



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV MATEMATIKY

INSTITUTE OF MATHEMATICS

KOMBINACE NUMERICKÉ MATEMATIKY A NEURONOVÉ SÍTĚ PRO MODEL PREDIKCE PRŮVALU

COMBINATION OF NUMERICAL MATHEMATICS AND NEURAL NETWORK FOR THE MODEL OF
BREAKOUT PREDICTION

DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. Jan Srba

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. Tomáš Mauder, Ph.D.

BRNO 2019

Zadání diplomové práce

Ústav:	Ústav matematiky
Student:	Bc. Jan Srba
Studijní program:	Aplikované vědy v inženýrství
Studijní obor:	Matematické inženýrství
Vedoucí práce:	Ing. Tomáš Mauder, Ph.D.
Akademický rok:	2018/19

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma diplomové práce:

Kombinace numerické matematiky a neuronové sítě pro model predikce průvalu

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Plynulé odlévání oceli je dominantní průmyslový proces výroby oceli. Jedním z hlavních uzlů procesu je primární chladicí zóna tzv. krystalizátor. Protože má ocel na výstupu z krystalizátoru pouze slabou skořepinu a mohlo by dojít k tzv. průvalu, což znamená přerušení výroby a značné finanční náklady na opravu zařízení, je nezbytné on-line monitorování teplot z termočlánků ve stěně krystalizátoru. Na základě měřených dat a jejich matematickém zpracování je informována obsluha o možném vzniku průvalu, na který musí obsluha stroje reagovat úpravou licí rychlosti. V praxi se však může vyskytnout i tzv. falešný poplach, který ve větším počtu zpomaluje výrobu a tedy snižuje výtěžnost zařízení. Zde se pak využívá matematických modelů, které se snaží o co možná nejlepší predikci rozložení teplot ve stěně krystalizátoru, na jejímž základě se vyhodnocuje, jestli může průval nastat či nikoliv.

Cíle diplomové práce:

Cíl práce se dá postupně formulovat takto: statistické vyhodnocení reálných dat a jejich filtrace, vytvoření numerického modelu teplotního pole ve stěně krystalizátoru, tvorba neuronové sítě pro predikci průvalu. Celý model bude vytvořen v programu MATLAB za využití patřičných toolboxů. Závěrem práce pak bude verifikovat model na reálných datech, kde bude zejména testována jeho robustnost a věrohodnosti predikce.

Seznam doporučené literatury:

BIRAT, J. P., et al. The Making, Shaping and Treating of Steel: Casting Volume :11th. EDITION. ALAN W. CRAMB. Pittsburgh 2003, ISBN 0-930767-04-7.

V Brně, dne

L. S.

prof. RNDr. Josef Šlapal, CSc.
ředitel ústavu

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.
děkan fakulty

Abstrakt

Tato práce se zabývá vytvářením modelu predikce průvalu realizovaného pomocí umělé neuronové sítě v prostředí MATLAB, práce proto obsahuje teoretický popis umělých neuronových sítí a také uvádí způsob, jakým byly umělé neuronové sítě použity pro úlohu predikce průvalu. V rámci této práce byly dále vytvořeny modely vedení tepla stěnou krystalizátoru, pomocí nichž byla vytvářena data potřebná pro kvalitní natrénování neuronové sítě. Při popisu vytvářených modelů byl kladen důraz zejména na numerické metody použité při řešení úloh vedení tepla. V práci jsou prezentovány dílčí výsledky modelů vedení tepla i výsledky testování vytvořené umělé neuronové sítě na reálných datech.

Summary

This thesis deals with creation of breakout prediction model implemented via artificial neural network in MATLAB, hence it contains theoretical description of artificial neural networks and also presents how the networks were used for the breakout prediction problem. In addition, models of heat conduction through the mold wall were created and used for generating necessary data for proper training of artificial neural network. The thesis contains proper description of used numerical methods for solving the heat conduction problems. In the thesis are presented partial results and also results of testing created artificial neural network with usage of real data.

Klíčová slova

Plynulé odlévání oceli, krystalizátor, průval, protiprůvalový systém, přenos tepla, numerické metody, neuronové sítě.

Keywords

Continuous casting of steel, mold, breakout, breakout prevention system, heat transfer, numerical methods, neural networks.

SRBA, J. *Kombinace numerické matematiky a neuronové sítě pro model predikce průvalu*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2019. 77 s. Vedoucí Ing. Tomáš Mauder, Ph.D.

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně pod vedením Ing. Tomáše Maudera, Ph.D. a že jsem uvedl všechny použité prameny a literaturu.

V Brně dne 24. května 2019

.....

Bc. Jan Srba

Zde bych rád poděkoval vedoucímu mé práce Ing. Tomáši Mauderovi, Ph.D. a také prof. Ing. Josefu Štětinovi, Ph.D. za všechny cenné rady a konzultace, které mi během vytváření této práce poskytli. Rád bych také poděkoval všem svým blízkých, kteří mne podporovali v průběhu studia i mimo něj.

Bc. Jan Srba

Obsah

Úvod	11
1 Plynulé odlévání oceli	13
1.1 Historie	13
1.2 Zařízení pro plynulé odlévání oceli	13
1.3 Průval	17
1.4 Protiprůvalové systémy	19
2 Vedení tepla stěnou krystalizátoru	23
2.1 1D model vedení tepla	27
2.1.1 Formulace úlohy	27
2.1.2 Numerické řešení	30
2.1.3 Výpočet tepelných odporů R_m	33
2.1.4 Výsledky	35
2.2 2D model vedení tepla	36
2.2.1 Formulace úlohy	36
2.2.2 Numerické řešení	38
2.2.3 Výsledky	44
3 Neuronové sítě	47
3.1 Formální neuron	47
3.2 Architektura neuronové sítě	48
3.3 Učení neuronové sítě	49
4 Implementace a výsledky	53
4.1 Trénovací množina	53
4.2 Architektura sítě	55
4.3 Výsledky	55
5 Závěr	61
Seznam použité literatury	63
Seznam použitých zkratk a symbolů	67
Seznam obrázků	69
Seznam tabulek	71
Seznam příloh	73
A Využitá reálná data	75
B Umístění termočlánků	77

Úvod

Plynulé odlévání je v současné době nejrozšířenějším způsobem výroby oceli, který má přibližně 95% podíl na celkové světové produkci oceli. Jedná se o průmyslový proces, při kterém z roztavené oceli vzniká tuhnutím tzv. předlitek: polotovary obdélníkového, čtvercového, případně jiného průřezu, který je následně dále zpracováván. Charakteristickou vlastností tohoto procesu je plynulost, neboť umožňuje odlévat předlitek polonekonečné délky, který je ovšem z praktických důvodů krácen na požadovanou velikost. Díky plynulosti je proces z hlediska produktivity efektivnější než odlévání oceli do stacionárních kokil, které bylo hlavním způsobem výroby oceli přibližně do 50. let 20. století.

Ústředním prvkem zařízení pro plynulé odlévání oceli je krystalizátor: vodou chlazená forma, obvykle vyrobená z mědi, do níž je přiváděna roztavená ocel. Úkolem krystalizátoru je odvést z roztavené oceli dostatečné množství tepla tak, aby na povrchu roztavené oceli vznikla pevná kůra. Tato kůra musí mít na výstupu z krystalizátoru dostatečnou tloušťku, protože musí vydržet ferostatický tlak tekuté oceli, která uvnitř vznikajícího předlitku ještě neztuhla. Pokud kůra není dostatečně pevná, může dojít k tzv. průvalu: protržení tenké kůry a k následnému vytečení tekutého jádra předlitku, což má za následek poškození zařízení pro plynulé odlévání oceli, zastavení výroby a z toho plynoucí ztráty. Krystalizátor je proto vybaven protiprůvalovým systémem, jehož úkolem je detekovat možný vznik průvalu a na základě toho vyslat impuls ke snížení lící rychlosti, aby ocel mohla řádně ztuhnout. Protiprůvalové systémy využívají různých přístupů, často jsou do stěn krystalizátoru zabudovány termočlánky, které monitorují průběhy teplot v jednotlivých stěnách krystalizátoru. Na základě nich protiprůvalový systém vyhodnotí, zda hrozí průval či nikoliv.

Klíčem k úspěšnému chodu protiprůvalového systému je stanovení vztahu mezi průběhy teplot z termočlánků a možným vznikem průvalu tak, aby průval byl vždy detekován, ale zároveň byl minimalizován počet falešných alarmů, při kterých dojde ke snížení lící rychlosti, aniž by mělo dojít k průvalu. K určení tohoto vztahu byly v této práci použity umělé neuronové sítě, které jsou díky své robustnosti, adaptivitě a odolnosti vhodné pro použití v protiprůvalovém systému. Pro účely této práce bylo k dispozici velké množství reálných historických dat, která byla využita pro natrénování neuronové sítě. Data rovněž sloužila pro testování její spolehlivosti a tedy i ověření, že v práci zvolený přístup je správný.

1. Plynulé odlévání oceli

Cílem této kapitoly bude stručně shrnout historický vývoj plynulého odlévání oceli a popsat zařízení pro plynulé odlévání oceli, zejména pak jeho části, které úzce souvisí s problematikou průvalu, která bude následně také rozebrána. Poté bude uvedeno, jaké techniky a metody se používají k tomu, aby byl průval predikován a eliminován.

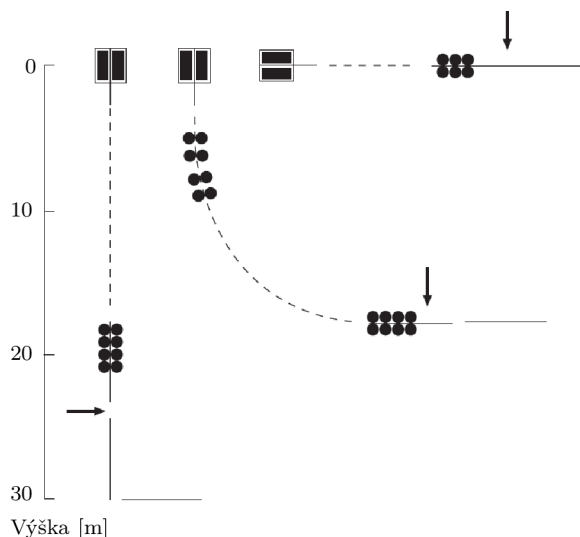
1.1. Historie

Přes více než jedno století bylo tradiční metodou pro výrobu oceli odlévání do litinových ingotových forem různého průřezu - kokil [18]. Každý ingot byl odléván nezávisle a počet vyrobených ingotů závisel na velikosti pánve, ve které byla tekutá ocel, a na velikosti odlévaného ingotu. Poté, co odlévaná ocel ve formě ztuhla, byla forma odstraněna a ingot byl znovu zahříván, aby mohl být válcováním přetvořen v požadovaný polotovar nebo již hotový produkt. Celý proces byl díky tomu energeticky nevýhodný a kvůli relativně dlouhému tuhnutí oceli v kokilách byl i neefektivní. Proto bylo snahou vymyslet plynulejší metodu, která by odstraňovala zmíněné nedostatky. Již v polovině 19. století byla zkonstruována první zařízení pro plynulé odlévání neželezných kovů, za průkopníky této metody lze považovat G. E. Sellarse (1840), J. Lainga (1843) a zejména H. Bessemera (1856), který vytvořil mechanismus na odlévání mosazi pomocí dvou otočných válců [2, 18]. Metoda pak byla aplikována i pro výrobu oceli, byla dále vyvíjena a v průběhu let zdokonalována: v roce 1887 vynalezl R. M. Daelen otevřený krystalizátor a v roce 1933 byl S. Junghensem vynalezen oscilující krystalizátor, který měl za úkol eliminovat přilnutí oceli ke stěnám krystalizátoru. Od 50. let 20. století se technologie plynulého odlévání začala rapidně rozšiřovat. V 80. letech 20. století se plynulé odlévání oceli stalo nejrozšířenější metodou výroby oceli a překonalo tak původní odlévání do stacionárních kokil. V současnosti se plynulým odléváním vyrábí okolo 95% veškeré světově vyprodukované oceli, přičemž se ale stále jedná o dynamické odvětví s nově zaváděnými značkami ocelí a se vzrůstajícími požadavky na jejich kvalitu. Matematické simulace a optimální řízení jsou významnými prostředky využívanými ke splnění těchto požadavků [20].

1.2. Zařízení pro plynulé odlévání oceli

Zařízení pro plynulé odlévání oceli (ZPO) lze z hlediska konstrukce rozdělit do tří kategorií. Nejstarší typem je vertikální ZPO, které je vyobrazeno na obrázku 1.1 vlevo. Nevýhodou tohoto ZPO je jeho výška a s ní spojené náklady na výstavbu a také složitá manipulace s odlitými předlitky: mechanismus na otáčení předlitků z vertikální do horizontální pozice je drahý a složitý [18]. Dalším problémem je vyšší ferostatický tlak tekutého jádra předlitku, díky čemuž jsou více namáhány vodící válce, s čímž jsou spojené větší náklady na jejich údržbu a seřizování.

Na obrázku 1.1 vpravo je vyobrazeno horizontální ZPO, jehož výhodou je pochopitelně malá výška, avšak jeho problémem je vysoké tření mezi odlévanou ocelí a krystalizátorem, což limituje lící rychlost [2].



Obrázek 1.1: Typy ZPO [2].

Nejpoužívanějším je radiální ZPO, které je na obrázku 1.1 uprostřed. Toto ZPO má menší výšku než v případě vertikálního typu, což snižuje velikost ferostatického tlaku uvnitř předlitku, a zároveň dosahuje větší produktivity než typ horizontální [18]. Naopak nevýhodou je nutnost ohýbání a rovnání předlitku. Radiální ZPO lze dodatečně rozdělit podle toho, zda je předlitek rovnán v místech, kde je již zcela ztuhlý, nebo v místech, kde ocel ještě zcela neztuhla a uvnitř předlitku je stále ještě tekuté jádro. Radiální ZPO lze také rozdělit podle toho, zda je krystalizátor zakřivený nebo, méně často, přímý.

