UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

DISERTAČNÍ PRÁCE

Diferenciální a diferenční inkluze

Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky
Vedoucí disertační práce: **prof. RNDr. dr hab. Jan Andres, DSc.**
Vypracovala: **Mgr. Hana Machů**
Studijní program: P1102 Matematika
Studijní obor: Matematická analýza
Forma studia: kombinovaná
Rok odevzdání: 2020

BIBLIOGRAFICKÁ IDENTIFIKACE

Autor: Mgr. Hana Machů

Název práce: Diferenciální a diferenční inkluze

Typ práce: Disertační práce

Pracoviště: Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky

Vedoucí práce: prof. RNDr. dr hab. Jan Andres, DSc.

Rok obhajoby práce: 2020

Abstrakt: Existuje spousta fyzikálních systémů, ve kterých matematické modelovaní vede k nespojitým úlohám. Např. tato práce je motivována rovnicí kyvadla se suchým třením. Pohyb tohoto kyvadla je modelován diferenciální rovnicí s nespojitostí v prostorové proměnné. Jestliže se na pravé straně daných diferenciálních rovnic vyskytnou nespojitosti v prostorových proměnných, pak je přirozeným pojmem řešení ve smyslu Filippova. Tj. použitím Filippovovy teorie je úloha s nespojitostmi přeformulována na diferenciální inkluzi, tedy na mnohoznačnou úlohu. Tato práce je rozdělena do dvou hlavních částí. První část se zabývá vyšetřováním existence a lokalizace Filippovových řešení diferenciálních rovnic druhého řádu s nespojitostmi v prostorových proměnných (buzených nelineárních diferenciálních rovnic zahrnující kombinaci viskózního a suchého tření) a diferenciálních inkluzí druhého řádu se shora polospojitými pravými stranami, a Dirichletovými okrajovými podmínkami. Pro řešitelnost těchto úloh jsou stanoveny postačující podmínky ve tvarech růstových omezení. Při formulování těchto efektivních podmínek nám explicitní odhady řešení a jejich derivací umožní se omezit na dostatečně velké okolí počátku. Tímto způsobem může být chování nelinearit vně tohoto okolí zcela libovolné. Kvůli obdržení optimálních kritérií řešitelnosti jsou v této práci úlohy s jednočlennými (zbývající členy jsou pak uvažovány jako součást mnohoznačné perturbace pravých stran inkluzí) a úplnými lineárními diferenciálními operátory na levých stranách uvažovaných inkluzí brány odděleně prostřednictvím různých Greenových funkcí. Přeformulováním úloh do jejich operátorové podoby získáme aplikací mnohoznačné verze Schauderovy věty o pevném bodě (Kakutaniho-Ky Fanovy věty o pevném bodě) existenci Filippovova řešení daných úloh. V druhé části aplikujeme techniky z první části na diskrétní úlohu a obdržíme tak existenci jejího řešení a odhad řešení a jeho první diference nezávislý na velikosti diskretizačního kroku. Je také studován vztah mezi řešeními Dirichletových okrajových problémů pro systém diferenciálních inkluzí druhého řádu se shora polospojitými pravými stranami a příslušných numerických diskrétních Dirichletových okrajových problémů pro diferenční inkluze druhého řádu.

Klíčová slova: Dirichletův problém, diskrétní mnohoznačné Dirichletovy problémy, Filippovovo řešení, Greenovy funkce, Kakutaniho–Ky Fanova věta o pevném bodě,

konvergence řešení, odhady řešení, růstová omezení, shora polospojité problémy, suché tření.

Počet stran: 106

Počet příloh: 0

Jazyk: český

BIBLIOGRAPHICAL IDENTIFICATION

Author: Mgr. Hana Machů

Title: Differential and difference inclusions

Type of thesis: Dissertation thesis

Department: Department of Mathematical Analysis and Application of Mathematics

Supervisor: prof. RNDr. dr hab. Jan Andres, DSc.

The year of presentation: 2020

Abstract: There are many physical systems in which the mathematical modeling leads to discontinuous problems. For example, this thesis is motivated by the equation of a pendulum with a dry friction. The move of this pendulum is modeled by a differential equation with discontinuity in the state variable. If in the right-hand sides of given differential equations occure discontinuities in the state variables, then the natural notion of a solution is the one in the sense of Filippov. I.e. using Filippov's theory the problem with discontinuities is reformulated as a differential inclusion, thus as a multivalued problem. This thesis is divided to the two main parts. The first part deals with the investigation of the existence and localization of a Filippov's solution to the second order differential equations with the discontinuities in the state variables (forced nonlinear differential equations involving the combination of viscous and dry frictions) and second order differential inclusions with upper semicontinuous right-hand sides, and Dirichlet boundary conditions. Sufficient conditions in terms of growth restrictions are given for the solvability of this problems. Explicit extimates of solutions and their derivatives allow us to restrict ourselves to a sufficiently large neighbourhood of the origin, when formulating these effective conditions. In this way, the behaviour of nonlinearities outside of this neighbourhood can be quite arbitrary. In order to get optimal solvability criteria, the problems with one-term (then the remaining terms are considered as a part of a multivalued perturbation of the right-hand sides of the inclusions) and complete linear differential operators on the left-hand sides of the inclusions are treated separately by means of various Green's functions. The existence of Filippov's solutions are obtained by using of the multivalued version of the Schauder fixed point theorem (Kakutani–Ky Fan fixed point theorem) when the problems are reformulated to their operator forms. In the second part, the technique from the first part is applied to the discrete problem. The existence of its solution and the estimates of its solution and its first difference independent of the step size are given. It is also studied the relationship between the solutions of the Dirichlet boundary value problems for the system of the second order differential inclusions with upper semicontinuous right-hand sides and the associated numerical discrete Dirichlet boundary value problems for second order diference inclusions.

Key words: convergence of solutions, Dirichlet problem, discrete multivalued Dirichlet problems, dry friction, Filippov solution, Green's functions, growth restrictions, Kakutani–Ky Fan fixed point theorem, solution estimates, upper semicontinuous problems.

Number of pages: 106

Number of appendices: 0

Language: Czech

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem vytvořila tuto disertační práci samostatně za vedení prof. RNDr. dr hab. Jana Andrese, DSc. a že jsem v seznamu použité literatury uvedla všechny zdroje použité při zpracování práce.

V Olomouci dne ....

podpis

Obsah

Poděkování

Ráda bych na tomto místě poděkovala svému školiteli prof. RNDr. dr hab. Janu Andresovi, DSc. za obětavou spolupráci i za čas, který mi věnoval při konzultacích. Mé poděkování patří také prof. RNDr. Michalovi Fečkanovi, DrSc. za vstřícnost a laskavost během mé stáže v Bratislavě. Dále bych ráda poděkovala svému manželovi a dceři za podporu, trpělivost a pochopení, které se mnou měli.

Použité značení

V celé práci je použito následovné standardní značení:

$\mathbb{R}$	množina všech reálných čísel
$\mathbb{R}^+$	množina všech nezáporných reálných čísel
$\mathbb{C}$	množina všech komplexních čísel
$\mathbb{N}$	množina všech přirozených čísel
$\mathbb{R}^m$	m-rozměrný reálný euklidovský prostor
$[a,b]$	uzavřený interval s krajními body a,b
$C(J,\mathbb{R}^n)$	množina funkcí spojitých na intervalu J s hodnotami v $\mathbb{R}^n$
$C^1(J,\mathbb{R}^n)$	množina funkcí se spojitou první derivací na intervalu J s hodnotami v $\mathbb{R}^n$
$L^1(J,\mathbb{R}^n)$	množina funkcí lebesgueovsky integrovatelných na intervalu J s hodnotami v $\mathbb{R}^n$
$L^2(J,\mathbb{R}^n)$	prostor měřitelných funkcí na intervalu J s hodnotami v $\mathbb{R}^n$ integrovatelných s druhou mocninou, tj. $\int_J |f|^2 \mathrm{d}\mu < \infty$
$\langle\cdot,\cdot\rangle$	označení pro skalární součin

Při formulaci problémů budeme v celé práci používat zkratku „s. v.“ pro „skoro všechna“. Propozicemi budeme značit pomocné věty. Označení Věta vyhradíme pouze pro nové výsledky.

1 Předmluva

Tato disertační práce je zaměřena na existenci a lokalizaci řešení diferenciálních rovnic s nespojitostmi v prostorové proměnné, resp. diferenciálních inkluzí, a vztahem mezi řešeními „polospojitých" úloh (tj. úloh s polospojitými pravými stranami) a příslušných diskrétních úloh. Práce je rozdělena do dvou částí.

V Části I je nejprve studována existence a lokalizace Filippovova řešení vektorového Dirichletova okrajového problému druhého řádu ve tvaru

$$\left.\begin{array}{l} x''(t) + ax'(t) + bx(t) \in P(t) + f_1(x(t)) + f_2(x'(t)), \text{ pro s. v. } t \in [0,T], \\ x(0) = x_0, x(T) = x_T, \end{array}\right\} \tag{1.1}$$

kde a, b a $T > 0$ jsou reálné konstanty, $x_0, x_T \in \mathbb{R}^n$, P je vektorové aumannovsky (po složkách) integrovatelné mnohoznačné zobrazení a f_1, f_2 jsou měřitelná a lokálně omezená jednoznačná vektorová zobrazení. Probereme užití jednočlenného versus úplného lineárního diferenciálního operátoru pro související Greenovy funkce. Konkrétně rozlišíme mezi jednočlenným lineárním operátorem $Lx := x''$ (zbývající výrazy $ax' + bx$ pak bude možno chápat jako součást mnohoznačné perturbace pravé strany inkluze v (1.1)) a úplným lineárním diferenciálním operátorem $Lx := x'' + ax' + bx$. Jelikož jsou a, b reálné konstanty, ne matice, můžeme s výhodou využít explicitní tvary Greenových funkcí. S využitím výhradně růstových podmínek obdržíme postačující podmínky řešitelnosti a explicitní odhady řešení pro jednotlivé alternativy. Tato část práce vychází z článku [3].

Dále bude v této části uvažován skalární mnohoznačný Dirichletův problém zahrnující kombinaci viskózního a suchého tření:

$$\left.\begin{array}{l} x''(t) + ax'(t) + bx(t) \in P(t) + F_1(x(t)) + F_2(x'(t)) - c\,\mathrm{sgn}\,x'(t), \\ x(0) = x_0,\ x(T) = x_T, \text{ pro s. v. } t \in [0,T] \end{array}\right\} \tag{1.2}$$

kde a, b, c, x_0, x_T a $T > 0$ jsou reálné konstanty, P je aumannovsky integrovatelné mnohoznačné zobrazení, F_1, F_2 jsou shora polospojitá mnohoznačná zobrazení s kompaktními a konvexními hodnotami. Tento problém je motivován rovnicí kyvadla se suchým třením.

Opět rozlišíme mezi jednočlenným a úplným lineárním diferenciálním operátorem a stanovíme explicitní odhady řešení a podmínky řešitelnosti. Tyto výsledky jsou publikovány v [1].

Část II prezentuje výsledky z [2], kde se zaměříme na systém diskrétních okrajových úloh zahrnujících diferenční inkluze druhého řádu a homogenní Dirichletovy okrajové podmínky, tj.

$$\frac{\Delta^2 x_{i-1}}{h^2} \in F\left(t_i, x_i, \frac{\Delta x_i}{h}\right), \quad i = 1, \ldots, n-1, \tag{1.3}$$

$$x_0 = 0, \quad x_n = 0, \tag{1.4}$$

kde F je shora polospojité mnohoznačné zobrazení s kompaktními a konvexními hodnotami, velikost kroku je označena $h = \frac{T}{n}$, kde T je kladná konstanta a $n \geq 2$, a body sítě jsou $t_i = ih$ pro $i = 0, \ldots, n$.

Nejprve opět vyšetříme existenci a určíme odhad řešení, a to stejnoměrně vzhledem k velikosti kroku. Dále stanovíme podmínky, za nichž řešení jednoparametrické třídy numerických diskrétních mnohoznačných Dirichletových problémů konvergují k řešení odpovídajícího polospojitého problému

$$x''(t) \in F\left(t, x(t), x'(t)\right), \quad \text{pro s. v. } t \in [0, T], \tag{1.5}$$

$$x(0) = 0, \quad x(T) = 0. \tag{1.6}$$

1.1. Přehled aktuálního stavu

Dirichletův problém je pravděpodobně nejvíce studovaný okrajový problém pro diferenciální rovnice. Pro obyčejné diferenciální rovnice byly první výsledky získány pomocí variačních metod díky Hamelovi, Hammersteinovi a Lichtensteinovi (viz např. přehledový článek J. Mawhina [45], kde jsou také systematicky popsány pozdější výsledky stanovené tímto způsobem). Po zveřejnění Schauderovy věty o pevném bodě v roce 1930, začaly být alternativně užívány topologické metody, založené na vyšetřování existence pevného bodu, také pro vektorové rovnice (viz např. [12, 17, 28, 30, 33, 35, 36, 37, 44, 49, 58, 59]). Od 30. let 20. století je dobře známo, že je, vzhledem ke Scorza-Dragoniho větě pro vektorové obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu s omezenou spojitou pravou stranou, Dirichletův problém vždy řešitelný (viz [58, 59]). Konkrétně, Dirichletův problém pro rovnici *buzeného matematického kyvadla*, tj.

$$x''(t) + b\sin x(t) = p(t), \quad x(0) = x_0,\, x(T) = x_T,$$

kde b, x_0, x_T a $T > 0$ jsou reálné konstanty, má řešení, pro libovolná b a $p \in C([0,T],\mathbb{R})$. Stačí však, aby, $p\colon [0,T] \to \mathbb{R}$ byla jen lebesgueovsky integrovatelná, tj. měřitelná a $\int_0^T |p(t)|\mathrm{d}t < \infty$, a, pro stejný výsledek, může rovnice kyvadla zahrnovat rovněž *člen popisující viskózní tření*, tj.

$$x''(t) + ax'(t) + b\sin x(t) = p(t), \quad a \in \mathbb{R},$$

(viz např. [33]).

Na druhé straně, Dirichletův problém pro *buzený lineární oscilátor s viskózním třením*, tj.

$$x''(t) + ax'(t) + bx(t) = p(t), \quad x(0) = x_0,\, x(T) = x_T,$$

má jediné řešení za předpokladu, že opět $\int_0^T |p(t)|\mathrm{d}t < \infty$ a homogenní problém, tj.

$$x''(t) + ax'(t) + bx(t) = 0, \quad x(0) = 0,\, x(T) = 0,$$

má pouze triviální řešení. Pokud homogenní problém není triviálně řešitelný, tj. pokud nastává rezonance, pak řešení úlohy vyžaduje odlišný přístup. Úlohou v rezonanci se v naší práci zabývat nebudeme.

Za přítomnosti suchého tření, je pojem *Carathéodoryova řešení*, tj. s absolutně spojitou první derivací, nedostatečný. Vhodným typem je *Filippovovo řešení*, což je Carathéodoryovo řešení, ale diferenciální inkluze s filippovovsky regularizovanou pravou stranou původního problému, (viz např. [8, 31]). Pro historii a fenomenologii problémů se suchým třením obecně, viz např. [40, 46, 53, 63, 75].

Pro kombinaci viskózního a suchého tření, tj. pro úlohu

$$x''(t) + ax'(t) + b\sin x(t) + c\,\mathrm{sgn}\,x'(t) = p(t), \quad x(0) = x_0,\, x(T) = x_T, \tag{1.7}$$

budeme Filippovovo řešení rovnice ve výrazu (1.7) chápat v následujícím smyslu. Budeme uvažovat mnohoznačnou úlohu

$$x''(t) + ax'(t) + b\sin x(t) \in p(t) - c\,\mathrm{Sgn} x'(t), \quad x(0) = x_0,\ x(T) = x_T, \tag{1.8}$$

kde

$$\mathrm{Sgn}\, z = \begin{cases} \text{-1}, & \text{pro } z \in (-\infty, 0), \\ [\ \text{-1, 1}\ ], & \text{pro } z = 0, \\ 1, & \text{pro } z \in (0, \infty) \end{cases} \tag{1.9}$$

je zmíněná Filippovova regularizace funkce $\mathrm{sgn}\, z$. Filippovovým řešením úlohy (1.7) pak rozumíme Carathéodoryovo řešení úlohy (1.8).

V případě buzeného „lineárního“[1] oscilátoru budeme kromě úlohy

$$x''(t) + ax'(t) + bx(t) + c\,\mathrm{sgn} x'(t) = p(t), \quad x(0) = x_0,\ x(T) = x_T \tag{1.10}$$

uvažovat mnohoznačnou úlohu

$$x''(t) + ax'(t) + bx(t) \in p(t) - c\,\mathrm{Sgn} x'(t), \quad x(0) = x_0,\ x(T) = x_T. \tag{1.11}$$

Pomocí Kakutaniho–Ky Fanovy věty o pevném bodě (viz Propozice 2.2), zformulovali Lasota a Opial [42, Věta 3] v roce 1965 větu pro vektorový problém prvního řádu. Tato věta řeší úlohu (1.8), resp. (1.7), pro libovolná a, b, c, jen za předpokladu $\int_0^T |p(t)|\mathrm{d}t < \infty$, stejně jako úlohu (1.11) resp. (1.10), opět za předpokladu $\int_0^T |p(t)|\mathrm{d}t < \infty$, a přidáním požadavku, že buď $|b|T$ je dostatečně malé nebo homogenní úloha

$$x''(t) + ax'(t) + bx(t) = 0, \quad x(0) = x_0,\ x(T) = x_T$$

je triviálně řešitelná.

Na druhé straně, odhady řešení a derivací nejsou v [42] odvozeny explicitně.

Existují také související výsledky dalších autorů, týkající se úloh (1.8) a (1.11), obdržených hlavně pomocí techniky stupně zobrazení (viz např. [9, 10, 11, 24, 34, 38, 43, 48, 51, 52, 54, 64, 65, 76]).

[1] Ač nejsou členy $c\,\mathrm{sgn} x'(t)$ resp. $c\,\mathrm{Sgn} x'(t)$, souvisejících rovnic resp. inkluzí lineární, použijeme pro jednoduchost tento název i pro ně.

Například, vzhledem k [34, Věta 6.1] stejně jako [65, Věta 2], kde byly využity kombinace znaménkových a růstových omezení, jsou obě úlohy (1.8) a (1.11) řešitelné pouze bez viskózního tření, tj. $a = 0$, za předpokladu $\int_0^T |p(t)| \mathrm{d}t < \infty$ pro (1.8), a $\int_0^T |p(t)| \mathrm{d}t < \infty$ společně s $b \le 0$ pro (1.11). Navíc, odhady řešení opět nejsou v [34, 65] ukázány exiplicitně .

Podobně, v [38, Věta 4.1], [51, Věta 4.1] a [52, Věta 3.1], člen viskózního tření ax' autoři neuvažují, ale, za více omezujících požadavků než těch v [34, 65], jsou zde dostupné odhady řešení.

Užitím podmínek Hartmanova typu (ve smyslu např. [36]), jsou jako v [11, Důsledek 4.1], související vhodné podmínky řešitelnosti úlohy (1.8) znovu více omezující než podmínky v [42, Věta 3], a to $b < 0$, p je spojitá na $[0,T]$ ($\Rightarrow |p(t)| \le P$, $t \in [0,T]$), a

$$\frac{P + |c| + k_3}{-b} \le \sin\left(\frac{\pi}{2} - k_2\right), \quad k_2 \le \frac{\pi}{2}, \tag{1.12}$$

kde

$$k_2 := \max\{|x_0|, |x_T|\}, \quad k_3 := \frac{|x_T - x_0|}{T}, \quad P := \max_{t\in[0,T]} |p(t)|.$$

Konstanta a tentokrát může být různá od nuly, tj. $a \neq 0$.

Pro řešitelnost úlohy (1.11) podle [11, Důsledek 4.1] získáváme podmínky jen $b < 0$ a p je spojitá na $[0,T]$.

Za nepřítomnosti viskózního tření, tj. když $a = 0$, může být, podle [11, Důsledek 4.3] a [52, Věta 3], budící člen p lebesgueovsky měřitelný a esenciálně omezený, pro obě úlohy (1.8) a (1.11). Uvažujme pro tuto chvíli případ, kdy $b = 0$. Abychom mohly aplikovat [11, Důsledky 4.1 a 4.3] a [52, Věta 3] na (1.8) a (1.11), musí být buď $c = 0$, $p(t) \equiv 0$ a $k_3 = 0$ nebo $a = 0$, což se redukuje na triviální řešitelnost úloh (1.8) a (1.11).

Na druhou stranu, za výše uvedených předpokladů s $b < 0$, můžou být odhady řešení $x(\cdot)$ pro (1.8) a (1.11) podle [11] vyjádřeny explicitně jako

$$|x(t)| \le \arcsin\left(\frac{P + |c| + k_3}{-b}\right) - k_2 \le \frac{\pi}{2} - k_2, \tag{1.13}$$

respektive

$$|x(t)| \leq \frac{P + |c| + k_3}{-b} + k_2. \tag{1.14}$$

Jestliže jsou další možné nespojité nelinearity nebo mnohoznačná zobrazení vložena do pravých stran daných diferenciálních rovnic nebo inkluzí, jejichž růst má, například, superlineární charakter dostatečně daleko od počátku, pak věta Lasoty a Opiala z [42, Věta 3] nemůže být nadále použita. Máme-li nicméně k dispozici explicitní odhady řešení jako (1.13) nebo (1.14) a jejich derivací, můžeme formulovat kritéria taková, že se nově implementované členy mohou chovat libovolně vně oblasti charakterizované těmito odhady. Tímto způsobem mohou být všechny výsledky podle naší úvahy přirozeně rozšířeny.

Matematické výpočty jsou často založeny na rovnicích, které vedou k výpočtu hodnoty funkce rekurzivně z dané množiny hodnot. Tyto rovnice se nazývají diferenční. Diskrétní problém, který vznikne diskretizací spojitého problému s diskretizačním krokem h, a jeho vztah k tomuto spojitému problému, je jedním z hlavních zdrojů konstuktivní studie. Agarwal v úvodu své práce [4] zdůrazňuje důležitost studia jednak tohoto vztahu, dále také otázky existence, jednoznačnosti, atd. diskrétního problému. V případě, kdy je spojitý okrajový problém diskretizován, se povaha řešení může změnit. Toto své tvrzení dokládá na jednoduchých příkladech:

- spojitý problém $y'' + (\pi^2/n^2)\,y = 0, \quad y(0) = y(n) = 0$ má nekonečně mnoho řešení tvaru $y(t) = k \sin(\pi/n)t$, kde k je libovolné, avšak diskrétní analogie $\Delta\nabla y(t) + (\pi^2/n^2)\,y(t) = 0, \quad y(0) = y(n) = 0$ má jediné řešení $y(t) \equiv 0$,

- spojitý problém $y'' + (\pi^2/4n^2)\,y = 0, \quad y(0) = 0, y(n) = 1$ má jediné řešení $y(t) = \sin(\pi/2n)t$, diskrétní problém $\Delta\nabla y(t) + (\pi^2/4n^2)\,y(t) = 0, \quad y(0) = 0, y(n) = 1$ má také jediné řešení,

- spojitý problém $y'' + 4\sin^2(\pi/2n)\,y = 0, \quad y(0) = 0, y(n) = \varepsilon(\neq 0)$ má jediné řešení $y(t) = \varepsilon \sin[(2\sin\pi/2n)t]\,/\sin[(2\sin\pi/2n)n]$, zatímco $\Delta\nabla y(t) + 4\sin^2(\pi/2n)\,y(t) = 0, \quad y(0) = 0, y(n) = \varepsilon(\neq 0)$ nemá řešení.

Výzkum zabývající se otázkou za jakých podmínek má skalární diferenční rovnice řešení a jaký je vztah mezi řešeními diskrétní a spojité úlohy započal R. Gaines. Výsledky týkající se skalárního problému druhého řádu s lineárními okrajovými podmínkami publikoval ve své práci [32]. Tento článek je v této oblasti stěžejní. Je často citován v pracech zabývajících se touto tématikou, zvláště se autoři odvolávají na konvergenční výsledek, např. [6], [55], [56], [67], [68], [69]. Dalšími výstupy z těchto článků jsou formulace podmínek, za kterých splňují všechna řešení nelineárního diskrétního Dirichletova okrajového problému druhého řádu určitá apriorní omezení nezávislá na velikosti diskretizačního kroku. V případě skalárního problému jsou tyto podmínky v [55] a [41] růstové a pro existenci řešení je zde použita technika Brouwerova stupně zobrazení. V [56] a [6] (zde jsou uvažovány nelineární okrajové podmínky) je použita diskrétní Nagumova podmínka a diskrétní varianta metody horního a dolního řešení. Navíc jednoznačnosti řešení bylo v [55] a [41] dosaženo přidáním Lipschitzovy podmínky na pravou stranu uvažované rovnice. Vektorovým problémem se zabývali např. Thompson a Tisdell, kde v [67], [68], [69] byly Gainesovy výsledky rozšířeny na systémy rovnic. Diferenční problémy s periodickými podmínkami jsou řešeny v [19], zatímco v [20] jsou uvažovány Neumannovy okrajové podmínky. V knize [39] můžeme najít standardní techniky pro řešení diferenčních rovnic.

Problematika diferenčních inkluzí je prozatím řešena jen v malém množství prací. Případ počáteční úlohy pro obyčejné diferenciální inkluze je studován v [26], kde jsou předloženy diferenční metody pro řešení této úlohy.

Okrajové mnohoznačné úlohy jsou studovány např. v [5] a [62], kde jsou uvažovány okrajové úlohy pro systémy diskrétních inkluzí druhého řádu zahrnující Dirichletovy podmínky. Pro určitou třídu pravých stran uvažovaných inkluzí (shora polospojitých) ukazují, že všechna řešení diskrétní úlohy splňují apriorní omezení a tyto omezení jsou užity ve spojení s vhodnou mnohoznačnou verzí věty o pevném bodě k ověření existence řešení. V [5] je aplikována stejná věta o pevném bodě, jako bude použita v této práci a autoři zde užívají diskrétní verzi metody horního a dolního řešení. V [62] jsou uvažovány růstové podmínky a diskrétní principy maxima. Není mi známo, že by v některé práci byl řešen vztah mezi řešeními diskrétní a příslušné spojité úlohy.

1.2. Cíle práce

Tato disertační práce má několik cílů. Vzhledem k tomu, že literatura odpovídající tématu diferenčních inkluzí existuje jen částečně, a to v časopisecké podobě, je jedním z účelů práce vytvořit teoretický základ pro zkoumání dané problematiky.

Cílem Části I je stanovit efektivní odhady řešení a jejich derivací úlohy (1.1), tj. vektorového Dirichletova okrajového problému druhého řádu, na základě studování daného problému ze dvou úhlů pohledu. Prvním z nich je uvažování pouze jednočlenného diferenciálního operátoru na levé straně v inkluzi (1.1). Jeho zbývající výrazy zahrnout do pravé strany inkluze v (1.1) jako součást mnohoznačné perturbace. Druhým způsobem je opět stanovit existenční a lokalizační výsledky pro úlohu (1.1) tentokrát formálně zapsané tak, že na levé straně bude figurovat úplný lineární diferenciální operátor.

Dalším úkolem je oba tyto pohledy aplikovat na skalární úlohu (1.2) za účelem opět stanovit explicitní odhady řešení a podmínky řešitelnosti.

V Části II je cílem určit vztah mezi řešeními polospojité úlohy (1.5), (1.6) a její příslušné diskretizované úlohy (1.3), (1.4). Dále aplikovat podobné principy jako v Části I, a tedy přenést teorii diferenciálních inkluzí na diferenční inkluze, a vyšetřit tak, za jakých podmínek řešení diskrétní úlohy (1.3), (1.4) existuje a získat jeho odhad nezávislý na velikosti diskretizačního kroku.

1.3. Teoretická východiska práce

V této podkapitole představíme teoretická východiska práce, která použijeme pro pozdější analýzu. V Části I. budeme vycházet z úloh (1.1), resp. (1.2) a budeme je zkoumat ze dvou úhlů pohledu. Nejprve ponecháme na levé straně inkluze pouze jeden člen, a to ten, který odpovídá druhé derivaci. Zbývající členy zahrneme do pravé strany jako součást mnohoznačné perturbace. Poté budeme studovat dané stejné úlohy, avšak formálně zapsané tak, že na levé straně inkluzí budeme uvažovat úplný lineární diferenciální operátor.

V celé práci pak budeme využívat alternativně přepis daných úloh do jejich operátorových podob, a následně větu o pevném bodě. Konkrétně se bude jednat, v našem mnohoznačném případě, o Kakutaniho–Ky Fanovu větu o pevném bodě, kterou ve své práci použili také Lasota a Opial [42], kteří však vycházeli z vektorového problému prvního řádu, zatímco v této práci bude aplikována na problém druhého řádu.

Konečně efektivní růstové podmínky nám umožní určit lokalizaci řešení a jejich derivací uvažovaných úloh.

1.4. Užité metody

Existuje několik přístupů k řešení úloh s nespojitostmi v prostorové proměnné. V této práci využijeme princip Filippovovy regularizace, kdy je vytvořen konvexní obal daných nespojitých zobrazení. Vznikne tak konvexní množina a úloha s nespojitostmi je tak nahrazena mnohoznačnou úlohou.

Dále, v části týkající se diferenciálních inkluzí, využijeme apriorní odhady řešení, založené výhradně na růstových podmínkách na pravou stranu, k tomu, abychom, bez ztráty na obecnosti, definovali „ořezaná“ zobrazení k zobrazením na pravé straně uvažovaných inkluzí. Tato zobrazení jsou identická s původními uvnitř oblasti definované těmito apriorními odhady, avšak vně této oblasti mohou být zcela libovolná.

V obou případech, jak diferenciálních, tak diferenčních inkluzí uvažujeme nelineární úlohu, proto užijeme princip Schauderovy linearizace, pomocí níž získáme plně linearizované úlohy, resp. systém lineárních úloh. Fredholmova alternativa nám pak zaručí existenci nějakého řešení takto linearizované úlohy a jeho tvar, v němž se vyskytuje Greenova funkce. Při odhadech řešení využijeme v případě diferenciálních inkluzí různé exlicitní tvary Greenových funkcí, které lze jednoduše napočítat v závislosti na formálně zapsaném tvaru uvažované úlohy (resp. na členech, které budeme uvažovat jako součást pravé strany, resp. lineárního diferenciálního operátoru).

Věty o pevném bodě hrají důležitou roli při ověřování existence řešení diferenciálních i diferenčních úloh. Také v této práci je využit přístup transformace problému existence řešení na problém existence pevného bodu. Přeformulujeme tedy dané úlohy do jejich oprátorové podoby a aplikujeme mnohoznačnou verzi Schauderovy věty o pevném bodě, tj. Kakutaniho–Ky Fanovu, společně s Arzelà–Ascoli lemmatem, pomocí něhož obdržíme kompaktnost operátoru. Shora polospojitost operátoru dokážeme na základě uzavřenosti jeho grafu.

V poslední části, kde se zabýváme stejnoměrnou konvergencí řešení jednoparametrické třídy diskrétních inkluzí k řešení odpovidající polospojité úlohy, využijeme známé věty funkcionální analýzy opět společně s apriorními odhady řešení a jejich prvních diferencí nezávislých na velikosti diskretizačního kroku. K získání stejnoměrné konvergence jednotlivých posloupností užijeme opakovaně Arzelà–Ascoli lemma, a následně Mazurovu větu k obdržení podposloupnosti konvergující skoro všude ze slabě konvergující posloupnosti. Dále s výhodou využijeme vlastnosti stejnoměrné konvergence Greenových funkcí. K dokončení důkazu použijeme k identifikaci prvních a druhých derivací řešení Dominantní větu o konvergenci.

1.5. Originální výsledky

Úlohy, studované v této práci, jsou motivovány rovnicemi kyvadla, resp. oscilátoru, se suchým třením, které odpovídá nespojitému zobrazení. Jsou tu prezentovány existenční výsledky řešení nejprve obecnějšího vektorového diferenciálního mnohoznačného Dirichletova problému druhého řádu (1.1) zahrnující obecnější mnohoznačné členy, poté jeho skalární analogie (1.2) obsahující člen odpovídající suchému tření a diskrétních Dirichletových inkluzí druhého řádu (1.3), (1.4), založených na apriorních odhadech těchto řešení. Explicitní odhady řešení a jejich derivací jsou napočítány a v případě diskrétní verze uvedeny nezávisle na velikosti diskretizačního kroku. Dále je dokázáno, v jakém smyslu konvergují řešení jednoparametrické třídy diskrétních úloh (1.3), (1.4) k řešení odpovídající polospojité úlohy (1.5), (1.6). Tato práce je založena na výsledcích publikovaných ve dvou článcích vzniklých ve spolupráci s panem profesorem Andresem [1] a panem profesorem Fečkanem [2] a zejména také na autorčině článku [3].

Hlavními výsledky Části I jsou existence a lokalizace Filippovova řešení jednak úlohy (1.1), kde jsou vedle jejich důkazu v Kapitole 4 uvedeny také explicitní odhady řešení a jejich derivací a jsou publikovány v [3], jednak úlohy (1.2) v Kapitole 5, publikované v [1].

I. 1) Existenční a lokalizační výsledky úlohy (1.1) týkající se Filippovova řešení jsou dokázány na základě následujících podmínek pro f_1, f_2 a P:

- $f_1\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ a $f_2\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jsou jednoznačná, vektorová, měřitelná a lokálně omezená zobrazení,

$$\text{(PP)}\quad \begin{cases} P\colon J \multimap \mathbb{R}^n \text{ je aumannovsky (po složkách) integrovatelné mnohoznačné zob-} \\ \text{razení, tj. } \mathscr{P} := \sup\limits_{p\subset P} \left\{ \int\limits_0^T ||p(t)||\,\mathrm{d}t \mid p \subset P \text{ je lebesgueovsky integrovatelná} \right. \\ \left. \text{selekce zobrazení } P \right\} \end{cases}$$

Jelikož využíváme apriorní odhady řešení, stačí se pro zobrazení f_1, f_2 omezit na uzavřenou kouli $\overline{B}_D := \{z \in \mathbb{R}^n \mid ||z|| \le D\}$, tedy

$$\text{(Pf)}\quad \begin{cases} f_1|_{\overline{B}_D}\colon \overline{B}_D \to \mathbb{R}^n \; a \; f_2|_{\overline{B}_D}\colon \overline{B}_D \to \mathbb{R}^n \text{ jsou vektorová, měřitelná a lokálně omeze-} \\ \text{ná zobrazení, taková, že} \\ ||f_1(x)|| \le M_1(D_0), \quad \text{pro} \quad ||x|| \le D, \\ ||f_2(y)|| \le M_2(D_0), \quad \text{pro} \quad ||y|| \le D, \\ \text{kde } D = D_0 + k_2 + k_3 \text{ je vhodná konstanta.} \end{cases}$$

Zobrazení f_1, f_2 nejsou spojitá, nelze tedy úlohu (1.1) řešit přímo. Je využit princip Filippovovy regularizace za účelem získat v nějakém smyslu spojitá zobrazení. Tímto přístupem se podaří získat shora polospojitá mnohoznačná zobrazení, která jsou lokálně omezená a mají neprázdné kompaktní a konvexní hodnoty. Dohromady tak získáme pravou stranu diferenciální inkluze, která je shora carathéodoryovská.

A) Hlavní výsledek existence Filippovova řešení $x(\cdot)$ úlohy (1.1) a odhady jeho a prvních derivací $||x(t)|| + ||x'(t)|| \le D$ pro $t \in [0,T]$ jsou dokázány ve Větě 4.1 za podmínek (PP), (Pf) a implicitních podmínek (PT) pro koncový bod intervalu, na němž řešení hledáme a (PD) pro omezující kontantu D takovou, že $D = D_0 + k_2 + k_3$ s označením (OK):

(PT) $\left\{\frac{4}{T(T+4)} > \max\{|a|,|b|\},\right.$

(PD) $\left\{\begin{array}{l} D_0 \geq \Delta_1(D_0), \\ \Delta_1(D_0) = \frac{[\mathscr{P}+T(M_1(D_0)+M_2(D_0)+|a|k_3+|b|k_2)](T+4)}{4-k_1T(T+4)}, \end{array}\right.$

(OK) $\left\{k_1 := \max\{|a|,|b|\}, \quad k_2 := \max\{||x_0||,||x_T||\}, \quad k_3 := \frac{||x_T-x_0||}{T}.\right.$

B) Stejného výsledku jsme také dosáhli ve Větě 4.2 za podmínek (PP), (Pf) a implicitních podmínek pouze pro D_0 s označením (OK)

- $D_0 \geq \Delta_j(D_0), \quad j=2,3,4$ (v závislosti na konstantách a a b), kde

  1) pro $a^2-4b>0$ (j=2)

$$\begin{aligned}\Delta_2(D_0) := {} & \frac{\mathrm{e}^{(\lambda_1-\lambda_2)T}}{\sqrt{a^2-4b}}\left[1+|\lambda_1|+|\lambda_2|\right] \\ & \times\left[\mathscr{P}+T\left(M_1(D_0)+M_2(D_0)+|a|k_3+|b|k_2\right)\right],\end{aligned}$$

  kde $\lambda_1=\frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}, \lambda_2=\frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2}$,

  2) pro $a^2-4b=0$ (j=3)

$$\begin{aligned}\Delta_3(D_0) := {} & \mathrm{e}^{\frac{|a|}{2}T}\left[1+\frac{T}{4}\left(1+2|a|\right)\right] \\ & \times\left[\mathscr{P}+T\left(M_1(D_0)+M_2(D_0)+|a|k_3+|b|k_2\right)\right],\end{aligned}$$

  3) pro $a^2-4b<0$ a $T \neq \frac{2\pi k}{\sqrt{4b-a^2}}$, $k \in \mathbb{N}$ (j=4)

$$\begin{aligned}\Delta_4(D_0) := {} & \frac{\mathrm{e}^{\frac{|a|}{2}T}\left[2+|a|+\sqrt{4b-a^2}\right]}{\sqrt{4b-a^2}\left|\sin(\frac{T}{2}\sqrt{4b-a^2})\right|} \\ & \times\left[\mathscr{P}+T\left(M_1(D_0)+M_2(D_0)+|a|k_3+|b|k_2\right)\right].\end{aligned}$$

C) Za podmínky (Pf) a esenciální omezenosti pro mnohoznačné zobrazení P, tj.

- $\mathscr{P}_1 := \operatorname{ess}\sup\limits_{\mathrm{t}\in[0,\mathrm{T}]} ||\mathrm{P(t)}||$,

jsme obdrželi v Poznámce 4.1 následující opět implicitní podmínky řešitelnosti pro úlohu (1.1) pro T a $\widetilde{D} = \widetilde{D}_0 + k_2 + k_3$ s označením (OK):

- $\frac{8}{T(T+4)} > \max\{|a|,|b|\}$,
- $\widetilde{D}_0 \geq \Delta_1'(\widetilde{D}_0)$,
- $\Delta_1'(\widetilde{D}_0) := \frac{\left[\mathscr{P}_1 + M_1(\widetilde{D}_0) + M_2(\widetilde{D}_0) + |a|k_3 + |b|k_2\right] T\,(T+4)}{8 - k_1\,T\,(T+4)}$.

