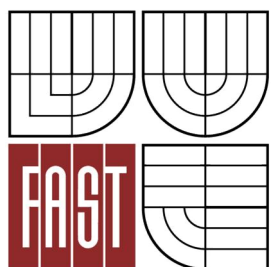




VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ  
BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STAVEBNÍ  
ÚSTAV STAVEBNÍ MECHANIKY

FACULTY OF CIVIL ENGINEERING  
INSTITUTE OF STRUCTURAL MECHANICS

# ANALÝZA ÚČINKŮ ZATÍŽENÍ VĚTREM NA STAVEBNÍ KONSTRUKCE

WIND LOADS OF BUILDING STRUCTURES

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE  
BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE  
AUTHOR

MARTIN ŠTĚRBA

VEDOUCÍ PRÁCE  
SUPERVISOR

Ing. PETR HRADIL, Ph.D.

BRNO 2015



**Studijní program** B3607 Stavební inženýrství  
**Typ studijního programu** Bakalářský studijní program s prezenční formou studia  
**Studijní obor** 3608R001 Pozemní stavby  
**Pracoviště** Ústav stavební mechaniky

## ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

**Student** Martin Štěrba

**Název** Analýza účinků zatížení větrem na stavební konstrukce

**Vedoucí bakalářské práce** Ing. Petr Hradil, Ph.D.

**Datum zadání bakalářské práce** 30. 11. 2014

**Datum odevzdání bakalářské práce** 29. 5. 2015

V Brně dne 30. 11. 2014

.....  
prof. Ing. Drahomír Novák, DrSc.  
Vedoucí ústavu

.....  
prof. Ing. Rostislav Drochytka, CSc., MBA  
Děkan Fakulty stavební VUT

## **Podklady a literatura**

- [1] Lienhard, J.H.: Synopsis of lift, drag and vortex frequency data for rigid circular cylinders, 1966
- [2] ČSN EN 1991-1-4 Eurokód 1: Zatížení konstrukcí - Část 1-4: Obecná zatížení - Zatížení větrem
- [3] Turbulence modeling using ANSYS/CFX, 2013
- [4] Kozubková, M.: Modelování proudění tekutin Fluent/CFX, Ostrava 2008

## **Zásady pro vypracování**

Seznamte s problematikou výpočtu zatížení větrem na stavební konstrukce. Seznamte se s problematikou modelování účinků vzdušného proudu pomocí programového systému ANSYS/CFX.

Proveďte a zdokumentujte parametrické výpočty odezvy zatížení větrem na tuhých kruhových válcích. Výpočty proveďte pro válce o vnějším průměru 0,1 m, 0,5 m, 1,0 m a 2,0 m. U válců předpokládejte hladký povrch a povrch s drsností 0,2 mm.

Výpočty proveďte v programovém systému ANSYS/CFX.

Výpočty proveďte pro rychlosti proudění vzduchu, které odpovídají Reynoldsovým číslům o velikosti  $2E+5$ ,  $4e+5$ ,  $6E+5$ ,  $8e+5$ ,  $1E+6$ ,  $2e+6$  a  $3,5E+6$ .

Pro všechny výpočty proveďte vyhodnocení závislosti Strouhalova a Reynoldsova čísla, stanovte součinitele odporu v podélném a příčném směru od proudění větru a určete průběh podélných a příčných sil.

## **Struktura bakalářské/diplomové práce**

VŠKP vypracujte a rozčleňte podle dále uvedené struktury:

1. Textová část VŠKP zpracovaná podle Směrnice rektora "Úprava, odevzdávání, zveřejňování a uchování vysokoškolských kvalifikačních prací" a Směrnice děkana "Úprava, odevzdávání, zveřejňování a uchování vysokoškolských kvalifikačních prací na FAST VUT" (povinná součást VŠKP).
2. Přílohy textové části VŠKP zpracované podle Směrnice rektora "Úprava, odevzdávání, zveřejňování a uchování vysokoškolských kvalifikačních prací" a Směrnice děkana "Úprava, odevzdávání, zveřejňování a uchování vysokoškolských kvalifikačních prací na FAST VUT" (nepovinná součást VŠKP v případě, že přílohy nejsou součástí textové části VŠKP, ale textovou část doplňují).

.....  
Ing. Petr Hradil, Ph.D.  
Vedoucí bakalářské práce

## **Abstrakt**

Bakalářská práce se zabývá analýzou účinků zatížení větrem na stavební konstrukce. V rámci práce je řešeno numerické modelování obtékání tuhých válcových těles při vysokých Reynoldsových číslech. K simulacím byl použit výpočetní software ANSYS CFX. Výstupem práce jsou průběhy Strouhalova čísla a průběhy součinitelů odporu a vztlaku v závislosti na Reynoldsově čísle.

## **Klíčová slova**

turbulence, mezní vrstva, odtrhávání vírů, Reynoldsovo číslo, Strouhalovo číslo, součinitel odporu, součinitel vztlaku, ANSYS CFX, SST, k-Epsilon, stěnové funkce

## **Abstract**

The bachelor thesis deals with the analysis of the effects of wind load on building structures. In the context of the work is solved the numerical modeling of flow around the solid cylindrical bodies at high Reynolds numbers. To the simulations has been used computational software ANSYS CFX. The outputs of the work are the values of Strouhal numbers and the values of drag and lift coefficient depending on the Reynolds number.

## **Keywords**

turbulence, boundary layer, vortex shedding, Reynolds number, Strouhal number, drag coefficient, lift coefficient, ANSYS CFX, SST, k-Epsilon, wall functions



### **Bibliografická citace VŠKP**

Martin Štěrba *Analýza účinků zatížení větrem na stavební konstrukce*. Brno, 2015. s 117, 0 s. příl. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, Ústav stavební mechaniky. Vedoucí práce Ing. Petr Hradil, Ph.D.





**Prohlášení:**

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci zpracoval samostatně a že jsem uvedl všechny použité informační zdroje.

V Brně dne 29.5.2015

.....  
podpis autora  
Martin Štěřba



## **Poděkování**

Chtěl bych poděkovat svému vedoucímu bakalářské práce Ing. Petru Hradilovi, Ph.D. za jeho vstřícný přístup, věnovaný čas a podporu v průběhu tvorby této bakalářské práce.

Práce vznikla za podpory GA14-25320S - "Aspekty použití komplexních nelineárních materiálových modelů".



# OBSAH

ÚVOD.....	13
1 PROUDĚNÍ TEKUTIN.....	15
1.1 Rozdělení proudění.....	16
1.2 Teorie turbulentního proudění.....	19
1.3 Popis proudění.....	23
1.4 Rovnice popisující proudění.....	24
2 OBTEKÁNÍ TĚLES.....	27
2.1 Mezní vrstva.....	27
2.2 Odtržení proudu.....	30
2.3 Odpor těles.....	32
2.4 Obtékání válce.....	34
3 MATEMATICKÉ MODELOVÁNÍ PROUDĚNÍ.....	39
3.1 Reynoldsovo časové středování.....	41
3.2 RANS modely.....	43
3.2.1 Reynoldsův napěťový model ( <i>Reynolds Stress Model – RSM</i> ).....	43
3.2.2 Modely využívající Boussinesquovu hypotézu.....	43
4 MODELOVÁNÍ OBTEKÁNÉHO VÁLCE.....	49
4.1 Vytváření geometrických modelů.....	54
4.1.1 Rozměry modelů.....	54
4.1.2 Postup vytváření modelů.....	55
4.2 Vytváření výpočetní sítě.....	61
4.2.1 Kvalita výpočetní sítě.....	63
4.2.2 Modelování v blízkosti stěny.....	70
4.2.3 Stanovení tloušťky prvků u stěny.....	76
4.2.4 Postup vytváření sítě.....	80
4.2.5 Test nezávislosti sítě.....	86

4.3	Nastavení parametrů výpočtu .....	87
4.3.1	Definice okrajových podmínek .....	87
4.3.2	Nastavení vlastností tekutiny .....	90
4.3.3	Nastavení typu analýzy .....	91
4.3.4	Nastavení řešiče .....	94
4.4	Výpočet .....	96
4.5	Získávání výstupů z výpočtu .....	98
5	VYHODNOCENÍ VÝSLEDKŮ .....	101
5.1	Test nezávislosti sítě .....	101
5.2	Závislost Strouhalova čísla a průběhy součinitelů odporu a vztlaku v závislosti na Reynoldsově čísle .....	102
5.3	Zhodnocení získaných výsledků .....	109
	ZÁVĚR .....	111
	SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY .....	113
	SEZNAM OBRÁZKŮ .....	115
	SEZNAM TABULEK .....	117

# ÚVOD

Zatížení větrem představuje z hlediska stavebních konstrukcí významný prvek namáhán. A to jak z hlediska statického, kdy se uvažuje především s velikostí sil působících v důsledku tlaku, případně sání větru, tak z hlediska dynamického, kdy se velikost působících sil periodicky mění v čase, a kdy může dojít k nebezpečnému rozkmitání konstrukce. Dynamické zatížení větrem je závažné především u vysokých štíhlých konstrukcí.

V rámci této práce bylo simulováno proudění vzduchu okolo tuhých válců, které bylo uvažováno jako rovinné. Chování vlastního tělesa válce nebylo v práci řešeno. Byly vyhodnocovány pouze silové účinky proudícího vzduchu na těleso, konkrétně velikost odporové a vztlakové síly a jejich frekvence. Válcová tělesa pak mohou ve stavební praxi představovat např. konstrukci stožáru, komínu nebo věže.

Výpočty byly provedeny v modulu *CFX* programového systému *ANSYS 15.0*. Jedná se o program patřící do skupiny tzv. *CFD (Computational Fluid Dynamics)* softwarů sloužících k numerickému modelování proudění tekutin. Tyto programy jsou hojně využívány jak v inženýrské praxi, tak ve výzkumné a vzdělávací oblasti.

Při stanovování účinků větru na konstrukce se vychází z fyzikálních zákonitostí. Proudění vzduchu jakožto tekutiny je popsáno pomocí poznatků mechaniky tekutin, proto je první kapitola věnována teorii popisující proudění.

Vliv proudící tekutiny na obtékané těleso je popsán v druhé kapitole. Je uveden mechanismus vzniku čelního odporu a vztlaku. Dále je blíže objasněn vývoj ve způsobu obtékání válce při narůstající rychlosti proudění.

Ve třetí kapitole jsou popsány přístupy numerického modelování proudění. Je uveden způsob zjednodušování základních rovnic popisujících proudění. Dále jsou uvedeny některé modely turbulence používané modulem *CFX*.

Čtvrtá kapitola popisuje vlastní modelování úlohy v programu *ANSYS*. Je popsán postup při tvorbě geometrických modelů a výpočetních sítí, jsou uvedena jednotlivá nastavení parametrů výpočtů a způsob získávání výstupů. Kapitola je doplněna o některé obecné poznatky týkající se numerického modelování proudění.

V páté, poslední kapitole, jsou pak prezentovány získané výsledky a je učiněno jejich zhodnocení na základě porovnání s experimentálně naměřenými daty.





# 1 PROUDĚNÍ TEKUTIN

Chování tekutin, tedy kapalin nebo plynů, se podstatně odlišuje od chování pevných těles. Členění hmoty na pevné látky a tekutiny vyplývá z jejich rozdílné odezvy na účinek síly, snažící se změnit původní objem a tvar hmotného elementu. Pevné látky vytvářejí značný odpor proti změnám objemu i tvaru vznikem vnitřních napětí, která s přihlédnutím na Hookův zákon, jsou úměrná způsobeným deformacím. Tekutiny naopak podléhají deformacím bez ohledu na velikost působící síly, vnitřní napětí vyvolaná v tekutině jsou podle Newtonovy rovnice úměrná gradientu rychlosti. Kapaliny kladou malý odpor pomalým změnám tvaru a naopak jejich odpor vůči změnám objemu je velký, protože kapaliny lze považovat za téměř nestlačitelné. Plyny v porovnání s kapalinami podléhají snadno jak změnám objemu, tak i tvaru. Vysvětlením rozdílných vlastností pevných látek, kapalin a plynů je rozdílná velikost přitažlivých mezimolekulárních sil, které jsou u pevných látek největší, u plynů jsou naopak tyto síly velmi slabé. [3]

Tekutina sestává z jednotlivých molekul, jejichž chování popisuje kinetická teorie látek. Při řešení úloh mechaniky tekutin se však používá odlišný přístup, kdy je tekutina považována za spojité kontinuum a je zanedbávána její molekulární struktura. Oprávněnost přijetí tohoto modelu je odvislá od fyzikálních vlastností konkrétní tekutiny.

Přijatelnost předpokladu spojitosti tekutiny se obvykle ověřuje pomocí Knudsenova čísla, které vyjadřuje poměr mezi střední volnou dráhou molekul a nejmenším měřítkem.

$$Kn = \frac{\lambda}{l} \tag{1.1}$$

Prostředí je považováno za kontinuum, je-li splněna podmínka  $Kn \ll 1$ . Potom lze uvažovat tzv. elementární objem, který představuje hmotný bod z hlediska pohybu tekutiny jakožto kontinua. Zároveň však obsahuje dostatečné množství molekul, aby bylo možné vyjádřit jednotlivé fyzikální veličiny jako je hustota a rychlost tekutiny jako průměrnou vlastnost molekul obsažených v tomto elementárním objemu. Částicí tekutiny se pak obvykle rozumí oblast v tekutině o typickém rozměru  $10^{-4}$  m. [5]

## 1.1 Rozdělení proudění

Proudění je možné dělit jednak podle kinematických hledisek, jednak z hlediska fyzikálních vlastností proudící tekutiny. [4]

Z hlediska kinematického je proudění možné dělit:

a) Podle uspořádání v prostoru, kdy jednotlivé veličiny jako např. rychlost jsou určeny polohou v prostoru. Potom rozlišujeme:

- Proudění jednorozměrné (1D),  $u = u(s)$  – proudění po křivce
- Proudění dvojrozměrné neboli rovinné (2D),  $u = u(x, y)$
- Proudění třírozměrné neboli prostorové (3D),  $u = u(x, y, z)$

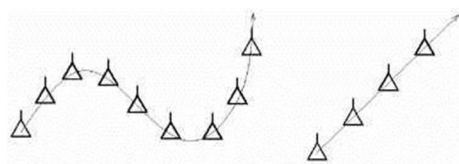
b) Podle závislosti na čase, kdy rozlišujeme:

- Proudění ustálené (stacionární), které je nezávislé na čase  
 $u \neq u(t); \partial/\partial t = 0$
- Proudění neustálené (nestacionární), kdy jsou jednotlivé veličiny závislé na čase  
 $u = u(t); \partial/\partial t \neq 0$

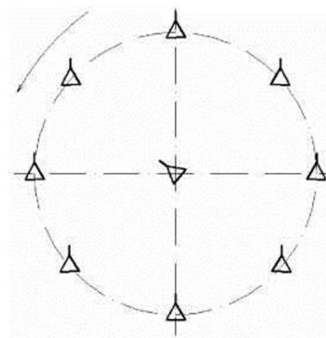
Z hlediska fyzikálních vlastností tekutiny, lze proudění dělit:

a) Proudění ideální (nevazké) tekutiny, které může být:

- Potenciální (nevířivé), pro které platí, že se částice tekutiny pohybují přímočaře nebo křivočaře tak, že se vůči pozorovateli neotáčejí kolem vlastní osy (viz **Obr. 1-1**). Natočení částice na křivé dráze je kompenzováno stejně velkým natočením částice kolem vlastní osy, ale v opačném smyslu. Mezi potenciální proudění patří rovněž potenciální vír, u něhož částice krouží kolem vírového vlákna potenciálně s výjimkou částice, která tvoří vírové vlákno (viz **Obr. 1-2**).



Obr. 1-1: Potenciální proudění [4]



Obr. 1-2: Potenciální vír [4]

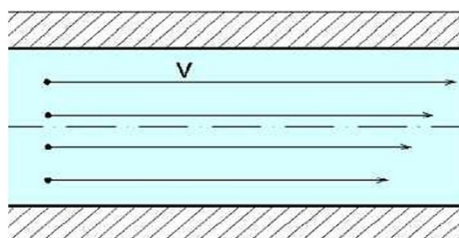
- Vířivé, pro které platí, že částice vůči pozorovateli natáčí kolem vlastních os (viz Obr. 1-3).



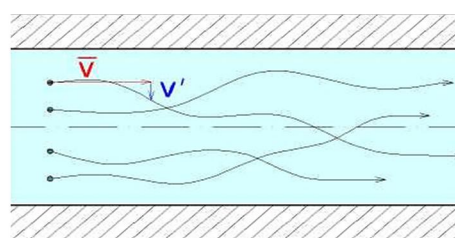
Obr. 1-3: Vířivé proudění [4]

b) Proudění skutečné (vazké) tekutiny, kdy rozeznáváme:

- Laminární proudění, kdy se částice pohybují v tenkých vrstvách, aniž se přemísťují po průřezu (viz Obr. 1-4).
- Turbulentní proudění, kdy částice mají kromě podélné rychlosti také turbulentní (flukтуаční) rychlost, již se přemísťují po průřezu (viz Obr. 1-5).

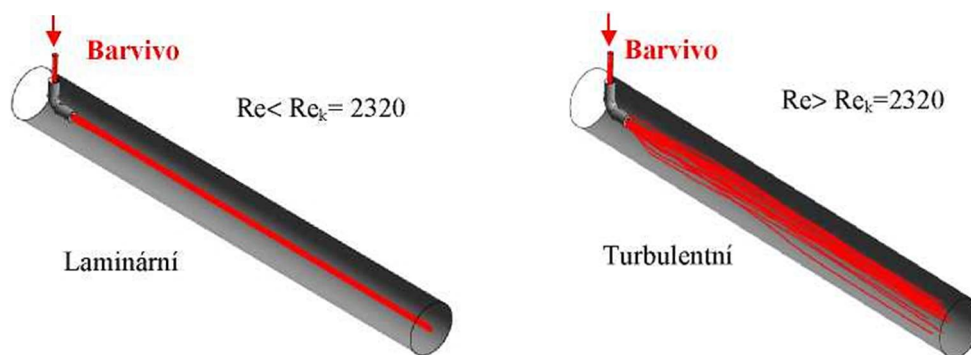


Obr. 1-4: Laminární proudění [4]



Obr. 1-5: Turbulentní proudění [4]

Z výše uvedeného rozdělení vyplývá, že proudění skutečných tekutin lze kvalitativně charakterizovat jako laminární nebo turbulentní. Existenci obou proudění názorně ukazuje Reynoldsův experiment (viz **Obr. 1-6**), při kterém je do tekutiny proudící v kruhovém potrubí přiváděno tenkou trubicí barvivo. Při malých rychlostech proudu zůstane barevné vlákno neporušeno, z čehož je patrné, že pohyb se děje ve vrstvách a částice tekutiny se nepromíchávají. Zvýší-li se však rychlost nad určitou kritickou hodnotu, dochází k intenzivnímu míšení částic následkem jejich podružných (turbulentních) pohybů ve všech směrech. Částice tekutiny neustále přecházejí z jedné vrstvy do druhé, přičemž dochází k výměně kinetické energie a jejich rychlosti po průřezu se značně vyrovnávají. Takové proudění je nazýváno turbulentním. [4]



**Obr. 1-6:** Reynoldsův pokus [4]

Přechod mezi laminárním a turbulentním prouděním je definován pomocí tzv. Reynoldsova čísla. Reynoldsovo číslo je tzv. podobnostní číslo a udává poměr setrvačných a viskózních sil. Je dáno vztahem:

$$Re = \frac{\rho \cdot u \cdot D}{\mu} = \frac{u \cdot D}{\nu} \quad (1.2)$$

přičemž platí:

$$\mu = \rho \cdot \nu \quad (1.3)$$

kde  $\rho$  je hustota tekutiny,  $u$  je rychlost tekutiny,  $D$  je charakteristický rozměr tělesa (např. průměr potrubí nebo válce),  $\mu$  je dynamická viskozita a  $\nu$  je kinematická viskozita tekutiny.

První forma vzorce se používá pro stlačitelné tekutiny např. vzduch. Pokud je hustota uvažována konstantní, používá se většinou druhá definice, která je upravena pomocí vztahu mezi dynamickou a kinematickou viskozitou z rovnice (1.3).

Přechod mezi laminárním a turbulentním prouděním nestlačitelné tekutiny v kruhovém potrubí byl na základě Reynoldsova experimentu definován hodnotou Reynoldsova kritického čísla  $Re_k = 2320$ . Avšak pro jiná proudění, než je proudění v kruhovém potrubí, je problematika přechodu laminárního proudění na turbulentní složitější. Existují případy, kdy již při hodnotě  $Re = 3$  je proudění turbulentní a naopak existují případy, kdy je při hodnotě  $Re = 8000$  proudění ještě stále laminární. Kritická hodnota Reynoldsova čísla je tak silně závislá na konkrétních podmínkách. [1]

## 1.2 Teorie turbulentního proudění

Turbulentní proudění obsahuje prostorové struktury, tzv. turbulentní víry, které mohou nabývat různých rozměrů. Velikost největší vírů, označovaná jako tzv. délkové makroměřítko, je dána rozměry oblasti, kterou tekutina proudí. V oblasti nemůže vzniknout vír větší, než daná oblast. Nejmenší velikost vírů, tzv. délkové mikroměřítko, je dáno fyzikálními vlastnostmi tekutiny, konkrétně její viskozitou tekutiny. Velké víry se postupně rozpadají na menší tak dlouho, dokud nedosáhnou minimální možné velikosti (déloké mikroměřítko). Tento kaskádní proces je ukončen disipací (přeměnou) kinetické energie nejmenších vírů na teplo. Další charakteristikou víru je rychlost jeho pohybu, která je nazývána rychlostní měřítko. Nutné je také definovat dobu existence víru. Tato doba se označuje jako časové měřítko. Pro každý vír v turbulentním proudu tedy platí, že je popsán pomocí měřítka délkového  $l$ , rychlostního  $v$  a časového  $t$ . Na základě těchto parametrů lze Reynoldsovo číslo vyjádřit jako:

$$Re = \frac{u \cdot D}{\nu} = \frac{v \cdot l}{\nu} = \frac{v \cdot l}{\nu} \cdot \frac{l}{l} = \frac{l^2}{\frac{\nu}{v}} = \frac{t_v}{t_t} \quad (1.4)$$

kde  $t_t$  označuje časové měřítko přenosu turbulentních vírů o makroměřítku  $l$  a  $t_v$  označuje časové měřítko molekulární difúze.

Proudění pak lze charakterizovat pomocí upravené formulace Reynoldsova čísla následovně:

$t_v < t_t$  tj.  $Re < 1$ : Jedná se o laminární proudění, kdy procesy molekulární difúze převládají a turbulentní víry zanikají.

$t_v > t_t$  tj.  $Re > 1$ : Proudění je turbulentní a víry v něm přetrvávají. Tato nerovnost je splněna i pro poměrně malé hodnoty parametrů proudění, na základě čehož lze považovat většinu proudění za turbulentní.

$t_v \gg t_t$  tj.  $Re \gg 1$ : Turbulence je plně vyvinuta a viskózní děje mohou být zanedbány vzhledem k dynamice vírů. Víry v plně vyvinutém turbulentním proudění jsou téměř neviskózní, jsou tedy nezávislé na vlastnostech tekutiny (Reynoldsova podobnost).

$t_v \approx t_t$  tj.  $Re \approx 1$ : Nastává přechodový stav, kdy se laminární stacionární proudění mění na turbulentní nestacionární. K tomu dochází v okamžiku, kdy je překročeno kritické Reynoldsovo číslo  $Re_k$ . Proudění se zpočátku stává periodické, tato změna v chování se označuje jako bifurkace. Při zvyšování Reynoldsova čísla se vytvářejí další nestability, až se proudění stává plně turbulentním.

Z výše uvedeného je patrné, že proudění není jednoznačně pouze laminární nebo turbulentní, ale že ve skutečnosti existují čtyři režimy proudění. [1]

Jednotná definice turbulentního proudění zatím není dána. V literatuře bývá turbulence obvykle popsána svými jednotlivými charakteristickými veličinami, které určují její vlastnosti.

### Náhodnost

Turbulentní režim proudění se vyznačuje náhodným charakterem. Veličiny jako např. rychlost, tlak nebo teplota mají zcela náhodný charakter v závislosti na čase a poloze v prostoru. Tyto veličiny je nutné uvažovat jako náhodné matematické veličiny a k jejich popisu používat statistické metody. Fluktuace (odchylky) bývají většinou o jeden řád nižší než střední (průměrná) hodnota. Tedy např. v případě rychlosti přibližně platí:

$$\frac{u'}{\bar{u}} \approx 0,1 \quad (1.5)$$

kde  $u'$  je fluktuace rychlosti a  $\bar{u}$  je střední hodnota rychlosti.

Jako náhodná funkce je fluktuace dobře popsatelná statistickými veličinami (hustota pravděpodobnosti, spektrum, distribuční funkce atd.), jenž jsou obyčejné funkce prostoru a času. [1]

### Disipace

Turbulence je disipativní proces, v důsledku čehož dochází ke zvýšené přeměně kinetické energie na teplo. Jde o nevratný děj, který vzniká v důsledku viskózních napětí. Rychlost disipace pro jednotku hmotnosti je závislá pouze na délkovém měřítku  $l$  a střední rychlosti  $\bar{u}$  a je definována Kolmogorovým vztahem:

$$\varepsilon = \frac{\bar{u}^3}{l} \quad (1.6)$$

Tento vztah není teoreticky dokázán, je však experimentálně potvrzen. Z rovnice je patrné, že rychlost disipace není závislá na viskozitě tekutiny, což je jeden z paradoxů turbulence. Nejmenší možná velikost vírů před jejich úplným rozpadem a přeměnou na teplo se označuje jako Kolmogorovo mikroměřítko, které je dáno vztahem:

$$\eta = \left( \frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (1.7)$$

kde  $\nu$  je kinematická viskozita a  $\varepsilon$  je rychlost disipace.

Turbulentní proudění tedy sestává ze spojitě oblastí vírových struktur, jejichž délková měřítka leží mezi makroměřítkem  $l$  a mikroměřítkem  $\eta$ . V důsledku fluktuací turbulentního proudu vznikají vazká napětí a dochází k disipaci. Zvyšuje se tedy vnitřní energie tekutiny na úkor kinetické energie turbulence, ta proto potřebuje trvalý přísun energie k vyrovnání těchto ztrát, jinak rychle zaniká. [1]

### Vířivost

Turbulentní proud obsahuje víry s rotační složkou rychlosti. Rychlost rotace vírů je úměrná jejich velikosti. V důsledku rozpadu vírů se jejich rychlost rotace zvyšuje a platí že:

$$\omega_{\eta} \approx \frac{u'}{\eta} \gg \omega_l \approx \frac{\bar{u}}{l} \quad (1.8)$$

kde  $u'$  je fluktuace rychlosti,  $\eta$  je Kolmogorovo mikroměřítko,  $\bar{u}$  je střední hodnota rychlosti a  $l$  je délkové makroměřítko.

Vířivost disipačních oblastí je řádově vyšší než hodnota vířivosti v celé oblasti. Pole vířivosti je prostorové s významným dynamickým vlivem. [1]

### Nelinearita

Vznik turbulentního proudění je podmíněn uplatněním nelinearit, kdy dochází k růstu malých poruch. Vývoj i interakce jednotlivých struktur v turbulentním proudovém poli lze popsat pouze nelineárním matematickým modelem. [5]

### Difuzivita

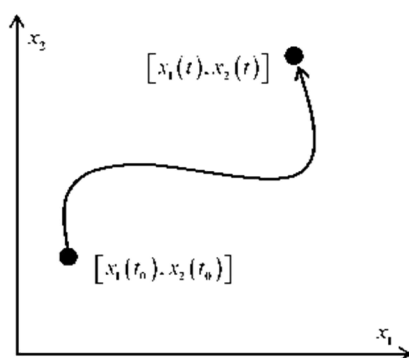
Nejvýznamnější vlastností turbulence je její schopnost značně zvýšit tok hmoty a energie v proudovém poli. Dochází k promíchávání transportovaných skalárních veličin (teplota, tlak) podstatně rychleji než při molekulární difúzi. Lze odhadovat, že součinitel molekulární difúze je v běžných technických aplikacích alespoň o dva řády nižší, než běžná hodnota součinitele turbulentní difúze. Turbulentní proudění tak velmi výrazně homogenizuje dané prostředí. [1, 5]



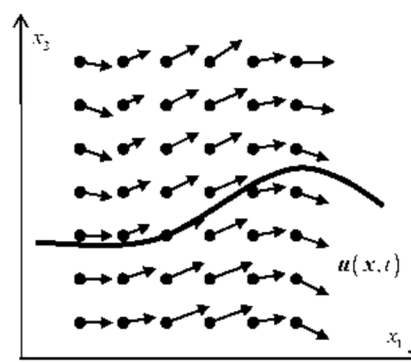
### 1.3 Popis proudění

Pohyb tekutiny lze z kinematického hlediska zkoumat dvěma způsoby. V prvním způsobu je sledován pohyb libovolného elementárního objemu tekutiny, zatímco při druhém způsobu je sledována změna kinematických veličin v jednotlivých bodech oblasti proudění. První metoda, označována jako Lagrangeova, tedy zkoumá pohyb z hlediska individuálních částic, kdyžto druhá metoda, Eulerova, vyšetřuje stav proudící tekutiny v konkrétním bodě oblasti. V praxi se obvykle využívá Eulerova metoda, kdy je řešeno celé pole sledovaných veličin ve zkoumané oblasti. Lagrangeova metoda je pak používána při různých speciálních úlohách, např. zkoumání rozptylu skalární veličiny vázané na částice tekutiny.

S Lagrangeovou formou popisu je spojen pojem trajektorie částice, tedy dráha, kterou částice urazí v daném čase (viz **Obr. 1-7**). Při experimentech využívajících vizualizačních metod lze vidět právě trajektorie částic. S metodou Eulerova popisu naopak souvisí pojem proudnice (proudová čára). Proudnice je definována jako množina bodů, v nichž jsou vektory rychlosti tekutiny v daném časovém okamžiku tečné. Platí, že každým bodem vektorového pole může procházet pouze jediná proudnice (viz **Obr. 1-8**).



**Obr. 1-8:** Lagrangeův popis [5]



**Obr. 1-7:** Eulerův popis [5]

Proudnice vyjadřuje obraz proudění v daném časovém okamžiku, zatímco trajektorie představuje pohyb částice v určitém časovém intervalu. Obecně bývá rychlostní pole proměnné v čase, proto jsou proudnice a trajektorie představovány rozdílnou soustavou křivek. Pouze v případě ustáleného proudění, které je neměnné v čase, proudnice a trajektorie vzájemně splývají. V tomto případě se proudnice v čase nemění a částice tedy postupně prochází jejími jednotlivými body.

Znalost trajektorií všech částic tekutiny poskytuje dokonalý popis kinematického chování tekutiny pro daný časový interval. Úplný popis pro určitý časový okamžik dává také systém proudnic pro všechny body oblasti. [5]

## 1.4 Rovnice popisující proudění

Základní rovnice popisující proudění skutečné tekutiny, ať laminární nebo turbulentní, vycházejí ze základních fyzikálních předpokladů o zákonech zachování hmoty, hybnosti a energie.

Zákon zachování hmoty vyjadřuje rovnice spojitosti (kontinuity), která je při uvážení konstantní hustoty dána:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.9)$$

kde  $u$ ,  $v$  a  $w$  jsou složky rychlosti. Rovnice představuje konvektivní (proudovou) změnu toku hmoty. Ta musí být nulová, protože vytkneme-li v tekutině libovolný kontrolní objem, musí být množství tekutiny, které do objemu jeho povrchem vtéká stejné, jako množství, které z něj v daném okamžiku vytéká. Znamená to tedy, že v případě nestlačitelné tekutiny ( $\rho = \text{konst.}$ ) se hmotnost v kontrolním objemu nemůže akumulovat.

Zákon zachování hybnosti popisují Navier-Stokesovy rovnice, které jsou pro nestlačitelnou tekutinu dány vztahy:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f_x \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(vu)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} + \frac{\partial(vw)}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + f_y \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(wu)}{\partial x} + \frac{\partial(wv)}{\partial y} + \frac{\partial(ww)}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + f_z$$

kde  $u$ ,  $v$  a  $w$  jsou složky rychlosti,  $t$  je čas,  $p$  je tlak,  $\rho$  je hustota,  $\nu$  je kinematická viskozita a  $f_{x,y,z}$  značí složky vnější objemové síly.

První člen v rovnicích představuje zrychlení tekutiny, další tři představují nelineární (konvektivní) zrychlení, které způsobuje u vyšších Reynoldsových čísel nestabilitu rovnice a tedy náhodnost. První člen na pravé straně rovnic představuje gradient tlaku, druhý pak představuje smyková napětí tekutiny, která vznikají v důsledku její viskozity. Tato smyková napětí způsobují deformaci tekutiny.

Navier-Stokesovy rovnice byly odvozeny ze silové rovnováhy na elementárním objemu tekutiny:

$$\sum F = 0 \rightarrow F_s + F_t + F_o + F_v = 0 \quad (1.11)$$

kde  $F_s$  je síla setrvačná,  $F_t$  je síla tlaková,  $F_o$  je síla objemová a  $F_v$  je síla třecí (viskózní).

Zákon zachování energie reprezentuje rovnice vedení tepla (pro  $\rho = \text{konst.}$ ):

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial(uT)}{\partial x} + \frac{\partial(vT)}{\partial y} + \frac{\partial(wT)}{\partial z} &= \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \\ + 2\alpha \left( \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) &+ \\ + \alpha \left( \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) & \end{aligned} \quad (1.12)$$

kde  $T$  je termodynamická teplota,  $t$  je čas,  $u$ ,  $v$  a  $w$  jsou složky rychlosti a  $\alpha$  je teplotní vodivost, daná vztahem:

$$\alpha = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_p} \quad (1.13)$$

kde  $\lambda$  je součinitel tepelné vodivosti,  $\rho$  je hustota tekutiny a  $c_p$  je měrná tepelná kapacita za stálého tlaku.

Fyzikální vlastnost, která ovlivňuje vedení tepla v tekutině je v tomto případě teplotní vodivost. První člen představuje akumulaci tepla, další tři členy představují konvekci, tedy přestup tepla v důsledku proudění tekutiny. První člen na pravé straně představuje kondukcii, tedy vedení tepla v tekutině. Poslední dva členy na pravé straně vyjadřují teplo vyvolané deformací a pohybem tekutiny. [1]

Při řešení proudového pole se zpravidla určuje rozložení rychlostí a tlaků v dané oblasti. Neznámými proměnnými jsou tedy tři složky rychlosti  $u$ ,  $v$ ,  $w$  a tlak  $p$ , celkem tedy čtyři neznámé, k jejichž řešení jsou k dispozici tři rovnice Navier-Stokesovy a rovnice spojitosti. Pro řešení soustavy těchto rovnic je třeba znát vnější zrychlení (typicky tíhové zrychlení), hustotu tekutiny  $\rho$  a okrajové podmínky. Navier-Stokesovy rovnice patří mezi nelineární parciální diferenciální rovnice, které nemají obecné řešení. Analytické řešení je dostupné pouze pro jednoduché případy laminárního proudění. V případě řešení složitějšího proudění se pak uplatňují numerické metody, např. metoda konečných objemů.