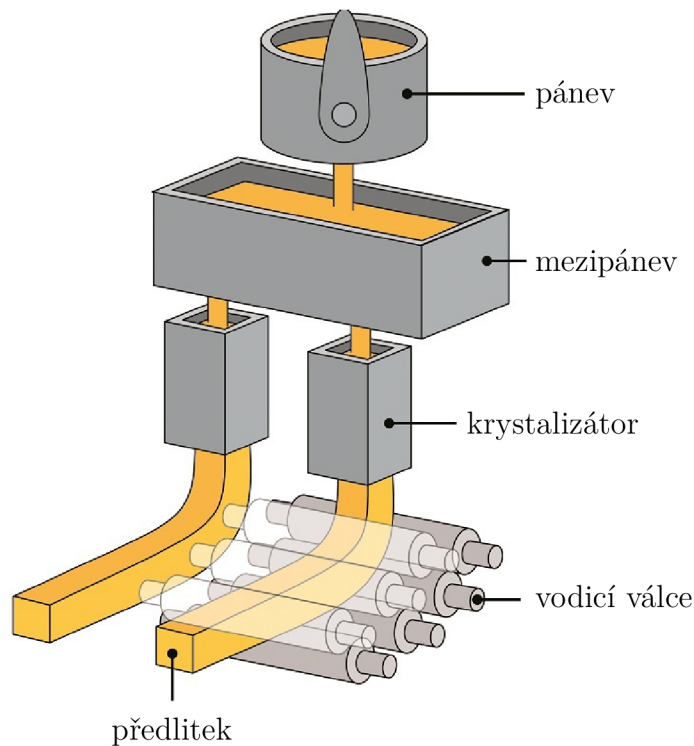
V dalším textu budou popsány hlavní části radiálního ZPO, které je naznačeno na obr. 1.2. Důraz bude kladen zejména na popis krystalizátoru, neboť dobré znalosti principu činnosti krystalizátoru jsou nezbytné pro zkoumání problematiky průvalu.

Pánev

Pánev slouží k dopravě roztavené oceli z vysoké pece. Roztavená ocel je nalita do pánve a ta je následně vyzdvížena na ZPO, kde je umístěna do otočného stojanu, který umožňuje operovat s více pánvemi najednou a také zajišťuje, že bude pánev rychle dopravena do lící pozice. Výměna pánve probíhá obvykle každých 40 až 60 minut, přičemž jedna pánev pojme desítky až stovky tun oceli [20, 18]. Z pánve se ocel přelévá přes žáruvzdornou trubici do mezipánve.

Mezipánev

Úkolem mezipánve je zajistit plynulý přísun tekuté oceli do krystalizátoru, případně krystalizátorů, neboť z jedné mezipánve lze odlévat více předlitků současně. V případě odlévání bram, které mají šířku větší než 800 mm, je počet současně odlévaných předlitků málokdy větší než 2, avšak u bloků a sochorů, které jsou užší, může být tento počet větší [18]. Kvůli dosažení vysokého využití ZPO je odléváno i několik pánví za sebou, v takovém případě by mohla být životnost mezipánve a ponorné trubice dopravující tekutou ocel z mezipánve do krystalizátoru limitujícím prvkem z hlediska doby odlévání, ovšem mezipánev i s ponornou trubicí může být vyměněna i za chodu. Hmotnost oceli v mezipánvi se pohybuje v desítkách tun [20].



Obrázek 1.2: Zařízení pro plynulé odlévání oceli [6].

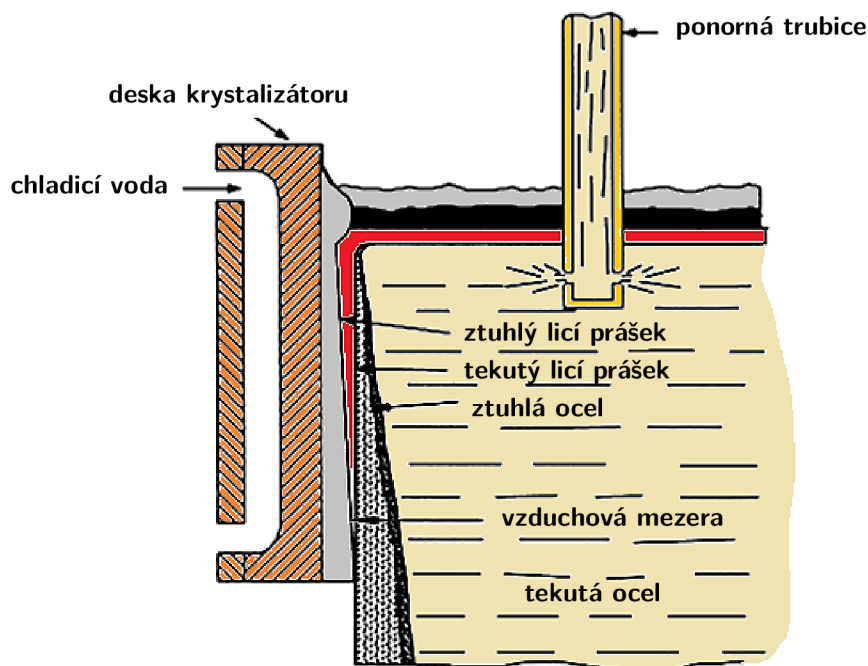
Krystalizátor

Z mezipánve je roztavená ocel přiváděna ponornou trubicí do krystalizátoru, což je forma obdélníkového, čtvercového či jiného průřezu, která určuje výsledný tvar předlitku. Jako jedna z částí ZPO je krystalizátor zjednodušeně naznačen na obr. 1.2, průřez krystalizátorem je pak na obr. 1.3. Na začátku odlévání je třeba krystalizátor na spodní straně uzavřít pomocí zátky a následně do něj může být přiváděna roztavená ocel. Úkolem krystalizátoru je odvést z roztavené oceli dostatečné množství tepla tak, aby se na povrchu vznikajícího předlitku vytvořila skořepina ze ztuhlé oceli. Po jejím vzniku je možno zátku odstranit, neboť tekutá ocel je zadržena uvnitř ztuhlé skořepiny, a skořepina se poté může pohybovat směrem ven z krystalizátoru.

Krystalizátor je obvykle vyroben z mědi nebo měděné slitiny, kvůli její vysoké tepelné vodivosti umožňující rychlý odvod tepla z předlitku. Je chlazen vodou; v případě deskového krystalizátoru voda proudí kanály na vnější straně desek a v případě trubkového krystalizátoru je celý jeho vnější povrch vodou omýván [31].

Do krystalizátoru je přidáván licí prášek, který pokrývá hladinu roztavené oceli, čímž zabraňuje její oxidaci. Vlivem tepla se licí prášek taví a dostává se do míst mezi krystalizátorem a pohybujícím se předlitkem, kde funguje jako mazací prostředek. Mezi předlitkem a deskou krystalizátoru se kromě licího prášku (ať už roztaveného či ztuhlého) může vytvořit tenká vzduchová mezera, která významně ovlivňuje rychlost odvodu tepla z předlitku. Vzduchové mezery se tvoří díky smršťování chladnoucí oceli, přičemž tento vliv je nejvýznamnější zejména v rozích a při spodní straně krystalizátoru [20, 31].

V současnosti se v ZPO běžně používá oscilující krystalizátor, čímž se předchází tomu, aby odlévaná ocel ulpívala na jeho stěnách. Specifickou vlastností tohoto systému je, že oscilace jsou nesymetrické; při pohybu směrem dolů je krystalizátor o trochu rychlejší než předlitek [2]. Krystalizátor také může být vybaven systémem pro elektromagnetické



Obrázek 1.3: Průřez částí krystalizátoru. Dle [2].

míchání tekuté oceli v jádru předlitku, který funguje na bázi elektromagnetické indukce. Míchání zlepšuje homogenitu tekutého jádra a redukuje tím výskyt možných vad předlitku [2, 20]. Právě z hlediska vad je krystalizátor klíčovým prvkem celého ZPO, neboť většina povrchových vad předlitku vzniká právě v něm [32]. Systém elektromagnetického míchání může být součástí krystalizátoru, případně může být umístěn i za ním.

Důležitým prvkem krystalizátoru je protiprůvalový systém. Průval je nejzávažnější problém spojený s plynulým odléváním oceli a úkolem protiprůvalového systému je včas odhalit jeho možný vznik a zabránit mu. Samotný vznik průvalu, jeho šíření i jeho detekce protiprůvalovým systémem bude předmětem následujících kapitol.

Zóna sekundárního chlazení

Předlitek vystupující z krystalizátoru má stále ještě tekuté jádro a musí být dále chlazen, po krystalizátoru proto následuje zóna sekundárního chlazení, která je tvořena soustavou vodicích válců a chladicích trysek.

Primárním úkolem válců je zajistit pohyb předlitku a tvořit oporu pro jeho skořepinu, neboť ta se může vlivem tlaku tekutého jádra deformovat a mohlo by dojít k jejímu vyboulení. Důležitou úlohou vodicích válců je rovněž odvod tepla z předlitku. Některá ZPO dokonce nemají chladicí trysky a odvod tepla v sekundární zóně je zajišťován pouze vnitřně chlazenými vodicími válci [21].

Chladicí trysky lze rozdělit podle použitého chladicího média na vodní a vodovzdušné, přičemž vodovzdušné trysky se vyznačují rovnoměrnějším chlazením, avšak jejich nevýhodou je nutnost přívodu stlačeného vzduchu [21]. Trysky lze také rozdělit podle tvaru ostřikované plochy na kuželové a ploché. Ploché trysky ostřikují plochu o zhruba obdélníkovém tvaru a používají se zejména u odlévání bram, kdežto v případě kuželových trysek má ostřikovaná plocha tvar kruhu. Je třeba klást důraz na správné seřízení chladicích trysek, neboť intenzita a rovnoměrnost chlazení v sekundární zóně ovlivňují povrchovou a podpovrchovou kvalitu předlitku [31].

Rovnění a dělení předlitku

Důležitou operací je rovněž narovnění zakřiveného předlitku, což se provádí pomocí válců, které ho plasticky deformují do přímého tvaru. Rovnění musí být prováděno tak, aby v předlitku vznikalo minimální napětí, neboť to může zapříčinit vznik povrchových a jiných vad [20, 31].

Po narovnění je předlitek dělen na kusy požadované velikosti, přičemž dělení je obvykle prováděno kyslíkovým hořákem. Výsledné kusy jsou ponechány, aby zcela vychladly, anebo jsou přepravovány k válcování [31].

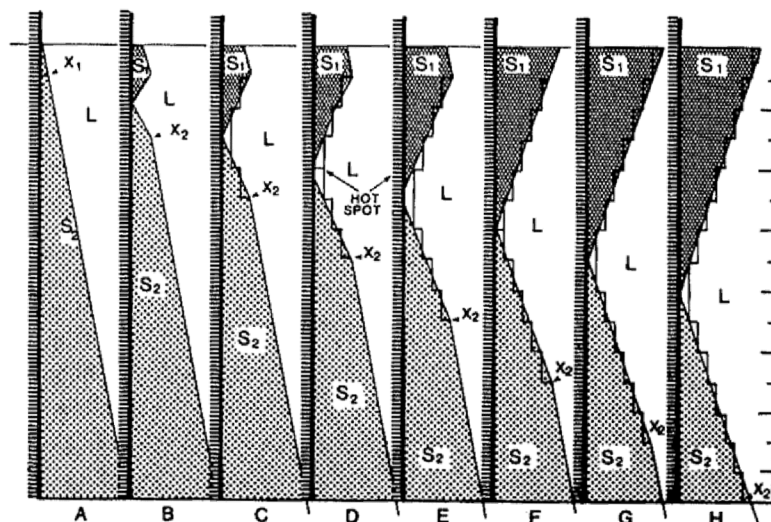
1.3. Průval

Průval je nejzávažnějším problémem spojeným s plynulým odléváním oceli [2]. Předchází mu vznik tzv. *hot spotu*, což je oblast předlitku, kde má skořepina výrazně menší tloušťku než za běžných okolností. Jestliže se hot spot dostane vlivem pohybu předlitku až pod spodní hranu krystalizátoru a tenká skořepina nevydrží ferostatický tlak tekutého jádra, protrhne se a dojde k vytečení tekuté oceli: k průvalu. Následkem je poškození ZPO a nutné zastavení výroby, a tedy snížení výtěžnosti ZPO, což vede ke značným finančním ztrátám [13].

Jsou rozlišovány tři typy průvalů, přičemž nejvýznamnějším je průval typu *sticker*, ke kterému dochází zhruba v 80 % případů [2]. Tento typ průvalu je charakteristický tím, že dojde k přilepení části skořepiny k desce krystalizátoru a k jejímu následnému odtržení od posouvajícího se předlitku. Zbýlých zhruba 20 % tvoří průvaly způsobené nedostatečným tuhnutím oceli v rozích předlitku a průvaly způsobené vlivem nečistot, které v této práci nebudou dále rozebírány, a proto bude v dalším textu pod pojmem průval myšlen průval typu *sticker*.

Samotný mechanismus vzniku průvalu je vysvětlován pomocí různých teorií. Jednou z možných příčin vzniku je přímý kontakt tuhnoucí oceli s neroztaveným licím práškem, jiné zdroje pak hovoří o nevhodné kombinaci oscilací krystalizátoru a dodávky licího prášku [2]. Další možnou příčinou je zvýšení hladiny tekuté oceli v krystalizátoru, což má za následek vznik vrubu ve ztuhlé oceli, který může přejít v trhlinu a následně v průval. Zvýšení hladiny může také způsobit, že větší vrstva neroztaveného licího prášku zabrání vniku tekutého licího prášku mezi krystalizátor a předlitek, čímž dojde k přilepení a následnému odtržení části skořepiny [2].