I. 2) Existence řešení $x(\cdot)$ úlohy (1.2) takové, že

$$\max_{t\in[0,T]}\{|x(t)| + |x'(t)|\} \leq D,$$

kde $D = D_0 + k_2 + k_3$, s označením (OK) a $D_0 > 0$, je zaručena

A) Větou 5.1 za podmínek (PF) a (PPskal) pro zobrazení F_1, F_2 a P a implicitních podmínek (PT) pro T a (PDskal) pro D_0 s označením (OK):

$$\text{(PF)}\quad \begin{cases} F_1|_{\overline{B}_D} \colon \overline{B}_D \multimap \mathbb{R},\ F_2|_{\overline{B}_D} \colon \overline{B}_D \multimap \mathbb{R}\ \text{jsou shora polospojitá mnohoznačná} \\ \text{zobrazení s konvexními a kompaktními hodnotami taková, že} \\ M_1(D_0) := \max\limits_{|z|\leq D_0+k_2+k_3} |F_1(z)|, \quad M_2(D_0) := \max\limits_{|z|\leq D_0+k_2+k_3} |F_2(z)|, \end{cases}$$

$$\text{(PPskal)}\quad \begin{cases} P\colon J \multimap \mathbb{R}\ \text{je aumannovsky integrovatelné mnohoznačné zobrazení, tj.} \\ \mathscr{P} := \sup\limits_{p\subset P} \left\{ \int\limits_0^T |p(t)|\,\mathrm{d}t \mid p \subset P \text{ je lebesgueovsky integrovatelná selekce} \right. \\ \left. \text{zobrazení } P \right\}, \end{cases}$$

$$\text{(PDskal)}\quad \begin{cases} D_0 \geq \Delta_1(D_0), \\ \Delta_1(D_0) := \frac{[\mathscr{P} + T(M_1(D_0) + M_2(D_0) + |a|k_3 + |b|k_2 + |c|)](T+4)}{4 - k_1 T(T+4)}. \end{cases}$$

B) nebo v Poznámce 5.2 s omezující konstantou $\widetilde{D}$ za podmínky (PF), esenciální omezenosti P, tj.

- $\mathscr{P}_1 := \operatorname{ess\,sup}_{\mathrm{t}\in[0,\mathrm{T}]} |\mathrm{P(t)}|$

a za podmínek (s označením (OK))

- $\frac{8}{T(T+4)} > \max\{|a|,|b|\}$
- $\widetilde{D}_0 \geq \Delta_1'(\widetilde{D}_0)$
- $\Delta_1'(\widetilde{D}_0) := \frac{\left[\mathscr{P}_1 + M_1(\widetilde{D}_0) + M_2(\widetilde{D}_0) + |a|k_3 + |b|k_2 + |c|\right]T(T+4)}{8 - k_1 T(T+4)}$

C) V první části Poznámky 5.3 je uvedeno, že jestliže platí (PF) a (PPskal) a jestliže je navíc mnohoznačné zobrazení F_2 omezené, tj. $M_2 := \max_{z\in\mathbb{R}} |F_2(z)|$, a $a = 0$, dostáváme podmínku pro T

- $\frac{4}{T^2} > |b|$,

a jestliže existuje kladná konstanta D_1 taková, že

- $D_1 \geq \frac{T[\mathscr{P} + (M_1(D_1) + M_2 + |b|k_2 + |c|)T]}{4 - T^2|b|}$,

pak má úloha (1.2) řešení $x(\cdot)$ (s označením (OK)) takové, že

$$\max_{t\in[0,T]} |x(t)| \leq D_1 + k_2,$$

$$\max_{t\in[0,T]} |x'(t)| \leq \mathscr{P} + T\,[M_1(D_1) + M_2 + |b|(D_1 + k_2) + |c|] + k_3,$$

kde $M_1(D_1) := \max_{|z|\leq D_1 + k_2} |F_1(z)|$.

D) Podobně je v druhé části Poznámky 5.3 za podmínek (PF), (PPskal) a přidáním předpokladu, že je mnohoznačné zobrazení F_1 omezené, tj. $M_1 := \max_{z\in\mathbb{R}} |F_1(z)|$, a $b = 0$, uvedena podmínka pro T

- $\frac{1}{T} > |a|$,

a jestliže existuje kladná konstanta D_2 taková, že

- $D_2 \geq \frac{\mathscr{P}+T(M_1+M_2(D_2)+|a|k_3+|c|)}{1-T|a|}$,

kde $M_2(D_2) := \max\limits_{|z|\leq D_2+k_3} |F_2(z)|$, pak má úloha (1.2) řešení $x(\cdot)$ (s označením (OK)) takové, že

$$\max_{t\in[0,T]} |x(t)| \leq \frac{T}{4}\left[\mathscr{P}+T\left(M_1+M_2(D_2)+|a|(D_2+k_3)+|c|\right)\right]+k_2,$$
$$\max_{t\in[0,T]} |x'(t)| \leq D_2+k_3.$$

E) Za stejných požadavků na zobrazení F_1, F_2 a P jako ve Větě 5.1, tj. (PF) a (PP-skal), získáme pomocí Věty 5.2 podmínky řešitelnosti pro úlohu (1.2) v následujícím implicitním tvaru (s označením (OK))

- $D_0 \geq \Delta_j(D_0), \quad j = 2,3,4$ (v závislosti na konstantách a a b), kde

1) pro $a^2-4b > 0$: $(j=2)$

$$\Delta_2(D_0) := \frac{e^{(\lambda_1-\lambda_2)T}}{\sqrt{a^2-4b}}\left[1+|\lambda_1|+|\lambda_2|\right] \times \left[\mathscr{P}+T\left(M_1(D_0)+M_2(D_0)+|c|+|a|k_3+|b|k_2\right)\right],$$

kde $\lambda_1 = \frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2}$,

2) pro $a^2-4b = 0$ $(j=3)$

$$\Delta_3(D_0) := e^{\frac{|a|}{2}T}\left[1+\frac{T}{4}(1+2|a|)\right] \times \left[\mathscr{P}+T\left(M_1(D_0)+M_2(D_0)+|c|+|a|k_3+|b|k_2\right)\right],$$

3) pro $a^2-4b<0$ a $T\neq\frac{2\pi k}{\sqrt{4b-a^2}}$, $k\in\mathbb{N}$ $(j=4)$

$$\begin{aligned}\Delta_4(D) := \;& \frac{\mathrm{e}^{\frac{|a|}{2}T}\left[2+|a|+\sqrt{4b-a^2}\right]}{\sqrt{4b-a^2}\left|\sin(\frac{T}{2}\sqrt{4b-a^2})\right|}\\ & \times\left[\mathscr{P}+T\left(M_1(D_0)+M_2(D_0)+|c|+|a|k_3+|b|k_2\right)\right]\end{aligned}$$

I. 3) Posledním výsledkem z části týkající se diferenciálních úloh, jsou explicitní odhady Filippovových řešení a jejich prvních derivací skalární úlohy

$$\left.\begin{array}{l} x''(t)+b\,x(t)+c\,\mathrm{sgn}x'(t)+d\sin x(t)=p(t),\ \text{pro s. v. } t\in[0,T],\\ x(0)=x_0,\ x(T)=x_T, \end{array}\right\}$$

která se pro $b=0$ zredukuje na Dirichletův problém pro buzené kyvadlo se suchým třením, a pro $d=0$ na Dirichletův problém pro buzený „lineární“ oscilátor se suchým třením, a to za podmínky

- $p\colon[0,T]\to\mathbb{R}$ je lebesgueovsky integrovatelné zobrazení, kde $\mathscr{P}:=\int_0^T|p(t)|\,\mathrm{d}t<\infty$.

Pak existuje Filippovovo řešení $x(\cdot)$ této úlohy takové, že pro $0<b\neq\left(\frac{k\pi}{T}\right)^2$, $k\in\mathbb{N}$,

$$\max_{t\in[0,T]}|x(t)|\leq\frac{\mathscr{P}+T\left[|b|k_2+|c|+|d|\right]}{\sqrt{b}\left|\sin(\sqrt{b}T)\right|}+k_2,$$

$$\max_{t\in[0,T]}|x'(t)|\leq\frac{\mathscr{P}+T\left[|b|k_2+|c|+|d|\right]}{\left|\sin(\sqrt{b}T)\right|}+\frac{|x_T-x_0|}{T}.$$

Pro $b<0$ a $b=0$, obdržíme příslušné odhady

$$\max_{t\in[0,T]}|x(t)|\leq\frac{e^{2\sqrt{-b}T}}{2\sqrt{-b}}\left[\mathscr{P}+T\left(|b|k_2+|c|+|d|\right)\right]+k_2,$$

$$\max_{t\in[0,T]}|x'(t)|\leq e^{2\sqrt{-b}T}\left[\mathscr{P}+T\left(|b|k_2+|c|+|d|\right)\right]+\frac{|x_T-x_0|}{T},$$

a

$$\max_{t\in[0,T]} |x(t)| \leq \frac{T\,[\mathscr{P}+T(|c|+|d|)]}{4}+k_2,$$

$$\max_{t\in[0,T]} |x'(t)| \leq \mathscr{P}+T(|c|+|d|)+\frac{|x_T-x_0|}{T},$$

kde $k_2=\max\{|x_0|,|x_T|\}$.

Hlavním výsledkem Části II je konvergence řešení jednoparametrické třídy diskrétních úloh (1.3), (1.4) k řešení příslušné polospojité úlohy (1.5), (1.6) v Kapitole 7.

Konvergenční výsledky jsou pro jednoznačné okrajové úlohy uvedeny např. v [32], pro mnohoznačné počáteční úlohy např. v [26]. Pro mnohoznačné okrajové úlohy byl problém konvergence poprvé řešen až v autorčině článku [2].

A) Nejprve je ve Větě 7.1 uveden existenční a lokalizační výsledek pro řešení úlohy (1.3), (1.4) a jeho první diference, a to za předpokladů:

- $F\colon\, [0,T]\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m \multimap \mathbb{R}^m$ s kompaktními a konvexními hodnotami takové, že $F(t,\cdot,\cdot)$ je shora polospojité pro každé $t\in[0,T]$,
- $||y||\leq a||u||+b||v||+c, \quad \forall(t,u,v)\in[0,T]\times\mathbb{R}^{2m}$, $\forall y\in F(t,u,v)$, kde $a,b,c\in\mathbb{R}^+$,
- $8>T(T+4)M$, kde $M=\max\{a,b\}$.

Pak má diskrétní úloha (1.3), (1.4) řešení $(x_0,\dots,x_n)$ takové, že

$$\max_{i\in\{0,\dots,n\}} ||x_i||+\max_{i\in\{0,\dots,n-1\}} \frac{||\Delta x_i||}{h} \leq \frac{T(T+4)c}{8-T(T+4)M}.$$

B) Pomocí Věty 7.2 dostáváme za více sofistikovanějších podmínek než je lineární růstová existenci a odhad řešení za požadavků:

- $F\colon [0,T]\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m \multimap \mathbb{R}^m$ s kompaktními a konvexními hodnotami je takové, že $F(t,\cdot,\cdot)$ je shora polospojité pro každé $t\in[0,T]$,
- $||y|| \le a\left(2\langle u,y\rangle + ||v||^2\right) + c, \quad \forall (t,u,v)\in[0,T]\times\mathbb{R}^{2m},\ \forall y\in F(t,u,v)$, kde $a,c\in\mathbb{R}^+$
- $2a\left(\frac{T^2c}{8}+1\right) < 1$,

Pak má diskrétní úloha (1.3), (1.4) řešení $(x_0,\ldots,x_n)$ takové, že

$$\max_{i\in\{0,\ldots,n\}} ||x_i|| \le \frac{T^2c}{8}+1$$

a existuje konstanta R taková, že

$$\max_{i\in\{0,\ldots,n-1\}} \frac{||\Delta x_i||}{h} \le R.$$

C) Konečně, Věta 7.3 prezentuje, v jakém smyslu konvergují řešení jednoparametrické třídy diskrétních úloh k řešení příslušné polospojité úlohy, za předpokladů:

- $F\colon [0,T]\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m \multimap \mathbb{R}^m$ s kompaktními a konvexními hodnotami je shora polospojité
- $||y|| \le a||u|| + b||v|| + c, \quad \forall (t,u,v)\in[0,T]\times\mathbb{R}^{2m},\ \forall y\in F(t,u,v)$, kde $a,b,c\in\mathbb{R}^+$
- úloha (7.23), (7.24) má řešení $\left(x_0^l,\ldots,x_{n_l}^l\right)$ pro $l\ge l_0$ takové, že

$$\max_i ||x_i^l|| \le \hat{K},\ \max_i ||v_i^l|| \le \hat{K} \text{ pro } l\ge l_0,\ \hat{K}>0$$

- $(x_0,\ldots,x_n)$ je řešení úlohy (1.3), (1.4) s $h\le h_0$, $h_0\ge 0$.

Pak

$$||x_i|| \le K, \quad i=0,1,\ldots,n,$$

a

$$\left|\left|\frac{x_i - x_{i-1}}{h}\right|\right| \leq K, \quad i = 1, 2 \ldots, n,$$

$K \geq 0$. Pro nějaké $\varepsilon > 0$ existuje $h(\varepsilon)$ takové, že jestliže $h \leq h(\varepsilon)$ a $(x_0, \ldots, x_n)$ je řešení úlohy (1.3), (1.4), pak existuje řešení $x(t)$ úlohy (1.5), (1.6) takové, že

$$\max_{[0,T]} ||x(t,\overline{x}) - x(t)|| \leq \varepsilon$$

a

$$\max_{[0,T]} ||v(t,\overline{x}) - x'(t)|| \leq \varepsilon,$$

kde

$$x(t,\overline{x}) = x_i + \frac{(x_{i+1} - x_i)(t - t_i)}{h}, \quad t_i \leq t \leq t_{i+1}, \quad i = 0, \ldots, n-1,$$

$$v(t,\overline{x}) = \begin{cases} \dfrac{x_{i+1} - x_i}{h} + \dfrac{(x_{i+2} - 2x_{i+1} + x_i)(t - t_i)}{h^2}, & t_i \leq t \leq t_{i+1}, 0 \leq i \leq n-2, \\ \dfrac{x_n - x_{n-1}}{h}, & t_{n-1} \leq t \leq T. \end{cases}$$

Tato disertační práce prezentuje výsledky dosažené autorkou během PhD studia Matematické analýzy na Univerzitě Palackého v Olomouci ve spolupráci s

- prof. RNDr. dr hab. Jan Andres, DSc., katedra Matematické analýzy a aplikací matematiky, Přírodovědecká fakulta Univerzity Palackého v Olomouci, Kapitola 5, viz [1].
- prof. RNDr. Michal Fečkan, DrSc., Matematický ústav Slovenské akademie věd, Kapitola 7, viz [2].

Některé výsledky byly prezentovány na mezinárodní konferenci a publikovány v několika recenzovaných časopisech. Seznam autorčiných publikací je uveden na konci práce.

1.6. Struktura práce

Tato práce je rozdělena do dvou částí, kterým předchází Kapitola 2 obsahující základní teoretické pojmy a věty, ze kterých budeme v celé práci vycházet. Další části jsou pak organizovány následujícím způsobem:

Část I se zabývá diferenciálními inkluzemi, kde jsou ve dvou kapitolách studovány existence a lokalizace řešení daných úloh. Přičemž Kapitola 4 pojednává o vektorovém Dirichletově mnohoznačném problému a jsou stanoveny věty zaručující existenci Filippovova řešení daného problému a také explicitní odhady těchto řešení. Kapitola 5 je motivována rovnicí kyvadla se suchým třením, a zabývá se tak speciálním případem předchozí kapitoly, a to jeho skalární analogií zahrnující člen odpovídající suchému tření.

V Části II se zaměříme na diferenční inkluze. V Podkapitole 7.1 je uvedena věta zaručující existenci řešení úlohy (1.3), (1.4). Nejprve je lineární růstová podmínka na pravou stranu využita k získání apriorních omezení řešení diskrétní úlohy a jejich prvních diferencí nezávislých na velikosti kroku h. Tyto odhady ve spojení s Kakutaniho větou o pevném bodě jsou užity k získání existence řešení diskrétní úlohy. Navíc, využitím [62, 68], také diskutujeme existenční výsledky pro obecnější růstové předpoklady na F.

V Podkapitole 7.2, je dokázáno, na základě stejnoměrné konvergence Greenových funkcí, že řešení jednoparametrické třídy diskrétních úloh konvergují stejnoměrně k řešení polospojité úlohy. Tento konvergenční výsledek je novostí této práce. Výsledky z Podkapitoly 7.1 a Podkapitoly 7.2 jsou ilustrovány na příkladech.

Tato práce je doplněna seznamem autorčiných publikací, seznamem použité literatury a autorčiným životopisem.

2 Teoretický základ

V této kapitole připomeneme některá témata matematické analýzy, která nejsou přímo obsahem této práce, ale úzce s ním souvisejí.

2.1. Mnohoznačná analýza

Definice 2.1. Nechť X a Y jsou metrické prostory. Řekneme, že φ je *mnohoznačné zobrazení* z X do Y (zapisujeme $\varphi\colon X \multimap Y$), jestliže pro každé $x \in X$ existuje neprázdná uzavřená podmnožina $\varphi(x)$ prostoru Y.

Mnohoznačné zobrazení φ můžeme charakterizovat jeho *grafem* Γ_φ, jakožto podmnožinu množiny $X \times Y$, která je definována jako

$$\Gamma_\varphi := \{(x,y) \in X \times Y \mid y \in \varphi(x)\}.$$

Nechť $\varphi\colon X \multimap Y$ je mnohoznačné zobrazení a $f\colon X \to Y$ je jednoznačné zobrazení. Řekneme, že f je *selekce* φ (psáno $f \subset \varphi$), jestliže $f(x) \in \varphi(x)$ pro každé $x \in X$.

Jestliže $X \subset Y$ a $\varphi\colon X \multimap Y$, pak bod $x \in X$ se nazývá *pevný bod zobrazení* φ, jestliže $x \in \varphi(x)$. Dostáváme tak množinu pevných bodů

$$\mathrm{Fix}(\varphi)\colon = \{x \in X \,|\, x \in \varphi(x)\}.$$

Definice 2.2. Nechť X a Y jsou metrické prostory. Mnohoznačné zobrazení $\varphi\colon X \multimap Y$ je *uzavřené*, jestliže jeho graf je uzavřený.

Definice 2.3. Nechť X a Y jsou metrické prostory. Mnohoznačné zobrazení $\varphi\colon X \multimap Y$ je *shora polospojité*, jestliže pro každou otevřenou množinu $U \subset Y$ je množina $\{x \in X | \varphi(x) \subset U\}$ otevřená v X.

Lemma 2.1. (viz např. [8, Propozice I.3.15]) *Jestliže $\varphi\colon X \multimap Y$ je shora polospojité, pak jeho graf Γ_φ je uzavřená podmnožina množiny $X \times Y$.*

Poznámka 2.1. Obrácené tvrzení Lemmatu 2.1 platí při přidání předpokladu kompaktnosti, viz. Lemma 2.2.

Lemma 2.2. (viz např. [8, Propozice I.3.16]) *Předpokládejme, že* $\varphi\colon X \multimap Y$ *je mnohoznačné zobrazení takové, že* $\varphi(X) \subset K$*, kde* $K \subset Y$ *je kompaktní množina, a že graf* Γ_φ *zobrazení* φ *je uzavřený. Pak zobrazení* φ *je shora polospojité.*

Definice 2.4. Nechť Y je separabilní metrický prostor a $(\Omega, \mathscr{U}, \mu)$ je měřitelný prostor, t.j. množina Ω vybavená σ- algebrou $\mathscr{U}$ podmnožin a spočetnou aditivní mírou μ na $\mathscr{U}$. Mnohoznačné zobrazení $\varphi\colon \Omega \multimap Y$ je *měřitelné*, jestliže pro každou otevřenou množinu $V \subset Y$ platí $\{\omega \in \Omega | \varphi(\omega) \subset V\} \in \mathscr{U}$.

Poznámka 2.2. Pro naše potřeby bude Ω omezená oblast v $\mathbb{R}^k$ vybavená lebesgueovou mírou.

Definice 2.5. Mnohoznačné zobrazení $\varphi\colon J \times \mathbb{R}^n \multimap \mathbb{R}^m$ s kompaktními a konvexními hodnotami, kde $J \subset \mathbb{R}$ je kompaktní interval, se nazývá *shora carathéodoryovské* (zkráceně, z anglického upper-Carathéodory, *u-carathéodoryovské*) *zobrazení*, jestliže splňuje

(i) $t \multimap \varphi(t,x)$ je měřitelná pro každé $x \in \mathbb{R}^n$,

(ii) $x \multimap \varphi(t,x)$ je shora polospojitá pro skoro všechna $t \in J$,

(iii) $||y|| \leq r(t)(1 + ||x||)$, pro každé $(t,x) \in J \times \mathbb{R}^n$, $\forall y \in \varphi(t,x)$, kde $r : J \to [0, \infty)$ je lebesgueovsky integrovatelná funkce.

Propozice 2.1. (Castaingova reprezentace, viz [21, Věta III.7.]) *Nechť* X *je separabilní metrický prostor,* $(\Omega, \mathscr{U}, \mu)$ *je měřitelný prostor a* $\varphi : \Omega \multimap X$ *je měřitelné mnohoznačné zobrazení. Pak existuje posloupnost* $\{f_n\}$ *měřitelných selekcí zobrazení* φ *taková, že*

$$\varphi(x) = \overline{\{f_n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}} = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)},$$

pro každé x*, kde symbol „ $^-$ “ označuje uzávěr v prostoru* X.

Lemma 2.3. (viz např. [13, Lemma 7.1]) *Nechť* $\varphi\colon J \times \mathbb{R}^n \multimap \mathbb{R}^n$ *je u-carathéodoryovské mnohoznačné zobrazení. Pak kompozice* $\varphi(t, q(t))$ *obsahuje, pro každé* $q \in C(J, \mathbb{R}^n)$*, jednoznačnou měřitelnou selekci.*

Následující dvě Lemmata budeme používat k důkazu uzavřenosti grafu mnohoznačného zobrazení.

Lemma 2.4. (viz např. [14, Věta 0.3.4])*Předpokládejme, že posloupnost absolutně spojitých funkcí* $x_k \colon J \to \mathbb{R}^n$*, kde* J *je kompaktní interval, splňuje následující podmínky:*

- *množina* $\{x_k(t) \mid k \in \mathbb{N}\}$ *je omezená* $\forall t \in J$,
- *existuje lebesgueovsky integrovatelná funkce* $\alpha \colon J \to \mathbb{R}$ *taková, že* $||x_k'(t)|| \leq \alpha(t)$*, pro skoro všechna* $t \in J$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Pak existuje podposloupnost $\{x_k\}$ *(pro jednoduchost označena stejně) konvergující k absolutně spojité funkci* $x \colon J \to \mathbb{R}^n$ *v následujícím smyslu:*

i) $\{x_k\}$ *stejnoměrně konverguje k* x,

ii) $\{x_k'\}$ *slabě konverguje v* $L^1(J,\mathbb{R}^n)$ *k* x'.

Lemma 2.5. (viz [72, str. 88]) *Nechť* $J \subset \mathbb{R}$ *je kompaktní interval a* $F \colon J \times \mathbb{R}^n \multimap \mathbb{R}^n$ *je u-carathéodoryovské zobrazení. Nechť* $N_F \colon C(J,\mathbb{R}^n) \multimap L^1(J,\mathbb{R}^n)$ *je Němyckého operátor definován následovně:*

$$N_F(x) := \left\{ f \in L^1(J,\mathbb{R}^n) \mid f(t) \in F(t,x(t)),\ \text{pro skoro všechna } t \in J \right\},$$

pro každé $x \in C(J,\mathbb{R}^n)$*. Jestliže posloupnosti* $\{x_i\} \subset C(J,\mathbb{R}^n)$ *a* $\{f_i\} \subset L^1(J,\mathbb{R}^n)$, $f_i \in N_F(x_i)$, $i \in \mathbb{N}$*, jsou takové, že* $x_i \to x$ *v* $C(J,\mathbb{R}^n)$ *a* $f_i \to f$ *slabě v* $L^1(J,\mathbb{R}^n)$*, pak* $f \in N_F(x)$.

Definice 2.6. Nechť X a Y jsou metrické prostory. Mnohoznačné zobrazení $\varphi \colon X \multimap Y$ se nazývá *kompaktní*, jestliže jeho obraz $\varphi(X) = \bigcup\{\varphi(x) \mid x \in X\}$ je obsažen v kompaktní podmnožině množiny Y.

Poznámka 2.3. Vzhledem k Definici 2.6 můžeme společně přepsat Lemmata 2.1 a 2.2 následovně: *Kompaktní mnohoznačné zobrazení* $\varphi \colon X \multimap Y$ *je shora polospojité právě tehdy, když je jeho graf* Γ_φ *uzavřená podmnožina množiny* $X \times Y$.

Definice 2.7. Nechť X a Y jsou podmnožiny normovaných lineárních prostorů, $\varphi\colon X \multimap Y$ je mnohoznačné zobrazení. Jestliže Y je konvexní, pak φ je *Kakutaniho zobrazení* za předpokladu, že φ je shora polospojité s (neprázdnými) kompaktními a konvexními hodnotami.

Následující tvrzení je obvykle nazýváno *Kakutaniho–Ky Fanova věta o pevném bodě* a je mnohoznačnou verzí Schauderovy věty o pevném bodě pro kompaktní Kakutaniho zobrazení.

Propozice 2.2. (viz např. [27, Věta II.8.4]) *Nechť C je konvexní (ne nutně uzavřená) podmnožina normovaného lineárního prostoru, a nechť $\varphi\colon C \multimap C$ je kompaktní Kakutaniho zobrazení. Pak zobrazení φ má pevný bod v C.*

Nebo její verze v konečné dimenzi (mnohoznačná verze Brouwerovy věty o pevném bodě):

Propozice 2.3. (viz např. [60, Věta 9.1.6]) *Nechť $C \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdná, kompaktní a konvexní množina, $\varphi\colon C \multimap C$ je uzavřené (viz Lemma 2.2) nebo shora polospojité s neprázdnými, konvexními a kompaktními hodnotami. Pak má φ pevný bod.*

Následující definice nám napovídá, jakým způsobem budeme v dalších kapitolách práce přistupovat k řešení diferenciálních, resp. diferenčních rovnic, resp. inkluzí.

Definice 2.8. Nechť $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ je jednoznačné zobrazení z otevřené množiny $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$, které je lokálně omezené a měřitelné na Ω. Pak se zobrazení

$$\Phi(x) = \bigcap_{\delta>0} \bigcap_{\mu(N)=0} \overline{\operatorname{conv}}\, \varphi((B(x,\delta)\cap\Omega)\backslash N)$$

nazývá *Filippovova regularizace zobrazení* φ, kde μ představuje Lebesgueovu míru v $\mathbb{R}^n$, $N \subset \mathbb{R}^n$, a $\overline{\operatorname{conv}}$ představuje uzavřený konvexní obal dané množiny. $B(x,\delta)$ je otevřená koule o poloměru $\delta > 0$ se středem v bodě x.

Propozice 2.4. *[14, Propozice 1]Nechť φ a Φ jsou jako v Definici 2.8. Pak*

i) zobrazení $x \to \Phi(x)$ je shora polospojité s neprázdnými a konvexními hodnotami, *ii) pokud je φ spojitá v x, tak $\Phi(x) = \{\varphi(x)\}$,*

iii) $\varphi(x)$ patří do $\Phi(x)$ pro skoro každé x z Ω.

Podobně můžeme definovat Filippovovu regularizaci i pro mnohoznačné zobrazení:

Definice 2.9. Nechť $\varphi\colon J \times \mathbb{R}^n \multimap \mathbb{R}^n$ je omezené a měřitelné zobrazení s konvexními hodnotami. Pak se zobrazení

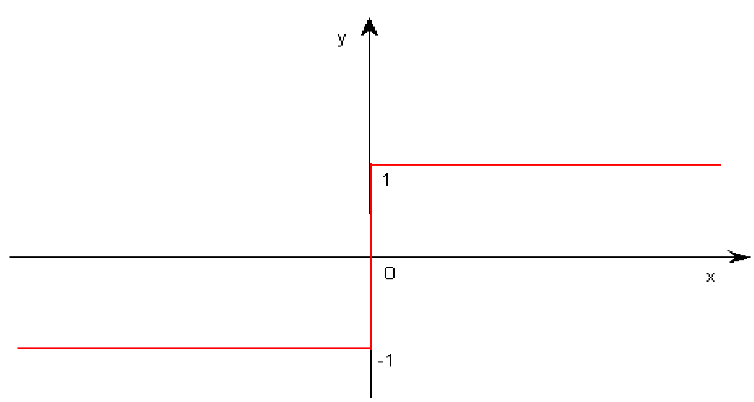
$$\Phi(t,x) = \bigcap_{\delta>0} \bigcap_{\mu(N)=0} \overline{\operatorname{conv}}\, \varphi(B((t,x),\delta) \setminus N)$$

nazývá *Filippovova regularizace zobrazení φ.*

Příklad 2.1. Příkladem nespojité funkce, která může být regularizována dle Filippova, je funkce signum, tj.

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} \text{-1}, & \text{pro } x \in (-\infty, 0), \\ 0, & \text{pro } x = 0, \\ 1, & \text{pro } x \in (0, \infty). \end{cases}$$

Filippovovou regularizací nespojité funkce signum dostaneme zobrazení, které je ve spojitých bodech identické s původním, v nespojitých bodech, v našem případě počátku, je dáno dle vztahu z Definice 2.8 následovně:



Mnohoznačné zobrazení Signum

Obdržíme tedy mnohoznačné zobrazení Signum takové, že

$$\operatorname{Sgn} x = \begin{cases} \text{-1}, & \text{pro } x \in (-\infty, 0), \\ [\text{ -1, 1 }], & \text{pro } x = 0, \\ 1, & \text{pro } x \in (0, \infty). \end{cases}$$

Dále také budeme potřebovat nějakou definici integrálu z mnohoznačného zobrazení (viz např. [15]).

Definice 2.10. Nechť $P\colon J \multimap \mathbb{R}^n$ je zobrazení, které má neprázdnou množinu lebesgueovsky integrovatelných selekcí. Pak *Aumannův integrál* zobrazení P je definován následovně:

$$\int_J P(t)\mathrm{d}t := \left\{ \int_J p(t)\mathrm{d}t \mid p \subset P \text{ lebesgueovsky integrovatelná selekce zobrazení } P \right\}.$$

2.2. Teorie retraktů

V této práci budeme také potřebovat pojem retraktu. Uvedeme zde některé základní pojmy, se kterými budeme později pracovat. Více informací lze nalézt např. v [18].

Definice 2.11. Nechť X je metrický prostor. Podmnožina $A \subset X$ se nazývá *retrakt* prostoru X, jestliže existuje (spojitá) retrakce $r\colon X \to A$, tj. $r(x) = x$, pro každé $x \in A$.

Poznámka 2.4. Je zřejmé, že jestliže A je retraktem X, pak A je uzavřená podmnožina prostoru X.

Definice 2.12. Metrický prostor X je *absolutní retrakt*, jestliže je, pro každý metrický prostor Y a každou uzavřenou množinu $A \subset Y$, každé spojité zobrazení $f\colon A \to X$ prodloužitelné na Y.

Některé důležité vlastnosti můžeme shrnout následovně

- Jestliže je X absolutní retrakt a A je retrakt prostoru X, pak je A absolutní retrakt.
- X je absolutní retrakt právě tehdy, když je retrakt nějakého normovaného prostoru.

- Jestliže X_1 a X_2 jsou uzavřené absolutní retrakty takové, že $X_1 \cap X_2$ je absolutní retrakt, pak $X_1 \cup X_2$ je absolutní retrakt.
- Každý absolutní retrakt X je kontraktibilní.

2.3. Greenova funkce

V této části budeme uvažovat následující okrajovou úlohu v $\mathbb{R}^n$:

$$Lu(t) = f(t), \quad a \leq t \leq b, \quad a, b \in \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

kde L je obyčejný lineární diferenciální operátor druhého řádu s konstantními koeficienty a $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ je lebesgueovsky měřitelná funkce v $a \leq t \leq b$, s homogenními okrajovými podmínkami

$$u(a) = 0, \quad u(b) = 0. \tag{2.2}$$

Dále uvažujme homogenní úlohu příslušnou úloze (2.1), tj. pro $f(t) \equiv 0$:

$$Lu(t) = 0, \quad a \leq t \leq b, \quad a, b \in \mathbb{R}, \tag{2.3}$$

Definice 2.13. Funkce $G\colon \langle a,b\rangle \times \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ je *Greenovou funkcí* úlohy (2.3), (2.2), jestliže

(i) $G \in C(\langle a,b\rangle \times \langle a,b\rangle)$,

(ii) $\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)$ je spojitá na trojúhelnících $a \leq t < s \leq b$, $a \leq s < t \leq b$ a

$$\lim_{t\to s^+} \frac{\partial G(t,s)}{\partial t} - \lim_{t\to s^-} \frac{\partial G(t,s)}{\partial t} = 1, \forall s \in \langle a,b\rangle,$$

(iii) $G(\cdot,s)$ je pro každé $s \in \langle a,b\rangle$ řešení (2.3), (2.2) na $\langle a,s)$ a $(s,b\rangle$.

Uvedeme nyní tvrzení známé jako Fredholmova alternativa:

Propozice 2.5. (viz např. [22], [70])*Jestliže homogenní okrajová úloha příslušná úloze (2.1), (2.2), tj. úloha (2.3), (2.2) , má pouze triviální řešení, pak (2.1), (2.2) má právě jedno řešení, které je dáno vztahem*

$$u(t) = \int_a^b G(t,s) f(s)\mathrm{d}s,$$

kde $G\colon [a,b]\times[a,b]\to\mathbb{R}$ je Greenova funkce okrajové úlohy (2.3), (2.2).

2.4. Použité standardní věty z matematické analýzy

V této podkapitole připomeneme některé věty matematické analýzy, které budeme později v této práci používat.

Lemma 2.6 (Arzelà-Ascoli)**.** *(viz např. [57, str. 394], [66, Věta 2.18]) Množina $K\subset C^1(J,\mathbb{R}^n)$ je relativně kompaktní právě tehdy, když je stejnoměrně omezená a funkce v K a jejich derivace jsou stejně spojité.*

Propozice 2.6 (Mazurova věta)**.** *(viz např. [57, Věta 3.13]) Nechť X je normovaný prostor a posloupnost $\{x_n\}\subset X$ slabě konverguje k $x\in X$. Pak existuje posloupnost lineárních kombinací $y_m=\sum_{k=1}^{m}a_{m_k}x_k$, kde $a_{m_k}\geq 0$, pro $k=1,2,\ldots m$, a $\sum_{k=1}^{m}a_{m_k}=1$, která je silně konvergentní.*

Propozice 2.7 (Lebesgueova dominantní věta o konvergenci)**.** *(viz např. [66, Věta 9.13], [61, str. 40]) Předpokládejme, že $\{f_n\}$ je posloupnost měřitelných funkcí takových, že $f_n\to f$ bodově téměř všude, když $n\to\infty$, a že $|f_n|\leq g$ pro všechna n, kde g je integrovatelná. Pak je f integrovatelná a*

$$\int f\mathrm{d}\mu=\lim_{n\to\infty}\int f_n\mathrm{d}\mu.$$

Část I

Diferenciální inkluze

3 Úvod

V případě, kdy je pravá strana dané úlohy spojitá, můžeme uvažovat klasické hladké řešení. V případě, že je pravá strana spojitá v prostorové proměnné a nespojitá v časové proměnné, je vhodným pojmem řešení Carathéodoryovo (tj. absolutně spojité) řešení. Na druhé straně, pojem klasické ani Carathéodoryovo řešení není dostačující za předpokladu, kdy se nespojitosti objeví v prostorové (stavové) proměnné. Existuje několik přístupů k řešení právě takovýchto nespojitých diferenciálních rovnic. Jedním z nich je spojitá aproximace nespojitostí za účelem získání standardních diferenciálních rovnic. Tento přístup je použit např. v [16]. Jiná z cest spočívá ve využití Filippovovy teorie, kdy je úloha s nespojitostmi přeformulována na diferenciální inkluzi (viz např. [31]), kterou i my v této práci použijeme. Více teorie diferenciálních inkluzí lze nalézt např. v [14], [25].

V případě, kdy je pravá strana úlohy nespojitá v prostorové proměnné, je tedy pojem *Carathéodoryova řešení* nedostačující. Vhodným typem je *Filippovovo řešení*, což je Carathédoryovo řešení, ale příslušné diferenciální inkluze s filippovovsky regularizovanou pravou stranou (např. [8], [31], [65], [76]).

Použijeme-li Kakutaniho-Ky Fanovu větu o pevném bodě (např. [27, Věta II.8.4]), obdržíme v naší práci vedle existence také explicitní odhady řešení a jejich derivací. Kritéria existence mohou být založena na růstových nebo znaménkových podmínkách na pravou stranou dané úlohy, nebo na jejich kombinaci. My se striktně zaměříme na růstové podmínky. Můžeme formulovat kritéria taková, že se nespojité členy pravé strany mohou chovat libovolně vně oblastí, které jsou charakterizovány těmito odhady. Proto můžeme také definovat ořezaná zobrazení těchto nespojitých členů, která jsou s nimi identická uvnitř těchto oblastí. Ve vektorovém případě je toto ořezání nejnázornější za použití rektraktů.

V první části této práce se zaměříme na vektorový případ, kdy nespojitosti mohou být komplikovanější, v další kapitole se pak omezíme na skalární mnohoznačný Dirichletův problém, jehož typickou motivací jsou problémy se suchým třením ($\sim \operatorname{sgn} x'$).

4 Filippovovo řešení Dirichletových vektorových problémů

Uvažujme tedy vektorový Dirichletův problém (1.1), kde a, b a $T > 0$ jsou reálné konstanty, $x_0, x_T \in \mathbb{R}^n$, $P\colon J \multimap \mathbb{R}^n$ je aumannovsky (po složkách) integrovatelné zobrazení, $J = [0, T]$ je kompaktní interval, vektorové funkce $f_1\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f_2\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jsou měřitelné a lokálně omezené.

Změnou proměnných $y(t) = x(t) - v(t)$, kde $v(t) = \dfrac{x_T - x_0}{T} t + x_0$, *homogenizujeme* okrajové podmínky. Můžeme tak ihned vidět, že $x(t)$ je řešením úlohy (1.1) právě tehdy, když $y(t)$ splňuje

$$\left.\begin{array}{l} y''(t) + a\,(y'(t) + v'(t)) + b\,(y(t) + v(t)) \in P(t) + f_1(y(t) + v(t)) + \\ \qquad\qquad + f_2(y'(t) + v'(t)), \quad \text{pro skoro všechna } t \in J, \\ y(0) = 0,\, y(T) = 0. \end{array}\right\} \tag{4.1}$$

Každý také může snadno zkontrolovat, že $||v(t)|| \le k_2 := \max\{||x_0||, ||x_T||\}$, pro všechna $t \in J$, a $||v'(t)|| = k_3 := \dfrac{||x_T - x_0||}{T}$, pro všechna $t \in J$.

