y_2 - r_1\phi_1 + r_2\phi_2 + e(t)] + b [\dot{y}_1 - \dot{y}_2 - r_1\dot{\phi}_1 + r_2\dot{\phi}_2 + \dot{e}(t)] \quad (3)$$

$$J_1\ddot{\phi}_1 = r_1F_t + M_1(t) \quad (4)$$

$$J_2\ddot{\phi}_2 = -r_2F_t + M_2(t) \quad (5)$$

Kde  $F_t$  je tečná síla v ozubení, která je využita v dalších rovnicích pro zkrácení zápisu rovnic.  $y_1$  a  $y_2$  jsou posunutí v ose Y.

Posunutí ozubených kol v ose X a Y je popsáno pomocí následujících rovnic.

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k_{1x} \cdot x_1 - b_{1x} \cdot \dot{x}_1 + F_r \quad (6)$$

$$m_1 \ddot{y}_1 = -k_{1y} \cdot y_1 - b_{1y} \cdot \dot{y}_1 + F_t \quad (7)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -k_{2x} \cdot x_2 - b_{2x} \cdot \dot{x}_2 - F_r \quad (8)$$

$$m_2 \ddot{y}_2 = -k_{2y} \cdot y_2 - b_{2y} \cdot \dot{y}_2 - N \quad (9)$$

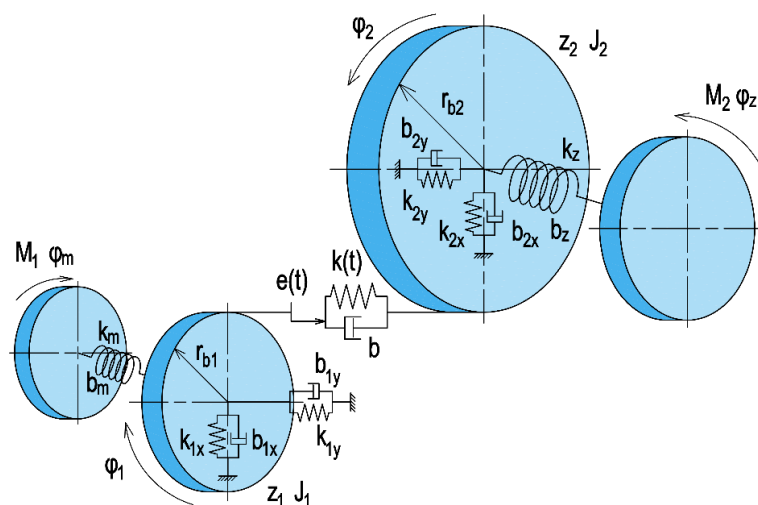
Kde  $x_1$  a  $x_2$  jsou posunutí v ose X a  $F_r$  je radiální síla ozubení, které se spočítá jako:

$$F_r = F_t \cdot \frac{\tan(\alpha_n)}{\cos(\beta)} \quad (10)$$

Kde  $\alpha_n$  je normálový úhel záběru a  $\beta$  je úhel sklonu ozubení.

### 1.2.3 MODEL PŘEVODOVKY S OSMI STUPNI VOLNOSTI

Z důvodu že, každá reálná součást má vnitřní tuhost a tlumení, tak předchozí modely nerepresentují skutečnou zástavbu. Pro zlepšení reálnosti modelu je připojení motoru a zátěže provedeno pomocí rotačního spojení s torzní tuhostí. Schéma tohoto modelu je zobrazeno na Obr. 6.



Obr. 6 Výpočtový model převodovky s osmi stupni volnosti



Translační pohyby jsou popsány stejnými rovnicemi jako model se šesti stupni volnosti viz rovnice (6)-(9). Model se liší v rovnicích popisující natočení ozubených kol [9], kde přibyl vliv torzní tuhosti hřídelů, viz rovnice níže.

$$J_1 \ddot{\varphi}_1 = r_1 F_t - k_m(\varphi_1 - \varphi_m) - b_m(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_m) \quad (11)$$

$$J_2 \ddot{\varphi}_2 = -r_2 F_t - k_z(\varphi_2 - \varphi_z) - b_m(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_z) \quad (12)$$

Kde  $k_m$  a  $k_z$  je tuhost spojení hřídelů s ozubenými koly a  $\varphi_z$  a  $\varphi_m$  je natočení vstupní a výstupní hřídele.

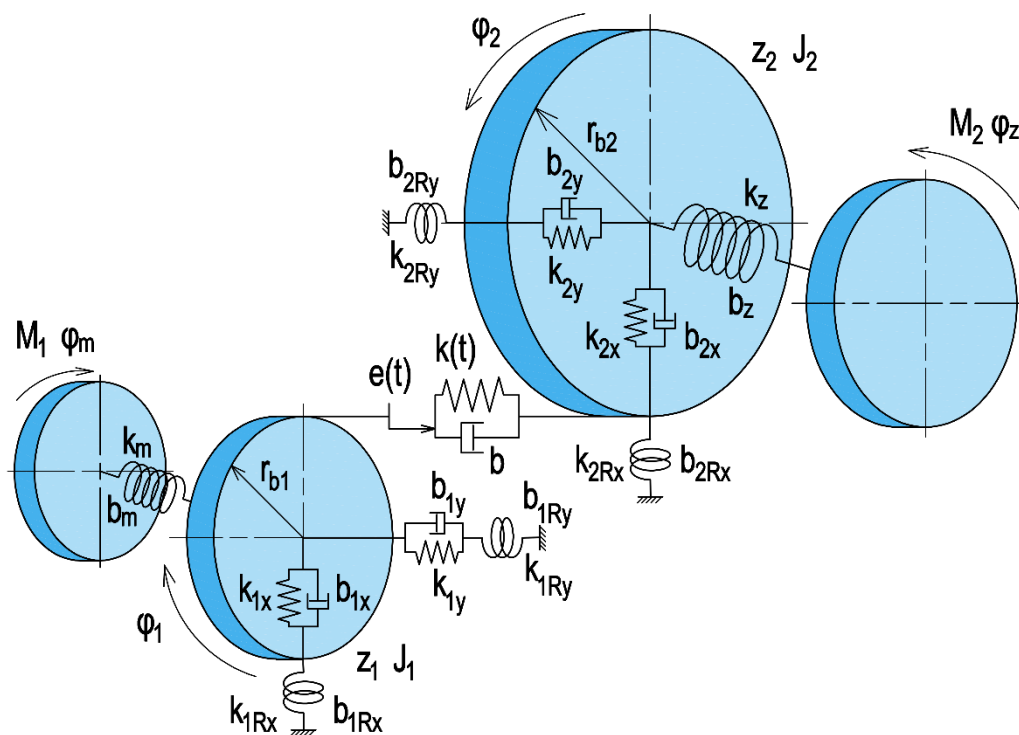
Model je dále popsán rovnicemi natočení vstupní a výstupní hřídele:

$$J_m \ddot{\varphi}_m = -k_m(\varphi_m - \varphi_1) - b_m(\dot{\varphi}_m - \dot{\varphi}_1) + M_1(t) \quad (13)$$

$$J_z \ddot{\varphi}_z = -k_z(\varphi_z - \varphi_2) - b_z(\dot{\varphi}_z - \dot{\varphi}_2) + M_2(t) \quad (14)$$

#### 1.2.4 MODEL PŘEVODOVKY S DVANÁCTI STUPNI VOLNOSTI

Na rozdíl od předchozích modelů, kde jsou disky uloženy na jedné vazbě ve středu, tento model zahrnuje komplexnější modelování uložení. Uložení hřídele na dvojici ložisek je v tomto modelu nahrazeno jednou translační vazbou ve středu disku a otočnými vazbami s torzní tuhostí a tlumením na Obr. 7 označenými indexem R. Oba hlavní disky, tak mají volné všechny tři rotace a dvě translace [9]. Do tohoto modelu navíc může být zahrnut gyroskopický efekt, který brání v klopení hřídele v ložiscích.



Obr. 7 Výpočtový model převodovky s dvanácti stupni volnosti

Pohybové rovnice pro natočení kola, pastorku, vstupní a výstupní hřídele jsou stejné jako u předchozího modelu s osmi stupni volnosti viz rovnice (13)-(16). Ostatní pohybové rovnice jsou sestaveny dle [9].

Pohybové rovnice translace v ose X jsou.

$$m_1 \cdot \ddot{x}_1 = -k_{1x} \cdot x_1 - b_{1x} \cdot \dot{x}_1 + F_r - k_{1Cx} \cdot \psi_{1x} - b_{1Cx} \cdot \dot{\psi}_{1x} \quad (15)$$

$$m_2 \cdot \ddot{x}_2 = -k_{2x} \cdot x_2 - b_{2x} \cdot \dot{x}_2 - F_r - k_{2Cx} \cdot \psi_{2x} - b_{2Cx} \cdot \dot{\psi}_{2x} \quad (16)$$

Pohybové rovnice translace v ose Y jsou.

$$m_1 \cdot \ddot{y}_1 = -k_{1y} \cdot y_1 - b_{1y} \cdot \dot{y}_1 - F_t - k_{1Cy} \cdot \theta_{1y} + b_{1Cy} \cdot \dot{\theta}_{1y} \quad (17)$$

$$m_2 \cdot \ddot{y}_2 = -k_{2y} \cdot y_2 - b_{2y} \cdot \dot{y}_2 + F_t - k_{2Cy} \cdot \theta_{2y} + b_{2Cy} \cdot \dot{\theta}_{2y} \quad (18)$$

Pro natočení pastorku a kola v ose X, včetně vlivu gyroskopického momentu jsou pohybové rovnice následující.

$$J_{1x} \cdot \ddot{\theta}_1 = J_1 \dot{\phi}_1 \dot{\psi}_1 + k_{1Cy} y_1 - k_{1Ry} \theta_1 + b_{1Cy} \dot{y}_1 - b_{1Ry} \dot{\theta}_2 + r_1 F_a \quad (19)$$

$$J_{2x} \cdot \ddot{\theta}_2 = -J_2 \dot{\phi}_2 \dot{\psi}_2 + k_{2Cy} y_2 - k_{2Ry} \theta_2 + b_{2Cy} \dot{y}_2 - b_{2Ry} \dot{\theta}_2 - r_2 F_a \quad (20)$$

Pro natočení pastorku a kola v ose Y jsou pohybové rovnice následující.

$$J_{1y} \cdot \ddot{\psi}_1 = J_1 \dot{\phi}_1 \dot{\theta}_1 + k_{1Cx} x_1 - k_{1Rx} \psi_1 + b_{1Cx} \dot{x}_1 - b_{1Rx} \dot{\psi}_2 \quad (21)$$

$$J_{2y} \cdot \ddot{\psi}_2 = -J_2 \dot{\phi}_2 \dot{\theta}_2 + k_{2Cx} x_2 - k_{2Rx} \psi_2 + b_{2Cx} \dot{x}_2 - b_{2Rx} \dot{\psi}_2 \quad (22)$$

Ozubená kola jsou uložena na dvou ložiscích viz Obr. 8, aby bylo možné spočítat pohybové rovnice, musí být tuhost těchto ložisek redukována na jednu vazbu ve středu ozubeného kola viz Obr. 7. Tuhost ložisek bude redukována na tuhosti s indexy T, R a C. Tuhost T označuje translační tuhost, R torzní tuhost a C značí tuhost, která určuje propojení mezi translačním a rotačním pohybem, protože například při pohybu hřídele pouze v ose x dojde zároveň k vytvoření momentu, který má za následek klopení hřídele.

Výpočet translační tuhosti  $k_T$

$$k_T = k_A + k_B \quad (23)$$

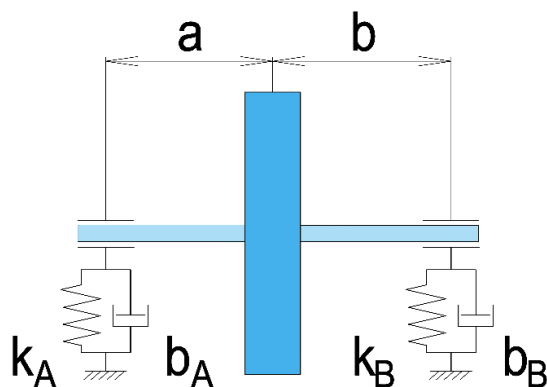
Výpočet torzní tuhost  $k_R$

$$k_R = a_L^2 k_A + b_L^2 k_B \quad (24)$$

Výpočet tuhosti  $k_C$ , určující propojení mezi translačním a rotačním pohybem

$$k_C = a k_A - b k_B \quad (25)$$

Tento výpočet je proveden pro obě hřídele v osách X a Y a obdobně pro tlumení v ložiscích.



Obr. 8 Uložení hřídele v ložiscích

Tyto modely mohou být dále rozšiřovány, například přidáním dalších torzních stupňů volnosti, nebo přidáním axiálního posuvu na ložiscích, pomocí sestavení vhodných pohybových rovnic.

## 2 ŘEŠENÍ POHYBOVÝCH ROVNIC V PROGRAMU MATLAB

Výpočetní program Matlab má různé funkce pro řešení dynamiky nelineárních mechanických systémů. Tyto funkce mají adaptivní časový krok, to u složitějších systémů vede k tomu, že Matlab příliš zkracuje časový krok a výpočet takového systému zabere velice dlouhou dobu [11], z toho důvodu je na řešení dynamiky těles vhodné použít jiné výpočetní metody, jednou z neznámějších metod řešení dynamiky těles je Newmarkova metoda.

### 2.1 NEWMARKOVA INTEGRAČNÍ METODA

Newmarkova integrační metoda byla primárně určena pro řešení systémů strukturální dynamiky s proměnným zatížením, jako například zemětřesení, výbuch nebo náraz. Newmarkova metoda slouží pro přímé řešení diferenciálních rovnic druhého řádu, bez potřeby soustavu diferenciálních transformovat na dvojici diferenciálních rovnic prvního řádu. Tato metoda se používá převážně u výpočtu dynamické odezvy systému [11, 12]. Metoda využívá k výpočtu předpokládanou hodnotu zrychlení, kterou lze určit na základě předchozího kroku výpočtu. Poté se integruje pohybová rovnice pomocí koeficientů a parametrů, které lze volit různě podle konkrétního problému.

Odvození Newmarkovy metody bude provedeno pro soustavu lineárních pohybových rovnic

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F}(t) \quad (26)$$

kde  $\mathbf{M}$  je matice hmotnosti dynamického systému,  $\mathbf{B}$  je matice tlumení,  $\mathbf{K}$  je matice tuhosti.  $\mathbf{x}$  je matice polohy systému,  $\dot{\mathbf{x}}$  je rychlost,  $\ddot{\mathbf{x}}$  je zrychlení.  $\mathbf{F}(t)$  je budící síla která je proměnná v čase.

Newmarkova metoda využívá Taylorův rozvoj až do třetí derivace  $x$

$$x_{n+1} = x_n + \dot{x}_n \cdot dt + \ddot{x}_n \frac{dt^2}{2!} + \dddot{x}_n \frac{dt^3}{3!} \quad (27)$$

$$\dot{x}_{n+1} = \dot{x}_n + \ddot{x}_n \cdot dt + \dddot{x}_n \frac{dt^2}{2!} \quad (28)$$

S využitím věty o střední hodnotě diferenciálního počtu může být rovnice (27)(28) přepsána:

$$x_{n+1} = x_n + \dot{x}_n \cdot dt + \ddot{x}_n \frac{dt^2}{2!} + \beta \cdot \ddot{x}_n \cdot dt^3 \quad (29)$$

$$\dot{x}_{n+1} = \dot{x}_n + \ddot{x}_n \cdot dt + \gamma \cdot \ddot{x}_n \cdot dt^2 \quad (30)$$

kde  $\gamma$  a  $\beta$  jsou koeficienty určující chování metody.

Třetí derivace je definována jako

$$\ddot{x}_{n+1} = (\ddot{x}_{n+1} - \ddot{x}_n) \cdot \frac{1}{dt} \quad (31)$$

Substitucí a úpravou rovnice (31) do rovnic (29) a (30) dostaneme

$$x_{n+1} = x_n + \dot{x}_n \cdot dt + 2\beta \cdot \ddot{x}_{n+1} \cdot \frac{dt^2}{2} + (1 - 2\beta) \ddot{x}_n \cdot \frac{dt^2}{2} \quad (32)$$

$$\dot{x}_{n+1} = \dot{x}_n + \gamma \cdot \ddot{x}_{n+1} \cdot dt + (1 - \gamma) \ddot{x}_n \cdot dt \quad (33)$$

Nyní jsou známé rovnice polohy a rychlosti ale stále v nich vystupují hodnoty následujících kroků. Je třeba aby byly rovnice upraveny pro získání hodnot následujícího kroku (n+1) z dříve známých hodnot kroku (n). Toho bude docíleno úpravou rovnice (32)

$$\ddot{x}_{n+1} = \frac{1}{\beta \cdot dt^2} (x_{n+1} - x_n) - \frac{1}{\beta \cdot dt} \cdot \dot{x}_n - \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{x}_n \quad (34)$$

Dosazením rovnice (34) do rovnice (33) bude získáno

$$\dot{x}_{n+1} = \frac{\gamma}{\beta \cdot dt} (x_{n+1} - x_n) - \left( 1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \dot{x}_n - \left( 1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) dt \cdot \ddot{x}_n \quad (35)$$

Nyní jsou vytvořeny rovnice pro rychlost a zrychlení závislé pouze na poloze v bodě (n+1) dosazením rovnic (34) a (35) do základní pohybové rovnice (26) a následným vyjádřením  $x_{n+1}$  bude získána rovnice

$$\begin{aligned} x_{n+1} = & \left( \frac{1}{\beta \cdot dt^2} \cdot \mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta \cdot dt} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{K} \right)^{-1} \dots \\ & \cdot \left( \mathbf{F}_{n+1} + \mathbf{M} \cdot \left( \frac{1}{\beta \cdot dt^2} \cdot x_n + \frac{1}{\beta \cdot dt} \cdot \dot{x}_n + \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{x}_n \right) \dots \right. \\ & \left. + \mathbf{B} \left( \frac{\gamma}{\beta \cdot dt} \cdot x_n - \left( 1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \dot{x}_n - \left( 1 - \frac{\gamma}{2 \cdot \beta} \right) dt \cdot \ddot{x}_n \right) \right) \end{aligned} \quad (36)$$

kde rozmezí parametrů dle [11]

$$0 < \beta \leq 1/2, \quad 0 \leq \gamma \leq 1$$

Z rovnice (36) je vypočítána poloha systému v kroku (n+1), ostatní kinematické veličiny lze jednoduše dopočítat dosazením do rovnic (33) a (32). Volba parametrů  $\beta$  a  $\gamma$  určují chování metody. Typické hodnoty těchto parametrů jsou zobrazeny v Tab. 1.

Tab. 1 Vliv koeficientů  $\beta$  a  $\gamma$  na chování metody [13]

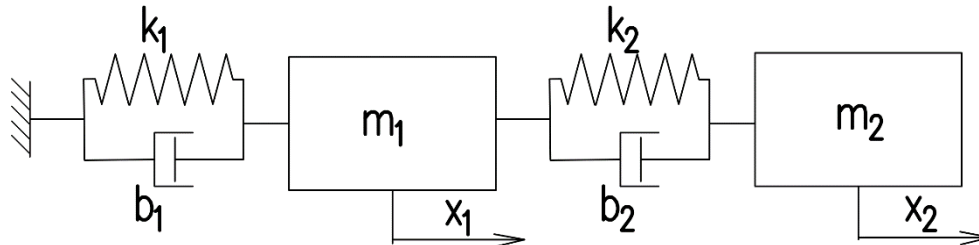
$\gamma$	$\beta$	Typ metody
1/2	0	metoda centrálních diferencí, explicitní, podmíněně stabilní
1/2	1/4	metoda průměrné akcelerace, implicitní, nepodmíněně stabilní
1/2	1/6	metoda lineární akcelerace, implicitní, podmíněně stabilní
1/2	1/12	metoda Fox-Goodwin, implicitní, podmíněně stabilní

## 2.2 POROVNÁNÍ NUMERICKÝCH METOD V PROGRAMU MATLAB

V následující kapitole bude porovnána Newmarkova metoda s řešičem diferenciálních rovnic ode45 v programu Matlab. Porovnání bude probíhat na jednoduchém systému se dvěma stupni volnosti. Newmarkova metoda je určena na výpočet nelineárních diferenciálních rovnic, proto je u této metody velice důležitá volba časového kroku. Při příliš malém kroku budou získány přesné výsledky, ale za cenu dlouhého výpočetního času. Newmarkova metoda je stabilní i při velkých časových krocích, ale odhadnuté řešení se začne lišit od přesného

řešení. Při příliš velkém časovém kroku může dojít ke ztrátě konvergence výpočetní metody a díky tomu k numerické nestabilitě. Tato nestabilita způsobí, že začne docházet k růstu iterační chyby a výsledné hodnoty přestanou postrádat fyzikální smysl [11].

Porovnání výpočetních metod bylo provedeno na systému s dvěma stupni volnosti viz Obr. 9. Parametry tohoto systému včetně počátečních podmínek jsou v Tab. 2.