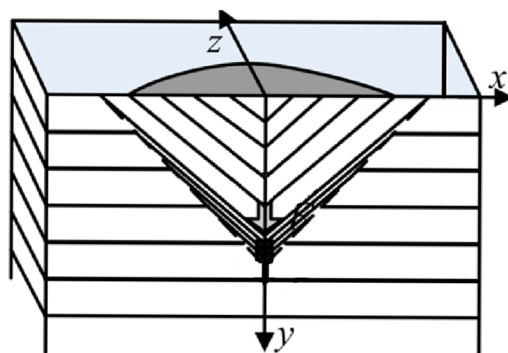
Mechanismus vzniku průvalu, který je všeobecně akceptován, popsal K. E. Blazek [16]. Podle něj dochází ke vzniku problému blízko menisku (hladiny roztavené oceli) v místě s kombinací nejmenší tloušťky skořepiny a největšího ferostatického tlaku [3]. Aby byl předlitek tažen směrem ven z krystalizátoru, musí být překonáno tření, které působí mezi skořepinou a krystalizátorem. Tím ve skořepině vzniká napětí, a jestliže je toto napětí příliš velké, dojde ke vzniku trhliny, viz bod X_1 na obrázku 1.4 A. Ztuhlá kůra nad bodem X_1 označená jako S_1 je přilepena k desce krystalizátoru, zatímco kůra pod bodem X_1 označená jako S_2 se pohybuje spolu se zbytkem předlitku. V části B je zobrazeno, že kůra S_2 , která se původně nacházela v pozici X_1 , se posunula do pozice X_2 a takto vzniklá mezera mezi pohybující se a přilepenou částí kůry byla okamžitě zaplněna tekutou ocelí.



Obrázek 1.4: Vznik a šíření hot spotu [3].

Tato tekutá ocel vlivem kontaktu s krystalizátorem vytvoří tenkou vrstvu ztuhlé oceli. Zatímco část S_1 zůstává stále přilepená a roste, kritické místo - hot spot - se stále pohybuje směrem dolů stejným mechanismem jako v části B, tj. vznikem trhliny v místě, kde je kůra nejtenčí, jejím zaplněním tekutou ocelí a opětovným vznikem tenké vrstvy ztuhlé oceli. Posun hot spotu je vyobrazen na obrázku 1.4 v částech C-H. Experimenty, které Blazek provedl, ukazovaly, že rychlost posunu hot spotu je poloviční oproti rychlosti pohybu předlitku, tzv. licí rychlosti [3]. Z experimentů bylo také vyvozeno, že příčinou vzniku hot spotu je primárně příliš vysoká licí rychlost, příliš náhlá změna licí rychlosti nebo hladiny oceli v krystalizátoru nebo také nedostatečné mazání mezi předlitkem a stěnami krystalizátoru.

Část přilepené oceli S_1 má klínovitý tvar, a proto má trhlina mezi částmi S_1 a S_2 tvar písmene V, viz obrázek 1.5.



Obrázek 1.5: Přilepená část skořepiny [26].

1.4. Protiprůvalové systémy

Úkolem protiprůvalového systému je eliminovat výskyt průvalu. Obecně lze říci, že protiprůvalový systém monitoruje vybrané parametry v krystalizátoru a na základě nich určuje, zda hrozí průval, či nikoliv. V případě, že se vyskytne riziko vzniku průvalu, systém sníží licí rychlost, aby z předlitku mohlo být krystalizátorem odvedeno více tepla a skořepina na povrchu předlitku nabyla dostatečné tloušťky.

Jednou z možných metod detekce průvalu je měření tření mezi krystalizátorem a předlitkem, neboť zvýšené tření je zapříčiněno špatným mazáním mezi krystalizátorem a předlitkem a špatné mazání může být příčinou vzniku průvalu [2]. Způsobů, jakými se tření měří, je několik:

- **Akcelerometry** jsou umístěny na stěně krystalizátoru a monitorují jeho vibrace. Na základě nich je pak určena hodnota popisující tření mezi krystalizátorem a předlitkem. Detekce průvalu na základě měření akcelerometry má ale určité nedostatky, například tato metoda není obecně schopna dobře zachytit rychle vznikající průvaly.
- **Snímače zatížení** jsou také umístěny na stěnách krystalizátoru. K jejich použití je třeba znát sílu potřebnou k oscilaci krystalizátoru za provozních podmínek a také krystalizátoru prázdného. Třecí síla je pak získána jako rozdíl mezi dynamicky měřenou silou za provozních podmínek a silou nutnou k oscilaci prázdného krystalizátoru. Citlivost snímačů zatížení je ovšem pro detekci průvalu nedostatečná [2].
- **Tenzometry** jsou umístěny na hřídeli oscilátoru. Signál z nich je porovnáván s kalibračním signálem a na základě tohoto porovnání je vyhodnoceno, zda může dojít k průvalu. Tato metoda je vhodná k detekci pozvolna vznikajících průvalů způsobených nárůstem množství oxidu hlinitého v licím prášku, avšak obecně je pro detekci průvalů také nedostatečná [2].

Z výše uvedeného je zřejmé, že metody založené na měření tření mezi krystalizátorem a předlitkem nejsou dostatečně spolehlivé, a proto se používají spíše jako podpora protiprůvalového systému založeného na tepelném monitorování krystalizátoru, který je nezbytný pro včasnou detekci průvalu [2]. Ten lze dělit podle toho, zda je monitorován tepelný tok v krystalizátoru nebo samotná teplota:

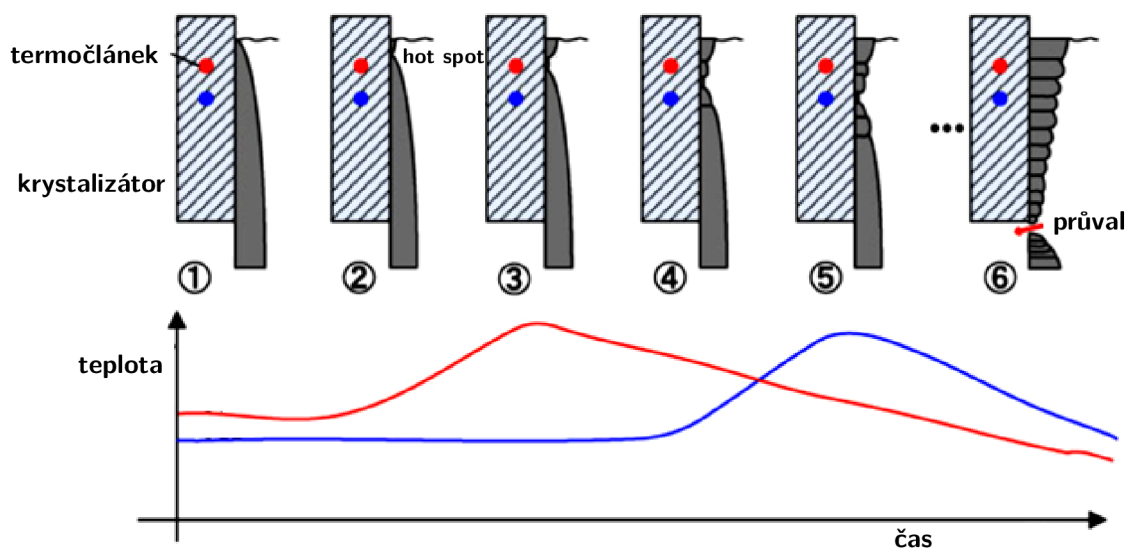
- **Měřiče tepelného toku** jsou umístěny na vnějším povrchu desek krystalizátoru obvykle ve dvou nebo třech horizontálních řadách. Měřiče jsou vyrobeny z materiálu, který má stejnou tepelnou vodivost jako desky krystalizátoru, takže dobře popisují tepelný tok v samotných deskách. Rychlost odezvy měřičů na tepelné výkyvy je méně než 1 sekunda [2].
- **Termočlánky** jsou nejčastěji používaným prostředkem pro detekci vzniku průvalu [20]. Jsou zabudovány v otvorech vyvrtaných v deskách krystalizátoru. Tyto otvory mohou být vrtány buď z vnější strany desky nebo z boku. Termočlánky mohou být vnitřní, kdy dvojice použitých kovů je v kontaktu s deskou krystalizátoru, anebo vnější, které jsou celé zapouzdřeny v nepropustném plášti uvnitř desky [2]. Bývají

obvykle zabudovány v několika horizontálních řadách nad sebou. Protože protiprůvalový systém vytvářený v této práci bude založen na datech z termočlánků, další text bude věnován právě jim.

Úloha termočlánků je naznačena na obrázku 1.6. V případě, že dojde ke vzniku hot spotu, naroste teplota desky krystalizátoru v jeho okolí, neboť mezi tekutou ocelí a deskou je tenčí vrstva ztuhlé oceli, a tedy i menší tepelný odpor. Tento nárůst je detekován termočlánkem v horní řadě (označen červeně) a s tím, jak se hot spot posouvá směrem dolů, je následně detekován i termočlánkem v řadě spodní (označen modře). Vzhledem k tomu, že je ale za hot spotem kůra výrazně tlustší než v případě bezproblémového lití, dochází po nárůstu teploty naopak k prudkému poklesu, kdy teplota může být výrazně menší než za běžných okolností. Popsaný průběh teploty v jednom termočlánku trvá zhruba 30 sekund [13].

Klíčovým prvkem celého protiprůvalového systému je algoritmus, který průběhy teplot z jednotlivých termočlánků vyhodnocuje a stanovuje, zda může dojít k průvalu nebo nikoliv. Ten musí být velice dobře odladěný, neboť na jedné straně musí zabránit nežádoucím průvalům, ale na straně druhé u něj nesmí docházet k příliš častým planým poplachům, které zpomalují výrobu, a tedy i snižují výtěžnost ZPO. V současnosti lze metody vyhodnocování teplot z termočlánků rozdělit na 2 typy: metody založené na aplikaci logických pravidel a metody využívající umělé inteligence [13]:

- **Metody využívající logických pravidel** jsou založené na kvalitativní i kvantitativní analýze průvalu. Tyto metody v podstatě porovnávají nárůst teploty v termočláncích a rychlost tohoto nárůstu s předem stanovenými prahovými hodnotami. Stejně tak se vyhodnocuje např. i rozdíl teploty získané termočlánkem v horní řadě s teplotou z odpovídajícího termočlánku z řady dolní. Tyto metody jsou obvykle silně závislé na konkrétním ZPO a jejich vyladění je pracné a časově náročné [13].



Obrázek 1.6: Monitorování teplot [12].

- **Metody využívající umělou inteligenci** dokáží predikovat průval díky algoritmům pro rozpoznávání vzorů. Příkladem takové metody je neuronová síť nebo metoda podpůrných vektorů (angl. support vector machine). Výhodou těchto metod je mj. vysoká adaptivita, robustnost a schopnost učit se z historie. Nevýhodou těchto metod ovšem je, že fungují bez hlubší znalosti celého procesu, a jejich úspěšnost predikce je proto závislá na datech. Například pro natrénování neuronové sítě je třeba mít k dispozici velké množství vhodných vzorků [13].

Tato práce využívá reálných dat ze ZPO, kde byly pro predikci průvalu využívány termočlánky, které byly umístěny ve dvou řadách nad sebou, viz přílohy. Protiprůvalový systém vytvářený v této práci bude proto založen na naměřených průbězích teplot z těchto termočlánků, přičemž k vyhodnocování teplotních průběhů bude využita neuronová síť. Množství reálných dat, která jsou k dispozici pro natrénování neuronové sítě, je z kvantitativního hlediska dostatečné, ovšem pro kvalitní natrénování sítě v reálných datech chybí dostatek případů, které zachycují průval nebo šíření hot spotu. Ovšem reálná data obsahují množství naměřených parametrů (např. teplota chladicí vody, teplota solidu, geometrie krystalizátoru atd.), díky kterým lze pomocí numerických modelů vedení tepla věrohodně simulovat průběh hot spotu. O tvorbě těchto modelů bude pojednávat následující kapitola.

2. Vedení tepla stěnou krystalizátoru

Před tím, než budou rozebrány numerické modely vedení tepla použité pro tvorbu dat sloužících k trénování neuronové sítě, bude stručně uvedena problematika vedení tepla a také odvozena rovnice pro vedení tepla v pevném tělese.

K tomu, aby mohlo dojít k přenosu tepla, musí existovat teplotní gradient neboli prostorový rozdíl teplot [25]. Rozlišujeme tři základní mechanismy přenosu tepla:

- **Kondukcce** neboli vedení tepla je přenos energie od částic s větší energií k částicím s energií menší vlivem interakcí mezi nimi [5]. Kondukcce může probíhat jak v pevných látkách, tak v kapalinách i plynech.
- **Konvekce** neboli přenos tepla prouděním je mechanismus přenosu tepla mezi povrchem pevného materiálu a okolní kapalinou nebo plynem. Konvekce se skládá z výše popsané kondukcce a z advekce: makroskopického pohybu tekutiny. Konvekci lze rozdělit na nucenou a přirozenou, přičemž nucená konvekce je uvažována v případě, že makroskopický pohyb tekutiny je vyvolán vnějšími prostředky, příkladem může být chladicí vzduch hnaný větrákem. V případě přirozené konvekce je makroskopický pohyb tekutiny vyvolán rozdílnou hustotou způsobenou teplotním rozdílem v jejím objemu [17].
- **Radiace** neboli přenos tepla zářením je mechanismus, při kterém je povrchem o nenulové termodynamické teplotě emitována energie. Specifikem tohoto mechanismu je, že může probíhat i v absolutním vakuu [25].

Ve vytvářených modelech bude dominantním mechanismem přenos tepla vedením, a proto bude podle textu [10] nyní odvozena rovnice nestacionárního vedení tepla v tělese. K jejímu odvození je ovšem zapotřebí následujících vztahů:

Zákon zachování energie

Tento zákon vyjadřuje bilanci změn energie v kontrolním objemu a matematicky jej lze zapsat ve formě

$$\Delta E = Q_f - Q_S, \quad (2.1)$$

kde ΔE je přírůstek vnitřní energie v kontrolním objemu V za libovolný časový interval $I = (t_\alpha, t_\beta)$, Q_f je množství tepla dodaného vnitřními zdroji kontrolního objemu za časový interval I a Q_S je teplo, které z kontrolního objemu vyteče přes jeho hranici $S = \partial V$ za časový interval I , přičemž kladné znaménko znamená, že teplo z V teče ven, zatímco záporným znaménkem je myšlen tok tepla do V .