[4]

## 2 OBTĚKÁNÍ TĚLES

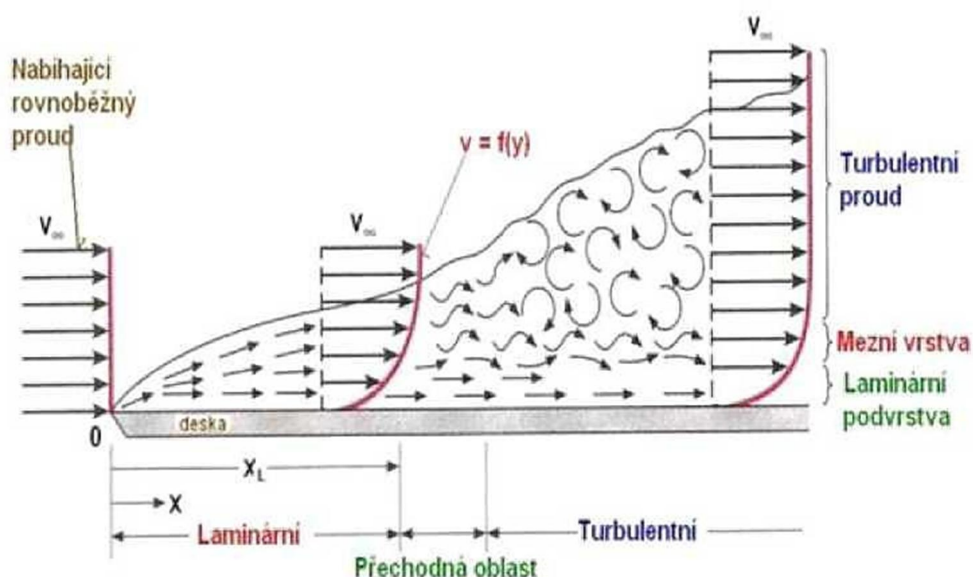
Obtěkání těles je důležitou inženýrskou úlohou nejen v oblasti strojírenství, kdy je řešeno např. obtěkání leteckých profilů nebo automobilů, ale také z hlediska stavebních konstrukcí hrají jevy vznikající při obtěkání významnou roli. Při relativním pohybu tělesa a tekutiny působí na těleso v obecném směru síla, kterou lze rozložit na složku rovnoběžnou se směrem proudění – odporovou sílu a složku kolmou – vztlakovou sílu. Velikost těchto sil může být v čase periodicky proměnná, což je významné z hlediska dynamiky staveb, kdy je třeba zabránit, aby nedocházelo k rezonanci s vlastní frekvencí stavební konstrukce.

### 2.1 Mezní vrstva

Mezní vrstva je oblast v blízkosti obtékané stěny, ve které se významně uplatňuje vliv viskozity tekutiny. Částice tekutiny na stěně obtékaného tělesa ulpívají, jejich rychlost je zde nulová. Se zvětšující se vzdáleností od stěny pak jejich rychlost roste, až dosáhne rychlosti volného proudu. V mezní vrstvě tedy existuje gradient rychlosti kolmý ke stěně a platí:

$$\frac{\partial u}{\partial y} \neq 0 \quad (2.1)$$

Vývoj mezní vrstvy při obtěkání rovinné desky rovnoběžné s proudem nabíhající tekutiny je na **Obr. 2-1**.



**Obr. 2-1:** Vývoj mezní vrstvy [3]

Částice před deskou mají všechny stejnou rychlost i směr. Na povrchu desky částice ulpívají, jejich rychlost je nulová. V blízkosti desky jsou pak částice brzděny pomalejšími částicemi u obtékaného povrchu. Část jejich kinetické energie se přitom přeměňuje třením na teplo. S rostoucí vzdáleností od náběžné hrany jsou třením brzděny částice vzdálenější od povrchu a mezní vrstva tak směrem po proudu narůstá. Rychlostní profily mají spojitý přechod od nulové rychlosti na stěně po rychlost volného proudu na hranici mezní vrstvy. V dostatečné vzdálenosti  $x$  od náběžné hrany se pak rychlostní profil ustálí, tloušťka mezní vrstvy již neroste.

Reynoldsovo číslo lze v případě rovnoběžně obtékané desky vyjádřit jako:

$$Re_x = \frac{u_\infty \cdot x}{\nu} \quad (2.2)$$

kde  $u_\infty$  je rychlost nabíhajícího proudu před deskou,  $x$  je vzdálenost od náběžné hrany a  $\nu$  je kinematická viskozita.

Pokud má nabíhající proud nulovou turbulenci, vzniká v přední části desky laminární mezní vrstva, která pro přibližnou hodnotu  $Re_x = 10^5$  přechází v turbulentní mezní vrstvu s laminární podvrstvou. Má-li však nabíhající proud určitou turbulenci, vzniká turbulentní mezní vrstva již od náběžné hrany. [3]

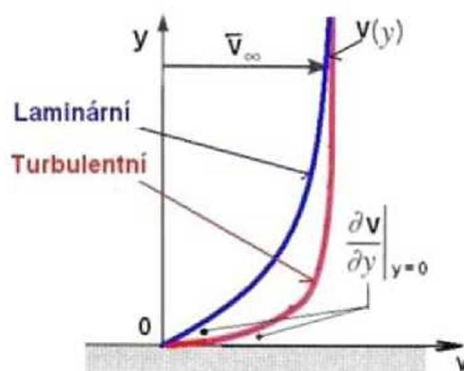
Turbulentní mezní vrstvu lze podle vzdálenosti od stěny rozdělit na tři oblasti (viz **Obr. 2-2**). Vrstva nejbližší stěně se nazývá laminární (viskózní) podvrstva. Proudění je v této vrstvě laminární a je významně ovlivněno molekulární viskozitou. Vnější část mezní vrstvy se označuje jako plně turbulentní vrstva, ve které se již vliv viskozity významně neprojevuje a proudění je zde řízeno turbulencí. Mezi těmito dvěma vrstvami existuje přechodová vrstva, ve které se viskozita i turbulence uplatňují stejnou měrou. [1]



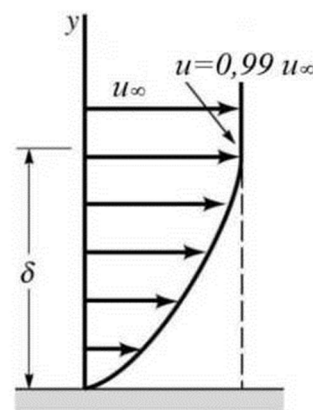
**Obr. 2-2:** Mezní vrstva [1]

Rychlostní profil turbulentní mezní vrstvy je oproti profilu laminární mezní vrstvy plnější (viz **Obr. 2-3**), což je způsobeno difúzním efektem turbulence (zvýšený přenos hybnosti kolmo ke stěně). Gradient rychlosti na stěně je pro laminární mezní vrstvu nižší, než pro vrstvu turbulentní.

Tloušťka mezní vrstvy  $\delta$  je ve srovnání s charakteristickými rozměry obtékaného tělesa obvykle velmi malá, pohybuje se zpravidla v rozmezí setiny až tisíciný charakteristického rozměru. Tloušťka mezní vrstvy bývá nejčastěji definována jako kolmá vzdálenost od stěny k místu, kde rychlost tekutiny dosáhne tzv. smluvní rychlosti, obvykle 99%  $u_\infty$  (viz **Obr. 2-4**). Tato definice není úplně přesná vzhledem k tomu, že rychlost se od nulové hodnoty na stěně blíží k rychlosti volného proudu asymptoticky. Kromě této konvenční definice tloušťky mezní vrstvy existují i jiné, např. posunovací tloušťka, impulsová tloušťka nebo energetická tloušťka. [3]



**Obr. 2-3:** Rychlostní profily [3]



**Obr. 2-4:** Tloušťka mezní vrstvy [3]

Pokud je mezní vrstva pouze laminární, tedy v případě, že rychlost nabíhajícího proudu je malá, lze tloušťku mezní vrstvy na desce odhadnout z jednoduchého empirického vztahu:

$$\delta_{lam} \approx Re^{-\frac{1}{2}} \quad (2.3)$$

V případě turbulentní mezní vrstvy lze pro přibližné stanovení tloušťky použít vztah:

$$\delta_{turb} \approx Re^{-\frac{1}{5}} \quad (2.4)$$

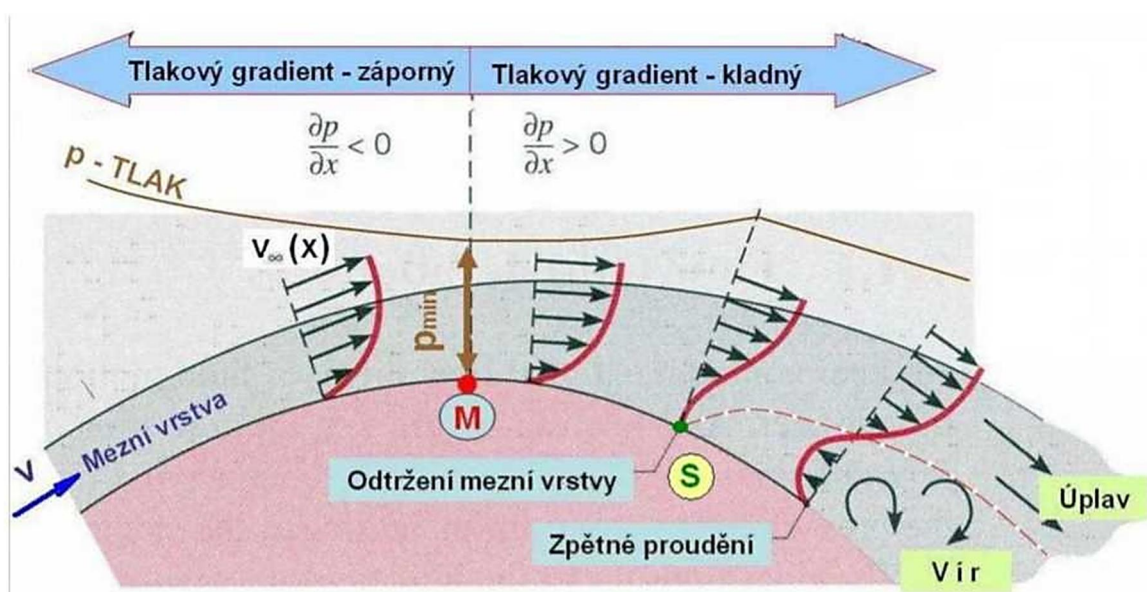
Mimo mezní vrstvu, kde vliv setrvačných sil významně převládá nad vlivem vazkých sil, lze proudění volného proudu popsat pomocí Eulerových rovnic pro ideální tekutinu. Proudění uvnitř mezní vrstvy, pro které je charakteristické, že síly setrvačné a vazké jsou přibližně stejného řádu, je nutné popsat pomocí Navier-Stokesových rovnic. [1, 3]

## 2.2 Odrážení proudu

Při obtékání rovinné desky se velikost statického tlaku podél desky nemění, platí, že:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (2.5)$$

Jinak je tomu při obtékání zaoblených těles (např. válec nebo letecký profil), kdy dochází ke změně rychlosti na povrchu tělesa a v důsledku platnosti Bernoulliho rovnice také ke změně tlaku. Průběh tlaku podél zaobleného tělesa je na **Obr. 2-5**.



**Obr. 2-5:** Odrážení mezní vrstvy [3]

Zpočátku se tlak vnějšího proudu podél povrchu tělesa zmenšuje, až v bodě M dosáhne minima. V tomto úseku je tlakový gradient záporný. Od bodu M dochází k růstu tlaku, (gradient tlaku je kladný) v důsledku čehož se rychlost proudění uvnitř mezní vrstvy snižuje. Částice tekutiny jsou bržděny jak v důsledku kladného tlakového gradientu, tak v důsledku vnitřního tření. S rostoucí vzdáleností od bodu M se rychlostní profil postupně mění, v určitém místě se na něm objevuje inflexní bod. V tomto bodě mají částice v bezprostřední blízkosti stěny nulovou rychlost ve směru obtékaného tělesa (vektor rychlosti má směr normály k povrchu tělesa). Dochází k odtržení proudu mezní vrstvy, který přechází do úplavu. Dále za bodem odtržení nastává zpětné proudění podél tělesa.



Zda dojde k odtržení mezní vrstvy, a to, ve kterém místě k tomuto dojde, závisí na rozložení tlaku podél tělesa. Vliv na polohu bodu odtržení mezní vrstvy má také to, zda je proudění uvnitř mezní vrstvy laminární nebo turbulentní. Při laminárním proudění nezávisí poloha bodu odtržení na Reynoldsově čísle. V turbulentní mezní vrstvě dochází k intenzivní výměně hybnosti mezi částicemi a ty tak ztrácejí svou kinetickou energii pomaleji. Následkem toho je, že se turbulentní mezní vrstva odtrhává později než vrstva laminární.

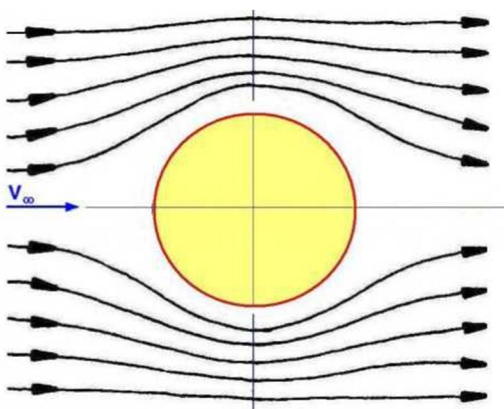
Pokud nedochází k odtržení proudu, je úplav za tělesem tvořen zpomalenými částicemi, které prošly mezní vrstvou. V úplavu nedochází ke zpětnému proudění. Tvar úplavu je v tomto případě téměř stejný jak pro laminární, tak pro turbulentní mezní vrstvu. V případě turbulentní mezní vrstvy dochází k rychlejšímu rozšiřování a vyrovnání úplavu.

Jiný charakter má úplav za tělesy, u kterých při obtékání dochází k odtržení proudu. Na zadní straně tělesa je podtlak, který se v úplavu postupně vyrovnává na hodnotu tlaku ve vnějším proudu. Při podkritickém obtékání s laminárním odtržením proudu je v úplavu patrné pravidelné uspořádání vírů. Víry se vytvářejí u stěny obtékaného tělesa a odtrhávají se v okamžiku, kdy dosáhnou dostatečné velikosti. K tomuto jevu dochází střídavě na obou stranách obtékaného tělesa. Za tělesem jsou pak víry unášeny volným proudem tekutiny a tvoří pravidelnou dvojitou řadu, označovanou jako Karmánova vírová stezka. Při nadkritickém obtékání, kdy dochází k přechodu laminární mezní vrstvy v turbulentní, pravidelnost vírů ustává a proudění v úplavu je nepravidelné.

Z průběhu rychlostí v úplavu je patrné, že hybnost proudící tekutiny se snižuje. Tato hybnost je předána obtékanému tělesu a projevuje se jako tlakový (tvarový) odpor. Ten lze stanovit na základě naměřeného průběhu rychlosti za tělesem. [3]

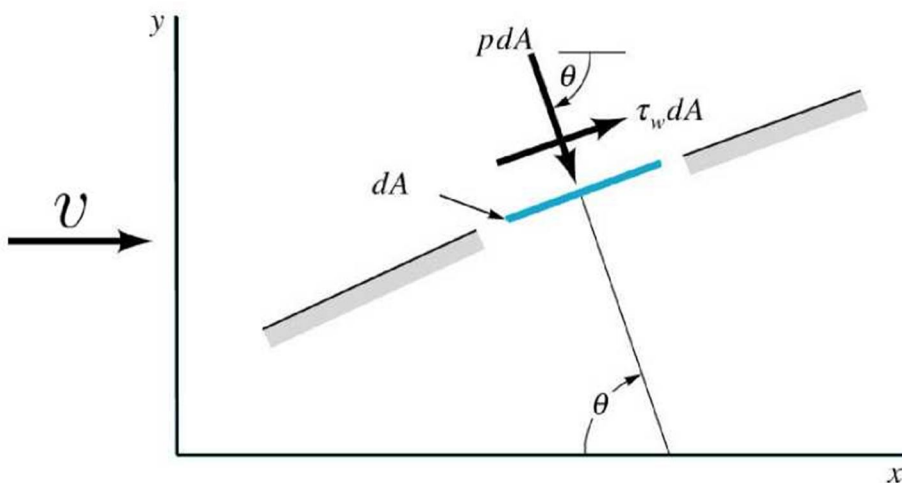
### 2.3 Odpor těles

Pokud je těleso obtékáno ideální tekutinou (nulová viskozita), sledují proudnice povrch tělesa (viz **Obr. 2-6**). Proudové pole je v tomto případě symetrické jak k vodorovné ose, tak ose kolmé ke směru proudění. V důsledku toho je symetrické i rozložení tlaků po obvodu tělesa, a tedy nulový tlakový odpor. Třecí odpor u ideální tekutiny rovněž neexistuje. Proto při obtékání ideální tekutinou nepůsobí na těleso odporová síla. Tento jev se nazývá d'Alembertův paradox.



**Obr. 2-6:** Obtékání tělesa ideální tekutinou [3]

Obtéká-li těleso skutečná tekutina, je typické, že v důsledku odstředivé síly nemusí částice sledovat povrch tělesa a dochází k odtržení mezní vrstvy, která přechází do úplavu za tělesem. Rychlostní, tedy i tlakové pole je v tomto případě nesymetrické a vzniká tlakový odpor. U skutečné tekutiny hraje roli i vliv viskozity, a proto vzniká i odpor třecí. Ten je dán integrálem elementárních třecích sil po ploše obtékaného tělesa, tlakový odpor je pak integrálem elementárních tlakových sil po ploše tělesa. [3]



**Obr. 2-7:** Síly působící na povrch obtékaného tělesa [6]

Výsledný odpor, pak lze rozložit do složky rovnoběžné se směrem proudění, tzv. čelní odpor  $F_D$ , a do složky kolmé, tzv. vztlak  $F_L$ . Ty jsou obecně dány:

$$F_D = \int dF_x = \int p \cdot \cos \theta \cdot dA + \int \tau_w \cdot \sin \theta \cdot dA \quad (2.6)$$

$$F_L = \int dF_y = - \int p \cdot \sin \theta \cdot dA + \int \tau_w \cdot \cos \theta \cdot dA \quad (2.7)$$

kde jednotlivé veličiny jsou zřejmé z obrázku (viz **Obr. 2-7**).

Protože stanovení jednotlivých složek odporu (třecí a tlakové) je v praxi velmi složité, stanovuje se obvykle pouze odpor celkový. Čelní odpor je pak dán Newtonovým vztahem:

$$F_D = c_D \cdot S \cdot \frac{u_\infty^2}{2} \cdot \rho \quad (2.8)$$

kde  $F_D$  je síla působící na těleso rovnoběžně se směrem proudění,  $c_D$  je součinitel čelního odporu,  $S$  je charakteristická plocha (obvykle největší plocha daná řezem tělesa kolmým na směr proudění),  $u_\infty$  je rychlost nabíhajícího proudu a  $\rho$  je hustota tekutiny.

Pokud je těleso obtékáno nesymetricky nebo je-li samo nesymetrické (např. letecký profil), působí na něj kromě čelního odporu také vztlak. Jeho velikost lze vyjádřit obdobně jako čelní odpor:

$$F_L = c_L \cdot S \cdot \frac{u_\infty^2}{2} \cdot \rho \quad (2.9)$$

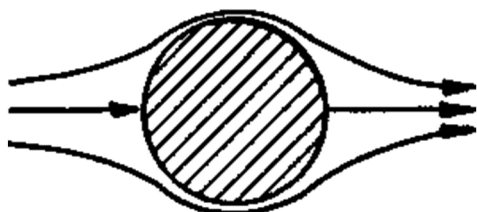
kde, veličiny  $S$ ,  $u_\infty$  a  $\rho$  jsou totožné jako v rovnici (2.8),  $c_L$  je pak součinitel vztlaku.

K působení vztlaku může docházet také při symetrickém obtékání pravidelného tělesa (např. válec). Při určitých rychlostech proudění, respektive hodnotách Reynoldsova čísla, vzniká v důsledku střídavého odtrhávání vírů od povrchu tělesa proměnné, nesymetrické tlakové pole, které způsobuje, že na těleso působí vztlaková síla, jejíž velikost i směr se periodicky mění v čase. [3]

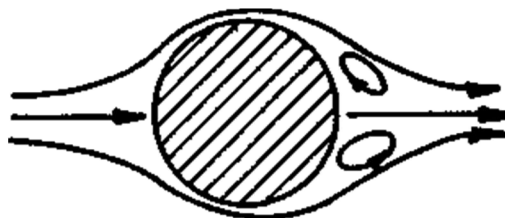
## 2.4 Obtékání válce

Válec, jakožto těleso s jednoduchou geometrií, je z hlediska obtékání poměrně podrobně prozkoumán. Pro  $Re < 2$  je možné analytické řešení obtékání, pro vyšší Reynoldsova čísla jsou pak poznatky získávány pomocí experimentálních měření, např. měřením v aerodynamickém tunelu. [3]

Se zvyšující se rychlostí proudění, respektive při zvyšujícím se Reynoldsově čísle, dochází k postupnému vývoji ve způsobu obtékání válce. Přibližně při  $Re = 5$  se v úplavu za válcem objevují dva symetrické víry, které se od válce neodtrhávají (viz **Obr. 2-8**). Při  $Re = 40$  se víry, které se do této chvíle protahovaly a rozšiřovaly, stávají nestabilními a dochází k jejich střídavému odtrhávání, vzniká Karmánova vírová stezka (viz **Obr. 2-8**).

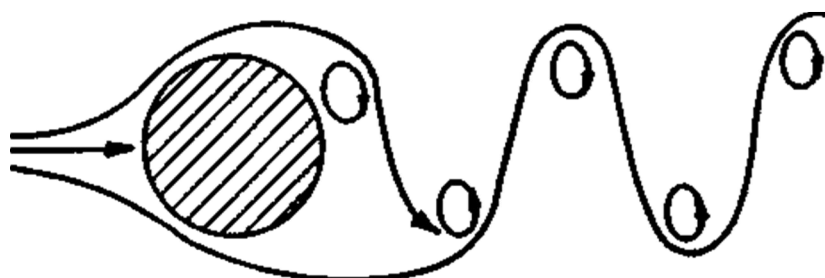


**Obr. 2-8:** Obtékání bez odtržení mezní vrstvy,  $Re < 5$  [8]



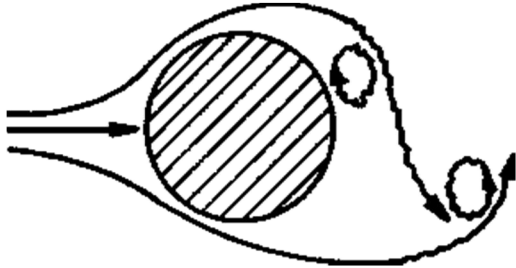
**Obr. 2-9:** Dva pevné víry za válcem,  $5 < Re < 40$  [8]

Do hodnoty zhruba  $Re < 150$  je proudění v úplavu laminární a víry přetrvávají do velké vzdálenosti za válcem ( $100 \sim 150 D$ ), kde v důsledku difúze začínají rozpadat. V rozmezí  $150 < Re < 300$  přechází úplav z laminárního k turbulentnímu proudění. Při  $Re = 300$  jsou víry v úplavu zcela turbulentní a dochází k jejich vymizení v poměrně malé vzdálenosti za válcem (okolo  $48 D$ ).

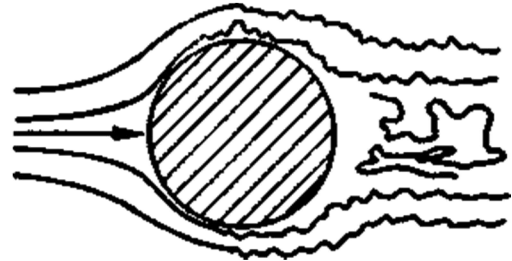


**Obr. 2-10:** Laminární úplav za válcem,  $40 < Re < 150$  [8]

K dalšímu důležitému jevu dochází, v závislosti na drsnosti povrchu válce a intenzitě turbulence nabíhajícího proudu, přibližně v rozsahu  $10^5 < Re < 5 \cdot 10^5$ . Laminární mezní vrstva přechází na turbulentní mezní vrstvu, následkem čeho ustává pravidelnost v odtrhávání vírů a z úplavu se vytrácí periodicitata. Úplav se narovná a je neorganizovaný, není v něm patrná vírová stezka.

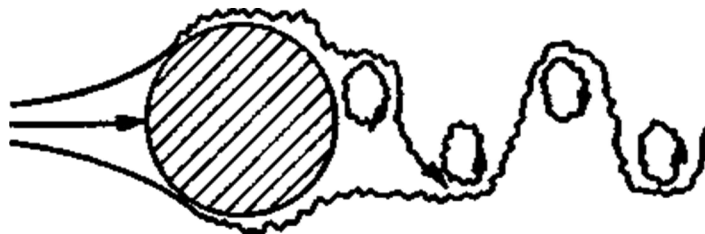


**Obr. 2-12:** Zcela turbulentní úplav za válcem,  $300 < Re < 10^5$  [8]



**Obr. 2-11:** Neorganizovaný úplav bez vírové stezky,  $10^5 < Re < 3,5 \cdot 10^5$  [8]

Pravidelnost odtrhávání vírů se znovu objevuje při hodnotu  $Re$  přibližně  $3,5 \cdot 10^6$ , kdy je již mezní vrstva zcela turbulentní, přičemž v úplavu je opět patrná vírová stezka. Ta přetrvává až do hodnoty  $Re 10^7$ , po kterou byla provedena experimentální měření. [8]



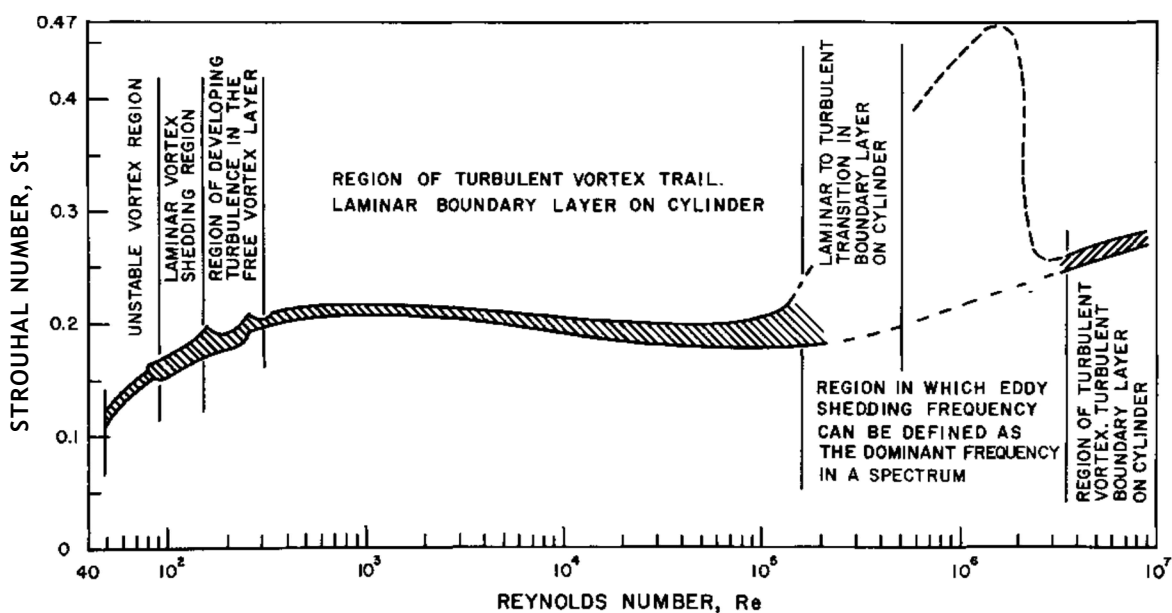
**Obr. 2-13:** Obnovení vírové stezky,  $3,5 \cdot 10^5 < Re$  [8]

Frekvence odtrhávání vírů je charakterizována pomocí tzv. Strouhalova čísla, které je, podobně jako Reynoldsovo číslo, číslo podobnostní a je dáno vztahem:

$$St = \frac{f \cdot D}{u_\infty} \quad (2.10)$$

kde  $f$  je frekvence odtrhávaných vírů,  $D$  je průměr válce a  $u_\infty$  je rychlost nabíhajícího proudu.

Závislost Strouhalova a Reynoldsova čísla je uvedena v grafu na **Obr. 2-14**. Jedná se o obálku naměřených experimentálních dat různých autorů. [8]

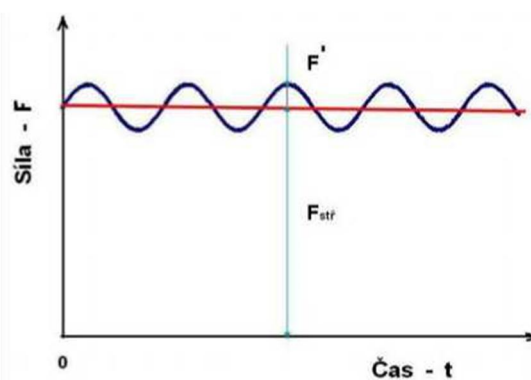


**Obr. 2-14:** Závislost Strouhalova a Reynoldsova čísla [8]

Z grafu je patrné, že k prvnímu odtrhávání vírů dochází od hodnoty  $Re = 40$ . V rozmezí přibližně  $300 < Re < 10^5$ , kdy jsou víry v úplavu plně turbulentní, zatímco na válci je laminární mezní vrstva, je hodnota Strouhalova čísla přibližně konstantní  $St = 0,21$ . Od začátku přechodu laminární mezní vrstvy na turbulentní při  $Re = 10^5$  až po hodnotu  $Re = 3,5 \cdot 10^6$  ustává periodicitu vírů, proto dochází k velkému rozptylu hodnot Strouhalova čísla. Jeho velikost se v této oblasti pohybuje v rozmezí od 0,18 do 0,47. Od hodnoty  $Re = 3,5 \cdot 10^6$  je již mezní vrstva na válci zcela turbulentní a znovu se objevuje pravidelná vírová struktura úplavu. Velikost Strouhalova čísla roste z hodnoty 0,27 po přibližně 0,3 pro  $Re = 10^7$ . Pro vyšší hodnoty  $Re$  nebyla v době publikování práce [8] experimentální měření provedena.

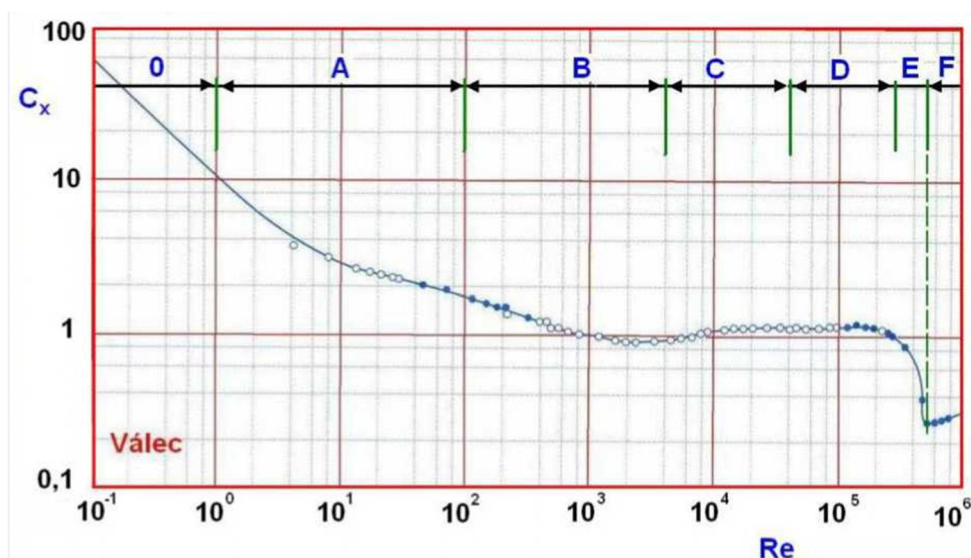
Pro většinu hodnot  $Re$  je závislost  $St$  stanovena s přesností přibližně  $\pm 5\%$ . To však neplatí v oblasti mezi začátkem přechodu mezní vrstvy po znovu obnovení pravidelného odtrhávání vírů. Chování proudění v této oblasti nebylo zatím zcela pochopeno a je předmětem dalších studií. [8]

Do vzniku prvního odtrhávání vírů, působí na válec pouze odporová síla ve směru proudění. S narůstající rychlostí pak dochází ke střídavému odtrhávání vírů a na válec začíná působit také síla vztlaková, kolmá na směr proudění. Obě síly se periodicky mění v čase, přičemž frekvence síly odporové je oproti síle vztlakové dvojnásobná. Perioda vztlakové síly odpovídá frekvenci odtrhávání vírů, tedy frekvenci ze vzorce Strouhalova čísla. Velikost obou sil lze stanovit z rovnic (2.8) a (2.9). V případě odporové síly se jedná o její průměrnou velikost (viz **Obr. 2-15**), v případě vztlakové síly, jejíž směr se v čase mění (kmitá okolo nulové hodnoty) se pak jedná o její maximální výchylku. Z hlediska vysokých štíhlých stavebních konstrukcí je pak nezbytné, aby frekvence těchto sil nebyla shodná s vlastní frekvencí konstrukce.



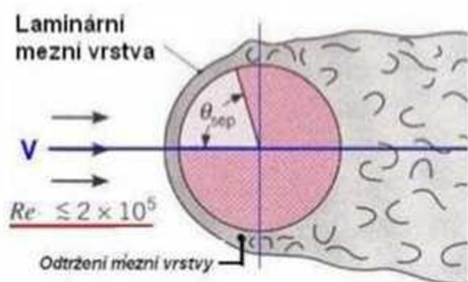
**Obr. 2-15:** Průběh odporové síly v čase [3]

V grafu na **Obr. 2-16** je uvedena závislost součinitele čelního odporu na Reynoldsově čísle pro obtékání hladký válec. Pro závislost uvedenou v grafu platí nulová intenzita turbulence nabíhajícího proudu, v přední části válce tedy vzniká laminární mezní vrstva.

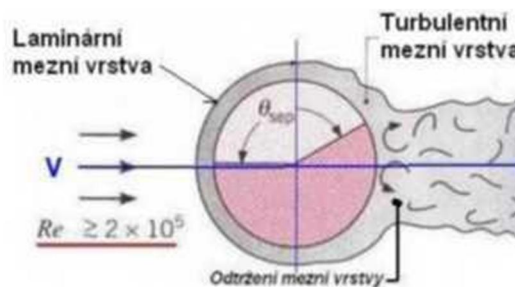


**Obr. 2-16:** Závislost  $c_D = f(Re)$  [3]

Na grafu je patrný prudký pokles součinitele odporu, který dosáhne minima pro kritickou hodnotu Reynoldsova čísla přibližně  $5 \cdot 10^5$ . Prudký pokles je zapříčiněn přechodem laminární mezní vrstvy v turbulentní. Ta je více odolná vůči odtržení (větší přenos hybnosti mezi částicemi), bod odtržení se tak posouvá směrem po proudu. Úplav se zužuje, v důsledku čehož klesá rozdíl tlaku mezi přední a zadní stranou válce, a tedy výrazně klesá tlakový odpor (vliv třecího odporu je při těchto rychlostech zanedbatelný). Rozdíl v šířce úplavu při podkritickém a nadkritickém obtékání je patrný z **Obr. 2-17** a **Obr. 2-18**.