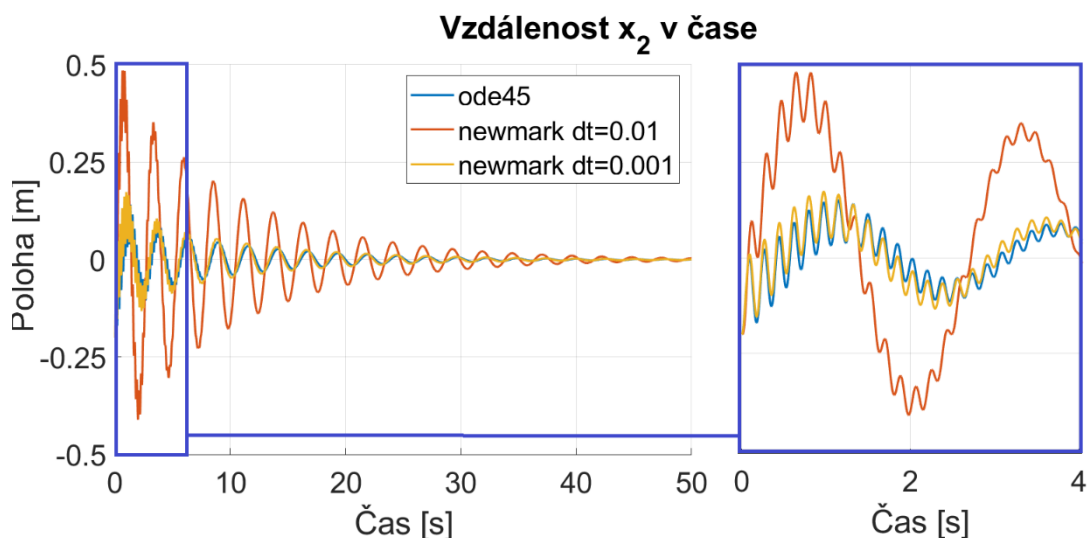


Obr. 9 Dynamický systém pro porovnání výpočetních metod

Tab. 2 Parametry dynamického systému

<b>Hmotnost</b>	$m_1$ [kg]	10	$m_2$ [kg]	40
<b>Tuhost</b>	$k_1$ [Nm <sup>-1</sup> ]	300	$k_2$ [Nm <sup>-1</sup> ]	10 000
<b>Tlumení</b>	$b_1$ [N·s·m <sup>-1</sup> ]	10	$b_2$ [N·s·m <sup>-1</sup> ]	1
<b>Počáteční podmínky</b>	$x_1$ [m]	0,3	$x_2$ [m]	-0,2

Výsledné průběhy výchylek v čase jsou na Obr. 10, kde je patrný vliv časového kroku na výsledné řešení. Porovnání proběhlo s funkcí ode45, u které Matlab řídí velikost časového kroku nezávisle na uživateli. Výsledky spočítané Newmarkovou metodou při časovém kroku 0,001 s se liší minimálně od výsledků pomocí funkce ode45. Výsledky při kroku 0,01 s jsou již podstatně rozdílné. Proto musí být volbě časového kroku věnována zvýšená pozornost, aby nedocházelo k velkému zkreslení výsledků.



Obr. 10 Porovnání průběhu vzdálenosti  $x_2$  s využitím různých numerických metod

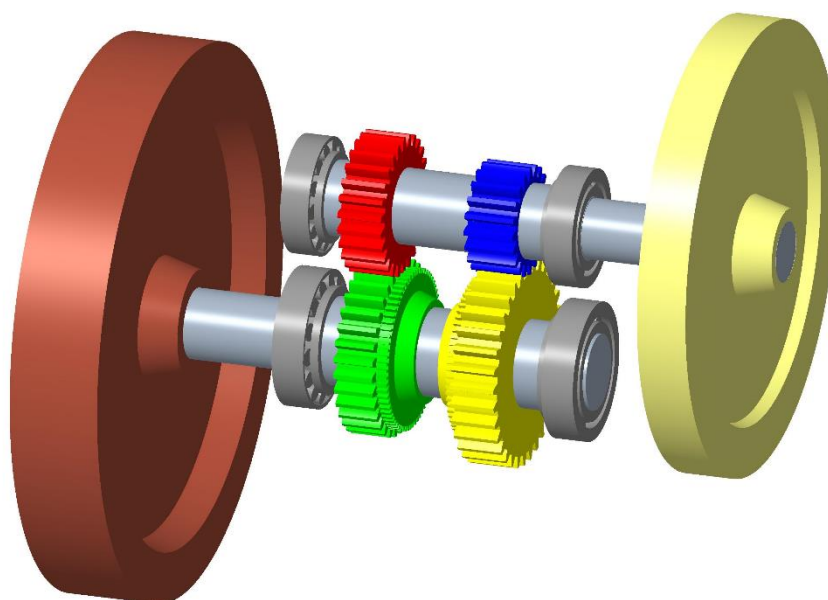
### 3 PARAMETRY DYNAMICKÉHO MODELU

Pro tvorbu dynamického modelu převodovky je nutné znát hmotnosti, momenty setrvačnosti a tuhosti jednotlivých součástí převodovky. Následující kapitola se zabývá postupem získávání těchto parametrů.

#### 3.1 TVORBA MODELU PŘEVODOVKY

Do výpočtového modulu je potřeba dosadit takové parametry systému, aby odpovídali co nejvíce skutečné převodovce, proto byl v programu Creo vytvořen model převodovky, sloužící k určení hmotností, tuhostí a momentů setrvačnosti jednotlivých součástí.

Za převodovku, na která bude sestavena ve výpočtovém modelu, byla zvolena dvouhřídelová dvoustupňová převodovka. Tato převodovka je opatřena dvěma setrvačníky na vstupní i výstupní hřídeli. Uložení hřídelí je provedeno na každé hřídeli dvojicí kuželíkových ložisek. Dynamický model převodovky bude sestaven na bázi MBS simulací, které jsou tvořeny tuhými tělesy, skříň převodovky je tak uvažována jako dokonale tuhá a z toho důvodu nebyla modelována.



Obr. 11 Model dvoustupňové převodovky

Na 3D modelu převodovky jsou použita ozubená kola s přímými zuby, pro zjednodušení tvorby modelu. V matematickém modelu jsou ale využita kola s šikmým ozubením, která navíc vytváří axiální sílu. Parametry ozubených kol převodovky jsou zobrazeny v Tab. 3.

Tab. 3 Parametry ozubených kol

Parametr	1. převodový stupeň	2. převodový stupeň
Modul ozubení [mm]	2	2
Počet zubů pastorku [-]	20	26
Počet zubů kola [-]	39	33
Převodový poměr [-]	1,95	1,269
Úhel záběru [°]	20	
Osová vzdálenost [mm]	59	

### 3.2 TUHOSTI JEDNOTLIVÝCH ČÁSTÍ MODELU

Tuhosti součástí modelu jsou jedny s nejdůležitějšími parametry, které mají vliv na dynamiku převodovky. Jak bylo zmíněno v kapitole 1.1.2, tuhost záběru ozubení tvoří nejvýraznější dynamické buzení převodovky. Určením jednotlivých tuhostí součástí modelu se bude věnovat následující kapitola.

#### 3.2.1 URČENÍ TUHOSTI OZUBENÍ

Jako bylo zmíněno v kapitole 1.1.2 tuhost ozubení se mění v závislosti na natočení kol a na působícím momentu. Konkrétní hodnoty tuhosti ozubení mohou být určeny s využitím MKP analýzy, nebo mohou být určeny experimentálně. Konkrétní hodnoty tuhostí získaných za pomoci MKP analýzy, byla poskytnuta vedoucím diplomové práce. Data tuhosti jsou určeny pro pastorek s průměrem roztečné kružnice 124 mm a zatížením od 600 do 2400 Nm. Tyto ozubená kola mají větší roztečný průměr a jsou dimenzovaná na vyšší zatížení, než jsou ozubená kola v použité ve výpočetním modelu, proto je vypočítána redukovaná tuhost ozubení  $k_{zr}$  pomocí následujícího vzorce.

$$k_{zr} = k_z \cdot c_M \cdot c_d \quad (37)$$

Kde  $c_M$  je redukce na nominální moment.

$$c_M = \frac{M_{n2}}{M_{n1}} \quad (38)$$

$$c_M = \frac{250}{2400} = 0,104$$

Kde  $M_{n1}$  je nominální moment měřené převodovky a  $M_{n2}$  je nominální moment převodovky na kterou provádíme redukci.

$c_d$  je redukce na roztečný průměr pastorku.

$$c_d = \frac{d_2}{d_1} \quad (39)$$

$$c_d = \frac{52}{124} = 0,419$$



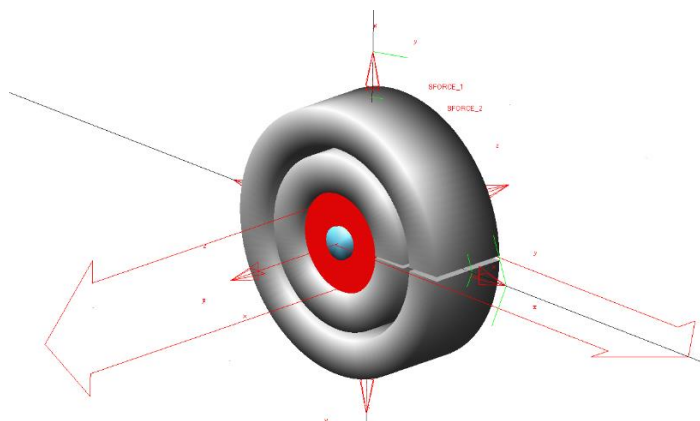
Kde  $d_1$  je roztečný průměr pastorku, pro který byla provedena MKP analýza a  $d_2$  je roztečný průměr pastorku, na který provádíme redukci.

Tato metoda úpravy tuhostí ozubení není příliš přesná, pro získání přesnějších dat by musela být tuhost ozubení získána jiným způsobem, například pomocí již zmíněné MKP analýzy.

### 3.2.2 TUHOST ULOŽENÍ HŘÍDELŮ

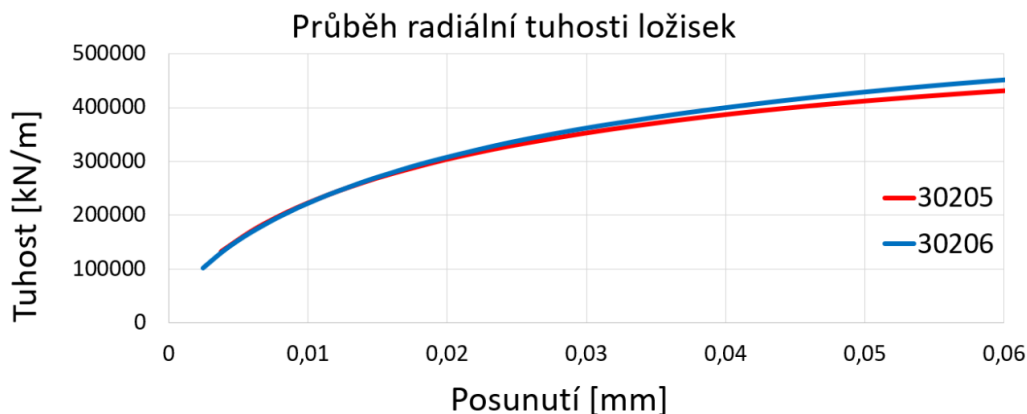
Uložení hřídelí v modelu je realizováno pomocí dvojice kuželíkových ložisek 30205 na vstupní hřídeli a dvojice kuželíkových ložisek 30206 na výstupní hřídeli. Tuhost těchto ložisek má velký vliv na dynamiku převodovky, protože s jejich deformací se mění osová vzdálenost ozubených kol, která ovlivňuje záběr ozubení. Tuhost těchto ložisek je nelineární a pro zjištění konkrétních hodnot, byl využit multi-body software ADAMS, který obsahuje rozsáhlou knihovnu ložisek, včetně jejich tuhosti.

V tomto programu byl vytvořen jednoduchý model, který obsahoval ložisko a součást na kterou působilo proměnné zatížení viz Obr. 12. V této simulaci bylo měřeno posunutí součásti v závislosti na působícím zatížení, jak v axiálním, tak v radiálním směru.

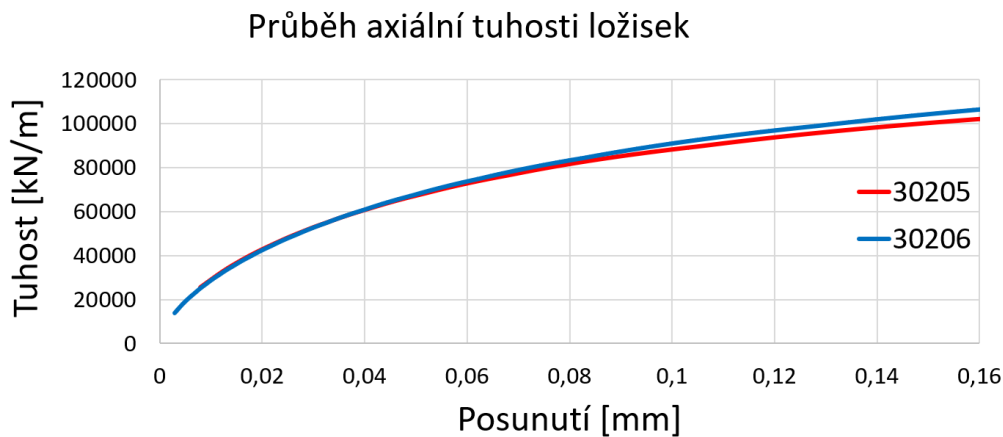


Obr. 12 Model pro měření tuhost ložisek v programu ADAMS

Z hodnot posunutí v závislosti na působící síle byla zjištěna tuhost, jejíž hodnoty byly importovány do výpočtového modelu v programu MATLAB. Tyto hodnoty radiální tuhosti jsou zobrazeny na Obr. 13 a hodnoty axiální tuhosti jsou na Obr. 14.



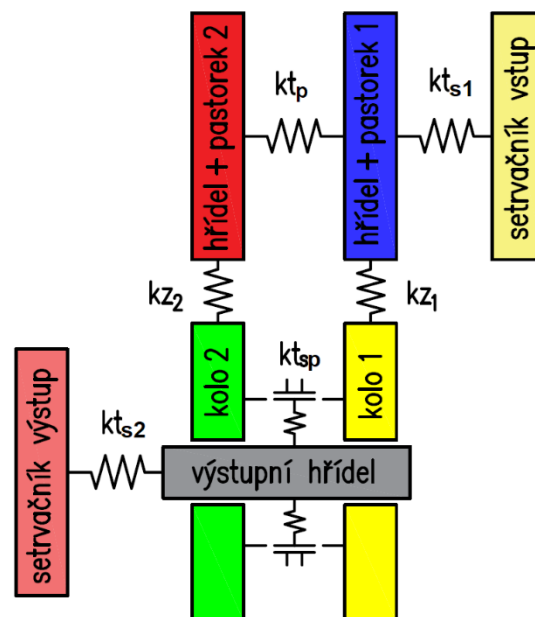
Obr. 13 Tuhost kuželíkových ložisek v radiálním směru



Obr. 14 Tuhost kuželíkových ložisek v axiálním směru

### 3.2.3 TORZNÍ TUHOSTI HŘÍDELŮ

Model převodovky, byl diskretizován na 7 tuhých těles viz Obr. 15. Vstupní hřídel byla rozdělena na tři části (setrvačnick, pastorek 1 a pastorek 2), dále tuhá tělesa tvoří obě ozubená kola a výstupní hřídel byla rozdělena na hřídel a setrvačnick. Hodnoty tuhosti hřídelů lze u jednoduchých profilů vypočítat analyticky, u složitějších průřezu jako jsou například drážkové hřídele je vhodné tuhost určit za pomoci MKP.



Obr. 15 Diskretizace modelu převodovky

Hodnoty tuhosti hřídelů byly vypočítány analyticky pomocí následujícího vzorce.

$$k_t = \frac{G \cdot \pi \cdot R^4}{2l} \quad (40)$$

Kde  $G$  je modul pružnosti v krutu,  $R$  je poloměr hřídele a  $l$  je délka hřídele. Jelikož hřídele nemají po celou délku konstantní průměr, je výsledná tuhost spočítána jako sériové spojení pružin, které je dáno vztahem.

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n} \quad (41)$$

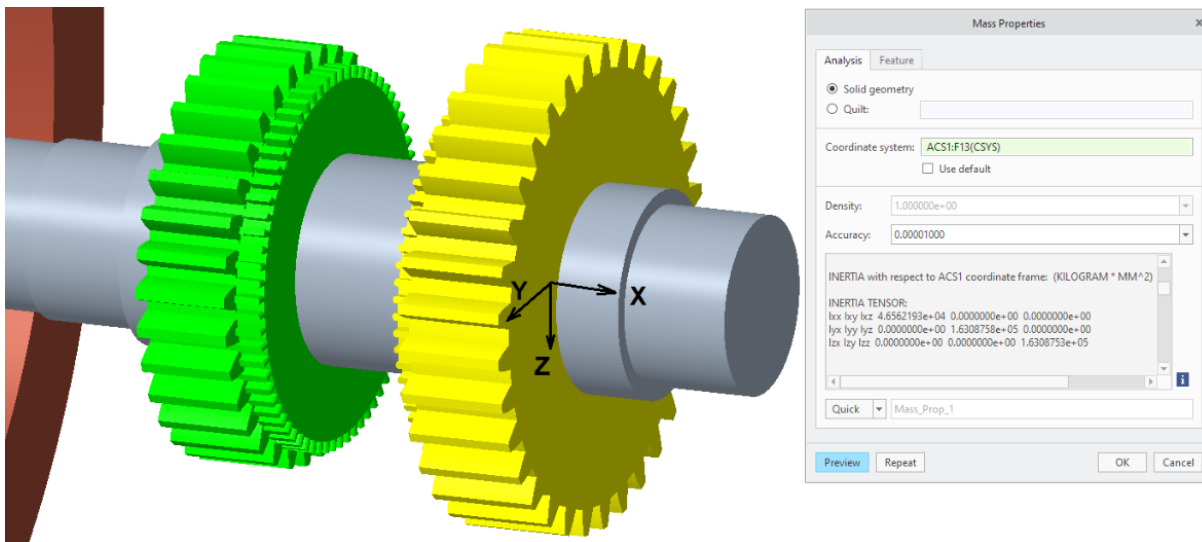
Kde  $k_1$  a  $k_2$  značí torzní tuhosti jednotlivých částí hřídelů. Konkrétní torzní tuhosti modelu převodovky jsou uvedeny v Tab. 4.

Tab. 4 Hodnoty tuhosti hřídelů [Nm·rad<sup>-1</sup>]

$k_{tp}$	$k_{ts1}$	$k_{ts2}$
247 740	29 314	56 388

### 3.3 MOMENTY SETRVAČNOSTI A HMOTNOSTI

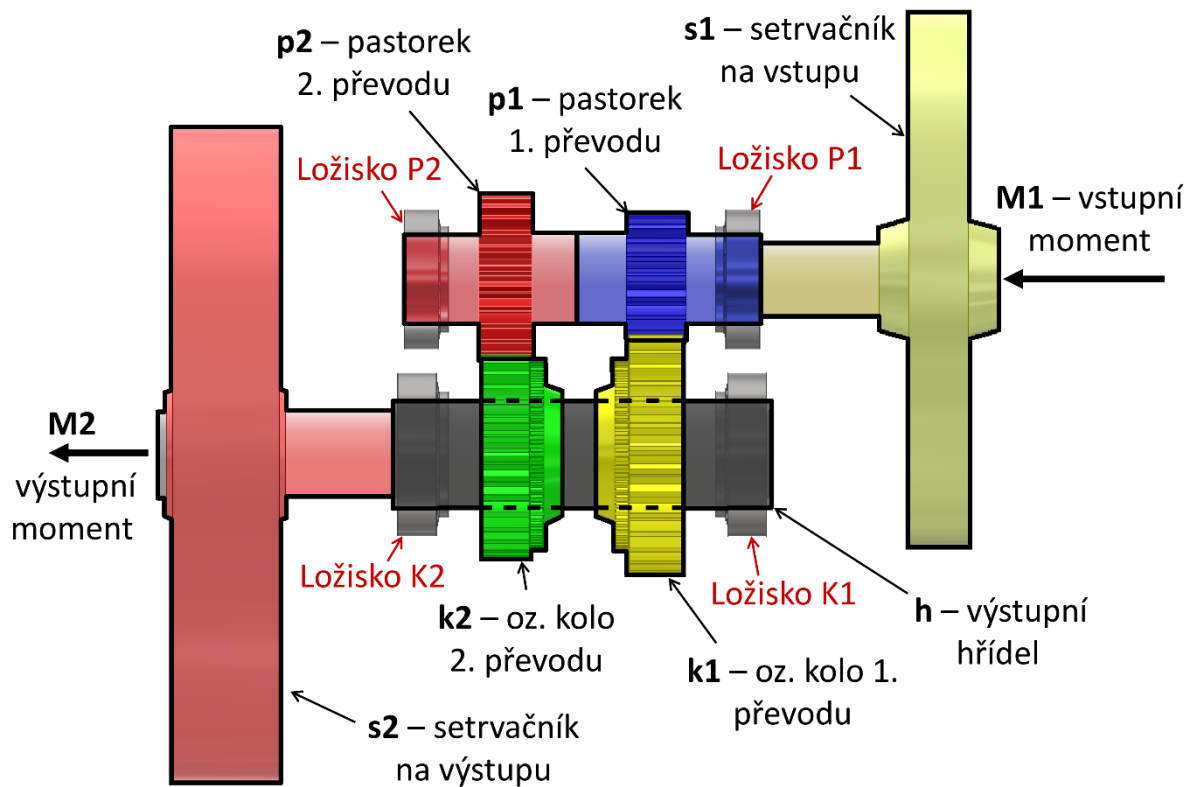
Momenty setrvačnosti mohou být v případě základních těles určeny pomocí analytických výpočtů, protože ale v modelu převodovky má většina součástí komplexnější tvar byly hodnoty určeny z pomoci CAD softwaru Creo Parametric.