Fourierův zákon

Tento zákon lze v jedné dimenzi zapsat vztahem

$$\dot{q} = -k \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (2.2)$$

přičemž \dot{q} je měrný tepelný tok, tedy veličina popisující tepelný tok vztažený na jednotku plochy, T je teplota, x je prostorová proměnná a k je konstanta úměrnosti, která se nazývá tepelná vodivost a je závislá na daném materiálu, v němž vedení tepla uvažujeme. Fourierův zákon tedy říká, že měrný tepelný tok je přímo úměrný velikosti teplotního gradientu $\frac{\partial T}{\partial x}$ a má opačné znaménko než tento gradient [25]. Záporné znaménko plyne ze skutečnosti, že teplo se šíří z místa o větší teplotě do místa s teplotou nižší. V trojrozměrném případě má Fourierův zákon tvar

$$\dot{\mathbf{q}} = -k\nabla T, \quad (2.3)$$

kde $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3)$ je vektor měrného tepelného toku a $\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial z}$ je gradient teploty.

LEMMA 2.1 [10]

Nechť f je spojitá veličina v okolí bodu \mathbf{x}^* . Potom platí

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B(\mathbf{x}^*, r)|} \int_{B(\mathbf{x}^*, r)} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = f(\mathbf{x}^*). \quad (2.4)$$

S využitím výše uvedeného bude nyní odvozena zmíněná rovnice vedení tepla. Budeme uvažovat těleso v trojrozměrném prostoru s body $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ a libovolný kontrolní objem V , který je podmnožinou objemu vymezeného tělesem. Vyjdeme ze zákona zachování energie popsáného rovnicí (2.1) a vyjádříme její jednotlivé členy. Teplo vygenerované vnitřními zdroji kontrolního objemu lze vyjádřit jako

$$Q_f = \int_I \left(\int_V f(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \right) dt, \quad (2.5)$$

kde $f(\mathbf{x}, t)$ je hustota vnitřních zdrojů vyjadřující vygenerované teplo za jednotku času vztažené na jednotku objemu. Změnu vnitřní energie vyjádříme pomocí hustoty vnitřní energie e , což je veličina vyjadřující množství vnitřní energie v jednotce objemu. Za předpokladu, že e je na časovém intervalu (t_α, t_β) spojitá a má derivaci, pak lze změnu vyjádřit takto

$$\Delta E = E_{t_\beta} - E_{t_\alpha} = \int_V e(\mathbf{x}, t_\beta) d\mathbf{x} - \int_V e(\mathbf{x}, t_\alpha) d\mathbf{x} = \int_{t_\alpha}^{t_\beta} \left(\int_V \frac{\partial e}{\partial t} d\mathbf{x} \right) dt. \quad (2.6)$$

Člen Q_S vyjádříme pomocí měrného tepelného toku $\dot{\mathbf{q}} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3)$

$$Q_S = \int_I \left(\int_{\partial V} \dot{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{n} dS \right) dt, \quad (2.7)$$

kde \mathbf{n} je vektor normály plochy ∂V kontrolního objemu V . Využijeme-li Gaussův-Ostrogradského vzorec, člen Q_S získá tvar

$$Q_S = \int_I \left(\int_V \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial x_i} d\mathbf{x} \right) dt. \quad (2.8)$$

Vyjádřené členy nyní dosadíme do rovnice (2.1) a upravíme na tvar

$$\int_I \left(\int_V \left[\frac{\partial e}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial x_i} - f \right] d\mathbf{x} \right) dt = 0. \quad (2.9)$$

Tuto rovnost vydělíme délkou intervalu $I = t_\beta - t_\alpha$ a následně i mírou objemu V . Protože byl na začátku zvolen časový interval I i kontrolní objem V libovolně, lze při přechodech k limitě pro $|I| \rightarrow 0$ i pro $|V| \rightarrow 0$ využít Lemmatu 2.1, čímž dostaneme

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial x_i} - f = 0. \quad (2.10)$$

Nyní využijeme vztah pro změnu vnitřní energie kontrolního objemu v čase [25]

$$\frac{\partial E}{\partial t} = mc \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (2.11)$$

kde m je hmotnost kontrolního objemu. Vztah pro další potřebu také vydělíme mírou objemu, čímž dostaneme

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (2.12)$$

kde ρ je hustota a c je měrná tepelná kapacita. S využitím rovnosti (2.12) a Fourierova zákona (2.3) získáme za předpokladu konstantní tepelné vodivosti k vztah

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} + f, \quad (2.13)$$

který lze přepsat do tvaru

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + f. \quad (2.14)$$

Tato rovnice popisuje nestacionární vedení tepla v tělese s konstantní tepelnou vodivostí. Jedná se o parciální diferenciální rovnici druhého řádu pro neznámou funkci teploty $T(x, y, z, t)$, přičemž tato rovnice je parabolická.

Počáteční podmínka

K úplnosti zadání je třeba k rovnici (2.14) přidat ještě počáteční a okrajové podmínky. Počáteční podmínka popisuje teplotu tělesa v každém bodě tělesa $\mathbf{x} = (x, y, z)$ na začátku časového intervalu, pro který chceme rovnici řešit:

$$T(\mathbf{x}, 0) = T_0(\mathbf{x}). \quad (2.15)$$

Okrajové podmínky

Tyto podmínky popisují situaci na okraji Γ uvažovaného tělesa. Rozlišujeme pět základních druhů okrajových podmínek [21]:

- **Okrajová podmínka I. druhu** předepisuje na okraji teplotu vztahem

$$T(\mathbf{x}, t) = T_\Gamma(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma. \quad (2.16)$$

Z matematického hlediska se jedná o podmínku Dirichletovu.

- **Okrajová podmínka II. druhu** předepisuje na okraji tělesa tepelný tok

$$-k \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (T(\mathbf{x}, t)) = \dot{\mathbf{q}}_n(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (2.17)$$

přičemž \mathbf{n} je normála povrchu a $\dot{\mathbf{q}}_n$ je předepsaný tepelný tok ve směru této normály. Z matematického hlediska se jedná o podmínku Neumannovu. Speciálním případem je předepsání nulového tepelného toku, v tom případě pak hovoříme o tepelně izolovaném okraji.

- **Okrajová podmínka III. druhu** popisuje přenos tepla konvekcí. To lze zapsat vztahem

$$-k \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (T(\mathbf{x}, t)) = \alpha(T(\mathbf{x}, t) - T_\infty), \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (2.18)$$

kde T_∞ je teplota tekutiny proudící podél okraje Γ a α je součinitel přestupu tepla. Z matematického hlediska se jedná o podmínku Newtonovu. Podmínka III. druhu může také popisovat přenos tepla radiací:

$$-k \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (T(\mathbf{x}, t)) = \sigma \varepsilon (T^4(\mathbf{x}, t) - T_\infty^4), \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (2.19)$$

kde σ je Stefanova-Boltzmannova konstanta a ε je emisivita povrchu tělesa.

- **Okrajová podmínka IV. druhu** se používá pro popis přenosu tepla na společném rozhraní Γ dvou těles. Styk mezi oběma tělesy může být dokonalý nebo nedokonalý. V případě dokonalého styku má okrajová podmínka tvar

$$-k_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (T_1(\mathbf{x}, t)) = k_2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (T_2(\mathbf{x}, t)), \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (2.20)$$

kde indexy 1 a 2 značí veličiny příslušné prvnímu, resp. druhému z obou těles. V případě dokonalého styku se teplota na rozhraní mění spojitě. Naopak při nedokonalém styku dochází na rozhraní ke skokové změně teploty, což je vyjádřeno vztahem

$$\dot{\mathbf{q}}_n = \frac{1}{R} (T_1(\mathbf{x}, t) - T_2(\mathbf{x}, t)), \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (2.21)$$

kde R je tepelný odpor figurující mezi tělesy.

- **Okrajová podmínka V. druhu** popisuje přenos tepla na hranici fázové přeměny a lze ji vyjádřit rovnicí

$$-k_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (T_1(\mathbf{x}, t)) = k_2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (T_2(\mathbf{x}, t)) + \rho_2 L_f \frac{\partial f_2}{\partial t}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (2.22)$$

kde indexy 1 a 2 nyní popisují jednotlivé fáze, L_f je latentní teplo fázové přeměny a f_2 je fázový zlomek podílu fáze 2 [20].

2.1. 1D model vedení tepla

Hlavním účelem 1D modelu vedení tepla nebude výpočet průběhu teploty ve stěně krystalizátoru, ale výpočet tepelného odporu R_m v prostoru mezi předlitkem a krystalizátorem. Znalost hodnoty tohoto odporu je nezbytná k modelování hot spotu, ovšem jeho přímý výpočet není snadný, neboť tento odpor je závislý na tepelných vodivostech a tloušťkách vrstev neroztaveného a tekutého licího prášku, strusky a vzduchové mezery, které jsou mezi předlitkem a krystalizátorem. Tyto parametry je obtížné stanovit, a proto bude přímý výpočet nahrazen jiným postupem. Ten bude spočívat v hledání hodnoty R_m pomocí optimalizačního algoritmu tak, aby se minimalizovala chyba mezi průběhem teploty skutečně naměřeným termočlánekem a mezi průběhem teploty v místě termočláneku, který bude vypočten 1D modelem vedení tepla. Naměřené hodnoty teplot z termočláneků jsou totiž k dispozici v reálných datech. Samotný 1D model tedy bude figurovat ve výpočtu účelové funkce, přičemž rozhodovací proměnnou bude hledaný odpor R_m , který bude v uvažovaném modelu hrát roli parametru v okrajové podmínce.

Podstatné je, že hodnota R_m je závislá na čase a i poloze podél desky krystalizátoru. Časová závislost ale nyní nebude uvažována a tepelný odpor R_m tedy bude pro jedno konkrétní místo v prostoru neměnný v čase. Ovšem závislost R_m na prostorových souřadnicích nelze zanedbat, a proto bude výše uvedený postup aplikován pro každý ze 44 termočláneků zabudovaných v krystalizátoru. Výstupem pak budou hodnoty tepelného odporu R_m v místech příslušných pozicím jednotlivých termočláneků.

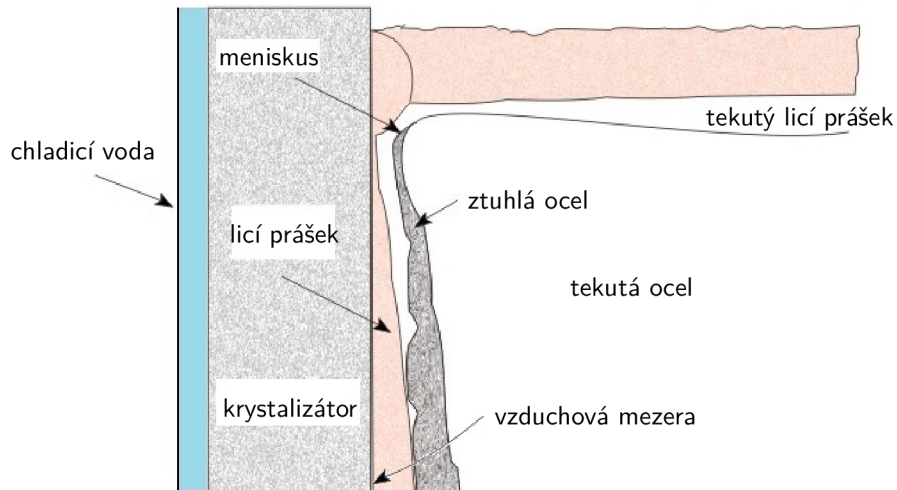
V následujícím textu tedy bude popsán samotný model vedení tepla a použité okrajové podmínky, poté bude rozebrána použitá numerická metoda pro výpočet příslušné parciální diferenciální rovnice a následně bude popsán optimalizační algoritmus sloužící k získání hodnot R_m .

2.1.1. Formulace úlohy

Samotný model bude popisovat vedení tepla stěnou krystalizátoru v místě termočláneku, přičemž budeme předpokládat, že tepelný tok je dominantní podél tloušťky stěny krystalizátoru, tedy směrem ven z krystalizátoru. Teplo z tekuté oceli v jádře předlitku tedy teče přes vrstvu ztuhlé oceli na povrchu předlitku, dále přes vrstvy licího prášku, strusky a vzduchovou mezeru do měděné desky krystalizátoru, odkud je odváděno chladicí vodou. Situaci je možno si představit pomocí obrázku 2.1. Pro matematický popis situace vyjdeme z rovnice (2.14) a upravíme ji pro 1D případ na tvar

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad x \in \langle 0, \ell_x \rangle, \quad t \in \langle 0, \tau \rangle, \quad (2.23)$$

kde ℓ_x je tloušťka desky krystalizátoru v místě termočláneku: rovnice (2.23) totiž bude řešena pouze na intervalu popisujícím desku krystalizátoru, zatímco vliv chladicí vody, vrstev vzduchu, licího prášku, strusky a ztuhlé oceli bude zahrnut v okrajových podmínkách. Materiálové konstanty c , ρ a k jsou tedy pro měď, neboť krystalizátor je vyroben z ní. Časový interval $\langle 0, \tau \rangle$ je dán dobou, po kterou byly zaznamenávány teploty z příslušného termočláneku.



Obrázek 2.1: Stěna krystalizátoru [24].

Důležitou součástí modelu jsou okrajové podmínky, které v tomto případě budou popisovat chování jednak na rozhraní krystalizátor/chladicí voda a také v úseku mezi krystalizátorem a tekutou ocelí.

Pro popis situace na hranici mezi krystalizátorem a vodou bude využita okrajová podmínka III. druhu, protože deska krystalizátoru je chlazena vodou, která proudí kanály na vnější straně krystalizátoru. Podmínka tedy bude mít tvar

$$k \frac{\partial}{\partial x} (T(0, t)) = \alpha(T(0, t) - T_v), \quad t \in \langle 0, \tau \rangle, \quad (2.24)$$

kde α je součinitel přenosu tepla na hranici mezi krystalizátorem a chladicí vodou, která proudí v jeho kanálech, a je závislý na mnoha faktorech, zejména na geometrii kanálů, rychlosti toku chladicí vody atd. Výpočet α byl proveden s využitím postupu uvedeného v [14]. V rovnici dále vystupuje výraz T_v vyjadřující teplotu chladicí vody, přičemž je uvažováno, že $T_v = T_v(t)$. Parametry α i T_v byly vypočteny pomocí reálných dat a znalosti geometrie kanálů chladicí vody. V rovnici (2.24) dále figuruje materiálová konstanta k , která opět přísluší měděné desce krystalizátoru, a člen $T(0, t)$, který popisuje teplotu desky krystalizátoru na povrchu omývaném chladicí vodou, jemuž přísluší souřadnice $x = 0$.