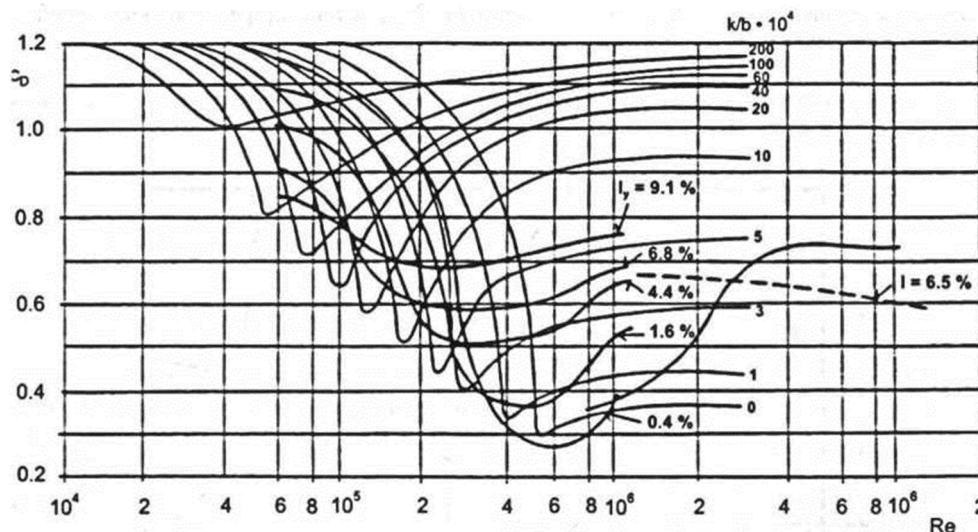
**Obr. 2-18:** Laminární mezní vrstva, široký úplav za válcem [3]



**Obr. 2-17:** Turbulentní mezní vrstva, úzký úplav za válcem [3]

Průběh závislosti součinitele čelního odporu je ovlivněn drsností povrchu tělesa. S rostoucí relativní drsností klesá hodnota kritického Reynoldsova čísla  $Re_k$ . K poklesu součinitele odporu tak dochází při nižších rychlostech. Toho se např. využívá v některých sportovních odvětvích. Používají se drsné míče, u kterých k poklesu odporu nastává při rychlostech, kterých lze prakticky dosáhnout (příkladem je golfový míček). Obdobný účinek na odporový součinitel má i intenzita turbulence v nabíhající proud. Platí, že hodnota  $Re_k$  se se zvyšující intenzitou turbulence snižuje. Průběhy součinitelů odporu jsou pro různé parametry relativní drsnosti a intenzity turbulence uvedeny v grafu na **Obr. 2-19**.

[3]



**Obr. 2-19:** Závislost  $c_D = f(Re)$  s vlivem drsnosti a intenzity turbulence [7]



### 3 MATEMATICKÉ MODELOVÁNÍ PROUDĚNÍ

Matematickým modelem turbulence se rozumí soubor základních pohybových, doplňkových a empirických rovnic, který tvoří uzavřený, řešitelný systém popisující proudění tekutiny. Doposud neexistuje univerzálně platný model turbulence, naopak existuje celá řada modelů, kdy každý je vhodný pro určitý typ úloh. Tyto modely bývají založeny na empirických poznacích. Pro řešení systému rovnic daného matematického modelu se pak používá metod numerické matematiky (obecné analytické řešení Navier-Stokesových rovnic není známo). V numerickém modelování turbulentního proudění pak rozeznáváme tři základní přístupy. [1]

#### **Metoda přímé numerické simulace** (*Direct Numerical Simulation – DNS*)

Jde o metodu, kdy jsou Navier-Stokesovy rovnice řešeny přímo, numericky. Diskretizaci je v tomto případě nutné provést tak, aby bylo pokryto celé spektrum vírových struktur vyskytujících se v reálném proudění. To znamená, že diskretizační síť (výpočetní síť konečných prvků) musí zachytit i ty nejmenší víry s rozměry Kolmogorova mikroměřítko. Vzhledem k prostorovosti turbulentního proudění lze pak řádově odhadnout nejmenší počet prvků diskretizační sítě ze vztahu:

$$n = \left(\frac{l}{\eta}\right)^3 \approx Re^{\frac{9}{4}} \quad (3.1)$$

kde  $l$  je délkové makroměřítko odpovídající největšímu rozměru oblasti,  $\eta$  je Kolmogorovo mikroměřítko a  $Re$  je Reynoldsovo číslo.

Vzniká tak velký nárok na počet diskreditačních prvků. Stejně tak je nutné provést dostatečně jemnou časovou diskretizaci, tedy zvolit malý časový krok výpočtu. Tato metoda je, kvůli své extrémní náročnosti na výpočetní kapacity, v dnešní době použitelná pouze při řešení úloh s jednoduchou geometrií a nízkým Reynoldsovým číslem. Výsledky takovéto simulace jsou však považovány za ekvivalentní výsledkům experimentů. Oproti experimentálním měřením navíc poskytují komplexnější obraz o proudění tekutiny. *DNS* simulace se používá výhradně pro úlohy výzkumného charakteru. [5]

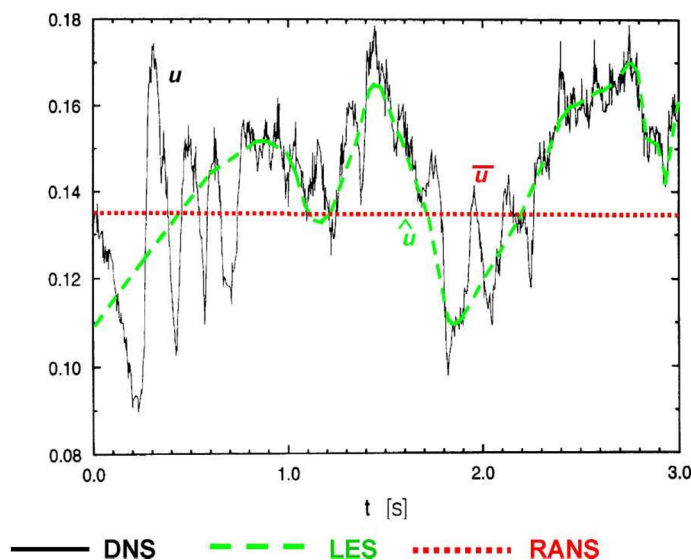
**Metoda velkých vírů** (*Large Eddy Simulation – LES*)

Tato metoda tvoří určitý přechod mezi metodou *DNS* a metodou *RANS* (viz dále). Při této metodě jsou přímo, metodou přímé numerické simulace, řešeny pouze velké víry. Jejich velikost je dána rozměry prvků výpočetní sítě. Menší víry jsou pak parametrizovány tzv. subgridními modely, které modelují struktury (víry) menší než je rozměr buňky sítě. Volbou velikosti prvků sítě je tak definován filtr, určující, které struktury budou řešeny přímo a které budou modelovány. Při této metodě je tak možné dosáhnout takového počtu prvků sítě, který lze řešit se současnou výpočetní technikou v přijatelném čase. [1]

**Metoda Reynoldsova časového středování Navier-Stokesových rovnic** (*Reynolds Averaged Navier-Stokes Equations – RANS*)

Princip Reynoldsova časového středování spočívá v aplikaci statistických metod při řešení Navier-Stokesových rovnic. Pro jednotlivé turbulentní modely, využívající tohoto principu, jsou pak používána další zjednodušení. Metoda *RANS* je pro svou přiměřenou výpočetní náročnost vzhledem k přesnosti získaných výsledků využívána při řešení praktických inženýrských úloh v převážné většině případů. [1]

Na **Obr. 3-1** je znázorněn výsledek získaný pomocí jednotlivých přístupů matematického modelování. Při použití přímé numerické simulace (*DNS*) lze získat přesný časový průběh sledované veličiny srovnatelný s výsledky experimentálního měření. Metoda velkých vírů (*LES*) poskytuje vyhlazený průběh záznamu dané veličiny v čase. Metodou *RANS* pak lze získat pouze střední hodnotu pro daný časový interval. [5]



**Obr. 3-1:** Základní přístupy modelování proudění [2]

### 3.1 Reynoldsovo časové středování

Jednotlivé fyzikální veličiny turbulentního proudění jsou náhodnou funkcí času. Přestože jsou okamžité stavy proudového pole dostatečně popsány soustavou Navier-Stokesových rovnic a rovnicí spjitosti, řešení těchto okamžitých stavů je pro praktické případy stěží aplikovatelné (metoda *DNS*). Proto se používá úprava matematického modelu pro výpočet statisticky středních stavů, tzv. Reynoldsovo časové středování. To se zakládá na faktu, že vezme-li se průměrná hodnota veličiny v různých časových okamžicích a z různě dlouhých časových intervalů, vychází vždy tatáž hodnota. [1, 5]

Obecnou, časově závislou veličinu  $\zeta$  lze v každém okamžiku rozložit na její střední (průměrnou) hodnotu  $\bar{\zeta}$  a fluktuaci (odchylku)  $\zeta'$ .

$$\zeta = \bar{\zeta} + \zeta' \quad (3.1)$$

Pro střední hodnotu platí, že jde o aritmetický průměr v daném časovém intervalu  $T$ , střední hodnota je pak dána:

$$\bar{\zeta} = \frac{1}{T} \int_0^T \zeta \cdot dt \quad (3.2)$$

Zároveň musí platit, že průměrná hodnota fluktuací na daném časovém intervalu je nulová.

$$\bar{\zeta}' = 0 \quad (3.3)$$

Takto rozložené veličiny jsou následně dosazeny do rovnice kontinuity a do Navier-Stokesových rovnic. Viskozita tekutiny, hustota tekutiny a vnější objemová síla jsou přitom považovány za konstantní. Úpravou jsou získány rovnice, souhrnně označované jako Reynoldsovy rovnice (odvození je možné nalézt v [1]).

Středovaná rovnice kontinuity má tvar:

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0 \quad (3.4)$$

Středované Navier-Stokesovy rovnice pak přecházejí na tvar:

$$\frac{\partial(\bar{u}_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}_i \cdot \bar{u}_j)}{\partial x_j} + \frac{\partial(\overline{u'_i \cdot u'_j})}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial(\bar{p})}{\partial x_i} + \nu \cdot \frac{\partial^2(\bar{u}_i)}{\partial x_j^2} + \bar{f}_i \quad (3.5)$$

Středovaná rovnice vedení tepla není v této práci uvedena. Práce se zabývá pouze izotermním prouděním.

Reynoldsovými rovnicemi je tedy řešeno středované turbulentní proudění, které již není náhodnou funkcí času. Přestože se středováním systém rovnic značně zjednodušil, Navier-Stokesovy rovnice po této úpravě obsahují nový člen  $\overline{u'_i \cdot u'_j}$ , který je při vynásobení hustotou nazýván jako tenzor Reynoldsových napětí.

$$\tau_{ij} = \rho \cdot \begin{bmatrix} \overline{u' \cdot u'} & \overline{u' \cdot v'} & \overline{u' \cdot w'} \\ \overline{v' \cdot u'} & \overline{v' \cdot v'} & \overline{v' \cdot w'} \\ \overline{w' \cdot u'} & \overline{w' \cdot v'} & \overline{w' \cdot w'} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Tenzor je symetrický vůči hlavní diagonále, obsahuje proto pouze šest neznámých (zápis rovnice pro jednotlivé složky tenzoru lze nalézt v literatuře [1]).

Pomocí středování došlo ke zjednodušení původního, obtížně řešitelného systému rovnic. K původním čtyřem neznámým veličinám ( $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $p$ ) však přibylo dalších šest neznámých složek tenzoru Reynoldsova napětí. Jednotlivé turbulentní modely, pracující na principu Reynoldsova středování (*RANS* modely), se pak liší v přístupu výpočtu (nahrazení) tohoto členu. [1]

## 3.2 RANS modely

Tyto modely jsou v inženýrské praxi využívány v 99 % procentech případů. Podle výpočtu Reynoldsových dodatkových napětí (vzniklých v důsledku středování N-S rovnic) se pak dělí na dvě základní skupiny. První skupinou jsou modely řešící tenzor Reynoldsových napětí přímo. Patří sem tzv. Reynoldsův napěťový model (*Reynolds Stress Model*) a jeho modifikace. Druhou skupinou jsou modely využívající pro výpočet Reynoldsových napětí tzv. Boussinesquovu hypotézu.

### 3.2.1 Reynoldsův napěťový model (*Reynolds Stress Model – RSM*)

Tento model řeší přímo tenzor Reynoldsových napětí pomocí diferenciálních rovnic. Rovnic je celkem devět, ale díky symetrii tenzoru napětí je nezávislých pouze šest. Model je dále doplněn o rovnici disipace, ta zajišťuje vyšší stabilitu soustavy rovnic. Řešeno je tedy celkem dvanáct rovnic: středovaná rovnice kontinuity a rovnice vedení tepla (v případě neizotermního proudění), tři středované Navier-Stokesovy rovnice, šest rovnic pro nezávislá Reynoldsova napětí a rovnice disipace.

Přestože je v *RSM* modelu používáno k popisu proudění méně zjednodušení, nejsou jeho výsledky výrazně přesnější oproti modelům založených na Boussinesquově hypotéze. To, vzhledem k vyšší náročnosti na výpočetní prostředky a podstatně delší době výpočtu vede k tomu, že je použití *RSM* modelu v praxi výjimečné. Využívá se zejména při řešení komplexních úloh se složitým prostorovým prouděním.

Turbulentní model *RSM* včetně jeho modifikací je dostupný v modulu *ANSYS CFX*.

### 3.2.2 Modely využívající Boussinesquovu hypotézu

Největší množství turbulentních modelů používaných v praxi patří právě do této skupiny.

Hypotéza vychází z Newtonova vztahu pro smykové napětí:

$$\tau = \mu \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.7)$$

a předpokládá, že jím lze nahradit tenzor Reynoldsových napětí:

$$\tau_{ij} = -\rho \cdot (\overline{u'_i \cdot u'_j}) = \tau_t = \mu_t \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \quad (3.8)$$

kde  $\tau_{ij}$  je tenzor Reynoldsových napětí,  $\tau_t$  je turbulentní napětí a  $\mu_t$  je turbulentní dynamická viskozita.

Obecně je pak Boussinesquova hypotéza dána:

$$-\rho \cdot (\overline{u'_i \cdot u'_j}) = \mu \cdot \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \cdot \rho \cdot k \cdot \delta_{ij} \quad (3.9)$$

$$k = \frac{1}{2} \cdot \overline{u'_j \cdot u'_j} \quad (3.10)$$

kde  $k$  je turbulentní kinetická energie (prvky na hlavní diagonále tenzoru Reynoldsových napětí).

Při použití Boussinesquovy hypotézy lze Reynoldsovy rovnice (středované Navier-Stokesovy rovnice) zjednodušit na tvar (odvození lze nalézt v [1]):

$$\frac{\partial(\bar{u}_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}_i \cdot \bar{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial(\bar{p})}{\partial x_i} + (\nu + \nu_t) \cdot \frac{\partial^2(\bar{u}_i)}{\partial x_j^2} + \bar{f}_i \quad (3.11)$$

kde  $\nu_t$  je turbulentní kinematická viskozita (označovaná pouze jako turbulentní viskozita).

Tímto zjednodušením je tenzor Reynoldsových napětí o šesti neznámých nahrazen tenzorem viskózních napětí, kde jediná neznámá je turbulentní viskozita. Ta, na rozdíl od molekulové viskozity, nezávisí na vlastnostech proudící tekutiny, ale je vlastností režimu proudění. Při laminárním proudění pak nabývá nulové hodnoty. Součet molekulové a turbulentní viskozity je označován jako tzv. efektivní viskozita, platí:

$$\nu_{eff} = \nu + \nu_t \quad (3.12)$$

Modely založené na Boussinesquově hypotéze řeší velikost turbulentní viskozity pomocí dodatkových rovnic. Podle počtu diferenciálních rovnic, které slouží ke stanovení turbulentní viskozity, se modely dělí na:

- Nularovnicové – výpočet turbulentní viskozity pomocí jedné algebraické rovnice.
- Jednorovnicové – výpočet turbulentní viskozity pomocí jedné diferenciální rovnice.
- Dvourovnicové – výpočet turbulentní viskozity pomocí dvou diferenciálních rovnic

Níže jsou uvedeny vybrané turbulentní modely dostupné v modulu *ANSYS CFX*.

### 3.2.2.1 Nularovnicové modely

Patří sem prakticky jen *Zero Equation Model*. Jedná se o velmi jednoduchý model, který pro stanovení turbulentní viskozity využívá algebraický vztah:

$$\nu_t = \rho \cdot c_v \cdot u_t \cdot l_t \quad (3.13)$$

kde  $\rho$  je hustota tekutiny,  $c_v$  je empirická konstanta,  $u_t$  je turbulentní rychlostní měřítko a  $l_t$  je turbulentní délkové měřítko.

Turbulentní rychlostní měřítko je definováno jako maximální rychlost ve výpočtové oblasti. Pro turbulentní délkové měřítko platí vztah:

$$l_t = \frac{V^{\frac{1}{3}}}{7} \quad (3.14)$$

kde  $V$  je objem výpočtové oblasti.

Nularovnicové modely nejsou příliš přesné a proto jejich používání pro technické výpočty není doporučováno.

### 3.2.2.2 Jednorovnicové modely

Tyto modely počítají turbulentní viskozitu užitím jedné diferenciální rovnice. Patří sem např. model *Spalart-Allmaras* nebo *Eddy Viscosity Transport Model*.

***Spalart-Allmaras***

Počítá diferenciální rovnici pro turbulentní kinetickou energii odvozenou ze středovaných Navier-Stokesových rovnic. Turbulentní viskozita je pak dána jednoduchým vztahem:

$$v_t = c_v \cdot k^{\frac{1}{2}} \cdot l_t \quad (3.15)$$

kde  $c_v$  je empirická konstanta,  $k$  je turbulentní kinetická energie a  $l_t$  je délkové měřítko, definované stejně jako u nularovnicového modelu, rovnice (3.14).

***Eddy Viscosity Transport Model***

Model, odvozený od dvourovnicového  $k$ - $\varepsilon$  modelu řeší diferenciální rovnici přímo pro turbulentní viskozitu  $v_t$ .

Jednorovnicové modely je vhodné použít v případech, kdy lze odpovídajícím způsobem popsat rozložení délkového měřítka  $l_t$  pomocí empirického vztahu. Využívají se např. pro některé případy modelování proudění v atmosféře. Vzhledem k možnostem dnešní výpočetní techniky jsou však v praxi častěji používány přesnější dvourovnicové modely.

**3.2.2.3 *Dvourovnicové modely***

V technických aplikacích jsou díky svému dobrému poměru náročnosti a přesnosti používány výhradně právě modely, využívající k výpočtu turbulentní viskozity dvě diferenciální rovnice. Dvourovnicových modelů existuje velké množství, mezi základní patří model  $k$ - $\varepsilon$ ,  $k$ - $\omega$  a  $SST$  model. Ostatní modely bývají zpravidla modifikací těchto základních modelů.

***Standard  $k$ - $\varepsilon$  model***

Model řeší jednu diferenciální rovnici pro turbulentní kinetickou energii  $k$  a druhou pro rychlost disipace  $\varepsilon$  (odtud nese název  $k$ - $\varepsilon$ ). Obě tyto rovnice jsou odvozené ze středovaných Navier-Stokesových rovnic a vystupují v nich empirické konstanty. Turbulentní viskozita je pak dána:

$$v_t = c_v \cdot \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (3.16)$$

kde  $c_v$  je empirická konstanta.



Model je vhodný pro úlohy s vysokým Reynoldsovým číslem  $Re > 2 \cdot 10^5$ . Poměrně dobře dokáže počítat plně vyvinuté turbulentní proudění volného proudu, naopak v oblasti blízko stěny jeho přesnost klesá, zejména kvůli špatnému stanovení bodu odtržení mezní vrstvy. Proto není vhodný pro řešení obtékání křivočarých těles.

#### ***Standard $k$ - $\omega$ model***

Zahrnuje jednu diferenciální rovnici pro turbulentní kinetickou energii  $k$ , druhou diferenciální rovnici je rovnice pro vířivost  $\omega$ . Turbulentní viskozita je určena vztahem:

$$v_t = \frac{k}{\omega} \quad (3.17)$$

Model *Standard  $k$ - $\omega$*  je stavěný na úlohy s nízkým Reynoldsovým číslem  $Re < 2 \cdot 10^5$  s laminárním nebo přechodovým režimem proudění, kdy není plně vyvinutá turbulence. Přesnost modelu je dobrá v blízkosti stěny a klesá ve volném proudu. Jeho přesnost je tedy opačná než u modelu *Standard  $k$ - $\varepsilon$* .

#### ***Model SST (Shear Stress Transport)***

Je modifikací modelu  *$k$ - $\omega$* . Počítá upravenou diferenciální rovnici pro vířivost, ve které vystupují složité empirické algebraické vztahy. Vzhledem k jeho poměrně dobré přesnosti při určování bodu odtržení a velikosti zavíření, je vhodný pro obtékaná tělesa. Zároveň vykazuje vyšší přesnost ve volném proudu než standardní  *$k$ - $\omega$*  model. Tento model má široké uplatnění v průmyslových aplikacích. [1]



## 4 MODELOVÁNÍ OBTÉKÁNÉHO VÁLCE

V rámci práce byly provedeny simulace obtékaných tuhých válců o průměrech 0,1 m, 0,5 m, 1,0 m, a 2,0 m. Povrch válců byl uvažován jako hladký a s drsností 0,2 mm. Proudění vzduchu bylo uvažováno s rychlostmi odpovídajícími Reynoldsovým číslům o velikosti  $2 \cdot 10^5$ ,  $4 \cdot 10^5$ ,  $6 \cdot 10^5$ ,  $8 \cdot 10^5$ ,  $10^6$ ,  $\cdot 10^6$  a  $3,5 \cdot 10^6$ . Z výpočtů byla vyhodnocena závislost Strouhalova a Reynoldsova čísla a stanoveny velikosti součinitelů čelního odporu a vztlaku. Získané výsledky jsou prezentovány v kapitole 5.

Pro simulaci otékaných válců byl použit software *ANSYS CFX 15.0*. Tento modul programového systému *ANSYS* patří do skupiny tzv. *CFD (Computational Fluid Dynamics)* programů, které umožňují řešení úloh zahrnující proudění tekutin, včetně např. přenosu tepla, rozptylu částic a jiných podobných fyzikálních jevů.

V rámci této kapitoly jsou popsány jednotlivé kroky při vytváření simulace v programu *ANSYS* při řešení zadané úlohy. Také jsou uvedeny některé obecné poznatky týkající se numerického modelování proudění.

### **ANSYS**

Program *ANSYS (Analysis Systems)* je software sloužící pro simulaci různých fyzikálních jevů. Umožňuje provádět pevnostní a termodynamickou analýzu, fluidní analýzu, analýzu elektrostatických a elektromagnetických polí a akustickou analýzu. Jednotlivé analýzy lze provádět samostatně nebo je možné je spojovat a řešit tak komplexní, multi-fyzikální úlohu. Program pro své výpočty využívá numerických metod, zejména metodu konečných prvků (*FEM – Finite Element Method*), v případě řešení rovnic mechaniky kontinua (fluidní analýza) pak metodu konečných objemů (*Finite Volume Method*). *ANSYS* je hojně využíván především ve strojírenství, např. v automobilovém a leteckém průmyslu, energetice a jiných. Své uplatnění najde také ve stavebnictví, a to jak v pevnostních úlohách, tak například při řešení prostupu tepla nebo návrhu vzduchotechniky. Používá se i v různých specializovaných oborech, jako je biomechanika a mikroelektronika. Kromě průmyslu jde také o užitečný nástroj pro oblasti výzkumu a školství.

V programu *ANSYS* existují dvě uživatelská prostředí. Novější prostředí *Workbench* je uživatelsky přívětivější (jednodušší). Je vhodné pro méně pokročilé uživatele, zejména pro své grafické zpracování a snazší, intuitivní ovládání. Druhé je klasické prostředí *APDL* (*ANSYS Parametric Design Language*), které lze ovládat pomocí vlastně psaných skriptů. To umožňuje vyšší kontrolu nad prováděnou simulací, avšak klade vyšší nároky na znalosti uživatele. V obou prostředích lze řešit jednotlivé typy analýz, obě prostředí používají k výpočtu stejný řešič. [6]

V rámci této práce bylo použito prostředí *Workbench*, ve kterém lze spustit modul *CFX*, určený pro fluidní analýzu.

### **Metoda konečných objemů**

Jednotlivé fyzikální jevy, jako je pohyb tekutiny či přenos tepla, jsou popsány parciálními diferenciálními rovnicemi. Tyto rovnice je nutné řešit na určité oblasti (doméně), představující objem proudící tekutiny. Spojité (analytické) řešení proudového pole však vzhledem ke složitosti rovnic popisujících proudění není možné (Navier-Stokesovy), proto je nutné k jejich řešení použít metody numerické matematiky. Jednou z těchto metod, která se ve většině případů uplatňuje při řešení proudění tekutin, je metoda konečných objemů. Princip metody konečných objemů spočívá v rozdělení zájmové oblasti pomocí diskretizační sítě (výpočtové sítě) na konečný počet prvků. Ve středech těchto prvků jsou pak numericky počítány jednotlivé rovnice charakteristické pro zvolený model turbulence. Pro řešení je také nutné specifikovat jednotlivé plochy ohraničující řešenou oblast, zvolit tzv. okrajové podmínky. Znamená to, určit zda danou plochou tekutina do oblasti vtéká či vytéká, zda plocha tvoří pevnou stěnu, volnou hladinu nebo např. rovinu symetrie. Na základě zvolené diskretizační sítě a zadaných okrajových podmínek je pak možné danou úlohu řešit. [1]

Při numerickém výpočtu je iteračním postupem řešen lineární systém diskretizovaných parciálních diferenciálních rovnic. Levá a pravá strana řešených rovnic si není nikdy zcela rovna. Tuto nerovnost (rozdíl mezi pravou a levou stranou rovnic) vyjadřuje reziduál. S klesající hodnotou reziduálů tedy dochází k přibližování se přesnému řešení daného systému rovnic, řešení konverguje. V opačném případě (hodnota reziduálů roste s přibývajícemi iteracemi) nastává divergence. Přiblížení se k uspokojivě přesnému řešení vyžaduje provedení dostatečného množství iterací. [15]

## Postup numerické simulace

Řešení úloh proudění pomocí numerické simulace obecně sestává ze tří fází. [1]

- *Preprocessing*

Tato nejobsáhlejší část zahrnuje v prvním kroku vytvoření geometrického modelu. V případě pevností analýzy model reprezentuje řešenou část konstrukce, v případě analýzy proudění pak představuje objem, kterým tekutina protéká. Jedná se buď o dostatečně velký vnější prostor kolem obtékaného tělesa, kdy model obtékaného tělesa je odečítán od domény tekutiny, kterou zpravidla představuje kvádr. V opačném případě se jedná o vnitřní objem součásti, kterou tekutina proudí. Model součásti je pak vyplněn (vylit), čímž je vytvořen inverzní objem reprezentující tekutinu. Geometrii je možné vytvořit buď přímo pomocí nástrojů obsažených v programu *ANSYS* nebo je možné importovat model vytvořený v některém ze standardních *CAD* systémů.

Druhým krokem je vytvoření výpočetní sítě, tedy rozdělení modelu na diskrétní prvky. Kvalita vytvořené sítě má velký vliv na přesnost výpočtu a zároveň významně ovlivňuje výpočetní čas úlohy. Tvorba sítě je tedy stěžejním problémem při numerických simulacích, kdy je třeba optimalizovat počet, rozmístění a tvar prvků sítě tak, aby byla zachycena fyzikální podstata simulovaného jevu a zároveň byl výpočetní čas v přijatelných mezích. Pro zhodnocení kvality sítě existují určitá kritéria, jimiž by se měl uživatel řídit (viz 4.2.1). Avšak ani jejich splnění nemusí automaticky znamenat, že získané výsledky zcela odpovídají skutečnosti.

Ve třetím kroku jsou nastaveny jednotlivé parametry výpočtu. Je zvolen materiál, jeho charakteristiky a režim proudění. V případě turbulentního proudění se volí model turbulence. Lze vybrat mezi analýzu časově závislého a časově nezávislého proudění. V případě výpočtu časově závislého proudění se volí délka simulace a časový krok. Definují se okrajové podmínky na hraničních plochách modelu, tedy plochách představující vstup a výstup tekutiny do domény, pevné stěny, roviny symetrie apod. V rámci okrajových podmínek se zadávají vstupní hodnoty veličin, jako rychlost a tlak tekutiny nebo intenzita turbulence. Dále se volí např. konvergenční kritéria, počet iterací výpočtu nebo způsob ukládání výsledků. Po provedení všech potřebných nastavení lze přistoupit k výpočtu úlohy.

- ***Processing***

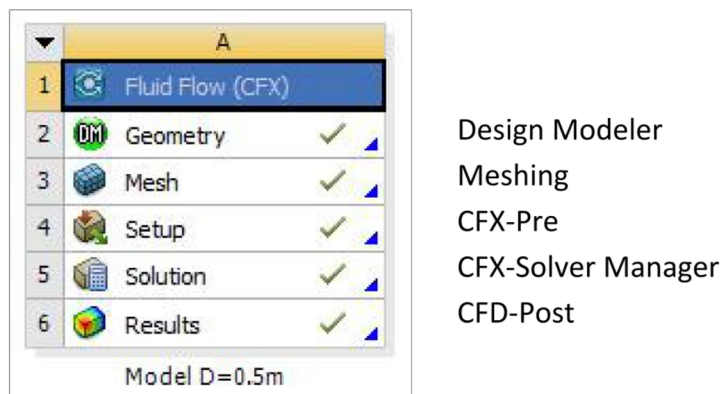
Zahrnuje samotný výpočet úlohy řešičem programu. V rámci řešiče lze nastavit způsob provedení výpočtu, je např. možné zadat, aby řešič navázal na předcházející spočtené výsledky. Samotný průběh výpočtu je pak možné sledovat. V případě že řešení nekonverguje je tak možné výpočet přerušit a upravit jeho nastavení.

- ***Postprocessing***

V této části jsou vyhodnocovány výsledky simulace. Lze vytvářet grafické výstupy v podobě kontur, znázorňujících velikost jednotlivých veličin na plochách modelu, lze vykreslit vektorová pole nebo proudnice. Také je možné ze získaných výsledků vytvářet grafy a tabulky.

Pro jednotlivé části analýzy existují v systému *ANSYS* samostatné programy. Pro vytváření geometrie slouží program *Design Modeler*, pro tvorbu sítě pak program *Meshing*. Oba tyto programy jsou základní součástí prostředí *Workbench* a lze je použít při jakémkoli typu analýzy. Pro analýzu proudění slouží modul *CFX*, který se skládá ze dvou komponent. První, program *CFX-Pre*, slouží k nastavení parametrů výpočtu a definici okrajových podmínek (poslední krok *preprocessingu*). Druhou je program *CFX-Solver Manager*, který umožňuje kontrolu nad řešičem, provádějícím výpočet (*processing*), a je pomocí něj možné průběh výpočtu sledovat. Program *CFD-Post* je pak určen pro zobrazování výsledků a vytváření grafických výstupů (*postprocessing*). Jednotlivé programy je možné spouštět jak z prostředí *Workbench* tak samostatně.

Při vytvoření analýzy (projektu) v prostředí *Workbench* jsou její jednotlivé kroky přehledně zobrazeny v tabulce (viz **Obr. 4-1**). Výstupy předcházejícího kroku jsou pak automaticky načítány do kroku dalšího. V rámci prostředí *Workbench* lze spustit i více analýz a ty pak vzájemně provázat. Lze tak např. řešit tzv. *FSI (Fluid – Structure Interaction)* analýzu, kdy jsou výsledky řešení proudění tekutiny (tlak) aplikovány jako zatížení při pevnostním výpočtu.



**Obr. 4-1:** Analýza v prostředí *Workbench*

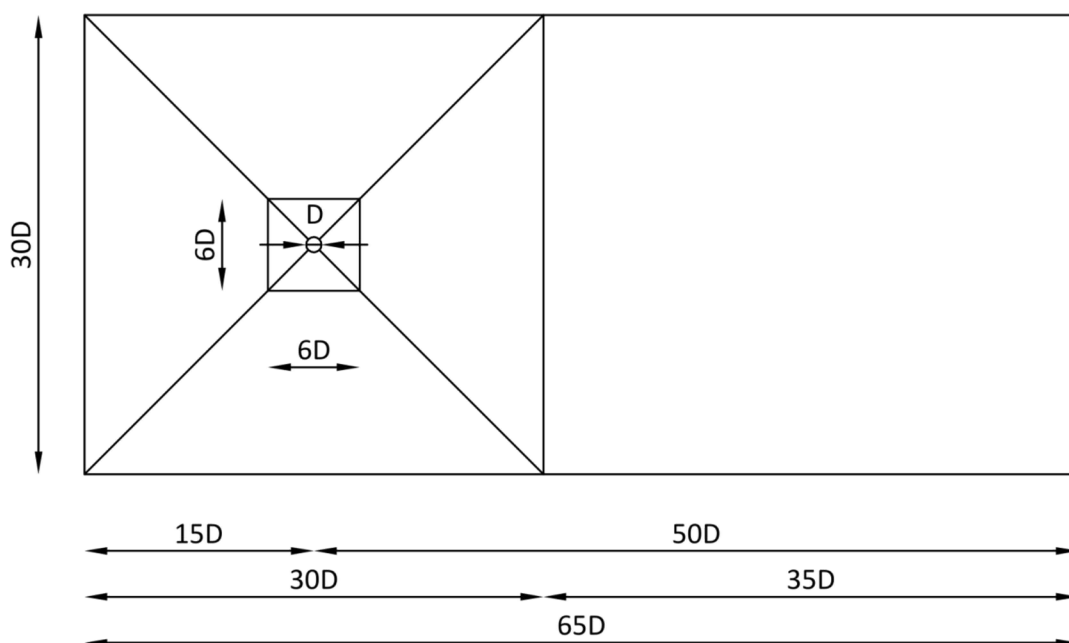
## 4.1 Vytváření geometrických modelů

Řešená úloha byla uvažována jako rovinná (2D). Protože modul CFX neumožňuje řešení 2D úloh, byly vytvořeny prostorové modely (3D), avšak se zanedbatelnou výškou oproti půdorysným rozměrům. Na takovýchto modelech byla následně vytvořena síť, která na výšku obsahovala pouze jeden prvek. Tímto postupem lze podle [18] docílit rovinné simulace.

V rámci práce bylo vytvořeno celkem pět geometrických modelů, na nichž proběhly výpočty prezentované v kapitole 5. Půdorysy všech modelů byly v závislosti na průměru válce rozměrově totožné. Pro první čtyři modely, odpovídající zadaným průměrům, byl povrch válce modelován jako hladký (drsnost byla nastavena v rámci *CFX-Pre*). U pátého modelu bylo snahou modelovat drsnost válce pomocí zakřivení jeho povrchu. Model se zakřiveným povrchem byl vytvořen pouze pro válec o průměru 0,5 m.

### 4.1.1 Rozměry modelů

Půdorysné schéma bylo u všech modelů stejné a je znázorněno na **Obr. 4-2**. Jednotky délky jsou uvedeny v násobku průměru  $D$ . Výška všech modelů byla zvolena 0,5 mm.



**Obr. 4-2:** Schéma geometrického modelu



Půdorysný tvar byl zvolen obdobně jako v [9]. Rozdělení modelu na jednotlivé části bylo provedeno z důvodu vytváření sítě. Jednotlivé hrany modelu je možné dělit a toto dělení zhušťovat směrem ke stěně válce. Lze tak vytvořit podrobnější síť v zájmové oblasti okolo válce (viz 4.2.4).