Obr. 16 Určení momentu setrvačnosti

Ve výpočetním modelu je klopení hřídelů vztaženo ke středu kola a středu pastorku prvního převodového stupně. Z toho důvodu byl v těchto místech v programu Creo vytvořen souřadný systém, ke kterému byla měřena hodnota momentu setrvačnosti v ose Z a Y, viz Obr. 16. Moment setrvačnosti v ose X byl určen pro jednotlivě pro každé těleso zvlášť.

Na Obr. 17, je znázorněno rozdělení převodovky na jednotlivé součásti a jejich pojmenování. V Tab. 5 jsou poté hodnoty momentů setrvačnosti a hmotností těchto součástí. Hodnoty momentu setrvačnosti klopení hřídelů uvažují hřídele jako jeden celek včetně ozubených kol a setrvačnicků. V modelu totiž není uvažována ohybová tuhost hřídelů.



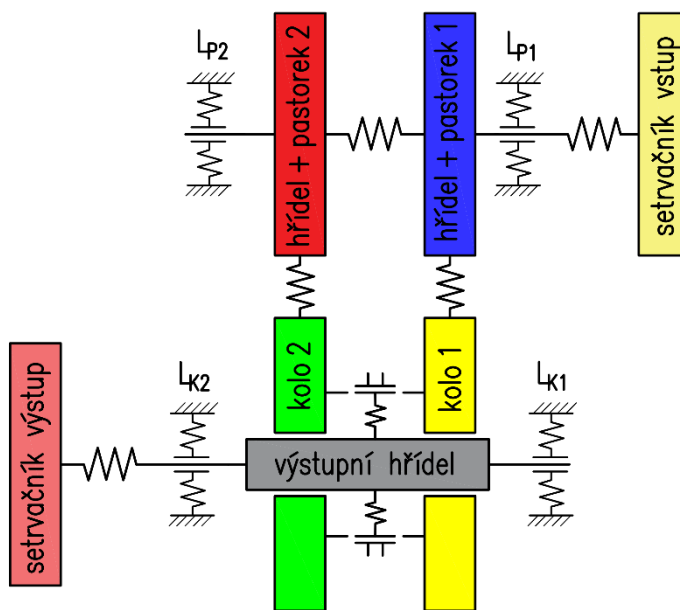
Obr. 17 Schéma rozdělení a pojmenování součástí převodovky

Tab. 5 Hodnoty hmotností a momentů setrvačnosti součástí převodovky

Vstupní hřídel		Výstupní hřídel	
<b>Momenty setrvačnosti [kg·mm<sup>2</sup>]</b>			
Klopení (s1+p1+p2)	$36,685 \cdot 10^3$	Klopení (h+k1+k2+s2)	$163,088 \cdot 10^3$
Setrvačnick – s1	$13,37 \cdot 10^3$	Setrvačnick – s2	$45,61 \cdot 10^3$
Hřídel a pastorek – p1	71,2	Ozubené kolo – k1	522,53
Hřídel a pastorek – p2	129,05	Ozubené kolo – k2	264,56
		Výstupní hřídel – h	164,45
<b>Hmotnosti [kg]</b>			
Hřídel + pastorky (p1+p2)	1,18	Hřídel + kola (h+k1+k2)	2,31
Setrvačnick – s1	2,93	Setrvačnick – s2	5,94

## 4 SESTAVENÍ VÝPOČTOVÉHO MODELU

Model vychází z modelu se 12 stupni volnosti viz kapitola 1.2.4. Jelikož se jedná a dvoustupňovou převodovku přibýly v modelu tři rotační stupně volnosti, a to konkrétně další ozubené kolo s pastorkem a výstupní hřídel. Dále byl model rozšířen o axiální posuvy obou hřídelů. Celkem má tak model 17 stupňů volnosti, viz Obr. 18 na kterém je zobrazeno schéma modelu převodovky.



Obr. 18 Schéma model převodovky včetně tuhosti ložisek

### 4.1 TVORBA MATIC POPISUJÍCÍ DYNAMICKÝ MODEL

Pro dosazení do základní pohybové rovnice (42) je nutné jednotlivé pohybové rovnice přepsat do maticového tvaru. Přímé řešení pohybových rovnic by bylo možné, ale je časově náročné a Newmarkova integrační metoda tento přístup ani neumožňuje.

$$M\ddot{x} + B\dot{x} + Kx = F(t) \quad (42)$$

Jelikož matice tuhosti, hmotnosti a tlumení jsou pouze pohybové rovnice zapsané v maticovém tvaru [14], byly tyto matice vytvořeny v programu Matlab, symbolickým řešením soustavy pohybových rovnic. V následující kapitole jsou rozebrány matice tuhosti a tlumení, protože má model 17 stupňů volnosti mají výsledné matice rozměr 17x17, proto jsou níže rozepsány matice dynamického modelu bez posuvných stupňů volnosti (deformace ložisek).

Jak bylo zmíněno v kapitole 1.1.2 tuhost záběru ozubení a tuhosti ložisek nejsou konstantní, jedná se tak o nelineární úlohu. Aby nemusela být v každém kroku výpočtu definována nová matice tuhostí, je vytvořeno několik distribučních matic. Vytvořením těchto matic je dosaženo kratšího výpočetního času. Základní pohybová rovnice s využitím distribučních matic bude mít následující tvar.

$$M\ddot{x} + (B + R_{z1}b_{z1} + R_{z2}b_{z2} + B_s)\dot{x} + (K + R_{z1}k_{z1} + R_{z2}k_{z2} + K_s)x = F(t) \quad (43)$$

kde  $\mathbf{M}$  je diagonální matice hmotností, která obsahuje pouze momenty setrvačnosti

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} Jp_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Jp_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Jk_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Jk_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Jh & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Js_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Js_2 \end{bmatrix} \quad (44)$$

$\mathbf{B}$  je matice tlumení která obsahuje pouze vnitřní tlumení hřídelů

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} bt_m + bt_p & -bt_p & 0 & 0 & 0 & -bt_{s_1} & 0 \\ -bt_p & +bt_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & bt_{s_2} & 0 & -bt_{s_2} \\ -bt_{s_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & bt_{s_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -bt_{s_2} & 0 & bt_{s_2} \end{bmatrix} \quad (45)$$

$\mathbf{R}_{z1}$   $\mathbf{R}_{z2}$  jsou distribuční matice záběru ozubených převodů mají stejný tvar pro tuhost i tlumení. Prvky, které nejsou v maticích zobrazeny mají hodnotu 0.

$$\mathbf{R}_{z1} = \begin{bmatrix} rp_1^2 & 0 & -rk_1^2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & \\ -rk_1^2 & 0 & rk_1^2 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (46)$$

$$\mathbf{R}_{z2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & rp_2^2 & 0 & -rk_2^2 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & rk_2^2 & 0 & rk_2^2 & & \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (47)$$

$\mathbf{B}_s$  a  $\mathbf{K}_s$  jsou matice tuhosti a tlumení řadicí spojky. Tyto matice mají tři tvary, prvním z nich nulová matice, která je do výpočtu dosazena, pokud není zařazen žádný převodový stupeň, takzvaný neutrální. Dále mají obě matice dva tvary, které určují, jaký je zařazen převodový stupeň, níže je zobrazena matice tuhosti pro první i druhý převodový stupeň. Matice tlumení jsou obdobné pouze jsou hodnoty tuhosti nahrazeny hodnotami tlumení.

$$\mathbf{K}_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & kt_{sp} & 0 & -kt_{sp} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & -kt_{sp} & 0 & kt_{sp} & & \\ \vdots & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (48)$$

$$K_s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & kt_{sp} & -kt_{sp} & & \\ 0 & 0 & 0 & -kt_{sp} & kt_{sp} & & \\ \cdot & & & & & \cdot & \\ 0 & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (49)$$

$x$  je vektor polohy, u modelu pouze s rotačními stupni volnost se jedná o vektor natočení jednotlivých součástí a  $\dot{x}$  a  $\ddot{x}$  jsou první a druhou časovou derivací tohoto vektoru. To znamená že se jedná o úhlovou rychlost a úhlové zrychlení.

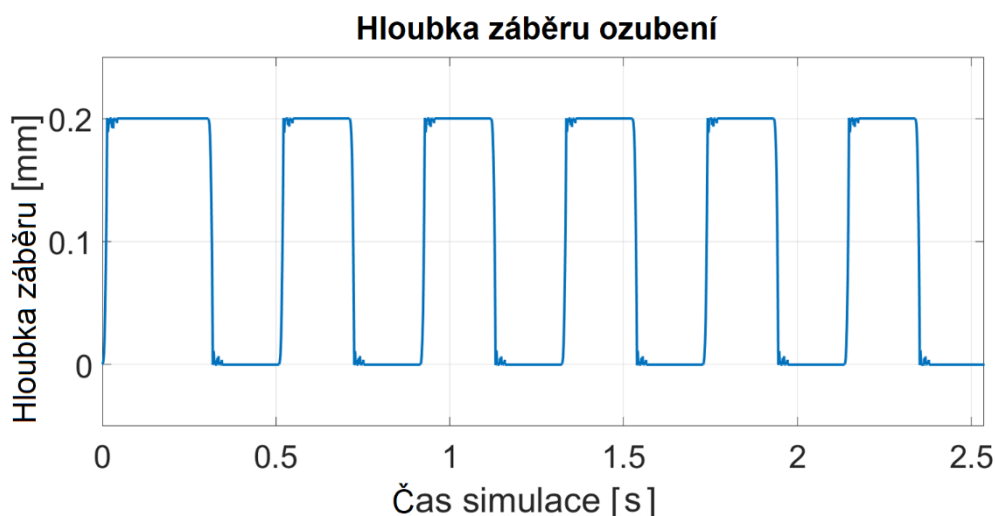
$$x^{-1} = [\varphi_{p1} \quad \varphi_{p2} \quad \varphi_{k1} \quad \varphi_{k1} \quad \varphi_h \quad \varphi_{s1} \quad \varphi_{s2}]$$

Takto vytvořené matice lze dosadit do vzorce (43) a tuto diferenciální rovnice již řešit v programu Matlab pomocí Newmarkovy metody popsané v kapitole 2.1.

## 4.2 TVORBA VLIVU BOČNÍ ZUBOVÉ VŮLE

Jak bylo zmíněno v kapitole 1.1.3, boční zubová vůle má významný vliv na projev zubového převodu. Její vznik nastává při nízkém zatížení a nerovnoměrném chodu. Jelikož model byl sestaven na dvoustupňové převodovce, tak provoz s nízkým zatížením, se vyskytuje takřka po celou dobu provozu na nezařazeném převodovém stupni, s výjimkou velkých zrychlení otáčení ozubených kol, například při změně převodových stupňů. Vliv boční zubové vůle je tak nezanedbatelný na provoz převodovky.

Rozpoznání, že při provozu došlo k oddělení kontaktů ozubení je nastaveno tak, že pokud hloubka záběru ozubení nabývá kladných hodnot došlo k oddělení kontaktu. V tento moment je tuhost a tlumení konkrétního ozubení nastaveno na 0. Pokud hodnota chyby převodu dále narůstá až nad horní mez, která je definována velikostí boční zubové vůle, dojde opět ke kontaktu ozubení a tuhost s tlumením se opět nastaví na konkrétní hodnoty ozubení. Tento stav je zobrazen na Obr. 19, kde je zřetelně vidět velikost boční zubové vůle 0,2 mm.



Obr. 19 Graf hloubky záběru ozubení při nerovnoměrném zatěžování

Při kontaktu ozubení za zubovou vůlí, musí také dojít k definování proměnné  $e_t$  na hodnotu boční zubové vůle. Z rovnice (3) totiž vyplývá, že síla v záběru ozubení je definována jako rozdíl natočení ozubených kol vynásobený o hodnotu tuhosti. Pokud by tato hodnota nebyla nastavena na hodnotu boční zubové vůle, síla v ozubení by při kontaktu nabývala vysokých hodnot, protože rozdíl natočení ozubených kol je v tu chvíli zvětšen o boční zubovou vůli.

Zubová vůle  $e_t$  je do modelu dosazena jako stejně, jako by se jednalo o další stupeň volnosti s tím rozdílem, že nemá žádnou pohybovou rovnici, a tak jediné co tento parametr ovlivňuje je uživatelský vstup. Ozubená soukolí se v modelu nachází dvě, a proto jsou i definovány dvě zubové vůle, matice vstupující do výpočtu, tak mají o dva rozměry více než je stupňů volnosti. Matice hmotnosti, tlumení i tuhosti budou mít tyto dva řádky a sloupce obsazené pouze nulami, jediná změna nastane u distribučních matic záběru ozubení ve sloupci zubové vůle, přičemž distribuční matice  $\mathbf{R}_{z1}$  včetně proměnné  $e_t$  je zobrazena v rovnici (50).

$$\mathbf{R}_{z1} = \begin{bmatrix} rp_1^2 & 0 & -rk_1^2 & \cdots & -rp_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ -rk_1^2 & 0 & rk_1^2 & & -rk_1 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (50)$$

### 4.3 ZMĚNA PŘEVODOVÝCH STUPŇŮ

Dynamický model převodovky je sestaven pro dvoustupňovou převodovku, proto musí být v simulaci umožněno změnit převodový stupeň. V dnešní době se ustupuje od složitých mechanismů a nahrazují se jednoduššími s mechatronickým řízením. V případě změny převodových stupňů toho může být docíleno, nahrazením jistěné synchronizace synchronizací prostou, jinak nazývanou synchronizace s pružně omezenou silou, anebo v případě využití elektromotoru jako pohonné jednotky, může být synchronizace úplně odstraněna a vyrovnání otáček potřebné pro změnu převodu, je docíleno pomocí přesného řízení elektromotoru.

V této práci byla do modelu využita prostá synchronizace, u které je pro synchronizaci využito třecí kužel, jehož maximální přitlačná síla je omezena jistícím členem, nejčastěji je to kulička s pružinkou. Nevýhodou této synchronizace je, že není zajištěno vyrovnání otáček a při předčasném překonání jistící síly, tak může dojít k pokusu o zařazení rychlosti a vzniku velkých rázů.

#### 4.3.1 POPIS FUNKCE ZMĚNY PŘEVODOVÝCH STUPŇŮ

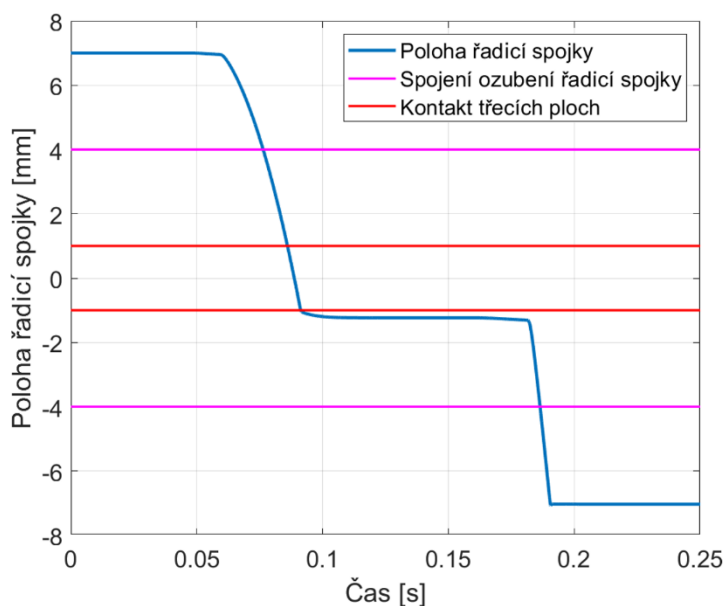
Pro správnou funkci synchronizace byl do modelu přidán další stupeň volnosti, a to konkrétně posun řadicí objímky, který se pohybuje v axiálním směru. Na tuto řadicí objímku je přiváděna řadicí síla a v případě kontaktu třecích ploch je vytvářen synchronizační moment, dle následujícího vzorce

$$M_s = \frac{F_a}{\sin(\gamma_t)} \cdot \mu \cdot r_k \cdot n \quad (51)$$

kde  $F_a$  je řadicí síla, která působí na řadicí objímku v axiálním směru,  $\mu$  je součinitel tření,  $\gamma$  je úhel kuželové třecí plochy,  $r_k$  je střední poloměr kuželové plochy a  $n$  je počet třecích dvojic, jelikož u prosté synchronizace se nachází pouze jedna třecí dvojice, může být tento člen z rovnice vynechán.

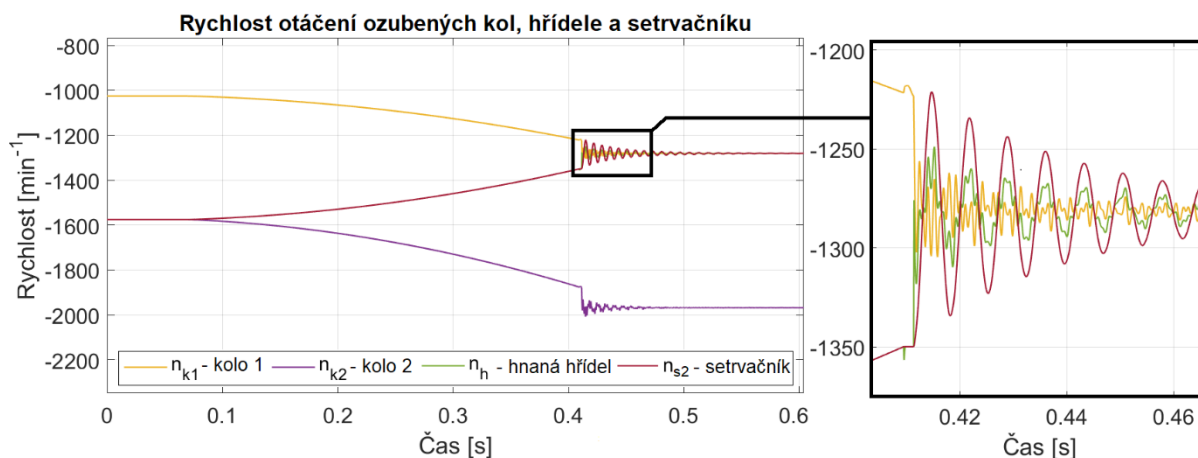


Řazení probíhá tím způsobem, že na řadicí spojku je přiváděna síla a tato síla vyvolá změnu polohy řadicí objímky. Průběh tohoto pohybu řadicí spojky při řazení z prvního rychlostního stupně na druhý je zobrazen na Obr. 20.



Obr. 20 Průběh pohybu řadicí objímky při řazení z 1. na 2. převodový stupeň

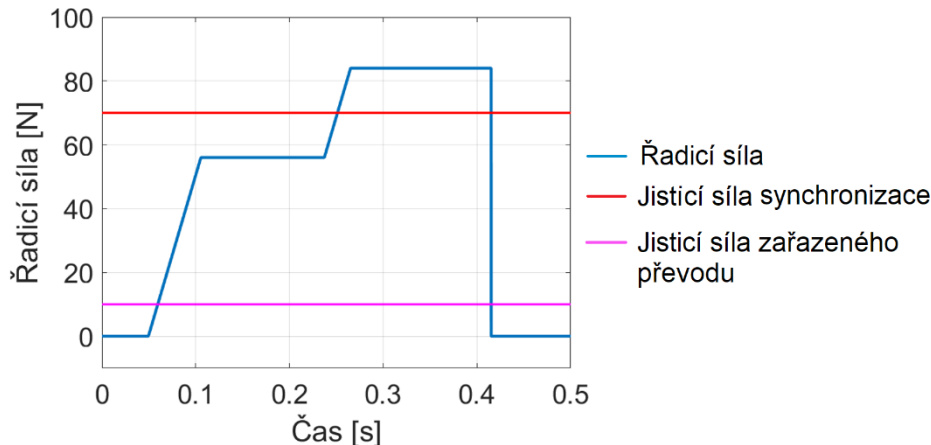
Zařazený rychlostní stupeň udržuje jisticí síla, po překonání této síly dojde k pohybu řadicí objímky, jakmile poloha řadicí objímky klesne pod hodnotu spojení ozubení řadicí spojky dojde k vyřazení převodu, to znamená že matice řadicí spojky  $K_s$  a  $B_s$  jsou vynulovány. Pokud řadicí síla působí dále a poloha řadicí spojky se dostane pod hodnotu kontaktu ozubení dojde k vytvoření třecího momentu. Tento třecí moment působí, dokud nedojde k synchronizaci otáček, k ukončení působení řadicí síly, nebo k překonání jisticí síly. Právě překonání jisticí síly je nutné, aby došlo k zařazení dalšího převodového stupně. Po překonání jisticí síly se začne řadicí objímka posouvat dále a jakmile dosáhne hodnoty spojení ozubení spojky dojde k zařazení převodu, nezávisle na tom, jestli došlo k synchronizaci. Pokud nedošlo k synchronizaci, ale přesto byla rychlost zařazena, se projeví ve výsledcích velkým vybuzením dynamického systému, viz Obr. 21.