V bodě $x = \ell_x$ bude využita okrajová podmínka IV. druhu, která bude vyjadřovat skutečnost, že mezi deskou krystalizátoru a roztavenou ocelí je tepelný odpor R . Podmínka tedy bude mít tvar

$$-k \frac{\partial}{\partial x} (T(\ell_x, t)) = \frac{1}{R} (T(\ell_x, t) - T_{sol}), \quad t \in \langle 0, \tau \rangle, \quad (2.25)$$

kde R je zmíněný tepelný odpor, který lze rozepsat do tvaru

$$R = R_{vz} + R_{pr_1} + R_{pr_2} + \frac{d_{oc}}{k_{oc}}, \quad (2.26)$$

ve kterém R_{vz} představuje tepelný odpor vzduchové mezery vyskytující se mezi předlitkem a krystalizátorem, R_{pr_1} je tepelný odpor vrstvy tekutého licího prášku, R_{pr_2} je tepelný odpor vrstvy ztuhlého licího prášku, d_{oc} je tloušťka vrstvy ztuhlé oceli a k_{oc} je její tepelná vodivost. Zlomek $\frac{d_{oc}}{k_{oc}}$ pak vyjadřuje tepelný odpor vrstvy ztuhlé oceli. V rovnici (2.25) dále vystupuje výraz T_{sol} , což je teplota solidu odlévané oceli, kterou by mělo mít rozhraní uvažované mezi tekutou a ztuhlou ocelí. Zde je uplatněno určité zjednodušení, neboť mezi tekutou a ztuhlou ocelí se vyskytuje ještě tzv. *mushy zóna*, což je oblast, kde tekutá i ztuhlá ocel koexistují [21]. Další zjednodušení bylo připuštěno u tepelné vodivosti oceli k_{oc} , která závisí na teplotě, ale v uvažovaném modelu tato závislost nebyla uvažována, neboť rozdíl mezi oběma přístupy má na model malý vliv.

Informace o tloušťce kůry ztuhlé oceli d_{oc} je zahrnuta v reálných datech, pro aplikaci uvažované okrajové podmínky je tedy třeba ještě znát tepelné odpory R_{vz} , R_{pr_1} a R_{pr_2} , které souhrnně popíšeme celkovým tepelným odporem mezi předlitkem a krystalizátorem R_m , který splňuje

$$R_m = R_{vz} + R_{pr_1} + R_{pr_2}. \quad (2.27)$$

Protože jednotlivé podíly odporů na celkovém tepelném odporu R_m nejsou podstatné a důležitá je pouze celková hodnota R_m , v dalším textu již zmíněné jednotlivé odpory nebudou uvažovány a bude pracováno pouze s hodnotou R_m . Jak už ale bylo nastíněno ve výše uvedeném textu, hodnota R_m není známa a její přímý výpočet je obtížný, a proto bude R_m vypočten pomocí optimalizačního algoritmu, který se bude snažit minimalizovat rozdíl mezi vytvářeným modelem a reálnými daty.

Pro úplnost je ještě třeba dodat počáteční podmínku. Ta bude vypočtena pomocí rovnice stacionárního vedení tepla

$$0 = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad x \in \langle 0, \ell_x \rangle, \quad (2.28)$$

s výše uvedenými okrajovými podmínkami (2.24) a (2.25), přičemž parametry figurující v podmínkách budou brány pro čas $t = 0$. Dostaneme tak podmínku

$$T(x, 0) = T_0(x). \quad (2.29)$$

Vytvářený matematický model jednorozměrného vedení tepla deskou krystalizátoru je tedy popsán rovnicí (2.23), počáteční podmínkou (2.29) a okrajovými podmínkami (2.24) a (2.25). V další části bude rozebráno jeho numerické řešení.

2.1.2. Numerické řešení

Úlohy vedení tepla lze analyticky řešit jen pro omezený okruh případů, a proto bude výše vytvořený model vedení tepla řešen numericky. Numerických metod, které lze pro nalezení přibližného řešení použít, je více, avšak v této práci budou úlohy vedení tepla řešeny výhradně metodou konečných diferencí.

Metoda konečných diferencí je jedna z nejsnadněji aplikovatelných metod, přičemž se používá zejména pro jednoduché geometrie. Jejím principem je nahrazení parciálních derivací vyskytujících se v rovnici vedení tepla (případně i v okrajových podmínkách) diferencemi, které lze odvodit pomocí Taylorova rozvoje. Dle Taylorovy věty může být dostatečně hladká funkce $f(x)$ reprezentována vztahem [4]

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{1}{2}h^2 f''(x) + \frac{1}{6}h^3 f'''(x) + \dots \quad (2.30)$$

Pokud ve vztahu (2.30) převedeme člen $f(x)$ na druhou stranu, vydělíme celou rovnost konstantou h a zanedbáme členy s derivacemi vyšších řádů, pak můžeme vyjádřit derivaci $f'(x)$ ve tvaru

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \mathcal{O}(h) \quad (2.31)$$

Aproximace derivace ve vztahu (2.31) se nazývá první dopředná diference. Obdobně lze zavést první zpětnou diferenci. Při jejím odvození vyjdeme z Taylorova rozvoje

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{1}{2}h^2 f''(x) - \frac{1}{6}h^3 f'''(x) + \dots, \quad (2.32)$$

ze kterého podobně jako v případě dopředné difference dostaneme

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + \mathcal{O}(h). \quad (2.33)$$

V obou případech dostáváme chybu řádu $\mathcal{O}(h)$. Lepší aproximaci první derivace lze získat odečtením rovnosti (2.32) od rovnosti (2.30), čímž dostaneme první centrální diferenci, jejíž chyba je již řádu $\mathcal{O}(h^2)$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2). \quad (2.34)$$

V rovnicích vedení tepla se vyskytují také druhé derivace, které lze aproximovat podobně jako v případě derivací prvních. V tomto textu bude použita druhá centrální diference, kterou lze odvodit opět pomocí Taylorových rozvoje (2.30) a (2.32), přičemž nyní obě rovnosti sečteme [4], čímž dostaneme

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2). \quad (2.35)$$

Výše uvedené vztahy budou nyní aplikovány na rovnici (2.23), která má pro připomenutí tvar

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad x \in \langle 0, \ell_x \rangle, \quad t \in \langle 0, \tau \rangle. \quad (2.36)$$

Prostorový interval $\langle 0, \ell_x \rangle$ bude rovnoměrně rozdělen s krokem $h_x = \ell_x/M$, kde $x_i = ih_x$, $i = 0, 1, \dots, M$. V případě Dirichletovy okrajové podmínky bude požadováno, aby byla rovnice (2.36) splněna ve vnitřních uzlech, tj. bodech x_i , $i = 1, 2, \dots, M-1$ [8]. Okrajové podmínky, které jsou z matematického hlediska podmínkami Newtonovými (resp. Neumannovými), budou probrány později. V rovnici (2.36) nahradíme druhou derivaci podle proměnné x druhou centrální diferencí, čímž získáme

$$\rho c \frac{\partial T(x_i, t)}{\partial t} = \frac{k}{h_x^2} [T(x_{i+1}, t) - 2T(x_i, t) + T(x_{i-1}, t)], \quad i = 1, 2, \dots, M-1, \quad t \in \langle 0, \tau \rangle. \quad (2.37)$$

Pokud bychom uvažovali Dirichletovy podmínky ve tvaru

$$T(0, t) = g_0(t), \quad T(\ell_x, t) = g_{\ell_x}, \quad t \in \langle 0, \tau \rangle \quad (2.38)$$

a $M-1$ počátečních podmínek

$$T(x_i, 0) = \phi_i, \quad i = 1, 2, \dots, M-1, \quad (2.39)$$

pak bychom na vztahy (2.37), (2.38) a (2.39) mohli nahlížet jako na soustavu obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu pro $M-1$ hledaných funkcí $T_i(t) \equiv T(x_i, t)$, $i = 1, 2, \dots, M-1$ s počátečními podmínkami (2.39) [8].

Pro úplnou diskretizaci rovnice (2.36) je třeba ještě v rovnici (2.37) nahradit časovou derivaci vhodnou diferencí. Časový interval $\langle 0, \tau \rangle$ rovnoměrně rozdělíme podobně jako v případě prostorové diskretizace: $h_t = \tau/Q$, kde $t_n = nh_t$, $n = 0, 1, \dots, Q$. Nyní budeme na pravé straně rovnice (2.37) uvažovat konvexní kombinaci druhých centrálních diferencí podle proměnné x v časech t_n a t_{n+1} , zatímco na levé straně nahradíme časovou derivaci diferencí [4]. Po zavedení značení $T_i^n \equiv T(x_i, t_n)$ dostaneme

$$\rho c \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{h_t} = \frac{k}{h_x^2} \left[\lambda (T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}) + (1 - \lambda) (T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n) \right], \quad (2.40)$$

kde $i = 1, 2, \dots, M-1$, $n = 0, 1, 2, \dots, Q-1$ a $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$, přičemž hodnoty $T_{0,n}$ a $T_{M,n}$ pro $n = 0, 1, 2, \dots, Q$ jsou určeny Dirichletovými okrajovými podmínkami. Parametr λ určuje typ metody: v případě, že $\lambda = 0$, dostaneme explicitní metodu, neboť hodnotu T_i^{n+1} by bylo možno ze vztahu (2.40) přímo vypočítat. Pro případ $\lambda = 1$ dostáváme plně implicitní metodu, zatímco pro $\lambda = \frac{1}{2}$ je metoda známa jako Crankova-Nicolsonova. Chyba explicitní i implicitní metody je $\mathcal{O}(h_t) + \mathcal{O}(h_x^2)$, zatímco pro Crankovu-Nicolsonovu metodu lze odvodit, že její chyba je $\mathcal{O}(h_t^2) + \mathcal{O}(h_x^2)$. Crankova-Nicolsonova metoda je tedy při stejném dělení přesnější.

Protože v uvažovaném modelu vedení tepla je aplikována okrajová podmínka III. a IV. druhu, které jsou z matematického hlediska podmínkami Newtonovými, je třeba ještě popsat numerické řešení zahrnující právě tyto podmínky. Obecně lze Newtonovy okrajové podmínky uvažovat ve tvaru [8]

$$k \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = \alpha_0 T(0, t) - \beta_0(t), \quad -k \frac{\partial T(\ell_x, t)}{\partial x} = \alpha_{\ell_x} T(\ell_x, t) - \beta_{\ell_x}(t). \quad (2.41)$$

Vyjdeme z faktu, že rovnice (2.36) má být splněna i pro bod $x = 0$, resp. $x = \ell_x$. Druhou derivaci opět nahradíme diferencí, avšak nyní je potřeba zvolit jiný přístup, neboť nelze použít druhou centrální diferencí. Odvození bude provedeno pro bod $x_0 \equiv 0$, v případě bodu $x_M \equiv \ell_x$ by byl postup analogický. Člen $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ bude nejprve vyjádřen pomocí jednostranné diference a posléze bude dosazeno z příslušné okrajové podmínky, tedy

$$k \frac{\partial^2 T(x_0, t)}{\partial x^2} = k \frac{\frac{\partial T(x_{1/2}, t)}{\partial x} - \frac{\partial T(x_0, t)}{\partial x}}{\frac{1}{2}h_x} + \mathcal{O}(h_x) = \frac{k \frac{T(x_1, t) - T(x_0, t)}{h_x} - \alpha_0 T(x_0, t) + \beta_0(t)}{\frac{1}{2}h_x} + \mathcal{O}(h_x). \quad (2.42)$$

Po zanedbání chyby, dosazení do (2.36) a úpravě dostaneme

$$\frac{1}{2}\rho c \frac{\partial T(x_0, t)}{\partial t} = \frac{1}{h_x^2} [-(k + h_x \alpha_0)T(x_0, t) + kT(x_1, t)] + \frac{1}{h_x} \beta_0(t), \quad t \in \langle 0, \tau \rangle. \quad (2.43)$$

Bilance pro bod $x_M \equiv \ell_x$ má analogický tvar

$$\frac{1}{2}\rho c \frac{\partial T(x_M, t)}{\partial t} = \frac{1}{h_x^2} [kT(x_{M-1}, t) - (k + h_x \alpha_{\ell_x})T(x_M, t)] + \frac{1}{h_x} \beta_{\ell_x}(t), \quad t \in \langle 0, \tau \rangle. \quad (2.44)$$

Časovou derivaci v rovnicích (2.43) a (2.44) lze nahradit diferencí podobně jako v případě rovnice (2.37). Pak bychom $M - 1$ rovnic daných vztahem (2.40) společně s diskretizovanými rovnicemi (2.43) a (2.44) mohli chápat jako soustavu $M + 1$ lineárních rovnic pro neznámé T_i^n , $i = 0, 1, \dots, M$, kterou bychom řešili pro časové okamžiky t_n , $n = 0, 1, 2, \dots, Q - 1$. Protože k výpočtu modelu vedení tepla byla pro svou přesnost a stabilitu zvolena Crankova-Nicolsonova metoda a uvažované okrajové podmínky jsou Newtonova typu, uvažovaná soustava rovnic bude pro tento případ obecně tvaru [8]

$$(\mathbf{C} + \frac{1}{2}h_t \mathbf{K})\mathbf{T}^{n+1} = (\mathbf{C} - \frac{1}{2}h_t \mathbf{K})\mathbf{T}^n + \frac{1}{2}h_t(\mathbf{F}^n + \mathbf{F}^{n+1}), \quad (2.45)$$

kde

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}c\rho & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c\rho & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c\rho & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c\rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}c\rho \end{pmatrix}, \quad (2.46)$$

$$\mathbf{K} = \frac{1}{h_x^2} \begin{pmatrix} k + h_x \alpha_0 & -k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -k & 2k & -k & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -k & 2k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -k & 2k & -k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k & k + h_x \alpha_{\ell_x} \end{pmatrix}, \quad (2.47)$$

$$\mathbf{F}^n = \frac{1}{h_x} \begin{pmatrix} \beta_0^n \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta_{\ell_x}^n \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

a vektor teplot bude tvaru

$$\mathbf{T}^n = \begin{pmatrix} T_1^n \\ T_2^n \\ \vdots \\ T_i^n \\ \vdots \\ T_M^n \end{pmatrix}. \quad (2.49)$$

Soustavu (2.45) lze efektivně numericky řešit, neboť matice soustavy $\mathbf{C} + \frac{1}{2}h_t\mathbf{K}$ je třídiagonální a pozitivně definitní.