Při řešení obtékání válce by měla být dodržena dostatečná velikost modelu. Podle [9] by vzdálenost před válcem měla být alespoň  $5D$ , vzdálenost za válcem alespoň  $15D$  a šířka modelu (laterální délka) by neměla být menší než  $10D$ . Vzhledem k vysokým rychlostem simulovaného proudění byly rozměry modelu, na základě doporučení vedoucího práce, voleny větší.

#### 4.1.2 Postup vytváření modelů

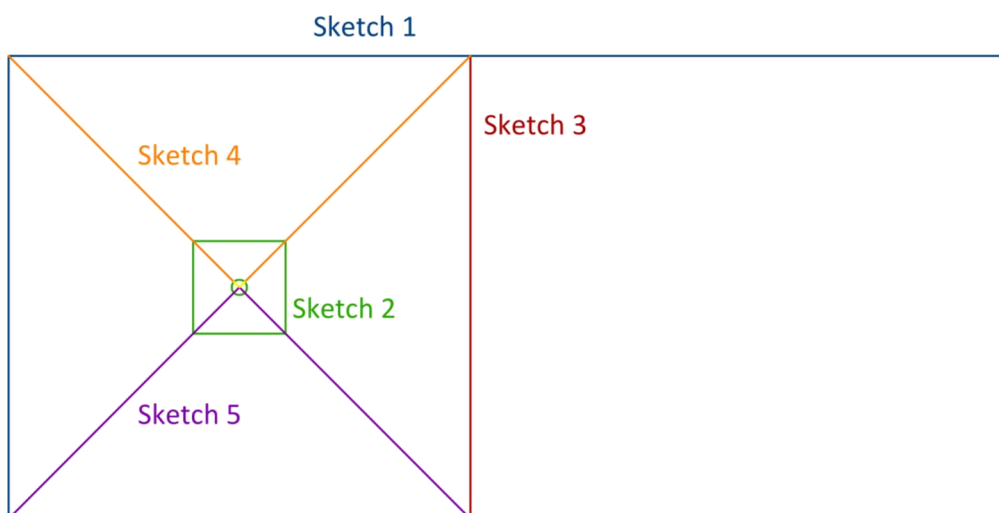
Všechny modely byly vytvořeny v programu *Design Modeler*, který je součástí prostředí *Workbench*. Modely s hladkým povrchem válce byly vytvořeny totožným způsobem. V případě modelu se zakřiveným povrchem se postup nepatrně se lišil.

##### 4.1.2.1 Model s hladkým povrchem válce

Modelování v *Design Modeleru* sestává ze dvou částí. Nejprve jsou ve zvolené rovině vytvořeny rovinné náčrty (*Sketch*), ze kterých je následně pomocí různých funkcí vytvořeno prostorové těleso.

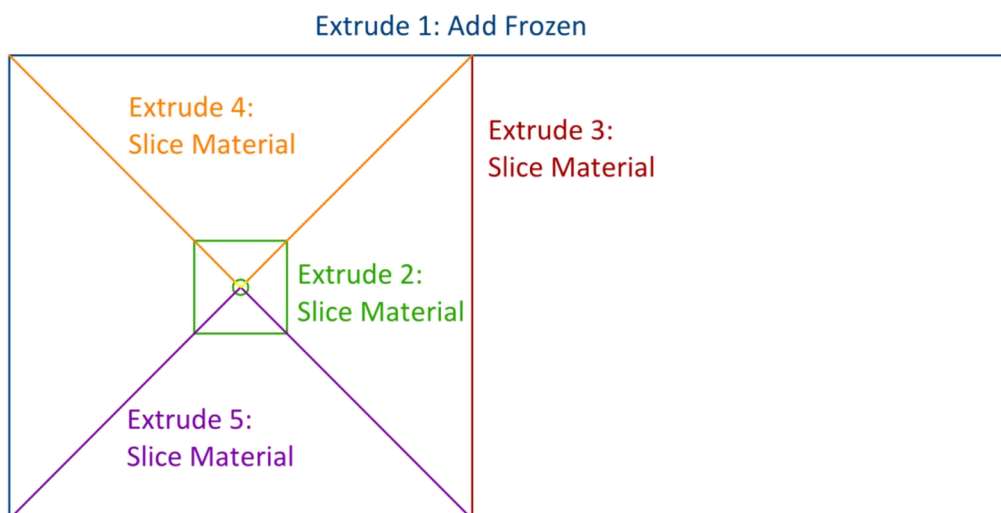
Pro kreslení náčrtů byla zvolena rovina XY. Směr proudění byl uvažován ve směru osy X. Pro kreslení jsou dostupné základní funkce, obdobné jako v běžných CAD systémech (základní geometrické obrazce, kótování, vytváření vazeb mezi entitami atd.), tato část je uživatelsky relativně snadná.

Jednotlivé náčrty (*Sketch*) byly vytvořeny tak, jak je uvedeno na **Obr. 4-3**. Důvodem je, aby se pro každý náčrt dalo použít individuální nastavení při vytváření 3D tělesa.



**Obr. 4-3:** Schéma náčrtů (*Sketch*)

Pro vytvoření objemu byla použita funkce *Extrude*, která umožňuje „vytažení“ daného náčrtu do prostoru v normálovém směru. Tímto lze buď vytvářet nová tělesa (*Add Frozen*), nebo již existující tělesa dělit (*Slice Material*) na více těles (*Bodies*). Zvolené typy funkce *Extrude* pro jednotlivé náčrty (*Sketch*) jsou uvedeny na **Obr. 4-4**, detailní nastavení potom na **Obr. 4-5** a **Obr. 4-6**.



**Obr. 4-4:** Přřazení funkce *Extrude*

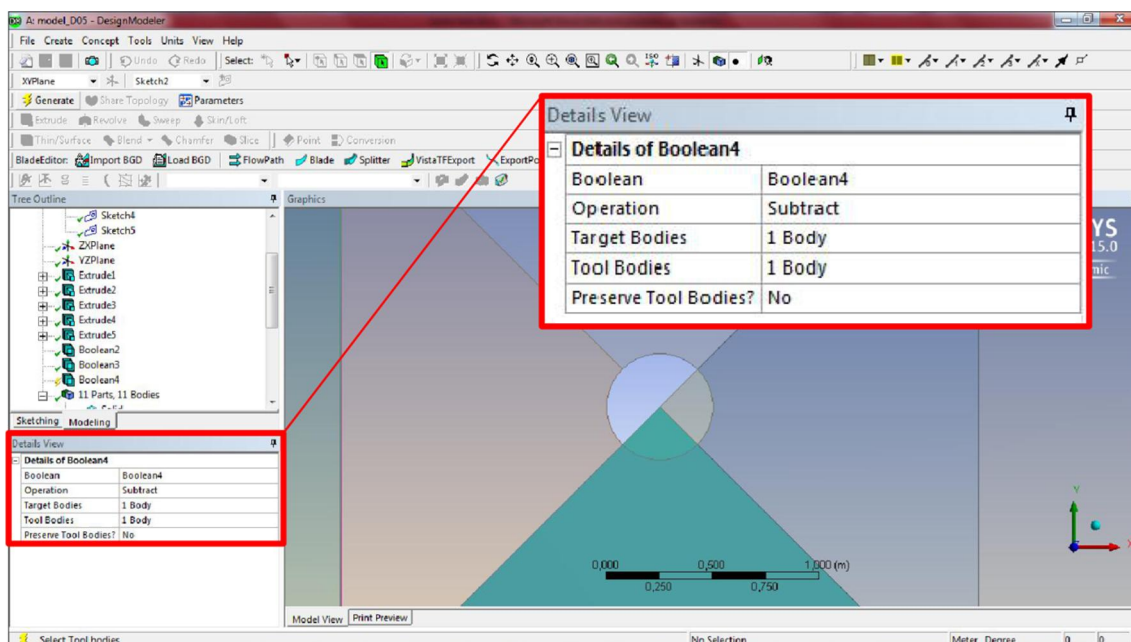
Details View	
[-] Details of Extrude1	
Extrude	Extrude1
Geometry	Sketch1
Operation	Add Frozen
Direction Vector	None (Normal)
Direction	Normal
Extent Type	Fixed
<input type="checkbox"/> FD1, Depth (>0)	0,0005 m
As Thin/Surface?	No
Merge Topology?	Yes
[-] Geometry Selection: 1	
Sketch	Sketch1

Obr. 4-5: Detail funkce *Extrude*

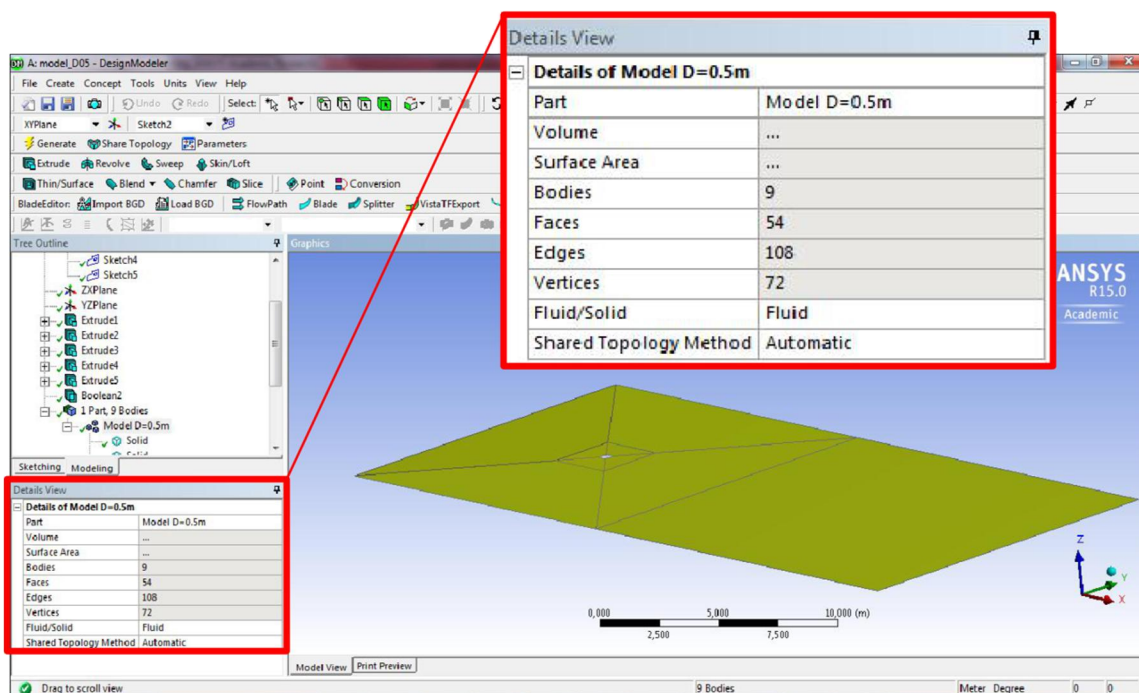
Details View	
[-] Details of Extrude2	
Extrude	Extrude2
Geometry	Sketch2
Operation	Slice Material
Direction Vector	None (Normal)
Direction	Normal
Extent Type	Through All
As Thin/Surface?	Yes
<input type="checkbox"/> FD2, Inward Thickness (>=0)	0 m
<input type="checkbox"/> FD3, Outward Thickness (>=0)	0 m
Target Bodies	All Bodies
Merge Topology?	Yes
[-] Geometry Selection: 1	
Sketch	Sketch2

Obr. 4-6: Detail funkce *Extrude*

Následně byla z modelu odebrána tělesa představující objem válce (v práci je řešen pouze účinek proudění na stěny válce). K tomu byla použita funkce *Boolean*, která umožňuje sjednocení (*Unite*) nebo naopak odebrání (*Subtract*) těles. Při druhé možnosti je nutné zvolit cílová tělesa (*Target Bodies*), od kterých se bude odečítat objem pracovních těles (*Tool Bodies*). Detail je na Obr. 4-7. Jednodušší možností je použití funkce *Body Delete*, kdy je zapotřebí vybrat pouze tělesa, která mají být z modelu odstraněna.

Obr. 4-7: Detail funkce *Boolean*

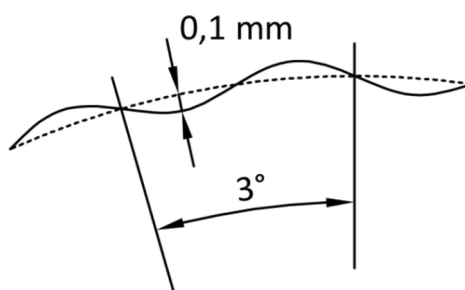
Takto vznikl model skládající se celkem z 9 těles (*Bodies*), tvořících 9 samostatných částí (*Parts*). Rozhraní mezi dvěma částmi tvoří dvě samostatné plochy, kdy každou z nich (respektive hrany každé z nich) je při vytváření sítě možno rozdělit na rozdílný počet prvků. Tímto způsobem lze vytvářet nestrukturované sítě (viz 4.2). Pro takovýto model by však bylo nutné mezi jednotlivými částmi definovat jejich vzájemnou interakci na styčných plochách. Proto byla tělesa pomocí příkazu *Form New Part* spojena do jedné části, aby se model choval jako celek. Pro takto vytvořenou část bylo zvoleno, že je složena z těles, tvořených tekutinou (*Fluid*) (viz **Obr. 4-8**). Tím byla tvorba modelu ukončena.



**Obr. 4-8:** Geometrický model

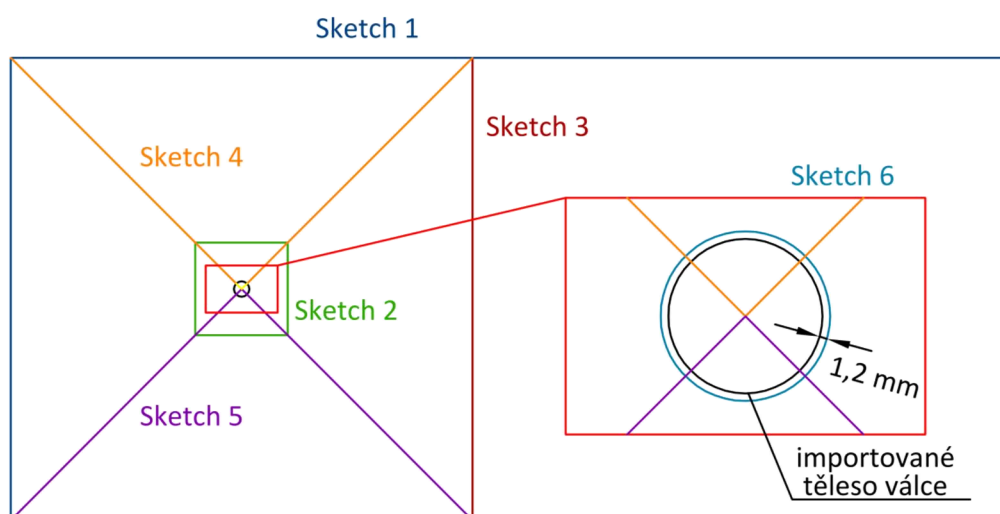
#### 4.1.2.2 Model se zakřiveným povrchem válce

V případě modelu se zakřiveným povrchem válce bylo těleso válce vytvořeno v programu *Autocad*. Tvar zakřivení je na **Obr. 4-9** (rozměry jsou pouze ilustrativní). Kruhový oblouk odpovídající  $3^\circ$  byl tvořen křivkou připomínající sinusovou vlnu. „Amplituda“ této vlny byla zvolena jako polovina zadané hodnoty drsnosti, tedy 0,1 mm. Kopírováním této křivky byl vytvořen půdorys válce, ze kterého bylo vytvořeno prostorové těleso. Každá křivka, připadající na oblouk odpovídající  $3^\circ$ , byla ve skutečnosti představována lomenou čarou, složenou z 11 úseček. Povrch válce tak byl tvořen pomocí 1320 ploch. Vytvořený model válce byl z programu *Autocad* exportován ve formátu \*.sat, který je možné importovat do programu *Design Modeler*.



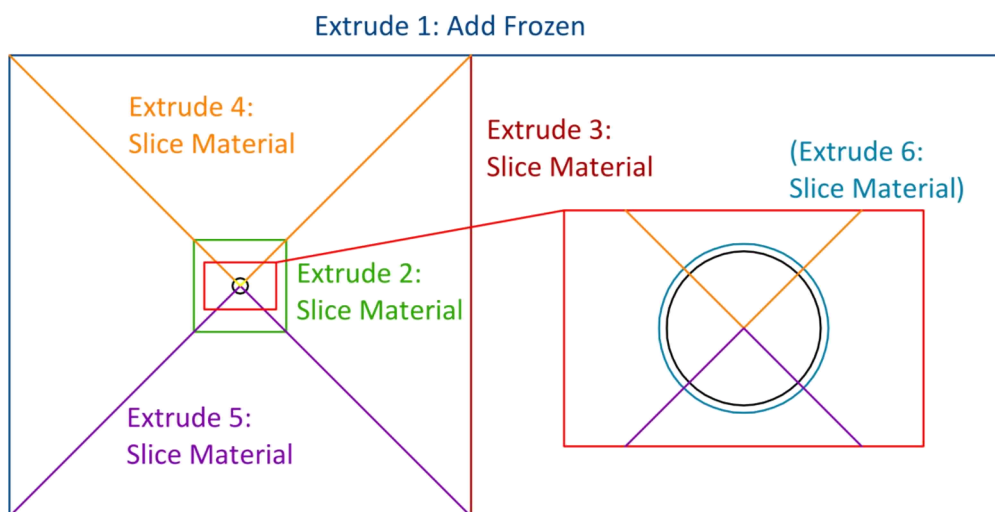
**Obr. 4-9:** Zakřivení povrchu

Zde bylo postupováno obdobně, jako v případě modelu hladkého válce. Byly vytvořeny stejné náčrtů, navíc byl přidán náčrt *Sketch 6* (viz **Obr. 4-10**).



**Obr. 4-10:** Schéma náčrtů (*Sketch*), zakřivený povrch válce

Pomocí funkce *Extrude* bylo vytvořeno těleso představující objem tekutiny (*Add Frozen*). Od toho tělesa bylo pomocí funkce *Boolean* odečteno importované těleso zakřiveného válce. Vniklý objem byl následně dělen stejným způsobem jako v předcházejícím případě. Jednotlivá tělesa byla spojena do jedné části (*Part*), tvořenou tekutinou (*Fluid*). Tento model byl vytvořen pouze pro válec s průměrem 0,5 m.



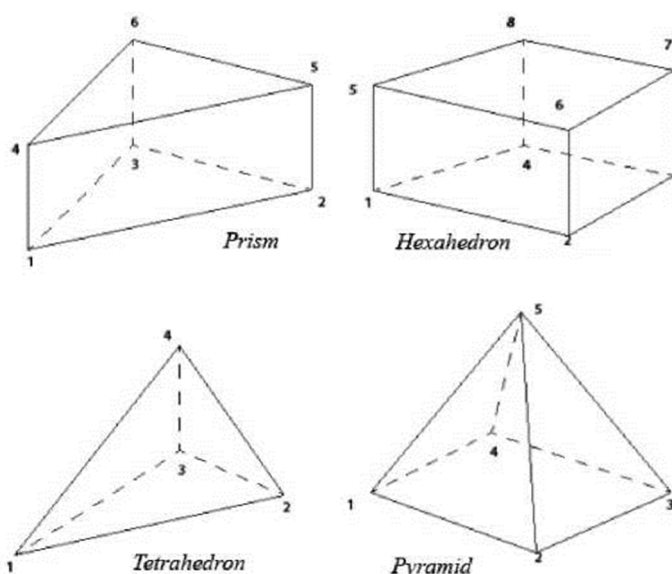
**Obr. 4-11:** Přiřazení funkce *Extrude*, zakřivený povrch válce

## 4.2 Vytváření výpočetní sítě

Pomocí výpočetní sítě je model rozdělen na jednotlivé prvky, čímž dochází k diskretizaci spojitého prostředí do tzv. integračních bodů, které leží ve středech jednotlivých prvků. To je nezbytné pro provedení numerického výpočtu.

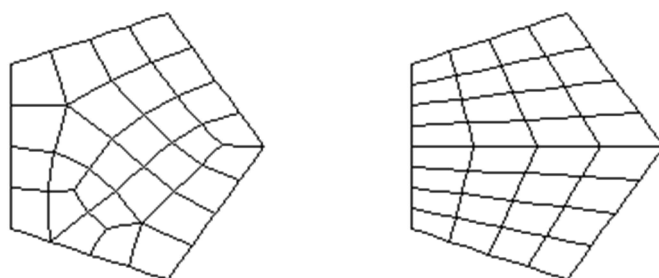
Tvorba sítě představuje v numerickém modelování jeden ze základních úkolů. Vytvořená síť má významný vliv na přesnost získaných výsledků, konvergenci řešení a výpočetní čas. Zjednodušeně lze říci, že platí přímá úměra mezi počtem prvků sítě a výpočetním časem. Proto je při vytváření sítě snahou dosáhnout optimálního počtu prvků, při kterém bude přesnost získaných výsledků přijatelná a zároveň bude výpočetní čas v požadovaných mezích. Proto je nezbytné, aby uživatel znal fyzikální podstatu simulovaných jevů. V oblastech, kde probíhají důležité děje, např. v mezních vrstvách v blízkosti stěn, je nutné vytvářet jemnou síť pro zachycení velkých gradientů jednotlivých veličin. Naopak v méně důležitých oblastech (kde se sledované veličiny mění pozvolna) je možné použít síť hrubší a snížit tak celkový počet prvků.

Síť pro modul *CFX* se skládá pouze z prostorových prvků (modul neumožňuje řešení 2D úloh). Podle počtu uzlů je lze dělit na čtyři základní typy: *tetraheron* (4 uzly), *pyramid* (5 uzlů), *prism/wedge* (6 uzlů) a *hexahedron* (8 uzlů). Jednotlivé prvky jsou na **Obr. 4-12**.



**Obr. 4-12:** Prvky sítě [12]

Z hlediska použitých elementů lze rozlišovat dva typy sítí, volnou síť (*free mesh*) a mapovanou síť (*mapped mesh*). Pro volnou síť neplatí z hlediska typu použitých prvků žádná omezení, může být vytvořena kombinací všech prvků. Síť je nepravidelná, chybí v ní opakující se vzor. Mapovaná síť je tvořena pouze z hexa-prvků. Pro síť je charakteristický pravidelný tvar. Obsahuje méně zkosených a jinak deformovaných elementů, přechod ve velikosti prvků je plynulý. Mapovaná síť lze dobře vytvořit pouze na pravidelných, jednoduchých tělesech. Naopak pomocí volné sítě je možné pokrýt i komplikované modely. Rozdíl mezi volnou a mapovanou sítí je dobře patrný z **Obr. 4-13**. [16]



**Obr. 4-13:** Volná a mapovaná síť [16]

Dalším rozdělením sítí je dělení na síť strukturovanou a síť nestrukturovanou. Pro strukturovanou síť platí, že ke každé hraně prvku přiléhá pouze jedna hrana sousedního prvku. Takovouto síť tedy nelze libovolně zhušťovat. U nestrukturované sítě pak může hrana prvku sousedit s více hranami okolních prvků. Rozdíl mezi oběma sítěmi je patrný z **Obr. 4-14**. [1]



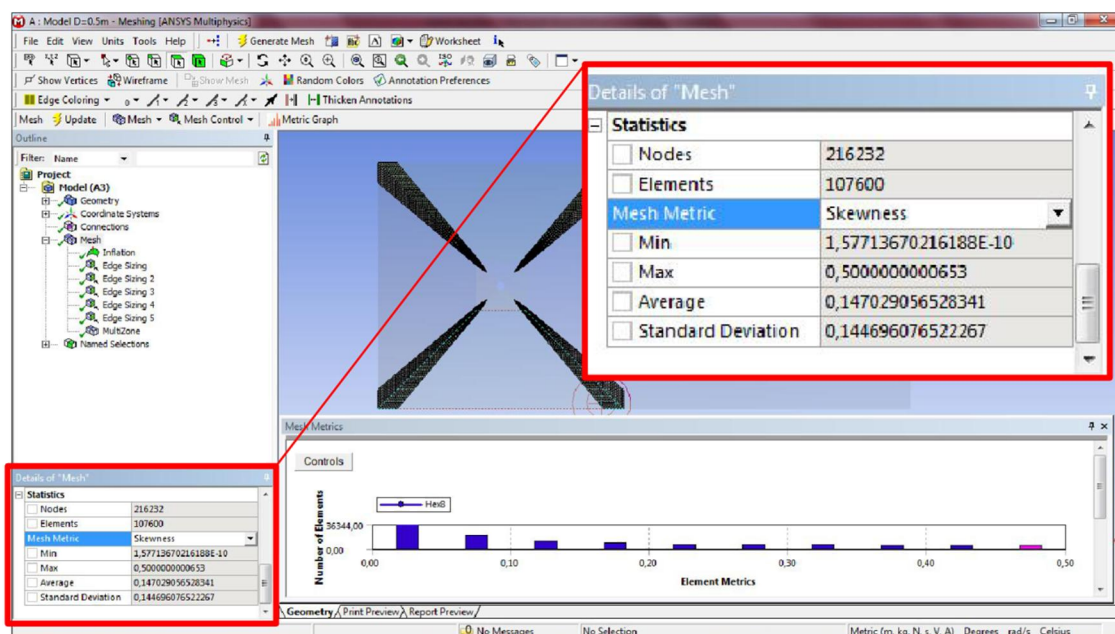
**Obr. 4-14:** Strukturovaná a nestrukturovaná síť [1]



### 4.2.1 Kvalita výpočetní sítě

Přesnost výsledků, míra konvergence řešení i výpočetní čas je ovlivněn kvalitou sítě. Ta je posuzována zejména na základě kvality jednotlivých prvků, tvořících síť. Kvalitou prvku se rozumí to, do jaké míry se jeho tvar blíží ideálnímu tvaru (např. v případě hexa-prvku je ideální tvar krychle). Pro vyhodnocení kvality prvku existuje řada kritérií. Další důležitý faktor, ovlivňující kvalitu sítě jako celku, zahrnuje poměr velikostí sousedících prvků.

Po vytvoření sítě v programu *Meshing* je možné její kvalitu, respektive kvalitu prvků, kontrolovat v položce *Mesh Metrics*. Po zvolení daného kritéria se zobrazí jeho minimální a maximální hodnoty, průměrné hodnoty a standardní odchylka. Pod hlavním grafickým oknem se dále zobrazí sloupcový graf, znázorňující závislost mezi počtem prvků a velikostí příslušného kritéria. Při označení sloupce se v modelu zobrazí pouze prvky s danou hodnotou kritéria (viz **Obr. 4-15**). Je tak možné kontrolovat, zda jsou v příslušných oblastech prvky dostatečné kvality a v případě potřeby síť upravit. Kritéria, která lze v programu *Meshing* zobrazit jsou tato: *Element Quality*, *Aspect Ratio*, *Jacobian Ratio*, *Warping Factor*, *Parallel Deviation*, *Maximum Corner Angle*, *Skewness* a *Orthogonal Quality*.



Obr. 4-15: Statistika sítě (*Mesh Metrics*)

**Element Quality**

Tento parametr je počítán jak pro plošné, tak pro prostorové prvky. Je stanoven na základě objemu (plochy) prvku a délek jeho stran. Parametr nabývá hodnot od 0 do 1, kdy 1 znamená ideální tvar (krychle, čtverec), 0 znamená, že prvek má nulový nebo záporný objem (povrch). Pro prostorové prvky lze hodnotu parametru Element Quality stanovit:

$$\text{Element Quality} = C \cdot \left( \frac{V}{\sqrt{\sum (l_i^2)^3}} \right) \quad (4.1)$$

kde  $V$  je objem prvku,  $l_i$  je  $i$ -tá hrana prvku a  $C$  je konstanta lišící se pro jednotlivé typy prvků. Její hodnotu je možné nalézt v.

**Aspect Ratio**

Kritérium je počítáno pro trojúhelníky a čtyřúhelníky (stěny prostorového prvku). V obou případech jsou na základě daných postupů sestrojeny pomocné obdélníky. Hodnota *Aspect Ratio* pak představuje největší poměr délek stran těchto obdélníků.

Nejlepší hodnota 1 znamená čtverec, respektive rovnostranný trojúhelník. Příklady prvků s různou hodnotou *Aspect Ratio* jsou na **Obr. 4-16**.

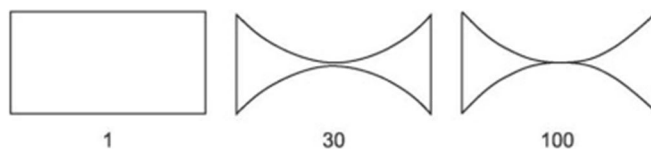


**Obr. 4-16:** Prvky s různou hodnotou *Aspect Ratio* [12]

**Jacobian Ration**

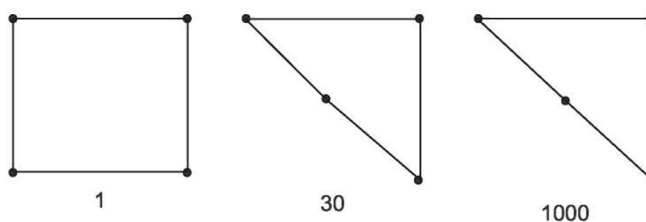
Parametr je vyhodnocován pro všechny prvky s výjimkou trojúhelníků a tetrahedronů. Ve vybraných lokacích prvku (uzly, těžiště) je počítán determinant Jakobiho matice  $R_j$ . *Jacobian Ratio* je pak poměr maximální a minimální hodnoty  $R_j$  na daném prvku.

Pro každý obdélník nebo rovnoběžnostěn bez mezi-uzlů nebo s mezi-uzly ve středech stran, platí hodnota *Jacobian Ratio* 1. Při pohybu mezi-uzlů směrem od středu nebo ke středu prvku hodnota *Jacobian Ratio* narůstá (snižuje se kvalita prvku). Příklady prvků s různou hodnotou *Jacobian Ratio* jsou na **Obr. 4-17**.



**Obr. 4-17:** Prvky s různou hodnotou *Jacobian Ratio* [12]

Pro čtyřúhelník nebo hexahedron má *Jacobian Ratio* hodnotu 1 v případě, že jsou protilehlé hrany (plochy) prvku rovnoběžné. V případě posuvu rohového uzlu směrem do středu prvku se *Jacobian Ratio* zvyšuje (viz **Obr. 4-18**).

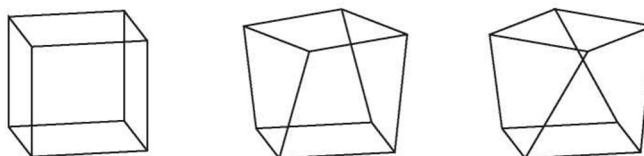


**Obr. 4-18:** Prvky s různou hodnotou *Jacobian Ratio* [12]

### ***Warping Factor***

Parametr vyjadřující míru zkroucení prvku. Je počítán pro čtyřúhelníkové skořepinové prvky a pro všechny čtyřúhelníkové plochy prostorových prvků. Výsledný *Warping Factor* je pak nejvyšší hodnotou spočtenou na jednotlivých plochách. V případě *hexahedronu* 6 ploch, v případě *wedge* 4 plochy a u prvku *pyramid* jedna plocha. Prvek, který má všechny strany ploché má *Warping Factor* roven 0.

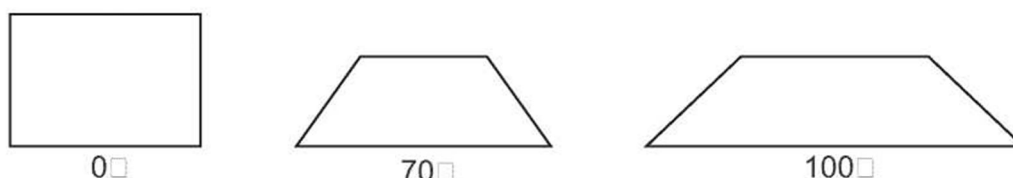
Např. při pootočení horní strany krychle vůči její základně o úhel  $22,5^\circ$  a  $45^\circ$  je hodnota *Warping Factor* 0,2 respektive 0,4 (viz **Obr. 4-19**).



**Obr. 4-19:** Prvky s různou hodnotou kritéria *Warping Factor* [12]

**Parallel Deviation**

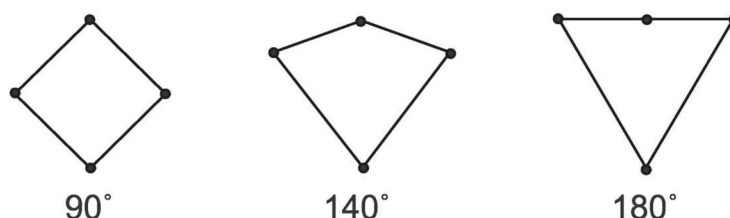
Při výpočtu tohoto kritéria je každé straně prvku přiřazen jednotkový vektor. Pro každou dvojici protilehlých stran je pak počítán skalární součin jejich jednotkových vektorů. Hodnota *Parallel Deviation* je pak větší z těchto dvou úhlů. V případě, že jsou všechny strany prvku rovnoběžné je hodnota *Parallel Deviation* rovna 0 (ideální prvek). Prvky s různou hodnotou *Parallel Deviation* jsou na **Obr. 4-20**.



**Obr. 4-20:** Prvky s různou hodnotou kritéria *Parallel Deviation* [12]

**Maximum Corner Angle**

Parametr vyjadřuje maximální hodnotu úhlu svíraného dvěma sousedními stranami. Ten je počítán na základě polohy jednotlivých rohových uzlů v prostoru. Tento parametr je počítán pro všechny typy prvků. Ideální hodnota pro trojúhelníkové prvky je  $60^\circ$ , pro čtyřúhelníkové  $90^\circ$ .



**Obr. 4-21:** Prvky s různou hodnotou *Maximum Corner Angle* [12]

**Skewness**

Jedeno z primárních kritérií kvality sítě. Vyjadřuje míru, s jakou se prvek blíží ideálnímu tvaru (např. rovnostrannému trojúhelníku nebo rovnoúhlému čtyřstěnu). Hodnota parametru se pohybuje v mezích od 0 do jedné, kdy 0 představuje rovnostranný prvek (nejlepší), hodnota 1 znamená zdegenerovaný prvek. Prvky s vysokou hodnotou parametru jsou nepřijatelné pro dobré výsledky, při řešení rovnic se totiž předpokládají relativně rovnostranné prvky. Hodnocení kvality podle velikosti parametru *Skewness* shrnuje **Tab. 4-1**.

Pro výpočet parametru *Skewness* existují dvě metody. První, založená na rovnostranném objemu, lze použít pouze pro trojúhelníky a čtyřstěny. Hodnota *Skewness* je definována:

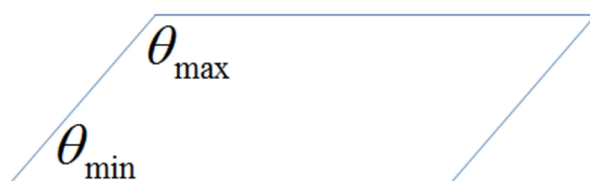
$$Skewness = \frac{V_{optimal} - V}{V_{optimal}} \quad (4.2)$$

kde  $V$  je objem hodnoceného prvku a  $V_{optimal}$  je objem rovnostranného prvku se stejným opsaným poloměrem.