Obr. 21 Průběh rychlostí ozubených kol a výstupní hřídele při předčasném zařazení

### 4.3.2 NASTAVENÍ ŘADICÍ SÍLY

Jak bylo zmíněno v předchozí kapitole, model využívá prostou synchronizaci, tudíž není zaručena vyrovnání otáček před zařazením převodového stupně. Zamezení zařazení před dokončenou synchronizací, může být docíleno určením vhodného průběhu a velikosti řadící síly. Pro správné určení tohoto průběhu síly, musí být převodovka vybavena snímači otáček na vstupní a výstupní hřídeli, aby bylo určeno, zda došlo k synchronizaci.



Obr. 22 Průběh řadící síly

Průběh síly je zobrazen na Obr. 22. Řadící síla je nastavena tak, že při požadavku na řazení začne lineárně růst, po překročení zajišťovací síly převodu se odjistí řadící objímka a začne se pohybovat. Síla dále roste až do doby, než dosáhne hodnoty pro synchronizaci. Tato hodnota je volena tak, aby byla nižší o bezpečnou mez, než je zajišťovací síla synchronizace. Poté co je za pomoci snímačů otáček na vstupní a výstupní hřídeli zjištěno, že došlo k synchronizaci, je řadící síla dále zvyšována nad velikost zajišťovací síly synchronizace, a poté co je řadící objímka zajištěna na dalším převodovém stupni, dojde k vypnutí řadící síly.

Zvýše uvedeného textu je zřejmé, že tento průběh síly, nemůže být určen pro manuálně ovládané převodovky. To omezuje využití pouze na automatické převodovky, kde se o řazení postará vhodný mechatronický systém.

## 4.4 MODÁLNÍ ANALÝZA DYNAMICKÉHO MODELU

Modální analýza slouží k nalezení vlastních frekvencí modelu převodovky. Pokud jsou tyto vlastní frekvence buzeny vnější silou, která má stejnou frekvenci nebo její násobky, může kmitání jednotlivých součástí nabývat vysokých hodnot a výrazně ovlivňovat chování převodovky.

Pokud jsou matice hmotnosti  $M$  a matice tuhosti  $K$  známy, dají se vlastní frekvence vypočítat s využitím následujících vzorců. Jelikož se v modelu nachází také nelineární tuhosti, kterými jsou tuhosti ložisek a ozubení, byla za tyto tuhosti dosazena jejich střední hodnota.

$$A = M^{-1}K \quad (52)$$

$A$  je modální matice. Vlastní vektor této matice  $u$ , který se v softwaru Matlab vypočítá pomocí funkce „*eig*“, lze dosadit do následující rovnice, která slouží pro výpočet vlastní frekvence systému

$$f = \frac{\sqrt{u}}{2\pi} \quad (53)$$

Prvních 12 vlastních frekvencí jsou zobrazeny v Tab. 7. Jak bylo zmíněno výše některé tuhosti nejsou lineární, proto mohou být mírně zkresleny i vlastní frekvence systému.

Tab. 6 Hodnoty vlastních frekvencí

Vlastní frekvence modelu převodovky [Hz]					
$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_6$
1457	4645	5903	6927	7312	8364
$f_7$	$f_8$	$f_9$	$f_{10}$	$f_{11}$	$f_{12}$
8826	9255	9520	11136	13036	13059

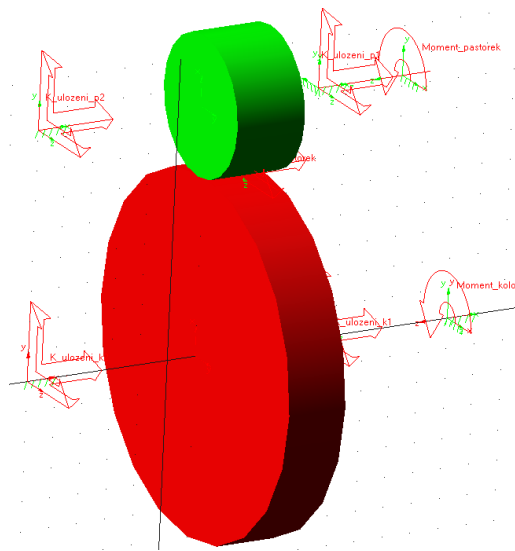
Z těchto hodnot je patrné, že zubová frekvence a zejména její harmonické složky se mohou za provozu dostat do průniku s vlastními frekvencemi některých součástí, zejména těmi s nižšími hodnotami vlastních frekvencí. Tyto rezonanční stavy se ve výsledcích projeví zvýšením amplitud rychlostí a zrychlení součástí.

## 5 VERIFIKACE VÝPOČTOVÉHO MODELU

Tato kapitola se zabývá porovnáním výsledků dvou výpočtových modelů, kdy první byl sestaven v softwaru Matlab a druhý pomocí softwaru MSC ADAMS/View. Kontrola spočívá v porovnání výsledků simulací, kdy v obou modelech byla spuštěna stejná simulace a byl sledován rozdíl výsledků. Pro lepší srovnání, nebyl tento porovnávací výpočtový model sestavován jako komplexní se 17 stupni volnosti, ale byl vytvořen zjednodušený model záběru ozubení.

### 5.1 TVORBA MODELU V MSC ADAMS/VIEW

V programu ADAMS byl vytvořen jednoduchý model záběru ozubení, který se skládá pouze ze dvou kotoučů, které reprezentují ozubená kola viz Obr. 23. Kola jsou uložena pomocí Force Vector (síly o třech složkách), tyto síly jsou reprezentovány tuhostí a tlumením.



Obr. 23 Model záběru ozubení v ADAMS/View

#### 5.1.1 KONTAKT OZUBENÍ

Pro simulaci záběru ozubení je mezi kotouči nastavena třísložková síla. Určení velikosti této síly je kritické pro správnou funkci modelu. Velikost tečné síly je počítána pomocí následující rovnice.

$$F_t = k(t) [y_1 - y_2 - r_1\varphi_1 + r_2\varphi_2] + b [\dot{y}_1 - \dot{y}_2 - r_1\dot{\varphi}_1 + r_2\dot{\varphi}_2] \quad (54)$$

Z této rovnice vyplývá že pro správné určení velikosti je nutné znát natočení a výchylky ozubených kol. Ty jsou zjištěny pomocí funkce Function Measure. Pro určení tuhosti ozubení byl nahrány do modelu data tuhosti v závislosti na natočení pastorku. Protože hodnoty tuhosti jsou definovány pro natočení pastorku o jeden zub, je nutné převést absolutní natočení pastorku na natočení, které se vztahuje pouze vůči jednomu zubu. To bylo provedeno vydělením natočení pastorku periodou opakování zubů za pomoci funkce MOD, tato funkce vrací zbytek dělení. Tento zbytek dělení je společně s daty tuhostí ozubení dosazen do funkce Spline, která interpoluje data na konkrétní hodnotu tuhosti ozubení.

### 5.1.2 PARAMETRY MODELU

Tento model byl vytvořen na základě parametrů jednostupňové vlakové převodovky, ovšem se spoustou zjednodušujících předpokladů. Tuhosti ložisek byly nastaveny jako lineární a ve všech osách mají stejnou hodnotu tuhosti. Tuhost ozubení v tomto modelu nebyla nijak korigována, to znamená že jsou dosazeny hodnoty tuhosti, které byly poskytnuty vedoucím práce.

Tab. 7 Parametry zjednodušeného modelu převodovky

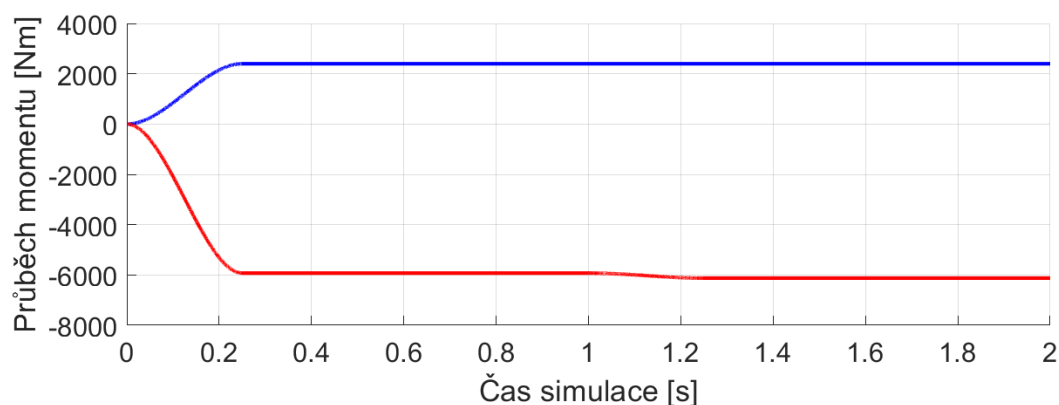
Parametr	Pastorek	Kolo
Průměr roztečné kružnice [mm]	235	600
Počet zubů [-]	38	97
Šířka ozubení [mm]	120	100
Hmotnost [kg]	25,59	528
Moment setrvačnosti [ $\text{kg}\cdot\text{m}^2$ ]	0,1330	5,6499
Tuhost ložisek [ $\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$ ]	$10^7$	

### 5.1.3 SESTAVENÍ VERIFIKAČNÍHO MODELU V SOFTWAREM MATLAB

Model byl sestaven dle kapitoly 4, která se zabývala vytvořením matic popisující dynamický systém. Všechny vstupní parametry byly nastaveny stejně jako v modelu sestaveném v softwaru ADAMS, aby byly výstupy z modelů porovnatelné. Pro řešení pohybových rovnic byla využita Newmarkova metoda.

## 5.2 POROVNÁNÍ VÝSLEDKŮ MODELŮ ADAMS A MATLAB

V obou modelech bylo simulováno roztáčení zatížené převodovky, kdy průběh zatěžovacích momentů je zobrazen na Obr. 24. Z tohoto obrázku je patrné že moment na vstupní hřídeli je od 0,25 s konstantní a nabývá hodnoty 2400 Nm. Moment na výstupní hřídeli dosáhne konečné hodnoty až v čase 1,25 s, do tohoto času rychlost hřídelů roste.

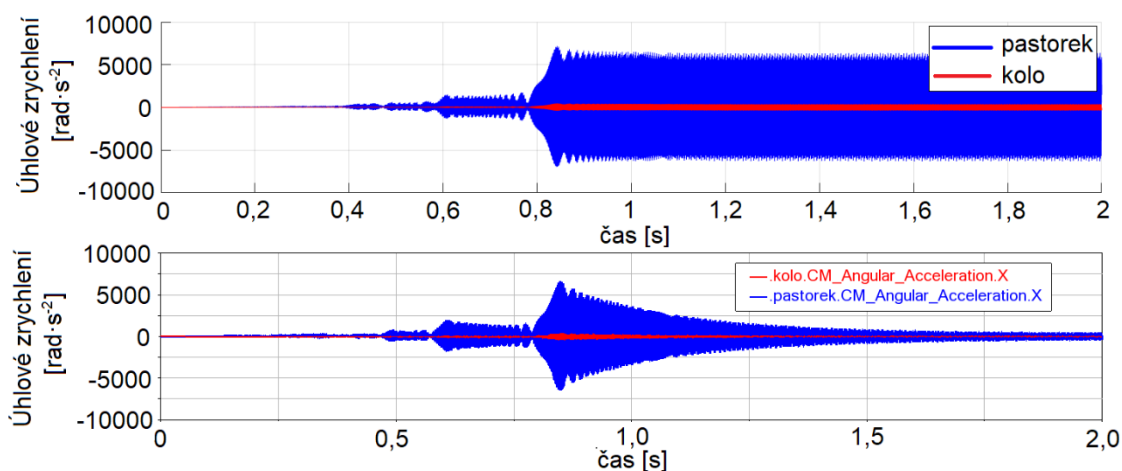


Obr. 24 Průběh zatěžovacích momentů v simulaci pro porovnání výsledků ADAMS/MATLAB

### 5.2.1 SIMULACE BEZ ZAHRNUTÍ TLUMENÍ

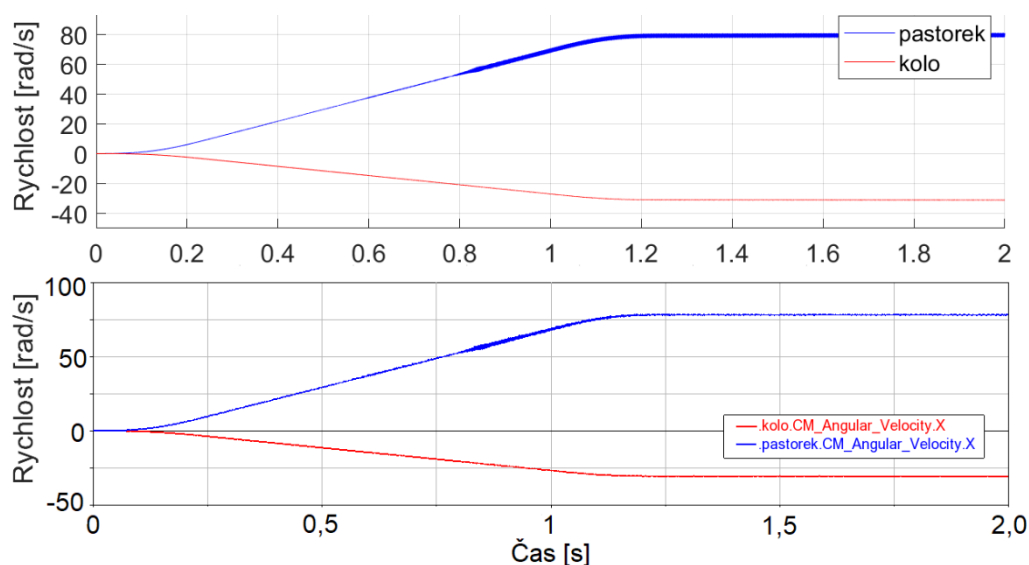
V prvním testu nebylo v simulaci zahrnuto tlumení, z důvodu že u netlumených vibrací se více projeví chyby matematických modelů například, tím že dříve dojde k numerické nestabilitě a zastavení výpočtu.

Výsledné hodnoty úhlového zrychlení jsou znázorněny na Obr. 25. Při tomto výpočtu byl počet kroků simulace nastaven v Malabu na 40 000, zatímco v ADAMS View byl počet kroků simulace 5 000 000. Tak velký počet kroků při simulaci v programu ADAMS byl zvolen s ohledem na to, že při simulaci dochází k numerickému tlumení. Toto tlumení se zvětšuje s tím, jak se zvětšuje délka časového kroku, neboli klesá počet kroků simulace. Maximální amplituda zrychlení v Matlab simulaci je  $7170 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-2}$  v čase 0,842 s a v ADAMS View je maximální amplituda zrychlení 6657 v čase 0,849 s.



Obr. 25 Porovnání hodnot úhlového zrychlení MATLAB (nahore) ADAMS View (dole)

Na Obr. 26 jsou zobrazeny úhlové rychlosti ozubených kol v jednotlivých simulacích. Již z tohoto obrázku je patrné, že výsledné rychlosti jsou velice podobné u obou simulací, ale amplitudy těchto rychlostí se výrazně liší.



Obr. 26 Porovnání hodnot úhlových rychlostí MATLAB (nahore) ADAMS View (dole)

Bližší porovnání těchto dvou simulací je znázorněno v Tab. 8. Z této tabulky je patrné, že hodnoty rychlosti se v těchto dvou simulacích liší o hodnoty kolem 1 %, ale amplitudy se liší mnohem více. To je způsobeno tlumením, které se objevuje simulaci v softwaru ADAMS, jak bylo zmíněno výše.

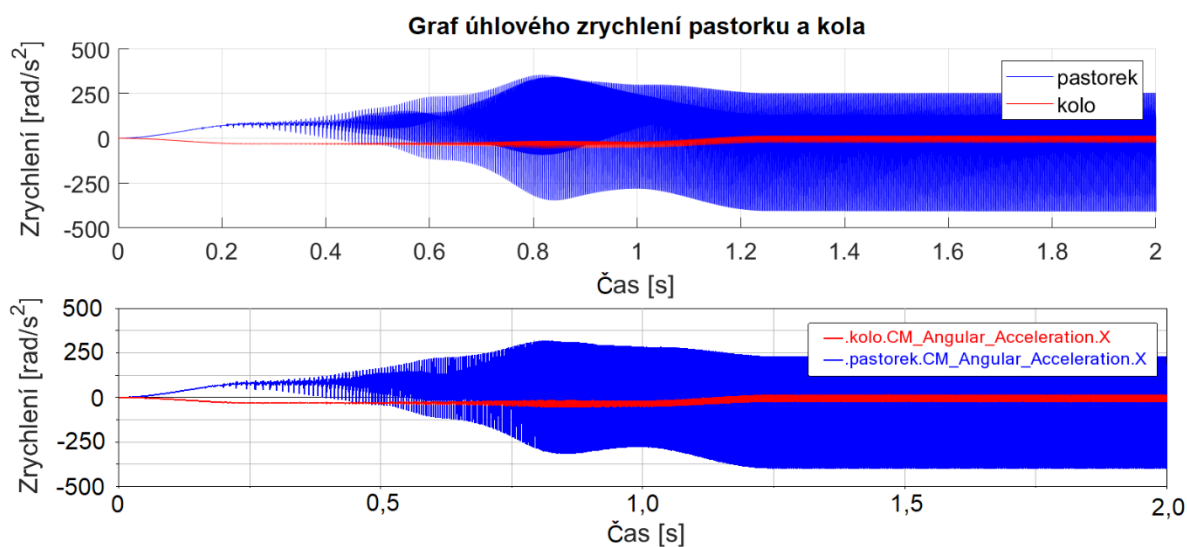
Tab. 8 Porovnání hodnot rychlostí pastorku

Čas simulace [s]	Průměrná rychlost [ $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ ]			Amplituda rychlosti [ $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ ]		
	ADAMS	Matlab	Rozdíl [%]	ADAMS	Matlab	Rozdíl [%]
0,5	29,279	29,548	0,91	0,178	0,127	- 40,2
1	68,435	68,987	0,80	0,672	1,454	53,7
1,5	78,245	79,088	1,07	0,198	1,480	86,6
2	78,228	79,321	1,38	0,088	1,350	93,5

### 5.2.2 SIMULACE S TLUMENÍM

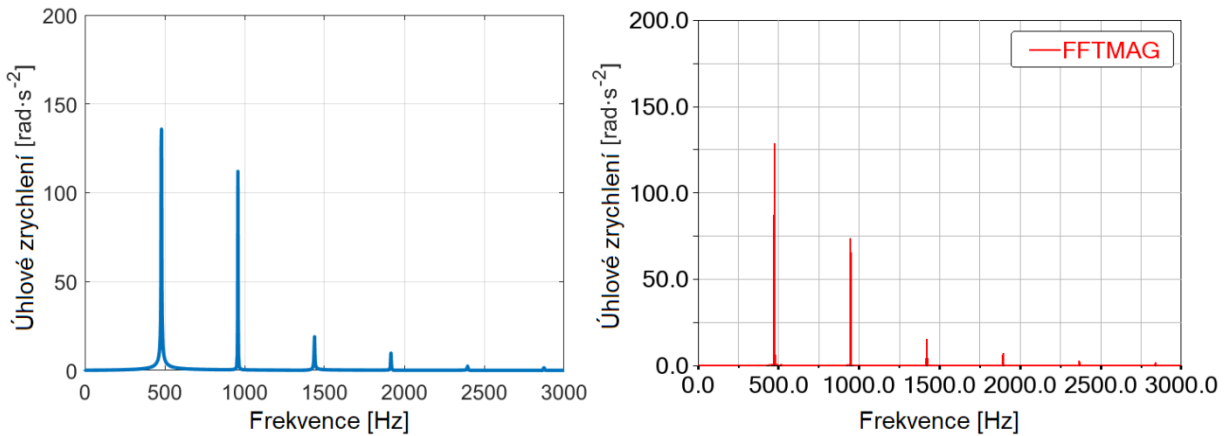
V předchozí kapitole bylo zjištěno, že software ADAMS View nedokáže dostatečně přesně spočítat netlumené kmitání. Z toho důvodu jsou v následující kapitole opět porovnávány výsledky simulací, s tím rozdílem že bylo do záběru ozubení přidáno tlumení o velikosti 1/10000 tuhosti ozubení. Dále byla upravena velikost kroku, kde pro lepší srovnání byl krok nastaven u obou simulací stejně na hodnotu 100 000 kroků za sekundu.