Úlohou právě popsaného numerického algoritmu tedy bude pro zadaný tepelný odpor R_m figurující v okrajové podmínce vypočítat teplotu v místě termočlánku $T_{tc} = T_{tc}(t)$, přičemž snahou bude nalézt takové R_m , že chyba mezi vypočteným průběhem teplot a průběhem teplot naměřeným termočlánkem bude minimální. Tato optimalizační úloha bude popsána v další části.

2.1.3. Výpočet tepelných odporů R_m

Tepelný odpor R_m v místě mezi předlitkem a krystalizátorem pro daný termočlánek bude spočítán následující optimalizační úlohou

$$R_m = \arg \min_{R'_m} \sum_t (T_{tc}^*(t) - T_{tc}(t))^2 \quad (2.50)$$

za podmínek

$$R'_m \geq 0, \quad R'_m \leq 10^{-2}. \quad (2.51)$$

V účelové funkci figuruje člen $T_{tc}^*(t)$, což je teplota naměřená příslušným termočlánkem v diskrétních časových okamžicích. Naopak člen $T_{tc}(t)$ představuje teplotu vypočtenou pomocí Crankovy-Nicolsonovy metody v místě daného termočlánku a v časech odpovídajících časům ze člene $T_{tc}^*(t)$. Podmínka nezáporného tepelného odporu R'_m má fyzikální význam, zatímco druhá podmínka z dvojice (2.51) má za úkol zmenšit stavový prostor bez újmy na kvalitě nalezeného řešení.

Účelová funkce je konvexní a stavový prostor je jednorozměrný spojitý uzavřený interval, díky čemuž lze použít optimalizační metodu pro hledání lokálních extrémů. K tomuto účelu byla využita matlabovská funkce `fminbnd`, která využívá metodu zlatého řezu a metodu kvadratické interpolace. Obě metody proto nyní budou s využitím textu [7] stručně popsány.

Metoda zlatého řezu

Tato metoda slouží k nalezení lokálního minima funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$. Její princip je stejný jako v případě intervalové trisekce, avšak metoda zlatého řezu využívá speciálního nerovnoměrného dělení intervalu, které redukuje počet bodů, ve kterých musíme funkci $f(x)$ vyhodnocovat.

Předpokládejme tedy, že známe $a, b, f(a)$ a $f(b)$. Dále určíme body u, v tak, že $u = a + h$ a $v = b - h$, kde $h = \rho_g(b - a)$, a vypočteme $f(u)$ a $f(v)$. Jestliže $f(u) < f(v)$, pak minimum leží v intervalu $\langle a, v \rangle$. Bod b tedy bude nahrazen bodem v , přičemž celý postup bude opakován. Metoda zlatého řezu volí hodnotu ρ_g tak, aby bod u z původního intervalu $\langle a, b \rangle$ byl využit i v následující iteraci, kde bude mít úlohu bodu v , což je vyjádřeno rovnicí (2.52). Díky tomu je funkce $f(x)$ vyhodnocována v každé iteraci pouze jednou, zatímco v případě trisekce je nutno počítat hodnotu funkce $f(x)$ ve dvou bodech. Parametr ρ_g bude vypočten z rovnice

$$\frac{u - a}{v - a} = \frac{v - a}{b - a}, \quad (2.52)$$

kterou lze upravit na tvar

$$\frac{\rho_g}{1 - \rho_g} = \frac{1 - \rho_g}{1}, \quad (2.53)$$

z kterého dostaneme $\rho_g = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$, což je číslo nazývané jako poměr zlatého řezu. Metoda zlatého řezu je spolehlivá, avšak její rychlost konvergence je nízká, proto je vhodné ji po několika iteracích nahradit rychleji konvergující metodou, např. metodou kvadratické interpolace [23].

Metoda kvadratické interpolace

Metoda opět slouží k nalezení lokálního minima. Uvažujme funkci $f(x)$ a předpokládejme, že hledané minimum leží v intervalu $\langle a_k, b_k \rangle$ a že v nějakém vnitřním bodě c_k tohoto intervalu platí, že $f(c_k) \leq \min\{f(a_k), f(b_k)\}$. Body $[a_k, f(a_k)]$, $[c_k, f(c_k)]$ a $[b_k, f(b_k)]$ proložíme parabolou $P_2(x)$, kterou lze chápat jako kvadratický interpolační polynom. Parabola bude tvaru [19]

$$P_2(x) = \frac{f(a_k)(x - c_k)(x - b_k)}{(a_k - c_k)(a_k - b_k)} + \frac{f(c_k)(x - a_k)(x - b_k)}{(c_k - a_k)(c_k - b_k)} + \frac{f(b_k)(x - a_k)(x - c_k)}{(b_k - a_k)(b_k - c_k)}. \quad (2.54)$$

Jako aproximaci minima budeme uvažovat řešení x_{k+1} rovnice $P_2'(x) = 0$, pro které platí vztah [7]

$$x_{k+1} = c_k - \frac{1}{2} \frac{(c_k - a_k)^2 [f(c_k) - f(b_k)] - (c_k - b_k)^2 [f(c_k) - f(a_k)]}{(c_k - a_k) [f(c_k) - f(b_k)] - (c_k - b_k) [f(c_k) - f(a_k)]}. \quad (2.55)$$

Nyní postupujeme následovně:

- Jestliže $x_{k+1} < c_k$ a $f(x_{k+1}) < f(c_k)$, levý konec intervalu ponecháme, tj. $a_{k+1} = a_k$, ale body c_{k+1} a b_{k+1} určíme jako $c_{k+1} = x_{k+1}$ a $b_{k+1} = c_k$.
- Jestliže $x_{k+1} < c_k$, ale $f(x_{k+1}) \geq f(c_k)$, pak pravý konec intervalu ponecháme, tj. $b_{k+1} = b_k$ stejně jako bod c_k , tj. $c_{k+1} = c_k$, ale bod a_{k+1} určíme jako $a_{k+1} = x_{k+1}$.

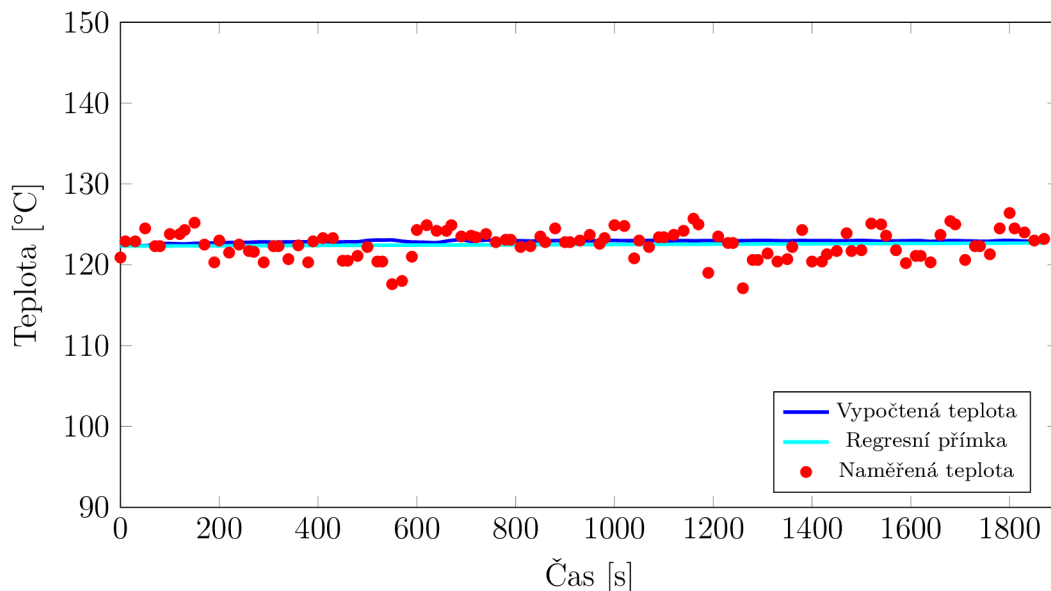
V případě, že $x_{k+1} > c_k$ by byl postup analogický. Pokud nastane případ, že $x_{k+1} = c_k$, pak je bod x_{k+1} nahrazen jiným vnitřní bodem intervalu $\langle a_k, b_k \rangle$. Ukončovací podmínka algoritmu může mít různý tvar, výpočet můžeme ukončit například ve chvíli, kdy $b_k - a_k < \varepsilon$ nebo pokud $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$ [19, 7].

2.1.4. Výsledky

Tepelné odpory R_m byly počítány z dat zaznamenaných během několika přibližně půlhodinových časových úseků. Úseky byly vybrány tak, aby se během nich příliš neměnila licí rychlost a podmínky se co nejvíce blížily ustálenému vedení tepla. Odpory byly počítány pro všech 44 termočlánků, přičemž získané výsledky korespondují s očekáváním. Tepelný odpor příslušný horním termočlánkům na dlouhé straně krystalizátoru se pohyboval okolo $1,7 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2\text{K/W}$, zatímco ve spodní řadě se hodnoty pohybovaly okolo $3,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2\text{K/W}$. Hodnoty se směrem k rohu krystalizátoru zvětšovaly, což je pochopitelné, neboť v rozích krystalizátoru bývá největší vliv vzduchové mezery mezi stěnou a předlitkem vlivem jeho smršťování. Na kratší straně krystalizátoru se hodnoty pohybovaly okolo $1,1 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2\text{K/W}$ pro horní a okolo $1,2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2\text{K/W}$ pro spodní řadu termočlánků.

Na obrázku 2.2 je porovnání teplot naměřených termočlánkem a teplot vypočtených pomocí popsání 1D modelu vedení tepla pro nalezenou optimální hodnotu R_m . Podstatné je, že hladina vypočtené teploty odpovídá naměřeným hodnotám. To, že model nepostihuje fluktuace kolem této hladiny, je způsobeno tím, že tepelný odpor R_m není uvažován jako závislý na čase, a také tím, že v modelu nejsou uvažovány všechny drobné teplotní výkyvy, které nastávají při reálném ději. Roli může hrát i nepřesnost termočlánku.

Vypočtené tepelné odpory budou využity v okrajové podmínce 2D modelu vedení tepla stěnou krystalizátoru, který bude generovat data pro natrénování neuronové sítě. Tento model bude popsán v následující části.



Obrázek 2.2: Průběh teplot.

2.2. 2D model vedení tepla

Dvourozměrný model vedení tepla stěnou krystalizátoru bude sloužit pro vytváření dat popisujících šíření hot spotu, která jsou nezbytná pro kvalitní natrénování neuronové sítě. Výpočetní oblastí tohoto modelu bude obdélník daný horizontálním řezem příslušné desky krystalizátoru v úrovni spodních nebo horních termočlánků, viz obr. 2.3. Podobně jako v případě 1D modelu bude uvažována pouze část desky bez kanálů chladičí vody, přičemž vliv chladičí vody bude opět zahrnut v okrajové podmínce, viz text [14]. V okrajové podmínce bude opět zahrnut i prostor mezi roztavenou ocelí a krystalizátorem, tedy i vrstva ztuhlé oceli na povrchu předlitku. Hot spot bude modelován právě pomocí tloušťky vrstvy ztuhlé oceli, přičemž výstupem z 2D modelu bude průběh teplot v místech termočlánků - neboli reakce termočlánků na šířící se hot spot.

Pro hot spot vzniklý na dané straně předlitku bude tedy 2D model počítán pro odpovídající stranu krystalizátoru v horní i dolní rovině termočlánků. Simulace bude zahrnovat pouze šíření hot spotu a nikoliv následný průval, neboť protiprůvalový systém musí samozřejmě reagovat ještě předtím, než k průvalu dojde.

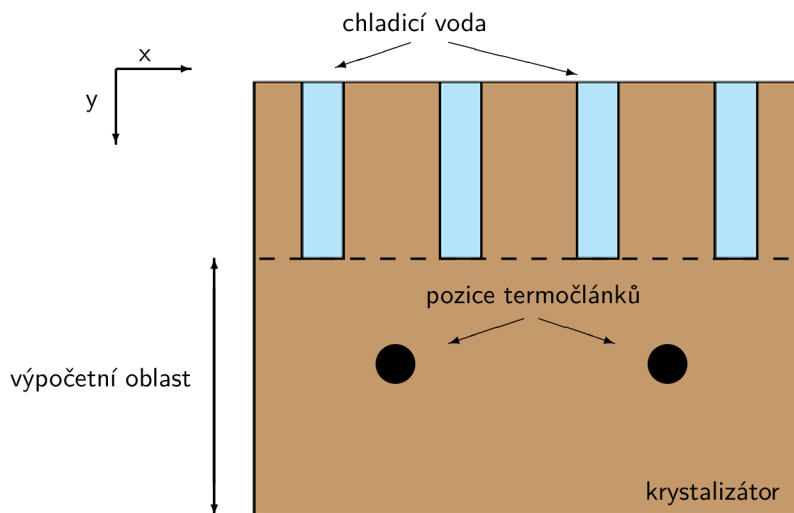
V dalším textu bude matematicky naformulována popsána úloha vedení tepla a následně budou rozebrány numerické algoritmy sloužící k jejímu vyřešení.

2.2.1. Formulace úlohy

Pro popis vedení tepla na uvažované dvourozměrné oblasti vyjdeme z rovnice vedení tepla 2.14 a upravíme ji pro 2D případ na tvar

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad x \in \langle 0, \ell_x \rangle, \quad y \in \langle 0, \ell_y \rangle, \quad t \in \langle 0, \tau \rangle, \quad (2.56)$$

kde hledanou funkcí je teplota $T = T(x, y, t)$ a materiálové konstanty ρ, c a k jsou opět pro měď. Konstanta ℓ_x odpovídá aktivní šířce příslušné desky krystalizátoru, pro širokou



Obrázek 2.3: Část horizontálního řezu stěnou krystalizátoru [15].

desku krystalizátoru je tedy hodnota ℓ_x totožná se šířkou odlévaného předlitku, zatímco v případě krátké desky ℓ_x odpovídá jeho tloušťce. Konstanta ℓ_y naopak popisuje tloušťku samotné desky krystalizátoru po odečtení tloušťky příslušící vodním kanálům. Hodnota ℓ_y je různá pro dlouhou a širokou desku a stejně tak závisí i na tom, zda je model uvažován pro rovinu horních nebo dolních termočlánků. Délka časového intervalu $\langle 0, \tau \rangle$ je určena podle toho, jak velký časový interval teplot je vyhodnocován samotným protiprůvalovým systémem.