Druhá metoda je založena na odchylce od úhlu, který svírají strany ideálního prvku ( $60^\circ$  pro trojúhelník,  $90^\circ$  pro čtyřúhelník). Lze ji použít pro všechny druhy prvků. Hodnota parametru je pak počítána na základě vzorce:

$$Skewness = \max \left[ \frac{\theta_{max} - \theta_e}{180 - \theta_e}; \frac{\theta_e - \theta_{min}}{\theta_e} \right] \quad (4.2)$$

kde  $\theta_{max}$  je největší úhel svíraný stranami prvku,  $\theta_{min}$  je nejmenší úhel svíraný stranami prvku a  $\theta_e$  je úhel svíraný stranami ideálního prvku (viz **Obr. 4-21**).



**Obr. 4-22:** Kritérium *Skewness* [12]

**Tab. 4-1:** Hodnoty parametru *Skewness* [12]

Hodnota <i>Skewness</i>	Kvalita prvku
1	zdegenerovaný ( <i>degenerate</i> )
$0,9 - < 1$	velmi špatný ( <i>bad, sliver</i> )
$0,75 - 0,9$	špatný ( <i>poor</i> )
$0,5 - 0,75$	uspokojivý ( <i>fair</i> )
$0,25 - 0,5$	dobrý ( <i>good</i> )
$> 0 - 0,25$	excelentní ( <i>excellent</i> )
0	ideální ( <i>equilateral</i> )

**Orthogonal Quality**

Hodnota tohoto parametru je pro prostorové prvky počítána pomocí normálových vektorů jednotlivých ploch prvku, vektorů směřujících z těžiště prvku k těžištím přilehlých prvků a vektorů směřujících z těžiště prvku ke středům ploch prvku. Kritérium nabývá hodnot od 0 od 1, kdy 0 znamená nejhorší, 1 nejlepší kvalitu. Velikost kritéria je dána jako minimum z hodnot X a Y, počítaných pro každou plochu prvku.

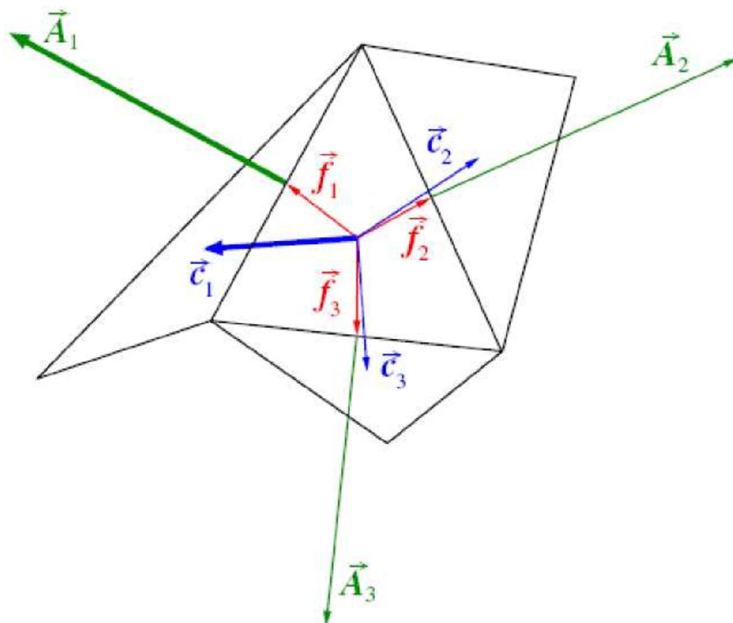
$$X = \frac{\vec{A}_i \cdot \vec{f}_i}{|\vec{A}_i| \cdot |\vec{f}_i|} \quad (4.3)$$

kde  $\vec{A}_i$  je normálový vektor plochy a  $\vec{f}_i$  je vektor směřující z těžiště prvku ke středu dané plochy.

$$Y = \frac{\vec{A}_i \cdot \vec{c}_i}{|\vec{A}_i| \cdot |\vec{c}_i|} \quad (4.4)$$

kde  $\vec{A}_i$  je normálový vektor plochy a  $\vec{c}_i$  je vektor směřující z těžiště prvku k těžišti přilehlého prvku sdílejícího danou plochu.

Jednotlivé vektory jsou znázorněny na **Obr. 4-22**.



**Obr. 4-23:** *Orthogonal Quality* [12]

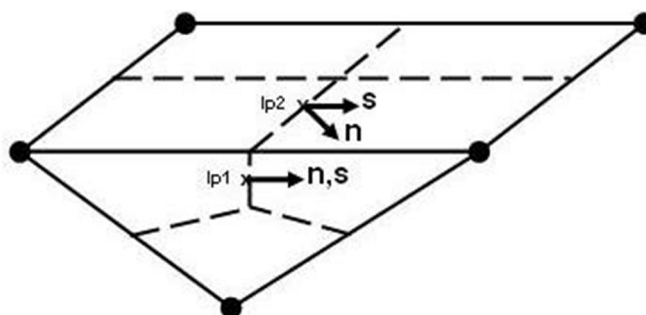
Další kritéria kvality sítě posuzuje řešič modulu *CFX* (*CFX-Solver*). Hodnoty těchto kritérií jsou zobrazeny ve výstupním souboru, tzv. *Out file* souboru (viz 4.4), do kterého řešič zapisuje veškeré informace o průběhu výpočtu. Těmito kritérii jsou *Orthogonality Angle*, *Expansion Factor* a *Aspect Ratio* (popsáno výše).

### ***Orthogonality Angle***

Kritérium hodnotí, do jaké míry se úhel mezi stranami sousedních prvků blíží optimálnímu ( $90^\circ$  pro prvky s čtyřúhelníkovými plochami). Stanovuje se z hodnot úhlů, které svírají jednotkové vektory ve směru spojnic dvou uzlů sítě ( $\vec{s}_i$ ) a normálové vektory ploch protilehlých k těmto spojnicím ( $\vec{n}_i$ ). Vektory jsou patrné z **Obr. 4-21**. *Orthogonality Angle* je vážený průměr těchto úhlů, podle vzorce:

$$\text{Orthogonality Angle} = \sum_{i=1}^n (90^\circ - a \cdot \cos(\vec{n}_i \cdot \vec{s}_i)) \quad (4.5)$$

Hodnota by měla být větší, než  $20^\circ$ .



**Obr. 4-24:** *Orthogonality Angle* [13]

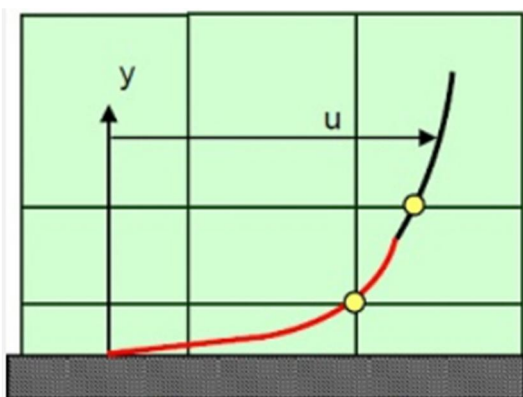
### ***Expansion Factor***

Tento parametr hodnotí velikost objemu sousedících prvků. Kolem každého uzlu sítě je vytvořen kontrolní objem, složený z jednotlivých sektorů. *Expansion Factor* je dán jako poměr objemu největšího a nejmenšího sektoru. Hodnota *Expansion Factor* by neměla být větší než 20. Nedodržením tohoto požadavku se výrazně snižuje přesnost výpočtu, v důsledku nárůstu diskretizačních chyb.

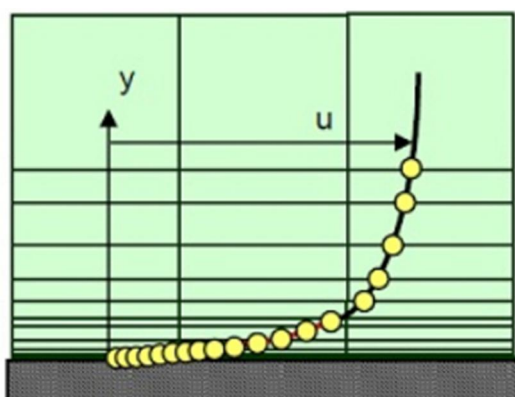
### 4.2.2 Modelování v blízkosti stěny

Při numerické simulaci obtékaných těles má pro získání věrohodných výsledků klíčovou roli správné modelování mezní vrstvy v blízkosti stěny, kde dochází k rychlé změně řešených veličin. Pokud dojde k nesprávnému stanovení bodu odtržení mezní vrstvy, je výsledné tlakové pole odlišné, a silové účinky působící na těleso se tak mohou významně lišit od skutečnosti. Modelování mezní vrstvy má kromě výsledných účinků na obtékané těleso také výrazný vliv na proudění v celé oblasti modelu.

Pro vytváření sítě v blízkosti stěn existují obecně v *CFD* programech dva přístupy. Prvním přístupem je využití tzv. stěnových (*Wall Functions*), druhým přístupem je přímé modelování mezní vrstvy, označované jako metoda malých Reynoldsových čísel (*Low-Reynolds-Number Method*). Rozdíl v obou přístupech je patrný z **Obr. 4-25** a **Obr. 4-26**. [17]



**Obr. 4-25:** Přístup stěnové funkce (*Wall Function*) [19]



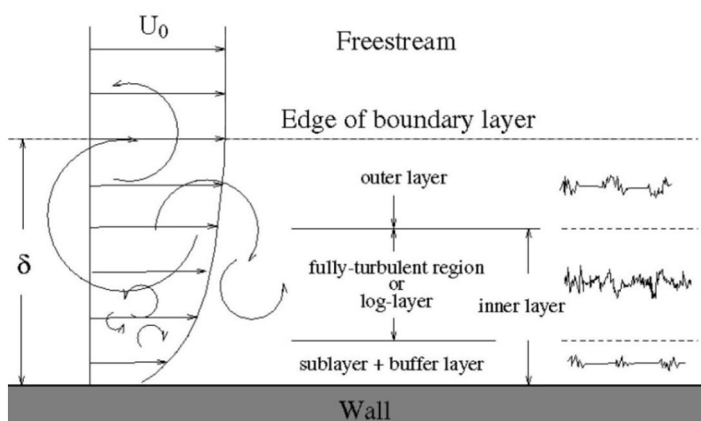
**Obr. 4-26:** Přímé modelování mezní vrstvy (*Low-Re Method*) [19]



### 4.2.2.1 Stěnové funkce

V kapitole 2 bylo uvedeno rozdělení mezní vrstvy podle vzdálenosti od stěny na laminární podvrstvu, kde má dominantní vliv viskozita, přechodovou vrstvu, kde se viskozita a turbulence uplatňují přibližně rovnoměrně a plně turbulentní vrstvu.

V rámci teorie stěnových funkcí je plně turbulentní vrstva rozdělena na tzv. logaritmicou vrstvu (blíže ke stěně) a vnější vrstvu (*outer layer*). Laminární podvrstva (*viscous sublayer*), přechodová vrstva (*buffer layer*) a oblast logaritmicou vrstvy (*log-layer*) pak spolu tvoří vnitřní vrstvu (*inner layer*). Schéma rozdělení mezní vrstvy je na **Obr. 4-27**.



**Obr. 4-27:** Rozdělení mezní vrstvy [17]

Dále jsou zavedeny dvě bezrozměrné veličiny charakterizující rychlost proudění, parametr  $u^+$ , a vzdálenost od stěny, stěnový parametr  $y^+$ . Tyto parametry jsou dány vztahy:

$$u^+ = \frac{U_t}{u_\tau} \quad (4.6)$$

$$y^+ = \frac{\Delta y \cdot u_\tau}{\nu} \quad (4.7)$$

kde

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (4.8)$$

$U_t$  je tangenciální rychlost proudění v bodě vzdáleném  $\Delta y$  od stěny,  $\Delta y$  je skutečná vzdálenost od stěny,  $\nu$  je kinematická viskozita,  $\rho$  je hustota tekutiny,  $\tau_w$  je smykové napětí a  $u_\tau$  je tzv. třecí rychlost. [17]

Pomocí stěnového parametru  $y^+$  pak lze stanovit bezrozměrnou vzdálenost jednotlivých vrstev od stěny.

- Laminární podvrstva  $y^+ < 5$
- Přechodová vrstva  $5 < y^+ < 30$
- Logaritmická vrstva  $30 \sim 60 < y^+ < *$
- Vnější vrstva  $* < y^+ < **$

Hranice vnitřní a vnější vrstvy označená jako \* a hranice vnější mezní vrstvy a volného proudu \*\* pak závisí na hodnotě Reynoldsova čísla. [10]

V oblasti laminární podvrstvy má dominantní vliv molekulová viskozita tekutiny. Fluktuační rychlosti jsou zde utlumeny. Pro smykové napětí platí Newtonův zákon viskozity, rovnice (3.7), a dále platí, že toto smykové napětí  $\tau_w$  je v celé vrstvě konstantní. To znamená, že rychlost proudění lze vyjádřit jako:

$$U_t = \frac{\tau_w}{\mu} \cdot y \quad (4.9)$$

kde  $\mu$  je dynamická viskozita tekutiny a  $y$  je (skutečná) vzdálenost od stěny. Ze vztahu vyplývá, že rychlostní profil v laminární podvrstvě je lineární.

Ekvivalentní zápis pomocí bezrozměrných parametrů je:

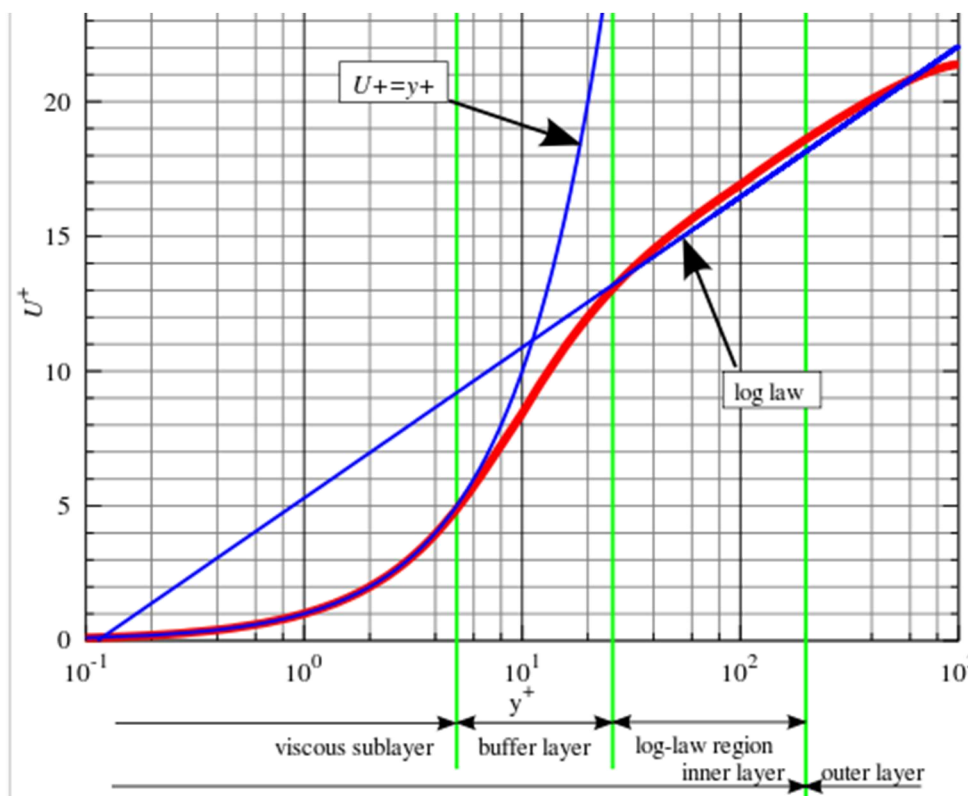
$$u^+ = y^+ \quad (4.11)$$

V logaritmické vrstvě je již proudění plně turbulentní a pro rychlostní profil zde platí tzv. logaritmický zákon (*Law of the Wall*):

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \cdot \ln(y^+) + C \quad (4.12)$$

kde  $\kappa$  je von Karmánova konstanta ( $\approx 0,42$ ) a  $C$  je empirická konstanta. [17]

Na **Obr. 4-28** je zobrazen graf závislosti bezrozměrné rychlosti  $u^+$  v závislosti na bezrozměrné vzdálenosti od stěny  $y^+$ . Graf je v logaritmických souřadnicích. Modrou čarou je vyznačen průběh rychlostí podle rovnice (4.11), respektive (4.12). Červenou čarou je vyznačen skutečný průběh rychlosti, zjištěný experimentálně. Z grafu je patrné, že lineární rychlostní profil je poměrně výstižný až do vzdálenosti  $y^+ \approx 8$ . Od hodnoty  $y^+ \approx 30$  pak platí logaritmický zákon.



**Obr. 4-28:** Logaritmický zákon [20]

Stěnové funkce v *CFD* programech tak představují soubor polo-empirických vztahů, které „přemostňují“ bezprostřední oblast v blízkosti stěny (laminární podvrstvu) bez nutnosti jejího přímého modelování pomocí výpočetní sítě. Stěnové funkce v sobě zahrnují právě logaritmický zákon (rovnice (4.12)). U těchto stěnových funkcí je zpravidla nutné dodržet předpoklad, že první uzel (*node*) sítě u stěny musí ležet v logaritmické vrstvě ( $y^+ \geq 30$ ). [14]

Laminární podvrstva tedy u přístupu stěnových funkcí není řešena (je nahrazována logaritmickým zákonem). To na jednu stranu šetří výpočetní čas, jelikož síť v blízkosti stěny může být hrubší, na druhou stranu tento přístup nepřináší dobré výsledky v těchto případech:

- proudění s nízkým  $Re$  číslem, kdy vliv viskozity sahá daleko od stěny (proudění v úzkých štěrbinách, proudění velmi vazkých tekutin, proudění s malou rychlostí)
- vlivem tlakového gradientu dochází k odtržení mezní vrstvy
- významné působení objemových sil (např. odstředivé síly při proudění kolem rotující součásti)
- prostorové proudění v blízkosti stěny (silně zakřivená, prostorová mezní vrstva)

V takovýchto případech je nutné použít přístup přímého modelování mezní vrstvy. [2]

### 4.2.2.2 Přímé modelování mezní vrstvy

Při tomto přístupu je podrobně modelována laminární podvrstva (respektive celá mezní vrstva) pomocí výpočetní sítě. Označení „metoda malých  $Re$  čísel“ (*Low-Re Method*) nesouvisí s globálním Reynoldsovým číslem, ale s tzv. turbulentním Reynoldsovým číslem, které je v laminární podvrstvě malé. Proto může být tento přístup použit i při simulaci s velkým globálním  $Re$  číslem za předpokladu, že je laminární vrstva modelována dostatečně podrobně. Doporučené hodnoty stěnového parametru pro vzdálenost prvního uzlu od stěny jsou  $y^+ < 2$ , lépe  $y^+ \approx 1$ . [13, 14]

Tento přístup se využívá převážně u proudění s malým Reynoldsovým číslem. Lze ho použít i pro velká Reynoldsova čísla, to však, při respektování požadavku na nízkou hodnotu stěnového parametru, vede k velmi malé vzdálenosti prvního uzlu od stěny. Pro zachování kritérií hodnotících objemový nárůst prvků sítě (*Expansion Factor*) je nutné vytvořit síť s velkým počtem prvků, jejichž velikost směrem od stěny pozvolna roste. To může být v některých případech z hlediska výpočetního času neúnosné.

Přímé modelování mezní vrstvy je nezbytné v případech, kdy je použití stěnových funkcí nedostatečné (viz 4.2.2.1). Tedy vždy při řešení obtékaných těles, zejména dochází-li k odtržení mezní vrstvy.

#### 4.2.2.3 Přístup modelování v blízkosti stěny v závislosti na modelu turbulence

O volbě přístupu modelování u stěny rozhoduje také použitý model turbulence (o jeho volbě by mělo být rozhodnuto před začátkem tvorby sítě). Pro jednotlivé modely se liší vhodnost použitého přístupu v závislosti na tom, jakou model využívá stěnovou funkci.

V *CFX* dříve velmi často používaná standardní stěnová funkce (*Standard Wall Function*) je citlivá na polohu prvního uzlu, a pro její dobré výsledky musí být splněn předpoklad, že první uzel leží v logaritmické oblasti ( $y^+ \geq 30$ ). Výhodnější je použití tzv. „škálovatelné“ stěnové funkce (*Scalable Wall Function*), která není citlivá na jemnost použité sítě. Tato funkce má nastavenou minimální limitní hodnotu stěnového parametru  $y^*$  (definovaného obdobně jako  $y^+$ ). V případě jemné sítě pak uvažuje s touto hodnotou a prvky blíže stěny jsou zanedbány. Limitní hodnota je  $y^* = 11.06$ , a představuje průsečík lineárního a logaritmického rychlostního profilu (viz **Obr. 4-28**). Tyto dvě funkce představují první přístup modelování a jsou s nimi spojeny turbulentní modely založené na řešení proměnných  $k$  a  $\varepsilon$  (model *Standard k- $\varepsilon$*  a jeho modifikace). Tyto modely jsou primárně určeny pro řešení úloh volného proudu při vysokých  $Re$  číslech.

Funkce *Automatic Wall Treatment* umožňuje použít oba přístupy, mezi kterými umí plynule přecházet. Není tak závislá na výpočetní síti, ale používá se převážně pro přístup podrobného modelování. Je spojena s modely typu  $k-\omega$  (model *Standard k- $\omega$* , model *SST*), které jsou vhodné pro řešení mezní vrstvy, zejména ke stanovení bodu odtržení.

V této práci byl jako výchozí model turbulence použit model *SST (Shear Stress Transport)*. Testován byl také model *Standard k- $\varepsilon$* .

### 4.2.3 Stanovení tloušťky prvků u stěny

#### 4.2.3.1 Hladký válec

Pro zvolený model turbulence *SST* platí doporučení stěnového parametru  $y^+ \approx 1$ . To bylo v rámci této práce při tvorbě sítí dodržováno (mimo drsné válce, viz 4.2.3.2).

Při stanovení vzdálenosti prvního uzlu od stěny válce, respektive tloušťky první řady prvků, se vycházelo z rovnic (1.2), (4.7) a (4.8) doplněných o rovnice: [17]

$$\tau_w = C_f \cdot \frac{\rho \cdot u^2}{2} \quad (4.13)$$

$$C_f = \frac{0,455}{(\ln(0,06 \cdot Re))^2} \quad (4.14)$$

Z těchto rovnic lze vyjádřit vzdálenost prvního uzlu (tloušťku první vrstvy prvků) jako:

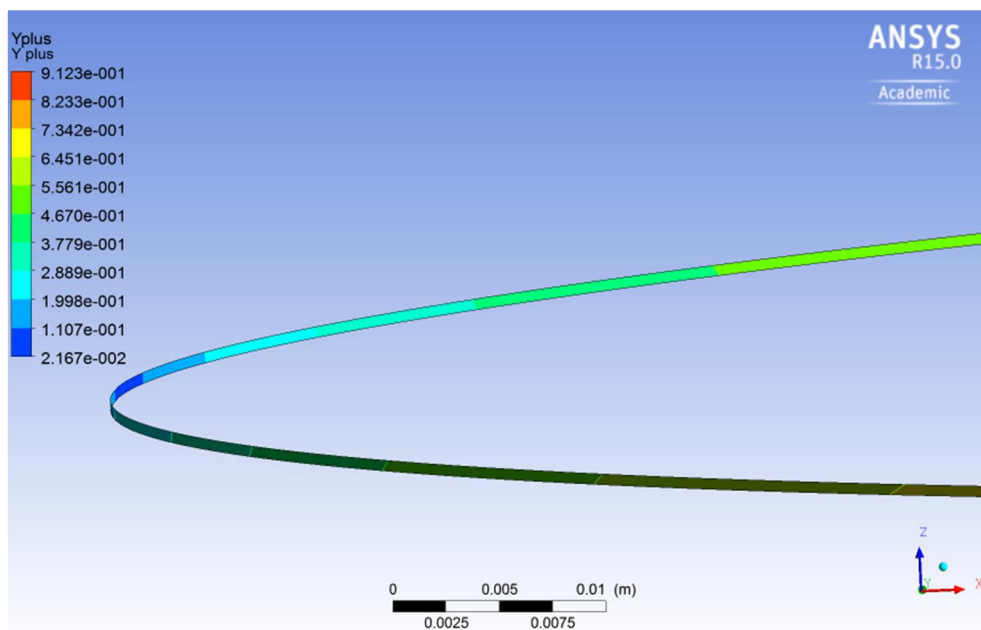
$$\Delta y = \frac{y^+ \cdot \mu}{\rho \cdot u_t} = \frac{y^+ \cdot D}{Re \cdot \sqrt{\frac{C_f}{2}}} \quad (4.15)$$

Z rovnic plyne, že s rostoucí rychlostí a konstantní hodnotou stěnového parametru  $y^+$  se vzdálenost prvního uzlu od stěny zmenšuje. Do rovnic byla tedy dosazena rychlost odpovídající nejvyšší hodnotě zadaného Reynoldsova čísla ( $y^+$  voleno 1). Tedy například pro válec o průměru 0,5 m, při  $Re = 3,5 \cdot 10^6$ :

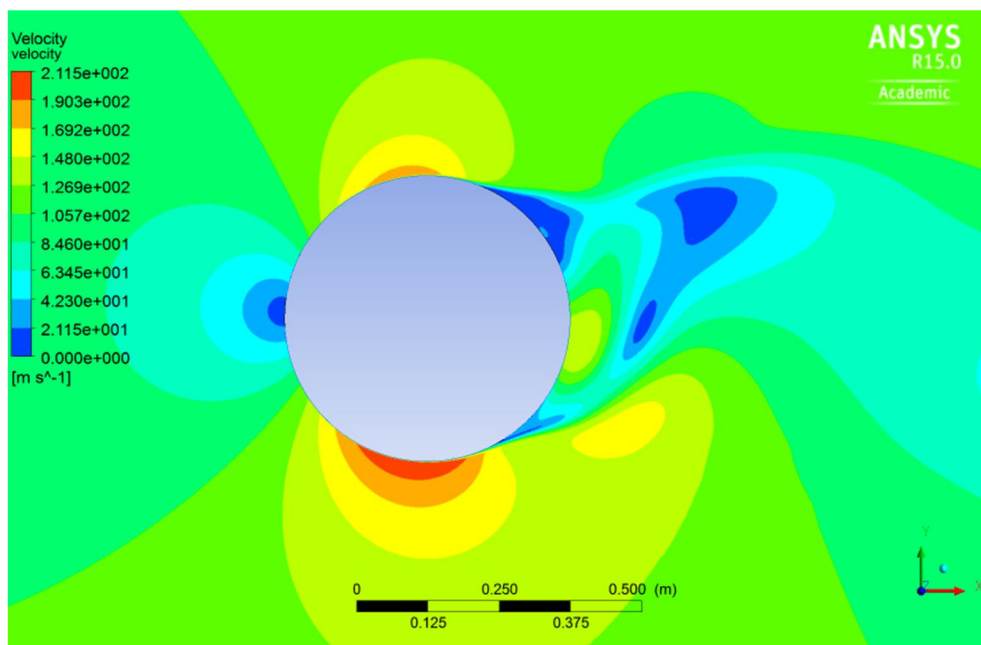
$$C_f = \frac{0,455}{(\ln(0,06 \cdot Re))^2} = \frac{0,455}{(\ln(0,06 \cdot 3,5 \cdot 10^6))^2} = 0,00303$$

$$\Delta y = \frac{y^+ \cdot D}{Re \cdot \sqrt{\frac{C_f}{2}}} = \frac{1 \cdot 0,5}{3,5 \cdot 10^6 \cdot \sqrt{\frac{0,00303}{2}}} = 3,67 \cdot 10^{-6} m$$

Výsledná hodnota je pouze přibližná (řádově) a byla použita pro první návrh sítě. Hodnotu  $y^+$  je po provedení výpočtu možné zobrazit v *postprocessoru* (viz **Obr. 4-29**). Její velikost se v jednotlivých místech stěny liší v závislosti na rychlosti volného proudu u stěny (požadavek  $y^+ < 1$  by měl být splněn na celé stěně). Rychlost proudění je nejvyšší po stranách válce, a je oproti rychlosti nabíhajícího proudu (rychlosti dosazované do rovnic prostřednictvím  $Re$  čísla) přibližně dvojnásobná (**Obr. 4-30**). To je jednou z příčin, proč je hodnota stanovená z rovnice (4.15) pouze orientační.



Obr. 4-29: Hodnota  $y^+$  v *postprocesoru*



Obr. 4-30: Rychlostní pole v blízkosti válce

Po kontrole v *postprocesoru* je tedy nutné síť upravit. Lze přibližně říci, že maximální hodnota  $y^+$  v *postprocesoru* je přímo úměrná tloušťce první řady prvků sítě. Navrženou tloušťku je tedy nutné dělit poměrem vypočtené hodnoty a požadované hodnoty parametru  $y^+$ .

Vytváření sítě je iteračním procesem, kdy se vhodnou volbou tloušťky vrstvy prvních prvků u stěny snažíme dosáhnout požadované hodnoty stěnového parametru. Rovnice (4.14) a (4.15) pak dobře poslouží k počátečnímu odhadu.

Při použití modelu *SST* byla pro každý geometrický model (odpovídající průměru válce) vytvořena síť, kdy stěnový parametr odpovídal hodnotě  $y^+ \approx 1$  při rychlosti odpovídající nejvyšší hodnotě zadaného *Re*. Na takovéto síti pak byly provedeny všechny výpočty pro zadané rychlosti (tedy s klesající rychlostí klesala i hodnota parametru  $y^+$ ).

U válce s průměrem 0,1 m byly počítány pouze rychlosti odpovídající  $Re = 8e+5$  a nižší. Vzhledem k malému průměru by při vyšších *Re* vycházely rychlosti proudění, odpovídající Machovu číslu vyššímu než 0,25. V tomto případě by se začala projevit stlačitelnost vzduchu. To z hlediska úlohy řešené v této práci nebylo žádoucí.

Pro model *k-ε* byla síť pro jednotlivé rychlosti proudění vždy upravována tak, aby stěnový parametr odpovídal doporučení  $y^+ \approx 30$ . [10] Tyto výpočty proběhly pouze pro model válce s průměrem 0,5 m.

### 4.2.3.2 *Drsný válec*

Při vytváření sítě u drsného povrchu nesmí drsnost převyšovat velikost prvků u stěny. [2] Proto byla při výpočtech s nastaveným parametrem drsnosti (viz 4.3.1) vytvořena na všech geometrických modelech síť s tloušťkou první vrstvy prvků 0,3 mm (zadaná drsnost byla 0,2 mm). Pro takovou síť ale nebylo splněno kritérium  $y^+ \approx 1$ , doporučené pro model *SST*. Z toho důvodu byl vytvořen model se zakřiveným povrchem válce, který měl zadanou drsnost reprezentovat přímo svým tvarem. Na tomto modelu nebyl nastaven parametr drsnosti, proto bylo možné vytvořit síť splňující dané kritérium (opět pro nejvyšší zadanou rychlost).

V **Tab. 4-2** jsou uvedeny vzdálenosti prvního uzlu od stěny  $\Delta y$  pro jednotlivé modely a k nim odpovídající hodnoty  $y^+$  získané z *postprocessoru*. Jedná se o maximální hodnoty na stěně válce.



Tab. 4-2: Hodnoty stěnového parametry  $y^+$ 

Povrch	Hladký			
Průměr	0,1 m	0,5 m	1 m	2 m
Model turbulence	SST			
$\Delta y$ [m]	$1,3 \cdot 10^{-6}$	$1,7 \cdot 10^{-6}$	$3,4 \cdot 10^{-6}$	$6,8 \cdot 10^{-6}$
$Re$ [-]	$y^+$			
$2 \cdot 10^5$	0,25	0,07	0,07	0,07
$4 \cdot 10^5$	0,46	0,12	0,12	0,12
$6 \cdot 10^5$	0,66	0,17	0,18	0,18
$8 \cdot 10^5$	0,88	0,23	0,24	0,23
$1 \cdot 10^6$	-	0,27	0,29	0,28
$2 \cdot 10^6$	-	0,53	0,53	0,52
$3,5 \cdot 10^6$	-	0,91	0,88	0,91
Povrch	Drsný			
Průměr	0,1 m	0,5 m	1 m	2 m
Model turbulence	SST			
$\Delta y$ [m]	$3,0 \cdot 10^{-6}$			
$Re$ [-]	$y^+$			
$2 \cdot 10^5$	78,97	13,20	6,32	2,99
$4 \cdot 10^5$	156,33	28,00	12,99	6,46
$6 \cdot 10^5$	231,82	38,55	18,11	8,80
$8 \cdot 10^5$	307,44	53,20	25,59	11,68
$1 \cdot 10^6$	-	67,90	32,50	14,92
$2 \cdot 10^6$	-	137,40	63,30	28,26
$3,5 \cdot 10^6$	-	239,70	108,77	52,78
Povrch	Zakřivený			
Průměr	0,5 m			
Model turbulence	SST			
$\Delta y$ [m]	$1,0 \cdot 10^{-6}$			
$Re$ [-]	$y^+$			
$2 \cdot 10^5$	0,10			
$4 \cdot 10^5$	0,10			
$6 \cdot 10^5$	0,12			
$8 \cdot 10^5$	0,16			
$1 \cdot 10^6$	0,18			
$2 \cdot 10^6$	0,35			
$3,5 \cdot 10^6$	0,58			

### 4.2.4 Postup vytváření sítě

Sítě na jednotlivých geometrických modelech byly vytvořeny v programu *Meshing*. Při práci v prostředí *Workbench* se do něj geometrie vytvořená v programu *Design Modeler* načítá automaticky.

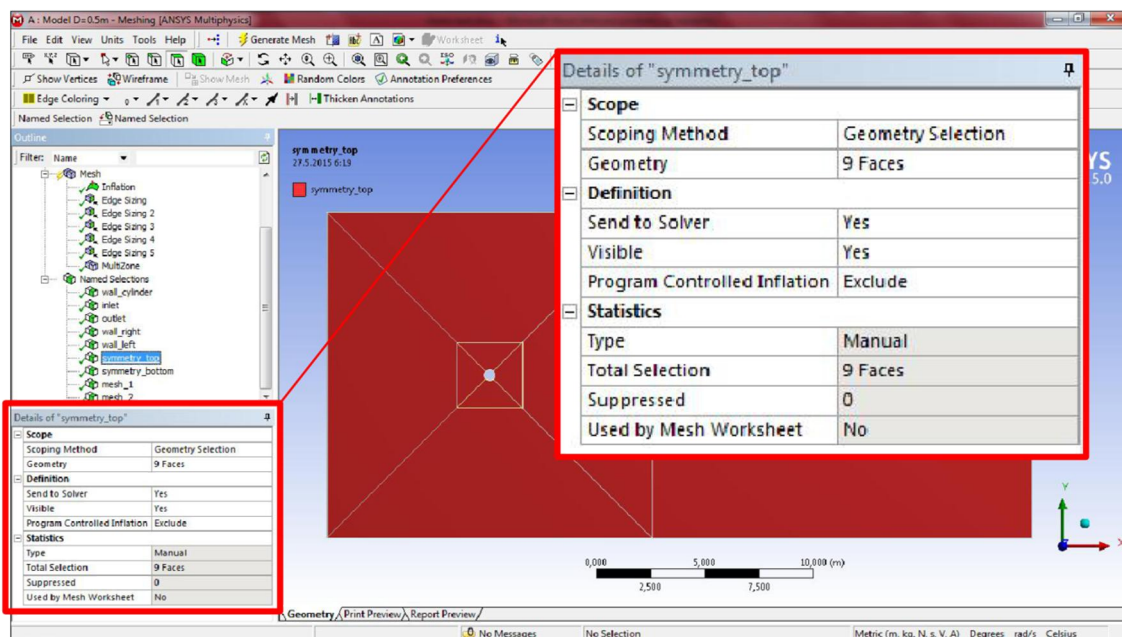
Pro splnění předpokladu rovinnosti úlohy byla na každém modelu vytvořena síť, která na výšku obsahovala pouze jeden prvek.