Na Obr. 27 je zobrazeno porovnání úhlových zrychlení ozubených kol. Na grafu je zřejmý rozdíl oproti simulaci bez zahrnutí tlumení, kde byly rozdíly mezi dvěma softwary významné, zde jsou průběhy zrychlení takřka identické.



Obr. 27 Porovnání úhlových zrychlení v simulaci s tlumením Matlab (nahore) ADAMS View (dole)

Pro lepší porovnání byla provedena Fourierova transformace úhlového zrychlení pastorku úseku od 1,25 do 2 s, kde je ustálená charakteristická rychlost. Tato transformace je zobrazena na Obr. 28. Graf zobrazuje FFT transformaci s frekvenčním rozsahem do 3000 Hz, protože vyšší frekvence mají velice nízkou amplitudu, takže by na grafu nebyly patrné.



Obr. 28 Porovnání FFT úhlových zrychlení pastorku v simulaci s tlumení MATLAB (vlevo) ADAMS View (vpravo)

Tab. 9 Porovnání frekvencí zrychlení a jejich amplitud

Frekvence [Hz]		Rozdíl	Amplituda [rad·s <sup>-2</sup> ]		Rozdíl
ADAMS	MATLAB	[%]	ADAMS	MATLAB	[%]
473	480	1,46	128,45	135,84	5,44
946	958	1,25	73,80	112,12	34,18
1419	1438	1,32	15,54	19,05	18,43
1893	1916	1,20	7,37	9,83	25,03
2366	2396	1,25	2,60	1,78	-46,07
2839	2872	1,149	1,87	1,57	-19,11

V Tab. 9 jsou zobrazeny přesné hodnoty frekvencí a jejich amplitud zrychlení pastorku. Všechny hodnoty frekvencí se mezi dvěma simulacemi liší do 1,5 %. Jedná se totiž o zubovou frekvenci a její násobky, tato zubová frekvence se spočítá pomocí následujícího vzorce

$$f_z = n_p \cdot z_p \quad (55)$$

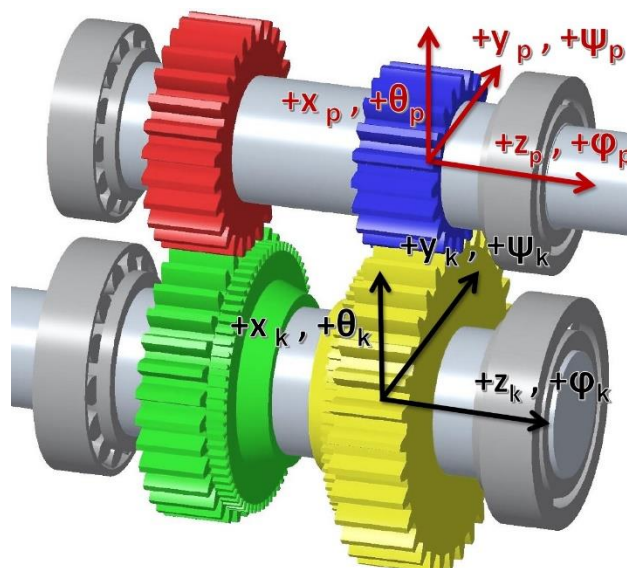
V MATLAB simulaci je rychlost pastorku v 1,25 s 12,58 rad·s<sup>-1</sup>, zatímco v simulaci v softwaru ADAMS View je ve stejném čase rychlost 12,44 rad·s<sup>-1</sup>. Tímto rozdílem je způsobena odchylka ve frekvencích.

Mnohem větší rozdíl mezi dvěma simulacemi je ve velikosti amplitud zrychlení. I přes to, že průběhy zrychlení zobrazené na Obr. 28 vypadají takřka identicky z Tab. 9 je patrné že rozdíl ve velikosti amplitud dosahuje u druhé harmonické složky 34 %. Tato hodnota je poměrně vysoká, ale jedná se o velké zlepšení od simulace bez zahrnutí tlumení kmitání, kde se rozdíly pohybovaly mezi 40 a 90 %.



## 6 VÝSLEDKY SIMULACÍ VÝPOČTOVÉHO MODELU

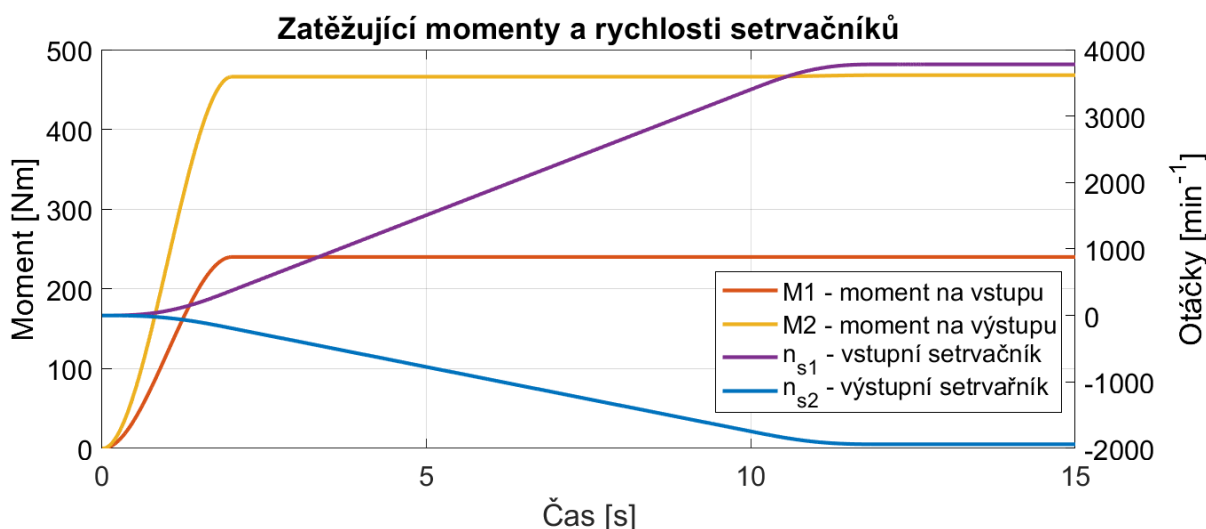
Model slouží pro výpočet dynamiky převodových ústrojí. Byly tak provedeny simulace s různým charakterem zatěžování, aby byly získáno přesné chování a odezvy na buzení výpočtové převodovky. Na Obr. 29 jsou znázorněny souřadné systémy využívané ve výpočtovém modelu převodovky.



Obr. 29 Souřadné systémy použité ve výpočtovém modelu převodovky

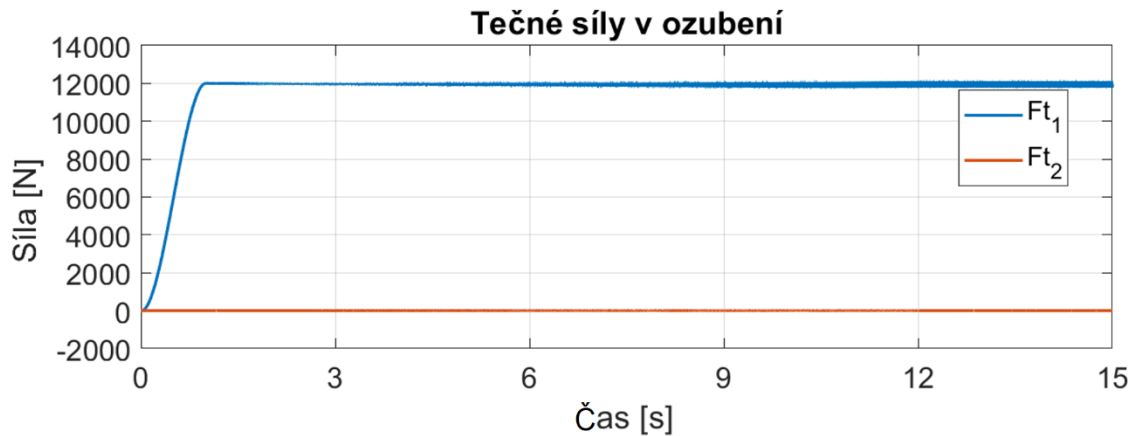
### 6.1 SIMULACE SE ZVYŠUJÍCÍMI SE OTÁČKAMI

V této simulaci bylo simulováno roztáčení převodovky, z nulové rychlosti při zařazeném prvním převodovém stupni. Na vstupní hřídeli převodovky byl nastaven průběh rychlosti otáčení, kdy zrychlování otáčení končilo v čase 12 s a bylo zde dosaženo rychlosti  $3770 \text{ min}^{-1}$ , viz Obr. 30. Na výstupní hřídel byl aplikován moment 470 Nm. Celková doba simulace byla nastavena na 15 s při vzorkovací frekvenci  $150\,000 \text{ Hz}$ .



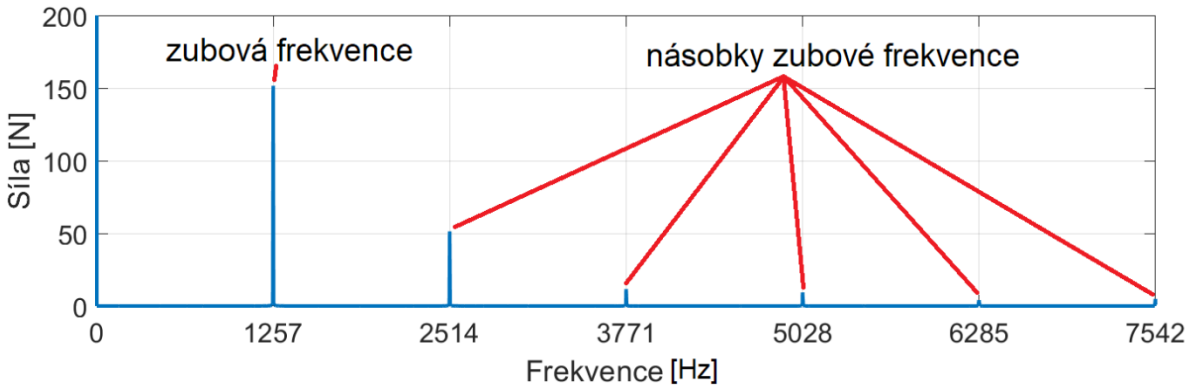
Obr. 30 Zatěžující momenty v simulaci a průběhy rychlostí setrvačnicků převodovky

Na Obr. 31 jsou zobrazeny průběhy tečných sil v ozubení, z obrázku je patrné že zátěžný moment se přenáší pouze prvním ozubením, druhé ozubení pouze překonává setrvačné hmoty ozubených kol.



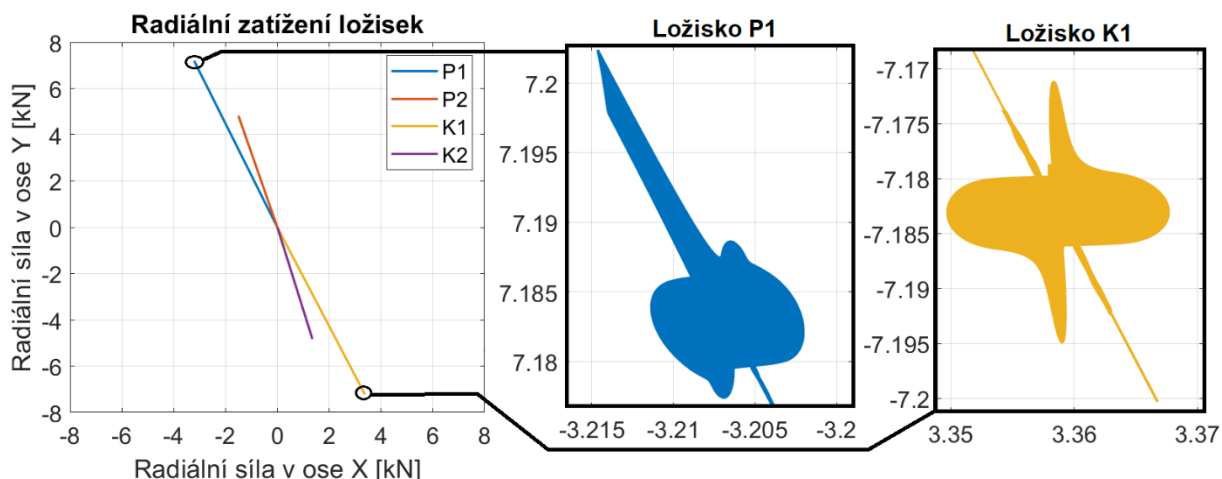
Obr. 31 Tečné síly v ozubení

Rozklad síly  $F_{t1}$  pomocí FFT je proveden na Obr. 32. Rozklad je proveden pro úsek od 12 do 15 s, protože v tomto úseku je rychlost ozubených kol konstantní. Na obrázku jsou zřetelně vidět jednotlivé složky tečné síly ozubení. Dominantní složkou je zubová frekvence a její násobky. Jestliže rychlost otáčení prvního pastorku dosáhla 3770 otáček za minutu a počet zubů pastorku je 26, tak se zubová frekvence rovná 1256,7 Hz, tato hodnota odpovídá hodnotě zubové frekvence, získané pomocí FFT v softwaru MATLAB.



Obr. 32 FFT tečné síly ozubení prvního převodu

Dalším důležitým parametrem, který může být sledován, je zatížení ložisek. Toto zatížení se přenáší na skříň převodovky a může způsobovat vybuzení vlastních frekvencí skříňě doprovázených zvukovými emisemi, proto je dobré znát průběh tohoto zatížení. Průběh radiálních sil působící na ložiska je na Obr. 33. Převodovka byla na začátku simulace zatížena nominálním momentem, při nízké rychlosti otáčení, toto zatížení převodovky se projeví na ložiscích lineárním růstem síly. V detailu na průběh síly ložisek K1 a P1 je vidět v jaké oblasti se pohybuje zatížení ložisek při roztáčení převodovky za působení konstantního momentu.



Obr. 33 Zatížení ložisek v průběhu roztáčení převodovky s detailem na ložiska P1 a K1

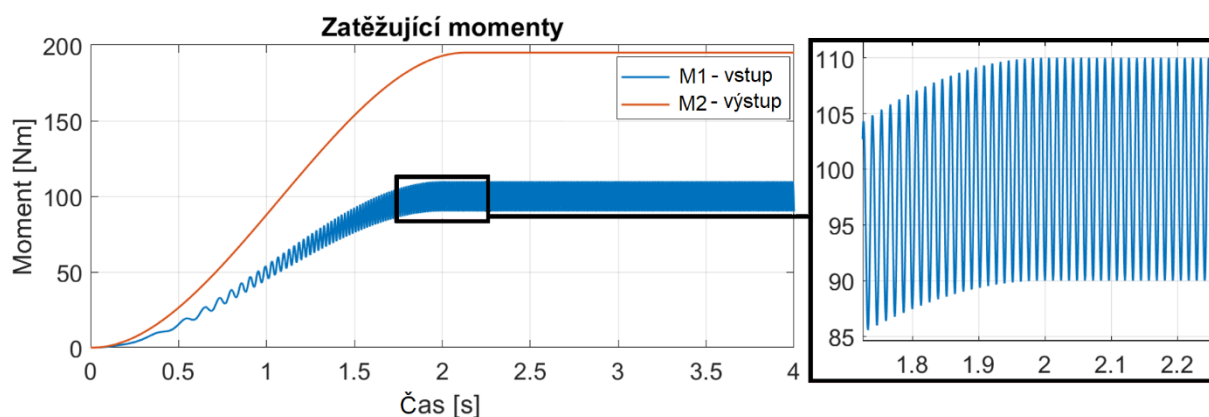
## 6.2 SIMULACE S NEROVNOMĚRNÝM ZATÍŽENÍM VSTUPU

Jak bylo popsáno v kapitole 1.1.3, vliv boční zubové vůle se nejvíce projeví při nerovnoměrném zatížení, které například způsobuje spalovací motor. Právě na projevy boční zubové vůle byla zaměřena tato simulace.

V této simulaci byla boční zubová vůle nastavena na 0,2 mm a vstupní hřídel byla zatížena nerovnoměrným momentem. Moment byl nastaven tak, aby simuloval čtyřválcový spalovací motor, který má dominantní druhou harmonickou složku, ostatní harmonické složky motoru nebyly v simulaci uvažovány. Toto nerovnoměrné zatížení má za následek proměnou změnu rychlosti hřídelů, která může způsobit, že dojde k přerušení kontaktů zubů a následně k opětovnému vytvoření kontaktu na jedné či druhé straně zubu. Zatěžující vstupní moment byl nastaven dle vztahu.

$$M_1 = M_{stř} + 0.1 \cdot M_{stř} \cdot \sin(\varphi_1 \cdot i) \quad (56)$$

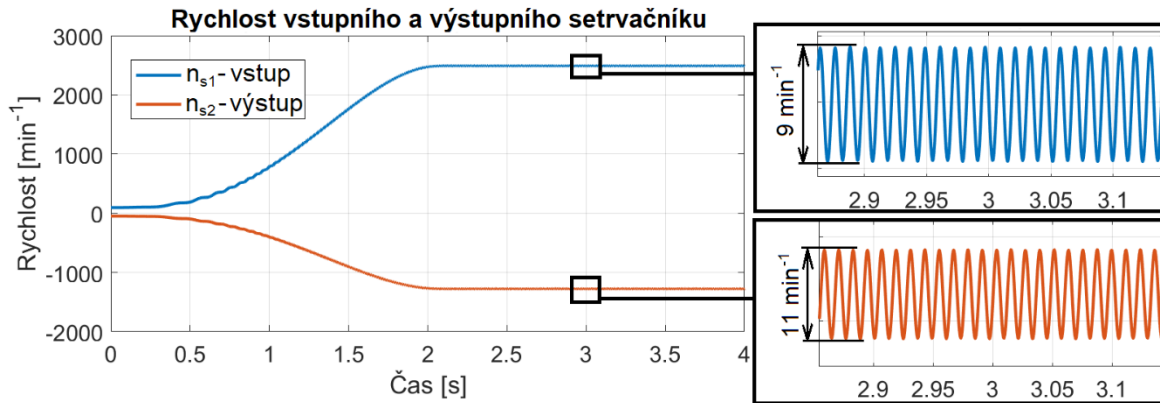
Kde  $M_{stř}$  je střední hodnota zatěžujícího momentu  $i$  je násobek harmonické složky natočení hřídele. Amplituda momentu byla nastavena na 10 % střední hodnoty momentu, viz vztah výše. Průběh v čase tohoto zatěžovacího momentu zobrazen je na Obr. 34.



Obr. 34 Průběh zatěžujících momentů simulující čtyřválcový spalovací motor

### 6.2.1 VLIV NEROVNOMĚRNÉHO ZATÍŽENÍ NA RYCHLOST HŘÍDELÍ A CHYBU PŘEVODU

Rychlosti vstupní a výstupní hřídele, jsou zobrazeny na Obr. 35. Na tomto grafu je detail na průběh rychlosti v čase 3 s, kde převodovka již nezrychluje a je zde patrný nerovnoměrný průběh rychlostí hřídelů. Na vstupním setrvačniku (s1) kolísá rychlost mezi hodnotami 2485 a 2494 min<sup>-1</sup> a na výstupním setrvačniku (s2) kolísá hodnota rychlosti mezi 1271 a 1282 min<sup>-1</sup>.