Naším cílem je dokázat existenční a lokalizační věty pro úlohu (1.1). Vzhledem k tomu, že požadované postačující podmínky mají sklon ke tvaru růstových omezení, začneme s úlohou zahrnující ořezaná zobrazení k zobrazením f_1, f_2. Nejprve tato ořezená zobrazení definujeme. Za tímto účelem, vzhledem k tomu, že je uzavřená koule $\overline{B}_D := \{z \in \mathbb{R}^n \mid ||z|| \le D\}$ absolutní rektrakt, kde je konstanta D taková, že $D = D_0 + k_2 + k_3$, $D_0 > 0$ je vhodná konstanta, která bude později stanovena a k_2, k_3 jsou definovány výše, existuje spojitá retrakce $r\colon \mathbb{R}^n \to \overline{B}_D$ taková, že $r(x) = x$, pro každé $x \in \overline{B}_D$ (viz Kapitola 2, nebo pro více detailů viz např. [8, Kapitola I.2]). Ořezaná zobrazení f_1^*, f_2^* k f_1, f_2 jsou pak definována následovně ($i = 1, 2$):

$$f_i^*(z) := \begin{cases} f_i(z), & \text{pro } ||z|| \le D, \\ f_i(r(z)), & \text{pro } ||z|| \ge D. \end{cases}$$

Zjevně, $f_1|_{\overline{B}_D}\colon \overline{B}_D \to \mathbb{R}^n$ a $f_2|_{\overline{B}_D}\colon \overline{B}_D \to \mathbb{R}^n$ jsou měřitelné a lokálně omezené. Tudíž, totéž platí i pro zobrazení $f_1^*, f_2^*\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, která jsou uvedena výše.

Poznamenejme, že v tom případě, $f_1^*(z+v(t)) = f_1(z+v(t))$, pro $||z|| \le D_0$, a $f_2^*(z+v'(t)) = f_2(z+v'(t))$, pro $||z|| \le D_0$.

Vzhledem k výše uvedeným zobrazením f_1^*, f_2^*, formulujme nyní úlohu zahrnující ořezaná zobrazení:

$$\left.\begin{aligned} &y''(t)+ay'(t)+by(t) \in P(t)-av'(t)-bv(t)+f_1^*(y(t)+v(t))+\\ &\qquad\qquad +f_2^*(y'(t)+v'(t)), \quad \text{pro skoro všechna } t \in J,\\ &y(0)=0,\, y(T)=0. \end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

Jelikož jsou funkce $f_1^*(\cdot), f_2^*(\cdot)$ nespojité v prostorové proměnné, úloha (4.2) nemusí mít *Carathéodoryovo řešení*, tj. funkci $y\colon J \to \mathbb{R}^n$ s absolutně spojitou první derivací na J, splňující (4.2), pro skoro všechna $t \in J$. Z tohoto důvodu potřebujeme jiný pojem vhodného řešení, a to řešení ve Filippovově smyslu. Za tímto účelem užijeme pojetí Filippovovy regularizace (viz [31]) prostorově nespojitých zobrazení. Přesněji, aplikací Definice 2.8 na pravou stranu zahrnující prostorové nespojitosti, můžeme hovořit o *řešení ve Filippovově smyslu* původní úlohy, za předpokladu, že je to Carathéodoryovo řešení mnohoznačné úlohy s filippovovsky regularizovanou pravou stranou.

V naší situaci, funkce, které mají být regularizovány, jsou funkce $f_1^*(\cdot), f_2^*(\cdot)$. Na základě Filippovovy regularizace zobrazení $f_1^*(\cdot), f_2^*(\cdot)$ obdržíme mnohoznačná zobrazení $F_1(\cdot), F_2(\cdot)$ definována následujícím způsobem:

$$F_1(x) = \bigcap_{\delta_1>0}\ \bigcap_{\mu(N)=0} \overline{\operatorname{conv}}\, f_1^*(B(x,\delta_1)\backslash N),$$

$$F_2(y) = \bigcap_{\delta_2>0}\ \bigcap_{\mu(M)=0} \overline{\operatorname{conv}}\, f_2^*(B(y,\delta_2)\backslash M).$$

Poznamenejme, že F_1 a F_2 jsou lokálně omezená shora polospojitá zobrazení s neprázdnými, kompaktními a konvexními hodnotami.

Tudíž, užitím Filippovovy teorie, je úloha (4.2) přeformulována na úlohu

$$\left.\begin{array}{l} y''(t)+ay'(t)+by(t)\in P(t)-av'(t)-bv(t)+F_1(y(t)+v(t))+ \\ \qquad\qquad +F_2(y'(t)+v'(t)), \quad \text{pro skoro všechna } t\in J, \\ y(0)=0,\, y(T)=0. \end{array}\right\} \tag{4.3}$$

Filippovovým řešením úlohy (4.2) rozumíme funkci $y(\cdot)\colon J\to\mathbb{R}^n$ s absolutně spojitou první derivací na J, splňující úlohu (4.3) skoro všude na J.

Proto pojďme najít vhodné podmínky řešitelnosti úlohy (4.3). Rozlišíme dva případy, takové, že formálně oddělíme lineární diferenciální operátor (Podkapitola 4.1) a mnohoznačnou perturbaci (Podkapitola 4.2).

4.1. Případ jednočlenného lineárního diferenciálního operátoru

Nejprve se budeme zabývat úlohou formálně zapsanou následovně:

$$\left.\begin{array}{l} y''(t)\in F(t,y(t),y'(t)), \quad \text{pro s. v. } t\in J, \\ y(0)=0,\, y(T)=0, \end{array}\right\} \tag{4.4}$$

kde $F(t,y(t),y'(t)) := P(t)+F_1(y(t)+v(t))+F_2(y'(t)+v'(t))-a(y'(t)+v'(t))-b(y(t)+v(t))$, tj. $F\colon J\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \multimap \mathbb{R}^n$ je u-carathéodoryovské mnohoznačné zobrazení a $Ly(t):=y''(t)$.

Pro řešitelnost mnohoznačné nelineární úlohy (4.4) užijeme princip Schauderovy linearizace. Tudíž parametrizujeme pravou stranu F, abychom získali jednoparametrickou třídu lineárních úloh. Nechť

$$Q := \{u\in C^1(J,\mathbb{R}^n), ||u||_{C^1}\le D_0\}$$

je množina kandidátů řešení, kde $||u||_{C^1} := \sup\{||u(t)||+||u'(t)||, t\in J\}$ a $D_0>0$ je vhodná konstanta.

Pak dostáváme, pro každé $q\in Q$, úplně linearizovanou úlohu

$$\left.\begin{array}{l} y''(t)\in F_q(t), \quad \text{pro s. v. } t\in J, \\ y(0)=0,\, y(T)=0, \end{array}\right\} \tag{4.5}$$

kde $F_q(t) = P(t) + F_1(q(t)+v(t)) + F_2(q'(t)+v'(t)) - a\,(q'(t)+v'(t)) - b\,(q(t)+v(t))$. Zjevně, $F_q \colon J \multimap \mathbb{R}^n$ je, pro každé $q \in Q$, aumannovsky integrovatelná funkce proměnné t.

Z Lemmatu 2.3 plyne existence alespoň jedné měřitelné selekce $f_q \subset F_q$ mnohoznačné kompozice $F_q(t)$. Tudíž můžeme uvažovat jednoznačný lineární Dirichletův problém

$$\left.\begin{array}{l} y''(t) = f_q(t), \quad \text{pro s. v. } t \in J, \\ y(0) = 0, y(T) = 0. \end{array}\right\} \tag{4.6}$$

Homogenní úloha příslušející úloze (4.6)

$$\left.\begin{array}{l} y''(t) = 0, \quad \text{pro s. v. } t \in J, \\ y(0) = 0, y(T) = 0. \end{array}\right\} \tag{4.7}$$

má jediné (triviální) řešení. Proto plyne z Fredholmovy alternativy (viz Propozice 2.5) existence jediného Carathéodoryova řešení $y(\cdot)$ úlohy (4.6), které má tvar

$$y(t) = \int_0^T G_1(t,s)\, f_q(s)\,\mathrm{d}s,$$

kde G_1 je Greenova funkce úlohy (4.7), kterou nyní odvodíme:

1) Greenova funkce je podle Definice 2.13 (iii) řešením (4.7). Jestliže $t \neq s$, pak obecné řešení je tvaru $G_1(t,s) = c_1 + c_2\, t$.

   Pro $t < s$ z okrajové podmínky v $t = 0$ plyne

   $$G_1(0,s) = c_1 + c_2 \cdot 0 = 0, \text{ tedy} \quad c_1 = 0.$$

   Pro $t > s$ z okrajové podmínky v $t = T$ plyne

   $$G_1(T,s) = c_3 + c_4 \cdot T = 0, \text{ tedy} \quad c_3 = -\,c_4\, T.$$

   Shrnutím dosavadních výsledků máme

   $$G_1(t,s) = \begin{cases} c_2\, t, & \text{pro všechna } 0 \le t \le s \le T, \\ c_4\,(t-T), & \text{pro všechna } 0 \le s \le t \le T. \end{cases}$$

2) Nyní určíme c_2 a c_4. Ze spojitosti G_1 v $t = s$:

$$c_2 s = c_4 (s - T).$$

Využitím druhé podmínky z (ii) Definice 2.13:

$$c_4 - c_2 = 1.$$

Vyřešením těchto dvou rovnic vzhledem k c_2, c_4 obdržíme

$$c_2 = \frac{s-T}{T}, \quad c_4 = \frac{s}{T}.$$

Tedy Greenova funkce úlohy (4.7) má tvar

$$G_1(t,s) = \begin{cases} \frac{t(s-T)}{T}, & \text{pro všechna } 0 \le t \le s \le T, \\ \\ \frac{s(t-T)}{T}, & \text{pro všechna } 0 \le s \le t \le T. \end{cases} \tag{4.8}$$

Každý může snadno zkontrolovat, že $|G_1(t,s)| \le \dfrac{T}{4}$, pro všechna $t,s \in [0,T]$.

Ve skutečnosti, jelikož je mnohoznačná kompozice $F_q(t)$, pro každé $q \in Q$, zjevně měřitelná, vzhledem k Propozici 2.1, můžeme dokonce psát

$$y(t) \in \int_0^T G_1(t,s) \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_{n,q}(s)} \, \mathrm{d}s,$$

kde $\left\{ f_{n,q}(t) \subset F_q(t) \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ je posloupnost měřitelných selekcí kompozice F_q a integrál je chápán v Aumannově smyslu.

Poznamenejme, že jelikož

$$\frac{\partial G_1}{\partial t}(t,s) = \begin{cases} \frac{(s-T)}{T}, & \text{pro všechna } 0 \le t \le s \le T, \\ \\ \frac{s}{T}, & \text{pro všechna } 0 \le s \le t \le T, \end{cases} \tag{4.9}$$

máme také

$$y'(t) \in \int_0^T \frac{\partial G_1}{\partial t}(t,s) \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f_{n,q}(s)} \mathrm{d}s,$$

kde integrál je opět rozumněn v Aumannově smyslu. Navíc, $\left|\frac{\partial G_1}{\partial t}(t,s)\right| \leq 1$, pro všechna $t,s \in [0,T]$.

Proto, označením $\varphi\colon Q \multimap C^1(J,\mathbb{R}^n)$ operátoru řešení úlohy (4.5), kde

$$\varphi := \int_0^T G_1(t,s)F_q(s)\mathrm{d}s = \int_0^T G_1(t,s)\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_{n,q}(s)}\mathrm{d}s,$$

můžeme místo existence řešení diferenciálního problému (4.5) ekvivalentně vyšetřovat existenci pevného bodu mnohoznačného operátoru φ. Za tímto účelem použijeme Kakutaniho–KyFanovu větu o pevném bodě (Propozice 2.2). Tímto způsobem dokážeme následující větu.

Věta 4.1. *Nechť a,b a $T > 0$ jsou reálné konstanty takové, že*

$$\frac{4}{T(T+4)} > \max\{|a|,|b|\}, \tag{4.10}$$

$x_0, x_T \in \mathbb{R}^n$ a $J = [0,T]$ je kompaktní interval. Předpokládejme, že $P\colon J \multimap \mathbb{R}^n$ je aumannovsky integrovatelné mnohoznačné zobrazení, $f_1|_{\overline{B}_D}\colon \overline{B}_D \to \mathbb{R}^n$ a $f_2|_{\overline{B}_D}\colon \overline{B}_D \to \mathbb{R}^n$ jsou měřitelná a lokálně omezená zobrazení taková, že

$$||f_1(x)|| \leq M_1(D_0), \quad \textit{pro} \quad ||x|| \leq D,$$

$$||f_2(y)|| \leq M_2(D_0), \quad \textit{pro} \quad ||y|| \leq D,$$

kde $\overline{B}_D := \{z \in \mathbb{R}^n \mid ||z|| \leq D\}$, $M_1 = M_1(D_0)$ a $M_2 = M_2(D_0)$ jsou vhodné konstanty, $D = D_0 + k_2 + k_3$. Dále předpokládejme, že $D_0 > 0$ je vhodná konstanta taková, že

$$D_0 \geq \Delta_1(D_0), \tag{4.11}$$

kde

$$\Delta_1(D_0) = \frac{[\mathscr{P} + T\,(M_1(D_0) + M_2(D_0) + |a|k_3 + |b|k_2)]\,(T+4)}{4 - k_1T(T+4)} \tag{4.12}$$

a

$$k_1 := \max\{|a|,|b|\}, \quad k_2 := \max\{||x_0||,||x_T||\}, \quad k_3 := \frac{||x_T - x_0||}{T},$$

$$\mathscr{P} := \sup_{p \subset P} \left\{ \int_0^T ||p(t)|| \mathrm{d}t \mid p \subset P \textit{ je lebesgueovsky integrovatelná selekce} \right.$$

$$\left. \textit{zobrazení } P \right\}.$$

Pak má úloha (1.1) Filippovovo řešení $x(\cdot)$ takové, že $||x(t)|| + ||x'(t)|| \leq D$ pro $t \in J$.

Důkaz. Ověříme, že jsou splněny všechny předpoklady Propozice 2.2.

(i) Jelikož je úloha (4.6) jednoznačně řešitelná, je množina $\varphi(Q)$ neprázdná.

(ii) Dokažme, že je množina $\varphi(Q)$, tj. množina řešení úlohy (4.5), relativně kompaktní. Vzhledem k dobře známému Arzelá–Ascoli lemmatu, je množina řešení relativně kompaktní v $C^1(J,\mathbb{R}^n)$ právě tehdy, když je stejnoměrně omezená a stejně spojitá, obojí v C^1-normě.

a) Ukažme, že je množina řešení úlohy (4.5) stejnoměrně omezená v $C^1(J,\mathbb{R}^n)$. Nechť $u(\cdot)$ je řešení úlohy (4.5) a $f_q \subset F_q$ je měřitelná selekce kompozice F_q. Existence měřitelné selekce je zaručena Lemmatem 2.3 a poté $u(\cdot)$ má tvar

$$u(t) = \int_0^T G_1(t,s) f_q(s) \mathrm{d}s.$$

Je zřejmé, že pro $||z|| \leq D_0$ platí

$$||f_1(z+v(t))|| = ||f_1^*(z+v(t))|| = ||F_1(z+v(t))|| \leq M_1(D_0),$$
$$||f_2(z+v'(t))|| = ||f_2^*(z+v'(t))|| = ||F_2(z+v'(t))|| \leq M_2(D_0),$$

kde $v(t) = \frac{x_T - x_0}{T} t + x_0$ a $v'(t) = \frac{x_T - x_0}{T}$.

Pomocí Lemmatu 2.3 a vzhledem k (5.8), (5.9) obdržíme, pro libovolné

$t \in J$, následující odhad:

$$||u(t)|| + ||u'(t)|| = \left|\left|\int_0^T G_1(t,s)\, f_q(s)\mathrm{d}s\right|\right| + \left|\left|\int_0^T \frac{\partial G_1}{\partial t}(t,s)\, f_q(s)\mathrm{d}s\right|\right|$$

$$\leq \left(\frac{T}{4}+1\right)\int_0^T \left|\left|f_q(s)\right|\right|\mathrm{d}s$$

$$\leq \left(\frac{T}{4}+1\right)\int_0^T ||f_{1,Sel}(q(s)+v(s))|| + ||f_{2,Sel}(q'(s)+v'(s))||$$

$$+||a\,(q'(s)+v'(s))|| + ||b\,(q(s)+v(s))|| + ||p(s)||\mathrm{d}s$$

$$\leq \left(\frac{T}{4}+1\right)\Big[T\,(M_1(D_0)+M_2(D_0)+|a|k_3+|b|k_2)$$

$$+k_1\int_0^T ||q(s)||+||q'(s)||\mathrm{d}s + \mathscr{P}\Big]$$

$$\leq \left(\frac{T}{4}+1\right)[\mathscr{P}+T(M_1(D_0)+M_2(D_0)+|a|k_3+|b|k_2+k_1D_0)],$$

kde $f_{1,Sel} \subset F_1$, $f_{2,Sel} \subset F_2$ a $p \subset P$ jsou příslušné měřitelné selekce.

Jelikož je tento odhad splněn stejným způsobem pro všechna $q \in Q$, znamená to, že řešení $u(\cdot)$ úlohy (4.5), tj. množina $\varphi(Q)$, je stejnoměrně omezená v C^1-normě.

Navíc, vzhledem k (4.10), (4.12), jestliže existuje kladná konstanta D_0 taková, že

$$D_0 \geq \Delta_1(D_0),$$

pak množina $\varphi(Q)$ splňuje, že $\varphi(Q) \subset Q$.

b) Nyní ukažme, že prvky množiny $\varphi(Q)$, tj. řešení $u(\cdot)$ úlohy (4.5), jsou stejně spojitá v C^1-normě. Pro libovolná $t_1, t_2 \in J$ taková, že $t_1 < t_2$, dostaneme pomocí Lemmatu 2.3 a vzhledem k (5.9), že

$$||u(t_2)\ -\ u(t_1)|| = \left|\left|\int_{t_1}^{t_2} u'(t)\mathrm{d}t\right|\right| = \left|\left|\int_{t_1}^{t_2}\int_0^T \frac{\partial G_1}{\partial t}(t,s) f_q(s)\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\right|\right|$$

$$\leq \int_{t_1}^{t_2}\int_0^T \left|\frac{\partial G_1}{\partial t}(t,s)\right| ||f_q(s)||\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \leq \int_{t_1}^{t_2}\int_0^T ||f_q(s)||\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$$

$$\leq (t_2 - t_1)\,[\mathscr{P} + T\,(M_1(D_0) + M_2(D_0) + k_1 D_0 + |a|k_3 + |b|k_2)]\,.$$

Navíc dále platí

$$||u'(t_2)\ -\ u'(t_1)|| = \left|\left|\int_{t_1}^{t_2} u''(t)\mathrm{d}t\right|\right| = \left|\left|\int_{t_1}^{t_2} f_q(t)\mathrm{d}t\right|\right| \leq \int_{t_1}^{t_2} \big|\big|f_q(t)\big|\big|\mathrm{d}t$$

$$\leq (t_2 - t_1)\,[M_1(D_0) + M_2(D_0) + k_1 D_0 + |a|k_3 + |b|k_2]$$
$$+ \int_{t_1}^{t_2} ||p(t)||\mathrm{d}t.$$

Proto jsou řešení $u(\cdot)$ úlohy (4.5) stejně spojitá v C^1-normě. Shrnutím a) a b) jsou prvky množiny $\varphi(Q)$ relativně kompaktní v C^1-normě, jak bylo tvrzeno.

(iii) Dále ukážeme, že operátor φ je shora polospojitý. Vzhledem k Lemmatu 2.2, a jelikož bylo ukázáno, že φ je kompaktní, je dostačující ukázat, že je graf Γ_φ uzavřený. Nechť $\{(q_k, u_k)\} \subset \Gamma_\varphi$ je posloupnost taková, že $\{(q_k, q'_k, u_k)\} \to (q, q', u)$, kde $q \in Q$. Pro všechna $k \in \mathbb{N}$ a skoro všechna $t \in J$, je posloupnost $\{u'_k\}$ omezená a $||u''_k(t)|| \leq ||p(t)|| + M_1(D_0) + M_2(D_0) + k_1 D_0 + |a|k_3 + |b|k_2$, pro skoro všechna $t \in J$. Posloupnost $\{w_k := u'_k\}$ tak splňuje všechny předpoklady Lemmatu 2.4.

Tudíž aplikací Lemmatu 2.4 na posloupnost $\{w_k := u'_k\}$ dostaneme, že existuje podposloupnost $\{u'_k\}$, pro jednoduchost označena stejně jako posloupnost, která konverguje stejnoměrně k u' na J a taková, že $\{u''_k\}$ konverguje slabě k u'' v $L^1(J, \mathbb{R}^n)$.

Jestliže položíme $z_k := (u_k, w_k)$, pak $z_k' = (u_k', w_k') = (u_k', u_k'') \to (u', u'')$, slabě v $L^1(J, \mathbb{R}^{2n})$. Uvažujme systém

$$z_k'(t) \in H(t, q_k(t), q_k'(t)), \quad \text{pro skoro všechna} \quad t \in J,$$

kde $z_k'(t) = (u_k'(t), w_k'(t))$ a $H(t, q_k(t), q_k'(t)) = (w_k, F_{q_k}(t))$.

Užitím Lemmatu 2.5, pro $f_i := z_k'$, $f := (u', u'')$, $x_i := (q_k, q_k')$, platí, že

$$(u'(t), u''(t)) \in H(t, q(t), q'(t)), \text{ pro skoro všechna } t \in J,$$

tj.

$$u''(t) \in F_q(t), \text{ pro skoro všechna } t \in J.$$

Množina $\varphi(Q)$ je relativně kompaktní a graf Γ_φ je uzavřený. Proto je φ shora polospojité, kompaktní a, konkrétně, s kompaktními hodnotami.

(iv) Nakonec ukážeme, že zobrazení φ má konvexní hodnoty.

Nechť u_1, u_2 jsou dvě různá řešení úlohy (4.5) sdružená s měřitelnými selekcemi $f_{1,q}, f_{2,q} \subset F_q$. Pak, pro všechna $t \in J$, dostáváme

$$u_1(t) = \int_0^T G_1(t,s)\, f_{1,q}(s) \mathrm{d}s,$$

$$u_2(t) = \int_0^T G_1(t,s)\, f_{2,q}(s) \mathrm{d}s.$$

Nechť je $\lambda \in [0,1]$ libovolné. Jelikož F má konvexní hodnoty, platí to i pro F_q, a následně

$$f_q(t) = \lambda\, f_{1,q}(t) + (1-\lambda)\, f_{2,q}(t)$$

musí být měřitelná selekce F_q, tj. $f_q \subset F_q$. Dále platí

$$\begin{aligned} u(t) &= \lambda\, u_1(t) + (1-\lambda)\, u_2(t) \\ &= \lambda \int_0^T G_1(t,s)\, f_{1,q}(s) \mathrm{d}s + (1-\lambda) \int_0^T G_1(t,s)\, f_{2,q}(s) \mathrm{d}s \\ &= \int_0^T G_1(t,s)\, [\lambda\, f_{1,q}(s) + (1-\lambda)\, f_{2,q}(s)] \mathrm{d}s = \int_0^T G_1(t,s)\, f_q(s) \mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Tedy $u(\cdot)$ musí být také řešení úlohy (4.5), z čehož vyplývá, že φ má konvexní hodnoty.

Konečně, užitím Propozice 2.2, obdržíme existenci pevného bodu mnohoznačného zobrazení φ, které reprezentuje řešení úlohy (4.3). Nicméně, vzhledem k definicích Filippovova řešení a ořezaných zobrazení f_1^*, f_2^*, musí být toto řešení také řešením úloh (4.2), (4.1) jakož i (1.1). $\square$

Poznámka 4.1. Jestliže je navíc mnohoznačné zobrazení P esenciálně omezené, pak může být podmínka (4.10) nahrazena

$$\frac{8}{T(T+4)} > \max\{|a|,|b|\}$$

a (4.11) s $\Delta_1(D_0)$ v (4.12) může být nahrazena

$$\widetilde{D}_0 \geq \Delta_1'(\widetilde{D}_0)$$

s

$$\Delta_1'(\widetilde{D}_0) := \frac{\left[\mathscr{P}_1 + M_1(\widetilde{D}_0) + M_2(\widetilde{D}_0) + |a|k_3 + |b|k_2\right] T\ (T+4)}{8 - k_1 T\ (T+4)},$$

kde $\mathscr{P}_1 := \operatorname{ess\,sup}_{\mathrm{t}\in\mathrm{J}} ||\mathrm{P(t)}||$, protože $\int\limits_0^T |G_1(t,s)|\mathrm{d}s \leq \frac{T^2}{8}$ a $\int\limits_0^T \left|\frac{\partial G_1}{\partial t}(t,s)\right| \mathrm{d}s \leq \frac{T}{2}$. Pak platí stejný závěr pro (1.1) s D nahrazeným $\widetilde{D} = \widetilde{D}_0 + k_2 + k_3$.

Poznámka 4.2. Netriviální případy splnění implicitních podmínek (4.11), (4.12), resp. jejich analogií v Poznámce 4.1 budou uvedeny v Podkapitole 4.3.

4.2. Případ úplného lineárního diferenciálního operátoru

V této části práce budeme znovu vyšetřovat existenci řešení úlohy (1.1), ale tentokrát budeme uvažovat úplný lineární diferenciální operátor na levé straně daného problému, tj.

$$\left.\begin{array}{l} y''(t)+ay'(t)+by(t)\in F(t,y(t),y'(t)), \quad \text{pro s. v. } t\in J,\\ y(0)=0, y(T)=0, \end{array}\right\} \tag{4.13}$$

kde $F(t,y(t),y'(t)) = P(t)+F_1(y(t)+v(t))+F_2(y'(t)+v'(t))-av'(t)-bv(t)$, tj. $F : J\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \multimap \mathbb{R}^n$ je u-carathéodoryovské mnohoznačné zobrazení a $Ly(t) := y''(t) + ay'(t)+by(t)$.

V naší úloze jsou a a b reálné konstanty, ne matice, můžeme tedy s výhodou využít explicitní tvary Greenových funkcí. Nyní připomeneme tvary příslušných Greenových funkcí. Rozlišíme tři případy, kdy charakteristická rovnice vztahující se k úplnému lineárnímu diferenciálnímu operátoru má dva různé reálné kořeny, jeden dvojnásobný reálný kořen, nebo dva komplexní kořeny.

1) Jestliže $a^2-4b>0$, pak má charakteristická rovnice dva různé reálné kořeny $\lambda_1 = \frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2}$. Přímým výpočtem dostaneme, že Greenova funkce má tvar

$$G_2(t,s) = \begin{cases} \frac{e^{\lambda_1 t}e^{-\lambda_2 s}[1-e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}][e^{(\lambda_2-\lambda_1)s}-e^{(\lambda_2-\lambda_1)T}]}{(\lambda_2-\lambda_1)[1-e^{(\lambda_2-\lambda_1)T}]}, & \text{pro všechna } 0\le t\le s\le T,\\[2ex] \frac{e^{\lambda_1 t}e^{-\lambda_2 s}[1-e^{(\lambda_2-\lambda_1)s}][e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}-e^{(\lambda_2-\lambda_1)T}]}{(\lambda_2-\lambda_1)[1-e^{(\lambda_2-\lambda_1)T}]}, & \text{pro všechna } 0\le s\le t\le T. \end{cases} \tag{4.14}$$

2) Jestliže $a^2-4b=0$, pak má charakteristická rovnice jeden dvojnásobný kořen $\lambda=-\frac{a}{2}$ a Greenova funkce je

$$G_3(t,s) = \begin{cases} \frac{t(s-T)}{T}e^{\lambda(t-s)}, & \text{pro všechna } 0\le t\le s\le T,\\[2ex] \frac{s(t-T)}{T}e^{\lambda(t-s)}, & \text{pro všechna } 0\le s\le t\le T. \end{cases} \tag{4.15}$$

3) Jestliže $a^2-4b<0$, pak má charakteristická rovnice dva komplexně sdružené kořeny $\lambda_1 = \frac{-a+i\sqrt{4b-a^2}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{-a-i\sqrt{4b-a^2}}{2}$. Označíme jejich reálnou část jako

α a imaginární část jako β. Proto je $\alpha := -\frac{a}{2}$, $\beta := \frac{\sqrt{4b-a^2}}{2}$. V tomto případě má Greenova funkce tvar

$$G_4(t,s) = \begin{cases} \frac{e^{\alpha(t-s)}\sin(\beta t)\sin(\beta(s-T))}{\beta\sin(\beta T)}, & \text{pro všechna } 0 \le t \le s \le T, \\ \frac{e^{\alpha(t-s)}\sin(\beta s)\sin(\beta(t-T))}{\beta\sin(\beta T)}, & \text{pro všechna } 0 \le s \le t \le T. \end{cases} \tag{4.16}$$

V případech 1) a 2) má homogenní jednoznačná úloha příslušná úloze (4.13), tj. pro $F \equiv 0$, právě jedno triviální řešení pro všechna $T > 0$. Ve třetím případě je situace komplikovanější: problém má pouze triviální řešení právě tehdy, když je determinant

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ e^{\alpha T}\sin(\beta T) & e^{\alpha T}\cos(\beta T) \end{vmatrix} = -e^{\alpha T}\sin(\beta T)$$

nenulový, tj. $T \neq \frac{k\pi}{\beta}$, pro všechna $k \in \mathbb{Z}$.

Jako v Podkapitole 4.1 můžeme místo existence řešení diferenciálního problému (4.13) vyšetřovat existenci pevných bodů mnohoznačných operátorů $\varphi_j\colon Q \multimap C^1(J,\mathbb{R}^n)$, kde $Q := \{u \in C^1(J,\mathbb{R}^n), ||u||_{C^1} \le D_0\}$, D_0 je vhodná konstanta,

$$\varphi_j := \int_0^T G_j(t,s)F_q(s)\mathrm{d}s, \quad j = 2,3,4,$$

a $F_q(t)$ opět označuje kompozici zobrazení F s $q \in Q$.

Užitím odhadů

$$|G_2(t,s)| \le \frac{e^{(\lambda_1-\lambda_2)T}}{\sqrt{a^2-4b}}, \quad \left|\frac{\partial G_2}{\partial t}(t,s)\right| \le \frac{[|\lambda_1|+|\lambda_2|]\,e^{(\lambda_1-\lambda_2)T}}{\sqrt{a^2-4b}}, \tag{4.17}$$

$$|G_3(t,s)| \le \frac{T}{4}e^{\frac{|a|}{2}T}, \quad \left|\frac{\partial G_3}{\partial t}(t,s)\right| \le \left[1+\frac{|a|}{2}T\right]e^{\frac{|a|}{2}T},$$

$$|G_4(t,s)| \leq \frac{2\mathrm{e}^{\frac{|a|}{2}T}}{\sqrt{4b-a^2}\left|\sin\left(\frac{T}{2}\sqrt{4b-a^2}\right)\right|},$$

$$\left|\frac{\partial G_4}{\partial t}(t,s)\right| \leq \frac{\left[|a|+\sqrt{4b-a^2}\right]\mathrm{e}^{\frac{|a|}{2}T}}{\sqrt{4b-a^2}\left|\sin\left(\frac{T}{2}\sqrt{4b-a^2}\right)\right|},$$

jsme schopni podobně jako ve Větě 4.1 dostat následující existenční a lokalizační výsledek.

Věta 4.2. *Nechť a, b a $T > 0$ jsou reálné konstanty, $x_0, x_T \in \mathbb{R}^n$ a $J = [0,T]$ je kompaktní interval. Předpokládejme, že $P\colon J \multimap \mathbb{R}^n$ je aumannovsky integrovatelné mnohoznačné zobrazení, $f_1|_{\overline{B}_D}\colon \overline{B}_D \to \mathbb{R}^n$ a $f_2|_{\overline{B}_D}\colon \overline{B}_D \to \mathbb{R}^n$ jsou měřitelná a lokálně omezená zobrazení taková, že*

$$||f_1(x)|| \leq M_1(D_0), \quad \textit{pro} \quad ||x|| \leq D,$$

$$||f_2(y)|| \leq M_2(D_0), \quad \textit{pro} \quad ||y|| \leq D,$$

kde $\overline{B}_D := \{z \in \mathbb{R}^n \mid ||z|| \leq D\}$, $M_1 = M_1(D_0)$ a $M_2 = M_2(D_0)$ jsou vhodné konstanty, $D = D_0 + k_2 + k_3$. Dále předpokládejme, že $D_0 > 0$ je vhodná konstanta taková, že

$$D_0 \geq \Delta_j(D_0), \quad j = 2,3,4 \quad \textit{(v závislosti na konstantách a a b)}$$

kde

1) pro $a^2 - 4b > 0$ (j=2)

$$\Delta_2(D_0) := \frac{\mathrm{e}^{(\lambda_1-\lambda_2)T}}{\sqrt{a^2-4b}}\left[1+|\lambda_1|+|\lambda_2|\right]$$
$$\times\left[\mathscr{P} + T\left(M_1(D_0)+M_2(D_0)+|a|k_3+|b|k_2\right)\right],$$

kde $\lambda_1 = \frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}, \lambda_2 = \frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2}$,

2) pro $a^2 - 4b = 0$ (j=3)

$$\Delta_3(D_0) := \mathrm{e}^{\frac{|a|}{2}T}\left[1+\frac{T}{4}\left(1+2|a|\right)\right]$$
$$\times\left[\mathscr{P} + T\left(M_1(D_0)+M_2(D_0)+|a|k_3+|b|k_2\right)\right],$$

3) pro $a^2 - 4b < 0$ *a* $T \neq \frac{2\pi k}{\sqrt{4b-a^2}}$, $k \in \mathbb{N}$ *(j=4)*

$$\Delta_4(D_0) := \frac{\mathrm{e}^{\frac{|a|}{2}T}\left[2+|a|+\sqrt{4b-a^2}\right]}{\sqrt{4b-a^2}\left|\sin(\frac{T}{2}\sqrt{4b-a^2})\right|} \times \left[\mathscr{P} + T\left(M_1(D_0)+M_2(D_0)+|a|k_3+|b|k_2\right)\right],$$

a

$$k_1 := \max\{|a|,|b|\}, \quad k_2 := \max\{||x_0||,||x_T||\}, \quad k_3 := \frac{||x_T - x_0||}{T},$$

$$\mathscr{P} := \sup_{p \subset P}\left\{\int_0^T ||p(t)||\,\mathrm{d}t \mid p \subset P \textit{ je lebesgueovsky integrovatelná selekce zobrazení } P\right\}.$$

Pak má úloha (1.1) Filippovovo řešení $x(\cdot)$ *takové, že* $||x(t)|| + ||x'(t)|| \leq D$ *pro* $t \in J$*.*

Důkaz. Můžeme argumentovat podobně jako v důkaze Věty 4.1. Proto se pouze omezíme na odvození tvaru $\Delta_2(D_0)$.

Nechť $a^2 - 4b > 0$, $u(\cdot)$ je řešení úlohy

$$\left.\begin{array}{l} y''(t) + a y'(t) + b y(t) \in F_q(t), \quad \text{pro skoro všechna } t \in J, \\ y(0) = 0, y(T) = 0 \end{array}\right\} \tag{4.18}$$

a $f_q \subset F_q$ je měřitelná selekce kompozice F_q (viz Lemma 2.1). Pak má $u(\cdot)$ tvar

$$u(t) = \int_0^T G_2(t,s) f_q(s)\mathrm{d}s.$$

Pomocí Lemmatu 2.1 a vzhledem k (4.17) dostaneme pro libovolné $t \in J$ následující odhad:

$$||u(t)|| + ||u'(t)|| = \left|\left|\int_0^T G_2(t,s)\, f_q(s)\mathrm{d}s\right|\right| + \left|\left|\int_0^T \frac{\partial G_2}{\partial t}(t,s)\, f_q(s)\mathrm{d}s\right|\right|$$

$$\leq \frac{\mathrm{e}^{(\lambda_1-\lambda_2)T}}{\sqrt{a^2-4b}}\,[1+|\lambda_1|+|\lambda_2|]\int_0^T \left|\left|f_q(s)\right|\right|\mathrm{d}s$$

$$\leq \frac{\mathrm{e}^{(\lambda_1-\lambda_2)T}}{\sqrt{a^2-4b}}\,[1+|\lambda_1|+|\lambda_2|]\int_0^T ||p(s)||+||f_{1,Sel}(q(s)+v(s))||$$

$$+||f_{2,Sel}(q'(s)+v'(s))||+||a\,v'(s)||+||b\,v(s)||\mathrm{d}s$$

$$\leq \underbrace{\frac{\mathrm{e}^{(\lambda_1-\lambda_2)T}}{\sqrt{a^2-4b}}\,[1+|\lambda_1|+|\lambda_2|]\,[\mathscr{P}+T\,(M_1(D_0)+M_2(D_0)+|a|k_3+|b|k_2)]}_{\Delta_2(D_0)}$$

kde $f_{1,Sel} \subset F_1$, $f_{2,Sel} \subset F_2$ a $p \subset P$ jsou příslušné měřitelné selekce.

Ve zbývající části důkazu můžeme postupovat analogicky jako ve Větě 4.1. □

4.3. Ilustrativní příklady

V této části demonstrujeme na příkladech výhody a nevýhody užití Věty 4.1 a Věty 4.2.

Nyní ukážeme příklad Dirichletova problému, který splňuje podmínky (4.10)-(4.12).

Příklad 4.1. Uvažujme úlohu (1.1) pro $n = 2$ (tj. v $\mathbb{R}^2$), kde

$$a = \frac{1}{4},\, b = -\frac{1}{4},$$

$$x_0 = (0,0),\, x_T = \left(\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right).$$

Pak

$$|a| = |b| = \frac{1}{4} \Longrightarrow k_1 = \frac{1}{4},$$
$$||x_0|| = \max\{|x_{01}|, |x_{02}|\} = 0, ||x_T|| = \frac{1}{6} \Longrightarrow k_2 = \frac{1}{6},\ k_3 = \frac{1}{6T}.$$

Konstanta T může být taková, že $\frac{4}{T(T+4)} > \frac{1}{4} = k_1$ (viz (4.10)), tj. $T \in \left(0, 2\left(\sqrt{5}-1\right)\right)$.

V tomto případě mají podmínky (4.11), (4.12) pro $T = 2$ a $D_0 = \frac{23}{4}$ (pak $D = 6$) tvar:

$$\frac{\mathscr{P}}{2} + \left[M_1\left(\frac{23}{4}\right) + M_2\left(\frac{23}{4}\right)\right] \leq \frac{5}{12} \doteq 0.4167. \tag{4.19}$$

Jestliže konkrétně $M_1\left(\frac{23}{4}\right) + M_2\left(\frac{23}{4}\right) = \frac{23}{4}(M_1 + M_2)$, pak se podmínka (4.19) zjednodušší na $6\mathscr{P} + 69(M_1 + M_2) \leq 5$. Tato nerovnost je splněna například, když $\mathscr{P} \leq \frac{1}{3}$ a $M_1 + M_2 \leq \frac{1}{23}$.

Konečně, za těchto předpokladů má úloha (1.1) řešení $x(\cdot)$ takové, že

$$||x(t)|| + ||x'(t)|| \leq 6 \quad \text{pro} \quad t \in [0,2].$$

Poznámka 4.3. Jestliže aplikujeme Větu 4.2 na úlohu z Příkladu 4.1, neobdržíme žádné omezení na koncový bod T intervalu, na němž řešení hledáme.

Na druhou stranu, nechť je $T = 2$ jako v Příkladu 4.1. Pak mají podmínky z Věty 4.2, případ 2), opět pro $D_0 = \frac{23}{4}$, tvar:

$$\frac{\mathscr{P}}{2} + \left[M_1\left(\frac{23}{4}\right) + M_2\left(\frac{23}{4}\right)\right] \leq \frac{46\left(17 - 4\sqrt{17}\right)\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{17}}{2}} - 1}{16} \doteq 0.1232.$$

Na první pohled je vidět, že je tato podmínka horší než v Příkladu 4.1, ale T může být libovolné.