Postup při vytváření sítí na jednotlivých modelech se výrazně nelišil, rozdílná byla pouze některá nastavení, v závislosti na velikosti modelu (respektive průměru válce), na drsnosti povrchu a použitém modelu turbulence. Jednotlivé sítě se lišili především v tloušťce první řady prvků sousedících se stěnou válce (viz 4.2.3).

Program *Meshing* obsahuje řadu funkcí, umožňujících kontrolu nad vytvářenou sítí. V této práci byla použita jen část z nich. Při vytváření jsou nejprve provedena specifická nastavení a poté je pomocí příkazu síť vygenerována. Postup při vytváření sítě je popsán v následujících krocích.

#### 1. Pojmenování ploch

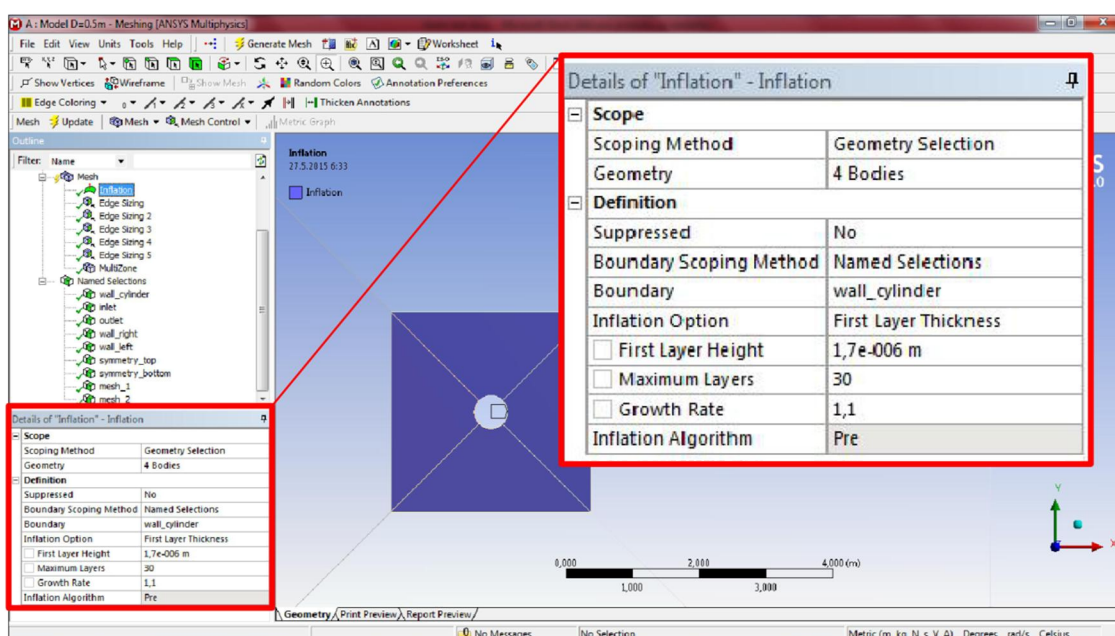
Pomocí funkce *Named Selection* byly pojmenovány jednotlivé hraniční plochy modelu (viz **Obr. 4-31**). To je výhodné, protože později nemusí docházet k opakovanému výběru těchto ploch, což velmi usnadňuje pozdější zadávání okrajových podmínek.



**Obr. 4-31:** Detail funkce *Named Selection*

## 2. Modelování mezní vrstvy

Prvky modelující mezní vrstvu byly vytvořeny pomocí funkce *Inflation*. Ta umožňuje vytvoření tenkých vrstev prvků v blízkosti stěn. U této funkce je nutné specifikovat povrch, od kterého se budou prvky tvořit a dále tělesa (*Bodies*), ve kterých se budou vytvořené prvky nacházet. Dále byla u této funkce zvolena možnost nastavit tloušťku první vrstvy prvků (*First Layer Thickness*). Ta byla pro jednotlivé síť zvolena na základě velikosti modelu (průměr válce), modelu turbulence a drsnosti povrchu (viz **Tab. 4-2**). Počet vrstev byl ve všech případech 30. Růstový faktor (*Growth Rate*), tedy nárůst tloušťky prvků v následující vrstvě, se pro jednotlivé síť pohyboval v rozmezí od 1,02 do 1,1 (růst 2% až 10%). Detail nastavení funkce *Inflation* je na **Obr. 4-32**. U modelu se zakřiveným povrchem byly prvky u stěny modelovány pomocí dělení hran.

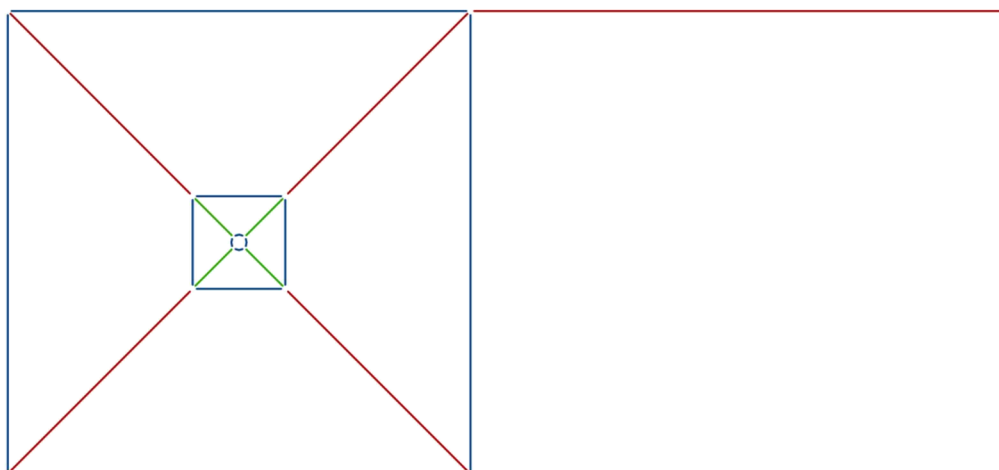


**Obr. 4-32:** Detail funkce *Inflation*

## 3. Dělení hran

Bylo provedeno dělení jednotlivých hran modelu využitím funkce *Edge Sizing*. Při rozdělení hrany na dílčí úsečky pak každé z nich přísluší jedna hrana prvku sítě. Při dělení hrany je možné nastavit buď přímo velikost úsečky, respektive hrany prvku (*Element Size*), nebo počet úseček, na který se má hrana rozdělit (*Number of Division*). Je možné zvolit, aby se dělení směrem k jednomu, případně k oběma koncům zhušťovalo (*Bias Type*). Míra zhuštění (*Bias Factor*) pak udává poměr nejdelšího a nejkratšího prvku.

Způsob dělení jednotlivých hran modelu (včetně příslušných nastavení) je na **Obr. 4-33**. Takovéto dělení bylo použito u všech sítí, s výjimkou sítě pro model se zakřiveným povrchem válce. To je uvedeno na **Obr. 4-34**. Na obou obrázcích je půdorysné schéma, dělení bylo provedeno na hranách v dolní i horní ploše modelu. Dělení hran rovnoběžných s osou z, bylo nastaveno na hodnotu 1 (*Number of Division*) pouze v případě, že se na výšku modelu vygenerovalo více, než jeden prvek sítě (případ modelu s poloměrem 0,1 m).

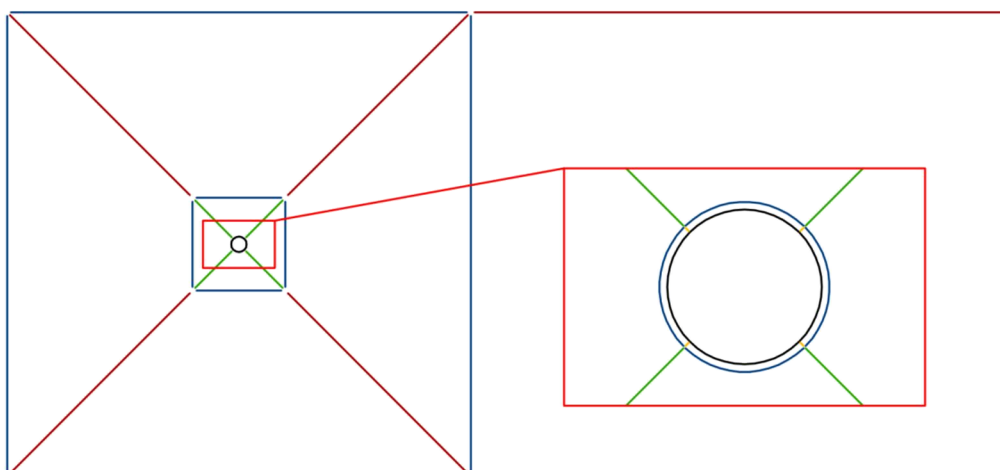


Edge Sizing: Num. of Div. 100, Hard

Edge Sizing: Num. of Div. 150; Hard; Bias Type-----; B. Factor 150

Edge Sizing: Element Size  $(3/10)*D$

**Obr. 4-33:** Schéma dělení hran modelu



Edge Sizing: Num. of Div. 330, Hard

Edge Sizing: Num. of Div. 150; Hard; Bias Type-----; B. Factor 150

Edge Sizing: Element Size  $(3/10)*D$

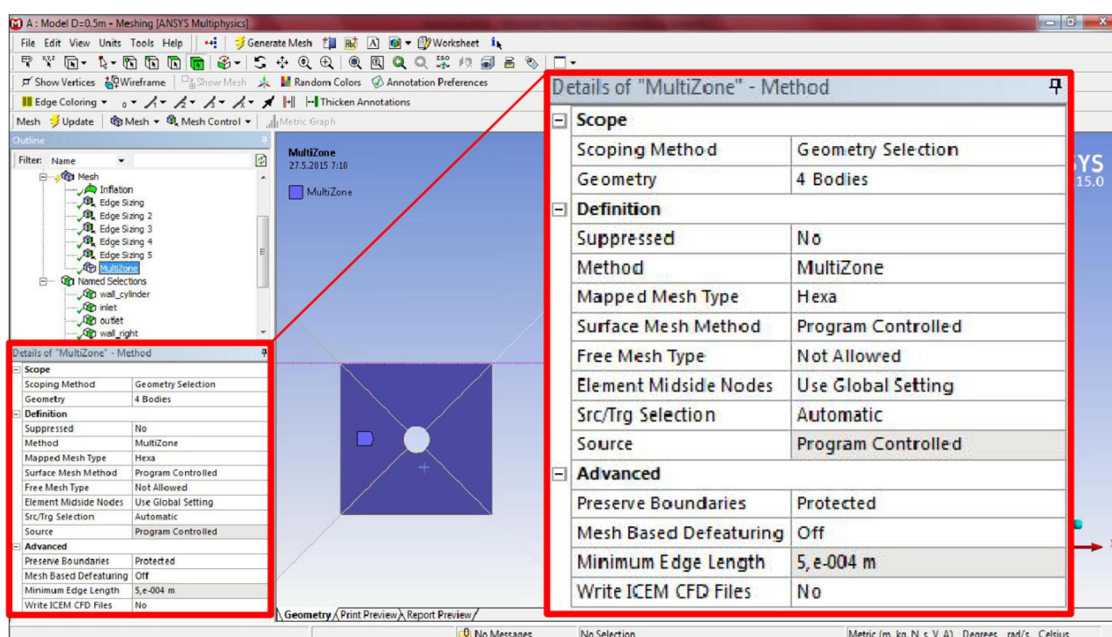
Edge Sizing: Num. of Div. 45; Hard; Bias Type-----; B. Factor 75

Povrch je tvořen 1320 plochami

**Obr. 4-34:** Schéma dělení hran modelu, zakřivený povrch válce

#### 4. Nastavení metody tvorby sítě

Program umožňuje výběr z několika metod vytváření sítě (*Method*), které ovlivňují výsledný tvar prvků sítě. Každému jednotlivému tělesu (*Body*) tvořící model, lze pak přiřadit danou metodu. Zde byla na tělesa ve vnitřní části modelu použita metoda *Multi Zone*, která umožní vytvoření pravidelné mapované sítě, složené pouze z hexa-prvků. Nastavení je na obrázku **Obr. 4-35**. V případě válce se zakřiveným povrchem bylo na vnitřní tělesa použito nastavení *Mapped Face Meshing*, díky kterému vznikla pravidelná síť.



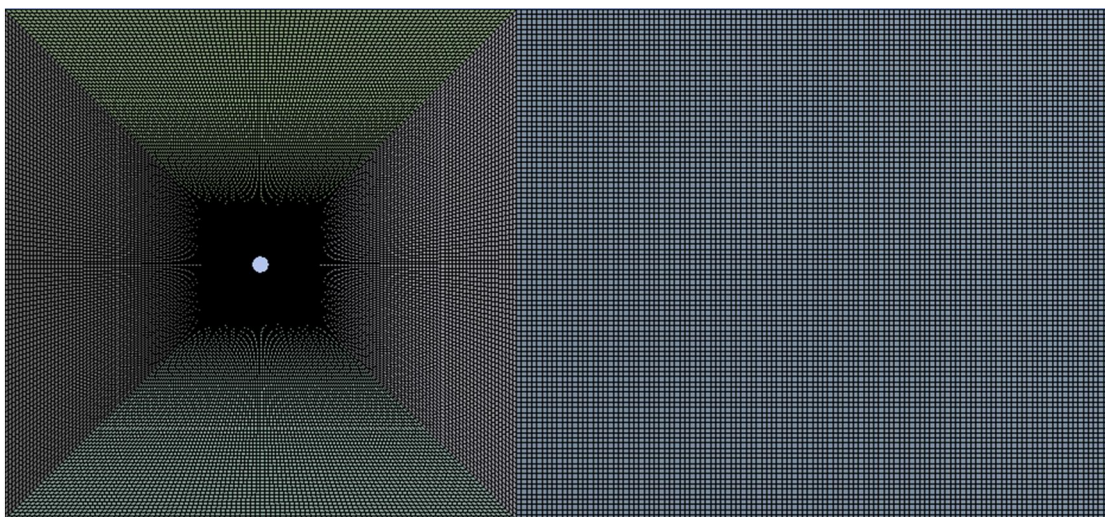
**Obr. 4-35:** Detail metody *Multi Zone*

#### 5. Nastavení postupného vytváření sítě na modelu

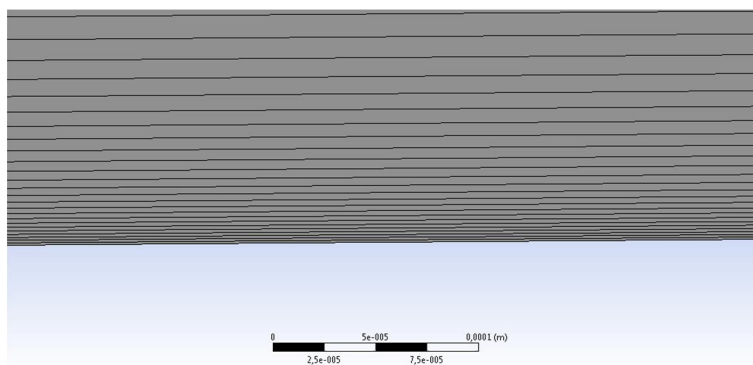
V některých případech je pro správné vytvoření sítě nezbytné nastavit, aby se síť generovala postupně na jednotlivých tělesech. V případě, že se síť generovala najednou, docházelo k vytvoření velmi tenkých prvků na přechodu mezi levou (čtvercovou) a pravou (obdélníkovou) částí modelu. Proto byla použita funkce *Worksheet*, která umožní vytvářet síť na vybraných tělesech postupně v jednotlivých krocích. Jednotlivá tělesa (skupinu těles) je nutné definovat pomocí funkce *Named Selection*. Při nastavení postupného generování sítě na levé a pravé části modelu byl problém odstraněn.



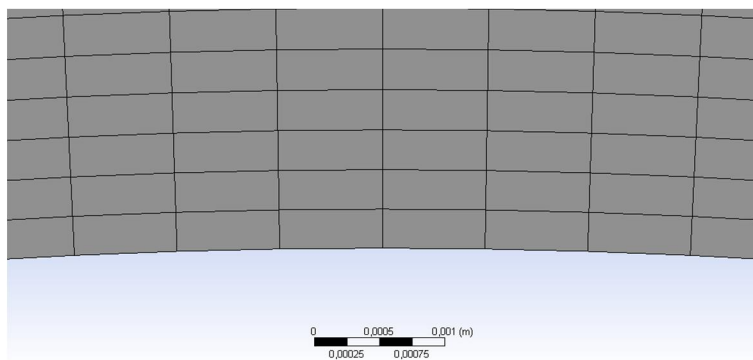
Detailní parametry sítě pro model s hladkým válcem o průměru 0,5 m a s uvažovaným modelem turbulence *SST* jsou uvedeny v **Tab. 4-3**. Sít' je na obrázku **Obr. 4-36**. Parametry ostatních sítí se od této výrazně nelišily, kromě sítě pro model se zakřiveným povrchem válce. Ty jsou uvedeny v **Tab. 4-4**. Na obrázcích **Obr. 4-37**, **Obr. 4-38** a **Obr. 4-9** jsou pak detaily sítě v blízkosti stěny pro model hladkého válce, drsného válce a válce se zakřiveným povrchem.



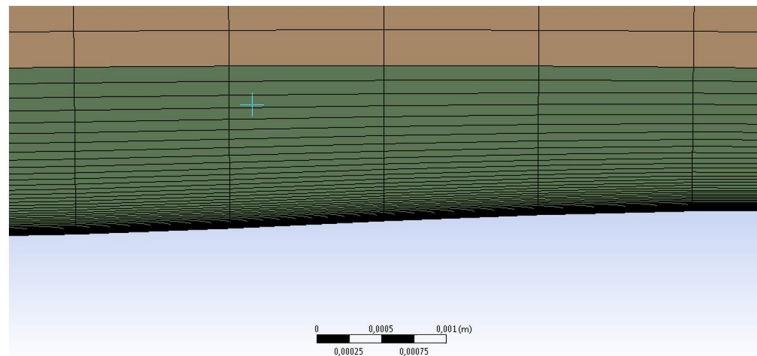
**Obr. 4-38:** Výpočetní síť



**Obr. 4-37:** Detail sítě u stěny, hladký válec



**Obr. 4-36:** Detail sítě u stěny, drsný válec



Obr. 4-39: Detail sítě u stěny, válec se zakřiveným povrchem

Tab. 4-3: Parametry výpočetní sítě

<b>Průměr</b>	0,5 m	<b>Povrch</b>	Hladký
<b>Model turbulence</b>	SST	<b><math>\Delta y</math></b>	$1,7 \cdot 10^{-6}$
<b>Počet uzlů</b>	214034	<b>Počet prvků</b>	107600
<i>Element Quality</i>	min. $1,87 \cdot 10^{-4}$	<i>Aspect Ratio</i>	min. 7,92
	max. 0,21		max. 2310,2
	$\varnothing 6,04 \cdot 10^{-2}$		$\varnothing 189,9$
<i>Jacobian Ratio</i>	max. 1,07	<i>Warping Factor</i>	max. $3,95 \cdot 10^{-4}$
	$\varnothing 1,02$		$\varnothing 2,65 \cdot 10^{-5}$
<i>Parallel Deviation</i>	max. 1,195	<i>Max. Corner Angle</i>	max. $135^\circ$
	$\varnothing 0,81$		$\varnothing 103^\circ$
<i>Skewness</i>	max. 0,5	<i>Orthogonal Quality</i>	min. 0,69
	$\varnothing 0,145$		$\varnothing 0,95$
<i>Orthogonality Angle</i>	min. $80,3^\circ$	<i>Expansion Factor</i>	max. 15

Tab. 4-4: Parametry výpočetní sítě

<b>Průměr</b>	0,5 m	<b>Povrch</b>	Zakřivený
<b>Model turbulence</b>	SST	<b><math>\Delta y</math></b>	$1,0 \cdot 10^{-6}$
<b>Počet uzlů</b>	705774	<b>Počet prvků</b>	351450
<i>Element Quality</i>	min. $7,79 \cdot 10^{-4}$	<i>Aspect Ratio</i>	min. 2,61
	max. 0,69		max. 1590
	$\varnothing$ 0,17		$\varnothing$ 122,54
<i>Jacobian Ratio</i>	max. 1,07	<i>Warping Factor</i>	max. $1,52 \cdot 10^{-11}$
	$\varnothing$ 1,02		$\varnothing$ $1,60 \cdot 10^{-13}$
<i>Parallel Deviation</i>	max. 15,41	<i>Max. Corner Angle</i>	max. $135^\circ$
	$\varnothing$ 0,82		$\varnothing$ $103,4^\circ$
<i>Skewness</i>	max. 0,5	<i>Orthogonal Quality</i>	min. 0,11
	$\varnothing$ 0,115		$\varnothing$ 0,92
<i>Orthogonality Angle</i>	min. $75,2^\circ$	<i>Expansion Factor</i>	max. 3

#### 4.2.5 Test nezávislosti sítě

Na základě hodnot z Tab. 4-3 a Tab. 4-4 lze usuzovat, že vytvořené sítě splňují kritéria kvality uvedené v 4.2.1 v dostatečné míře. Pro ověření, zda je vytvořená síť dostatečně podrobná (jemná) pro daný numerický výpočet, je však vhodné provést tzv. test nezávislosti sítě. Při něm se zjišťuje, zda se při výpočtu na zhuštěné síti výrazně nezmění hodnoty sledovaných veličin. Obvykle se kontrolní výpočet provádí na síti s 1,5násobným počtem prvků. Pokud jsou získané výsledky na takovéto síti výrazně odlišné (přijatelnou odchylku je třeba odhadnout) je nutné postup znovu opakovat. Takto lze postupně dojít k síti, jejíž další zhuštění už výsledky výpočtu neovlivní (odchylky jsou v přijatelných mezích). Takovou síť je možné prohlásit za nezávislou. [19]

V rámci práce byl proveden test pro síť na modelu s hladkým válcem o průměru 0,5 m. Dělení hran testovacího modelu bylo nastaveno jako 1,5násobné. Byla snížena tloušťka první vrstvy u stěny, počet vrstev byl nastaven na 45. Výsledky z výpočtu provedeného na této síti byly s výsledky pro původní síť téměř totožné (porovnání je uvedeno v kapitole 5). Původní síť tak byla považována za nezávislou. Vzhledem k podobnosti jednotlivých sítí byly i ty považovány za dostatečně jemné, nezávislé.



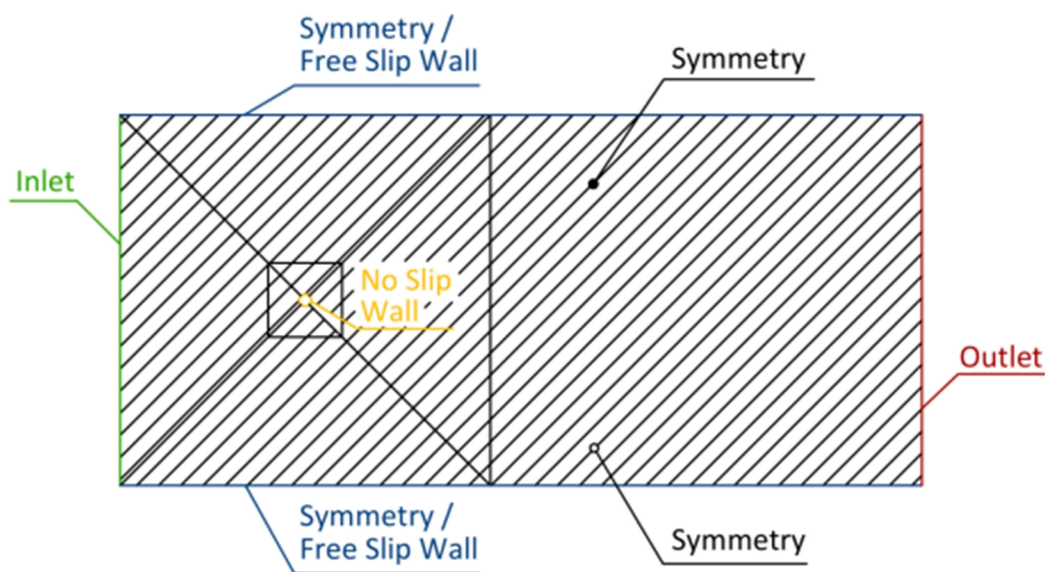
### 4.3 Nastavení parametrů výpočtu

Definování okrajových podmínek a nastavení parametrů jednotlivých výpočtů bylo provedeno v programu *CFX-Pre*, který je součástí modulu *CFX*. Model s vytvořenou sítí byl při práci v prostředí *Workbench* opět načten do programu *CFX-Pre* automaticky. Nastavení, která nejsou uvedena níže, byla ponechána jako původní.

#### 4.3.1 Definice okrajových podmínek

Pro každou plochu ohraničující model je nutné vytvořit okrajovou podmínku. Okrajovou podmínku lze vložit pomocí příkazu *Insert > Boundary*. Při vytvoření je podmínce nutné přiřadit plochu (vhodné pomocí *Named Selection*) a jeden z typů okrajových podmínek. Těmi jsou *Inlet*, *Outlet*, *Opening*, *Wall* a *Symmetry*.

Podmínka *Inlet* představuje plochu, kterou tekutina vtéká do modelu, podmínka *Outlet* pak představuje výstupní plochu tekutiny z modelu. Podmínka *Opening* znamená, že touto plochou může tekutina do modelu vtékat i vytékat. Podmínka *Wall* pak představuje pevnou překážku, kterou tekutina nemůže protékat. Podmínka *Symmetry* znamená, že daná plocha představuje rovinu symetrie. Zvolení jednotlivých okrajových podmínek pro plochy modelu je znázorněno na **Obr. 4-40**. Pro jednotlivé okrajové podmínky je pak nutné provést detailní nastavení.



**Obr. 4-40:** Volba okrajových podmínek

### 4.3.1.1 Inlet

Zde byla definována rychlost tekutiny na vstupu do modelu (domény). Velikost rychlosti byla stanovena na základě vyjádření rychlosti z rovnice (1.2) a dosazení konkrétních hodnot průměru válce a Reynoldsova čísla. Hodnota kinematické viskozity byla uvažována  $1,545 \cdot 10^{-5}$ . Tedy například pro průměr válce 0,5 m a Reynoldsovo číslo  $2 \cdot 10^5$ :

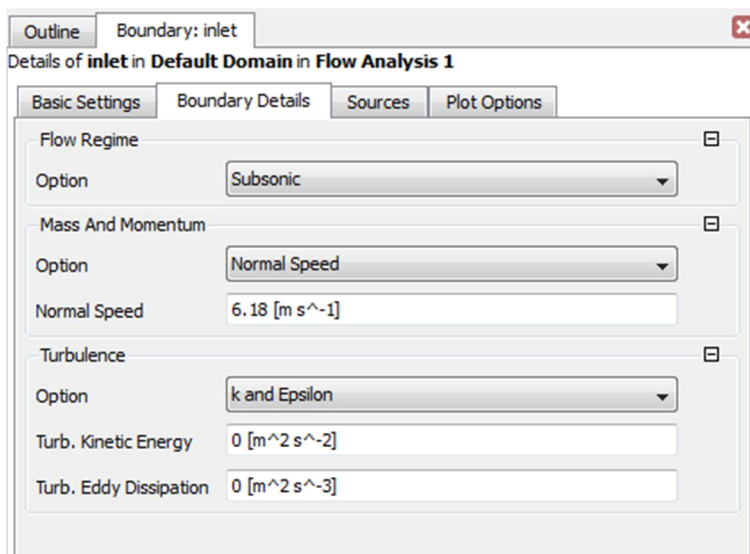
$$u = \frac{Re \cdot \nu}{D} = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 1,545 \cdot 10^{-5}}{0,5} = 6,18 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Dále byla volena intenzita turbulence nabíhajícího proudu. Ta byla uvažována s hodnotou 1% nebo nulová. V případě požadavku na nulovou intenzitu turbulence byly nastaveny hodnoty turbulentní kinetické energie  $k$  a rychlosti disipace  $\varepsilon$  jako nulové (samotná nulová intenzita turbulence nelze nastavit). Podle rovnic uvedených v [13] jsou kinetická energie a rychlost disipace počítány ze vztahu:

$$k = \frac{3}{2} \cdot I^2 \cdot u^2 \quad (4.16)$$

$$\varepsilon = \frac{k^{\frac{3}{2}}}{0,3 \cdot D} \quad (4.17)$$

Dosazením požadované nulové hodnoty turbulence  $I$  do rovnice (4.16) vychází turbulentní kinetická energie rovna nule. Při jejím dosazením do (4.17) je i rychlost disipace nulová. Nastavení okrajové podmínky *Inlet* pro nulovou intenzitu turbulence je na obrázku **Obr. 4-41**.



**Obr. 4-41:** Okrajová podmínka *Inlet*; nulová intenzita turbulence

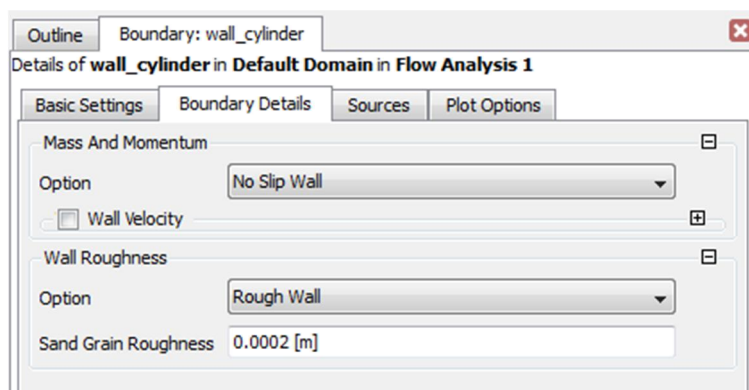
#### 4.3.1.2 Outlet

Zde byla nastavena hodnota relativního statického tlaku na 0 Pa. Tato podmínka je doporučována v kombinaci s rychlostní podmínkou na vstupu. [13]

#### 4.3.1.3 Wall

Na stěně válce byla nastavena možnost *No Slip Wall*, při které je rychlost na povrchu stěny nulová. Dále, v případě modelování hladkého válce, bylo ponecháno nastavení *Smooth Wall*. V případě modelování drsného válce bylo zvoleno nastavení *Rough Wall* a hodnota parametru drsnosti (*Sand Grain Roughness*) byla zadána 0,0002 m (viz **Obr. 4-42**).

U některých modelů byla tato podmínka volena také pro boční stěny modelu. V tom případě bylo zvoleno nastavení *Free Slip Wall*. U této možnosti je smykové napětí na stěně nulové, rychlost proudění tak v její blízkosti není ovlivněna. Toto nastavení bylo zvoleno pro výpočty s modelem turbulence *k-ε*. V případě volby okrajové podmínky *Symmetry* docházelo k náhlému ukončení výpočtu (pokles reziduálů), přičemž výsledné hodnoty veličin byly v celém modelu nulové.



**Obr. 4-42:** Okrajová podmínka *Outlet*; nastavení parametru drsnosti

#### 4.3.1.4 Symmetry

U této okrajové podmínky nejsou zapotřebí žádná nastavení. Tato podmínka byla zvolena i pro boční zdi modelu, přestože nejsou rovinami symetrie. Vzhledem k dostatečné šířce modelu tak při zvolení této podmínky není boční stěnou ovlivněno proudové pole.

### 4.3.2 Nastavení vlastností tekutiny

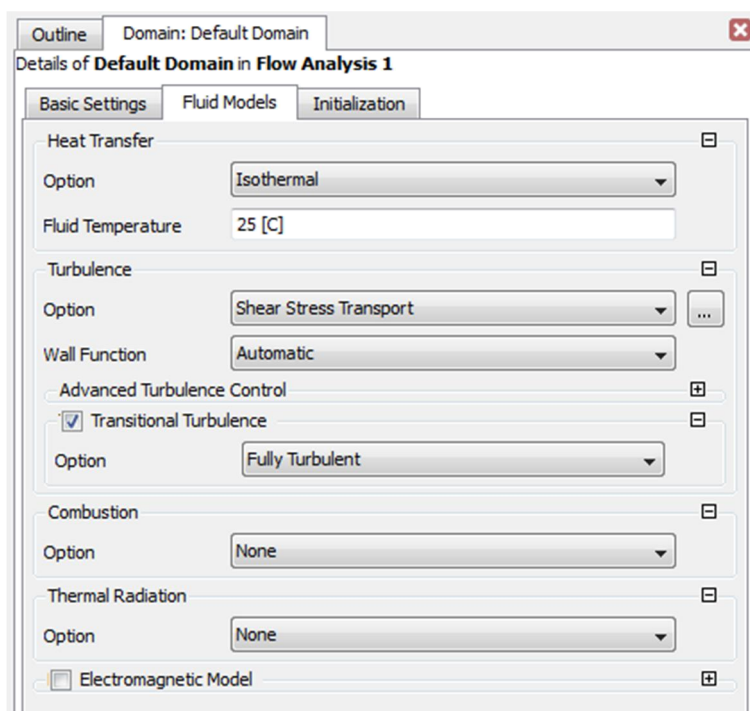
V položce *Default Domain* lze v jednotlivých záložkách definovat základní nastavení domény (*Basic Settings*), modely tekutiny (*Fluid Models*) a počáteční podmínky (*Initialization*).

V záložce *Basic Settings* nebyly prováděny žádné změny. Jako materiál byl ponechán vzduch o teplotě 25°, hodnota referenčního tlaku byla ponechána 1 atm. Nebylo uvažováno s vlivem tlaku, pohybem domény ani deformací sítě.

V záložce *Fluid Models* byl pro většinu výpočtů vybrán model turbulence *SST* (*Shear Stress Transport*). Při nastavení 1% intenzity turbulence na vstupu (*Inlet*) byla zatržena volba *Transitional Turbulence* a zvolena možnost *Fully Turbulent* (viz **Obr. 4-43**). Při nulové intenzitě turbulence tato volba nebyla použita.

Testován byl také model *k-ε* (*k-Epsilon*), po jeho zvolení nejsou dostupná žádná další nastavení. U zbylých položek bylo ponecháno původní nastavení.

V záložce *Initialization* bylo ponecháno původní nastavení. Zde provedené nastavení počátečních podmínek (hodnoty všech veličin při začátku výpočtu) může ovlivnit průběh výpočtu ustáleného stavu. V případě vhodného nastavení urychluje konvergenci, tedy výpočetní čas. U složitějších modelů je správné nastavení počátečních podmínek pro konvergenci nezbytné. [1]



**Obr. 4-44:** Nastavení modelu turbulence; intenzita na vstupu  $I = 1\%$

### 4.3.3 Nastavení typu analýzy

V položce *Analysis Type* je možné zvolit analýzu ustáleného, časově nezávislého stavu (*Steady State*) nebo analýzu časově závislého stavu (*Transient*). Charakter proudění v zadané úloze je neustálený, periodický. Výsledky tedy byly stanoveny na základě *Transient* analýzy. Ta ovšem potřebuje jako počáteční podmínky (hodnoty všech veličin v počátečním čase) výsledky z výpočtu *Steady State* analýzy. Proto musel vždy nejprve proběhnout výpočet s uvažováním ustáleného stavu.

#### 4.3.3.1 *Steady State* analýza

Při zvolení *Steady State* analýzy nejsou možná žádná další nastavení.