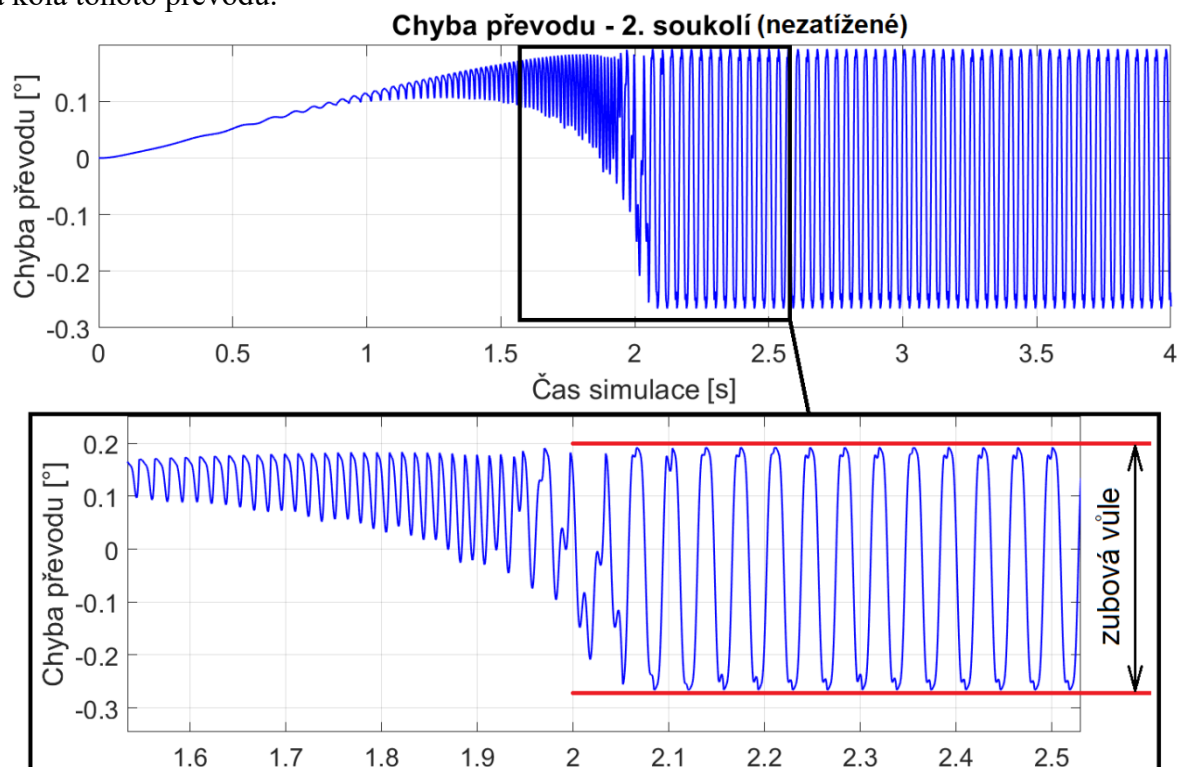


Obr. 35 Průběh rychlostí vstupního a výstupního setrvačniku při nerovnoměrném zatížení

V této simulaci byl zařazen 1. převodový stupeň, to znamená že zuby 1. převodu byly zatíženy zatěžujícím momentem, ale zuby druhého převodu nejsou zatíženy. Právě nízké zatížení je kritické pro oddělení kontaktů ozubení, proto na Obr. 36 je zobrazena chyba převodu druhého soukolí. Tato chyba převodu je počítána pomocí následujícího vzorce

$$e_t = \varphi_{p2} - \varphi_{k2} \cdot \frac{z_{k2}}{z_{p2}} \quad (57)$$

kde  $\varphi_{p2}$  a  $\varphi_{k2}$  je natočení pastorku a kola druhého převodu,  $z_{k2}$  a  $z_{p2}$  je počet zubů pastorku a kola tohoto převodu.

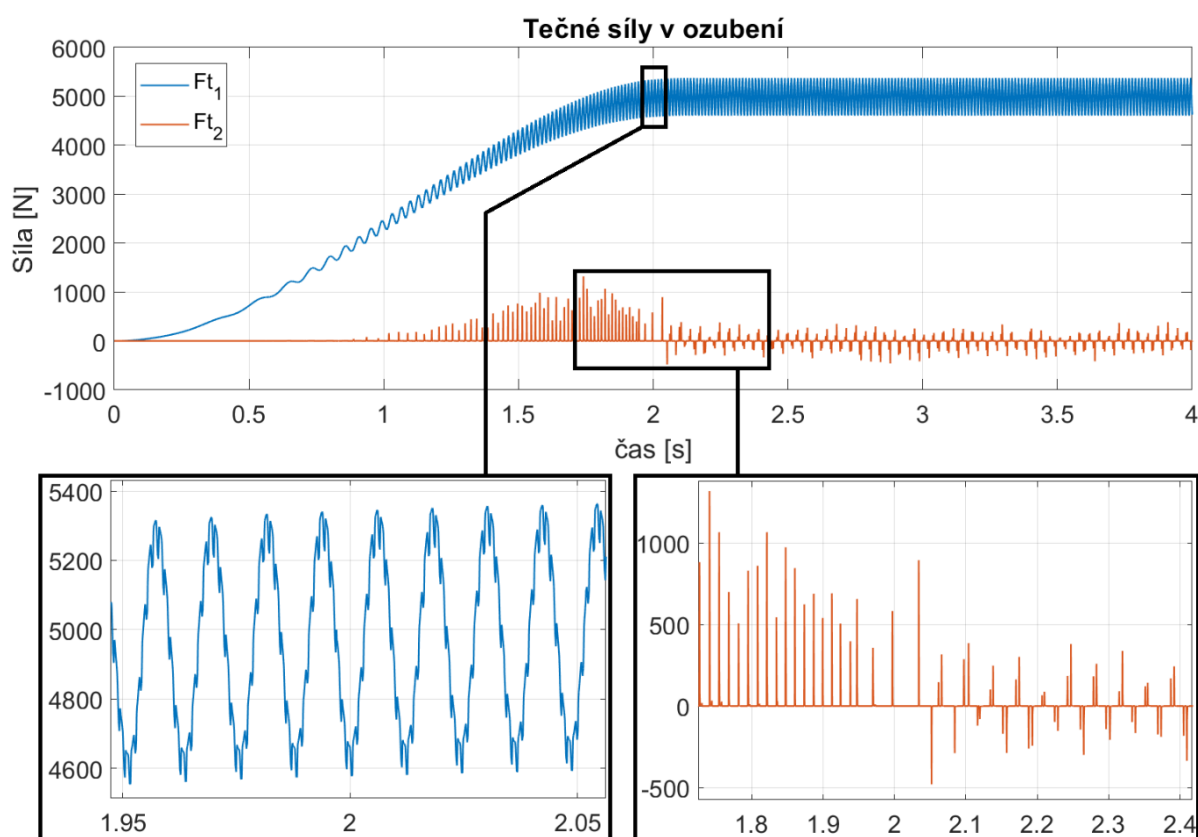


Obr. 36 Chyba převodu nezatíženého soukolí při nerovnoměrném zatížení převodovky

Na grafu chyby převodu je patrný nárůst chyby převodu od začátku simulace do 2 s. Tento nárůst kopíruje průběh zatěžovacího momentu, přestože druhé soukolí je tímto momentem nezatiženo, tento moment projeví na druhém soukolí díky deformaci ložisek, na kterých jsou hřídele uloženy. Na obrázku je dále patrné že do 2 s simulace nedošlo k žádnému kontaktu ozubení na negativní straně zubu, k tomuto kontaktu došlo až po čase 2 s, kde již nedochází ke zrychlování hřídele, a druhé soukolí již nepřekonává žádné setrvačné účinky, pouze se volně otáčí.

### 6.2.2 PRŮBĚH TEČNÝCH SIL V OZUBENÍ PŘI NEROVNOMĚRNÉM ZATÍŽENÍ

Průběh tečných sil v ozubení, při nerovnoměrném zatížení převodovky je na Obr. 37. Na tomto průběhu jsou u síly  $F_{t2}$  zřetelně vidět místa kontaktu zubů na pozitivní i negativní straně zubu, jelikož tečné síly, které nabývají záporných hodnot jsou na negativní straně ozubení a naopak.



Obr. 37 Průběh tečných sil ozubení při nerovnoměrném zatížení

Tyto kontakty ozubení probíhají ve velice krátkém čase, proto při simulaci vlivu boční zubové vůle je důležitá volba časového kroku. V Tab. 10 je zobrazen vliv časového kroku simulace na velikost tečných sil vznikající při kontaktu ozubení. Z této tabulky je zřejmá přímá závislost velikosti síly na délce časového kroku, proto je nutné pro co nejlepší výsledky volit co nejmenší časový krok (co nejvyšší vzorkovací frekvenci).

Zmenšování časového kroku má, ale za následek mnohem delší výpočetní čas, a hlavně simulace potřebuje mnohem více operační paměti počítače na uložení výsledků. Hodnoty výpočetního času a velikost paměti potřebné pro uložení jsou zobrazeny také v Tab. 10. Výpočet byl proveden na sestavě vybavené procesorem Intel i7-7700HQ.

Tab. 10 Vliv časového kroku na velikost tečné síly  $F_{t2}$ 

Výpočetní frekvence [kHz]	Maximální velikost $F_{t2}$ v čase ( $t < 2$ s) [N]	Maximální velikost $F_{t2}$ v čase ( $t > 2$ s) [N]		Výpočetní čas 1 s simulace [s]	Velikost paměti RAM na 1 s simulace [MB]
		+	-		
50	3376	985	1567	2,4	73
100	1831	538	1024	4,6	103
150	1319	368	480	7,1	154
250	775	248	282	11,3	264
500	370	143	213	20,5	478
1 000	224	89	99	38,5	925
2 000	137	76	67	77,2	1820
3 000	114	63	52	132	3140

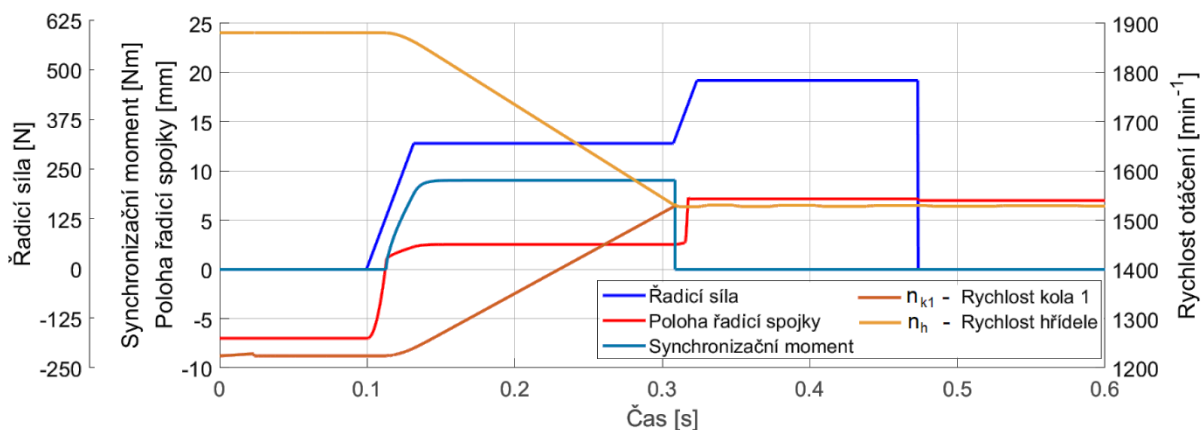
Přestože byla výpočetní frekvence zvyšována až na hodnotu 3 MHz, výsledné velikosti sil v ozubení nevykazují známky ustálení. Z toho vyplývá, že tento výpočetní model není vhodný na určení velikostí sil vznikající při nárazech zubů. Může ale sloužit k určení provozního režimu, kdy k tomuto ději může docházet.

### 6.3 SIMULACE PRŮBĚHU ŘAZENÍ

Tato kapitola se zabývá rozborem výsledných zatížení při změně převodových stupňů a časem potřebným pro synchronizaci hřídele s ozubeným kole. Tyto časy jsou v další části porovnány s analytickými výpočty pro ověření funkčnosti tohoto modelu.

#### 6.3.1 SIMULACE ŘAZENÍ Z DRUHÉHO NA PRVNÍ STUPEŇ

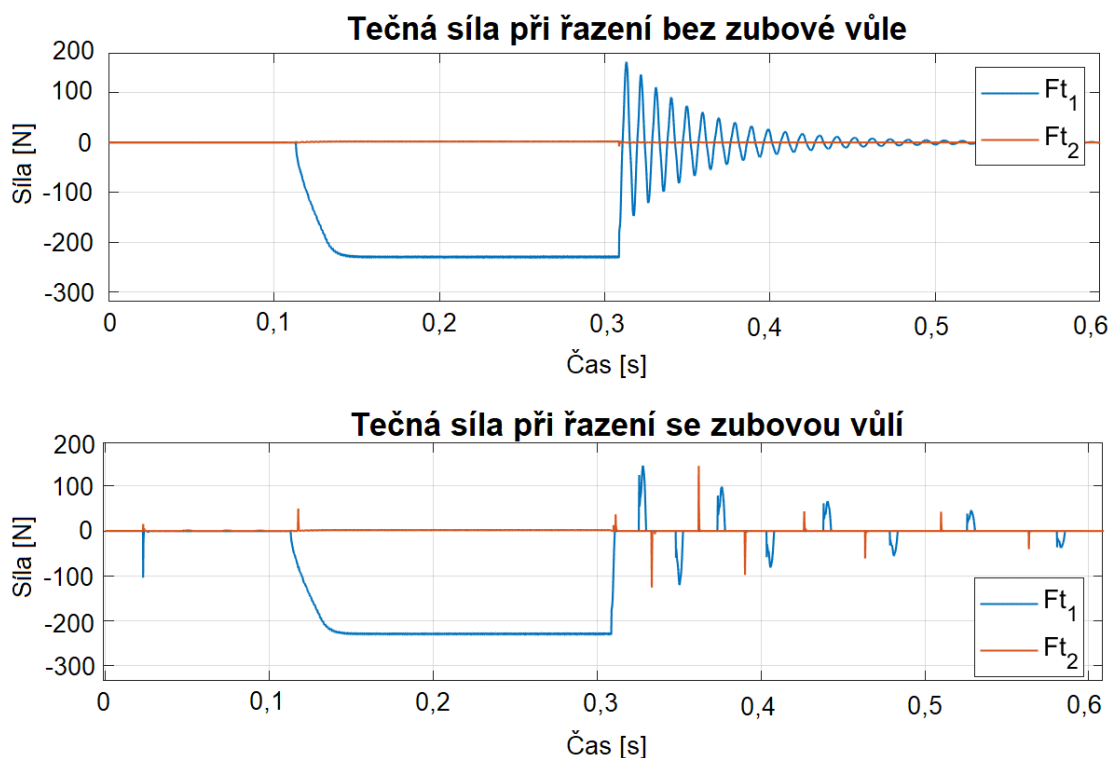
Řazení probíhá ze druhého převodového stupně na první převodový stupeň. Převodovka není při této simulaci zatížena žádným momentem a její počáteční rychlost je na vstupní hřídeli  $2390 \text{ min}^{-1}$ . Průběh řadicí síly, polohy řadicí objímky, synchronizačního momentu, rychlosti ozubeného kola a hřídele je zobrazen na Obr. 38.



Obr. 38 Průběh řazení z prvního na druhý převodový stupeň

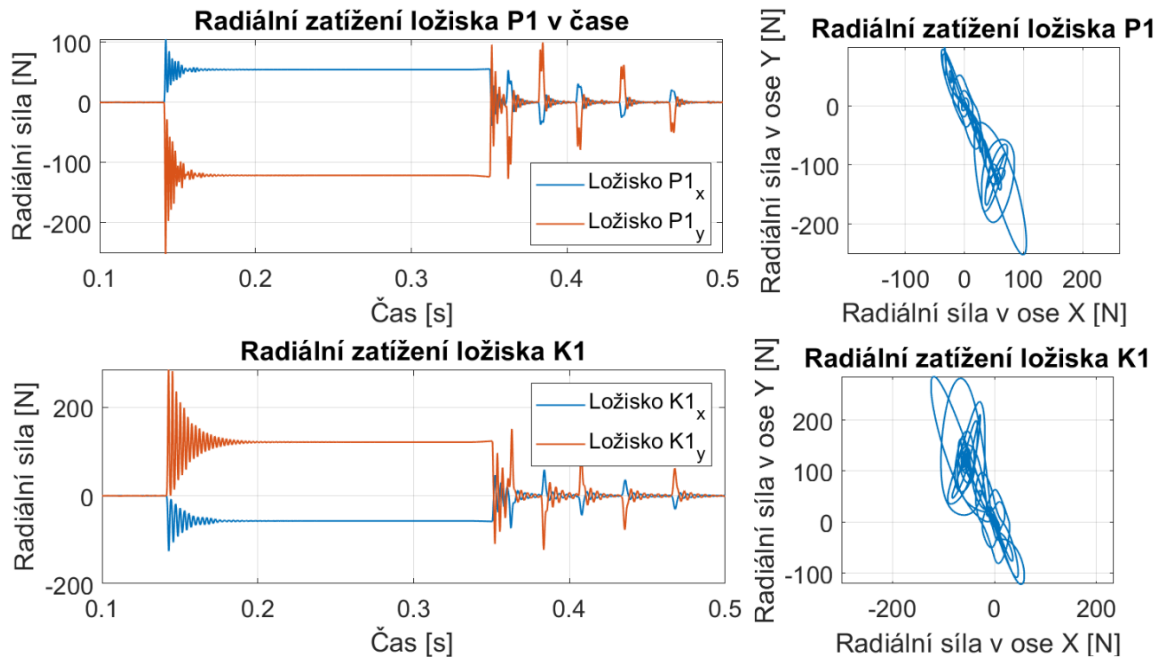
Řazení začalo v čase 0,1 s, a to se na grafu projeví začátkem nárůstu řadicí síly. Pohyb řadicí objímky nastal o několik setin sekundy později, než došlo k překonání zajišťovací síly. Začátek synchronizace je v čase 0,141 s, kde došlo ke kontaktu třecích ploch synchronizační spojky a tím vznikl synchronizační moment. Synchronizace byla dokončena v čase 0,31 s, kde se rychlosti hřídele a ozubeného kola se vyrovnaly a došlo k zániku synchronizačního momentu. Poté řadicí síla opět stoupne, aby byla překonána zajišťovací síla synchronizačního kroužku. Řadicí síla poté působí až do času 0,47, aby bylo dosaženo správného zajištění řadicí objímky.

Na Obr. 39 je zobrazeno porovnání tečných sil v ozubení při změně převodu s boční zubovou vůlí a bez boční zubové vůle. Na grafu průběhu sil bez boční zubové vůle je patrné, že po dokončení synchronizace, dojde okamžitě k zániku synchronizačního momentu, tento rychlý zánik způsobí torzní rozkmitání systému, jelikož předchozí působení momentu naakumulovalo energii v tuhostech součástí (deformace hřídelů a ložisek). Jako bylo zmíněno v kapitole 6.2.1, této rozkmitání systému, je kritické pro vyvození rázů způsobených zubovou vůlí, proto byla provedena další simulace s nastavenou boční zubovou vůlí. Na průběhu tečné síly v ozubení je poté zřetelně vidět, jak dochází k rázům způsobených boční zubovou vůlí po ukončení synchronizace.



Obr. 39 Tečné síly v ozubení při změně převodu bez boční zubové vůle (nahore) s boční zubovou vůlí (dole)

Na Obr. 40 je zatížení ložisek při změně převodových stupňů s vlivem boční zubové vůle. Ze zatížení ložisek je patrný přenos zatížení z rázů ozubení na ložiska, z ložisek se tyto rázy mohou šířit na skříň převodovky a jelikož se jedná o širokopásmové buzení, může při tomto stavu docházet k buzení vlastních frekvencí skříně převodovky.



Obr. 40 Zatížení ložiska P1 a K1 při změně převodových stupňů

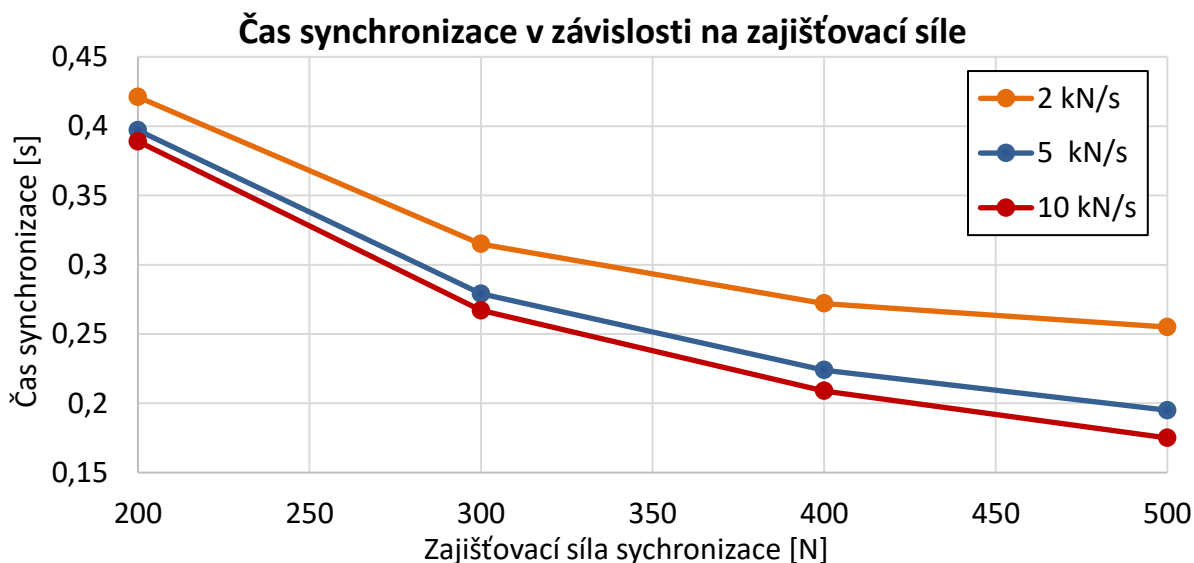
V Tab. 11 jsou zobrazeny hodnoty doby řazení v závislosti na velikosti zajišťovací síly synchronizace, podle které byla určena maximální řadicí síla, a na maximální rychlosti růstu síly. Časy  $t_1$  jsou časy od začátku řazení po dokončení synchronizace, zatímco čas  $t_2$  je čas od počátku řazení do doby zajištění řadicí objímky (dokončeno řazení).