Věta 4.1 může být aplikována na problém se suchým třením (tj. v jednoznačném skalárním případě). Ukážeme si jeden příklad a více se tomuto tématu budeme věnovat v Kapitole 5.

Příklad 4.2. Uvažujme úlohu

$$\left.\begin{aligned} &x''(t)+x'(t)+\tfrac{1}{2}x(t)=\tfrac{1}{9}\left(x(t)\right)^2-\tfrac{5}{36}\left(x'(t)\right)^2-\tfrac{49}{81}\operatorname{sgn}x'(t),\\ &x(0)=0, x\left(\tfrac{1}{2}\right)=0, \quad \text{pro skoro všechna } t\in\left[0,\tfrac{1}{2}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{4.20}$$

Na základě Filippovovy regularizace funkce *signum* (pro více detailů, viz Kapitola 5, nebo [31]), obdržíme mnohoznačné zobrazení *Signum* definované jako

$$\operatorname{Sgn} z=\begin{cases} \text{-1}, & \text{pro } z\in(-\infty,0),\\ [\text{ -1, 1 }], & \text{pro } z=0,\\ 1, & \text{pro } z\in(0,\infty). \end{cases}$$

Je snadné zkontrolovat, že je podmínka (4.10) splněna.

Podmínky (4.11) a (4.12) mají tvar

$$\frac{9}{28}D_0^2-D_0+\frac{7}{9}\leq 0 \Leftrightarrow \frac{9}{28}\left(D_0-\frac{14}{9}\right)^2\leq 0$$

s řešením $D_0=\frac{14}{9}$.

Proto má úloha (4.20) Filippovovo řešení $x(\cdot)$ takové, že

$$\max_{t\in\left[0,\frac{1}{2}\right]}\{|x(t)|+|x'(t)|\}\leq\frac{14}{9}.$$

Poznámka 4.4. Užitím podmínek z Věty 4.2, případ 3), na úlohu (4.20) obdržíme nerovnost

$$\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{4}}}{2\left|\sin\left(\frac{1}{4}\right)\right|}D_0^2-D_0+\frac{98\,\mathrm{e}^{\frac{1}{4}}}{81\left|\sin\left(\frac{1}{4}\right)\right|}\leq 0,$$

která však nemá řešení v prostoru reálných čísel. Jinými slovy, Věta 4.2 v tomto případě není použitelná.

5 Dirichletův okrajový problém pro diferenciální rovnice se suchým třením

5.1. Historická poznámka k problému suchého tření

V této podkapitole shrneme, jakou roli hráli při objevení zákona suchého tření da Vinci, Amontons, Euler, Coulomb, Morin, aj. Následující text je zkráceným, téměř doslovným přepisem článku [75], o kterém se domnívám, že by mohl být pro čtenáře zajímavý.

Historicky poprvé se pokusil zákon tření stanovit experimentálně Leonardo da Vinci (1452–1519). Byl první, kdo určil, že tření je úměrné tlaku s koeficientem tření rovným $\frac{1}{4}$. Dále zjistil, že tření je nezávislé na ploše kontaktní oblasti mezi vzájemně působícími povrchy. Tyto poznatky můžeme najít v [71].

O téměř 200 let později zopakoval výsledky obdržené Leonardem da Vincim francouzský fyzik Guillaume Amontons (1663–1705). Ve své práci [7] využil nedávno objevenou Newtonovu mechaniku (Isaac Newton, 1643–1727). Jeho důkaz skutečnosti, že je tření nezávislé na kontaktní oblasti je pečlivější, avšak jeho koeficient tření rovný $\frac{1}{3}$ byl vzdálenější skutečné hodnotě než ten obdržený Leonardem da Vincim.

Francouzský vojenský inženýr a fyzik Charles Augustin de Coulomb (1736–1806) provedl v letech 1779–1781 vědecký experiment pro stanovení koeficientu suchého tření. Zjistil, že třecí síla je nezávislá na rychlosti. Tento pokus zopakoval pro různé materiály, tlakové síly i rozměry dotyčného tělesa. V každém tomto experimentu byl určen poměr tlakové síly k třecí síle, jehož převrácená hodnota začala být nazývána koeficient suchého tření. Suché tření je proto také někdy v literatuře nazýváno Coulombovo tření. Této práci byla v roce 1781 udělena cena Akademie věd a byla zveřejněna jako série publikací - nejvýznamnější z nich [23]. Coulombův zákon tak zní: „Odpor působící na těleso pomocí rovinného povrchu podél něhož těleso klouže, je úměrný tlakové síle tělesa na povrch; odpor nezávisí ani na oblasti kontaktu, ani na klouzavé rychlosti.“, a může být reprezentován následující formulí:

$$F = \begin{cases} fN\frac{v}{|v|}, & \text{pro } v \neq 0, \\ [-F_r, F_r] \quad (F_r \geq fN), & \text{pro } v = 0, \end{cases}$$

kde f je koeficient tření, N je tlaková síla a v je relativní klouzavá rychlost. Jestliže je $v \neq 0$, je třecí síla nazývána klouzavá třecí síla. Pokud je $v = 0$, pak leží třecí síla v intervalu uvedeném v hranatých závorkách a je nazývána statická třecí síla.

V literatuře lze tento zákon nalézt také pod názvem Amontonův–Coulombův zákon. Ačkoliv, ještě jeden vědec si zaslouží, aby i po něm byl tento zákon pojmenován. Je jím Leonard Euler (1707–1783), který své výsledky publikoval již v roce 1748 (kdy bylo Coulombovi 12 let) ve své práci [29], kde je uvedeno: „Zkušenost ukazuje, že třecí síla je vždy rovna části tlaku působícího na stlačené těleso do roviny, podél které klouže tak, že tření nezávisí ani na kontaktní ploše, ani na velikosti rychlosti; vliv tření v různých strojích může být jednoduše bráno v úvahu jako konstantní síla opačná ke směru pohybu a ležící v rovině dotyku vzájemně působících subjektů.“ Euler zaměřil svou pozornost na do té doby neobvyklý tvar zákona suchého tření, který obsahoval nespojitost prvního druhu v závislosti síly na rychlosti při rychlosti rovné nule. Tato nespojitost vyžaduje přidání definice v bodě nespojitosti z podmínky rovnováhy tělesa. Na rozdíl od Coulomba se Euler nezabýval fyzikální podstatou nové síly, ale spíš úplným analytickým popisem nového objektu potřebného ke konstrukci mechanických rovnic.

Oba vědci, jak Euler, tak Coulomb, jsou tedy považováni za zakladatele vědy o tření, přičemž Euler započal matematický přístup k problému, zatímco Coulomb jeho fyzikální přístup. Eulerův-Coulombův zákon suchého tření vešel do historie inženýrství jako jeden z jeho nejpotřebnějších kalkulů. Matematickým přístupem se zabývali vědci G. Coriolis, H. Resal, E. Routh, J. Jellet, P. Painlevé, N. H. Zhukovskii, E. A. Bolotov, P. Contensou a mnoho dalších. Oblastí zájmu jsou zde problémy existence a jednoznačnosti řešení pohybových rovnic a rovnovážných systémů se suchým třením, probémy řešitelnosti těchto rovnic pro zrychlení, problémy integrace rovnic s nespojitými pravými stranami, atd.

S druhým směrem, fyzikálním přístupem, je spjato mnohem více jmen, protože fyzika procesu tření zůstává stále nedostatečně vyjasněna. Můžeme zde zmínit jména jako V. D. Kuznetsov, A. Morin, F. P. Bowden, P. Conti, M. Merchant, L. Brillouin, V. Hardy, B. V. Deryagin, I. V. Kraselskii, a další. Tady jsou oblasti zájmu problémy opotřebení a ohřívání materiálů, které se třou, rozložení normálových a tečných napětí v kontaktní oblasti, plastické deformace a fyzikální povaha třecích sil (molekulární adheze, ztráty hystereze, ztráty v případě poškození povrchové vrstvy, atd.)

Coulombův experiment byl jeho nástupci mnohokrát zopakován, za účelem přesnějšího stanovení nejrůznějších podrobností. Nejvíce pokusů bylo provedeno v letech 1831–1833 v městě Metz francouzským vědcem Arthurem Morinem (1795–1880) (viz [47]). Morin sice ničím zásadním či novým do Coulombova experimentu nepřispěl, avšak jeho přesněji měřené výsledky jsou obsaženy ve formě tabulek koeficientů tření v různých příručkách o inženýrství.

V roce 1895 podrobil významný francouzský matematik P. Painlevé zákon suchého tření kritice. V [50] uvažoval několik příkladů řešení problémů se suchým třením, a poté, co narazil na několik nesnází, došel k závěru, že je zákon suchého tření nekonzistentní se základními zákony klasické mechaniky. Tyto rozpory, které objevil, jsou známy jako Painlevého paradoxy. Painlevého práce vedla k živým diskusím, do kterých se zapojili francouzští a němečtí vědci (L. Lecornu, F. de Sparre, F. Klein, R. von Mises, G. Hamel a L. Prandtl), kteří předložili různé metody řešení těchto paradoxů.

Coulombův zákon suchého tření byl Eulerem uveden a ověřen Eulerem a Coulombem experimentálně pouze pro těleso pohybující se po rovině posuvným klouzavým pohybem. V komplikovanějším případě, kdy se např. k posuvnému pohybu tělesa přidá jeho otáčení, Coulombův zákon, ve tvaru, v jakém jsme jej uvedli, neplatí. Jednou z možností, jak přistoupit k zobecnění Coulombova zákona v případě přidání rotačního pohybu, je použít jej v lokální (diferenciální) formě. Tento výpočet byl proveden ruským vědcem Nikolayem Zhukovskii (1847–1921) v roce 1894, viz. [73], [74]. Přístup, který započal Zhukovskii, dává odpověď na otázku, jak má být chápán zákon suchého tření v případě bodového kontaktu.

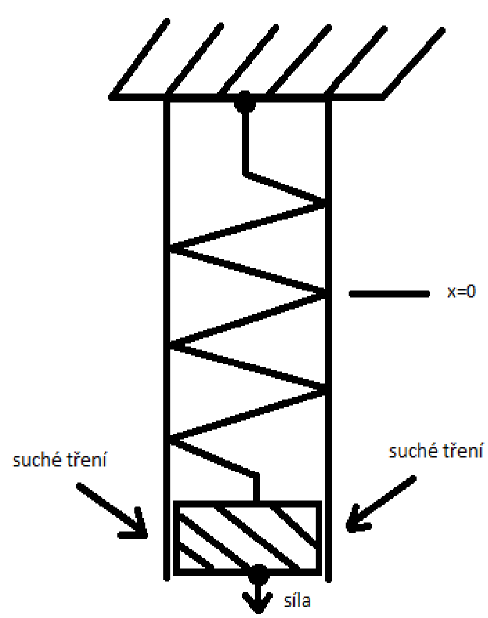
Formule z Coulombova zákona suchého tření uvedená výše pro posuvný pohyb se v literatuře také objevuje v diferenciálním tvaru $\mathrm{d}F = \sigma \operatorname{sgn} v \,\mathrm{d}S$, resp. po integraci ve tvaru

$$F = f N \operatorname{sgn} v,$$

kde $N = \int\int_S \sigma \mathrm{d}S$, σ je hustota normálové síly působící v kontaktním místě a S je přímá oblast kontaktu.

5.2. Oscilátor se suchým třením

Jak jsme se již zmínili, motivací této práce jsou problémy se suchým třením. Pojďme se podívat podrobněji na oscilátor se suchým třením. Tento model uvádějí ve svých pracech také např. Deimling v [25] a Kunze v [40]. Mějme tedy oscilátor skládající se z hmotného bodu o hmotnosti m připojeného k pružině, který je sinusoidně buzený a pohybující se rovně v trubici naplněné tekutinou a mající kontakt se stěnou trubice. V závislosti na velikosti suchého tření mezi hmotným bodem a stěnou a v závislosti na intenzitě síly, se hmotný bod pohybuje nahoru nebo dolů, nebo se zadrhává o stěnu, viz následující nákres:



Pro určení rovnice oscilátoru vezmeme v úvahu čtyři různé druhy sil:

1. síla buzení, která je zvolena $\gamma \sin(\eta t)$ s časem t a parametry $\gamma, \eta \geq 0$,
2. obnovující síla pružiny, která je (z Hookova zákona) úměrná $-kx(t)$, kde velikost konstanty $k > 0$ odpovídá tuhosti pružiny,
3. viskózní tlumení, vznikající díky kapalině v trubici, úměrné $-rx'(t)$, kde $r > 0$,
4. třecí síla vzhledem k suchému tření mezi hmotným bodem a trubicí. Z Coulombova zákona plyne, že je toto tření rovno záporné normálové síle ke stěně (která je konstantní), vynásobené koeficientem tření a signem rychlosti x' hmotného bodu a tedy odpovídající $-c \operatorname{sgn} x'$, kde $c > 0$.

Z rovnováhy sil (a Druhého Newtonova zákona) a vhodným škálováním času t pak získáme standardní tvar rovnice sinusoidně buzeného oscilátoru se suchým a viskózním třením ve tvaru

$$x''(t) + 2Dx'(t) + x(t) + \mu \operatorname{sgn} x'(t) = \frac{\gamma \sin(\eta \nu t)}{k},$$

kde $2D = \frac{r}{\sqrt{mk}}$, $\mu = \frac{c}{k}$, $\nu = \sqrt{\frac{m}{k}}$.

Poznámka 5.1. Zobecnění této rovnice je rovnice kyvadla se suchým a viskózním třením:

$$x''(t) + 2Dx'(t) + \sin x(t) + \mu \operatorname{sgn} x'(t) = \frac{\gamma \sin(\eta \nu t)}{k}.$$

5.3. Existence a lokalizace řešení

V této podkapitole se budeme zabývat speciálním skalárním případem úlohy z Kapitoly 4, tj. skalárním mnohoznačným Dirichletovým problémem (1.2) zahrnujícím kombinaci viskózního a suchého tření, kde a, b, c, x_0, x_T a $T > 0$ jsou reálné konstanty, $F_1 \colon \mathbb{R} \multimap \mathbb{R}$, $F_2 \colon \mathbb{R} \multimap \mathbb{R}$ jsou shora polospojitá zobrazení s kompaktními a konvexními hodnotami, $P \colon J \multimap \mathbb{R}$ je aumannovsky (po složkách) integrovatelné zobrazení.

Stanovíme kritéria řešitelnosti této úlohy za použití výhradně růstových podmínek. Explicitní odhady řešení a jejich derivací nám umožní se opět omezit na dostatečně velké okolí počátku, při formulování těchto efektivních kritérií. Tímto způsobem, může být chování nelinearit vně tohoto okolí zcela libovolné. Kvůli obdržení optimálních kritérií řešitelnosti budou opět úlohy s jednočlenným a úplným lineárním diferenciálním operátorem, stejně jako v Kapitole 4, uvažovány odděleně prostřednictvím různých Greenových funkcí. Získané výsledky budou porovnány s některými jejich analogiemi jiných autorů.

Jednoznačné nespojité zobrazení *signum*

$$\operatorname{sgn} z = \begin{cases} \text{-1}, & \text{pro } z \in (-\infty, 0), \\ 0, & \text{pro } z = 0, \\ 1, & \text{pro } z \in (0, \infty) \end{cases}$$

z úlohy (1.2) aproximujeme ve smyslu Filippovovy regularizace a získáme tak mnohoznačné zobrazení *Signum*, které je ve spojitých bodech identické se zobrazením signum, v bodě nespojitosti počátku je však nahrazeno nejmenší konvexní množinou dle Definice 2.8:

$$\operatorname{Sgn} z = \begin{cases} \text{-1}, & \text{pro } z \in (-\infty, 0), \\ \text{[-1, 1]}, & \text{pro } z = 0, \\ 1, & \text{pro } z \in (0, \infty). \end{cases}$$

Dále se tak budeme zabývat úlohu, kterou získáme z úlohy (1.2) pomocí Filippovovy regularizace jeho pravé strany, tj. úlohou

$$\left.\begin{array}{l} x''(t) + ax'(t) + bx(t) \in P(t) + F_1(x(t)) + F_2(x'(t)) - c \operatorname{Sgn} x'(t), \\ x(0) = x_0,\ x(T) = x_T,\ \text{pro s. v. } t \in [0, T], \end{array}\right\} \tag{5.1}$$

přičemž Filippovovým řešením úlohy (1.2) budeme rozumnět Carathéodoryovo řešení úlohy (5.1).

Budeme postupovat podobně jako v Kapitole 4. Změnou proměnných $y(t) = x(t) - v(t)$, kde $v(t) = \frac{x_T - x_0}{T} t + x_0$, můžeme ihned vidět, že $x(t)$ je Carathéodoryovo řešení úlohy (5.1) právě tehdy, když $y(t)$ splňuje

$$\left.\begin{aligned} y''(t)+a\,(y'(t)+v'(t))+b\,(y(t)+v(t)) &\in P(t)+F_1(y(t)+v(t)) \\ +F_2(y'(t)+v'(t))-c\,\mathrm{Sgn}\,(y'(t)+v'(t))\,&, \quad \text{pro s. v. } t\in J, \\ y(0)=0,\ y(T)=0. & \end{aligned}\right\} \tag{5.2}$$

Opět platí, že $|v(t)|\le k_2 := \max\{|x_0|,|x_T|\}$, pro všechna $t\in J$, a $|v'(t)| = k_3 := \frac{|x_T-x_0|}{T}$, pro všechna $t\in J$.

V tomto okamžiku je znovu naším cílem dokázat existenční a lokalizační věty pro úlohu (5.1). Opět začněme s úlohou zahrnující ořezaná zobrazení k zobrazením F_1, F_2, tj.

$$\left.\begin{aligned} y''(t)+a\,y'(t)+b\,y(t) &\in P(t)-a\,v'(t)-b\,v(t)+F_1^*(y(t)+v(t)) \\ +F_2^*(y'(t)+v'(t))-c\,\mathrm{Sgn}\,(y'(t)+v'(t))\,&, \quad \text{pro s. v. } t\in J, \\ y(0)=0, y(T)=0, & \end{aligned}\right\} \tag{5.3}$$

kde

$$F_1^*(z) := \begin{cases} F_1(z), & \text{pro } |z|\le D, \\ F_1(D\,\mathrm{sgn}(z)), & \text{pro } |z|\ge D, \end{cases}$$

$$F_2^*(z) := \begin{cases} F_2(z), & \text{pro } |z|\le D, \\ F_2(D\,\mathrm{sgn}(z)), & \text{pro } |z|\ge D. \end{cases}$$

Toto ořezání je ve skalárním případě značně jednodušší než ve vektorovém případě, kde jsme pro největší názornost zvolili ořezání pomocí rektraktů.

Zjevně $F_1|_{\overline{B}_D}\colon \overline{B}_D \multimap \mathbb{R}$ a $F_2|_{\overline{B}_D}\colon \overline{B}_D \multimap \mathbb{R}$ jsou shora polospojitá zobrazení s kompaktními a konvexními hodnotami, kde $\overline{B}_D := \{z\in\mathbb{R} \mid |z|\le D\}$ je uzavřená koule, konstanta D je taková, že $D = D_0+k_2+k_3$, kde $D_0>0$ je vhodná konstanta, která bude stanovena později, a k_2, k_3 jsou výše definovány. Tudíž, to stejné platí i pro $F_1^*, F_2^*\colon \mathbb{R}\multimap\mathbb{R}$.

Poznamenejme, že tímto způsobem, $F_1^*(z+v(t)) = F_1(z+v(t))$, pro $|z|\le D_0$, a $F_2^*(z+v'(t)) = F_2(z+v'(t))$, pro $|z|\le D_0$.

Z tohoto důvodu, hledejme postačující podmínky řešitelnosti úlohy (5.3). Rozlišíme dva případy za účelem formálně odlišit lineární diferenciální operátor a mnohoznačnou perturbaci.

Zaměříme se tedy nyní na úlohu formálně zapsanou v následujcím tvaru:

$$\left.\begin{array}{l} y''(t) \in F(t,y(t),y'(t)), \quad \text{pro s. v. } t \in J, \\ y(0)=0,\ y(T)=0, \end{array}\right\} \tag{5.4}$$

kde $F(t,y(t),y'(t)) := P(t) + F_1^*(y(t)+v(t)) + F_2^*(y'(t)+v'(t)) - a\,(y'(t)+v'(t)) - b\,(y(t)+v(t)) - c\,\mathrm{Sgn}\,(y'(t)+v'(t))$, tj. $F\colon J\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} \multimap \mathbb{R}$ je u-carathéodoryovské mnohoznačné zobrazení a $Ly(t) := y''(t)$.

Pro řešitelnost mnohoznačné nelineární úlohy (5.4), užijeme Schauderovu linearizaci. Tudíž, parametrizujeme pravou stranu F za účelem získat jednoparametrickou třídu lineárních úloh. Nechť

$$Q := \{u \in C^1(J,\mathbb{R}), ||u||_{C^1} \le D_0\}$$

je množina kandidátů řešení, kde $||u||_{C^1} := \sup\{|u(t)| + |u'(t)|, t \in J\}$ a $D_0 > 0$ je vhodná konstanta.

Pak dostáváme, pro každé $q \in Q$, plně linearizovanou úlohu

$$\left.\begin{array}{l} y''(t) \in F_q(t), \quad \text{pro s. v. } t \in J, \\ y(0)=0,\ y(T)=0, \end{array}\right\} \tag{5.5}$$

kde $F_q(t) = P(t) + F_1^*(q(t)+v(t)) + F_2^*(q'(t)+v'(t)) - a\,q'(t) - a\,v'(t) - b\,q(t) - b\,v(t) - c\,\mathrm{Sgn}\,(q'(t)+v'(t))$. Zjevně, $F_q\colon J \multimap \mathbb{R}$ je, pro každé $q \in Q$, aumannovsky integrovatelná funkce proměnné t.

Z Lemmatu 2.3, plyne existence alespoň jedné měřitelné selekce $f_q \subset F_q$ mnohoznačné kompozice $F_q(t)$. Tudíž, můžeme uvažovat jednoznačný lineární Dirichletův problém

$$\left.\begin{array}{l} y''(t) = f_q(t), \quad \text{pro s. v. } t \in J, \\ y(0)=0,\ y(T)=0. \end{array}\right\} \tag{5.6}$$

Homogenní úloha příslušející úloze (5.6), tj.

$$\left.\begin{array}{l} y''(t) = 0, \quad \text{pro s. v. } t \in J, \\ y(0)=0,\ y(T)=0, \end{array}\right\} \tag{5.7}$$

má pouze triviální řešení. Proto plyne z Fredholmovy alternativy (viz Propozice 2.5), že má úloha (5.6) jediné Carathéodoryovo řešení $y(\cdot)$, které má tvar

$$y(t) = \int_0^T G_1(t,s)\, f_q(s)\,\mathrm{d}s,$$

kde G_1 je Greenova funkce úlohy (5.7), tj.

$$G_1(t,s) = \begin{cases} \frac{t\,(s-T)}{T}, & \text{pro všechna } 0 \le t \le s \le T, \\ \frac{s\,(t-T)}{T}, & \text{pro všechna } 0 \le s \le t \le T. \end{cases} \tag{5.8}$$

Každý může snadno zkontrolovat, že $|G_1(t,s)| \le \frac{T}{4}$, pro všechna $t,s \in [0,T]$.

Ve skutečnosti jelikož je mnohoznačná kompozice $F_q(t)$, pro každé $q \in Q$, zřejmě měřitelná, vzhledem k Propozici 2.1, můžeme dokonce psát

$$y(t) \in \int_0^T G_1(t,s) \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_{n,q}(s)}\, \mathrm{d}s,$$

kde $\left\{f_{n,q}(t) \subset F_q(t)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ je posloupnost měřitelných selekcí zobrazení F_q a interval je chápán v Aumannově smyslu.

Poznamenejme, že kvůli

$$\frac{\partial G_1}{\partial t}(t,s) = \begin{cases} \frac{(s-T)}{T}, & \text{pro všechna } 0 \le t \le s \le T, \\ \frac{s}{T}, & \text{pro všechna } 0 \le s \le t \le T, \end{cases} \tag{5.9}$$

máme také

$$y'(t) \in \int_0^T \frac{\partial G_1}{\partial t}(t,s) \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_{n,q}(s)}\, \mathrm{d}s,$$

kde integrál je opět chápán v Aumannově smyslu. Navíc, $\left|\frac{\partial G_1}{\partial t}(t,s)\right| \le 1$, pro všechna $t,s \in [0,T]$.

Proto, označením $\varphi\colon Q \multimap C^1(J,\mathbb{R})$ jako operátor řešení úlohy (5.5), kde

$$\varphi := \int_0^T G_1(t,s) F_q(s)\, \mathrm{d}s = \int_0^T G_1(t,s) \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_{n,q}(s)}\, \mathrm{d}s,$$

můžeme místo existence řešení deferenciálního problému (5.5) ekvivalentně vyšetřovat existenci pevného bodu mnohoznačného operátoru φ. Za tímto účelem užijeme Kakutaniho–Ky Fananovu větu o pevném bodě (Propozice 2.2). Tímto způsobem můžeme dokázat následující větu:

Věta 5.1. *Nechť a, b, c,* x_0*,* x_T *a* $T > 0$ *jsou reálné konstanty takové, že*

$$\frac{4}{T(T+4)} > \max\{|a|, |b|\}. \tag{5.10}$$

Předpokládejme, že $P\colon J \multimap \mathbb{R}$ *je aumannovsky integrovatelné mnohoznačné zobrazení,* $J = [0, T]$ *je kompaktní interval a* $F_1|_{\overline{B}_D}\colon\ \overline{B}_D \multimap \mathbb{R}$*,* $F_2|_{\overline{B}_D}\colon \overline{B}_D \multimap \mathbb{R}$ *jsou shora polospojitá mnohoznačná zobrazení s konvexními a kompaktními hodnotami, kde* $D = D_0 + k_2 + k_3$*. Dále předpokládejme, že* $D_0 > 0$ *je vhodná konstanta taková, že*

$$D_0 \geq \Delta_1(D_0), \tag{5.11}$$

kde

$$\Delta_1(D_0) := \frac{[\mathscr{P} + T(M_1(D_0) + M_2(D_0) + |a|k_3 + |b|k_2 + |c|)]\,(T+4)}{4 - k_1 T(T+4)}, \tag{5.12}$$

a

$$\begin{aligned}
M_1(D_0) &:= \max_{|z| \leq D_0 + k_2 + k_3} |F_1(z)|, \quad M_2(D_0) := \max_{|z| \leq D_0 + k_2 + k_3} |F_2(z)|,\\
k_1 &:= \max\{|a|, |b|\}, \quad k_2 := \max\{|x_0|, |x_T|\}, \quad k_3 := \frac{|x_T - x_0|}{T},\\
\mathscr{P} &:= \sup_{p \subset P} \bigg\{ \int_0^T |p(t)|\,\mathrm{d}t \mid p \subset P \textit{ je lebesgueovsky integrovatelná}\\
&\qquad \textit{selekce zobrazení } P \bigg\}.
\end{aligned}$$

Pak má úloha (1.2) *řešení* $x(\cdot)$ *takové, že*

$$\max_{t \in J}\{|x(t)| + |x'(t)|\} \leq D.$$

Důkaz. Důkaz této věty provedeme stejným způsobem jako důkaz Věty 4.1. Kvůli ověření všech předpokladů Propozice 2.2, budeme postupovat ve čtyřech krocích.

(i) Jelikož je úloha (5.6) jednoznačně řešitelná, je množina $\varphi(Q)$ neprázdná.

(ii) Dokažme, že je množina $\varphi(Q)$, tj. množina řešení úlohy (5.5), relativně kompaktní. Podle Arzelá–Ascoli lemmatu, je množina řešení relativně kompaktní v $C^1(J,\mathbb{R})$ právě tehdy, když je stejnoměrně omezená a stejně spojitá, obojí v C^1-normě.

a) Ukažme, že je množina řešení úlohy (5.5) stejnoměrně omezená v $C^1(J,\mathbb{R})$. Nechť je $u(\cdot)$ řešení (5.5) a $f_q \subset F_q$ je měřitelná selekce kompozice F_q. Taková měřitelná selekce dle Lemmatu 2.3 existuje a $u(\cdot)$ tak má tvar

$$u(t) = \int_0^T G_1(t,s)\, f_q(s)\,\mathrm{d}s.$$

Je zřejmé, že

$$\max_{|z|\le D_0} |F_1(z+v(t))| = \max_{|z|\le D_0} |F_1^*(z+v(t))| \le M_1(D_0),$$
$$\max_{|z|\le D_0} |F_2(z+v'(t))| = \max_{|z|\le D_0} |F_2^*(z+v'(t))| \le M_2(D_0),$$

kde $v(t) = \frac{x_T - x_0}{T} t + x_0$ a $v'(t) = \frac{x_T - x_0}{T}$.

Podle Lemmatu 2.3 a vzhledem k (5.8), (5.9), pro libovolné $t \in J$, obdržíme následující odhad:

$$\begin{aligned}
|u(t)| + |u'(t)| &= \left| \int_0^T G_1(t,s)\, f_q(s)\,\mathrm{d}s \right| + \left| \int_0^T \frac{\partial G_1}{\partial t}(t,s)\, f_q(s)\,\mathrm{d}s \right| \\
&\le \left(\frac{T}{4} + 1 \right) \int_0^T \left| f_q(s) \right| \mathrm{d}s \le \left(\frac{T}{4} + 1 \right) \int_0^T |p(s)| \\
&\quad + |f_1^*(q(s)+v(s))| + |f_2^*(q'(s)+v'(s))| + |a(q'(s)+v'(s))| \\
&\quad + |b\,(q(s)+v(s))| + |c\,\mathrm{Sgn}_{Sel}(q'(s)+v'(s))|\,\mathrm{d}s \\
&\le \left(\frac{T}{4} + 1 \right) \Big[\mathscr{P} + T(M_1(D_0) + M_2(D_0) + |a|k_3 + |b|\,k_2 + |c|) \\
&\quad + k_1 \int_0^T |q(s)| + |q'(s)|\,\mathrm{d}s \Big], \\
&\le \left(\frac{T}{4} + 1 \right) \left[\mathscr{P} + T(M_1(D_0) + M_2(D_0) + |a|k_3 + |b|k_2 + |c| + k_1 D_0) \right],
\end{aligned}$$

kde $f_1^* \subset F_1^*$, $f_2^* \subset F_2^*$, $p \subset P$ a $\mathrm{Sgn}_{Sel} \subset \mathrm{Sgn}$ jsou příslušné měřitelné selekce.

Jelikož platí tento odhad stejným způsobem pro všechny $q \in Q$, znamená to, že řešení $u(\cdot)$ úlohy (5.5), tj. množina $\varphi(Q)$, jsou stejnoměrně omezená v C^1-normě.

Navíc, podle (5.10), (5.12), jestliže existuje kladná konstanta D_0 taková, že $D_0 \geq \Delta_1(D_0)$, pak množina $\varphi(Q)$ splňuje $\varphi(Q) \subset Q$.

b) Nyní ukažme, že jsou prvky množiny $\varphi(Q)$, tj. řešení $u(\cdot)$ úlohy (5.5), stejně spojitá v C^1-normě. Pro libovolná $t_1, t_2 \in J$ taková, že $t_1 < t_2$, máme pomocí Lemmatu 2.3 a vzhledem k (5.9), že

$$
\begin{aligned}
|u(t_2) - u(t_1)| &= \left| \int_{t_1}^{t_2} u'(t)\,\mathrm{d}t \right| = \left| \int_{t_1}^{t_2} \int_0^T \frac{\partial G_1}{\partial t}(t,s) f_q(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \right| \\
&\leq \left| \int_{t_1}^{t_2} \int_0^T \left| \frac{\partial G_1}{\partial t}(t,s) \right| |f_q(s)|\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \right| \leq \left| \int_{t_1}^{t_2} \int_0^T |f_q(s)|\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \right| \\
&\leq (t_2 - t_1) \left[\mathscr{P} + \big(M_1(D_0) + M_2(D_0) + k_1 D_0 + |a| k_3 + |b| k_2 + |c| \big) T \right].
\end{aligned}
$$

Navíc, stejně máme

$$
\begin{aligned}
|u'(t_2) - u'(t_1)| &= \left| \int_{t_1}^{t_2} u''(t)\,\mathrm{d}t \right| = \left| \int_{t_1}^{t_2} f_q(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \left| \int_{t_1}^{t_2} \left| f_q(t) \right|\,\mathrm{d}t \right| \\
&\leq (t_2 - t_1) [M_1(D_0) + M_2(D_0) + k_1 D_0 + |a| k_3 + |b| k_2 + |c|] \\
&\quad + \int_{t_1}^{t_2} |p(t)|\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Proto jsou řešení $u(\cdot)$ úlohy (5.5) stejně spojitá v C^1-normě. Shrnutím a) a b) dostaneme, že jsou prvky množiny $\varphi(Q)$ relativně kompaktní v C^1-normě, jak bylo požadováno.

(iii) Ukážeme, že je operátor φ shora polospojitý. Vzhledem k Lemmatu 2.2, a jelikož bylo ukázáno, že φ je kompaktní, je dostačující ukázat, že je graf Γ_φ uzavřený. Nechť $\{(q_k, u_k)\} \subset \Gamma_\varphi$ je posloupnost taková, že $\{(q_k, q_k', u_k)\} \to (q, q', u)$, kde $q \in Q$. Pro všechna $k \in \mathbb{N}$ a skoro všechna $t \in J$, je posloupnost

$\{u_k'\}$ omezená a $|u_k''(t)| \leq |p(t)| + M_1(D_0) + M_2(D_0) + k_1 D_0 + |c| + |a|k_3 + |b|k_2$, pro skoro všechna $t \in J$. Posloupnost $\{w_k := u_k'\}$ splňuje všechny předpoklady Lemmatu 2.4.

Tudíž, aplikujeme-li Lemma 2.4 na posloupnost $\{w_k := u_k'\}$ dostaneme, že existuje podposloupnost posloupnosti $\{u_k'\}$, pro jednoduchost označena stejně jako posloupnost, která konverguje stejnoměrně k u' na J, a taková, že $\{u_k''\}$ konverguje slabě k u'' v $L^1(J, \mathbb{R})$.

Jestliže položíme $z_k := (u_k, w_k)$, pak $z_k' = (u_k', w_k') = (u_k', u_k'') \to (u', u'')$, slabě v $L^1(J, \mathbb{R}^2)$. Uvažujme systém

$$z_k'(t) \in H(t, q_k(t), q_k'(t)), \quad \text{pro skoro všechna } t \in J,$$

kde $z_k'(t) = (u_k'(t), w_k'(t))$ a $H(t, q_k(t), q_k'(t)) = (w_k, F_{q_k}(t))$.

Aplikací Lemmatu 2.5, pro $f_i := z_k'$, $f := (u', u'')$, $x_i := (q_k, q_k')$, plyne, že

$$(u'(t), u''(t)) \in H(t, q(t), q'(t)), \quad \text{pro skoro všechna } t \in J,$$

tj. $u''(t) \in F_q(t)$, pro skoro všechna $t \in J$.

Množina $\varphi(Q)$ je relativně kompaktní a graf Γ_φ je uzavřený. Proto je zobrazení φ shora polospojité, kompaktní, a konkrétně s kompaktními hodnotami.

(iv) Nakonec ukážeme, že má zobrazení φ konvexní hodnoty.

Nechť u_1, u_2 jsou dvě různá řešení problému (5.5) sdružená s měřitelnými selekcemi $f_{1,q}, f_{2,q} \subset F_q$. Pak máme, pro všechna $t \in J$,

$$u_1(t) = \int_0^T G_1(t,s)\, f_{1,q}(s)\, \mathrm{d}s,$$
$$u_2(t) = \int_0^T G_1(t,s)\, f_{2,q}(s)\, \mathrm{d}s.$$

Nechť je $\lambda \in [0,1]$ libovolné. Jelikož má F konvexní hodnoty, platí to i pro F_q, a následně

$$f_q(t) = \lambda\, f_{1,q}(t) + (1-\lambda)\, f_{2,q}(t)$$

musí být měřitelná selekce kompozice F_q, tj. $f_q \subset F_q$. Máme, že

$$\begin{aligned} u(t) &= \lambda u_1(t) + (1-\lambda) u_2(t) \\ &= \lambda \int_0^T G_1(t,s) f_{1,q}(s)\,\mathrm{d}s + (1-\lambda) \int_0^T G_1(t,s) f_{2,q}(s)\,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^T G_1(t,s)[\lambda f_{1,q}(s) + (1-\lambda) f_{2,q}(s)]\,\mathrm{d}s = \int_0^T G_1(t,s)\, f_q(s)\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Tudíž, $u(\cdot)$ musí být také řešení úlohy (5.5), pomocí čehož dostáváme, že zobrazení φ má konvexní hodnoty.

Konečně užitím Propozice 2.2 obdržíme existenci pevného bodu mnohoznačného zobrazení φ, které představuje řešení úlohy (5.3). Nicméně, vzhledem k definicím zobrazení F_1^*, F_2^*, musí být takové řešení také řešením úlohy (5.2), (5.1) stejně jako úlohy (1.2). □

Příklad 5.1. Jako ilustrativní příklad Dirichletova problému splňující spíše implicitní podmínky (5.10)–(5.12), můžeme uvažovat (1.2), kde

$$\begin{aligned} |a| = |b| = \frac{1}{4} &\implies k_1 = \frac{1}{4}, \\ x_0 = x_T = \frac{1}{4} &\implies k_2 = \frac{1}{4},\ k_3 = 0, \\ T = 2(\sqrt{2}-1) &\implies \frac{4}{T(T+4)} = 1 > \frac{1}{4} = k_1 \text{ (viz (5.10))}. \end{aligned}$$

V tomto případě mají podmínky (5.11), (5.12), pro $D_0 = \frac{1}{4}$, tvar:

$$\frac{\mathscr{P}}{2(\sqrt{2}-1)} + \left[M_1\left(\frac{1}{4}\right) + M_2\left(\frac{1}{4}\right) + |c| \right] \le \frac{1}{8}.$$

Vezmeme-li navíc $\mathscr{P} \le \frac{\sqrt{2}-1}{16}$ a $|c| = \frac{1}{32}$, dostaneme pro $F_1(z) := f_1 z^m$ a $F_2(z) := f_2 z^n$ nerovnost

$$|f_1|\left(\frac{1}{2}\right)^m + |f_2|\left(\frac{1}{2}\right)^n \le \frac{1}{16}.$$

Proto jestliže $|f_1|, |f_2| \leq \frac{1}{16}$ a $m, n \geq 1$, pak dospějeme k (5.11), (5.12), protože pro $|f_1| = |f_2| = \frac{1}{16}$ a $m = n$, máme

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} \leq 1,$$

což je splněno pro všechna $m \geq 1$.