#### 4.3.3.2 *Transient* analýza

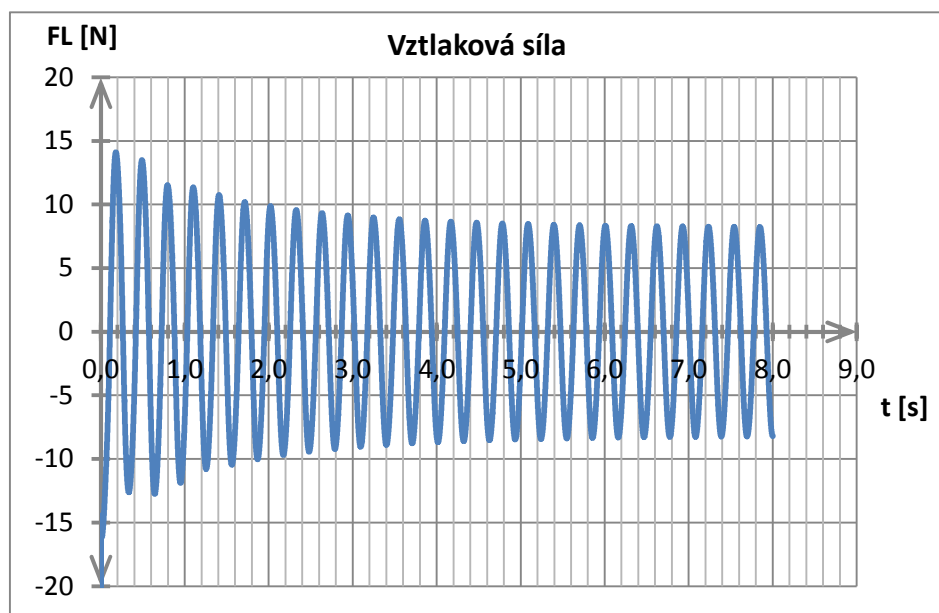
Při zvolení *Transient* analýzy je třeba zadat délku simulace (*Time Duration*), časový krok (*Timestep*) a počáteční čas (*Initial Time*).

- **Délka simulace**

Pro délku simulace (*Time Duration*) byla zvolena možnost celkového času (*Total Time*), tedy reálný čas simulace (doba, po kterou má tekutina proudit kolem válce). Ta byla stanovena na základě periody jednoho kmitu vztlakové síly, která odpovídá frekvenci odtrhávání vírů. Ze vztahu pro Strouhalovo číslo (2.10) byla vyjádřena perioda, kdy hodnota Strouhalova čísla byla odhadnuta na základě grafu na **Obr. 2-14**. Tedy např. pro Reynoldsovo číslo  $Re = 2 \cdot 10^5$  je Strouhalovo číslo přibližně  $St = 0,25$ . Při průměru válce 0,5 m je rychlost proudění  $6,18 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  a velikost periody je pak:

$$T = \frac{D}{u \cdot St} = \frac{0,5}{6,18 \cdot 0,25} = 0,32 \text{ s}$$

Celková doba simulace pak byla zvolena přibližně  $30 \cdot T$ . Jelikož ustálení velikosti amplitudy vztlakové síly určitý čas trvá, musela být pro odečtení konečných výsledků zvolena tato poměrně velká hodnota. Graf průběhu vztlakové síly v závislosti na čase je pro ukázkou uveden na obrázku **Obr. 4-45**. Lze vidět, že se amplituda ustálila zhruba v polovině simulovaného času (po 15 kmitech).



Obr. 4-45: Graf závislosti vztlakové síly na čase

- **Časový krok**

Časový krok představuje interval, pro který řešič počítá veškeré veličiny proudového pole. Ty pak de facto představují průměrnou hodnotu v daném časovém kroku (časová diskretizace). Délka časového kroku může ovlivňovat konvergenci řešení i přesnost výpočtu. Jedním z kritérií pro volbu délky časového kroku je tzv. *Courant Number*. Pro jednorozměrnou síť je dáno vztahem:

$$Co = \frac{u \cdot \Delta t}{\Delta x} \quad (4.18)$$

kde  $u$  je rychlost tekutiny,  $\Delta t$  je časový krok a  $\Delta x$  je délka prvku ve směru proudění.

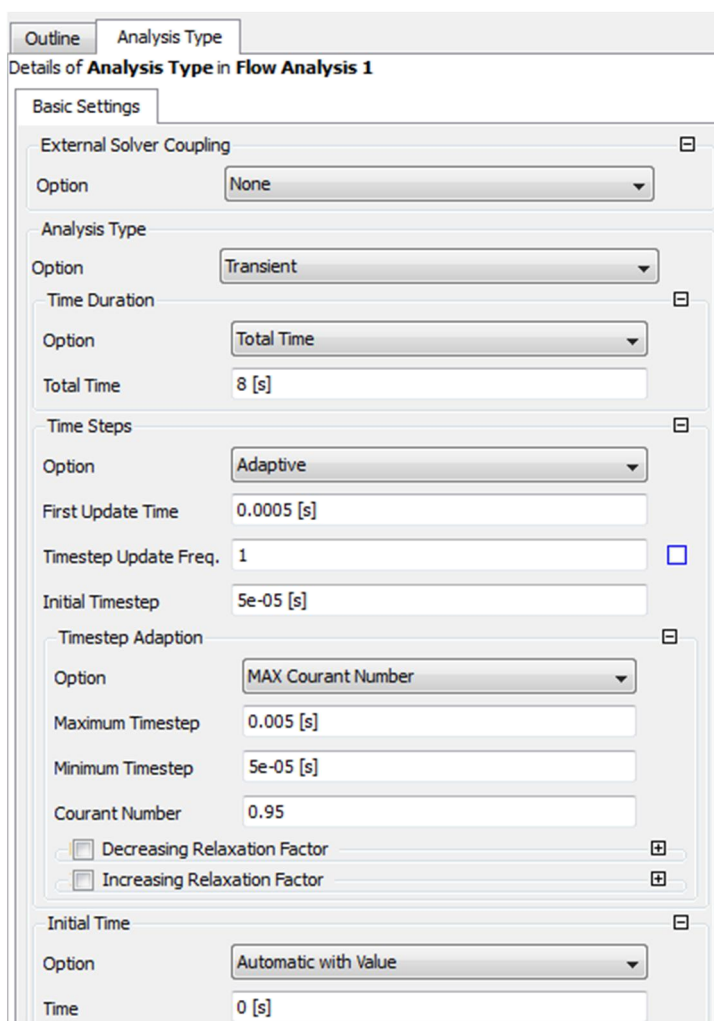
Hodnota *Courant Number* tak stanovuje, přes kolik prvků sítě projde tekutina během jednoho časového kroku. Pro správnou hodnotu neexistuje obecné pravidlo, různá doporučení ale uvádějí  $Co < 1$ . [14, 18] To bylo dodrženo i v této práci.

Časový krok byl zvolen jako přizpůsobivý (*Adaptive Timestep*), kdy řešič sám volí délku časového kroku, v závislosti na dané podmínce. Jako podmínka byla zvolena hodnota maximálního  $Co$  (*MAX Courant Number*). Ta byla nastavena na 0,95. Hodnota minimálního (*Minimum Timestep*) a maximálního časového kroku (*Maximum Timestep*) byla volena odhadem, dostatečně malá, respektive velká, tak, aby se hodnota časového kroku odpovídajícího  $Co = 0,95$  nacházela v tomto rozmezí.

Pro počáteční časový krok (*Initial Timestep*) byla zadána stejná hodnota jako pro minimální časový krok. Čas (*First Update Time*), po kterém má řešič přejít z počátečního časového kroku k adaptivnímu, byl nastaven jako desetinásobek počátečního časového kroku. Frekvence, s jakou dochází k upravení časového kroku (*Timestep Update Frequency*), byla ponechána na hodnotě 1. Nastavení *Transient* analýzy je na **Obr. 4-46**.

- **Počáteční čas**

Nastavení bylo ponecháno na původní hodnotě 0 s.



**Obr. 4-46:** Nastavení *Transient* analýzy

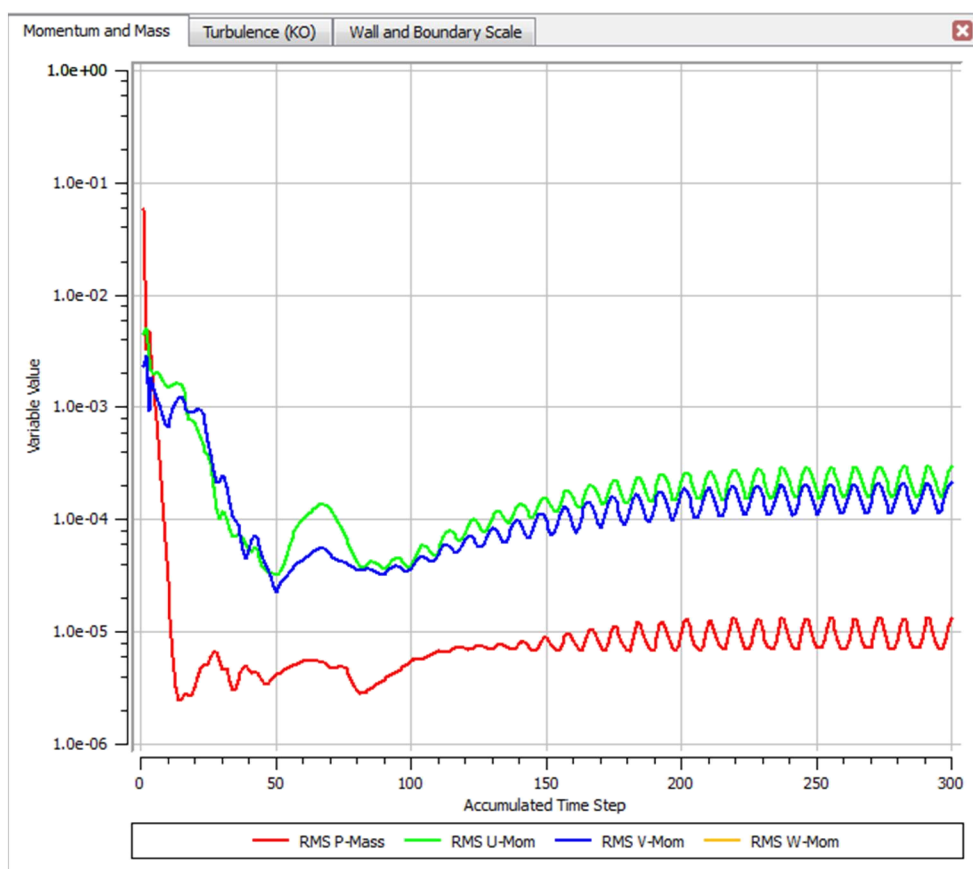
#### 4.3.4 Nastavení řešiče

Nastavení je možné provést v nabídce *Solver Control*. Možnosti se liší pro *Steady State* analýzu a *Transient* analýzu. V obou případech bylo při použití možnosti *Fully Turbulent* (viz 4.3.2) zvoleno nastavení *Turbulence Numeric* jako *High Resolution*. Bylo tak učiněno na základě „doporučení“ výstražné hlášky programu (která se objeví při zvolení možnosti *Fully Turbulent*).

##### 4.3.4.1 Nastavení řešiče pro *Steady State* analýzu

K ukončení výpočtu *Steady State* analýzy dochází buď při dosažení konvergenčního kritéria (reziduály klesnou pod požadovanou mez), nebo po spočtení maximálního počtu iterací. Maximální počet iterací (*Max. Iterations*) byl nastaven na 300. Jako konvergenční kritérium byla ponechána střední kvadratická odchylka reziduálů (*RMS*), hodnota byla nastavena na  $10^{-5}$ .

Ke konvergenci výpočtu však vzhledem k neustálenému charakteru proudění nedocházelo. Hodnoty reziduálů od určité iterace začínaly oscilovat kolem dané hodnoty (viz **Obr. 4-47**). Lze říci, že tato použitá nastavení nemají v této práci praktický význam.



**Obr. 4-47:** Graf průběhu reziduálů, *Steady State* analýza



#### 4.3.4.2 Nastavení řešiče pro *Transient* analýzu

Při *Transient* analýze je výpočet ukončen po dosažení nastaveného času simulace (*Total Time*), tedy po spočtení dostatečného množství časových kroků (*Timesteps*). V každém časovém kroku je provedeno tolik vnitřních iterací, dokud není buď splněno konvergenční kritérium, nebo není dosaženo maximálního počtu vnitřních iterací (*Max. Coefficient Loops*). Lze také nastavit minimální počet vnitřních iterací, který má být v rámci jednoho časového kroku proveden (*Min. Coefficient Loops*).

Pro konvergenční kritérium byla opět zvolena střední kvadratická odchylka reziduálů (*RMS*) s hodnotou nastavenou na  $10^{-5}$ . Minimální a maximální počet iterací v jednom časovém kroku byl ponechán na hodnotě 1, respektive 10.

#### 4.3.4.3 Nastavení ukládání výsledků

Pro získání potřebných výstupů z výpočtu je nutné nastavit způsob ukládání výsledků. V nabídce *Output Control*, v záložce *Trn Results* byla zvolena možnost ukládání výsledků po zvoleném časovém intervalu simulace (*Time Interval*). Hodnota časového intervalu byla obvykle nastavena jako desetina celkové doby simulace. Při tomto nastavení řešič ukládá soubory, které obsahují veškeré řešené veličiny v daný okamžik simulace. Tyto soubory tak obsahují velké množství dat. Takovéto soubory pak lze načítat do *postprocesoru* a vytvářet grafické výstupy z výpočtu (kontury, vektorová pole, proudnice apod.).

Hlavním výstupem z výpočtu pro řešení zadané úlohy byl průběh sil působících na stěnu válce v závislosti na čase. Pro získání tohoto průběhu bylo nutné nastavit tzv. monitory. V nabídce *Output Control*, v záložce *Monitors* byla zatržena možnost *Monitor Objects*. Položka *Monitor Forces* byla nastavena jako *Full*. Ostatní položky byly kvůli přehlednosti nastaveny jako *None* (neukládat). Při tomto nastavení řešič zapisuje velikost všech sil působících na pevné stěny modelu (okrajová podmínka *Wall*) v každém časovém kroku. Tyto výsledky jsou uloženy do textového souboru.

## 4.4 Výpočet

Výpočet byl spuštěn pomocí programu *CFX-Solver Manager*. Ten umožňuje nastavení některých parametrů řešiče (*CFX-Solver*) a sledování průběhu výpočtu.

Před spuštěním byla u všech úloh zatržena možnost *Double Precision*, tedy počítání na dvojnásobný počet desetinných míst. Tato možnost mimo jiné ovlivní doporučenou hodnotu kritérií kvality sítě, dané požadavky jsou mírnější. Při *Transient* analýze pak byl načten soubor výsledků z předcházející *Steady State* analýzy (nutné počáteční podmínky). V záložce *Initial Values* byla zatržena možnost *Initial Values Specification* a následně bylo pomocí procházení vybráno umístění příslušného souboru. Ostatní možnosti byly ponechány beze změny.

Po spuštění výpočtu je možné v levé části okna programu sledovat graf s hodnotami reziduálů z jednotlivých rovnic v závislosti na iteraci (viz **Obr. 4-47**). V pravé části okna je možné sledovat zapisující se výstupní soubor tzv. *Out File*. Toto rozvržení je přednastaveno. Lze samozřejmě zvolit zobrazování jiných parametrů, například velikosti sil působících na pevné stěny modelu.

Z průběhu grafu reziduálů je možné zjistit, zda řešení konverguje. Výpočet je pak možné kdykoli přerušit a vrátit se zpět *preprocessingu*. Z *Out File* souboru pak lze vyčíst kompletní informace, týkající se výpočtu. Na začátku jsou uvedena všechna nastavení provedená v *CFX-Pre*, některé charakteristiky sítě (kritéria kvality viz 4.2.1) a další vstupní informace, např. čas při spuštění výpočtu, název počítače apod.

Dále následuje výpis jednotlivých iterací, v případě *Transient* analýzy výpis časových kroků, kdy se zobrazuje také hodnota *Courant Number* pro každý časový krok. Lze také zjistit aktuální dobu běhu procesoru (*CPU Seconds*), u *Transient* analýzy i spočtený čas simulace (*Simulation Time*). Je tak možné odhadnout dobu potřebnou k dokončení výpočtu. Na **Obr. 4-48** je záznam jednoho časového kroku, ze kterého jsou patrné výše zmíněné veličiny. Je také možné sledovat výpis reziduálů jednotlivých rovnic (v grafickém okně se již nevykreslují). *U*, *V*, *W-Mom* představují rovnice zákona zachování hybnosti ve směrech souřadných os a *P-Mass* je rovnice zákona zachování hmoty. Zbývající dvě rovnice jsou specifické pro zvolený model turbulence. V případě *SST* modelu je to rovnice turbulentní kinetické energie (*K-TurbKE*) a rovnice vířivosti (*O-TurbFreq*).

```

=====
| Adaptive Timestepping Information |
=====
| Direction | Ratio | Last Value | Next Value | RMS Co | Max Co |
+-----+-----+-----+-----+-----+-----+
| Increasing | 1.000 | 2.1721E-04 | 2.1724E-04 | 0.24 | 0.95 |
+-----+-----+-----+-----+-----+-----+

=====
TIME STEP = 37873 SIMULATION TIME = 7.9998E+00 CPU SECONDS = 7.841E+05
(THIS RUN: 37573 7.9998E+00 7.841E+05)
=====
COEFFICIENT LOOP ITERATION = 1 CPU SECONDS = 7.841E+05
=====
| Equation | Rate | RMS Res | Max Res | Linear Solution |
+-----+-----+-----+-----+-----+
| U-Mom | 0.99 | 5.4E-07 | 2.0E-05 | 2.2E-04 OK |
| V-Mom | 1.00 | 5.7E-07 | 3.1E-05 | 9.1E-05 OK |
| W-Mom | 0.99 | 6.2E-20 | 2.9E-18 | 1.5E+04 ok |
| P-Mass | 1.00 | 7.4E-08 | 2.2E-06 | 14.6 4.2E-02 OK |
+-----+-----+-----+-----+-----+
| K-TurbKE | 0.99 | 4.8E-05 | 8.6E-04 | 7.1 7.9E-07 OK |
| O-TurbFreq | 0.99 | 1.1E-09 | 4.0E-08 | 7.1 1.3E-04 OK |
+-----+-----+-----+-----+-----+

```

Obr. 4-48: Časový krok, *Out file*

V závěru *Out File* souboru jsou shrnuty některé specifické parametry, například umístění uzlů s maximální hodnotou reziduálů (pro jednotlivé rovnice) nebo minimální a maximální hodnoty řešených veličin. Je uvedena celková doba výpočtu. Ta se v případě *Steady State* analýzy pohybovala okolo 45 minut (při 300 iteracích). *Transient* výpočty pak probíhaly v rozsahu 10 až 30 hodin, v závislosti na době simulace a zvoleném časovém kroku. Výpočty na modelu válce se zakřiveným povrchem pak probíhaly po dobu maximálně dvou týdnů. I tak se pro některé rychlosti nepodařilo dosáhnout požadované doby simulace, která byla stejná jako v případě hladkých válců. Důvodem pro tak dlouhý výpočetní čas byl výrazně vyšší počet prvků sítě v případě modelu se zakřiveným povrchem válce.

```

Total wall clock time: 9.865E+04 seconds
or: ( 1: 3: 24: 13.688 )
( Days: Hours: Minutes: Seconds )

```

Obr. 4-49: Doba výpočtu *Transient* analýza

```

Total wall clock time: 9.750E+05 seconds
or: ( 11: 6: 50: 6.059 )
( Days: Hours: Minutes: Seconds )

```

Obr. 4-50: Doba výpočtu *Transient* analýzy, válec se zakřiveným povrchem

## 4.5 Získávání výstupů z výpočtu

Ke grafickému zobrazení výsledků simulací proudění slouží program *CFD-Post*. Ten je součástí prostředí *Workbench* a je do něj možné načíst výsledky také jiných modulů než *CFX* (například z *Fluentu*).

Při této práci byla pomocí *CFD-Post* kontrolována především maximální hodnota stěnového parametru  $y^+$  na stěně válce při tvorbě sítí. Dále zde byly vykreslovány kontury rychlostního pole

Textový soubor s výpisem sil, působících na stěnu válce byl importován do programu *Excel*. V něm byly vytvořeny grafy průběhu odporových a vztlakových sil v závislosti na čase. Z těchto grafů byla, pro interval s ustáleným průběhem, odečtena perioda  $T$ , amplituda vztlakové síly  $F_L$  a průměrná hodnota odporové síly  $F_D$ .

Pro ilustraci je na **Obr. 4-51** uveden graf průběhu sil v intervalu s ustálenými hodnotami. Hodnoty byly získány z výpočtu na válci o průměru 0,5 m pro rychlost odpovídající  $Re = 2 \cdot 10^5$ . Velikost sil je uvažována na jeden metr výšky válce. V grafu jsou vyznačeny odečítané hodnoty.



**Obr. 4-51:** Odečtení hodnot z průběhu sil

Odečtená hodnota periody  $T$  byla dosazena do rovnice pro Strouhalovo číslo (2.10). Hodnoty odporové a vztlakové síly pak do rovnic součinitele čelního odporu  $c_D$  (2.8) a součinitele vztlaku  $c_L$  (2.9). Tedy například pro hodnoty v grafu platí:

$$St = \frac{D}{T \cdot u} = \frac{0,5}{0,31 \cdot 6,18} = 0,264$$

$$c_D = \frac{2 \cdot F_D}{\rho \cdot D \cdot u^2} = \frac{2 \cdot 8,6}{1,185 \cdot 0,5 \cdot 6,18^2} = 0,760$$

$$c_L = \frac{2 \cdot F_L}{\rho \cdot D \cdot u^2} = \frac{2 \cdot 8,2}{1,185 \cdot 0,5 \cdot 6,18^2} = 0,725$$

Ze získaných hodnot Strouhalova čísla, součinitele čelního odporu a součinitele vztlaku byly sestaveny závislosti těchto veličin na Reynoldsově čísle. Ty jsou prezentovány v kapitole 5.



## 5 VYHODNOCENÍ VÝSLEDKŮ

V této kapitole jsou prezentovány a získané výsledky z provedených výpočtů. Ty byly provedeny na modelech uvažujících jak hladký, tak drsný povrch válce a na modelu se zakřiveným povrchem válce, reprezentující drsnost. Kromě zadaných rychlostí ( $Re$ ) proběhly i některé výpočty s nižšími rychlostmi. Intenzita turbulence byla uvažována 1% a 0%. Použité modely turbulence byly  $SST$  a  $k-\varepsilon$ . Vyhodnocována byla závislost Strouhalova a Reynoldsova čísla a průběhy součinitelů čelního odporu a vztlaku. Jsou uvedeny výsledky z testu nezávislosti sítě.

### 5.1 Test nezávislosti sítě

V **Tab. 5-1** je uvedeno porovnání sledovaných veličin z provedeného testu nezávislosti sítě. Sledované hodnoty jsou téměř totožné, proto byla původní síť prohlášena za nezávislou.

**Tab. 5-1:** Test nezávislosti sítě

	Počet prvků sítě	St [-]	$C_D$ [-]	$C_L$ [-]
Původní síť	107600	0,326	0,448	0,307
Testovací síť	187650	0,324	0,454	0,299

## 5.2 Závislost Strouhalova čísla a průběhy součinitelů odporu a vztlaku v závislosti na Reynoldsově čísle

Vypočtené hodnoty Strouhalova čísla, součinitele čelního odporu a součinitele vztlaku jsou pro příslušná Reynoldsova čísla seřazeny v závislosti na parametrech výpočtu v **Tab. 5-2**, **Tab. 5-4** a **Tab. 5-6** pro hladký válec a v **Tab. 5-3**, **Tab. 5-5** a **Tab. 5-7** pro drsný válec a válec se zakřiveným povrchem. Tyto hodnoty jsou pak vyneseny v grafech na **Obr. 5-1**, **Obr. 5-2**, **Obr. 5-3**, **Obr. 5-4**, **Obr. 5-5** a **Obr. 5-6**. Vodorovná osa všech grafů je v logaritmickém měřítku. Závislosti na Reynoldsově čísle jsou pro každou veličinu uvedeny zvlášť pro případ hladkého válce a případ drsného válce spolu s válcem se zakřiveným povrchem.

Vzhledem ke vzájemné podobnosti výsledků v případě hladkých válců jsou v grafech vynášeny pouze hodnoty získané z výpočtu na válci o průměru 0,5 m. Je zřejmé, že při stejném podobnostním Reynoldsově čísle nezáleží na velikosti modelu (průměru válce).

V případě drsných válců jsou výsledky pro jednotlivé průměry, uvedené v tabulkách a grafech, rozlišeny pomocí parametru relativní drsnosti, která je uvažována jako:

$$d_r = \frac{d}{D} \cdot 10^5 \quad (5.1)$$

kde  $d$  je absolutní drsnost (0,2 mm) a  $D$  je průměr válce.

V grafech závislosti Strouhalova a Reynoldsova čísla (**Obr. 5-1** a **Obr. 5-2**) jsou pro porovnání uvedeny experimentálně naměřené hodnoty převzaté z **Obr. 2.14**. Pro tyto hodnoty by podle [8] měla platit nulová intenzita turbulence nabíhajícího proudu. Tato měření byla prováděna na hladkých válcích (závislost  $St$  a  $Re$  pro drsný válec se nepodařilo získat).

Experimentální hodnoty uvedené v grafech pro součinitel čelního odporu (**Obr. 5-3** a **Obr. 5-4**) a v grafech pro součinitel vztlaku (**Obr. 5-5** a **Obr. 5-6**) pochází z [8]. Podle [8] je průběh součinitele odporu totožný s průběhem součinitele vztlaku. Tyto experimentální hodnoty odpovídají nulové intenzitě turbulence nabíhajícího proudu a hladkému povrchu válce.



**Tab. 5-2:** Hodnoty Strouhalova čísla, hladký válec

Povrch	Hladký					
Průměr	0,1 m	0,5 m	1 m	2 m	0,5 m	0,5 m
Model turbulence	SST					k-e
Intenzita turbulence	1%				0%	1%
$Re$ [-]	Strouhalovo číslo, $St$ [-]					
$10^3$	-	0,229	-	-	0,224	-
$10^4$	-	0,244	-	-	0,238	-
$5 \cdot 10^4$	-	0,247	-	-	0,231	-
$10^5$	-	0,256	-	-	0,224	-
$2 \cdot 10^5$	0,264	0,264	0,264	0,264	0,267	0,352
$4 \cdot 10^5$	0,274	0,279	0,279	0,278	0,296	0,365
$6 \cdot 10^5$	0,284	0,287	0,288	0,287	0,296	0,372
$8 \cdot 10^5$	0,289	0,293	0,293	0,294	0,296	0,378
$1 \cdot 10^6$	-	0,300	0,297	0,298	0,300	0,383
$2 \cdot 10^6$	-	0,311	0,313	0,312	0,313	0,399
$3,5 \cdot 10^6$	-	0,326	0,324	0,324	0,325	0,413

**Tab. 5-3:** Hodnoty Strouhalova čísla, drsný válec

Povrch	Drsný + Zakřivený				
Průměr	0,1 m	0,5 m	1 m	2 m	0,5 m
Relativní drsnost	20	4	2	1	0
Model turbulence	SST				
Intenzita turbulence	1%				
$Re$ [-]	Strouhalovo číslo, $St$ [-]				
$10^5$	-	0,257	-	-	-
$2 \cdot 10^5$	0,299	0,264	0,261	0,264	0,264
$4 \cdot 10^5$	0,306	0,271	0,268	0,267	0,272
$6 \cdot 10^5$	0,308	0,277	0,272	0,467	0,279
$8 \cdot 10^5$	0,308	0,281	0,276	0,348	0,285
$1 \cdot 10^6$	-	0,284	0,278	0,280	0,289
$2 \cdot 10^6$	-	0,289	0,287	0,288	0,304
$3,5 \cdot 10^6$	-	0,290	0,292	0,293	0,316

**Tab. 5-4:** Hodnoty součinitele čelního odporu, hladký válec

Povrch	Hladký					
Průměr	0,1 m	0,5 m	1 m	2 m	0,5 m	0,5 m
Model turbulence	SST					k-e
Intenzita turbulence	1%				0%	1%
$Re$ [-]	Součinitel čelního odporu, $C_D$ [-]					
$10^3$	-	1,248	-	-	1,270	-
$10^4$	-	1,609	-	-	1,573	-
$5 \cdot 10^4$	-	1,052	-	-	1,587	-
$10^5$	-	0,866	-	-	1,213	-
$2 \cdot 10^5$	0,742	0,757	0,760	0,764	0,777	0,391
$4 \cdot 10^5$	0,650	0,628	0,632	0,630	0,541	0,371
$6 \cdot 10^5$	0,603	0,580	0,580	0,582	0,542	0,355
$8 \cdot 10^5$	0,572	0,553	0,552	0,555	0,545	0,343
$1 \cdot 10^6$	-	0,534	0,536	0,536	0,530	0,333
$2 \cdot 10^6$	-	0,484	0,483	0,485	0,483	0,303
$3,5 \cdot 10^6$	-	0,448	0,448	0,448	0,447	0,278

**Tab. 5-5:** Hodnoty součinitele čelního odporu, drsný válec

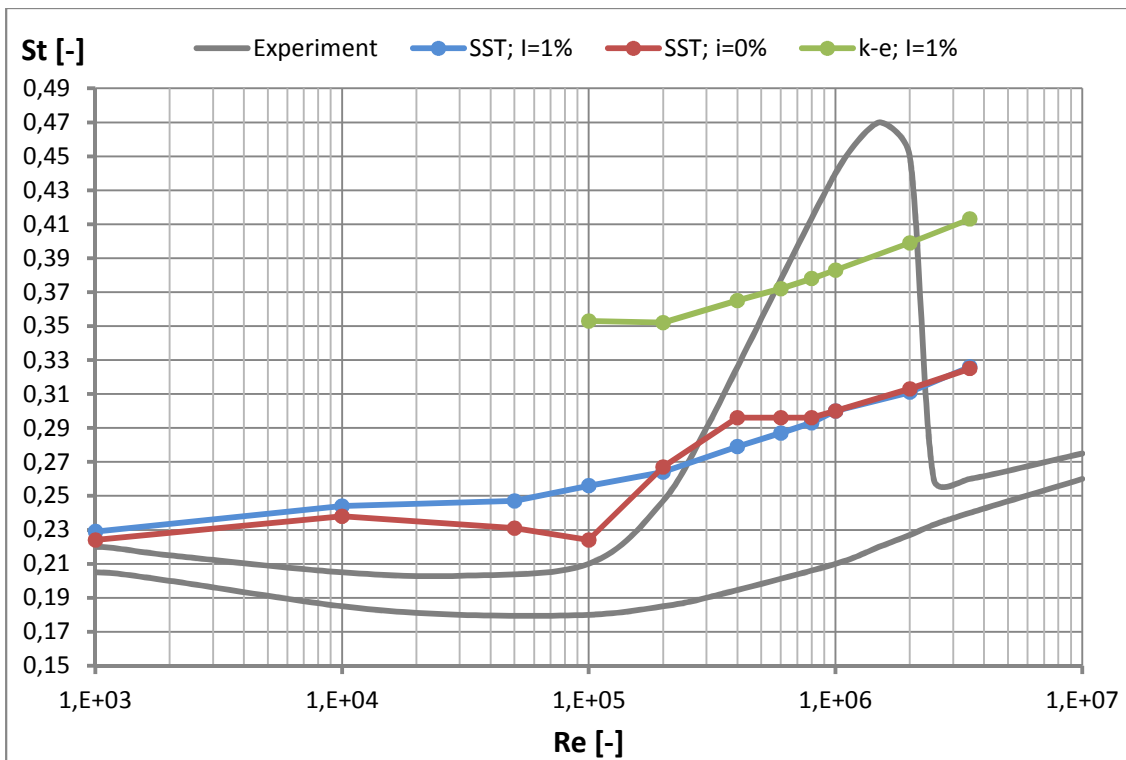
Povrch	Drsný + Zakřivený				
Průměr	0,1 m	0,5 m	1 m	2 m	0,5 m
Relativní drsnost	20	4	2	1	0
Model turbulence	SST				
Intenzita turbulence	1%				
$Re$ [-]	Součinitel čelního odporu, $C_D$ [-]				
$10^5$	-	0,894	-	-	-
$2 \cdot 10^5$	0,529	0,767	0,797	0,760	0,786
$4 \cdot 10^5$	0,506	0,674	0,704	0,708	0,703
$6 \cdot 10^5$	0,501	0,633	0,658	1,713	0,632
$8 \cdot 10^5$	0,497	0,609	0,671	0,966	0,598
$1 \cdot 10^6$	-	0,597	0,626	0,619	0,577
$2 \cdot 10^6$	-	0,573	0,582	0,580	0,516
$3,5 \cdot 10^6$	-	0,564	0,562	0,554	0,478

Tab. 5-6: Hodnoty součinitele vztlaku, hladký váleček

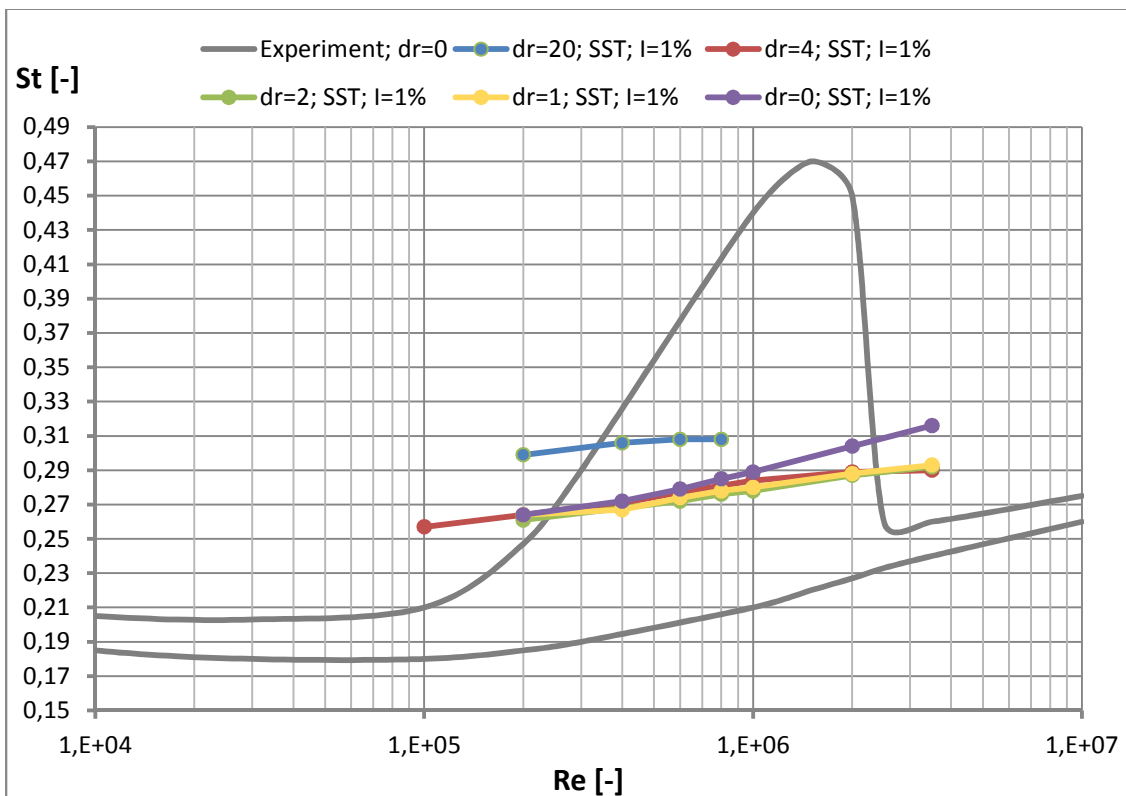
Povrch	Hladký					
Průměr	0,1 m	0,5 m	1 m	2 m	0,5 m	0,5 m
Model turbulence	SST					k-e
Intenzita turbulence	1%				0%	1%
$Re$ [-]	Součinitel vztlaku, $CL$ [-]					
$10^3$	-	1,075	-	-	0,870	-
$10^4$	-	1,697	-	-	1,655	-
$5 \cdot 10^4$	-	1,075	-	-	1,895	-
$10^5$	-	0,905	-	-	1,301	-
$2 \cdot 10^5$	0,696	0,725	0,742	0,742	0,527	0,166
$4 \cdot 10^5$	0,521	0,495	0,504	0,500	0,389	0,166
$6 \cdot 10^5$	0,452	0,421	0,418	0,429	0,355	0,161
$8 \cdot 10^5$	0,409	0,381	0,381	0,388	0,365	0,156
$1 \cdot 10^6$	-	0,361	0,370	0,362	0,349	0,156
$2 \cdot 10^6$	-	0,307	0,308	0,313	0,304	0,138
$3,5 \cdot 10^6$	-	0,278	0,276	0,279	0,274	0,133