Tab. 11 Doba změny převodových stupňů v závislosti na řadicí síle a rychlosti jejího růstu

	Rychlost růstu řadicí síly [ $\text{N}\cdot\text{s}^{-1}$ ]	Zajišťovací síla synchronizace [N]			
		200	300	400	500
$t_1$ [s]	2000	0,421	0,315	0,272	0,255
$t_2$ [s]		0,442	0,346	0,314	0,306
$t_1$ [s]	5000	0,397	0,279	0,224	0,195
$t_2$ [s]		0,405	0,292	0,241	0,216
$t_1$ [s]	10000	0,389	0,267	0,209	0,175
$t_2$ [s]		0,394	0,274	0,217	0,186

Tyto data jsou vykresleny v grafu času synchronizace, viz Obr. 41. Z grafu je patrné že s rostoucí jistící silou, stoupá vliv rychlosti nárůstu řadicí síly na dobu synchronizace.





Obr. 41 Graf závislosti času synchronizace na zajišťovací síle a rychlosti růstu řadicí síly

### 6.3.2 ANALYTICKÝ VÝPOČET DOBY ŘAZENÍ

Pro ověření správnosti výsledků doby řazení bude v této kapitole proveden numerický výpočet doby řazení. Prvním krokem pro získání doby řazení je nutné znát výslednou rychlost převodovky po skončení řazení. Výpočet této rychlosti vychází ze zákona zachování energie, viz následující vztah.

$$\sum E_k = \sum E_k' \quad (58)$$

Kde  $E_k$  jsou kinetické energie rotačních částí hřídele před začátkem řazení a  $E_k'$  jsou kinetické energie rotačních částí po skončení řazení. Suma kinetických energií se skládá z těchto členů.

$$\sum E_k = E_{k_{vy}} + E_{k_{vs}} + E_{k_{k1}} + E_{k_{k2}} \quad (59)$$

Kde  $E_{k_{vy}}$  rotační kinetická energie výstupní hřídele bez ozubených kol,  $E_{k_{vs}}$  je kinetická energie vstupní hřídele včetně pastorků,  $E_{k_{k1}}$  a  $E_{k_{k2}}$  jsou kinetické energie rotace ozubených kol. Jednotlivé členy lze rozepsat následovně

$$\sum E_k = \frac{1}{2} \cdot J_{vy} \cdot \left(\frac{\omega_1}{i_2}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot J_{vs} \cdot \omega_1^2 + \frac{1}{2} \cdot J_{k1} \cdot \left(\frac{\omega_1}{i_1}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot J_{k2} \cdot \left(\frac{\omega_1}{i_2}\right)^2 \quad (60)$$

kde  $J$  jsou momenty setrvačnosti jednotlivých součástí  $i_1$  a  $i_2$  jsou převodové poměry a  $\omega_1$  je úhlová rychlost na vstupní hřídeli. Rovnice pro kinetickou energii po skončení řazení má pouze jeden rozdíl, a to u úhlové rychlosti na výstupu kde se změní převodový poměr, viz následující vztah.

$$\sum E_k' = \frac{1}{2} \cdot J_{vy} \cdot \left(\frac{\omega_2}{i_1}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot J_{vs} \cdot \omega_2^2 + \frac{1}{2} \cdot J_{k1} \cdot \left(\frac{\omega_2}{i_1}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot J_{k2} \cdot \left(\frac{\omega_2}{i_2}\right)^2 \quad (61)$$

Dosažením do rovnic (60) a (61) a vyjádřením rychlosti  $\omega_2$  je získána rychlost po ukončení řazení, konkrétní hodnoty rychlosti při řazení z druhého na první rychlostní stupeň jsou v Tab. 12.

Tab. 12 Porovnání hodnot rychlostí na vstupní hřídeli po ukončení řazení získaných analyticky vs MATLAB simulace

Počáteční rychlost	Konečná rychlost		
	[min <sup>-1</sup> ]	Analyticky [min <sup>-1</sup> ]	MATLAB [min <sup>-1</sup> ]
1500	1916,3	1874,0	2,25
2000	2555,0	2498,8	2,25
2500	3193,8	3123,8	2,24
3000	3832,6	3753,7	2,10

Rozdíl rychlostí získaných analyticky a rychlostí v simulaci v softwaru MATLAB se pohybuje kolem 2,2 %. V simulaci byly rychlosti ve všech případech nižší než hodnoty rychlostí získaných analyticky, tento rozdíl je způsoben tím, že analytický výpočet nepočítá s žádnými ztrátami, zatímco díky tlumení, které se nachází ve výpočtovém modelu převodovky, je část energie v simulaci pohlcena tímto tlumením.

Poté co je vypočítána rychlost na konci řazení, je možné vypočítat celkovou dobu synchronizace, pomocí následujícího vztahu.

$$t_s = J \cdot \frac{\omega_2 - \omega_1}{M_s} \quad (62)$$

Kde  $M_s$  je synchronizační moment, který se vypočítá z parametrů synchronizační spojky a řadičí síly pomocí vzorce (51). Jelikož jednotlivé části převodovky se otáčejí různými rychlostmi a také synchronizační moment který působí mezi ozubeným kolem a výstupní hřídelí se musí přenést na ostatní části převodovky je rovnice (62) sestavena pro všechny části převodovky jednotlivě, viz následující vztah.

$$t_s = J_{vs} \cdot \frac{|\omega_2 - \omega_1|}{\frac{2M_s}{i_1}} + J_{vy} \cdot \frac{|\frac{\omega_2}{i_1} - \frac{\omega_1}{i_2}|}{2M_s} + J_{k1} \cdot \frac{|\frac{\omega_2}{i_1} - \frac{\omega_1}{i_1}|}{2M_s} + J_{k1} \cdot \frac{|\frac{\omega_2}{i_2} - \frac{\omega_1}{i_2}|}{2M_s \cdot \frac{i_2}{i_1}} \quad (63)$$

V tomto vztahu vystupuje  $2M_s$  to je synchronizační moment, který je zdvojnásobený. To je z důvodu, že moment působí mezi hřídelí a ozubeným kolem, a tak akce i reakce tohoto momentu se podílí na synchronizaci.

Výsledné porovnání hodnot synchronizačního času spočítaných analyticky a hodnot ze simulace je v Tab. 13. Řazení bylo provedeno z druhého stupně na první při rychlosti vstupní hřídele 2500 min<sup>-1</sup>. Hodnoty synchronizačního času byly v simulaci počítány od prvního kontaktu třecích ploch do doby, než byla dokončena synchronizace.

Tab. 13 Porovnání hodnot rychlostí na vstupní hřídeli po ukončení řazení získaných analyticky vs MATLAB simulace

Řadicí síla [N]	Synchronizační čas		
	Analyticky [s]	MATLAB [s]	Rozdíl [%]
200	0,3145	0,3151	0,19
300	0,2097	0,2129	1,50
400	0,1572	0,1628	3,44
500	0,1258	0,1339	6,05

Rozdíly synchronizačních časů rostou z tím, jak roste řadicí síla, to je způsobeno tím, že v simulaci neroste synchronizační moment skokově, protože synchronizační moment je vyvolán třením mezi kontaktními plochami a síla, která vytváří tento moment je určena z hloubky deformace tohoto kontaktu.

#### 6.4 VLIV NEVYVÁŽENÍ HŘÍDELŮ

V této simulaci bylo simulováno nevyvážení hřídelů, které může být způsobeno užitím některých strojních součástí, jako jsou například pera těsná, anebo může být způsobeno nepřesností výroby. Nevyvážení do modelu zahrnuto pomocí síly a momentu, dle následujícího vztahu.

$$F_{xp} = m_n \cdot r_n \cdot \dot{\varphi}_{p1}^2 \cdot \cos(\varphi_{p1}) \quad (64)$$

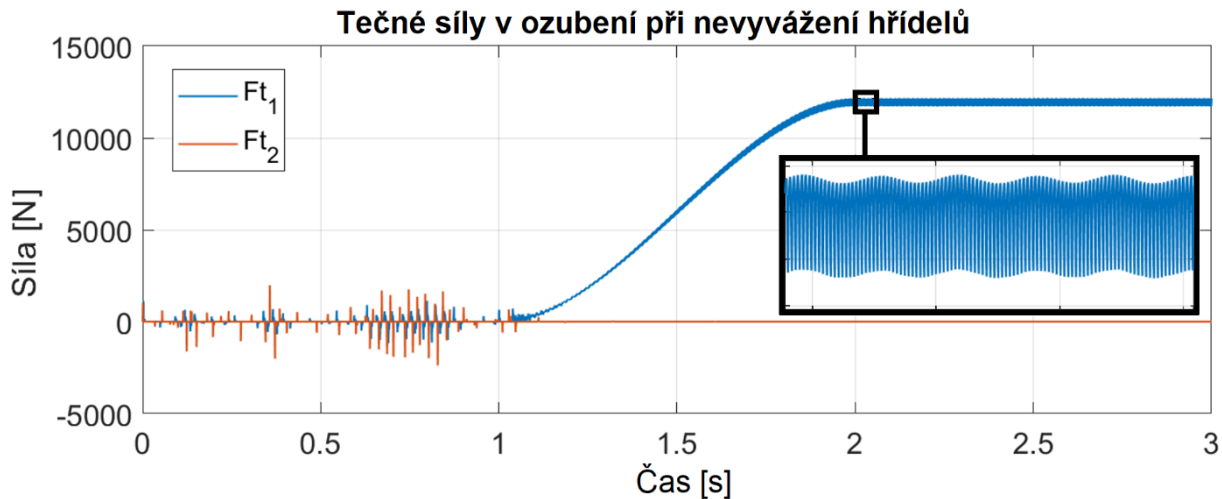
$$F_{yp} = m_n \cdot r_n \cdot \dot{\varphi}_{p1}^2 \cdot \sin(\varphi_{p1}) \quad (65)$$

$$M_{xp} = F_{yp} \cdot l_n \quad (66)$$

$$M_{yp} = F_{xp} \cdot l_n \quad (67)$$

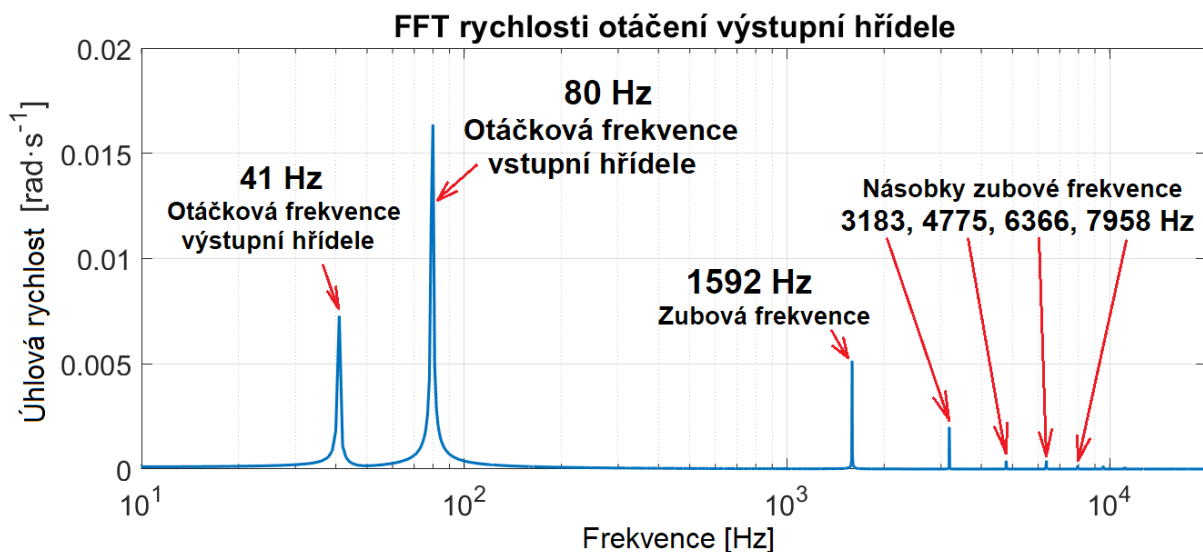
Kde  $m_n$  je hmotnost nevyvážení  $r_n$  je rameno tohoto nevyvážení a  $l_n$  je axiální vzdálenost nevyvážení od středu 1. pastorku, ke kterému je vztaženo klopení hnací hřídele. Pro hnanou hřídel jsou rovnice nevyvážení sestaveny obdobně.

V této simulaci byl zařazen 1. převodový stupeň, a převodovka byla postupně zatěžována od 0 Nm na začátku simulace do 240 Nm na konci simulace. Na Obr. 42 je zobrazen průběh tečné síly při nevyvážení hřídelů z průběhů je patrné, že nevyvážení hřídelů má za následek nerovnoměrné otáčení hřídelů, kvůli deformaci ložisek a u nezatížené převodovky dojde k rázům od zubové vůle. Tyto rázy ustali po zatížení převodovky. Dále je na průběhu tečné síly zřetelně vidět otáčková frekvence, viz detail obrázku.

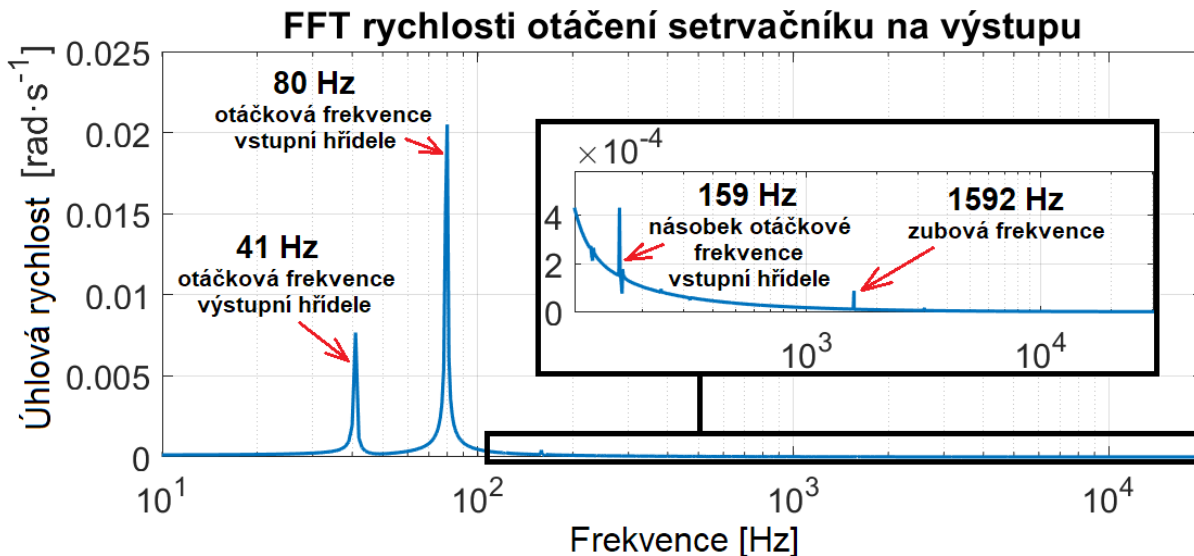


Obr. 43 Tečná síla v ozubení při nevyvážení hřídelů

Na Obr. 43 je zobrazena FFT transformace otáček výstupní hřídele (h) v intervalu 2-3 s simulace, kde je převodovka plně zatížena. Rychlost vstupní hřídele je  $4800 \text{ min}^{-1}$ , tato rychlost odpovídá 80 Hz a rychlost výstupní hřídele je  $2460 \text{ min}^{-1}$  (41 Hz). Tyto rychlosti se projeví v rychlosti otáčení hřídele velice výrazně, kromě těchto otáčkových frekvencí je také vidět velký vliv zubové frekvence na rychlost otáčení.

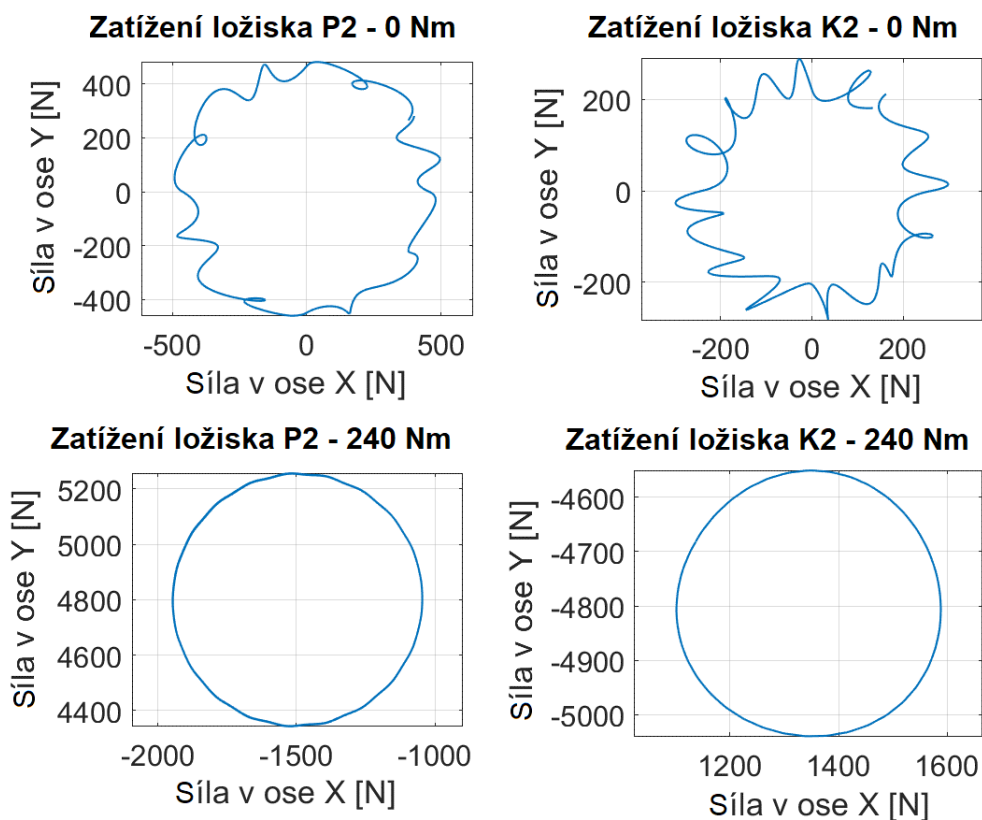

 Obr. 42 FFT rychlosti otáčení výstupní hřídele ( $n_h$ ) v simulaci s nevyvážením hřídelů

Vliv zubové frekvence je, ale zanedbatelný na rychlosti otáčení setrvačníku na výstupní hřídeli, kde jsou tyto vysoké frekvence takřka utlumeny, a výrazněji se projeví pouze otáčkové frekvence viz Obr. 44. Kde zubová frekvence je viditelná pouze v detailním pohledu tohoto grafu. Toto zamezení přenosu vysokých frekvencí setrvačníkem je jedním z hlavních důvodů, proč se setrvačníky v převodových ústrojích využívají



Obr. 44 FFT rychlosti otáčení výstupního setrvačnicku ( $n_{s2}$ ) v simulaci s vlivem nevyvážení

Na Obr. 45 je zatížení ložisek P2 a K2 na jednu otáčku hřídele. V horní části je zatížení ložisek při nulovém zatížení převodovky, a v dolní je zatížení při působení momentu na hnací hřídeli 240 Nm. Zajímavé na průběhu tohoto zatížení ložisek, je že při nulovém momentu je zatížení ložisek více dynamické, zatímco při plném zatížení převodovky je charakteristika radiálního zatížení, takřka dokonale kruhová, která by byla při nevyvážení hřídeli očekávaná.



Obr. 45 Radiální zatížení ložisek při nevyvážení hřídelů a nulovém zatížení (nahore) a zatížení momentem 240 Nm (dole)



## ZÁVĚR

Cílem této diplomové práce bylo provést rešerši používaných matematických modelů ve výpočtu dynamiky ozubení, popsat hlavní zdroje zatížení v převodových ústrojích a sestavit vlastní výpočtový model v softwaru MATLAB.

V první části byla zvolena Newmarkova metoda na řešení diferenciálních pohybových rovnic, tato metoda je vhodná hlavně z důvodu velké stability při výpočtu a také poměrně krátkých výpočetních časů. Jelikož řešiče diferenciálních rovnic, které se nachází v softwaru MATLAB, jsou časově velice náročné a u složitějších úloh, dojde při výpočtu k přeplnění operační paměti počítače a zastavení výpočtu.

V další části byl sestaven vlastní zjednodušený výpočtový model jak v softwaru MATLAB, tak v softwaru ADAMS. Nejprve byl testován model bez tlumení, u kterého se ukázala nevhodnost softwaru ADAMS na výpočet tohoto typu úlohy a paradoxně model v softwaru MATLAB, vykazoval lepší výsledky. Poté bylo v simulaci zahrnuto tlumení a modely byly opět porovnány, při tomto typu simulace, již oba modely vykazovaly dobrou shodu výsledků, kdy sledované hodnoty nabývali takřka stejných hodnot.

Dále byl sestaven více komplexní výpočtový model v softwaru MATLAB, reprezentující dvoustupňovou převodovku s řazením za pomoci synchronizace s pružně omezenou silou. Tento model bere v potaz tuhost ložisek, torzní tuhosti hřídelů, vliv působícího momentu a natočení pastorku na tuhost ozubení. V toto modelu je možné také simulovat vliv nevyváženosti hřídelů a její vliv na zatížení ložisek a záběr ozubení, je schopný určit provozní stavy, ve kterých dojde k rázům ozubených kol vlivem boční zubové vůle nebo simulovat změnu převodových stupňů, včetně určení časů synchronizace.