Konečně, za splnění těchto předpokladů má úloha (1.2) řešení $x(\cdot)$ takové, že

$$\max_{t \in [0,T]} \{|x(t)| + |x'(t)|\} \leq \frac{1}{2}.$$

Ve skutečnosti je to také pravda pro úlohu (1.2), kde F_1, F_2 jsou uvedeny výše pro $z \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, a které mohou být libovolné vně intervalu $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Poznámka 5.2. Jestliže je navíc mnohoznačné zobrazení P esenciálně omezené, pak může být podmínka (5.10) přepsána, za stejného závěru pro (1.2), pomocí

$$\frac{8}{T(T+4)} > \max\{|a|, |b|\},$$

a (5.11) s $\Delta_1(D_0)$ v (5.12) může být nahrazena $\widetilde{D}_0 \geq \Delta_1'(\widetilde{D}_0)$, kde

$$\Delta_1'(\widetilde{D}_0) := \frac{\left[\mathscr{P}_1 + M_1(\widetilde{D}_0) + M_2(\widetilde{D}_0) + |a|k_3 + |b|k_2 + |c|\right] T\,(T+4)}{8 - k_1 T\,(T+4)},$$

$\mathscr{P}_1 := \operatorname{ess\,sup}_{\mathrm{t} \in \mathrm{J}} |\mathrm{P(t)}|$, protože

$$\int_0^T |G_1(t,s)|\,\mathrm{d}s \leq \frac{T^2}{8} \quad \text{a} \quad \int_0^T \left|\frac{\partial G_1}{\partial t}(t,s)\right| \mathrm{d}s \leq \frac{T}{2}.$$

Tudíž stejný závěr platí pro (1.2) s D nahrazeným $\widetilde{D} = \widetilde{D}_0 + k_2 + k_3$.

Poznámka 5.3. Jestliže je navíc mnohoznačné zobrazení F_2 omezené, tj. $M_2 := \max_{z \in \mathbb{R}} |F_2(z)|$, a $a = 0$, můžeme odhad pro řešení (1.2) ještě vylepšit. Podmínka

(5.10) může být pak přepsána pomocí $\frac{4}{T^2} > |b|$, za předpokladu, že ještě existuje kladná konstanta D_1 taková, že

$$D_1 \geq \frac{T\left[\mathscr{P} + (M_1(D_1) + M_2 + |b|k_2 + |c|)\,T\right]}{4 - T^2|b|}.$$

Za těchto předpokladů má úloha (1.2) řešení $x(\cdot)$ takové, že

$$\begin{aligned}
&\max_{t\in J}|x(t)| \leq D_1 + k_2,\\
&\max_{t\in J}|x'(t)| \leq D_2 + k_3 := \mathscr{P} + T\left[M_1(D_1) + M_2 + |b|(D_1 + k_2) + |c|\right] + k_3,
\end{aligned}$$

kde $M_1(D_1) := \max\limits_{|z|\leq D_1+k_2}|F_1(z)|$, $k_2 := \max\{|x_0|,|x_T|\}$, $k_3 := \frac{|x_T - x_0|}{T}$.

Podobně přidáním předpokladu, že je mnohoznačné zobrazení F_1 omezené, tj. $M_1 := \max\limits_{z\in\mathbb{R}}|F_1(z)|$, a $b = 0$, pak může být podmínka (5.10) nahrazena $\frac{1}{T} > |a|$, za předpokladu, že ještě existuje kladná konstanta D_2 taková, že

$$D_2 \geq \frac{\mathscr{P} + T\,(M_1 + M_2(D_2) + |a|k_3 + |c|)}{1 - T|a|},$$

kde $M_2(D_2) := \max\limits_{|z|\leq D_2+k_3}|F_2(z)|$. Tady má úloha (1.2) řešení $x(\cdot)$ takové, že

$$\begin{aligned}
&\max_{t\in J}|x(t)| \leq D_1 + k_2 := \frac{T}{4}\left[\mathscr{P} + T\,(M_1 + M_2(D_2) + |a|(D_2 + k_3) + |c|)\right] + k_2,\\
&\max_{t\in J}|x'(t)| \leq D_2 + k_3.
\end{aligned}$$

Nyní se budeme stejně jako v Podkapitole 4.2 zabývat existencí řešení úlohy (5.1), ale tentokrát formálně zapsaném ve tvaru:

$$\left.\begin{array}{l}
x''(t) + a\,x'(t) + b\,x(t) \in F(t,x(t),x'(t)), \quad \text{pro skoro všechna } t \in J,\\
x(0) = x_0,\; x(T) = x_T,
\end{array}\right\}$$

kde $F(t,x(t),x'(t)) := P(t) + F_1(x(t)) + F_2(x'(t)) - c\,\mathrm{Sgn}\,x'(t)$ je u-carathéodoryovské mnohoznačné zobrazení a $Lx(t) := x''(t) + ax'(t) + bx(t)$. Toto nám umožní uvažovat různé Greenovy funkce sdružených s úplným lineárním diferenciálním oprátorem, jejichž jednotlivé tvary jsou uvedeny v Podkapitole 4.2.

Jelikož se podmínky řešitelnosti odvozují stejným způsobem jako v předchozí části, resp. jako v Kapitole 4, uvedeme tato kritéria bez důkazu:

Věta 5.2. *Nechť a, b, c, x_0, x_T a $T > 0$ jsou reálné konstanty. Předpokládejme, že $P\colon J \multimap \mathbb{R}$ je aumannovsky integrovatelné mnohoznačné zobrazení, $J = [0,T]$ je kompaktní interval a $F_1|_{\overline{B}_D}\colon \overline{B}_D \multimap \mathbb{R}$, $F_2|_{\overline{B}_D}\colon \overline{B}_D \multimap \mathbb{R}$ jsou shora polospojitá mnohoznačná zobrazení s konvexními a kompaktními hodnotami, taková, že*

$$M_1(D_0) := \max_{|z|\le D_0+k_2+k_3} |F_1(z)|, \quad M_2(D_0) := \max_{|z|\le D_0+k_2+k_3} |F_2(z)|,$$

kde $\overline{B}_D := \{z \in \mathbb{R}^n \mid ||z|| \le D\}$, $M_1 = M_1(D_0)$ a $M_2 = M_2(D_0)$ jsou vhodné konstanty, $D = D_0 + k_2 + k_3$. Dále předpokládejme, že $D_0 > 0$ je vhodná konstanta taková, že

$$D_0 \ge \Delta_j(D_0), \quad j = 2,3,4 \quad \textit{(v závislosti na konstantách a a b)},$$

kde 1) pro $a^2 - 4b > 0$: ($j = 2$)

$$\Delta_2(D_0) := \frac{e^{(\lambda_1-\lambda_2)T}}{\sqrt{a^2-4b}}\left[1+|\lambda_1|+|\lambda_2|\right]$$
$$\times\left[\mathscr{P} + T\left(M_1(D_0)+M_2(D_0)+|c|+|a|k_3+|b|k_2\right)\right],$$

kde $\lambda_1 = \frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2}$,
2) pro $a^2 - 4b = 0$ ($j = 3$)

$$\Delta_3(D_0) := e^{\frac{|a|}{2}T}\left[1+\frac{T}{4}(1+2|a|)\right]$$
$$\times\left[\mathscr{P} + T\left(M_1(D_0)+M_2(D_0)+|c|+|a|k_3+|b|k_2\right)\right],$$

3) pro $a^2 - 4b < 0$ a $T \ne \frac{2\pi k}{\sqrt{4b-a^2}}$, $k \in \mathbb{N}$ ($j = 4$)

$$\Delta_4(D) := \frac{\mathrm{e}^{\frac{|a|}{2}T}\left[2+|a|+\sqrt{4b-a^2}\right]}{\sqrt{4b-a^2}\left|\sin(\frac{T}{2}\sqrt{4b-a^2})\right|}$$
$$\times\left[\mathscr{P} + T\left(M_1(D_0)+M_2(D_0)+|c|+|a|k_3+|b|k_2\right)\right]$$

a

$$k_1 := \max\{|a|,|b|\}, \quad k_2 := \max\{||x_0||,||x_T||\}, \quad k_3 := \frac{||x_T - x_0||}{T},$$

$$\mathscr{P} := \sup_{p\subset P}\left\{ \int_0^T ||p(t)||\,\mathrm{d}t \mid p\subset P \textit{ je lebesgueovsky integrovatelná selekce} \right.$$

$$\left. \textit{zobrazení } P \right\}.$$

Pak má úloha (1.2) Filippovovo řešení $x(\cdot)$ takové, že

$$\max_{t\in J}\{|x(t)|+|x'(t)|\} \le D.$$

S ohledem na Poznámku 5.3 a výše uvedené odhady, můžeme ihned formulovat následující důsledek pro lebesgueovsky integrovatelnou selekci $p\subset P$ a $F_1(x) := d\sin x$.

Důsledek 5.1. Nechť b, c, d, x_0, x_T a $T>0$ jsou reálné konstanty, a $p\colon [0,T]\to \mathbb{R}$ je lebesgueovsky integrovatelné zobrazení, kde $\mathscr{P} := \int\limits_0^T |p(t)|\,\mathrm{d}t < \infty$. Pak existuje Filippovovo řešení $x(\cdot)$ úlohy

$$\left.\begin{array}{l} x''(t)+bx(t)+c\,\mathrm{sgn}x'(t)+d\sin x(t) = p(t), \text{ pro s. v. } t\in[0,T], \\ x(0)=x_0,\ x(T)=x_T, \end{array}\right\} \tag{5.13}$$

takové, že pro $0<b\neq\left(\frac{k\pi}{T}\right)^2$, $k\in\mathbb{N}$,

$$\max_{t\in[0,T]}|x(t)| \le \frac{\mathscr{P}+T\,[|b|k_2+|c|+|d|]}{\sqrt{b}\left|\sin(\sqrt{b}T)\right|}+k_2,$$

$$\max_{t\in[0,T]}|x'(t)| \le \frac{\mathscr{P}+T\,[|b|k_2+|c|+|d|]}{\left|\sin(\sqrt{b}T)\right|}+\frac{|x_T-x_0|}{T}.$$

Pro $b<0$ a $b=0$, obdržíme příslušné odhady

$$\max_{t\in[0,T]}|x(t)| \le \frac{e^{2\sqrt{-b}T}}{2\sqrt{-b}}\,[\mathscr{P}+T\,(|b|k_2+|c|+|d|)]+k_2,$$

$$\max_{t\in[0,T]}|x'(t)| \le e^{2\sqrt{-b}T}\,[\mathscr{P}+T\,(|b|k_2+|c|+|d|)]+\frac{|x_T-x_0|}{T},$$

a

$$
\begin{aligned}
\max_{t\in[0,T]} |x(t)| &\le \frac{T\,[\mathscr{P}+T(|c|+|d|)]}{4}+k_2,\\
\max_{t\in[0,T]} |x'(t)| &\le \mathscr{P}+T(|c|+|d|)+\frac{|x_T-x_0|}{T},
\end{aligned}
$$

kde $k_2=\max\{|x_0|,|x_T|\}$.

Poznámka 5.4. Poznamenejme, že pro $b=0$, se závěr Důsledku 5.1 zredukuje na Dirichletův problém pro buzené kyvadlo se suchým třením, zatímco pro $d=0$, se výsledek týká Dirichletova problému pro buzený „lineární“ oscilátor se suchým třením. Navíc, podmínka nerezonance $b\neq\left(\frac{k\pi}{T}\right)^2$, $k\in\mathbb{N}$, rozlišena v Důsledku 5.1 ve třech případech ($b>0$, $b<0$, $b=0$), je očividně optimální, když ji srovnáme se všemi jejími analogiemi diskutovanými výše (porovnej s (5.10), Poznámka 5.2 a Poznámka 5.3).

Konečně, můžeme také uvažovat případ s $c=0$ Dirichletova problému (5.1) ve vektorové formě v $\mathbb{R}^n$, tj. nechť a,b, $(c=0)$ a $T>0$ jsou stále reálné konstanty, ale $x_0,x_T\in\mathbb{R}^n$, $F_1\colon\mathbb{R}^n\multimap\mathbb{R}^n$, $F_2\colon\mathbb{R}^n\multimap\mathbb{R}^n$ jsou shora polospojitá mnohoznačná zobrazení s konvexními a kompaktními hodnotami a $P\colon J\multimap\mathbb{R}^n$ je aumannovsky (po složkách) integrovatelné zobrazení. Tímto způsobem mohou být členy suchého tření zahrnuty, po jejich Filippovově regularizaci, do některé složky zobrazení F_2.

Část II

Diferenční inkluze

6 Úvod

V této části práce se budeme zabývat vztahem mezi řešeními Dirichletových okrajových problémů pro systém diferenciálních inkluzí druhého řádu se shora polospojitými pravými stranami a příslušných numerických diskrétních Dirichletových okrajových problémů pro diferenční inkluze druhého řádu. Nejprve bude diskutována existence a odhad řešení diskrétní okrajové úlohy stejnoměrně vzhledem k diskrétní velikosti kroku. Dále je studována konvergence řešení numerického diskrétního okrajového problému a odpovídajícího polospojitého okrajového problému: ukážeme, v jakém smyslu konvergují řešení diskrétního problému k řešení polospojitého problému. K tomu budeme potřebovat požadavek omezenosti řešení a jejich prvních diferencí nezávislých na velikosti diskretizačního kroku, čemuž se budeme nejprve věnovat.

Budeme tedy vyšetřovat systém diskrétních okrajových úloh (1.3) zahrnující diferenční inkluze druhého řádu a Dirichletovy okrajové podmínky (1.4), kde F je shora polospojité mnohoznačné zobrazení s kompaktními a konvexními hodnotami, velikost kroku $h = \dfrac{T}{n}$, kde T je kladná konstanta a $n \geq 2$, a $t_i = ih$ jsou pro $i = 0, \dots, n$ body sítě.

Diference jsou dány vztahy

$$\begin{aligned} \Delta x_i &= x_{i+1} - x_i, \text{ pro} \quad i = 0, \dots, n-1, \\ \Delta^2 x_{i-1} &= x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}, \text{ pro} \quad i = 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Vedle diskrétních úloh budeme také uvažovat odpovídající mnohoznačnou úlohu (1.5), (1.6).

Řešením úlohy (1.3), (1.4) je konečná posloupnost, vektor $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{m(n+1)}$, kde $x_i \in \mathbb{R}^m$, $i = 0, 1, \dots, n$, splňující (1.3) pro $i = 1, \dots, n-1$ a (1.4).

Řešením úlohy (1.5), (1.6) rozumíme funkci $x\colon [0, T] \to \mathbb{R}^m$ s absolutně spojitou první derivací splňující (1.5), (1.6).

7 Diskrétní Dirichletovy okrajové problémy se shora polospojitou pravou stranou

7.1. Existence řešení a jeho odhad

V této podkapitole nejprve ukážeme, že existuje řešení úlohy (1.3), (1.4), jestliže $F(t,u,v)$ splňuje lineární růstovou podmínku vzhledem k u a v. Existenční věta bude založena na Kakutaniho větě o pevném bodě. Vedle existence bude také obdržen lokalizační výsledek pro řešení a jeho první diference.

Věta 7.1. *Nechť je $F\colon [0,T]\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m \multimap \mathbb{R}^m$ s kompaktními a konvexními hodnotami takové, že $F(t,\cdot,\cdot)$ je shora polospojité pro každé $t\in[0,T]$. Nechť a,b,c jsou nezáporné reálné konstanty takové, že*

$$||y|| \le a||u|| + b||v|| + c, \quad \forall (t,u,v)\in[0,T]\times\mathbb{R}^{2m},\ \forall y\in F(t,u,v) \tag{7.1}$$

a platí

$$8 > T(T+4)M, \tag{7.2}$$

kde $M=\max\{a,b\}$. Pak má diskrétní úloha (1.3), (1.4) řešení $(x_0,\dots,x_n)$ takové, že

$$\max_{i\in\{0,\dots,n\}} ||x_i|| + \max_{i\in\{0,\dots,n-1\}} \frac{||\Delta x_i||}{h} \le \frac{T(T+4)c}{8-T(T+4)M}.$$

Důkaz. Pro řešitelnost mnohoznačné úlohy (1.3), (1.4), užijeme Schauderovu linearizaci jako [55, 62]. Definujeme množinu $Q\subset\mathbb{R}^{m(n+1)}$ tak, že

$$Q=\left\{q\in\mathbb{R}^{m(n+1)} : ||q||\le K\right\},$$

kde $||q|| = \left\{\max_{i\in\{0,\dots,n\}} ||q_i|| + \max_{i\in\{0,\dots,n-1\}} \frac{||\Delta q_i||}{h}\right\}$ a $K>0$ je vhodná konstanta, která bude později specifikována.

Pro každé $q \in Q$ uvažujme linearizovanou úlohu

$$\frac{\Delta^2 x_{i-1}}{h^2} \in F\left(t_i, q_i, \frac{\Delta q_i}{h}\right), \quad i = 1, \ldots, n-1, \tag{7.3}$$

$$x_0 = 0, \quad x_n = 0. \tag{7.4}$$

Jelikož, pro všechna $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, existuje $f_i \in F\left(t_i, q_i, \frac{\Delta q_i}{h}\right)$, můžeme uvažovat jednoznačný Dirichletův problém

$$\frac{\Delta^2 x_{i-1}}{h^2} = f_i, \quad i = 1, \ldots, n-1, \tag{7.5}$$

$$x_0 = 0, \quad x_n = 0. \tag{7.6}$$

Úloha (7.5), (7.6) je ekvivalentní se sumační rovnicí (viz např. [39])

$$x_i = h \sum_{j=1}^{n-1} G(t_i, t_j) f_j, \quad i = 0, \ldots, n, \tag{7.7}$$

kde $G(t_i, t_j)$ je Greenova funkce pro následující diskrétní okrajovou úlohu

$$\frac{\Delta^2 x_{i-1}}{h^2} = 0, \quad i = 1, \ldots, n-1,$$

$$x_0 = 0, \quad x_n = 0,$$

a je explicitně dána vztahem

$$G(t_i, t_j) = \begin{cases} -\frac{(T-t_j)t_i}{T}, \text{ pro } 0 \le i \le j \le n, \\ -\frac{(T-t_i)t_j}{T}, \text{ pro } 0 \le j \le i \le n. \end{cases} \tag{7.8}$$

Více výsledků Greenových funkcí pro diferenční rovnice lze nalézt např. v [19, 20, 32].

Tímto způsobem můžeme psát

$$x_i \in \mathscr{F}(i, q) := \left\{ h \sum_{j=1}^{n-1} G(t_i, t_j) f_j, \ f_j \in F\left(t_j, q_j, \frac{\Delta q_j}{h}\right) \right\}, \quad i = 0, \ldots, n, \tag{7.9}$$

jako apriorní tvar řešení úlohy (7.3), (7.4).

Uvažujme operátor $\mathscr{G}\colon Q \multimap \mathbb{R}^{m(n+1)}$ takový, že

$$\mathscr{G}(x) := (\mathscr{F}(0,x), \mathscr{F}(1,x), \dots, \mathscr{F}(n-1,x), \mathscr{F}(n,x)).$$

Pak je existence řešení úlohy (7.3), (7.4) ekvivalentní existenci pevného bodu mnohoznačného operátoru $\mathscr{G}$. Za tímto účelem užijeme Kakutaniho větu o pevném bodě (Propozice 2.3) - ověříme všechny jeho předpoklady:

(i) Jelikož je úloha (7.5), (7.6) jednoznačně řešitelná, je množina $\mathscr{G}(q)$ neprázdná pro každé $q \in Q$.

(ii) Ukažme, že $\mathscr{G}\colon Q \multimap Q$. Nechť $q \in Q$ a $g(i,q) \in \mathscr{F}(i,q)$. Pak existuje $f_i \in F\left(t_i, q_i, \frac{\Delta q_i}{h}\right)$ pro všechna $i \in \{0, \dots, n\}$ taková, že

$$g(i,q) = \sum_{j=1}^{n-1} G(t_i,t_j) f_j$$

pro všechna $i \in \{0, \dots, n\}$. Užitím normy a předpokladu (7.1) obdržíme

$$||g(i,q)|| \leq h \sum_{j=1}^{n-1} |G(t_i,t_j)| \left[a||q_j|| + b\frac{||\Delta q_j||}{h} + c\right], \quad i = 0, \dots, n, \tag{7.10}$$

a

$$\frac{||\Delta g(i,q)||}{h} \leq \sum_{j=1}^{n-1} |\Delta G(t_i,t_j)| \left[a||q_j|| + b\frac{||\Delta q_j||}{h} + c\right], \quad i = 0, \dots, n-1. \tag{7.11}$$

Navíc máme (viz např.[55])

$$h \sum_{j=1}^{n-1} |G(t_i,t_j)| = \frac{t_i(T-t_i)}{2} \leq \frac{T^2}{8}, \quad i = 0, \dots, n, \tag{7.12}$$

a

$$\sum_{j=1}^{n-1} |\Delta G(t_i,t_j)| = \frac{h}{T}\left[\sum_{j=1}^{i} t_j + \sum_{j=i+1}^{n-1} (T - t_j)\right] \leq \frac{T-h}{2} \leq \frac{T}{2}, \quad i = 0, \dots, n-1. \tag{7.13}$$

Proto pomocí (7.12), (7.13) a jestliže vezmeme maximum v (7.10), (7.11) (připomeňme, že $M = \max\{a,b\}$), dostaneme

$$\max_{i\in\{0,\ldots,n\}} ||g(i,q)|| + \max_{i\in\{0,\ldots,n-1\}} \frac{||\Delta g(i,q)||}{h} \leq \frac{T(T+4)}{8}\left[MK+c\right]. \quad (7.14)$$

Jelikož je tento odhad splněn pro všechna $q \in Q$ a pro všechna $f_i \in F\left(t_i, q_i, \frac{\Delta q_i}{h}\right)$, $i = 0,\ldots,n$, je množina $\mathscr{G}(Q)$ omezená.

Navíc podle (7.2), jestliže $K := \dfrac{T(T+4)c}{8-T(T+4)M}$ je nahrazena v pravé straně poslední nerovnosti (7.14), dostaneme, že mnohoznačný operátor $\mathscr{G}$ splňuje $\mathscr{G}: Q \multimap Q$.

(iii) Ukážeme, že je operátor $\mathscr{G}$ shora polospojitý. Vzhledem k Lemmatu 2.2, je dostačující ukázat, že je graf $\Gamma_{\mathscr{G}} = \{(x,z) \mid x \in Q, z \in \mathscr{G}(x)\}$ uzavřený. Nechť $\{(x^l,z^l)\}_{l\in\mathbb{N}} \in \Gamma_{\mathscr{G}}$ je posloupnost taková, že $x^l = (x_0^l,\ldots,x_n^l) \to x = (x_0,\ldots,x_n)$ a $z^l = (z_0^l,\ldots,z_n^l) \to z = (z_0,\ldots,z_n)$. Podle definice platí

$$z^l \in \mathscr{G}(x^l) \Leftrightarrow z_i^l = h\sum_{j=1}^{n-1} G(t_i,t_j)f_j^l,\ f_j^l \in F\left(t_j, x_j^l, \frac{\Delta x_j^l}{h}\right), \quad i = 0,\ldots,n.$$

Jelikož je posloupnost $\{f_j^l\}_{l\in\mathbb{N}}$ omezená pro všechna $j = 1,\ldots,n-1$, existuje podposloupnost posloupnosti $\{f_j^l\}_{l\in\mathbb{N}}$, pro jednoduchost označena stejně jako posloupnost, která konverguje k f_j pro všechna $j = 1,\ldots,n-1$.

Protože $\dfrac{\Delta x_j^l}{h} = \dfrac{x_{j+1}^l - x_j^l}{h} \to \dfrac{x_{j+1}-x_j}{h} = \dfrac{\Delta x_j}{h}$ a F je shora polospojité v druhé a třetí proměnné (a tedy graf $\Gamma_{F(t_j,\cdot,\cdot)}$ je uzavřený), pak $f_j \in F\left(t_j, x_j, \frac{\Delta x_j}{h}\right)$.

Tudíž,

$$z_i = h\sum_{j=1}^{n-1} G(t_i,t_j)f_j,\ f_j \in F\left(t_j, x_j, \frac{\Delta x_j}{h}\right), \quad i = 0,\ldots,n \Leftrightarrow z \in \mathscr{G}(x),$$

tj. graf $\Gamma_{\mathscr{G}}$ je uzavřený. Navíc, jelikož je množina $\mathscr{G}(Q)$ omezená a uzavřená, je tato množina také kompaktní. Tedy zobrazení $\mathscr{G}$ je shora polospojité s kompaktními hodnotami.

(iv) Nakonec ukážeme, že má zobrazení $\mathscr{G}$ konvexní hodnoty tj. množina $\mathscr{G}(x)$ je konvexní, pro všechna $x \in Q$. Nechť $z^1, z^2 \in \mathscr{G}(x)$. Pak pro $k = 1,2$, $z^k = \left(z_0^k, z_1^k, \dots, z_{n-1}^k, z_n^k\right)$:

$$
\begin{aligned}
z^k &\in \left(\mathscr{F}(0,x), \mathscr{F}(1,x), \dots, \mathscr{F}(n-1,x), \mathscr{F}(n,x)\right), \\
z_i^k &\in \mathscr{F}(i,x),\ i = 0, \dots, n, \\
z_i^k &= h \sum_{j=1}^{n-1} G(t_i,t_j) f_j^k,\ f_j^k \in F\left(t_j, x_j, \frac{\Delta x_j}{h}\right).
\end{aligned}
$$

Nechť je $\lambda \in [0,1]$ libovolné. Pak

$$
\lambda z^1 + (1-\lambda) z^2 = \left(\lambda z_0^1 + (1-\lambda) z_0^2, \dots, \lambda z_n^1 + (1-\lambda) z_n^2\right).
$$

Pro i-tou složku máme

$$
\begin{aligned}
\lambda z_i^1 + (1-\lambda) z_i^2 &= h\lambda \sum_{j=1}^{n-1} G(t_i,t_j) f_j^1 + (1-\lambda) h \sum_{j=1}^{n-1} G(t_i,t_j) f_j^2 \\
&= h \sum_{j=1}^{n-1} G(t_i,t_j) \left[\lambda f_j^1 + (1-\lambda) f_j^2\right].
\end{aligned}
$$

Jelikož F má konvexní hodnoty,

$$
\lambda f_j^1 + (1-\lambda) f_j^2 \in F\left(t_j, x_j, \frac{\Delta x_j}{h}\right).
$$

Proto,

$$
\lambda z_i^1 + (1-\lambda) z_i^2 \in \mathscr{F}(i,x).
$$

Stejný výsledek platí pro všechna $i \in \{0, \dots, n\}$. Z tohoto důvodu je množina $\mathscr{G}(x)$ konvexní. Jelikož stejný závěr platí pro všechna $x \in Q$, má zobrazení $\mathscr{G}$ konvexní hodnoty.

Nakonec, užitím Propozice 2.3 obdržíme existenci pevného bodu mnohoznačného zobrazení $\mathscr{G}$, který reprezentuje řešení úlohy (1.3), (1.4). $\square$

Příklad 7.1. Uvažujme diskrétní okrajovou úlohu

$$\frac{\Delta^2 x_{i-1}}{h^2} \in a(t_i)\frac{\Delta x_i}{h} + b(t_i)x_i + c(t_i), \quad i = 1,\dots,n-1, \tag{7.15}$$

$$x_0 = 0, \quad x_n = 0, \tag{7.16}$$

kde a, b jsou omezené funkce na $[0,1]$ a $c\colon [0,1] \multimap [0,1]$:

$$c(t) = \begin{cases} [0,1], & \text{pro} \quad t \neq \frac{1}{2}, \\ \left[0, \frac{1}{2}\right], & \text{pro} \quad t = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Jestliže

$$5 \max\{ \sup_{t\in[0,1]} |a(t)|, \sup_{t\in[0,1]} |b(t)|\} < 8,$$

pak podle Věty 7.1 má úloha (7.15), (7.16) řešení $(x_0,\dots,x_n)$ pro každé $n \geq 2$.

Klíčovým bodem výše uvedeného důkazu je výsledek apriorní omezenosti v části (ii). Využijeme-li výsledky [62, 68], můžeme uvažovat sofistikovanější podmínky, než jsou lineární růstové.

Věta 7.2. *Nechť je $F\colon [0,T] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \multimap \mathbb{R}^m$ s kompaktními a konvexními hodnotami takové, že $F(t,\cdot,\cdot)$ je shora polospojité pro každé $t \in [0,T]$. Nechť $\langle\cdot,\cdot\rangle$ je euklidovský skalární součin na $\mathbb{R}^m$ s euklidovskou normou $\|\cdot\|$. Nechť a a c jsou nezáporné reálné konstanty takové, že*

$$||y|| \leq a\left(2\langle u,y\rangle + ||v||^2\right) + c, \quad \forall (t,u,v) \in [0,T]\times\mathbb{R}^{2m},\ \forall y \in F(t,u,v). \tag{7.17}$$

Pak má diskrétní úloha (1.3), (1.4) řešení $(x_0,\dots,x_n)$ takové, že

$$\max_{i\in\{0,\dots,n\}} ||x_i|| \leq \frac{T^2 c}{8} + 1. \tag{7.18}$$

Jestliže navíc

$$2a\left(\frac{T^2 c}{8} + 1\right) < 1, \tag{7.19}$$

pak existuje konstanta R taková, že

$$\max_{i\in\{0,\dots,n-1\}} \frac{||\Delta x_i||}{h} \leq R. \tag{7.20}$$

Důkaz. (1.3) má tvar

$$\Delta^2 x_{i-1} \in F_h\left(t_i, x_i, \Delta x_i\right), \quad i = 1, \dots, n-1, \tag{7.21}$$

pro $F_h(t,u,v) := h^2 F\left(t,u,\frac{v}{h}\right)$. Pak (7.17) je ekvivalentní k

$$||y|| \le a\left(2\langle u,y\rangle + ||v||^2\right) + ch^2, \quad \forall (t,u,v) \in [0,T]\times\mathbb{R}^{2m},\ \forall y \in F_h(t,u,v). \tag{7.22}$$

Jelikož (7.22) dává [62, (2.2)], můžeme použít [62, Lemma 2.1, Věta 4.1] pro (7.21) k získání řešení $(x_0,\dots,x_n)$ úlohy (1.3), (1.4) splňující (7.18) (viz [62, (2.4)]).

Dále máme (viz [68, str. 764])

$$\begin{aligned} a\frac{\Delta^2||x_{i-1}||^2}{h^2} + c &= a\frac{||x_{i+1}||^2 - 2||x_i||^2 + ||x_{i-1}||^2}{h^2} + c \\ &= a\left(2\left\langle x_i, \frac{\Delta^2 x_{i-1}}{h^2}\right\rangle + \frac{||\Delta x_i||^2}{h^2} + \frac{||\Delta x_{i-1}||^2}{h^2}\right) + c \\ \ge^{z(7.5)} a\left(2\langle x_i, f_i\rangle + \frac{||\Delta x_i||^2}{h^2}\right) + c &\ge^{z(7.17)} ||f_i|| = \frac{||\Delta^2 x_{i-1}||}{h^2}. \end{aligned}$$

Užitím (7.18) a (7.19), odhad (7.20) plyne z [68, Lemma 1]. A tím je důkaz dokončen.

□

7.2. Konvergence řešení

V této podkapitole dokážeme větu o stejnoměrné konvergenci řešení jednoparametrické třídy diskrétních problémů k řešení polospojitého problému. Předpoklad apriorní omezenosti řešení a prvních diferencí nezávislých na velikosti diskretizačního kroku bude v následujícím lemmatu klíčový.

Budeme potřebovat následující notaci. Nechť $n_l \to +\infty$, když $l \to +\infty$, $h_l = \dfrac{T}{n_l}$ a $t_i^l = ih_l$ pro $i = 0,1,\dots,n_l$. Předpokládejme, že

$$\frac{\Delta^2 x_{i-1}^l}{h_l^2} \in F\left(t_i^l, x_i^l, \frac{\Delta x_i^l}{h_l}\right), \quad i = 1,\dots,n_l - 1, \tag{7.23}$$

$$x_0^l = 0, \quad x_{n_l}^l = 0, \tag{7.24}$$

má řešení $\left(x_0^l,\dots,x_{n_l}^l\right)$ pro $l \ge l_0$. Definujme spojitou funkci $x^l(t)$ pomocí lineární interpolace tak, že $x^l(t_i^l) = x_i^l$, tj.

$$x^l(t) = x_i^l + \frac{(x_{i+1}^l - x_i^l)(t-t_i^l)}{h_l}, \quad t_i^l \le t \le t_{i+1}^l, \quad i = 0,\dots,n_l-1.$$

Definujme $v_i^l \equiv \dfrac{\Delta x_i^l}{h_l}$, $i = 0,\dots,n_l-1$ a $v^l(t)$ pomocí lineární interpolace na $[0,T]$ následovně

$$v^l(t) = \begin{cases} v_i^l + \dfrac{(v_{i+1}^l - v_i^l)(t-t_i^l)}{h_l}, & t_i^l \le t \le t_{i+1}^l, \quad i = 0,\dots,n_l-2, \\ v_{n_l-1}^l, & t_{n_l-1}^l \le t \le T. \end{cases}$$

Lemma 7.1. *Nechť je $F\colon [0,T]\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m \multimap \mathbb{R}^m$ s kompaktními a konvexními hodnotami shora polospojité a splňující (7.1) pro nezáporné konstanty a,b a c. Předpokládejme, že úloha (7.23), (7.24) má řešení $\left(x_0^l,\dots,x_{n_l}^l\right)$ pro $l \ge l_0$ takové, že*

$$\max_i ||x_i^l|| \le \hat{K},\ \max_i ||v_i^l|| \le \hat{K} \text{ pro } l \ge l_0$$

pro konstantu $\hat{K} > 0$. Pak existuje podposloupnost $\{l_k\}_{k\ge1}$ a řešení $x(t)$ úlohy (1.5), (1.6) takové, že

$$\max_{t\in[0,T]} ||x^{l_k}(t) - x(t)|| + \max_{t\in[0,T]} ||v^{l_k}(t) - x'(t)|| \to 0 \quad \text{když} \quad k \to +\infty. \tag{7.25}$$

Důkaz. Jelikož $||x^l(t)|| \le \hat{K}$ a $||x^l(t) - x^l(s)|| \le \hat{K}|t-s|$ pro libovolné $t,s \in [0,T]$, užitím Arzelà–Ascoliho lemmatu platí, že existuje podposloupnost $\{x^{l_k}(t)\}$, která konverguje stejnoměrně na $[0,T]$ ke spojité funkci $x(t)$.

Definujme $w_i^l = \frac{\Delta^2 x_{i-1}^l}{h_l^2}$, $i = 1,\dots,n_l-1$ a $w^l(t)$ na $[0,T]$ pomocí

$$w^l(t) = \begin{cases} w_1^l, & 0 \le t \le t_1^l, \\ w_i^l, & t_i^l \le t < t_{i+1}^l, \quad i = 1,\dots,n_l-1, \\ w_{n_l-1}^l, & t = T. \end{cases}$$

Z (7.1) a (7.23) dostáváme $||w_i^l|| \le (a+b)\hat{K} + c := U$, pro $i = 1,\dots,n_l-1$, a tedy $||w^l(t)|| \le U$ pro libovolné $t \in [0,T]$. Poznamenejme, že $\frac{\Delta v_i^l}{h_l} = \frac{\Delta^2 x_i^l}{h_l^2} = w_{i+1}^l$ pro $i =$

$0,\dots,n_l-2$, tedy $\frac{||\Delta v_i^l||}{h_l} \le U$ pro $i=0,\dots,n_l-2$. Tudíž $||v^l(t)|| \le \hat{K}$ a $||v^l(t)-v^l(s)|| \le U|t-s|$ pro libovolné $t,s \in [0,T]$. Znovu užitím Arzelà–Ascoliho lemmatu existuje podposloupnost $\{v^{l_k}(t)\}$, která konverguje stejnoměrně na $[0,T]$ ke spojité funkci $v(t)$.

Uvažujme Hilbertův prostor $L^2([0,T],\mathbb{R}^m)$. Pak $\int_0^T \left(w^l(t)\right)^2 \mathrm{dt} \le U^2 T$. Tedy posloupnost $\{w^l(t)\}$ je omezená v $L^2([0,T],\mathbb{R}^m)$, a tedy existuje slabě konvergentní podposloupnost, tj. je možné předpokládat, že $w^l \rightharpoonup w$ v $L^2([0,T],\mathbb{R}^m)$.

Z dobře známé Mazurovy věty plyne existence posloupnosti $w_0^l \in \mathrm{conv}[\{w^{l_0}\}_{l_0 \ge l}]$ takové, že $w_0^l \to w$ v $L^2([0,T],\mathbb{R}^s)$, a tedy existuje podposloupnost $w^{l_k}(t) \to w(t)$ pro skoro všechna $t \in [0,T]$, kde $\mathrm{conv}[S]$ je konvexní obal podmnožiny $S \subset X$.

Vezměme $t \in (0,T)$ takové, že $w^{l_k}(t) \to w(t)$. Pak existuje podposloupnost $\{i_k\}$, $i_k \in \{1,\dots,n_{l_k}-1\}$ taková, že $t_{i_k}^{l_k} \to t$ když $k \to \infty$ a $w^{l_k}(t_{i_k}^{l_k}) = w^{l_k}(t)$, tedy $t \in [t_{i_k}^{l_k}, t_{i_k}^{l_k}+1)$. Jelikož $x^{l_k}(t) \rightrightarrows x(t)$ a $v^{l_k}(t) \rightrightarrows v(t)$ stejnoměrně na $[0,T]$, dostáváme

$$||x^{l_k}(t_{i_k}^{l_k}) - x(t_{i_k}^{l_k})|| + ||v^{l_k}(t_{i_k}^{l_k}) - v(t_{i_k}^{l_k})|| \to 0$$

když $k \to \infty$. Avšak $x(t)$ a $v(t)$ jsou spojité na $[0,T]$, tedy

$$||x(t_{i_k}^{l_k}) - x(t)|| + ||v(t_{i_k}^{l_k}) - v(t)|| \to 0$$

když $k \to \infty$. Tudíž dostáváme

$$x^{l_k}(t_{i_k}^{l_k}) \to x(t), \quad v^{l_k}(t_{i_k}^{l_k}) \to v(t)$$

když $k \to \infty$. Užitím

$$w^{l_k}(t) = w^{l_k}(t_{i_k}^{l_k}) \in F\left(t_{i_k}^{l_k}, x^{l_k}(t_{i_k}^{l_k}), v^{l_k}(t_{i_k}^{l_k})\right)$$

a shora polospojitosti zobrazení F dospějeme k

$$w(t) \in F(t,x(t),v(t)) \quad \text{pro skoro všechna} \quad t \in [0,T].$$

Nyní ukážeme, že $w(t) = x''(t)$ pro skoro všechna $t \in [0,T]$. Definujme funkci G^l takovou, že

$$\begin{aligned} G^l(t,t_j^l) &= G(t_i^l,t_j^l)\frac{t_{i+1}^l - t}{t_{i+1}^l - t_i^l} + G(t_{i+1}^l,t_j^l)\frac{t-t_i^l}{t_{i+1}^l - t_i^l}, \quad t_i^l \le t \le t_{i+1}^l, \\ G^l(t,s) &= G^l(t,t_j^l), \quad t_j^l \le s < t_{j+1}^l. \end{aligned}$$

Pak podle (7.9) dostaneme

$$x^l(t) = h_l \sum_{j=1}^{n_l-1} G^l(t,t_j^l) f_j^l = h_l \sum_{j=1}^{n_l-1} G^l(t,t_j^l) w_j^l = \int_0^T G^l(t,s) w^l(s) \mathrm{d}s, \tag{7.26}$$

jelikož

$$\int_0^T G^l(t,s) w^l(s) \mathrm{d}s = \sum_{j=0}^{n_l-1} \int_{t_j^l}^{t_{j+1}^l} G^l(t,s) w^l(s) \mathrm{d}s = \sum_{j=0}^{n_l-1} \int_{t_j^l}^{t_{j+1}^l} G^l(t,t_j^l) w_j^l \mathrm{d}s$$

$$= \sum_{j=0}^{n_l-1} G^l(t,t_j^l) w_j^l \left(t_{j+1}^l - t_j^l\right) = h_l \sum_{j=0}^{n_l-1} G^l(t,t_j^l) w_j^l.$$

Ukážeme, že funkce G^l konverguje stejnoměrně ke G. Jelikož je G stejnoměrně spojitá na $[0,T] \times [0,T]$, pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že $|G(t,s) - G(t',s')| < \varepsilon$ pro libovolné $|t-t'| < \delta$ a $|s-s'| < \delta$. Nechť $l_\delta > l_0$ je takové, že $h_l < \delta$ pro libovolné $l \geq l_\delta$. Vezměme $s,t \in [0,T]$, $l \geq l_\delta$ a nechť i,j jsou indexy takové, že $t \in [t_i^l, t_{i+1}^l]$ a $s \in [t_j^l, t_{j+1}^l]$, tj. $|t - t_i^l| \leq h_l$, $|s - t_j^l| \leq h_l$. Pak

$$G(t,s) - G^l(t,s) = G(t,s) - G(t_i^l,t_j^l) \frac{t_{i+1}^l - t}{t_{i+1}^l - t_i^l} - G(t_{i+1}^l,t_j^l) \frac{t - t_i^l}{t_{i+1}^l - t_i^l}$$

$$= \left[G(t,s) - G(t_i^l,t_j^l)\right] \frac{t_{i+1}^l - t}{t_{i+1}^l - t_i^l} + \left[G(t,s) - G(t_{i+1}^l,t_j^l)\right] \frac{t - t_i^l}{t_{i+1}^l - t_i^l}.$$

Z toho důvodu

$$\left|G(t,s) - G^l(t,s)\right| \leq \left|G(t,s) - G(t_i^l,t_j^l)\right| \frac{t_{i+1}^l - t}{t_{i+1}^l - t_i^l} + \left|G(t,s) - G(t_{i+1}^l,t_j^l)\right| \frac{t - t_i^l}{t_{i+1}^l - t_i^l}$$

$$\leq \varepsilon \left[\frac{t_{i+1}^l - t}{t_{i+1}^l - t_i^l} + \frac{t - t_i^l}{t_{i+1}^l - t_i^l}\right] = \varepsilon$$

a tedy $\left|G(t,s) - G^l(t,s)\right| \leq \varepsilon$, $\forall (t,s) \in [0,T] \times [0,T]$ a $l \geq l_\delta$.