Důležitým prvkem vytvářeného modelu jsou opět okrajové podmínky, ve kterých budou kromě vypočtených tepelných odporů R_m aplikovány i další poznatky získané při vytváření 1D modelu vedení tepla.

Situace na hranici mezi výpočetní oblastí a oblastí příslušící vodním kanálům bude popsána podmínkou podobnou jako v případě 1D modelu

$$k \frac{\partial}{\partial y} (T(x, 0, t)) = \alpha(T(x, 0, t) - T_v), \quad x \in \langle 0, \ell_x \rangle, \quad t \in \langle 0, \tau \rangle. \quad (2.57)$$

Tato podmínka popisuje přenos tepla konvekcí a k tomu dochází pouze na částech hranice, které přísluší vodním kanálům, nicméně tato skutečnost je zahrnuta v hodnotě součinitele přenosu tepla α [14]. Parametry α a T_v okrajové podmínky jsou díky tomu nezávislé na x .

Na vnitřním povrchu desky krystalizátoru bude opět předepsána okrajová podmínka IV. druhu, která bude tvaru

$$-k \frac{\partial}{\partial y} (T(x, \ell_y, t)) = \frac{1}{R} (T(x, \ell_y, t) - T_{sol}), \quad x \in \langle 0, \ell_x \rangle, \quad t \in \langle 0, \tau \rangle, \quad (2.58)$$

kde tepelný odpor R figurující mezi roztavenou ocelí a vnitřním povrchem stěny krystalizátoru je dán jako

$$R = R_m + \frac{d_{oc}}{k_{oc}}, \quad (2.59)$$

kde nyní budeme uvažovat $R_m = R_m(x, t)$ a $d_{oc} = d_{oc}(x, t)$, což je nezbytné k tomu, aby mohl být simulován hot spot. Tloušťka d_{oc} byla modelována podle poznatků popsaných v kapitole 1, tj. oblast normálního tuhnutí kůry je od přilepené klínovité části oddělena trhlinou tvaru V, ve které byla tloušťka ztuhlé oceli modelována jako téměř nulová. Tloušťka kůry v přilepené části pak narůstá nad obvyklou hodnotu. Trhlina se přitom pohybuje rychlostí stejnou nebo nižší než je rychlost lití [2, 3].

Hodnota tepelného odporu R_m byla v oblasti normálně tuhnoucí kůry volena jako konstantní podél proměnné x , přičemž byla získána jako průměr hodnot vypočtených 1D modelem vedení tepla pro termočlánky v příslušné řadě a pro příslušnou stranu krystalizátoru. V oblasti přilepené oceli byla hodnota R_m snížena pomocí váhové funkce, neboť mezi přilepenou ocelí a stěnou krystalizátoru je menší vrstva licího prášku, a tedy i nižší tepelný odpor.

Okrajové podmínky popisující situaci po stranách výpočetní oblasti byly předepsány ve tvaru

$$k \frac{\partial}{\partial x} (T(0, y, t)) = 0, \quad y \in \langle 0, \ell_y \rangle, \quad t \in \langle 0, \tau \rangle, \quad (2.60)$$

$$-k \frac{\partial}{\partial x} (T(\ell_x, y, t)) = 0, \quad y \in \langle 0, \ell_y \rangle, \quad t \in \langle 0, \tau \rangle. \quad (2.61)$$

Podmínky požadují nulový tepelný tok směrem do krajů desky krystalizátoru, což reálně není splněno, avšak dominantní tepelný tok působí ve směru ven z krystalizátoru, a proto je tepelný tok směřující do krajů desky zanedbán.

K úplnosti zadání zbývá předepsat počáteční podmínku, která bude podobně jako v případě 1D modelu stanovena výpočtem rovnice pro stacionární vedení tepla

$$0 = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad x \in \langle 0, \ell_x \rangle, \quad y \in \langle 0, \ell_y \rangle \quad (2.62)$$

s okrajovými podmínkami (2.57), (2.58), (2.60) a (2.61), přičemž parametry figurující v podmínkách budou brány pro čas $t = 0$. Počáteční podmínku tak lze zapsat ve tvaru

$$T(x, y, 0) = T_0(x, y). \quad (2.63)$$

Popisovaný dvourozměrný model vedení tepla je tedy matematicky formulován rovnicí (2.56), počáteční podmínkou (2.63) a okrajovými podmínkami (2.57), (2.58), (2.60) a (2.61). V další části bude stejně jako v případě 1D modelu popsáno, jak jej lze numericky řešit.

2.2.2. Numerické řešení

Metoda konečných diferencí, kterou bude výše uvedená úloha řešena, bude odvozena podobně jako to bylo provedeno pro případ 1D modelu v kapitole 2.1.2.

Obdélníková oblast $\langle 0, \ell_x \rangle \times \langle 0, \ell_y \rangle$ bude rozdělena ve směru osy x s krokem $h_x = \ell_x/M$, kde $x_i = ih_x$, $i = 0, 1, \dots, M$, a ve směru osy y s krokem $h_y = \ell_y/N$, kde $y_j = jh_y$, $j = 0, 1, \dots, N$. Opět budou nejprve uvažovány Dirichletovy okrajové podmínky, a pak tedy bude požadováno, aby rovnice (2.56) byla splněna ve všech vnitřních uzlech, tj. bodech $[x_i, y_j]$ pro $i = 1, 2, \dots, M-1$, $j = 1, 2, \dots, N-1$ a $t \in \langle 0, \tau \rangle$. Nyní lze provést nahrazení derivací podle prostorových proměnných centrálními diferencemi, čímž rovnice (2.56) přejde na tvar

$$\begin{aligned} \rho c \frac{\partial T(x_i, y_j, t)}{\partial t} = & \frac{k}{h_x^2} [T(x_{i+1}, y_j, t) - 2T(x_i, y_j, t) + T(x_{i-1}, y_j, t)] + \\ & + \frac{k}{h_y^2} [T(x_i, y_{j+1}, t) - 2T(x_i, y_j, t) + T(x_i, y_{j-1}, t)], \quad (2.64) \end{aligned}$$

kde $i = 1, 2, \dots, M-1$, $j = 1, 2, \dots, N-1$ a $t \in \langle 0, \tau \rangle$. Nyní bude diskretizován časový interval $\langle 0, \tau \rangle$, pro který položíme $h_t = \tau/Q$ a pak $t_n = nh_t$, $n = 0, 1, \dots, Q$. Nahrazení časové derivace diferencí bude provedeno stejně jako v části 2.1.2, přičemž lze opět uvažovat

konvexní kombinaci prostorových diferencí uvažovaných v časových okamžicích t_n a t_{n+1} . Pro výpočet bude opět využita Crankova-Nicolsonova metoda, pro kterou lze s využitím značení $T_{i,j}^n \equiv T(x_i, y_j, t_n)$ zapsat plně diskretizovanou rovnici (2.56) ve tvaru

$$\begin{aligned} \rho c \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^n}{h_t} &= \frac{1}{2} \frac{k}{h_x^2} \left[(T_{i+1,j}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i-1,j}^{n+1}) + (T_{i+1,j}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i-1,j}^n) \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{k}{h_y^2} \left[(T_{i,j+1}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i,j-1}^{n+1}) + (T_{i,j+1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j-1}^n) \right], \end{aligned} \quad (2.65)$$

kde $i = 1, 2, \dots, M-1$, $j = 1, 2, \dots, N-1$ a $n = 0, 1, \dots, Q-1$. Přesnost tohoto schématu je $\mathcal{O}(t^2) + \mathcal{O}(x^2) + \mathcal{O}(y^2)$. S přihlédnutím k matematické formulaci výše popsaného 2D modelu vedení tepla je třeba ještě rozebrat numerické řešení zahrnující Newtonovy okrajové podmínky, které budou obecně uvažovány ve tvaru

$$k \frac{\partial T(0, y, t)}{\partial x} = \alpha_{0_x}(y, t)T(0, y, t) - \beta_{0_x}(y, t), \quad y \in \langle 0, \ell_y \rangle, \quad t \in \langle 0, \tau \rangle, \quad (2.66)$$

$$-k \frac{\partial T(\ell_x, y, t)}{\partial x} = \alpha_{\ell_x}(y, t)T(\ell_x, y, t) - \beta_{\ell_x}(y, t), \quad y \in \langle 0, \ell_y \rangle, \quad t \in \langle 0, \tau \rangle, \quad (2.67)$$

$$k \frac{\partial T(x, 0, t)}{\partial y} = \alpha_{0_y}(x, t)T(x, 0, t) - \beta_{0_y}(x, t), \quad x \in \langle 0, \ell_x \rangle, \quad t \in \langle 0, \tau \rangle, \quad (2.68)$$

$$-k \frac{\partial T(x, \ell_y, t)}{\partial y} = \alpha_{\ell_y}(x, t)T(x, \ell_y, t) - \beta_{\ell_y}(x, t), \quad x \in \langle 0, \ell_x \rangle, \quad t \in \langle 0, \tau \rangle. \quad (2.69)$$

Postup bude nejprve ukázán pro stranu $x = 0$ obdélníka $\langle 0, \ell_x \rangle \times \langle 0, \ell_y \rangle$, na které je předepsána podmínka (2.66), a poté pro roh obdélníka $[0, 0]$, ve kterém se uplatní dvě podmínky (2.66) a (2.68). Ostatní případy lze odvodit analogicky. Podobně jako v případě 1D modelu je požadováno, aby rovnice (2.56) byla mj. splněna i pro hranici, na které je předepsána okrajová podmínka (2.66). Člen $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ bude nejprve vyjádřen pomocí jednostranné diference

$$k \frac{\partial^2 T(0, y, t)}{\partial x^2} = k \frac{\frac{\partial T(x_{1/2}, y, t)}{\partial x} - \frac{\partial T(x_0, y, t)}{\partial x}}{\frac{1}{2}h_x} + \mathcal{O}(h_x) \quad (2.70)$$

a nyní bude za člen $\frac{\partial T(x_0, y, t)}{\partial x}$ dosazeno ze vztahu (2.66) a člen $\frac{\partial T(x_{1/2}, y, t)}{\partial x}$ bude aproximován centrální diferencí, díky čemuž lze psát

$$k \frac{\partial^2 T(0, y, t)}{\partial x^2} = \frac{k \frac{T(x_1, y, t) - T(x_0, y, t)}{h_x} - \alpha_{0_x}(y, t)T(x_0, y, t) + \beta_{0_x}(y, t)}{\frac{1}{2}h_x} + \mathcal{O}(h_x). \quad (2.71)$$

Bude-li zanedbána chyba, pak lze z rovnice (2.71) dosadit do rovnice (2.56), přičemž derivace $\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$ bude nahrazena diferencí stejně jako v rovnici (2.64). Tím lze získat

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\rho c \frac{\partial T(x_0, y_j, t)}{\partial t} &= \frac{1}{h_x^2} [-(k + h_x \alpha_{0_x}(y_j, t))T(x_0, y_j, t) + kT(x_1, y_j, t)] + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{k}{h_y^2} [T(x_0, y_{j+1}, t) - 2T(x_0, y_j, t) + T(x_0, y_{j-1}, t)] + \frac{1}{h_x} \beta_{0_x}(y_j, t), \end{aligned} \quad (2.72)$$

pro $j = 1, 2, \dots, N - 1$ a $t \in \langle 0, \tau \rangle$. Úplná diskretizace by v případě Crankovy-Nicolsonovy metody byla provedena podobně jako v případě rovnice (2.64).

V případě rohového bodu $[0, 0] \equiv [x_0, y_0]$ bude kromě člene $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ nahrazeného pomocí okrajové podmínky (2.66) nahrazen také člen $\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$. K tomu bude využita okrajová podmínka (2.68). Podobně bude tedy odvozeno

$$k \frac{\partial^2 T(x, 0, t)}{\partial y^2} = \frac{k \frac{T(x, y_1, t) - T(x, y_0, t)}{h_y} - \alpha_{0_y}(x, t)T(x, y_0, t) + \beta_{0_y}(x, t)}{\frac{1}{2}h_y} + \mathcal{O}(h_y). \quad (2.73)$$