Tab. 5-7: Hodnoty součinitele vztlaku, drsný váleček

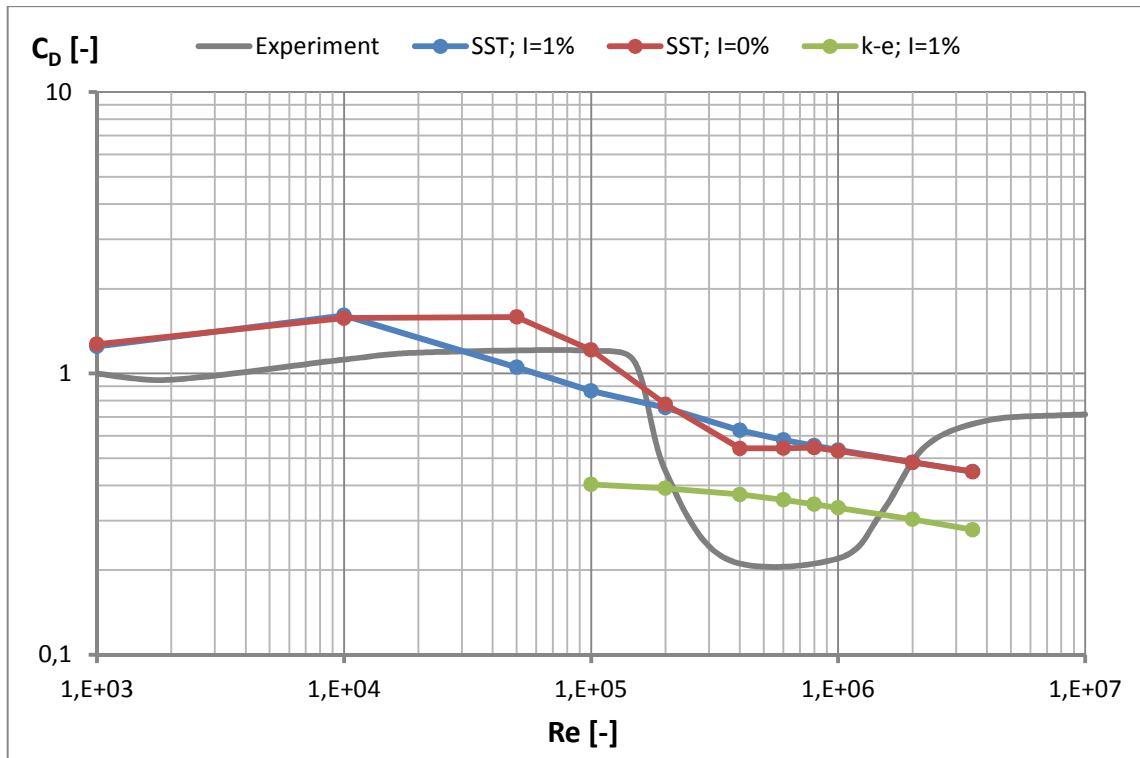
Povrch	Drsný + Zakřivený				
Průměr	0,1 m	0,5 m	1 m	2 m	0,5 m
Relativní drsnost	20	4	2	1	0
Model turbulence	SST				
Intenzita turbulence	1%				
$Re$ [-]	Součinitel vztlaku, $CL$ [-]				
$10^5$	-	0,983	-	-	-
$2 \cdot 10^5$	0,316	0,767	0,827	0,742	0,822
$4 \cdot 10^5$	0,284	0,579	0,635	0,635	0,694
$6 \cdot 10^5$	0,277	0,491	0,554	0,559	0,554
$8 \cdot 10^5$	0,270	0,449	0,508	0,512	0,491
$1 \cdot 10^6$	-	0,427	0,496	0,467	0,460
$2 \cdot 10^6$	-	0,384	0,399	0,403	0,373
$3,5 \cdot 10^6$	-	0,367	0,374	0,365	0,331



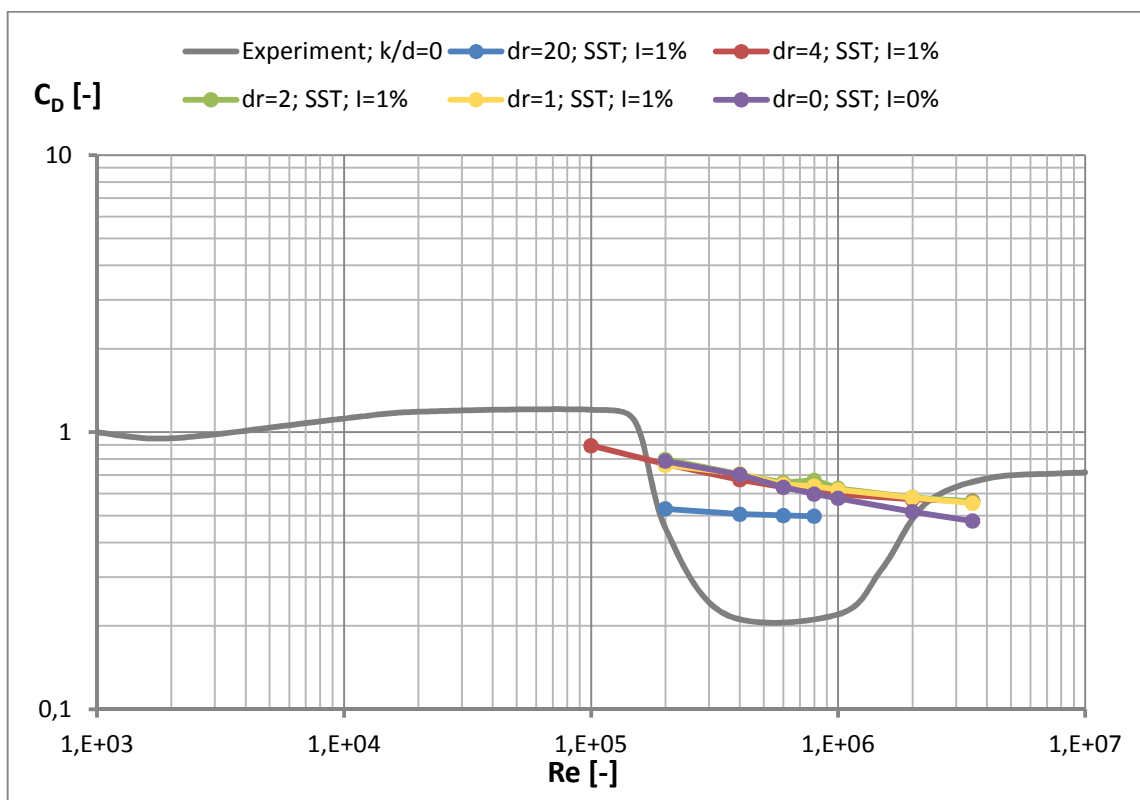
Obr. 5-1: Závislost Strouhalova a Reynoldsova čísla, hladký válec



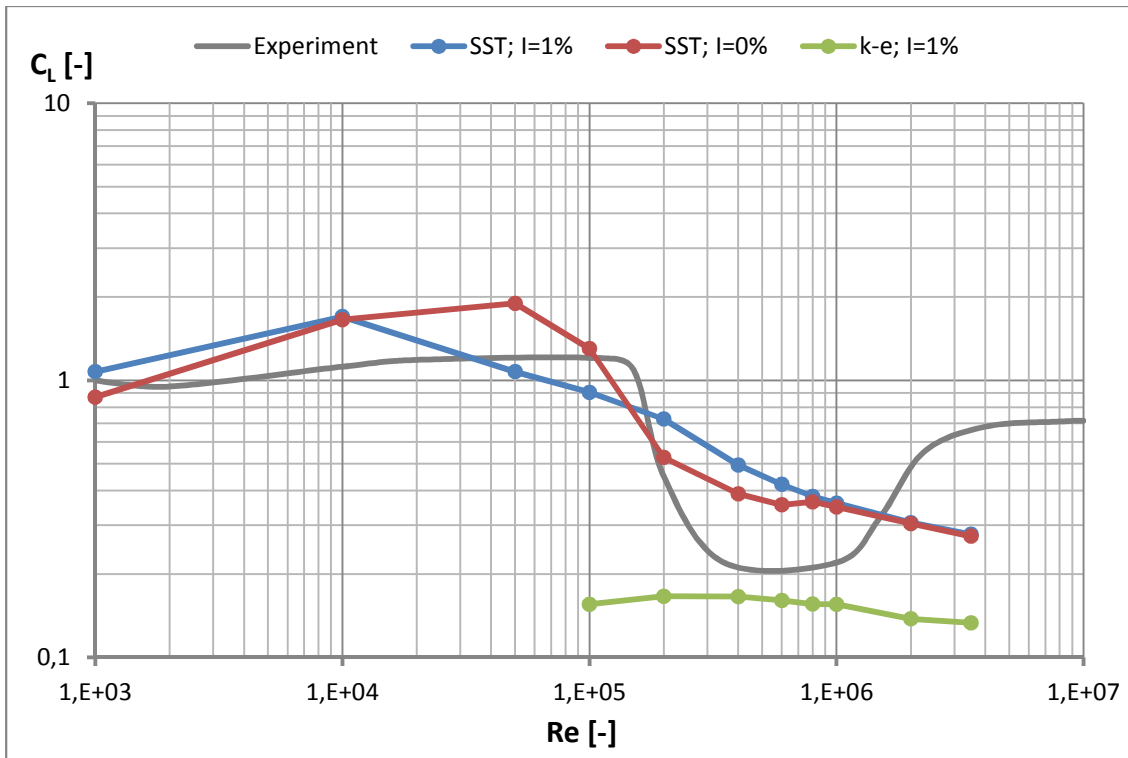
Obr. 5-2: Závislost Strouhalova a Reynoldsova čísla, drsný válec



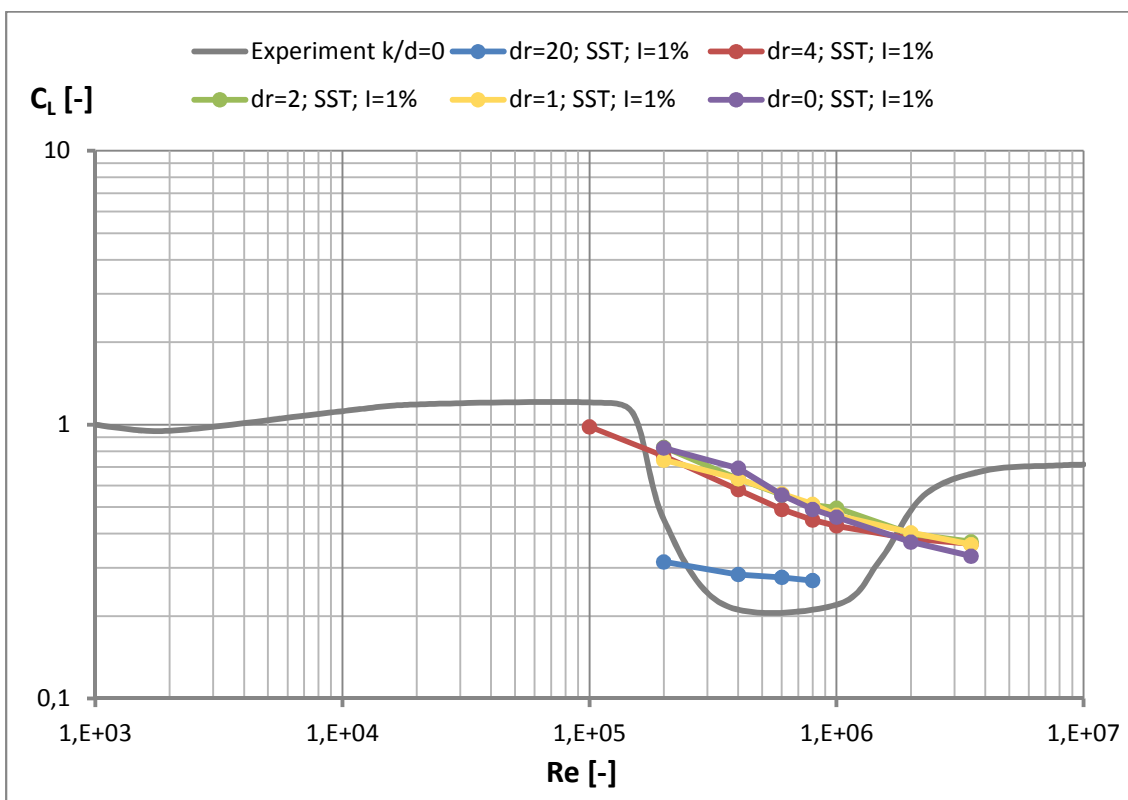
Obr. 5-3: Průběh součinitele čelního odporu, hladký válec



Obr. 5-4: Průběh součinitele čelního odporu, drsný válec



Obr. 5-5: Průběh součinitele vztlaku, hladký válec



Obr. 5-6: Průběh součinitele vztlaku, drsný válec

### 5.3 Zhodnocení získaných výsledků

Ze získaných dat je zřejmé, že použití modelu  $k-\varepsilon$  při řešení obtékaných těles není vhodné. Hodnoty Strouhalova čísla získané pomocí modelu  $k-\varepsilon$  vychází extrémně vysoké, naopak silové působení na stěnu válce je velmi malé (nízké hodnoty součinitelů odporu i vztlaku). Vzhledem k tomu, že tento model využívá přístupu stěnových funkcí (*Scalable Wall Function*), kdy je laminární podvrstva aproximována logaritmičtým zákonem, nejsou jeho značně nepřesné výsledky překvapující. Tento model byl v rámci práce odzkoušen pouze ze zájmu autora.

V případě modelu *SST*, který využívá přístup přímého modelování mezní vrstvy (*Automatic Wall Treatment*) jsou získané výsledky v reálnějších mezích. Je patrný velký rozdíl v případě uvážení intenzity turbulence v nabíhajícímu proudě, oproti hodnotám získaným při nulové intenzitě, a to v rozmezí Reynoldsova čísla  $10^4$  až  $10^6$ .

Při nulové intenzitě turbulence je patrná poměrně prudká změna sledovaných veličin. V případě Strouhalova čísla dochází k nárůstu z hodnoty 0,25 na 0,30 v intervalu Reynoldsova čísla od  $10^5$  do  $4 \cdot 10^5$ . Zřetelný je také pokles součinitele odporu (také vztlaku), ke kterému dochází od  $Re = 5 \cdot 10^4$ . Ten nicméně nedosáhne kritické hodnoty  $c_{D,krit} \approx 0,2$ , mezi  $Re = 4 \cdot 10^5$  a  $Re = 10^6$  se ustálí na hodnotě přibližně 0,55. S dalším nárůstem  $Re$  pak dochází k jeho dalšímu poklesu.

Při intenzitě turbulence 1% není náhlá změna v jednotlivých veličinách zachycena. Strouhalovo číslo rovnoměrně roste z hodnoty 0,25 na 0,33 v rozmezí Reynoldsova čísla od  $10^4$  do  $3,5 \cdot 10^6$ . Stejně tak i součinitele odporu a vztlaku klesají plynule již od  $Re = 10^4$ , z hodnot okolo 1,6 na hodnotu 0,45 v případě součinitele odporu a 0,27 v případě součinitele vztlaku, při  $Re = 3,5 \cdot 10^6$ .

Z výsledků je patrné, že mimo interval  $Re$   $10^4$  až  $10^6$  jsou rozdíly v intenzitě turbulence nepatrné. V případě hodnot  $Re$  vyšších než  $10^6$  jsou získané hodnoty v porovnání s experimentálními značně nepřesné. Strouhalovo číslo dosahuje příliš vysokých hodnot (0,33 při  $Re = 3,5 \cdot 10^6$  oproti 0,27 při experimentu), u součinitelů odporu a vztlaku pak nedochází k opětovnému nárůstu, jako v případě naměřených hodnot. Do hodnoty  $10^4$  jsou výsledky poměrně přesné, při nulové intenzitě turbulence pak až do hodnoty  $2 \cdot 10^5$ , tedy před začátkem přechodu laminární mezní vrstvy na turbulentní.

U drsných válců nebyl zaznamenán výrazný rozdíl od výsledků pro hladké válce, v případech s nízkou relativní drsností ( $d_r = 4; 2; 1$ ). V těchto případech si byly jednotlivé hodnoty velmi podobné, stejně jako v případech různých průměrů hladkého válce. Rozdílná data byla získána až při relativní drsnosti  $d_r = 20$ . Pro porovnání závislosti Strouhalova čísla při drsném povrchu válce nebyla získána potřebná data. V případě hodnot součinitele odporu a vztlaku průběh hodnot opět nesouhlasí s naměřenými hodnotami. V případě drsnosti by se měl prudký pokles odporu pouze posunout k nižším hodnotám  $Re$  (viz **Obr. 2-19**), tomu hodnoty získané pro  $d_r = 20$  neodpovídají.

Výsledky, získané z výpočtu na modelu válce se zakřiveným povrchem, jsou téměř totožné s výsledky pro hladký válec (při porovnání hodnot v jednotlivých tabulkách). Z toho lze usoudit, že modelování drsnosti zvoleným způsobem nebylo vyhovující. Pouze mírně zvlněný povrch válce neodpovídal skutečně drsnému povrchu. Tyto hodnoty tak v grafu mohou sloužit jako porovnání hladkého ( $\approx$ zakřivený) a drsného povrchu.

V rámci práce byl původně vytvořen podrobnější model válce se zakřiveným povrchem. Jenda křivka (viz **Obr. 4-9**) připadala na oblouk odpovídající  $1^\circ$  a byla tvořena 23 úsečkami. Obvod válce byl tedy tvořen pomocí 8280 hran ( $23 \cdot 360 = 8280$ ). Protože jedné hraně odpovídá alespoň jeden prvek sítě, musela být v tomto případě vytvořena síť se značným množstvím prvků (více než  $5 \cdot 10^5$ .) Model s touto sítí byl výpočtově příliš náročný, a ani po dvoutýdenní době výpočtu se nepodařilo získat dostatečně dlouhý záznam simulace pro stanovení požadovaných výsledků. Výsledky z takového modelu by se pravděpodobně více lišily, podobě jako výsledky v případě  $d_r = 20$ .

Ze získaných výsledků lze učinit závěr, že modelování obtékaných těles při proudění o vysokých Reynoldsových číslech pomocí modelu *SST*, obecně pomocí modelů *RANS*, není adekvátní. Při těchto  $Re$  dochází k přechodu laminární mezní vrstvy na turbulentní, v důsledku čehož dochází prudkému poklesu odporu a zároveň se vytrácí periodicita odtrhávaných vírů (velký rozptyl naměřených hodnot). Pomocí modelů *RANS* pak nejde přechod mezní vrstvy spolehlivě stanovit. [5] To bylo v rámci výsledků získaných v této práci ověřeno. Pro model *SST* lze říci, že jeho přesnost je dobrá po hodnotu  $Re \approx 2 \cdot 10^5$ , tedy obdobně jako pro model *k- $\omega$* , ze kterého vychází (viz 3.2.2.3). Pro správné výsledky je pak zároveň nutné respektovat skutečné podmínky proudění, zejména intenzitu turbulence v nabíhajícím proudu.



## ZÁVĚR

Skutečnost, že získané výsledky neodpovídají experimentálně zjištěným hodnotám je v souladu s tím, že pomocí turbulentních modelů *RANS* nelze správně stanovit přechod laminární mezní vrstvy na turbulentní, ke kterému dochází při Reynoldsových číslech uvažovaných v této práci. Pro řešení těchto úloh by pravděpodobně bylo zapotřebí využít složitějších modelů turbulence, založených na metodě *LES*. Ty však svými vysokými nároky nejsou pro běžné inženýrské úlohy příliš vhodné.

Tato práce tak poskytuje základní přehled obecných faktů z problematiky numerického modelování proudění tekutin. Byl ověřen významný rozdíl mezi přesností turbulentního modelu *k-ε* a modelu *SST* při řešení obtékaných těles. První využívá přístup stěnových funkcí, který není k řešení těchto úloh dostatečný a jeho výsledky proto byly značně nepřesné. Model *SST* umožňuje přímé modelování mezní vrstvy, a proto s ním lze získat dostatečně přesné výsledky pro velikosti Reynoldsova čísla přibližně do hodnoty  $2 \cdot 10^5$ . Zároveň je ale nutné dodržovat požadavky na dostatečnou jemnost výpočetní sítě a zvolit vhodnou délku časového kroku. Při vyšších Reynoldsových číslech pak dochází k přeměně mezní vrstvy a přesnost modelu se vytrácí.

Hlavní přínos práce tedy spočívá v obohacení autora o základní poznatky numerického modelování proudění tekutin a získání základních znalostí při práci v programovém systému ANSYS. Na základě nich je možné přistoupit k řešení podobných úloh spojených s prouděním, a také hlubšímu studiu dané problematiky.



## SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

- [1] BLEJCHAŘ, Tomáš. *Turbulence-Modelování proudění - CFX* [online]. Ostrava: VŠB - Technická Univerzita Ostrava, 2010 [cit. 2015-05-22]. Dostupné z: [http://www.338.vsb.cz/PDF/Turbulence\\_ESF\\_v4.pdf](http://www.338.vsb.cz/PDF/Turbulence_ESF_v4.pdf)
- [2] KOZOUBKOVÁ, Milada. *Modelování proudění tekutin, FLUENT, CFX* [online]. Ostrava: VŠB - Technická Univerzita Ostrava, 2008 [cit. 2015-05-22]. Dostupné z: <http://www.338.vsb.cz/PDF/Kozubkova-Fluent.pdf>
- [3] JANALÍK, Jaroslav. *Obtékání a odpor těles*. Ostrava: Vysoká škola báňská - Technická univerzita, 2008, 1 CD-ROM. ISBN 978-80-248-1911-2. Dostupné také z: <http://www.338.vsb.cz/PDF/Janalik-Obtekani.pdf>
- [4] DRÁBKOVÁ, Sylva. *Mechanika tekutin*. Ostrava: Vysoká škola báňská - Technická univerzita, 2007, 1 DVD-R. ISBN 978-80-248-1508-4. Dostupné také z: <http://www.338.vsb.cz/PDF/Drabkova-Mechanikatekutin.pdf>
- [5] URUBA, Václav. *Turbulence*. Vyd. 1. V Praze: České vysoké učení technické, 2009, 130 s. ISBN 978-80-01-04330-1. Dostupné také z: [http://www.it.cas.cz/~uruba/docs/Aero/Turbulence\\_45.pdf](http://www.it.cas.cz/~uruba/docs/Aero/Turbulence_45.pdf)
- [6] JAHODA, M. *Obtékání těles*. Dostupné také z: <http://uchi.vscht.cz/uploads/pedagogika/hydro/obtekani.teles.pdf>
- [7] DROZDA, Jiří. *Příručka ANSYS Workbench* [online]. 1. vyd. Praha: Česká technika - nakladatelství ČVUT, 2012, 105 s. [cit. 2015-05-28]. ISBN 978-80-01-05175-7. Dostupné z: [http://www.ocel-drevo.fsv.cvut.cz/tutorials/ansys/?page\\_id=17](http://www.ocel-drevo.fsv.cvut.cz/tutorials/ansys/?page_id=17)
- [8] PIRNER, Miroš a Ondřej FISCHER. *Zatížení staveb větrem*. 1. vyd. Praha: Informační centrum ČKAIT, 2003, 255 s. ISBN 80-867-6910-0.
- [9] LIENHARD, John H. *Synopsis of Lift, Drag, and Vortex Frequency Data for Rigid Circular Cylinders*. Washington: Technical Extension Service, Washington State University, 1966. Bulletin (Washington State University, College of Engineering, Research Division), 300. Dostupné také z: <http://www.uh.edu/engines/vortexcylinders.pdf>
- [10] SATO, Masami a Takaya KOBAYASHI. A fundamental study of the flow past a circular cylinder using Abaqus/CFD. In: *2012 SIMULIA Community Conference Japan: 16 October, 2012, Yokohama Royal Park Hotel, 2-2-1-3 Minato Mirai, Nishi-Ku, Yokohama, 220-8173*. Yokohama: Mechanical Design & Analysis Corporation, 2012, s. 15. Dostupné také z: [http://www.simulia.com/forms/world/pdf2012/Sato\\_MDAC\\_final\\_2232012.pdf](http://www.simulia.com/forms/world/pdf2012/Sato_MDAC_final_2232012.pdf)

- [11] SALIM, Salim .M. a CHEAH. Wall y + Strategy for Dealing with Wall-bounded Turbulent Flows. In: AO ., Eds.: S. I. *International MultiConference of Engineers and Computer Scientists, IMECS 2009: 18 - 20 March, 2009, Regal Kowloon Hotel, Kowloon, Hong Kong*. Hong Kong: IAENG, 2009, s. 6. ISBN 9789881701275. Dostupné také z: [http://www.iaeng.org/publication/IMECS2009/IMECS2009\\_pp2165-2170.pdf](http://www.iaeng.org/publication/IMECS2009/IMECS2009_pp2165-2170.pdf)
- [12] ANSYS, INC. *ANSYS Meshing User's Guide: Release 15.0*. 2013.
- [13] ANSYS, INC. *ANSYS CFX-Solver Modeling Guide: Release 15.0*. 2013.
- [14] ANSYS, INC. *ANSYS CFX-Solver Theory Guide: Release 15.0*. 2013.
- [15] ANSYS, INC. *ANSYS CFX-Solver Manger User's Guide: Release 15.0*. 2013.
- [16] ANSYS, INC. *ANSYS Modeling and Meshing Guide: Release 15.0*. 2013.
- [17] ANSYS, INC. *Turbulence Modeling Using ANSYS CFX*. 2013.
- [18] *CFD Online* [online]. 2013 [cit. 2015-05-28]. Dostupné z: [http://www.cfd-online.com/Wiki/Main\\_Page](http://www.cfd-online.com/Wiki/Main_Page)
- [19] *Computational Fluid Dynamics blog* [online]. 2014 [cit. 2015-05-29]. Dostupné z: <http://www.computationalfluidynamics.com.au/>
- [20] Law of the wall. *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2015-05-28]. Dostupné z: [http://en.wikipedia.org/wiki/Law\\_of\\_the\\_wall](http://en.wikipedia.org/wiki/Law_of_the_wall)

## SEZNAM OBRÁZKŮ

Obr. 1-1: Potenciální proudění [4] .....	17
Obr. 1-2: Potenciální vír [4] .....	17
Obr. 1-3: Vířivé proudění [4] .....	17
Obr. 1-4: Laminární proudění [4] .....	17
Obr. 1-5: Turbulentní proudění [4] .....	17
Obr. 1-6: Reynoldsův pokus [4] .....	18
Obr. 1-7: Eulerův popis [5] .....	23
Obr. 1-8: Lagrangeův popis [5] .....	23
Obr. 2-1: Vývoj mezní vrstvy [3] .....	27
Obr. 2-2: Mezní vrstva [1] .....	28
Obr. 2-3: Rychlostní profily [3] .....	29
Obr. 2-4: Tloušťka mezní vrstvy [3] .....	29
Obr. 2-5: Odtržení mezní vrstvy [3] .....	30
Obr. 2-6: Obtékání tělesa ideální tekutinou [3] .....	32
Obr. 2-7: Síly působící na povrch obtékaného tělesa [6] .....	32
Obr. 2-8: Obtékání bez odtržení mezní vrstvy, $Re < 5$ [8] .....	34
Obr. 2-9: Dva pevné víry za válcem, .....	34
Obr. 2-10: Laminární úplav za válcem, $40 < Re < 150$ [8] .....	34
Obr. 2-11: Neorganizovaný úplav bez vírové stezky, $10^5 < Re < 3,5 \cdot 10^5$ [8] .....	35
Obr. 2-12: Zcela turbulentní úplav za válcem, $300 < Re < 10^5$ [8] .....	35
Obr. 2-13: Obnovení vírové stezky, $3,5 \cdot 10^5 < Re$ [8] .....	35
Obr. 2-14: Závislost Strouhalova a Reynoldsova čísla [8] .....	36
Obr. 2-15: Průběh odporové síly v čase [3] .....	37
Obr. 2-16: Závislost $cD = fRe$ [3] .....	37
<b>Obr. 2-17:</b> Turbulentní mezní vrstva, úzký úplav za válcem [3] .....	38
<b>Obr. 2-18:</b> Laminární mezní vrstva, široký úplav za válcem [3] .....	38
Obr. 2-19: Závislost $cD = fRe$ s vlivem drsnosti a intenzity turbulence [7] .....	38
Obr. 3-1: Základní přístupy modelování proudění [2] .....	40
Obr. 4-1: Analýza v prostředí <i>Workbench</i> .....	53
Obr. 4-2: Schéma geometrického modelu .....	54
Obr. 4-3: Schéma náčrtů ( <i>Sketch</i> ) .....	56

Obr. 4-4: Přiřazení funkce <i>Extrude</i> .....	56
Obr. 4-5: Detail funkce <i>Extrude</i> .....	57
Obr. 4-6: Detail funkce <i>Extrude</i> .....	57
Obr. 4-7: Detail funkce <i>Boolean</i> .....	57
Obr. 4-8: Geometrický model .....	58
Obr. 4-9: Zakřivení povrchu .....	59
Obr. 4-10: Schéma náčrtů ( <i>Sketch</i> ), zakřivený povrch válce .....	59
Obr. 4-11: Přiřazení funkce <i>Extrude</i> , zakřivený povrch válce .....	60
Obr. 4-12: Prvky sítě [12] .....	61
Obr. 4-13: Volná a mapovaná síť [16] .....	62
Obr. 4-14: Strukturovaná a nestruturovaná síť [1] .....	62
Obr. 4-15: Statistika sítě ( <i>Mesh Metrics</i> ) .....	63
Obr. 4-16: Prvky s různou hodnotou <i>Aspect Ratio</i> [12] .....	64
Obr. 4-17: Prvky s různou hodnotou <i>Jacobian Ration</i> [12] .....	65
Obr. 4-18: Prvky s různou hodnotou <i>Jacobian Ratio</i> [12] .....	65
Obr. 4-19: Prvky s různou hodnotou kritéria <i>Warping Factor</i> [12] .....	65
Obr. 4-20: Prvky s různou hodnotou kritéria <i>Parallel Deviation</i> [12] .....	66
Obr. 4-21: Prvky s různou hodnotou <i>Maximum Corner Angle</i> [12] .....	66
Obr. 4-22: Kritérium <i>Skewness</i> [12] .....	67
Obr. 4-23: <i>Orthogonal Quality</i> [12] .....	68
Obr. 4-24: <i>Orthogonality Angle</i> [13] .....	69
Obr. 4-25: Přístup stěnové funkce .....	70
Obr. 4-26: Přímé modelování mezní vrstvy ( <i>Low-Re Method</i> ) [19] .....	70
Obr. 4-27: Rozdělení mezní vrstvy [17] .....	71
Obr. 4-28: Logaritmický zákon [20] .....	73
Obr. 4-29: Hodnota $\gamma$ + v <i>postprocesoru</i> .....	77
Obr. 4-30: Rychlostní pole v blízkosti válce .....	77
Obr. 4-31: Detail funkce <i>Named Selection</i> .....	80
Obr. 4-32: Detail funkce <i>Inflation</i> .....	81
Obr. 4-33: Schéma dělení hran modelu .....	82
Obr. 4-34: Schéma dělení hran modelu, zakřivený povrch válce .....	82
Obr. 4-35: Detail metody <i>Multi Zone</i> .....	83
Obr. 4-36: Detail sítě u stěny, drsný válec .....	84
Obr. 4-37: Detail sítě u stěny, hladký válec .....	84

Obr. 4-38: Výpočetní síť .....	84
Obr. 4-39: Detail sítě u stěny, válec se zakřiveným povrchem .....	85
Obr. 4-40: Volba okrajových podmínek .....	87
Obr. 4-41: Okrajová podmínka <i>Inlet</i> ; nulová intenzita turbulence .....	88
Obr. 4-42: Okrajová podmínka <i>Outlet</i> ; nastavení parametru drsnosti .....	89
Obr. 4-43: Okrajová podmínka <i>Outlet</i> ; nastavení parametru drsnosti .....	89
Obr. 4-44: Nastavení modelu turbulence; intenzita na vstupu $I = 1\%$ .....	90
Obr. 4-45: Graf závislosti vztahové síly na čase .....	92
Obr. 4-46: Nastavení <i>Transient</i> analýzy .....	93
Obr. 4-47: Graf průběhu reziduálů, <i>Steady State</i> analýza .....	94
Obr. 4-48: Časový krok, <i>Out file</i> .....	97
Obr. 4-49: Doba výpočtu <i>Transient</i> analýza .....	97
Obr. 4-50: Doba výpočtu <i>Transient</i> analýzy, válec se zakřiveným povrchem .....	97
Obr. 4-51: Odečtení hodnot z průběhu sil .....	98
Obr. 5-1: Závislost Strouhalova a Reynoldsova čísla, hladký válec .....	106
Obr. 5-2: Závislost Strouhalova a Reynoldsova čísla, drsný válec .....	106
Obr. 5-3: Průběh součinitele čelního odporu, hladký válec .....	107
Obr. 5-4: Průběh součinitele čelního odporu, drsný válec .....	107
Obr. 5-5: Průběh součinitele vztlaku, hladký válec .....	108
Obr. 5-6: Průběh součinitele vztlaku, drsný válec .....	108

## SEZNAM TABULEK

Tab. 4-1: Hodnoty parametru <i>Skewness</i> [12] .....	67
Tab. 4-2: Hodnoty stěnového parametru $y^+$ .....	79
Tab. 4-3: Parametry výpočetní sítě .....	85
Tab. 4-4: Parametry výpočetní sítě .....	86
Tab. 5-1: Test nezávislosti sítě .....	101
Tab. 5-2: Hodnoty Strouhalova čísla, hladký válec .....	103
Tab. 5-3: Hodnoty Strouhalova čísla, drsný válec .....	103
Tab. 5-4: Hodnoty součinitele čelního odporu, hladký válec .....	104
Tab. 5-5: Hodnoty součinitele čelního odporu, drsný válec .....	104
Tab. 5-6: Hodnoty součinitele vztlaku, hladký válec .....	105
Tab. 5-7: Hodnoty součinitele vztlaku, drsný válec .....	105