Dále máme

$$\left|\int_0^T G^l(t,s) w^l(s) \mathrm{d}s - \int_0^T G(t,s) w(s) \mathrm{d}s\right| \leq \int_0^T \left|G(t,s) - G^l(t,s)\right| |w(s)| \mathrm{d}s$$

$$+ \int_0^T |G^l(t,s)| \left|w^l(s) - w(s)\right| \mathrm{d}s \leq \varepsilon U T + \max_{[0,T]\times[0,T]} |G| \int_0^T \left|w^l(s) - w(s)\right| \mathrm{d}s.$$

Jelikož $\left|w^l(s) - w(s)\right| \le 2U \ \forall l$, plyne z Lebesgueovy dominantní věty o konvergenci, že $\lim\limits_{l\to\infty} \int_0^T |w^l(s) - w(s)|\mathrm{d}s = 0$. Proto

$$\int_0^T G^l(t,s)w^l(s)\mathrm{d}s \to \int_0^T G(t,s)w(s)\mathrm{d}s \quad \text{pro} \quad l \to +\infty$$

a užitím (7.26) a $x^l(t) \to x(t)$ dostáváme

$$x(t) = \int_0^T G(t,s)w(s)\mathrm{d}s \Rightarrow x''(t) = w(t) \quad \text{pro skoro všechna} \quad t \in [0,T].$$

Poslední věc, kterou je potřeba ukázat je, že $v(t) = x'(t)$ pro všechna $t \in [0,T]$: pomocí $||x^l(t) - x^l(s)|| \le \hat{K}|t-s|$ pro libovolné $t,s \in [0,T]$, tedy funkce $x^l(t)$ jsou absolutně spojité, dostaneme

$$x^l(t) = \int_0^t \left[x^l(s)\right]' \mathrm{d}s.$$

Jelikož pro $t_i^l < s < t_{i+1}^l$, $0 \le i \le n_l - 2$ máme

$$\left\| \left[x^l(s)\right]' - v^l(s) \right\| = \frac{\|\Delta v_i^l\|(s - t_i^l)}{h_l} \le U h_l,$$

dostáváme $\left[x^l(s)\right]' - v^l(s) \to 0$ pro skoro všechna $s \in [0,T]$. Na druhou stranu

$$\left\| \left[x^l(s)\right]' - v^l(s) \right\| \le 2\hat{K}.$$

Tedy Lebesgueova dominantní věta o konvergenci dává

$$\int_0^T \left\| \left[x^l(s)\right]' - v^l(s) \right\| \mathrm{d}s \to 0$$

když $l \to \infty$. Pak

$$\left\| x(t) - \int_0^t v(s)\mathrm{d}s \right\| \le ||x(t) - x^l(t)|| + \left\| x^l(t) - \int_0^t v(s)\mathrm{d}s \right\|$$

$$\le ||x(t) - x^l(t)|| + \int_0^T \left\| \left[x^l(s)\right]' - v^l(s) \right\| \mathrm{d}s + \int_0^T \left\| v^l(s) - v(s) \right\| \mathrm{d}s \to 0$$

když $l \to \infty$, jelikož $x^l \to x$ a $v^l \to v$ stejnoměrně na $[0,T]$. Proto

$$x(t) = \int_0^t v(s)\mathrm{d}s,$$

a tím je důkaz dokončen. $\square$

Věta 7.3. *Předpokládejme, že jsou splněny předpoklady Lemmatu 7.1 a že existují konstanty $h_0 \geq 0$ a $K \geq 0$ takové, že jestliže $(x_0,\ldots,x_n)$ je řešení úlohy (1.3), (1.4) s $h \leq h_0$, pak*

$$||x_i|| \leq K, \quad i = 0,1,\ldots,n,$$

a

$$\left|\left|\frac{x_i - x_{i-1}}{h}\right|\right| \leq K, \quad i = 1,2\ldots,n.$$

Pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje $h(\varepsilon)$ takové, že jestliže $h \leq h(\varepsilon)$ a $(x_0,\ldots,x_n)$ je řešení úlohy (1.3), (1.4), pak existuje řešení $x(t)$ úlohy (1.5), (1.6) takové, že

$$\max_{[0,T]} ||x(t,\overline{x}) - x(t)|| \leq \varepsilon$$

a

$$\max_{[0,T]} ||v(t,\overline{x}) - x'(t)|| \leq \varepsilon,$$

kde

$$x(t,\overline{x}) = x_i + \frac{(x_{i+1}-x_i)(t-t_i)}{h}, \quad t_i \leq t \leq t_{i+1}, \quad i = 0,\ldots,n-1,$$

$$v(t,\overline{x}) = \begin{cases} \dfrac{x_{i+1}-x_i}{h} + \dfrac{(x_{i+2}-2x_{i+1}+x_i)(t-t_i)}{h^2}, & t_i \leq t \leq t_{i+1}, 0 \leq i \leq n-2, \\ \dfrac{x_n - x_{n-1}}{h}, & t_{n-1} \leq t \leq T. \end{cases}$$

Důkaz. Budeme postupovat jako v [32]. Předpokládejme, že je závěr nesprávný. Pak existuje pro nějaké $\varepsilon > 0$ posloupnost $\{h_l\}$ taková, že $h_l \to 0$ a pro $h = h_l = \frac{T}{n_l}$ má úloha (1.3), (1.4) řešení $\left(x_0^l,\ldots,x_{n_l}^l\right)$ takové, že je pro každé řešení $x(t)$ úlohy (1.5), (1.6) splněna jedna z nerovností

$$\begin{aligned} \max_{[0,T]} ||x^l(t) - x(t)|| &> \varepsilon, \\ \max_{[0,T]} ||v^l(t) - x'(t)|| &> \varepsilon. \end{aligned} \tag{7.27}$$

Navíc, pro l dostatečně velké platí

$$\max_i ||x_i^l|| \le K \quad \text{a} \quad \max_i \frac{||x_i^l - x_{i-1}^l||}{h_l} \le K.$$

Užitím Lemmatu 7.1 obdržíme podposloupnost posloupnosti $\{l\}$ a řešení $x(t)$ úlohy (1.5), (1.6), které zajistí opak k nerovnostem (7.27). $\square$

Příklad 7.2. Nechť je $T = 1$ a uvažujme diskrétní okrajovou úlohu

$$\frac{\Delta^2 x_{i-1}}{h^2} \in [t_i, 1]\, x_i + c\left(\frac{\Delta x_i}{h}\right), \quad i = 1, \dots, n-1, \tag{7.28}$$

$$x_0 = 0, \quad x_n = 0, \tag{7.29}$$

kde

$$c(y) = \begin{cases} -1, \text{ pro} & y < 0, \\ [-1,1], \text{ pro} & y = 0, \\ 1, \text{ pro} & y > 0. \end{cases}$$

Pak, jelikož jsou splněny předpoklady Věty 7.1, má úloha (7.28), (7.29) řešení $\left(x_0^n, \dots, x_n^n\right)$ pro každé $n \ge 2$ takové, že

$$\max_{i \in \{0,\dots,n\}} ||x_i^n|| + \max_{i \in \{0,\dots,n-1\}} \frac{||\Delta x_i^n||}{h} \le \frac{5}{3}.$$

Z Věty 7.3 dostáváme existenci řešení $x(\cdot)$ k příslušné úloze

$$x'' \in [t, 1]\, x + c\left(x'\right), \quad t \in [0,1], \tag{7.30}$$

$$x(0) = 0, \quad x(1) = 0, \tag{7.31}$$

takovému, že (7.25) platí pro nějakou posloupnost $\left(x_0^{n_i}, \dots, x_{n_i}^{n_i}\right)$ řešení úlohy (7.28), (7.29).

Poznámka 7.1. Mnohoznačné zobrazení F z Věty 7.1 splňující pouze (7.1) není shora polospojité, ale existuje shora polospojité mnohoznačné zobrazení $\overline{F}$ takové, že $F(\cdot,\cdot,\cdot) \subset \overline{F}(\cdot,\cdot,\cdot)$. Ve skutečnosti, můžeme vzít

$$\overline{F}(t,u,v) = \{y \in \mathbb{R}^n : ||y|| \leq a||u|| + b||v|| + c\}.$$

Toto zobrazení $\overline{F}$ je samozřejmě velmi hrubé. Potřebujeme nejmenší takové. Toho může být dosaženo, když přidáme předpoklad, že je F měřitelné. Pak můžeme použít Filippovovu regularizaci F (viz Podkapitola 2.1, nebo např. [8], strana 300) k získání nejmenšího $\overline{F}$. V tomto případě, řešení ve Větě 7.1 bude konvergovat k řešení diferenciální inkluze s pravou stranou $\overline{F}$. Ukážeme to na následujícím příkladě:

Nechť je $T = 1$ a

$$F(t,u,v) = \begin{cases} 0, & \text{pro } t \in \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \\ A > 0, & \text{pro } t \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Pro $t_i = \frac{i}{n}$, $i = 0, \ldots, n$, je řešení ve Větě 7.1 jediné a podle (7.9) má tvar

$$x_i^n = \begin{cases} A\dfrac{t_i}{2}(t_{i_n} - 1)(1 - t_{i_n+1}), & \text{pro } 0 \leq i \leq i_n = \left\lfloor \frac{\sqrt{2}n}{2} \right\rfloor, \\ -A\dfrac{(1-t_i)}{2}(t_i - t_{i_n}t_{i_n+1}), & \text{pro } i_n + 1 \leq i \leq n, \end{cases}$$

kde $\lfloor x \rfloor$ je největší celé číslo ne větší než x. Poznamenejme, že $t_{i_n} < \frac{\sqrt{2}}{2} < t_{i_n+1}$ a $\lim_{n\to\infty} t_{i_n} = \lim_{n\to\infty} t_{i_n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Příslušné lineární interpolace $x^n(t)$ řešení $(x_0^n, \ldots, x_n^n)$ stejnoměrně konvergují na $[0,1]$ k řešení diferenciální inkluze $x'' \in \overline{F}(t,u,v)$ s $x(0) = x(1) = 0$, kde $\overline{F}$ je Filippovova regularizace zobrazení F, tj.

$$\overline{F} = F \quad \text{pro} \quad t \neq \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{a} \quad \overline{F}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, u, v\right) = [0, A].$$

Poznamenejme, že je toto řešení následovné

$$x(t) = \begin{cases} A\dfrac{2\sqrt{2}-3}{4}t, & \text{pro } t \in \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right], \\ A\dfrac{2t^2 - 3t + 1}{4}, & \text{pro } t \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Tedy je snadno vidět, že $(x_0^n, \ldots, x_n^n)$ stejnoměrně konverguje na $[0,1]$ k $x(t)$.

Závěr

Úkolem této disertační práce bylo stanovit explicitní odhady řešení Dirichletových mnohoznačných polospojitých problémů za použití výhradně růstových podmínek na pravé strany uvažovaných problémů a určit, za jakých podmínek konverguje řešení diskrétního problému k řešení příslušného polospojitého problému. Dále také aplikovat techniky použité při vyšetřování existence řešení diferenciálních inkluzí na diferenční inkluze. V neposlední řadě také získané výsledky ilustrovat na příkladech.

Tato práce byla motivována problémy se suchým třením, které mají historické i fyzikální opodstanění. Byly zde vyšetřovány existence a lokalizace řešení diferenciálních rovnic s nespojitostí v prostorové proměnné, diferenciálních a diferenčních inkluzí s Dirichletovými okrajovými podmínkami, a také vztah mezi řešeními polospojité a příslušné diskrétní úlohy.

V Části I byla studována existence a lokalizace Filippovova řešení vektorového Dirichletova okrajového problému druhého řádu ve tvaru

$$\left.\begin{array}{l} x''(t)+ax'(t)+bx(t)\in P(t)+f_1(x(t))+f_2(x'(t)),\ \text{pro s. v. } t\in[0,T],\\ x(0)=x_0,\, x(T)=x_T. \end{array}\right\}$$

Tuto úlohu jsme řešili ze dvou úhlů pohledu, abychom mohli napočítat odpovídající Greenovy funkce, a stanovit tak optimální podmínky řešitelnosti. Rozlišili jsme tak mezi jednočlenným lineárním operátorem $Lx := x''$ (zbývající výrazy $ax'+bx$ pak byly brány jako součást mnohoznačné perturbace pravé strany uvažované inkluze) a úplným lineárním diferenciálním operátorem $Lx := x''+ax'+bx$. Jelikož jsme uvažovali a,b jako reálné konstanty, ne matice, s výhodou jsme využili explicitní tvary Greenových funkcí. Za použití výhradně růstových podmínek jsme ve Větě 4.1 a Větě 4.2 obdrželi postačující podmínky řešitelnosti a explicitní odhady řešení a jeho derivace pro jednotlivé alternativy.

Dále byla vyšetřována existence řešení úlohy

$$\left.\begin{array}{l} x''(t)+ax'(t)+bx(t)\in P(t)+F_1(x(t))+F_2(x'(t))-c\operatorname{sgn}x'(t),\\ x(0)=x_0,\ x(T)=x_T,\ \text{pro s. v. } t\in[0,T], \end{array}\right\}$$

jakožto speciální skalární případ úlohy uvedené výše. Tato úloha je motivována problémy se suchým třením. Efektivní podmínky řešitelnosti a explicitní odhady řešení a jeho derivace byly uvedeny ve Větě 5.1 a Větě 5.2. V Poznámce 5.2 a Poznámce 5.3 pak byly diskutovány podmínky řešitelnosti dané úlohy při přidání některých dalších předpokladů. Důsledek 5.1 zaručil existenci Filippovova řešení a explicitní odhad řešení a derivace řešení pro Dirichletův problém pro buzené kyvadlo se suchým třením a pro Dirichletův problém pro buzený „lineární“ oscilátor se suchým třením.

Porovnáním výsledků a interpretací na příkladech lze konstatovat, že každý z přístupů má své výhody i nevýhody, jinými slovy, žádný z nich nelze upřednostnit před druhým.

Optimální podmínky, stanovené v této práci, jsou dosti technické, nicméně umožňují velmi přesnou lokalizaci řešení, narozdíl od výsledků jiných autorů, např. Šenkyříka a Guenthera, kteří se zaměřují pouze na existenci řešení. Navíc, jelikož jsou zde využívány výhradně růstové podmínky, jsou autorčiny výsledky neporovnatelné s některými jinými autory, např. Pavlačkovou, která používá podmínky růstové i znaménkové.

V pracech, ve kterých je studován Dirichletův problém, a které jsou uvedeny v Seznamu literatury, autoři zkoumají tento problém výhradně ve tvaru s jednočlenným lineárním operátorem, odpovídajícím druhé derivaci. Není mi známo, že by se někdo další zabýval tímto problémem v podobě úplného lineárního diferenciálního operátoru.

Část II byla zaměřena na diferenční inkluze. Byly sem přeneseny techniky z Části I a ve Větě 7.1 a Větě 7.2 dokázán existenční a lokalizační výsledek pro řešení a jeho první diferenci nezávislý na velikosti diskretizačního kroku úlohy

$$\frac{\Delta^2 x_{i-1}}{h^2} \in F\left(t_i, x_i, \frac{\Delta x_i}{h}\right), \quad i = 1, \ldots, n-1,$$
$$x_0 = 0, \quad x_n = 0.$$

Pomocí Lemmatu 7.1 a za využití stejnoměrné konvergence Greenových funkcí bylo ve Větě 7.3 ukázáno, v jakém smyslu konvergují řešení výše uvedeného diskrétního problému k řešení odpovídajícího polospojitého problému

$$
\begin{aligned}
x''(t) &\in F\left(t, x(t), x'(t)\right), \quad \text{pro s. v. } t \in [0, T], \\
x(0) &= 0, \quad x(T) = 0.
\end{aligned}
$$

Všechny uvedené poznatky byly ilustrovány na příkladech.

Výsledky obsažené v této práci byly publikovány ve třech recenzovaných článcích.

Domnívám se tedy, že cíle práce byly splněny.

Seznam publikací

[1] Andres, J., Machů, H.: *Dirichlet boundary value problem for differential equations involving dry friction.* Bound. Value Probl. **2015**:106 (2015).

[2] Fečkan, M., Machů, H.: *Discrete Dirichlet boundary value problems with upper semicontinuous right-hand sides.* Journal of Difference Equations and Applications **22**:7 (2016), 959–972.

[3] Machů, H.: *Filippov solutions of vector Dirichlet problems.* Math. Slovaca **70**:2 (2020), 401–416.

Literatura

[4] Agarwal, R. P.: *On multipoint boundary value problems for discrete equations.* J. Math. Anal. Appl. **96** (1983), 520–534.

[5] Agarwal, R. P., O'Regan, D., Lakshmikantham, V.: *Discrete second order inclusions.* J. Differ. Equations Appl. **9** (2003), 879–885.

[6] Agarwal, R. P., Thompson, H. B., Tisdell, C. C.: *Three-point boundary value problems for second-order discrete equations.* Comp. Math. Appl. **45** (2003), 1429–1435.

[7] Amontons, G.: *De la Résistance Causée Dans les Machines.* Mem. Acad. Roy (1699), 206–222.

[8] Andres, J., Górniewicz, L.: *Topological Fixed Point Principles for Boundary Value Problems.* Dordrecht, Kluwer, 2003.

[9] Andres, J., Malaguti, L., Pavlačková, M.: *Scorza–Dragoni approach to Dirichlet problem in Banach spaces.* Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, Oxford: Pergamon Press, 71, 12 (2009), 6019–6028.

[10] Andres, J., Malaguti, L., Pavlačková, M.: *Dirichlet problems in Banach spaces: the bound sets approach.* Boundary Value Problems, Heidelberg: Springer, 25 (2013), 1–21.

[11] Andres, J., Malaguti, L., Pavlačková, M.: *Hartman-type conditions for multivalued Dirichlet problem in abstract spaces.* In: Dynamical System, Differential Equations and Applications, AIMS Proseedings, 2015, 2015 (special), doi: 10.3934/proc. 2015.0038, 38–55.

[12] Andres, J., Sanchez, L.: *A note on vector boundary value problems.* Int. J. Non.-Lin. Diff. Eqns, TMA **3**, 1–2 (1997), 49–58.

[13] Appell, J., De Pascale, E., Thái, N. H., Zabreiko, P. P.: *Multi-Valued Superpositions.* Dissertationes. Math., Vol. 345, PWN, Warsaw, 1995.

[14] Aubin, J. P., Cellina, A.: *Differential Inclusions.* Springer, Berlin, 1984.

[15] Aumann, R. J.: *Integrals of set-valued functions.* J. Math. Anal. Appl., **12**, 1 (1965), 1–12.

[16] Awrejcewicz, J., Fečkan, M., Olejnik, P.: *On continuous approximation of discontinuous systems.* Journal of Differential Equations, **62**, 7 (2005), 1317–1331.

[17] Bernfeld, S. R., Lakshmikantham, V.: *An Introduction to Nonlinear Boundary Value Problems.* Academic Press, New York, 1974.

[18] Borsuk, K.: *Theory of Retracts.* vol. **44**, Monografie Matematyczne, PWN, Warsaw, 1967.

[19] Cabada, A., Ferreiro, J.: *Existence of positive solutions for nth order periodic difference equations.* J. Differ. Equations Appl. **17** (2011), 935–954.

[20] Cabada, A., Otero-Espinar, V.: *Fixed sign solutions of second-order difference equations with Neumann boundary conditions.* Advances in difference equations, IV. Comput. Math. Appl. **45** (2003), 1125–1136.

[21] Castaing, C., Valadier, M.: *Convex Analysis and Measurable Multifunctions.* Springer, Berlin, 1977.

[22] Conti, R.: *Recent trends in the theory of boundary value problems for ordinary differential equations.* Boll. Unione Mat. Ital., **22**, 3 (1967), 135–178.

[23] Coulomb, C. A.: *Theorie des Machines Simples.* Mem. Math. Phys. Acad. Sci. **10** (1785), 161–331.

[24] Cubiotti, P., Yao, J. C.: *Two-point problem for vector differential inclusions with discontinuous right-hand side.* Appl. Anal. **93**, 9 (2014), 1811–1823.

[25] Deimling, K.: *Multivalued Differential Equations.* W. De Gruyter, Berlin, 1992.

[26] Dontchev, A. L., Lempio, F.: *Difference methods for differential inclusions: A Survey.* SIAM Review **34** (1992), 263–294.

[27] Dugundji, J., Granas, A.: *Fixed Point Theory.* Springer, Berlin, 2003.

[28] Erbe, L. H., Knobloch, H. W.: *Boundary value problems for systems of second order differential equations.* Proceed. Royal Soc. Edinburgh **101**A, 1–2 (1985), 61–76.

[29] Euler, L.: *Sur la Diminution de la Résistance du Frottement.* Histoire de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin **4** (1748) 133–148.

[30] Fabry, Ch., Habets, P.: *The Picard boundary value problem for nonlinear second order vector differential equations.* J. Diff. Eqns **42**, 2 (1981), 186–198.

[31] Filippov, A. F.: *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides.* Kluwer, Dordrecht, 1988.

[32] Gaines, R.: *Difference equations associated with boundary value problems for second order nonlinear ordinary differential equations.* SIAM J. Numer. Anal. **11** (1974), 411–434.

[33] Granas, A., Guenther, R. B., Lee, J. W.: *Nonlinear Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations.* Dissertationes Math., Vol. 244, PWN, Warsaw, 1985.

[34] Granas, A., Guenther, R. B., Lee, J. W.: *Some general existence principles in the Carathédory theory of nonlinear differential systems.* J. Math. Pures Appl., **70**, 2 (1991), 153–196.

[35] Habets, P., Schmitt, K.: *Nonlinear boundary value problems for system of differential equations.* Arch. Math. (Basel) **40**, 1 (1983), 441–446.

[36] Hartman, P.: *On boundary value problems for systems of ordinary nonlinear second order differential equations.* Trans. Amer. Math. Soc. **96**, 3 (1960), 493–509.

[37] Knobloch, H. W., Schmitt, K.: *Nonlinear boundary value problems for systems of differential equations.* Proceed. Royal Soc. Edinburgh **78**A, 1–2 (1977), 139–159.

[38] Kožušníková, M.: *A bounding functions approach to multivalued Dirichlet problem.* Atti Semin. Mat. Fis. Univ. Modena Reggio Emilia, **55** (2007), 1–19.

[39] Kelley, W. G., Peterson, A. C.: *Difference equations. An introduction with applications.* Second edition. Harcourt/Academic Press, San Diego, CA, 2001.

[40] Kunze, M.: *Non-Smooth Dynamical Systems.* Lecture Notes in Mathematics 1744, Springer, Berlin, 2000.

[41] Lasota, A.: *A discrete boundary value problem.* Annales Polonici Mathematici, **20** (1968), 183–190.

[42] Lasota, A., Opial, Z.: *An application of the Kakutani–Ky Fan theorem in the theory of ordinary differential equations.* Bull. de L'Acad. Polonaise de Sciences, Ser. sci. math., astr. et phys. **13**, 11–12 (1965), 781–786.

[43] Lee, J. W., O'Regan, D.: *Existence of solutions to some initial value, two point and multipoint boundary value problems with discontinuous nonlinearities.* Applicable Anal., **33**, 1–2 (1989), 57–77.

[44] Mawhin, J.: *Boundary value problems for nonlinear second-order vector differential equations.* J. Diff. Eqns **16**, 2 (1974), 257–269.

[45] Mawhin, J: *Problèmes de Dirichlet variationnels non linéaires.* Partie 1 des comptes rendus du cours d' été OTAN "Variational Methods in Nonlinear Problems". Le Presses de l'Université de Montréal, Montréal, 1987.

[46] Monteiro Marques, M. D. P: *Differential Inclusions in Nonsmooth Mechanical Problems. Shocks and Dry Friction.* Birkhäuser, Basel, 1993.

[47] Morin, A. J.: *Nouvelles Expériences sur le Frottement Faites à Metz en 1831–1833.* Mém. Présentés par Divers Savants *à* l´Académie des Sciences **4**, 1–128, 591–696 (1833); 641–783 (1835).

[48] Nistri, P.: *Positive solutions of non-linear eigenvalue problem with discontinuous non-linearity.* Proceed. Royal Soc. Edinburgh **83**A, 1–2 (1979), 133–145.

[49] O'Regan, D.: *Boundary value problems for second and higher order differential equations.* Proceed. Amer. Math. Soc. **113**, 3 (1991), 761–775.

[50] Painlevé, P.: *Lecons sur le Frottement.* Hermann, Paris, 1895; Gostekhizdat, Moscow, 1954.

[51] Pavlačková, M.: *A bound sets technique for Dirichlet problem with an upper-Carathéodory right-hand side.* Acta Univ. Palacki. Olomouc., Fac. Rerum Natur., Mat **49**, 2 (2010), 95–106.

[52] Pavlačková, M.: *A Scorza - Dragoni approach to Dirichlet problem with an upper-Carathéodory right-hand side.* Topol. Methods Nonlinear Anal. 44 (2014), no.1, 239–247.

[53] Popp, K., Hinrichs, N., Oestreich, M.: *Dynamical behaviour of a friction oscillator with simultaneous and external excitation.* Sādhanā **20**, 2–4 (1995), 627–654.

[54] Pruszko, T.: *Some Applications of the Topological Degree Theory to Multi-Valued Boundary Value Problems.* Dissertationes Math., Vol. 229, PWN, Warsaw, 1984.

[55] Rachůnková, I., Tisdell, C. C.: *Existence of non-spurious solutions to discrete boundary value problems.* Austral. J. Math. Anal. Appl., **3** (2006), 1–9.

[56] Rachůnková, I., Tisdell, C. C.: *Existence of non-spurious solutions to discrete Dirichlet problems with lower and upper solutions.* Nonl. Anal., **67** (2007), 1236–1245.

[57] Rudin, W.: *Functional Analysis (2nd ed).* McGraw-Hill, New York, 1991.

[58] Scorza-Dragoni, G.: *Sul problema dei valori ai limiti per i sistemi di equazioni differenziali del secondo ordine.* Boll. Unione Mat. Ital. **14** (1935), 225–230.

[59] Scorza-Dragoni, G.: *Sui sistemi di equazioni integrali non lineari.* Rend. Semin. Mat. Univ. Padova **7** (1936), 1–35.

[60] Smart, D. R.: *Fixed point theorems.* Cambridge University Press, Great Britain, 1974.

[61] Stakgold, I: *Green's Functions and Boundary Value Problems.*John Wiley & Sons, New York, 1979.

[62] Stehlík, P., Tisdell, C. C.: *On boundary value problems for second order discrete inclusions.* Bound. Value Probl. **2005**:2 (2005) 153–163.

[63] Stewart, D. E.: *Rigid-body dynamics with friction and impact.* SIAM Rewiew **42**, 1 (2000), 3–39.

[64] Stuart, C. A.: *Differential equations with discontinuous non-linearities.* Arch. Rational Mech. Anal. **63**, 1 (1976), 59–75.

[65] Šenkyřík, M., Guenther, R. B.: *Boundary value problems with discontinuities in the spatial variable.* J. Math. Anal. Appl. **193**, 1 (1995), 296–305.

[66] Teschl, G.: *Differential Equations and Dynamical Systems.* Graduate Studies in Mathematics, Volume 140, Amer. Math. Soc., Providence, 2012.

[67] Thompson, H. B., Tisdell, C. C.: *Systems of difference equations associated with boundary value problems for second order systems of ordinary differential equations.* J. Math. Anal. Appl. **248** (2000), 333–347 .

[68] Thompson, H. B., Tisdell, C. C.: *Boundary value problems for systems of difference equations associated with systems of second-order ordinary differential equations.* Appl. Math. Lett. **15** (2002), 761–766.

[69] Thompson, H. B., Tisdell, C. C.: *The nonexistence of spurious solutions to discrete, two-point boundary value problems.* Appl. Math. Lett. **16** (2003), 79–84.

[70] Vasiliev, N. I., Klokov, Ju. A.: *Foundations of the theory of boundary value problems in ordinary differential equations.* (Russian), Zinatne, Riga, 1978.

[71] Vinci, L. da: *About Myself and My New Science.* (1508), in Pictorial Works of Art, Vol. 1 (Academia, Moscow, 1932), in Russian.

[72] Vrabie, I. I.: *Compactness Methods for Nonlinear Evolutions.* Longman House, Burn Mill, Harlow, 1990.

[73] Zhukovskii, N. E.: *Equilibrium Condition for a Rigid Body Contacting with an Immovable Plane by a Site and Able to Move along This Plane with Friction.* In Complete Papers, Vol. 1 (Gostekhizdat, Moscow-Leningrad, 1948), 299–354, in Russian.

[74] Zhukovskii, N. E.: *Friction of Railway Wheel Treads on Railways.* Complete Papers, Vol. 7 (Gostekhizdat, Moscow-Leningrad, 1948), 426–478, in Russian.

[75] Zhuravlev, V. Ph.: *On the history of the dry friction law.* Mechanics of Solids **48**, 4 (2013), 364–369.

[76] Zuev, A. V.: *On the Dirichlet problem for a second-order ordinary differential equation with discontinuous right-hand side.* Differential Equations **42**, 3 (2006), 340–346.

Životopis

Osobní informace

Jméno	**Hana**
Příjmení	**Machů**
Rodné příjmení	Jašková
Adresa	Katedra Matematiky, Přírodovědecká fakulta, Univerzita Palackého Olomouc, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc, Česká republika
Telefon	+420 608 479 460
E-mail	hana.machu@upol.cz

Vzdělání

2011-2015,	Univerzita Palackého Olomouc, Přírodovědecká fakulta,
2018-dosud	Doktorský studijní program: Matematika
2009-2011	Univerzita Palackého Olomouc, Přírodovědecká fakulta,
	Magisterský studijní program: Aplikovaná matematika
2006-2009	Univerzita Palackého Olomouc, Přírodovědecká fakulta,
	Bakalářský studijní program: Matematika

Výzkumné pobyty

MÚ SAV, Bratislava	tří měsíční stáž září–listopad 2014

Seznam publikací

2020	Machů, H.: Filippov solutions of vector Dirichlet problems. Math. Slovaca **70**:2 (2020), 401–416.
2016	Fečkan, M., Machů, H.: Discrete Dirichlet boundary value problems with upper semicontinuous right-hand sides. Journal of Difference Equations and Applications **22**:7 (2016), 959–972.
2015	Andres, J., Machů, H.: Dirichlet boundary value problem for differential equations involving dry friction. Bound. Value Probl. **2015**:106 (2015).

Mezinárodní konference

AIMS 2014	10. AIMS Konference dynamických systémů, diferenciálních rovnic a aplikací, Madrid, Španělsko, 7.7. – 11.7. 2014: prezentace s názvem: Dirichlet Problem for Differential Equations Involving Dry Friction.
EQUADIFF 2013	Mezinárodní konference diferenciálních rovnic, Praha, Česká republika, 26. 8. – 30. 8. 2013.
MINI ŠKOLA 2013	MINI ŠKOLA Diferenciálních rovnic, MÚ AVČR Brno, Česká republika, 27. 5. – 31. 5. 2013.

UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

AUTOREFERÁT DISERTAČNÍ PRÁCE

Diferenciální a diferenční inkluze

Vedoucí disertační práce: **prof. RNDr. dr hab. Jan Andres, DSc.**
Vypracovala: **Mgr. Hana Machů**
Studijní program: P1102 Matematika
Studijní obor: Matematická analýza
Forma studia: kombinovaná
Rok odevzdání: 2020

Výsledky obsažené v disertační práci byly získány během doktorského studia oboru Matematická analýza na Katedře matematické analýzy a aplikací matematiky Přírodovědecké fakulty Univerzity Palackého v Olomouci.

Uchazeč: **Mgr. Hana Machů**
Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky
Přírodovědecká fakulta
Univerzita Palackého v Olomouci

Školitel: **prof. RNDr. dr hab. Jan Andres, DSc.**
Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky
Přírodovědecká fakulta
Univerzita Palackého v Olomouci

Oponenti: **doc. Mgr. Pavel Řehák, Ph.D.**
Ústav matematiky, Odbor matematické analýzy
Fakulta strojního inženýrství
Vysoké učení technické v Brně

doc. RNDr. Jan Tomeček, Ph.D.
Katedra matematické analýzy a aplikací matematiky
Přírodovědecká fakulta
Univerzita Palackého v Olomouci

Autoreferát byl rozeslán dne ....

Obhajoba disertační práce se koná dne .... v .... hod. před oborovou radou doktorského studijního oboru Matematická analýza v učebně .... v budově PřF UP v ulici 17. listopadu v Olomouci.

S disertační prací je možno se seznámit na studijním oddělení Přírodovědecké fakulty UP v Olomouci.

Obsah

Použité značení

V celé práci je použito následovné standardní značení:

$\mathbb{R}$	množina všech reálných čísel
$\mathbb{R}^+$	množina všech nezáporných reálných čísel
$\mathbb{C}$	množina všech komplexních čísel
$\mathbb{N}$	množina všech přirozených čísel
$\mathbb{R}^m$	m-rozměrný reálný euklidovský prostor
$[a,b]$	uzavřený interval s krajními body a,b
$C(J,\mathbb{R}^n)$	množina funkcí spojitých na intervalu J s hodnotami v $\mathbb{R}^n$
$C^1(J,\mathbb{R}^n)$	množina funkcí se spojitou první derivací na intervalu J s hodnotami v $\mathbb{R}^n$
$L^1(J,\mathbb{R}^n)$	množina funkcí lebesgueovsky integrovatelných na intervalu J s hodnotami v $\mathbb{R}^n$
$L^2(J,\mathbb{R}^n)$	prostor měřitelných funkcí na intervalu J s hodnotami v $\mathbb{R}^n$ integrovatelných s druhou mocninou, tj. $\int_J |f|^2 \mathrm{d}\mu < \infty$
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	označení pro skalární součin

Při formulaci problémů budeme v celé práci používat zkratku „s. v.“ pro „skoro všechna“. Propozicemi budeme značit pomocné věty. Označení Věta vyhradíme pouze pro nové výsledky.

1 Abstrakt

Existuje spousta fyzikálních systémů, ve kterých matematické modelovaní vede k nespojitým úlohám. Např. tato práce je motivována rovnicí kyvadla se suchým třením. Pohyb tohoto kyvadla je modelován diferenciální rovnicí s nespojitostí v prostorové proměnné. Jestliže se na pravé straně daných diferenciálních rovnic vyskytnou nespojitosti v prostorových proměnných, pak je přirozeným pojmem řešení ve smyslu Filippova. Tj. použitím Filippovovy teorie je úloha s nespojitostmi přeformulována na diferenciální inkluzi, tedy na mnohoznačnou úlohu. Tato práce je rozdělena do dvou hlavních částí. První část se zabývá vyšetřováním existence a lokalizace Filippovových řešení diferenciálních rovnic druhého řádu s nespojitostmi v prostorových proměnných (buzených nelineárních diferenciálních rovnic zahrnující kombinaci viskózního a suchého tření) a diferenciálních inkluzí druhého řádu se shora polospojitými pravými stranami, a Dirichletovými okrajovými podmínkami. Pro řešitelnost těchto úloh jsou stanoveny postačující podmínky ve tvarech růstových omezení. Při formulování těchto efektivních podmínek nám explicitní odhady řešení a jejich derivací umožní se omezit na dostatečně velké okolí počátku. Tímto způsobem může být chování nelinearit vně tohoto okolí zcela libovolné. Kvůli obdržení optimálních kritérií řešitelnosti jsou v této práci úlohy s jednočlennými (zbývající členy jsou pak uvažovány jako součást mnohoznačné perturbace pravých stran inkluzí) a úplnými lineárními diferenciálními operátory na levých stranách uvažovaných inkluzí brány odděleně prostřednictvím různých Greenových funkcí. Přeformulováním úloh do jejich operátorové podoby získáme aplikací mnohoznačné verze Schauderovy věty o pevném bodě (Kakutaniho-Ky Fanovy věty o pevném bodě) existenci Filippovova řešení daných úloh. V druhé části aplikujeme techniky z první části na diskrétní úlohu a obdržíme tak existenci jejího řešení a odhad řešení a jeho první diference nezávislý na velikosti diskretizačního kroku. Je také studován vztah mezi řešeními Dirichletových okrajových problémů pro systém diferenciálních inkluzí druhého řádu se shora polospojitými pravými stranami a příslušných numerických diskrétních Dirichletových okrajových problémů pro diferenční inkluze druhého řádu.

Klíčová slova: Dirichletův problém, diskrétní mnohoznačné Dirichletovy problémy, Filippovovo řešení, Greenovy funkce, Kakutaniho–Ky Fanova věta o pevném bodě, konvergence řešení, odhady řešení, růstová omezení, shora polospojité problémy, suché tření.