Tento model vykazuje vysokou rychlost výpočtu, kdy při výpočetní frekvenci 100 kHz trvá jedna vteřina simulace zhruba 5 s, na sestavě vybavené procesorem Intel i7-7700HQ. Dále umožňuje jednoduchou změnu vstupních parametrů, jako jsou momenty setrvačnosti, hmotnosti, tuhosti, počty zubů ozubených kol, jejich roztečné průměry, změny zatěžovacích charakteristik a další. Nevýhodou tohoto modelu je jeho složité rozšiřování například o další stupně volnosti, kdy musí být sestaveny nové pohybové rovnice ty nahrazeny do textového souboru, ze kterého jsou následně vytvořeny matice popisující dynamický systém.

## POUŽITÉ INFORMAČNÍ ZDROJE

- [1] HOUSER, Donald .R. Microgeometry and bias in helical gear noise excitations. *Gearsolutions* [online]. 1. únor 2008 [vid. 2023-02-08]. Dostupné z: <https://gearsolutions.com/features/microgeometry-and-bias-in-helical-gear-noise-excitations/>
- [2] CHEN, Zaigang, Jieyu NING, Kaiyun WANG a Wanming ZHAI. An improved dynamic model of spur gear transmission considering coupling effect between gear neighboring teeth. *Nonlinear Dynamics* [online]. 2021, **106**(1). ISSN 1573269X. Dostupné z: doi:10.1007/s11071-021-06852-y
- [3] DOČKAL, Aleš. *Konstrukční optimalizace ozubené převodovky s ohledem na snižování hlukové emise*. B.m.: Vysoké učení technické, Fakulta strojního inženýrství, Ústav konstruování, 2003. ISBN 8021424397.
- [4] PROKOP ALEŠ. *Modelování vibrací pohonných jednotek aplikací virtuálních prototypů* [online]. Brno, 2016 [vid. 2023-02-08]. VUT Brno. Dostupné z: [https://www.vut.cz/www\\_base/zav\\_prace\\_soubor\\_verejne.php?file\\_id=137723](https://www.vut.cz/www_base/zav_prace_soubor_verejne.php?file_id=137723).
- [5] NEVZAT ÖZGÜVEN, H. a D. R. HOUSER. Mathematical models used in gear dynamics—A review. *Journal of Sound and Vibration* [online]. 1988, **121**(3), 383–411 [vid. 2023-02-09]. ISSN 0022-460X. Dostupné z: doi:10.1016/S0022-460X(88)80365-1
- [6] BARTELMUS, Walter. MATHEMATICAL MODELLING AND COMPUTER SIMULATIONS AS AN AID TO GEARBOX DIAGNOSTICS. *Mechanical Systems and Signal Processing* [online]. 2001, **15**(5), 855–871 [vid. 2023-02-09]. ISSN 0888-3270. Dostupné z: doi:10.1006/MSSP.2001.1411
- [7] KORKA, Z.I. a I.C. MITULETU. A Review of Dynamic Models Used in Simulation of Gear Transmissions. *Analele Universității “Eftimie Murgu” Reșița*. 2014, **2014**(XXI).
- [8] MOHAMMED, Omar D., Matti RANTATALO a Jan Olov AIDANPÄÄ. Dynamic modelling of a one-stage spur gear system and vibration-based tooth crack detection analysis. *Mechanical Systems and Signal Processing* [online]. 2015, **54–55**, 293–305 [vid. 2023-02-07]. ISSN 0888-3270. Dostupné z: doi:10.1016/J.YMSSP.2014.09.001
- [9] MOHAMMED, Omar D., Matti RANTATALO a Jan Olov AIDANPÄÄ. Dynamic modelling of a one-stage spur gear system and vibration-based tooth crack detection analysis. *Mechanical Systems and Signal Processing* [online]. 2015, **54–55**, 293–305 [vid. 2023-02-09]. ISSN 0888-3270. Dostupné z: doi:10.1016/J.YMSSP.2014.09.001
- [10] JIA, Shengxiang, I M HOWARD a Jiande WANG. The Dynamic Modeling of Multiple Pairs of Spur Gears in Mesh, Including Friction and Geometrical Errors. *International Journal of Rotating Machinery* [online]. 2003, **9** [vid. 2023-02-15]. ISSN 9780080440361. Dostupné z: doi:10.1155/S1023621X03000423



- [11] BULIN, Radek. *Pokročilé výpočtové metody pro vyšetřování dynamiky vázaných mechanických systémů s lany a poddajnými nosníky*. Plzeň, 2019. Západočeská univerzita v Plzni .
- [12] LINDFIELD, George a John PENNY. Solution of Differential Equations. *Numerical Methods* [online]. 2019, 239–299 [vid. 2023-02-13]. Dostupné z: doi:10.1016/B978-0-12-812256-3.00014-2
- [13] VANĚČKOVÁ, Adéla. *Explicitní a implicitní metody v nelineární dynamice*. Brno, 2017. Vysoké učení technické v Brně.
- [14] AHMED A. SHABANA. *Dynamics of Multibody Systems*. Third Edition. B.m.: Cambridge University Press, 2005.

## SEZNAM POUŽITÝCH ZKRATEK A SYMBOLŮ

$a_L$	[m]	Vzdálenost ložiska A od středu ozubeného kola
$b_{1Cx}$	[-]	Spojovací tlumení vstupní hřídele v ose x
$b_{1Cy}$	[-]	Spojovací tlumení vstupní hřídele v ose y
$b_{1Rx}$	$[N \cdot m \cdot rad^{-1}]$	Torzní tlumení uložení vstupní hřídele v ose x
$b_{1Ry}$	$[N \cdot m \cdot rad^{-1}]$	Torzní tlumení uložení vstupní hřídele v ose y
$b_{1Tx}$	$[N \cdot s \cdot m^{-1}]$	Translační tlumení uložení vstupní hřídele v ose x
$b_{1Ty}$	$[N \cdot s \cdot m^{-1}]$	Translační tlumení uložení vstupní hřídele v ose y
$b_{1x}$	$[N \cdot s \cdot m^{-1}]$	Tlumení ložiska pastorku v ose x
$b_{1y}$	$[N \cdot s \cdot m^{-1}]$	Tlumení ložiska pastorku v ose y
$b_{1z}$	$[N \cdot s \cdot m^{-1}]$	Tlumení ložiska pastorku v ose z
$b_{2Cx}$	[-]	Spojovací tlumení výstupní hřídele v ose x
$b_{2Cy}$	[-]	Spojovací tlumení výstupní hřídele v ose y
$b_{2Rx}$	$[N \cdot m \cdot rad^{-1}]$	Torzní tlumení uložení výstupní hřídele v ose x
$b_{2Ry}$	$[N \cdot m \cdot rad^{-1}]$	Torzní tlumení uložení výstupní hřídele v ose y
$b_{2Tx}$	$[N \cdot s \cdot m^{-1}]$	Translační tlumení uložení výstupní hřídele v ose x
$b_{2Ty}$	$[N \cdot s \cdot m^{-1}]$	Translační tlumení uložení výstupní hřídele v ose y
$b_{2x}$	$[N \cdot s \cdot m^{-1}]$	Tlumení ložiska ozubeného kola v ose x
$b_{2y}$	$[N \cdot s \cdot m^{-1}]$	Tlumení ložiska ozubeného kola v ose y
$b_{2z}$	$[N \cdot s \cdot m^{-1}]$	Tlumení ložiska ozubeného kola v ose z
$b_A$	$[N \cdot s \cdot m^{-1}]$	Tlumení ložiska A
$b_B$	$[N \cdot s \cdot m^{-1}]$	Tlumení ložiska B
$b_L$	[m]	Vzdálenost ložiska B od středu ozubeného kola
$b_m$	$[N \cdot m \cdot s \cdot rad^{-1}]$	Torzní tlumení vstupní hřídele (hřídele motoru)
$bt_b$	$[N \cdot m \cdot rad^{-1}]$	Torzní tlumení výstupní hřídele
$bt_m$	$[N \cdot m \cdot rad^{-1}]$	Torzní tlumení vstupní hřídele
$bt_p$	$[N \cdot m \cdot rad^{-1}]$	Torzní tlumení hřídele mezi pastorky
$b_z$	$[N \cdot m \cdot s \cdot rad^{-1}]$	Torzní tlumení výstupní hřídele (hřídele zátěže)
$b_{z1}$	$[N \cdot s \cdot m^{-1}]$	Tlumení záběru ozubení 1. převodu
$b_{z2}$	$[N \cdot s \cdot m^{-1}]$	Tlumení záběru ozubení 2. převodu
$c_M$	[-]	Koeficient redukce na nominální moment
$c_d$	[-]	Koeficient redukce na průměr ozubených kol
$d_1$	[m]	Průměr roztečné kružnice pastorku

$d_2$	[m]	Průměr roztečné kružnice ozubeného kola
$E_{k_{k1}}$	[J]	Kinetická energie ozubeného kola 1. převodu
$E_{k_{k2}}$	[J]	Kinetická energie ozubeného kola 2. převodu
$E_{k_{vs}}$	[J]	Kinetická energie vstupní hřídele
$E_{k_{vy}}$	[J]	Kinetická energie výstupní hřídele
$E_k$	[J]	Kinetická energie
$f_z$	[Hz]	Zubová frekvence
$F_a$	[N]	Axiální síla ozubení
$F_a$	[N]	Řadicí síla
$F_r$	[N]	Radiální síla ozubení
$F_t$	[N]	Tečná síla ozubení
$i_1$	[-]	Převodový poměr 1. převodu
$i_2$	[-]	Převodový poměr 2. převodu
$J_1$	[kg·m <sup>2</sup> ]	Moment setrvačnosti pastorku
$J_2$	[kg·m <sup>2</sup> ]	Moment setrvačnosti ozubeného kola
$J_h$	[kg·m <sup>2</sup> ]	Moment setrvačnosti výstupní hřídele
$J_b$	[kg·m <sup>2</sup> ]	Moment setrvačnosti setrvačnicku na výstupní hřídeli
$J_m$	[kg·m <sup>2</sup> ]	Moment setrvačnosti setrvačnicku na vstupní hřídeli
$J_{vs}$	[kg·m <sup>2</sup> ]	Moment setrvačnosti vstupní hřídele, včetně setrvačnicku
$J_{vy}$	[kg·m <sup>2</sup> ]	Moment setrvačnosti výstupní hřídele, včetně setrvačnicku
$k_{1Cx}$	[-]	Spojovací tuhost vstupní hřídele v ose x
$k_{1Cy}$	[-]	Spojovací tuhost vstupní hřídele v ose y
$k_{1Rx}$	[N·m·rad <sup>-1</sup> ]	Torzni tuhost uložení vstupní hřídele v ose x
$k_{1Ry}$	[N·m·rad <sup>-1</sup> ]	Torzni tuhost uložení vstupní hřídele v ose y
$k_{1Tx}$	[N·m <sup>-1</sup> ]	Translační tuhost uložení vstupní hřídele v ose x
$k_{1Ty}$	[N·m <sup>-1</sup> ]	Translační tuhost uložení vstupní hřídele v ose y
$k_{1x}$	[N·m <sup>-1</sup> ]	Tuhost ložiska pastorku v ose x
$k_{1y}$	[N·m <sup>-1</sup> ]	Tuhost ložiska pastorku v ose y
$k_{1z}$	[N·m <sup>-1</sup> ]	Tuhost ložiska pastorku v ose z
$k_{2Cx}$	[-]	Spojovací tuhost výstupní hřídele v ose x
$k_{2Cy}$	[-]	Spojovací tuhost výstupní hřídele v ose y
$k_{2Rx}$	[N·m·rad <sup>-1</sup> ]	Torzni tuhost uložení výstupní hřídele v ose x
$k_{2Ry}$	[N·m·rad <sup>-1</sup> ]	Torzni tuhost uložení výstupní hřídele v ose y

$k_{2Tx}$	$[\text{N}\cdot\text{m}^{-1}]$	Translační tuhost uložení výstupní hřídele v ose x
$k_{2Ty}$	$[\text{N}\cdot\text{m}^{-1}]$	Translační tuhost uložení výstupní hřídele v ose y
$k_{2x}$	$[\text{N}\cdot\text{m}^{-1}]$	Tuhost ložiska ozubeného kola v ose x
$k_{2y}$	$[\text{N}\cdot\text{m}^{-1}]$	Tuhost ložiska ozubeného kola v ose y
$k_{2z}$	$[\text{N}\cdot\text{m}^{-1}]$	Tuhost ložiska ozubeného kola v ose z
$k_A$	$[\text{N}\cdot\text{m}^{-1}]$	Radiální tuhost ložiska A
$k_B$	$[\text{N}\cdot\text{m}^{-1}]$	Radiální tuhost ložiska B
$k_m$	$[\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{rad}^{-1}]$	Torzni tuhost vstupní hřídele (hřídele motoru)
$k_{tb}$	$[\text{N}\cdot\text{m}^{-1}]$	Torzni tuhost výstupní hřídele
$k_{tm}$	$[\text{N}\cdot\text{m}^{-1}]$	Torzni tuhost vstupní hřídele
$k_{tp}$	$[\text{N}\cdot\text{m}^{-1}]$	Torzni tuhost hřídele mezi pastorky
$k_z$	$[\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{rad}^{-1}]$	Torzni tuhost výstupní hřídele (hřídele zátěže)
$k_{z1}$	$[\text{N}\cdot\text{m}^{-1}]$	Tuhost záběru ozubení 1. převodu
$k_{z2}$	$[\text{N}\cdot\text{m}^{-1}]$	Tuhost záběru ozubení 2. převodu
$k_{zr}$	$[\text{N}\cdot\text{m}^{-1}]$	Redukovaná tuhost ozubení
$m_1$	$[\text{kg}]$	Hmotnost hřídele pastorku
$m_2$	$[\text{kg}]$	Hmotnost hřídele ozubeného kola
$M_1(t)$	$[\text{N}\cdot\text{m}]$	Moment působící na pastorek
$M_2(t)$	$[\text{N}\cdot\text{m}]$	Moment působící na ozubené kolo
$M_s$	$[\text{N}\cdot\text{m}]$	Synchronizační moment
$M_{stř}$	$[\text{N}\cdot\text{m}]$	Střední hodnota zátěžného momentu
$n_p$	$[\text{s}^{-1}]$	Otáčky pastorku
$r_1$	$[\text{m}]$	Poloměr pastorku
$r_2$	$[\text{m}]$	Poloměr ozubeného kola
$r_k$	$[\text{m}]$	Střední poloměr kuželové plochy synchronizační spojky
$r_{k1}$	$[\text{m}]$	Poloměr ozubeného kola 1. převodu
$r_{k2}$	$[\text{m}]$	Poloměr ozubeného kola 2. převodu
$r_{p1}$	$[\text{m}]$	Poloměr pastorku 1. převodu
$r_{p2}$	$[\text{m}]$	Poloměr pastorku 2. převodu
$t_s$	$[\text{s}]$	Čas řazení
$x_1$	$[\text{m}]$	Posunutí středu pastorku v ose x
$x_2$	$[\text{m}]$	Posunutí středu ozubeného kola v ose x
$y_1$	$[\text{m}]$	Posunutí středu pastorku v ose y

$y_2$	[m]	Posunutí středu ozubeného kola v ose y
$z_1$	[m]	Posunutí středu pastorku v ose z
$z_2$	[m]	Posunutí středu ozubeného kola v ose z
$z_{k1}$	[-]	Počet zubů ozubeného kola 1. převodu
$z_{k2}$	[-]	Počet zubů ozubeného kola 2. převodu
$z_{p1}$	[-]	Počet zubů pastorku 1. převodu
$z_{p2}$	[-]	Počet zubů pastorku 2. převodu
$R_{z1}$	[-]	Distribuční matice záběru ozubení 1. převodu
$R_{z2}$	[-]	Distribuční matice záběru ozubení 2. převodu
$\ddot{x}$	[-]	Vektor zrychlení systému
$\dot{x}$	[-]	Vektor rychlostí systému
$\alpha_n$	[°]	Normálový úhel záběru
$\gamma_t$	[°]	Úhel kuželové třecí plochy
$\dot{\psi}_1$	[rad·s <sup>-1</sup> ]	Úhlová rychlost klopení vstupní hřídele v ose x
$\dot{\psi}_2$	[rad·s <sup>-1</sup> ]	Úhlová rychlost klopení výstupní hřídele v ose x
$\ddot{\theta}_1$	[rad·s <sup>-2</sup> ]	Úhlové zrychlení klopení vstupní hřídele v ose y
$\ddot{\theta}_2$	[rad·s <sup>-2</sup> ]	Úhlové zrychlení klopení výstupní hřídele v ose y
$\dot{\theta}_2$	[rad·s <sup>-1</sup> ]	Úhlová rychlost klopení vstupní hřídele v ose x
$\dot{\theta}_2$	[rad·s <sup>-1</sup> ]	Úhlová rychlost klopení výstupní hřídele v ose x
$\dot{\varphi}_1$	[rad·s <sup>-1</sup> ]	Úhlová rychlost pastorku
$\ddot{\varphi}_1$	[rad·s <sup>-2</sup> ]	Úhlové zrychlení pastorku
$\dot{\varphi}_2$	[rad·s <sup>-1</sup> ]	Úhlová rychlost ozubeného kola
$\ddot{\varphi}_2$	[rad·s <sup>-2</sup> ]	Úhlové zrychlení ozubeného kola
$\dot{\varphi}_m$	[rad·s <sup>-1</sup> ]	Úhlová rychlost vstupní hřídele
$\ddot{\varphi}_m$	[rad·s <sup>-2</sup> ]	Úhlové zrychlení vstupní hřídele
$\dot{\varphi}_z$	[rad·s <sup>-1</sup> ]	Úhlová rychlost výstupní hřídele
$\ddot{\varphi}_z$	[rad·s <sup>-2</sup> ]	Úhlové zrychlení výstupní hřídele
$\ddot{\psi}_1$	[rad·s <sup>-2</sup> ]	Úhlové zrychlení klopení vstupní hřídele v ose x
$\ddot{\psi}_2$	[rad·s <sup>-2</sup> ]	Úhlové zrychlení klopení výstupní hřídele v ose x
$\theta_1$	[rad]	Klopení vstupní hřídele v ose x
$\theta_2$	[rad]	Klopení výstupní hřídele v ose x
$\varphi_1$	[rad]	Natočení pastorku
$\varphi_2$	[rad]	Natočení ozubeného kola

$\varphi_h$	[rad]	Natočení výstupní hřídele
$\varphi_b$	[rad]	Natočení setrvačníku na výstupu
$\varphi_{k1}$	[rad]	Natočení ozubeného kola 1. převodu
$\varphi_{k2}$	[rad]	Natočení ozubeného kola 2. převodu
$\varphi_m$	[rad]	Natočení vstupní hřídele
$\varphi_m$	[rad]	Natočení setrvačníku na vstupu
$\varphi_{p1}$	[rad]	Natočení pastorku 1. převodu
$\varphi_{p2}$	[rad]	Natočení pastorku 2. převodu
$\varphi_z$	[rad]	Natočení výstupní hřídele
$\psi_1$	[rad]	Klopení vstupní hřídele v ose x
$\psi_2$	[rad]	Klopení výstupní hřídele v ose x
$\omega_1$	[rad·s <sup>-1</sup> ]	Úhlová rychlost vstupní hřídele, před zahájením řazení
$\omega_2$	[rad·s <sup>-1</sup> ]	Úhlová rychlost vstupní hřídele, po skončení řazení
$\mathbf{u}$	[-]	Vlastní vektor modální matice
$G$	[MPa]	Modul pružnosti v krutu
$Jk_1$	[kg·m <sup>2</sup> ]	Moment setrvačnosti 1. ozubeného kola
$Jk_2$	[kg·m <sup>2</sup> ]	Moment setrvačnosti 2. ozubeného kola
$Jp_1$	[kg·m <sup>2</sup> ]	Moment setrvačnosti 1. pastorku
$Jp_2$	[kg·m <sup>2</sup> ]	Moment setrvačnosti 2. pastorku
$R$	[m]	Poloměr hřídele
$b$	[N·s·m <sup>-1</sup> ]	Tlumení ozubení
$e(t)$	[rad]	Chyba převodu
$f$	[Hz]	Frekvence
$k(t)$	[N·m <sup>-1</sup> ]	Tuhost ozubení
$kt_s$	[N·m·rad <sup>-1</sup> ]	Torzní tuhost řadicí spojky
$l$	[m]	Délka hřídele
$n$	[-]	Počet třecích dvojic synchronizační spojky
$\mathbf{A}$	[-]	Modální matice systému
$\mathbf{B}$	[-]	Matice tlumení
$\mathbf{F}(t)$	[-]	Vnější zatížení
$\mathbf{K}$	[-]	Matice tuhostí
$\mathbf{M}$	[-]	Matice hmotností
$\mathbf{x}$	[-]	Vektor rychlostí systému

---

$\beta$	[°]	Úhel sklonu ozubení
$\beta$	[-]	Koeficient určující chování metody
$\gamma$	[-]	Koeficient určující chování metody
$\mu$	[-]	Součinitel tření synchronizační spojky