2 Abstract in English

There are many physical systems in which the mathematical modeling leads to discontinuous problems. For example, this thesis is motivated by the equation of a pendulum with a dry friction. The move of this pendulum is modeled by a differential equation with discontinuity in the state variable. If in the right-hand sides of given differential equations occure discontinuities in the state variables, then the natural notion of a solution is the one in the sense of Filippov. I.e. using Filippov's theory the problem with discontinuities is reformulated as a differential inclusion, thus as a multivalued problem. This thesis is divided to the two main parts. The first part deals with the investigation of the existence and localization of a Filippov's solution to the second order differential equations with the discontinuities in the state variables (forced nonlinear differential equations involving the combination of viscous and dry frictions) and second order differential inclusions with upper semicontinuous right-hand sides, and Dirichlet boundary conditions. Sufficient conditions in terms of growth restrictions are given for the solvability of this problems. Explicit extimates of solutions and their derivatives allow us to restrict ourselves to a sufficiently large neighbourhood of the origin, when formulating these effective conditions. In this way, the behaviour of nonlinearities outside of this neighbourhood can be quite arbitrary. In order to get optimal solvability criteria, the problems with one-term (then the remaining terms are considered as a part of a multivalued perturbation of the right-hand sides of the inclusions) and complete linear differential operators on the left-hand sides of the inclusions are treated separately by means of various Green's functions. The existence of Filippov's solutions are obtained by using of the multivalued version of the Schauder fixed point theorem (Kakutani–Ky Fan fixed point theorem) when the problems are reformulated to their operator forms. In the second part, the technique from the first part is applied to the discrete problem. The existence of its solution and the estimates of its solution and its first difference independent of the step size are given. It is also studied the relationship between the solutions of the Dirichlet boundary value problems for the system of the second order differential inclusions with upper semicontinuous right-hand sides and the associated numerical discrete Dirichlet boundary value problems for second order diference inclusions.

Key words: convergence of solutions, Dirichlet problem, discrete multivalued Dirichlet problems, dry friction, Filippov solution, Green's functions, growth restrictions, Kakutani–Ky Fan fixed point theorem, solution estimates, upper semicontinuous problems.

3 Úvod

Tato disertační práce je zaměřena na existenci a lokalizaci řešení diferenciálních rovnic s nespojitostmi v prostorové proměnné, resp. diferenciálních inkluzí, a vztahem mezi řešeními „polospojitých“ úloh (tj. úloh s polospojitými pravými stranami) a příslušných diskrétních úloh. Práce je rozdělena do dvou částí.

V Části I je nejprve studována existence a lokalizace Filippovova řešení vektorového Dirichletova okrajového problému druhého řádu ve tvaru

$$\left.\begin{array}{l} x''(t)+ax'(t)+bx(t)\in P(t)+f_1(x(t))+f_2(x'(t)),\ \text{pro s. v. } t\in[0,T],\\ x(0)=x_0,\, x(T)=x_T, \end{array}\right\} \tag{1}$$

kde a,b a $T>0$ jsou reálné konstanty, $x_0,x_T\in\mathbb{R}^n$, P je vektorové aumannovsky (po složkách) integrovatelné mnohoznačné zobrazení a f_1,f_2 jsou měřitelná a lokálně omezená jednoznačná vektorová zobrazení. Probereme užití jednočlenného versus úplného lineárního diferenciálního operátoru pro související Greenovy funkce. Konkrétně rozlišíme mezi jednočlenným lineárním operátorem $Lx:=x''$ (zbývající výrazy $ax'+bx$ pak bude možno chápat jako součást mnohoznačné perturbace pravé strany inkluze v (1)) a úplným lineárním diferenciálním operátorem $Lx:=x''+ax'+bx$. Jelikož jsou a,b reálné konstanty, ne matice, můžeme s výhodou využít explicitní tvary Greenových funkcí. S využitím výhradně růstových podmínek obdržíme postačující podmínky řešitelnosti a explicitní odhady řešení pro jednotlivé alternativy. Tato část práce vychází z článku [3].

Dále je v této části uvažován skalární mnohoznačný Dirichletův problém zahrnující kombinaci viskózního a suchého tření:

$$\left.\begin{array}{l} x''(t)+ax'(t)+bx(t)\in P(t)+F_1(x(t))+F_2(x'(t))-c\operatorname{sgn}x'(t),\\ x(0)=x_0,\ x(T)=x_T,\ \text{pro s. v. } t\in[0,T] \end{array}\right\} \tag{2}$$

kde a, b, c, x_0, x_T a $T>0$ jsou reálné konstanty, P je aumannovsky integrovatelné mnohoznačné zobrazení, F_1, F_2 jsou shora polospojitá mnohoznačná zobrazení s kompaktními a konvexními hodnotami. Tento problém je motivován rovnicí kyvadla se suchým třením. Opět rozlišíme mezi jednočlenným a úplným lineárním diferenciálním operátorem a stanovíme explicitní odhady řešení a podmínky řešitelnosti. Tyto výsledky jsou publikovány v [1].

Část II prezentuje výsledky z [2], kde se zaměříme na systém diskrétních okrajových úloh zahrnujících diferenční inkluze druhého řádu a homogenní Dirichletovy okrajové podmínky, tj.

$$\frac{\Delta^2 x_{i-1}}{h^2}\in F\left(t_i,x_i,\frac{\Delta x_i}{h}\right),\quad i=1,\dots,n-1, \tag{3}$$

$$x_0=0,\quad x_n=0, \tag{4}$$

kde F je shora polospojité mnohoznačné zobrazení s kompaktními a konvexními hodnotami, velikost kroku je označena $h = \dfrac{T}{n}$, kde T je kladná konstanta a $n \geq 2$, a body sítě jsou $t_i = ih$ pro $i = 0, \ldots, n$. Diference jsou dány vztahy

$$\begin{aligned}\Delta x_i &= x_{i+1} - x_i, \text{ pro } \quad i = 0, \ldots, n-1, \\ \Delta^2 x_{i-1} &= x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}, \text{ pro } \quad i = 1, \ldots, n-1.\end{aligned}$$

Nejprve opět vyšetříme existenci a určíme odhad řešení, a to stejnoměrně vzhledem k velikosti kroku. Dále stanovíme podmínky, za nichž řešení jednoparametrické třídy numerických diskrétních mnohoznačných Dirichletových problémů konvergují k řešení odpovídajícího polospojitého problému

$$x''(t) \in F\left(t, x(t), x'(t)\right), \quad \text{pro s. v. } t \in [0, T], \tag{5}$$

$$x(0) = 0, \quad x(T) = 0. \tag{6}$$

4 Přehled aktuálního stavu

Dirichletův problém je pravděpodobně nejvíce studovaný okrajový problém pro diferenciální rovnice. Pro obyčejné diferenciální rovnice byly první výsledky získány pomocí variačních metod díky Hamelovi, Hammersteinovi a Lichtensteinovi (viz např. přehledový článek J. Mawhina [45], kde jsou také systematicky popsány pozdější výsledky stanovené tímto způsobem). Po zveřejnění Schauderovy věty o pevném bodě v roce 1930, začaly být alternativně užívány topologické metody, založené na vyšetřování existence pevného bodu, také pro vektorové rovnice (viz např. [12, 17, 28, 30, 33, 35, 36, 37, 44, 49, 58, 59]). Od 30. let 20. století je dobře známo, že je, vzhledem ke Scorza-Dragoniho větě pro vektorové obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu s omezenou spojitou pravou stranou, Dirichletův problém vždy řešitelný (viz [58, 59]). Konkrétně, Dirichletův problém pro rovnici *buzeného matematického kyvadla*, tj.

$$x''(t) + b \sin x(t) = p(t), \quad x(0) = x_0, \; x(T) = x_T,$$

kde b, x_0, x_T a $T > 0$ jsou reálné konstanty, má řešení, pro libovolná b a $p \in C([0,T], \mathbb{R})$. Stačí však, aby, $p\colon [0,T] \to \mathbb{R}$ byla jen lebesgueovsky integrovatelná, tj. měřitelná a $\int_0^T |p(t)| \mathrm{d}t < \infty$, a, pro stejný výsledek, může rovnice kyvadla zahrnovat rovněž *člen popisující viskózní tření*, tj.

$$x''(t) + ax'(t) + b \sin x(t) = p(t), \quad a \in \mathbb{R},$$

(viz např. [33]).

Na druhé straně, Dirichletův problém pro *buzený lineární oscilátor s viskózním třením*, tj.

$$x''(t) + ax'(t) + bx(t) = p(t), \quad x(0) = x_0, \; x(T) = x_T,$$

má jediné řešení za předpokladu, že opět $\int_0^T |p(t)|\mathrm{d}t < \infty$ a homogenní problém, tj.

$$x''(t) + ax'(t) + bx(t) = 0, \quad x(0) = 0,\ x(T) = 0,$$

má pouze triviální řešení. Pokud homogenní problém není triviálně řešitelný, tj. pokud nastává rezonance, pak řešení úlohy vyžaduje odlišný přístup. Úlohou v rezonanci se v naší práci zabývat nebudeme.

Za přítomnosti suchého tření, je pojem *Carathéodoryova řešení*, tj. s absolutně spojitou první derivací, nedostatečný. Vhodným typem je *Filippovovo řešení*, což je Carathéodoryovo řešení, ale diferenciální inkluze s filippovovsky regularizovanou pravou stranou původního problému, (viz např. [8, 31]). Pro historii a fenomenologii problémů se suchým třením obecně, viz např. [40, 46, 53, 63, 75].

Pro kombinaci viskózního a suchého tření, tj. pro úlohu

$$x''(t) + ax'(t) + b\sin x(t) + c\,\mathrm{sgn} x'(t) = p(t), \quad x(0) = x_0,\ x(T) = x_T, \tag{7}$$

budeme Filippovovo řešení rovnice ve výrazu (7) chápat v následujícím smyslu. Budeme uvažovat mnohoznačnou úlohu

$$x''(t) + ax'(t) + b\sin x(t) \in p(t) - c\,\mathrm{Sgn} x'(t), \quad x(0) = x_0,\ x(T) = x_T, \tag{8}$$

kde

$$\mathrm{Sgn}\, z = \begin{cases} \text{-1}, & \text{pro } z \in (-\infty, 0), \\ [\text{ -1, 1 }], & \text{pro } z = 0, \\ 1, & \text{pro } z \in (0, \infty) \end{cases} \tag{9}$$

je zmíněná Filippovova regularizace funkce $\mathrm{sgn}\, z$. Filippovovým řešením úlohy (7) pak rozumíme Carathéodoryovo řešení úlohy (8).

V případě buzeného „lineárního“[1] oscilátoru budeme kromě úlohy

$$x''(t) + ax'(t) + bx(t) + c\,\mathrm{sgn} x'(t) = p(t), \quad x(0) = x_0,\ x(T) = x_T \tag{10}$$

uvažovat mnohoznačnou úlohu

$$x''(t) + ax'(t) + bx(t) \in p(t) - c\,\mathrm{Sgn} x'(t), \quad x(0) = x_0,\ x(T) = x_T. \tag{11}$$

Pomocí Kakutaniho–Ky Fanovy věty o pevném bodě (viz Propozice 8.1), zformulovali Lasota a Opial [42, Věta 3] v roce 1965 větu pro vektorový problém prvního řádu. Tato věta řeší úlohu (8), resp. (7), pro libovolná a, b, c, jen za předpokladu $\int_0^T |p(t)|\mathrm{d}t < \infty$, stejně jako úlohu (11) resp. (10), opět za předpokladu $\int_0^T |p(t)|\mathrm{d}t < \infty$, a přidáním požadavku, že buď $|b|T$ je dostatečně malé nebo homogenní úloha

$$x''(t) + ax'(t) + bx(t) = 0, \quad x(0) = x_0,\ x(T) = x_T$$

[1] Ač nejsou členy $c\,\mathrm{sgn} x'(t)$ resp. $c\,\mathrm{Sgn} x'(t)$, souvisejících rovnic resp. inkluzí lineární, použijeme pro jednoduchost tento název i pro ně.

je triviálně řešitelná.

Na druhé straně, odhady řešení a derivací nejsou v [42] odvozeny explicitně.

Existují také související výsledky dalších autorů, týkající se úloh (8) a (11), obdržených hlavně pomocí techniky stupně zobrazení (viz např. [9, 10, 11, 24, 34, 38, 43, 48, 51, 52, 54, 64, 65, 76]).

Například, vzhledem k [34, Věta 6.1] stejně jako [65, Věta 2], kde byly využity kombinace znaménkových a růstových omezení, jsou obě úlohy (8) a (11) řešitelné pouze bez viskózního tření, tj. $a = 0$, za předpokladu $\int_0^T |p(t)| \mathrm{d}t < \infty$ pro (8), a $\int_0^T |p(t)| \mathrm{d}t < \infty$ společně s $b \leq 0$ pro (11). Navíc, odhady řešení opět nejsou v [34, 65] ukázány exiplicitně .

Podobně, v [38, Věta 4.1], [51, Věta 4.1] a [52, Věta 3.1], člen viskózního tření ax' autoři neuvažují, ale, za více omezujících požadavků než těch v [34, 65], jsou zde dostupné odhady řešení.

Užitím podmínek Hartmanova typu (ve smyslu např. [36]), jsou jako v [11, Důsledek 4.1], související vhodné podmínky řešitelnosti úlohy (8) znovu více omezující než podmínky v [42, Věta 3], a to $b < 0$, p je spojitá na $[0, T]$ ($\Rightarrow |p(t)| \leq P$, $t \in [0, T]$), a

$$\frac{P + |c| + k_3}{-b} \leq \sin\left(\frac{\pi}{2} - k_2\right), \quad k_2 \leq \frac{\pi}{2}, \tag{12}$$

kde

$$k_2 := \max\{|x_0|, |x_T|\}, \quad k_3 := \frac{|x_T - x_0|}{T}, \quad P := \max_{t \in [0,T]} |p(t)|.$$

Konstanta a tentokrát může být různá od nuly, tj. $a \neq 0$.

Pro řešitelnost úlohy (11) podle [11, Důsledek 4.1] získáváme podmínky jen $b < 0$ a p je spojitá na $[0, T]$.

Za nepřítomnosti viskózního tření, tj. když $a = 0$, může být, podle [11, Důsledek 4.3] a [52, Věta 3], budící člen p lebesgueovsky měřitelný a esenciálně omezený, pro obě úlohy (8) a (11). Uvažujme pro tuto chvíli případ, kdy $b = 0$. Abychom mohly aplikovat [11, Důsledky 4.1 a 4.3] a [52, Věta 3] na (8) a (11), musí být buď $c = 0$, $p(t) \equiv 0$ a $k_3 = 0$ nebo $a = 0$, což se redukuje na triviální řešitelnost úloh (8) a (11).

Na druhou stranu, za výše uvedených předpokladů s $b < 0$, můžou být odhady řešení $x(\cdot)$ pro (8) a (11) podle [11] vyjádřeny explicitně jako

$$|x(t)| \leq \arcsin\left(\frac{P + |c| + k_3}{-b}\right) - k_2 \leq \frac{\pi}{2} - k_2, \tag{13}$$

respektive

$$|x(t)| \leq \frac{P + |c| + k_3}{-b} + k_2. \tag{14}$$

Jestliže jsou další možné nespojité nelinearity nebo mnohoznačná zobrazení vložena do pravých stran daných diferenciálních rovnic nebo inkluzí, jejichž růst má, například, superlineární charakter dostatečně daleko od počátku, pak věta Lasoty a Opiala z [42, Věta 3] nemůže být nadále použita. Máme-li nicméně k dispozici explicitní odhady řešení jako (13) nebo (14) a jejich derivací, můžeme formulovat kritéria taková, že se nově implementované členy mohou chovat libovolně vně oblasti charakterizované těmito odhady. Tímto způsobem mohou být všechny výsledky podle naší úvahy přirozeně rozšířeny.

Matematické výpočty jsou často založeny na rovnicích, které vedou k výpočtu hodnoty funkce rekurzivně z dané množiny hodnot. Tyto rovnice se nazývají diferenční. Diskrétní problém, který vznikne diskretizací spojitého problému s diskretizačním krokem h, a jeho vztah k tomuto spojitému problému, je jedním z hlavních zdrojů konstuktivní studie. Agarwal v úvodu své práce [4] zdůrazňuje důležitost studia jednak tohoto vztahu, dále také otázky existence, jednoznačnosti, atd. diskrétního problému. V případě, kdy je spojitý okrajový problém diskretizován, se povaha řešení může změnit. Toto své tvrzení dokládá na jednoduchých příkladech:

- spojitý problém $y'' + (\pi^2/n^2)y = 0, \quad y(0) = y(n) = 0$ má nekonečně mnoho řešení tvaru $y(t) = k \sin(\pi/n)t$, kde k je libovolné, avšak diskrétní analogie $\Delta\nabla y(t) + (\pi^2/n^2)y(t) = 0, \quad y(0) = y(n) = 0$ má jediné řešení $y(t) \equiv 0$,

- spojitý problém $y'' + (\pi^2/4n^2)y = 0, \quad y(0) = 0, y(n) = 1$ má jediné řešení $y(t) = \sin(\pi/2n)t$, diskrétní problém $\Delta\nabla y(t) + (\pi^2/4n^2)y(t) = 0, \quad y(0) = 0, y(n) = 1$ má také jediné řešení,

- spojitý problém $y'' + 4\sin^2(\pi/2n)y = 0, \quad y(0) = 0, y(n) = \varepsilon(\neq 0)$ má jediné řešení $y(t) = \varepsilon \sin[(2\sin\pi/2n)t] / \sin[(2\sin\pi/2n)n]$, zatímco $\Delta\nabla y(t) + 4\sin^2(\pi/2n)y(t) = 0, \quad y(0) = 0, y(n) = \varepsilon(\neq 0)$ nemá řešení.

Výzkum zabývající se otázkou za jakých podmínek má skalární diferenční rovnice řešení a jaký je vztah mezi řešeními diskrétní a spojité úlohy započal R. Gaines. Výsledky týkající se skalárního problému druhého řádu s lineárními okrajovými podmínkami publikoval ve své práci [32]. Tento článek je v této oblasti stěžejní. Je často citován v pracech zabývajících se touto tématikou, zvláště se autoři odvolávají na konvergenční výsledek, např. [6], [55], [56], [67], [68], [69]. Dalšími výstupy z těchto článků jsou formulace podmínek, za kterých splňují všechna řešení nelineárního diskrétního Dirichletova okrajového problému druhého řádu určitá apriorní omezení nezávislá na velikosti diskretizačního kroku. V případě skalárního problému jsou tyto podmínky v [55] a [41] růstové a pro existenci řešení je zde použita technika Brouwerova stupně zobrazení. V [56] a [6] (zde jsou uvažovány nelineární okrajové podmínky) je použita diskrétní Nagumova podmínka a diskrétní varianta metody horního a dolního řešení. Navíc jednoznačnosti řešení bylo v [55] a [41] dosaženo přidáním Lipschitzovy podmínky na pravou stranu uvažované rovnice. Vektorovým problémem se zabývali např. Thompson a Tisdell, kde v [67], [68], [69] byly Gainesovy výsledky rozšířeny na systémy rovnic. Diferenční problémy s periodickými podmínkami jsou řešeny v [19], zatímco v [20] jsou uvažovány Neumannovy okrajové podmínky. V knize [39] můžeme najít standardní techniky pro řešení diferenčních rovnic.

Problematika diferenčních inkluzí je prozatím řešena jen v malém množství prací. Případ počáteční úlohy pro obyčejné diferenciální inkluze je studován v [26], kde jsou předloženy diferenční metody pro řešení této úlohy.

Okrajové mnohoznačné úlohy jsou studovány např. v [5] a [62], kde jsou uvažovány okrajové úlohy pro systémy diskrétních inkluzí druhého řádu zahrnující Dirichletovy podmínky. Pro určitou třídu pravých stran uvažovaných inkluzí (shora polospojitých) ukazují, že všechna řešení diskrétní úlohy splňují apriorní omezení a tyto omezení jsou užity ve spojení s vhodnou mnohoznačnou verzí věty o pevném bodě k ověření existence řešení. V [5] je aplikována stejná věta o pevném bodě, jako bude použita v této práci a autoři zde užívají diskrétní verzi metody horního a dolního řešení. V [62] jsou uvažovány růstové podmínky a diskrétní principy maxima. Není mi známo, že by v některé práci byl řešen vztah mezi řešeními diskrétní a příslušné spojité úlohy.

5 Cíle práce

Tato disertační práce má několik cílů. Vzhledem k tomu, že literatura odpovídající tématu diferenčních inkluzí existuje jen částečně, a to v časopisecké podobě, je jedním z účelů práce vytvořit teoretický základ pro zkoumání dané problematiky.

Cílem Části I je stanovit efektivní odhady řešení a jejich derivací úlohy (1), tj. vektorového Dirichletova okrajového problému druhého řádu, na základě studování daného problému ze dvou úhlů pohledu. Prvním z nich je uvažování pouze jednočlenného diferenciálního operátoru na levé straně v inkluzi (1). Jeho zbývající výrazy zahrnout do pravé strany inkluze v (1) jako součást mnohoznačné perturbace. Druhým způsobem je opět stanovit existenční a lokalizační výsledky pro úlohu (1) tentokrát formálně zapsané tak, že na levé straně bude figurovat úplný lineární diferenciální operátor.

Dalším úkolem je oba tyto pohledy aplikovat na skalární úlohu (2) za účelem opět stanovit explicitní odhady řešení a podmínky řešitelnosti.

V Části II je cílem určit vztah mezi řešeními polospojité úlohy (5), (6) a její příslušné diskretizované úlohy (3), (4). Dále aplikovat podobné principy jako v Části I, a tedy přenést teorii diferenciálních inkluzí na diferenční inkluze, a vyšetřit tak, za jakých podmínek řešení diskrétní úlohy (3), (4) existuje a získat jeho odhad nezávislý na velikosti diskretizačního kroku.

6 Teoretická východiska práce

V této podkapitole představíme teoretická východiska práce, která použijeme pro pozdější analýzu. V Části I. budeme vycházet z úloh (1), resp. (2) a budeme je zkoumat ze dvou úhlů pohledu. Nejprve ponecháme na levé straně inkluze pouze jeden člen, a to ten, který odpovídá druhé derivaci. Zbývající členy zahrneme do pravé strany jako součást mnohoznačné perturbace. Poté budeme studovat dané stejné úlohy, avšak formálně zapsané tak, že na levé straně inkluzí budeme uvažovat úplný lineární diferenciální operátor.

V celé práci pak budeme využívat alternativně přepis daných úloh do jejich operátorových podob, a následně větu o pevném bodě. Konkrétně se bude jednat, v našem mnohoznačném případě, o Kakutaniho–Ky Fanovu větu o pevném bodě, kterou ve své práci použili také Lasota a Opial [42], kteří však vycházeli z vektorového problému prvního řádu, zatímco v této práci bude aplikována na problém druhého řádu.

Konečně efektivní růstové podmínky nám umožní určit lokalizaci řešení a jejich derivací uvažovaných úloh.

7 Užité metody

Existuje několik přístupů k řešení úloh s nespojitostmi v prostorové proměnné. V této práci využijeme princip Filippovovy regularizace, kdy je vytvořen konvexní obal daných nespojitých zobrazení. Nespojitá úloha je tak nahrazena mnohoznačnou úlohou.

Dále, v části týkající se diferenciálních inkluzí, využijeme apriorní odhady řešení, založené výhradně na růstových podmínkách na pravou stranu, k tomu, abychom, bez ztráty na obecnosti, definovali „ořezaná“ zobrazení k zobrazením na pravé straně uvažovaných inkluzí. Tato zobrazení jsou identická s původními uvnitř oblasti definované těmito apriorními odhady, avšak vně této oblasti mohou být zcela libovolná.

V obou případech, jak diferenciálních, tak diferenčních inkluzí uvažujeme nelineární úlohu, proto užijeme princip Schauderovy linearizace, pomocí níž získáme plně linearizované úlohy, resp. systém lineárních úloh. Fredholmova alternativa nám pak zaručí existenci nějakého řešení takto linearizované úlohy a jeho tvar, v němž se vyskytuje Greenova funkce. Při odhadech řešení využijeme v případě diferenciálních inkluzí různé exlicitní tvary Greenových funkcí, které lze jednoduše napočítat v závislosti na formálně zapsaném tvaru uvažované úlohy (resp. na členech, které budeme uvažovat jako součást pravé strany, resp. lineárního diferenciálního operátoru).

Věty o pevném bodě hrají důležitou roli při ověřování existence řešení diferenciálních i diferenčních úloh. Také v této práci je využit přístup transformace problému existence řešení na problém existence pevného bodu. Přeformulujeme tedy dané úlohy do jejich oprátorové podoby a aplikujeme mnohoznačnou verzi Schauderovy věty o pevném bodě, tj. Kakutaniho–Ky Fanovu, společně s Arzelà–Ascoli lemmatem, pomocí něhož obdržíme kompaktnost operátoru. Shora polospojitost operátoru dokážeme na základě uzavřenosti jeho grafu.

V poslední části, kde se zabýváme stejnoměrnou konvergencí řešení jednoparametrické třídy diskrétních inkluzí k řešení odpovidající polospojité úlohy, využijeme známé věty funkcionální analýzy opět společně s apriorními odhady řešení a jejich prvních diferencí nezávislých na velikosti diskretizačního kroku. K získání stejnoměrné konvergence jednotlivých posloupností užijeme opakovaně Arzelà–Ascoli lemma, a následně Mazurovu větu k obdržení podposloupnosti konvergující skoro všude ze slabě konvergující posloupnosti. Dále s výhodou využijeme vlastnosti stejnoměrné konvergence Greenových funkcí. K dokončení důkazu použijeme k identifikaci prvních a druhých derivací řešení Dominantní větu o konvergenci.

8 Teoretický základ

V této kapitole připomeneme některá témata matematické analýzy, která nejsou přímo obsahem této práce, ale úzce s ním souvisejí.

Definice 8.1. Nechť X a Y jsou metrické prostory. Řekneme, že φ je *mnohoznačné zobrazení* z X do Y (zapisujeme $\varphi\colon X \multimap Y$), jestliže pro každé $x \in X$ existuje neprázdná uzavřená podmnožina $\varphi(x)$ prostoru Y.

Mnohoznačné zobrazení φ můžeme charakterizovat jeho *grafem* Γ_φ, jakožto podmnožinu množiny $X \times Y$, která je definována jako

$$\Gamma_\varphi := \{(x,y) \in X \times Y \mid y \in \varphi(x)\}.$$

Nechť $\varphi\colon X \multimap Y$ je mnohoznačné zobrazení a $f\colon X \to Y$ je jednoznačné zobrazení. Řekneme, že f je *selekce* φ (psáno $f \subset \varphi$), jestliže $f(x) \in \varphi(x)$ pro každé $x \in X$.

Jestliže $X \subset Y$ a $\varphi\colon X \multimap Y$, pak bod $x \in X$ se nazývá *pevný bod zobrazení* φ, jestliže $x \in \varphi(x)$. Dostáváme tak množinu pevných bodů

$$\mathrm{Fix}(\varphi)\colon = \{x \in X \,|\, x \in \varphi(x)\}.$$

Definice 8.2. Nechť X a Y jsou metrické prostory. Mnohoznačné zobrazení $\varphi\colon X \multimap Y$ je *uzavřené*, jestliže jeho graf je uzavřený.

Definice 8.3. Nechť X a Y jsou metrické prostory. Mnohoznačné zobrazení $\varphi\colon X \multimap Y$ je *shora polospojité*, jestliže pro každou otevřenou množinu $U \subset Y$ je množina $\{x \in X | \varphi(x) \subset U\}$ otevřená v X.

Lemma 8.1. (viz např. [8, Propozice I.3.16]) *Předpokládejme, že $\varphi\colon X \multimap Y$ je mnohoznačné zobrazení takové, že $\varphi(X) \subset K$, kde $K \subset Y$ je kompaktní množina, a že graf Γ_φ zobrazení φ je uzavřený. Pak zobrazení φ je shora polospojité.*

Definice 8.4. Nechť Y je separabilní metrický prostor a $(\Omega, \mathscr{U}, \mu)$ je měřitelný prostor, t.j. množina Ω vybavená σ- algebrou $\mathscr{U}$ podmnožin a spočetnou aditivní mírou μ na $\mathscr{U}$. Mnohoznačné zobrazení $\varphi\colon \Omega \multimap Y$ je *měřitelné*, jestliže pro každou otevřenou množinu $V \subset Y$ platí $\{\omega \in \Omega | \varphi(\omega) \subset V\} \in \mathscr{U}$.

Definice 8.5. Nechť X a Y jsou metrické prostory. Mnohoznačné zobrazení $\varphi\colon X \multimap Y$ se nazývá *kompaktní*, jestliže jeho obraz $\varphi(X) = \bigcup\{\varphi(x) \mid x \in X\}$ je obsažen v kompaktní podmnožině množiny Y.

Definice 8.6. Nechť X a Y jsou podmnožiny normovaných lineárních prostorů, $\varphi\colon X \multimap Y$ je mnohoznačné zobrazení. Jestliže Y je konvexní, pak φ je *Kakutaniho zobrazení* za předpokladu, že φ je shora polospojité s (neprázdnými) kompaktními a konvexními hodnotami.

Propozice 8.1 (Kakutaniho–Ky Fanova věta o pevném bodě)**.** (viz např. [27, Věta II.8.4]) *Nechť C je konvexní (ne nutně uzavřená) podmnožina normovaného lineárního prostoru, a nechť $\varphi\colon C \multimap C$ je kompaktní Kakutaniho zobrazení. Pak zobrazení φ má pevný bod v C.*

Definice 8.7. Nechť $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ je jednoznačné zobrazení z otevřené množiny $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$, které je lokálně omezené a měřitelné na Ω. Pak se zobrazení

$$\Phi(x) = \bigcap_{\delta>0} \bigcap_{\mu(N)=0} \overline{\operatorname{conv}}\, \varphi((B(x,\delta)\cap\Omega)\setminus N)$$

nazývá *Filippovova regularizace zobrazení* φ, kde μ představuje Lebesgueovu míru v $\mathbb{R}^n$, $N \subset \mathbb{R}^n$, a $\overline{\operatorname{conv}}$ představuje uzavřený konvexní obal dané množiny. $B(x,\delta)$ je otevřená koule o poloměru $\delta > 0$ se středem v bodě x.

Propozice 8.2. *[14, Propozice 1]Nechť φ a Φ jsou jako v Definici 8.7. Pak*

i) zobrazení $x \to \Phi(x)$ je shora polospojité s neprázdnými a konvexními hodnotami,

ii) pokud je φ spojitá v x, tak $\Phi(x) = \{\varphi(x)\}$,

iii) $\varphi(x)$ patří do $\Phi(x)$ pro skoro každé x z Ω.

Dále také budeme potřebovat nějakou definici integrálu z mnohoznačného zobrazení (viz např. [15]).

Definice 8.8. Nechť $P\colon J \multimap \mathbb{R}^n$ je zobrazení, které má neprázdnou množinu lebesgueovsky integrovatelných selekcí. Pak *Aumannův integrál* zobrazení P je definován následovně:

$$\int_J P(t)\mathrm{d}t := \left\{ \int_J p(t)\mathrm{d}t \mid p \subset P \text{ lebesgueovsky integrovatelná selekce zobrazení } P \right\}.$$

9 Originální výsledky

Úlohy, studované v disertační práci, jsou motivovány rovnicemi kyvadla, resp. oscilátoru, se suchým třením, které odpovídá nespojitému zobrazení. Jsou tu prezentovány existenční výsledky řešení nejprve obecnějšího vektorového diferenciálního mnohoznačného Dirichletova problému druhého řádu (1) zahrnující obecnější mnohoznačné členy, poté jeho skalární analogie (2) obsahující člen odpovídající suchému tření a diskrétních Dirichletových inkluzí druhého řádu (3), (4), založených na apriorních odhadech těchto řešení. Explicitní odhady řešení a jejich derivací jsou napočítány a v případě diskrétní verze uvedeny nezávisle na velikosti diskretizačního kroku. Dále je dokázáno, v jakém smyslu konvergují řešení jednoparametrické třídy diskrétních úloh (3), (4) k řešení odpovídající polospojité úlohy (5), (6). Tato práce je založena na výsledcích publikovaných ve dvou článcích vzniklých ve spolupráci s panem profesorem Andresem [1] a panem profesorem Fečkanem [2] a zejména také na autorčině článku [3].

Disertační práce je rozdělena do dvou hlavních částí. Část I je věnována diferenciálním inkluzím, zatímco Část II pojednává o diferenčních inkluzích a vztahu mezi řešeními diskrétní a „polospojité" úlohy.

Hlavními výsledky Části I jsou existence a lokalizace Filippovova řešení jednak úlohy (1), kde jsou vedle jejich důkazu v Kapitole 4 uvedeny také explicitní odhady řešení a jejich derivací a jsou publikovány v [3], jednak úlohy (2) v Kapitole 5, publikované v [1].

Filippovovým řešením úlohy s nespojitostí v prostorové proměnné jsme rozuměli Carathédoryovo řešení příslušné diferenciální inkluze s filippovovsky regularizovanou pravou stranou (Filippovova regularizace viz Definice 8.7).

Větou 9.1 byla dokázána existence a lokalizace Filippovova řešení úlohy (1), kde jsme při odhadech řešení využili explicitní tvar Greenovy funkce příslušné formálně zapsané úlohy tak, že jsme na levé straně inkluze uvažovali pouze jednočlenný lineární diferenciální operátor odpovídající druhé derivaci.

Jelikož využíváme apriorní odhady řešení, stačí se pro zobrazení f_1, f_2 omezit na uzavřenou kouli $\overline{B}_D := \{z \in \mathbb{R}^n \mid ||z|| \leq D\}$.

Zobrazení f_1, f_2 nejsou spojitá, nelze tedy úlohu (1) řešit přímo. Byl využit princip Filippovovy regularizace za účelem získat v nějakém smyslu spojitá zobrazení. Tímto přístupem se podařilo získat shora polospojitá mnohoznačná zobrazení, která jsou lokálně omezená a mají neprázdné kompaktní a konvexní hodnoty.

Věta 9.1. *Nechť a, b a $T > 0$ jsou reálné konstanty takové, že*

$$\frac{4}{T(T+4)} > \max\{|a|, |b|\}, \tag{15}$$

$x_0, x_T \in \mathbb{R}^n$ a $J = [0, T]$ je kompaktní interval. Předpokládejme, že $P\colon J \multimap \mathbb{R}^n$ je aumannovsky integrovatelné mnohoznačné zobrazení, $f_1|_{\overline{B}_D}\colon \overline{B}_D \to \mathbb{R}^n$ a $f_2|_{\overline{B}_D}\colon \overline{B}_D \to \mathbb{R}^n$ jsou měřitelná a lokálně omezená zobrazení taková, že

$$||f_1(x)|| \leq M_1(D_0), \quad \textit{pro} \quad ||x|| \leq D,$$

$$||f_2(y)|| \leq M_2(D_0), \quad \textit{pro} \quad ||y|| \leq D,$$

kde $\overline{B}_D := \{z \in \mathbb{R}^n \mid ||z|| \leq D\}$, $M_1 = M_1(D_0)$ *a* $M_2 = M_2(D_0)$ *jsou vhodné konstanty,* $D = D_0 + k_2 + k_3$. *Dále předpokládejme, že* $D_0 > 0$ *je vhodná konstanta taková, že*

$$D_0 \geq \Delta_1(D_0), \tag{16}$$

kde

$$\Delta_1(D_0) = \frac{[\mathscr{P} + T\,(M_1(D_0) + M_2(D_0) + |a|k_3 + |b|k_2)]\,(T+4)}{4 - k_1 T(T+4)} \tag{17}$$

a

$$k_1 := \max\{|a|, |b|\}, \quad k_2 := \max\{||x_0||, ||x_T||\}, \quad k_3 := \frac{||x_T - x_0||}{T},$$

$$\mathscr{P} := \sup_{p \subset P} \left\{ \int_0^T ||p(t)||\,\mathrm{d}t \mid p \subset P \textit{ je lebesgueovsky integrovatelná selekce} \right.$$
$$\left. \textit{zobrazení } P \right\}.$$

Pak má úloha (1) Filippovovo řešení $x(\cdot)$ *takové, že* $||x(t)|| + ||x'(t)|| \leq D$ *pro* $t \in J$.

Stejného výsledku jsme také dosáhli ve Větě 9.2, kde jsme při odhadech řešení využili explicitního tvaru Greenových funkcí příslušející úloze formálně zapsané tak, že jsme na levé straně inkluze uvažovali úplný lineární diferenciální operátor.

Věta 9.2. *Nechť* a, b *a* $T > 0$ *jsou reálné konstanty,* $x_0, x_T \in \mathbb{R}^n$ *a* $J = [0, T]$ *je kompaktní interval. Předpokládejme, že* $P\colon J \multimap \mathbb{R}^n$ *je aumannovsky integrovatelné mnohoznačné zobrazení,* $f_1|_{\overline{B}_D}\colon \overline{B}_D \to \mathbb{R}^n$ *a* $f_2|_{\overline{B}_D}\colon \overline{B}_D \to \mathbb{R}^n$ *jsou měřitelná a lokálně omezená zobrazení taková, že*

$$||f_1(x)|| \leq M_1(D_0), \quad \textit{pro} \quad ||x|| \leq D,$$

$$||f_2(y)|| \leq M_2(D_0), \quad \textit{pro} \quad ||y|| \leq D,$$

kde $\overline{B}_D := \{z \in \mathbb{R}^n \mid ||z|| \leq D\}$, $M_1 = M_1(D_0)$ *a* $M_2 = M_2(D_0)$ *jsou vhodné konstanty,* $D = D_0 + k_2 + k_3$. *Dále předpokládejme, že* $D_0 > 0$ *je vhodná konstanta taková, že*

$$D_0 \geq \Delta_j(D_0), \quad j = 2, 3, 4 \quad \textit{(v závislosti na konstantách a a b)}$$

kde

1) pro $a^2 - 4b > 0$ *(j=2)*

$$\Delta_2(D_0) := \frac{\mathrm{e}^{(\lambda_1 - \lambda_2)T}}{\sqrt{a^2 - 4b}}\,[1 + |\lambda_1| + |\lambda_2|]$$
$$\times [\mathscr{P} + T\,(M_1(D_0) + M_2(D_0) + |a|k_3 + |b|k_2)]\,,$$

kde $\lambda_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}, \lambda_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$, *2) pro $a^2-4b=0$ (j=3)*

$$\Delta_3(D_0) := \mathrm{e}^{\frac{|a|}{2}T}\left[1+\frac{T}{4}\,(1+2\,|a|)\right]$$
$$\times\left[\mathscr{P}+T\,(M_1(D_0)+M_2(D_0)+|a|k_3+|b|k_2)\right],$$

3) pro $a^2-4b<0$ a $T\neq\frac{2\pi k}{\sqrt{4b-a^2}}$, $k\in\mathbb{N}$ (j=4)

$$\Delta_4(D_0) := \frac{\mathrm{e}^{\frac{|a|}{2}T}\left[2+|a|+\sqrt{4b-a^2}\right]}{\sqrt{4b-a^2}\left|\sin(\frac{T}{2}\sqrt{4b-a^2})\right|}$$
$$\times\left[\mathscr{P}+T\,(M_1(D_0)+M_2(D_0)+|a|k_3+|b|k_2)\right],$$

a

$$k_1 := \max\{|a|,|b|\},\quad k_2 := \max\{||x_0||,||x_T||\},\quad k_3 := \frac{||x_T-x_0||}{T},$$
$$\mathscr{P} := \sup_{p\subset P}\left\{\int_0^T ||p(t)||\,\mathrm{d}t \mid p\subset P \textit{ je lebesgueovsky integrovatelná selekce zobrazení } P\right\}.$$

Pak má úloha (1) Filippovovo řešení $x(\cdot)$ takové, že $||x(t)||+||x'(t)||\leq D$ pro $t\in J$.

Za podmínky esenciální omezenosti pro mnohoznačné zobrazení P jsme získali v Poznámce 9.1 následující podmínky řešitelnosti pro úlohu (1):

Poznámka 9.1. Jestliže je navíc mnohoznačné zobrazení P esenciálně omezené, pak může být podmínka (15) nahrazena

$$\frac{8}{T(T+4)} > \max\{|a|,|b|\}$$

a (16) s $\Delta_1(D_0)$ v (17) může být nahrazena

$$\widetilde{D}_0 \geq \Delta_1'(\widetilde{D}_0)$$

s

$$\Delta_1'(\widetilde{D}_0) := \frac{\left[\mathscr{P}_1+M_1(\widetilde{D}_0)+M_2(\widetilde{D}_0)+|a|k_3+|b|k_2\right]\,T\,(T+4)}{8-k_1\,T\,(T+4)},$$

kde $\mathscr{P}_1 := \operatorname{ess\,sup}_{\mathrm{t}\in\mathrm{J}}||\mathrm{P(t)}||$, protože $\int\limits_0^T|G_1(t,s)|\mathrm{d}s\leq\frac{T^2}{8}$ a $\int\limits_0^T\left|\frac{\partial G_1}{\partial t}(t,s)\right|\mathrm{d}s\leq\frac{T}{2}$. Pak platí stejný závěr pro (1) s D nahrazeným $\widetilde{D}=\widetilde{D}_0+k_2+k_3$.

Podobně jsme ve Větě 9.3, Poznámce 9.2, Poznámce 9.3 a Větě 9.4 získali podmínky řešitelnosti pro úlohu (2):

Věta 9.3. *Nechť a, b, c,* x_0, x_T *a* $T > 0$ *jsou reálné konstanty takové, že*

$$\frac{4}{T(T+4)} > \max\{|a|,|b|\}. \tag{18}$$

Předpokládejme, že $P\colon J \multimap \mathbb{R}$ *je aumannovsky integrovatelné mnohoznačné zobrazení,* $J=[0,T]$ *je kompaktní interval a* $F_1|_{\overline{B}_D}\colon \overline{B}_D \multimap \mathbb{R}$, $F_2|_{\overline{B}_D}\colon \overline{B}_D \multimap \mathbb{R}$ *jsou shora polospojitá mnohoznačná zobrazení s konvexními a kompaktními hodnotami, kde* $D = D_0+k_2+k_3$. *Dále předpokládejme, že* $D_0>0$ *je vhodná konstanta taková, že*

$$D_0 \geq \Delta_1(D_0), \tag{19}$$

kde

$$\Delta_1(D_0) := \frac{[\mathscr{P}+T(M_1(D_0)+M_2(D_0)+|a|k_3+|b|k_2+|c|)]\,(T+4)}{4-k_1T(T+4)}, \tag{20}$$

a

$$\begin{aligned} M_1(D_0) &:= \max_{|z|\leq D_0+k_2+k_3}|F_1(z)|, \quad M_2(D_0) := \max_{|z|\leq D_0+k_2+k_3}|F_2(z)|,\\ k_1 &:= \max\{|a|,|b|\}, \quad k_2 := \max\{|x_0|,|x_T|\}, \quad k_3 := \frac{|x_T-x_0|}{T},\\ \mathscr{P} &:= \sup_{p\subset P}\Bigg\{\int_0^T |p(t)|\,\mathrm{d}t \mid p\subset P \text{ je lebesgueovsky integrovatelná}\\ &\qquad \text{selekce zobrazení } P\Bigg\}. \end{aligned}$$

Pak má úloha (2) *řešení* $x(\cdot)$ *takové, že* $\max_{t\in J}\{|x(t)|+|x'(t)|\}\leq D$.

Poznámka 9.2. Jestliže je navíc mnohoznačné zobrazení P esenciálně omezené, pak může být podmínka (18) přepsána, za stejného závěru pro (2), pomocí

$$\frac{8}{T(T+4)} > \max\{|a|,|b|\},$$

a (19) s $\Delta_1(D_0)$ v (20) může být nahrazena $\widetilde{D}_0 \geq \Delta_1'(\widetilde{D}_0)$, kde

$$\Delta_1'(\widetilde{D}_0) := \frac{\Big[\mathscr{P}_1+M_1(\widetilde{D}_0)+M_2(\widetilde{D}_0)+|a|k_3+|b|k_2+|c|\Big]\,T\,(T+4)}{8-k_1T\,(T+4)},$$

$\mathscr{P}_1 := \operatorname{ess\,sup}_{\mathrm{t}\in\mathrm{J}}|\mathrm{P(t)}|$, protože $\int_0^T|G_1(t,s)|\,\mathrm{d}s \leq \frac{T^2}{8}$ a $\int_0^T\left|\frac{\partial G_1}{\partial t}(t,s)\right|\mathrm{d}s \leq \frac{T}{2}$. Tudíž stejný závěr platí pro (2) s D nahrazeným $\widetilde{D} = \widetilde{D}_0+k_2+k_3$.

Poznámka 9.3. Jestliže je navíc mnohoznačné zobrazení F_2 omezené, tj. $M_2 := \max_{z\in\mathbb{R}} |F_2(z)|$, a $a = 0$, můžeme odhad pro řešení (2) ještě vylepšit. Podmínka (18) pak může být přepsána pomocí $\frac{4}{T^2} > |b|$, za předpokladu, že ještě existuje kladná konstanta D_1 taková, že

$$D_1 \geq \frac{T\,[\mathscr{P} + (M_1(D_1) + M_2 + |b|k_2 + |c|)\,T]}{4 - T^2|b|}.$$

Za těchto předpokladů má úloha (2) řešení $x(\cdot)$ takové, že

$$\begin{aligned}\max_{t\in J} |x(t)| \;&\leq D_1 + k_2,\\ \max_{t\in J} |x'(t)| \;&\leq D_2 + k_3 := \mathscr{P} + T\,[M_1(D_1) + M_2 + |b|(D_1 + k_2) + |c|] + k_3,\end{aligned}$$

kde $M_1(D_1) := \max_{|z|\leq D_1+k_2} |F_1(z)|$, $k_2 := \max\{|x_0|, |x_T|\}$, $k_3 := \frac{|x_T - x_0|}{T}$.

Podobně přidáním předpokladu, že je mnohoznačné zobrazení F_1 omezené, tj. $M_1 := \max_{z\in\mathbb{R}} |F_1(z)|$, a $b = 0$, pak může být podmínka (18) nahrazena $\frac{1}{T} > |a|$, za předpokladu, že ještě existuje kladná konstanta D_2 taková, že

$$D_2 \geq \frac{\mathscr{P} + T\,(M_1 + M_2(D_2) + |a|k_3 + |c|)}{1 - T|a|},$$

kde $M_2(D_2) := \max_{|z|\leq D_2+k_3} |F_2(z)|$. Tady má úloha (2) řešení $x(\cdot)$ takové, že

$$\begin{aligned}\max_{t\in J} |x(t)| \;&\leq D_1 + k_2 := \frac{T}{4}\,[\mathscr{P} + T\,(M_1 + M_2(D_2) + |a|(D_2 + k_3) + |c|)] + k_2,\\ \max_{t\in J} |x'(t)| \;&\leq D_2 + k_3.\end{aligned}$$

Věta 9.4. *Nechť a, b, c, x_0, x_T a $T > 0$ jsou reálné konstanty. Předpokládejme, že $P\colon J \multimap \mathbb{R}$ je aumannovsky integrovatelné mnohoznačné zobrazení, $J = [0,T]$ je kompaktní interval a $F_1|_{\overline{B}_D}\colon\ \overline{B}_D \multimap \mathbb{R}$, $F_2|_{\overline{B}_D}\colon \overline{B}_D \multimap \mathbb{R}$ jsou shora polospojitá mnohoznačná zobrazení s konvexními a kompaktními hodnotami, taková, že*

$$M_1(D_0) := \max_{|z|\leq D_0+k_2+k_3} |F_1(z)|, \quad M_2(D_0) := \max_{|z|\leq D_0+k_2+k_3} |F_2(z)|,$$

kde $\overline{B}_D := \{z \in \mathbb{R}^n \mid ||z|| \leq D\}$, $M_1 = M_1(D_0)$ a $M_2 = M_2(D_0)$ jsou vhodné konstanty, $D = D_0 + k_2 + k_3$. Dále předpokládejme, že $D_0 > 0$ je vhodná konstanta taková, že

$$D_0 \geq \Delta_j(D_0), \quad j = 2,3,4 \quad \textit{(v závislosti na konstantách a a b)},$$

kde 1) pro $a^2 - 4b > 0$ ($j = 2$)

$$\begin{aligned}\Delta_2(D_0) \;:=\; &\frac{e^{(\lambda_1-\lambda_2)T}}{\sqrt{a^2-4b}}\,[1 + |\lambda_1| + |\lambda_2|]\\ &\times [\mathscr{P} + T\,(M_1(D_0) + M_2(D_0) + |c| + |a|k_3 + |b|k_2)]\,,\end{aligned}$$

kde $\lambda_1 = \frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2}$,
2) pro $a^2 - 4b = 0$ *(* $j = 3$ *)*

$$\Delta_3(D_0) := e^{\frac{|a|}{2}T}\left[1 + \frac{T}{4}(1+2|a|)\right] \\ \times \left[\mathscr{P} + T\left(M_1(D_0) + M_2(D_0) + |c| + |a|k_3 + |b|k_2\right)\right],$$

3) pro $a^2 - 4b < 0$ *a* $T \neq \frac{2\pi k}{\sqrt{4b-a^2}}$, $k \in \mathbb{N}$ *(* $j = 4$ *)*

$$\Delta_4(D) := \frac{\mathrm{e}^{\frac{|a|}{2}T}\left[2 + |a| + \sqrt{4b-a^2}\right]}{\sqrt{4b-a^2}\left|\sin(\frac{T}{2}\sqrt{4b-a^2})\right|} \\ \times \left[\mathscr{P} + T\left(M_1(D_0) + M_2(D_0) + |c| + |a|k_3 + |b|k_2\right)\right]$$

a

$$k_1 := \max\{|a|,|b|\}, \quad k_2 := \max\{||x_0||,||x_T||\}, \quad k_3 := \frac{||x_T - x_0||}{T},$$

$$\mathscr{P} := \sup_{p \subset P}\left\{\int_0^T ||p(t)||\,\mathrm{d}t \mid p \subset P \text{ je lebesgueovsky integrovatelná selekce zobrazení } P\right\}.$$

Pak má úloha (2) Filippovovo řešení $x(\cdot)$ *takové, že* $\max_{t\in J}\{|x(t)| + |x'(t)|\} \leq D$.

S ohledem na Poznámku 9.3 a výše uvedené odhady, jsme mohli ihned formulovat následující důsledek pro lebesgueovsky integrovatelnou selekci $p \subset P$ a $F_1(x) := d\sin x$.

Důsledek 9.1. Nechť b, c, d, x_0, x_T a $T > 0$ jsou reálné konstanty, a $p\colon [0,T] \to \mathbb{R}$ je lebesgueovsky integrovatelné zobrazení, kde $\mathscr{P} := \int_0^T |p(t)|\,\mathrm{d}t < \infty$. Pak existuje Filippovovo řešení $x(\cdot)$ úlohy

$$\left.\begin{array}{l} x''(t) + bx(t) + c\,\mathrm{sgn} x'(t) + d\sin x(t) = p(t), \text{ pro s. v. } t \in [0,T], \\ x(0) = x_0,\ x(T) = x_T, \end{array}\right\} \tag{21}$$

takové, že pro $0 < b \neq \left(\frac{k\pi}{T}\right)^2$, $k \in \mathbb{N}$,

$$\max_{t\in[0,T]} |x(t)| \leq \frac{\mathscr{P} + T\left[|b|k_2 + |c| + |d|\right]}{\sqrt{b}\left|\sin(\sqrt{b}T)\right|} + k_2,$$

$$\max_{t\in[0,T]} |x'(t)| \leq \frac{\mathscr{P} + T\left[|b|k_2 + |c| + |d|\right]}{\left|\sin(\sqrt{b}T)\right|} + \frac{|x_T - x_0|}{T}.$$

Pro $b<0$ a $b=0$, obdržíme příslušné odhady

$$\max_{t\in[0,T]}|x(t)| \le \frac{e^{2\sqrt{-b}T}}{2\sqrt{-b}}\left[\mathscr{P}+T\left(|b|k_2+|c|+|d|\right)\right]+k_2,$$
$$\max_{t\in[0,T]}|x'(t)| \le e^{2\sqrt{-b}T}\left[\mathscr{P}+T\left(|b|k_2+|c|+|d|\right)\right]+\frac{|x_T-x_0|}{T},$$

a

$$\max_{t\in[0,T]}|x(t)| \le \frac{T\left[\mathscr{P}+T(|c|+|d|)\right]}{4}+k_2,$$
$$\max_{t\in[0,T]}|x'(t)| \le \mathscr{P}+T(|c|+|d|)+\frac{|x_T-x_0|}{T},$$

kde $k_2=\max\{|x_0|,|x_T|\}$.

Úloha (21) z Důsledku 9.1 se pro $b=0$ zredukuje na Dirichletův problém pro buzené kyvadlo se suchým třením, a pro $d=0$ na Dirichletův problém pro buzený „lineární" oscilátor se suchým třením.

Hlavním výsledkem Části II je konvergence řešení jednoparametrické třídy diskrétních úloh (3), (4) k řešení příslušné polospojité úlohy (5), (6) v Kapitole 7.

Konvergenční výsledky jsou pro jednoznačné okrajové úlohy uvedeny např. v [32], pro mnohoznačné počáteční úlohy např. v [26]. Pro mnohoznačné okrajové úlohy byl problém konvergence poprvé řešen až v autorčině článku [2].

Řešením úlohy (3), (4) je konečná posloupnost, vektor $(x_0,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^{m(n+1)}$, kde $x_i\in\mathbb{R}^m$, $i=0,1,\ldots,n$, splňující (3) pro $i=1,\ldots,n-1$ a (4).

Řešením úlohy (5), (6) rozumíme funkci $x\colon[0,T]\to\mathbb{R}^m$ s absolutně spojitou první derivací splňující (5), (6).

Nejprve je ve Větě 9.5 uveden existenční a lokalizační výsledek pro řešení úlohy (3), (4) a jeho první diference, který je důležitý pro další část práce:

Věta 9.5. *Nechť je $F\colon[0,T]\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m\multimap\mathbb{R}^m$ s kompaktními a konvexními hodnotami takové, že $F(t,\cdot,\cdot)$ je shora polospojité pro každé $t\in[0,T]$. Nechť a, b, c jsou nezáporné reálné konstanty takové, že*

$$||y||\le a||u||+b||v||+c,\quad \forall(t,u,v)\in[0,T]\times\mathbb{R}^{2m},\ \forall y\in F(t,u,v) \tag{22}$$

a platí

$$8>T(T+4)M, \tag{23}$$

kde $M=\max\{a,b\}$. Pak má diskrétní úloha (3), (4) řešení $(x_0,\ldots,x_n)$ takové, že

$$\max_{i\in\{0,\ldots,n\}}||x_i||+\max_{i\in\{0,\ldots,n-1\}}\frac{||\Delta x_i||}{h}\le\frac{T(T+4)c}{8-T(T+4)M}.$$

Pomocí Věty 9.6 dostáváme za více sofistikovanějších podmínek než je lineární růstová existenci a odhad řešení:

Věta 9.6. *Nechť je* $F\colon [0,T]\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m \multimap \mathbb{R}^m$ *s kompaktními a konvexními hodnotami takové, že* $F(t,\cdot,\cdot)$ *je shora polospojité pro každé* $t\in[0,T]$. *Nechť* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *je euklidovský skalární součin na* $\mathbb{R}^m$ *s euklidovskou normou* $\|\cdot\|$. *Nechť* a *a* c *jsou nezáporné reálné konstanty takové, že*

$$||y|| \le a\left(2\langle u,y\rangle + ||v||^2\right) + c, \quad \forall (t,u,v)\in[0,T]\times\mathbb{R}^{2m},\ \forall y\in F(t,u,v). \tag{24}$$

Pak má diskrétní úloha (3), (4) řešení $(x_0,\dots,x_n)$ *takové, že*

$$\max_{i\in\{0,\dots,n\}} ||x_i|| \le \frac{T^2c}{8}+1. \tag{25}$$

Jestliže navíc

$$2a\left(\frac{T^2c}{8}+1\right) < 1, \tag{26}$$

pak existuje konstanta R *taková, že*

$$\max_{i\in\{0,\dots,n-1\}} \frac{||\Delta x_i||}{h} \le R. \tag{27}$$

Konečně, Věta 9.7 prezentuje, v jakém smyslu konvergují řešení jednoparametrické třídy diskrétních úloh k řešení příslušné polospojité úlohy. K důkazu této věty jsme potřebovali pomocné lemma Lemma 9.1, jehož důkaz je v práci také proveden.

Lemma 9.1. *Nechť je* $F\colon [0,T]\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m \multimap \mathbb{R}^m$ *s kompaktními a konvexními hodnotami shora polospojité a splňující* (22) *pro nezáporné konstanty* a,b *a* c. *Předpokládejme, že úloha*

$$\frac{\Delta^2 x_{i-1}^l}{h_l^2} \in F\left(t_i^l, x_i^l, \frac{\Delta x_i^l}{h_l}\right), \quad i=1,\dots,n_l-1, \tag{28}$$

$$x_0^l = 0, \quad x_{n_l}^l = 0, \tag{29}$$

má řešení $\left(x_0^l,\dots,x_{n_l}^l\right)$ *pro* $l\ge l_0$ *takové, že* $\max_i ||x_i^l|| \le \hat{K}$, $\max_i ||v_i^l|| \le \hat{K}$ *pro* $l \ge l_0$ *pro konstantu* $\hat{K}>0$. $n_l\to+\infty$, *když* $l\to+\infty$, $h_l=\dfrac{T}{n_l}$ *a* $t_i^l = ih_l$ *pro* $i=0,1,\dots,n_l$. *Definujme spojitou funkci* $x^l(t)$ *pomocí lineární interpolace tak, že* $x^l(t_i^l)=x_i^l$, *tj.*

$$x^l(t) = x_i^l + \frac{(x_{i+1}^l - x_i^l)(t-t_i^l)}{h_l}, \quad t_i^l \le t \le t_{i+1}^l, \quad i=0,\dots,n_l-1.$$

a $v_i^l \equiv \dfrac{\Delta x_i^l}{h_l}$, $i = 0,\dots,n_l-1$ *a* $v^l(t)$ *pomocí lineární interpolace na* $[0,T]$ *následovně*

$$v^l(t) = \begin{cases} v_i^l + \dfrac{(v_{i+1}^l - v_i^l)(t-t_i^l)}{h_l}, & t_i^l \le t \le t_{i+1}^l, \quad i = 0,\dots,n_l-2, \\ v_{n_l-1}^l, \quad t_{n_l-1}^l \le t \le T. \end{cases}$$

Pak existuje podposloupnost $\{l_k\}_{k\ge1}$ *a řešení* $x(t)$ *úlohy (5), (6) takové, že*

$$\max_{t\in[0,T]} ||x^{l_k}(t) - x(t)|| + \max_{t\in[0,T]} ||v^{l_k}(t) - x'(t)|| \to 0 \quad kdy\check{z} \quad k \to +\infty. \tag{30}$$

Věta 9.7. *Předpokládejme, že jsou splněny předpoklady Lemmatu 9.1 a že existují konstanty* $h_0 \ge 0$ *a* $K \ge 0$ *takové, že jestliže* $(x_0,\dots,x_n)$ *je řešení úlohy (3), (4) s* $h \le h_0$, *pak*

$$||x_i|| \le K, \quad i = 0,1,\dots,n, \quad a \quad \left|\left|\frac{x_i - x_{i-1}}{h}\right|\right| \le K, \quad i = 1,2\dots,n.$$

Pro libovolné $\varepsilon > 0$ *existuje* $h(\varepsilon)$ *takové, že jestliže* $h \le h(\varepsilon)$ *a* $(x_0,\dots,x_n)$ *je řešení úlohy (3), (4), pak existuje řešení* $x(t)$ *úlohy (5), (6) takové, že*

$$\max_{[0,T]} ||x(t,\bar{x}) - x(t)|| \le \varepsilon$$

a

$$\max_{[0,T]} ||v(t,\bar{x}) - x'(t)|| \le \varepsilon,$$

kde

$$x(t,\bar{x}) = x_i + \frac{(x_{i+1}-x_i)(t-t_i)}{h}, \quad t_i \le t \le t_{i+1}, \quad i = 0,\dots,n-1,$$

$$v(t,\bar{x}) = \begin{cases} \dfrac{x_{i+1}-x_i}{h} + \dfrac{(x_{i+2} - 2x_{i+1} + x_i)(t-t_i)}{h^2}, & t_i \le t \le t_{i+1}, 0 \le i \le n-2, \\ \dfrac{x_n - x_{n-1}}{h}, & t_{n-1} \le t \le T. \end{cases}$$

Tato disertační práce prezentuje výsledky dosažené autorkou během PhD studia Matematické analýzy na Univerzitě Palackého v Olomouci ve spolupráci s

- prof. RNDr. dr hab. Jan Andres, DSc., katedra Matematické analýzy a aplikací matematiky, Přírodovědecká fakulta Univerzity Palackého v Olomouci, Kapitola 5, viz [1].
- prof. RNDr. Michal Fečkan, DrSc., Matematický ústav Slovenské akademie věd, Kapitola 7, viz [2].

Některé výsledky byly prezentovány na mezinárodní konferenci a publikovány v několika recenzovaných časopisech. Seznam autorčiných publikací je uveden na konci práce.

10 Shrnutí výsledků

Úkolem této disertační práce bylo stanovit explicitní odhady řešení Dirichletových mnohoznačných polospojitých problémů za použití výhradně růstových podmínek na pravé strany uvažovaných problémů a určit, za jakých podmínek konverguje řešení diskrétního problému k řešení příslušného polospojitého problému. Dále také aplikovat techniky použité při vyšetřování existence řešení diferenciálních inkluzí na diferenční inkluze. V neposlední řadě také získané výsledky ilustrovat na příkladech.

Tato práce byla motivována problémy se suchým třením, které mají historické i fyzikální opodstanění. Byly zde vyšetřovány existence a lokalizace řešení diferenciálních rovnic s nespojitostí v prostorové proměnné, diferenciálních a diferenčních inkluzí s Dirichletovými okrajovými podmínkami, a také vztah mezi řešeními polospojité a příslušné diskrétní úlohy.

V Části I byla studována existence a lokalizace Filippovova řešení vektorového Dirichletova okrajového problému druhého řádu (1).

Tuto úlohu jsme řešili ze dvou úhlů pohledu, abychom mohli napočítat odpovídající Greenovy funkce, a stanovit tak optimální podmínky řešitelnosti. Rozlišili jsme tak mezi jednočlenným lineárním operátorem $Lx := x''$ (zbývající výrazy $ax' + bx$ pak byly brány jako součást mnohoznačné perturbace pravé strany uvažované inkluze) a úplným lineárním diferenciálním operátorem $Lx := x'' + ax' + bx$. Jelikož jsme uvažovali a, b jako reálné konstanty, ne matice, s výhodou jsme využili explicitní tvary Greenových funkcí. Za použití výhradně růstových podmínek jsme ve Větě 9.1 a Větě 9.2 obdrželi postačující podmínky řešitelnosti a explicitní odhady řešení a jeho derivace pro jednotlivé alternativy.

Dále byla vyšetřována existence řešení úlohy (2), jakožto speciální skalární případ úlohy uvedené výše. Tato úloha je motivována problémy se suchým třením. Efektivní podmínky řešitelnosti a explicitní odhady řešení a jeho derivace byly uvedeny ve Větě 9.3 a Větě 9.4. V Poznámce 9.2 a Poznámce 9.3 pak byly diskutovány podmínky řešitelnosti dané úlohy při přidání některých dalších předpokladů. Důsledek 9.1 zaručil existenci Filippovova řešení a explicitní odhad řešení a derivace řešení pro Dirichletův problém pro buzené kyvadlo se suchým třením a pro Dirichletův problém pro buzený „lineární“ oscilátor se suchým třením.

Porovnáním výsledků a interpretací na příkladech lze konstatovat, že každý z přístupů má své výhody i nevýhody, jinými slovy, žádný z nich nelze upřednostnit před druhým.

Optimální podmínky, stanovené v této práci, jsou dosti technické, nicméně umožňují velmi přesnou lokalizaci řešení, narozdíl od výsledků jiných autorů, např. Šenkyříka a Guenthera, kteří se zaměřují pouze na existenci řešení. Navíc, jelikož jsou zde využívány výhradně růstové podmínky, jsou autorčiny výsledky neporovnatelné s některými jinými autory, např. Pavlačkovou, která používá podmínky růstové i znaménkové.

V pracech, ve kterých je studován Dirichletův problém, a které jsou uvedeny v Seznamu literatury, autoři zkoumají tento problém výhradně ve tvaru s jednočlenným lineárním operátorem, odpovídajícím druhé derivaci. Není mi známo, že by se někdo další zabýval tímto problémem v podobě úplného lineárního diferenciálního operátoru.

Část II byla zaměřena na diferenční inkluze. Byly sem přeneseny techniky z Části I a ve Větě 9.5 a Větě 9.6 dokázán existenční a lokalizační výsledek pro řešení a jeho první diferenci nezávislý na velikosti diskretizačního kroku úlohy (3), (4).

Pomocí Lemmatu 9.1 a za využití stejnoměrné konvergence Greenových funkcí bylo ve Větě 9.7 ukázáno, v jakém smyslu konvergují řešení výše uvedeného diskrétního problému k řešení odpovídajícího polospojitého problému (5), (6).

Všechny uvedené poznatky byly ilustrovány na příkladech.

Výsledky obsažené v této práci byly publikovány ve třech recenzovaných článcích.

Seznam publikací

[1] Andres, J., Machů, H.: *Dirichlet boundary value problem for differential equations involving dry friction.* Bound. Value Probl. **2015**:106 (2015).

[2] Fečkan, M., Machů, H.: *Discrete Dirichlet boundary value problems with upper semicontinuous right-hand sides.* Journal of Difference Equations and Applications **22**:7 (2016), 959–972.

[3] Machů, H.: *Filippov solutions of vector Dirichlet problems.* Math. Slovaca **70**:2 (2020), 401–416.

Literatura

[4] Agarwal, R. P.: *On multipoint boundary value problems for discrete equations.* J. Math. Anal. Appl. **96** (1983), 520–534.

[5] Agarwal, R. P., O'Regan, D., Lakshmikantham, V.: *Discrete second order inclusions.* J. Differ. Equations Appl. **9** (2003), 879–885.

[6] Agarwal, R. P., Thompson, H. B., Tisdell, C. C.: *Three-point boundary value problems for second-order discrete equations.* Comp. Math. Appl. **45** (2003), 1429–1435.

[7] Amontons, G.: *De la Résistance Causée Dans les Machines.* Mem. Acad. Roy (1699), 206–222.

[8] Andres, J., Górniewicz, L.: *Topological Fixed Point Principles for Boundary Value Problems.* Dordrecht, Kluwer, 2003.

[9] Andres, J., Malaguti, L., Pavlačková, M.: *Scorza–Dragoni approach to Dirichlet problem in Banach spaces.* Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, Oxford: Pergamon Press, 71, 12 (2009), 6019–6028.

[10] Andres, J., Malaguti, L., Pavlačková, M.: *Dirichlet problems in Banach spaces: the bound sets approach.* Boundary Value Problems, Heidelberg: Springer, 25 (2013), 1–21.

[11] Andres, J., Malaguti, L., Pavlačková, M.: *Hartman-type conditions for multivalued Dirichlet problem in abstract spaces.* In: Dynamical System, Differential Equations and Applications, AIMS Proseedings, 2015, 2015 (special), doi: 10.3934/proc. 2015.0038, 38–55.

[12] Andres, J., Sanchez, L.: *A note on vector boundary value problems.* Int. J. Non.-Lin. Diff. Eqns, TMA **3**, 1–2 (1997), 49–58.

[13] Appell, J., De Pascale, E., Thái, N. H., Zabreiko, P. P.: *Multi-Valued Superpositions.* Dissertationes. Math., Vol. 345, PWN, Warsaw, 1995.

[14] Aubin, J. P., Cellina, A.: *Differential Inclusions.* Springer, Berlin, 1984.

[15] Aumann, R. J.: *Integrals of set-valued functions.* J. Math. Anal. Appl., **12**, 1 (1965), 1–12.

[16] Awrejcewicz, J., Fečkan, M., Olejnik, P.: *On continuous approximation of discontinuous systems.* Journal of Differential Equations, **62**, 7 (2005), 1317–1331.

[17] Bernfeld, S. R., Lakshmikantham, V.: *An Introduction to Nonlinear Boundary Value Problems.* Academic Press, New York, 1974.

[18] Borsuk, K.: *Theory of Retracts.* vol. **44**, Monografie Matematyczne, PWN, Warsaw, 1967.

[19] Cabada, A., Ferreiro, J.: *Existence of positive solutions for nth order periodic difference equations.* J. Differ. Equations Appl. **17** (2011), 935–954.

[20] Cabada, A., Otero-Espinar, V.: *Fixed sign solutions of second-order difference equations with Neumann boundary conditions.* Advances in difference equations, IV. Comput. Math. Appl. **45** (2003), 1125–1136.

[21] Castaing, C., Valadier, M.: *Convex Analysis and Measurable Multifunctions.* Springer, Berlin, 1977.

[22] Conti, R.: *Recent trends in the theory of boundary value problems for ordinary differential equations.* Boll. Unione Mat. Ital., **22**, 3 (1967), 135–178.

[23] Coulomb, C. A.: *Theorie des Machines Simples.* Mem. Math. Phys. Acad. Sci. **10** (1785), 161–331.

[24] Cubiotti, P., Yao, J. C.: *Two-point problem for vector differential inclusions with discontinuous right-hand side.* Appl. Anal. **93**, 9 (2014), 1811–1823.

[25] Deimling, K.: *Multivalued Differential Equations.* W. De Gruyter, Berlin, 1992.

[26] Dontchev, A. L., Lempio, F.: *Difference methods for differential inclusions: A Survey.* SIAM Review **34** (1992), 263–294.

[27] Dugundji, J., Granas, A.: *Fixed Point Theory.* Springer, Berlin, 2003.

[28] Erbe, L. H., Knobloch, H. W.: *Boundary value problems for systems of second order differential equations.* Proceed. Royal Soc. Edinburgh **101**A, 1–2 (1985), 61–76.

[29] Euler, L.: *Sur la Diminution de la Résistance du Frottement.* Histoire de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin **4** (1748) 133–148.

[30] Fabry, Ch., Habets, P.: *The Picard boundary value problem for nonlinear second order vector differential equations.* J. Diff. Eqns **42**, 2 (1981), 186–198.

[31] Filippov, A. F.: *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides.* Kluwer, Dordrecht, 1988.

[32] Gaines, R.: *Difference equations associated with boundary value problems for second order nonlinear ordinary differential equations.* SIAM J. Numer. Anal. **11** (1974), 411–434.

[33] Granas, A., Guenther, R. B., Lee, J. W.: *Nonlinear Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations.* Dissertationes Math., Vol.244, PWN, Warsaw, 1985.

[34] Granas, A., Guenther, R. B., Lee, J. W.: *Some general existence principles in the Carathédory theory of nonlinear differential systems.* J. Math. Pures Appl., **70**, 2 (1991), 153–196.

[35] Habets, P., Schmitt, K.: *Nonlinear boundary value problems for system of differential equations.* Arch. Math. (Basel) **40**, 1 (1983), 441–446.

[36] Hartman, P.: *On boundary value problems for systems of ordinary nonlinear second order differential equations.* Trans. Amer. Math. Soc. **96**, 3(1960), 493–509.

[37] Knobloch, H. W., Schmitt, K.: *Nonlinear boundary value problems for systems of differential equations.* Proceed. Royal Soc. Edinburgh **78**A, 1-2 (1977), 139–159.

[38] Kožušníková, M.: *A bounding functions approach to multivalued Dirichlet problem.* Atti Semin. Mat. Fis. Univ. Modena Reggio Emilia, **55** (2007), 1–19.

[39] Kelley, W. G., Peterson, A. C.: *Difference equations. An introduction with applications.* Second edition. Harcourt/Academic Press, San Diego, CA, 2001.

[40] Kunze, M.: *Non-Smooth Dynamical Systems.* Lecture Notes in Mathematics 1744, Springer, Berlin, 2000.

[41] Lasota, A.: *A discrete boundary value problem.* Annales Polonici Mathematici, **20** (1968), 183–190.

[42] Lasota, A., Opial, Z.: *An application of the Kakutani–Ky Fan theorem in the theory of ordinary differential equations.* Bull. de L'Acad. Polonaise de Sciences, Ser. sci. math., astr. et phys. **13**, 11–12 (1965), 781–786.

[43] Lee, J. W., O'Regan, D.: *Existence of solutions to some initial value, two point and multipoint boundary value problems with discontinuous nonlinearities.* Applicable Anal., **33**, 1–2 (1989), 57–77.

[44] Mawhin, J.: *Boundary value problems for nonlinear second-order vector differential equations.* J. Diff. Eqns **16**, 2 (1974), 257–269.

[45] Mawhin, J: *Problèmes de Dirichlet variationnels non linéaires.* Partie 1 des comptes rendus du cours d' été OTAN "Variational Methods in Nonlinear Problems". Le Presses de l'Université de Montréal, Montréal, 1987.

[46] Monteiro Marques, M. D. P: *Differential Inclusions in Nonsmooth Mechanical Problems. Shocks and Dry Friction.* Birkhäuser, Basel, 1993.

[47] Morin, A. J.: *Nouvelles Expériences sur le Frottement Faites à Metz en 1831–1833.* Mém. Présentés par Divers Savants *à* l´Académie des Sciences **4**, 1–128, 591–696 (1833); 641–783 (1835).

[48] Nistri, P.: *Positive solutions of non-linear eigenvalue problem with discontinuous non-linearity.* Proceed. Royal Soc. Edinburgh **83**A, 1–2 (1979), 133–145.

[49] O'Regan, D.: *Boundary value problems for second and higher order differential equations.* Proceed. Amer. Math. Soc. **113**, 3 (1991), 761–775.

[50] Painlevé, P.: *Lecons sur le Frottement.* Hermann, Paris, 1895; Gostekhizdat, Moscow, 1954.

[51] Pavlačková, M.: *A bound sets technique for Dirichlet problem with an upper-Carathéodory right-hand side.* Acta Univ. Palacki. Olomouc., Fac. Rerum Natur., Mat **49**, 2 (2010), 95–106.

[52] Pavlačková, M.: *A Scorza - Dragoni approach to Dirichlet problem with an upper-Carathéodory right-hand side.* Topol. Methods Nonl. Anal. 44 (2014), no.1, 239–247.

[53] Popp, K., Hinrichs, N., Oestreich, M.: *Dynamical behaviour of a friction oscillator with simultaneous and external excitation.* Sādhanā **20**, 2–4 (1995), 627–654.

[54] Pruszko, T.: *Some Applications of the Topological Degree Theory to Multi-Valued Boundary Value Problems.* Dissertationes Math., Vol. 229, PWN, Warsaw, 1984.

[55] Rachůnková, I., Tisdell, C. C.: *Existence of non-spurious solutions to discrete boundary value problems.* Austral. J. Math. Anal. Appl., **3** (2006), 1–9.

[56] Rachůnková, I., Tisdell, C. C.: *Existence of non-spurious solutions to discrete Dirichlet problems with lower and upper solutions.* Nonl. Anal., **67** (2007), 1236–1245.

[57] Rudin, W.: *Functional Analysis (2nd ed).* McGraw-Hill, New York, 1991.

[58] Scorza-Dragoni, G.: *Sul problema dei valori ai limiti per i sistemi di equazioni differenziali del secondo ordine.* Boll. Unione Mat. Ital. **14** (1935), 225–230.

[59] Scorza-Dragoni, G.: *Sui sistemi di equazioni integrali non lineari.* Rend. Semin. Mat. Univ. Padova **7** (1936), 1–35.

[60] Smart, D. R.: *Fixed point theorems.* Cambridge University Press, Great Britain, 1974.

[61] Stakgold, I: *Green's Functions and Boundary Value Problems.*John Wiley & Sons, New York, 1979.

[62] Stehlík, P., Tisdell, C. C.: *On boundary value problems for second order discrete inclusions.* Bound. Value Probl. **2005**:2 (2005) 153–163.

[63] Stewart, D. E.: *Rigid-body dynamics with friction and impact.* SIAM Rewiew **42**, 1 (2000), 3–39.

[64] Stuart, C. A.: *Differential equations with discontinuous non-linearities.* Arch. Rational Mech. Anal. **63**, 1 (1976), 59–75.

[65] Šenkyřík, M., Guenther, R. B.: *Boundary value problems with discontinuities in the spatial variable.* J. Math. Anal. Appl. **193**, 1 (1995), 296–305.

[66] Teschl, G.: *Differential Equations and Dynamical Systems.* Graduate Studies in Mathematics, Volume 140, Amer. Math. Soc., Providence, 2012.

[67] Thompson, H. B., Tisdell, C. C.: *Systems of difference equations associated with boundary value problems for second order systems of ordinary differential equations.* J. Math. Anal. Appl. **248** (2000), 333–347 .

[68] Thompson, H. B., Tisdell, C. C.: *Boundary value problems for systems of difference equations associated with systems of second-order ordinary differential equations.* Appl. Math. Lett. **15** (2002), 761–766.

[69] Thompson, H. B., Tisdell, C. C.: *The nonexistence of spurious solutions to discrete, two-point boundary value problems.* Appl. Math. Lett. **16** (2003), 79–84.

[70] Vasiliev, N. I., Klokov, Ju. A.: *Foundations of the theory of boundary value problems in ordinary differential equations.* (Russian), Zinatne, Riga, 1978.

[71] Vinci, L. da: *About Myself and My New Science.* (1508), in Pictorial Works of Art, Vol. 1 (Academia, Moscow, 1932), in Russian.

[72] Vrabie, I. I.: *Compactness Methods for Nonlinear Evolutions.* Longman House, Burn Mill, Harlow, 1990.

[73] Zhukovskii, N. E.: *Equilibrium Condition for a Rigid Body Contacting with an Immovable Plane by a Site and Able to Move along This Plane with Friction.* In Complete Papers, Vol. 1 (Gostekhizdat, Moscow-Leningrad, 1948), 299–354, in Russian.

[74] Zhukovskii, N. E.: *Friction of Railway Wheel Treads on Railways.* Complete Papers, Vol. 7 (Gostekhizdat, Moscow-Leningrad, 1948), 426–478, in Russian.

[75] Zhuravlev, V. Ph.: *On the history of the dry friction law.* Mechanics of Solids **48**, 4 (2013), 364–369.

[76] Zuev, A. V.: *On the Dirichlet problem for a second-order ordinary differential equation with discontinuous right-hand side.* Differential Equations **42**, 3 (2006), 340–346.