Dosažením do rovnice (2.56) ze vztahů (2.71) a (2.73) v bodě $[0, 0]$ dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\rho c \frac{\partial T(x_0, y_0, t)}{\partial t} &= \frac{1}{h_x^2} [-(k + h_x \alpha_{0_x}(y_0, t))T(x_0, y_0, t) + kT(x_1, y_0, t)] + \\ &+ \frac{1}{h_y^2} [-(k + h_y \alpha_{0_y}(x_0, t))T(x_0, y_0, t) + kT(x_0, y_1, t)] + \frac{1}{h_x} \beta_{0_x}(y_0, t) + \frac{1}{h_y} \beta_{0_y}(x_0, t), \end{aligned} \quad (2.74)$$

kde $t \in \langle 0, \tau \rangle$. Vztahy pro zbývající části hranice oblasti $\langle 0, \ell_x \rangle \times \langle 0, \ell_y \rangle$ lze získat obdobně jako v případě dvou výše uvedených odvození. Všechny vztahy potřebné k tomu, aby mohla být rovnice (2.56) na oblasti $\langle 0, \ell_x \rangle \times \langle 0, \ell_y \rangle$ s obecnými okrajovými podmínkami (2.66), (2.67), (2.68) a (2.69) vyřešena pomocí Crankovy-Nicolsonovy metody, lze opět chápat jako soustavu $(M + 1)(N + 1)$ lineárních rovnic. Pro zjednodušení značení bude zavedeno

$$\mu_x = \frac{kh_t}{c\rho h_x^2}, \quad \mu_y = \frac{kh_t}{c\rho h_y^2}, \quad (2.75)$$

$$\nu_{x,j}^n = \frac{h_t}{\rho ch_x} \alpha_{0_x}(y_j, t_n), \quad \nu_{y,i}^n = \frac{h_t}{\rho ch_y} \alpha_{0_y}(x_i, t_n), \quad (2.76)$$

$$\xi_{x,j}^n = \frac{h_t}{\rho ch_x} \alpha_{\ell_x}(y_j, t_n), \quad \xi_{y,i}^n = \frac{h_t}{\rho ch_y} \alpha_{\ell_y}(x_i, t_n) \quad (2.77)$$

$$\sigma_{x,j}^n = \frac{h_t}{\rho ch_x} \beta_{0_x}(y_j, t_n), \quad \sigma_{y,i}^n = \frac{h_t}{\rho ch_y} \beta_{0_y}(x_i, t_n), \quad (2.78)$$

$$\psi_{x,j}^n = \frac{h_t}{\rho ch_x} \beta_{\ell_x}(y_j, t_n), \quad \psi_{y,i}^n = \frac{h_t}{\rho ch_y} \beta_{\ell_y}(x_i, t_n) \quad (2.79)$$

a uvažovaná soustava pak bude mít tvar

$$\mathbf{Q}_1^{n+1} \mathbf{T}^{n+1} = \mathbf{Q}_2^n \mathbf{T}^n + \mathbf{F}^{n+1} + \mathbf{F}^n, \quad (2.80)$$

kde

$$\mathbf{Q}_1^n = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_0^n & \mathbf{S}' & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{S} & \mathbf{B}_1^n & \mathbf{S} & \cdots & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{S} & \mathbf{B}_2^n & \cdots & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{S} & \mathbf{B}_{M-1}^n & \mathbf{S} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \cdots & \mathbf{O} & \mathbf{S}' & \mathbf{B}_M^n \end{pmatrix} \quad (2.81)$$

je blokově diagonální matice řádu $(M+1)(N+1)$, přičemž její bloky jsou řádu $N+1$. Bloky \mathbf{B}_i^n , $i = 0, 1, \dots, M$ lze rozdělit na časově závislou část $\mathbf{B}_{i,t}^n$ a časově nezávislou část $\mathbf{B}_{i,s}$ vztahem

$$\mathbf{B}_i^n = \mathbf{B}_{i,t}^n + \mathbf{B}_{i,s}, \quad (2.82)$$

kde

$$\mathbf{B}_{i,s} = \begin{pmatrix} 1 + \mu_x + \mu_y & -\mu_y & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu_y}{2} & 1 + \mu_x + \mu_y & -\frac{\mu_y}{2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\mu_y}{2} & 1 + \mu_x + \mu_y & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{\mu_y}{2} & 1 + \mu_x + \mu_y & -\frac{\mu_y}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\mu_y & 1 + \mu_x + \mu_y \end{pmatrix} \quad (2.83)$$

pro $i = 0, 1, \dots, M$. Časově závislé bloky jsou tvaru

$$\mathbf{B}_{0,t}^n = \begin{pmatrix} \nu_{x,0}^n + \nu_{y,0}^n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_{x,1}^n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_{x,2}^n & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \nu_{x,N-1}^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \nu_{x,N}^n + \xi_{y,0}^n \end{pmatrix}, \quad (2.84)$$

$$\mathbf{B}_{i,t}^n = \begin{pmatrix} \nu_{y,i}^n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \xi_{y,i}^n \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, M-1, \quad (2.85)$$

$$\mathbf{B}_{M,t}^n = \begin{pmatrix} \xi_{x,0}^n + \nu_{y,M}^n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_{x,1}^n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_{x,2}^n & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \xi_{x,N-1}^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \xi_{x,N}^n + \xi_{y,M}^n \end{pmatrix}. \quad (2.86)$$

Naddiagonální a poddiagonální bloky budou tvaru

$$\mathbf{S} = -\frac{\mu_x}{2}\mathbf{I}, \quad (2.87)$$

$$\mathbf{S}' = -\mu_x\mathbf{I}, \quad (2.88)$$

kde \mathbf{I} je jednotková matice řádu $(N+1)$. Matici \mathbf{Q}_2^n , která po součinu s vektorem \mathbf{T}^n bude tvořit jeden z vektorů na pravé straně soustavy (2.80), lze vyjádřit pomocí matice \mathbf{Q}_1^n vztahem

$$\mathbf{Q}_2^n = -\mathbf{Q}_1^n + 2\mathbf{I}, \quad (2.89)$$

kde \mathbf{I} je jednotková matice řádu $(M+1)(N+1)$. Protože nejsou uvažovány žádné vnitřní zdroje tepla, vektor \mathbf{F}^n na pravé straně bude obsahovat pouze členy z Newtonových okrajových podmínek a bude tvaru

$$\mathbf{F}^n = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_0^n \\ \mathbf{G}_1^n \\ \vdots \\ \mathbf{G}_{M-1}^n \\ \mathbf{G}_M^n \end{pmatrix}, \quad (2.90)$$

kde

$$\mathbf{G}_0^n = \begin{pmatrix} \sigma_{x,0}^n + \sigma_{y,0}^n \\ \sigma_{x,1}^n \\ \vdots \\ \sigma_{x,N-1}^n \\ \sigma_{x,N}^n + \psi_{y,0}^n \end{pmatrix}, \quad (2.91)$$

vnitřní bloky budou mít tvar

$$\mathbf{G}_i^n = \begin{pmatrix} \sigma_{y,i}^n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \psi_{y,i}^n \end{pmatrix}, \quad (2.92)$$

pro $i = 1, 2, \dots, M - 1$ a poslední blok bude tvaru

$$\mathbf{G}_M^n = \begin{pmatrix} \psi_{x,0}^n + \sigma_{y,M}^n \\ \psi_{x,1}^n \\ \vdots \\ \psi_{x,N-1}^n \\ \psi_{x,N}^n + \psi_{y,M}^n \end{pmatrix}. \quad (2.93)$$

Konečně, vektor teplot v čase t_n bude mít tvar

$$\mathbf{T}^n = \begin{pmatrix} T_{0,0}^n \\ T_{0,1}^n \\ \vdots \\ T_{0,N-1}^n \\ T_{0,N}^n \\ T_{1,0}^n \\ T_{1,1}^n \\ \vdots \\ T_{M,N-1}^n \\ T_{M,N}^n \end{pmatrix}. \quad (2.94)$$

Matice \mathbf{Q}_1^{n+1} soustavy (2.80) již není třídiagonální, jako tomu bylo v jednorozměrném případě, a proto vzniká otázka, jak danou soustavu efektivně řešit. Soustava (2.80) může být vynásobena zleva maticí $(\mathbf{Q}_1^{n+1})^T$, čímž je zajištěno, že matice soustavy bude řídká a pozitivně definitní, a může být řešena například metodou sdružených gradientů.

Jinou možností je využití metody známé jako *Alternating Direction Implicit (ADI)*. Účelem této metody je, aby řešená soustava lineárních rovnic měla opět třídiagonální matici soustavy, díky čemuž ji lze efektivně řešit. Toho lze docílit tak, že časový krok h_t bude rozdělen na dvě části o velikosti $h_t/2$, přičemž v první části bude v rovnici (2.64) brána jedna prostorová diference (např. podle x) implicitně, zatímco druhá (podle y) bude brána explicitně. V druhé části kroku se role zamění a diference v proměnné x bude brána explicitně a diference v proměnné y implicitně. Postup lze zapsat následovně:

$$\rho c \frac{T_{i,j}^{n+1/2} - T_{i,j}^n}{\frac{h_t}{2}} = \frac{k}{h_x^2} (T_{i+1,j}^{n+1/2} - 2T_{i,j}^{n+1/2} + T_{i-1,j}^{n+1/2}) + \frac{k}{h_y^2} (T_{i,j+1}^n - 2T_{i,j}^n + T_{i,j-1}^n), \quad (2.95)$$

$$\rho c \frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n+1/2}}{\frac{h_t}{2}} = \frac{k}{h_x^2} (T_{i+1,j}^{n+1/2} - 2T_{i,j}^{n+1/2} + T_{i-1,j}^{n+1/2}) + \frac{k}{h_y^2} (T_{i,j+1}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i,j-1}^{n+1}). \quad (2.96)$$

Kompletní soubor rovnic i příslušnou soustavu lze odvodit analogicky jako v případě Crankovy-Nicolsonovy metody. Důležité je ovšem poznamenat, že z rovnice (2.95) vyplývá,

že pokud má být matice soustavy v první části kroku třídiagonální, pak je třeba upravit pořadí jednotlivých rovnic. Vektor teplot \mathbf{T}^n tedy nebude mít tvar daný (2.94), ale tvar

$$\mathbf{T}^n = \begin{pmatrix} T_{0,0}^n \\ T_{1,0}^n \\ \vdots \\ T_{M-1,0}^n \\ T_{M,0}^n \\ T_{0,1}^n \\ T_{1,1}^n \\ \vdots \\ T_{M-1,N}^n \\ T_{M,N}^n \end{pmatrix}. \quad (2.97)$$

V případě druhé části kroku budou mít rovnice obvyklé pořadí s vektorem \mathbf{T}^n daným tvarem (2.94). Přesnost uvažované metody je $\mathcal{O}(t^2) + \mathcal{O}(x^2) + \mathcal{O}(y^2)$, tedy stejná jako v případě Crankovy-Nicolsonovy metody.

Crankova-Nicolsonova metoda (s následným využitím metody sdružených gradientů) i metoda ADI byly v práci využity pro tvorbu dat popisujících šíření hot spotu, přičemž obě metody byly z hlediska rychlosti výpočtu přibližně rovnocenné. V dalším textu budou popsána vytvářená data.

2.2.3. Výsledky

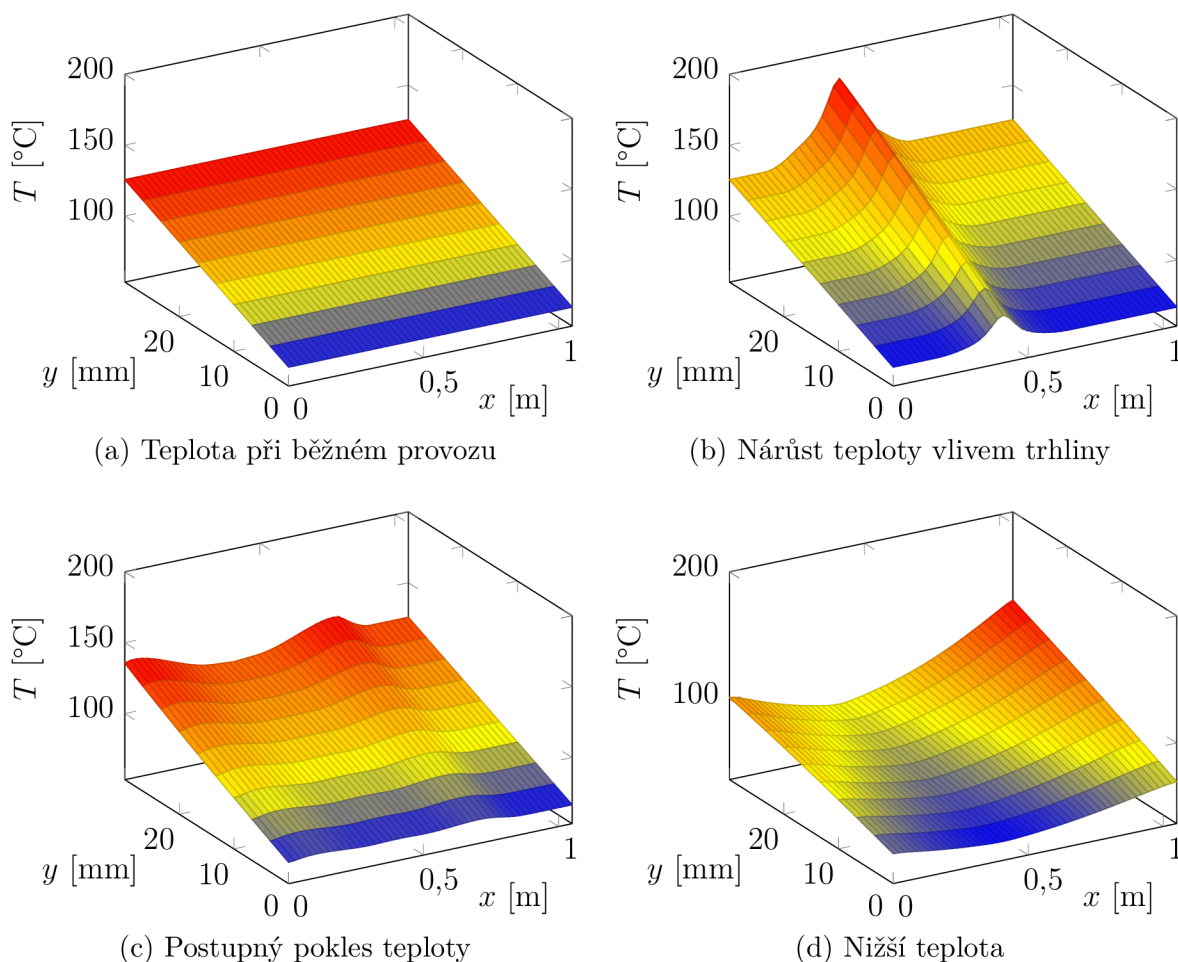
Účelem 2D modelu vedení tepla je tvorba průběhů teplot v termočláncích za situace, kdy se šíří hot spot. Výsledná teplota v místech termočlánců je ale ovlivněna mnoha faktory, a proto bylo nutné data vytvářet pro různé kombinace těchto faktorů, a simulovat tak různé provozní podmínky krystalizátoru i samotného děje šíření hot spotu. Hlavní proměnlivé parametry, které ovlivňují počítané teploty v místech termočlánců, byly tyto:

- **Součinitel přestupu tepla** α . Jeho hodnota je ovlivněna rychlostí proudu chladicí vody a i její teplotou, které se mohou měnit.
- **Licí rychlost** v_c . Licí rychlost určuje rychlost šíření hot spotu, a tedy i průběh teploty v místě termočláncu.
- **Teplota chladicí vody** T_v . Ovlivňuje teplotu v desce krystalizátoru.
- **Teplota solidu** T_{sol} . Je závislá na chemickém složení odlévané oceli a je třeba uvažovat její proměnlivost, neboť jsou odlévány ocele různých značek a složení.
- **Poloha a tvar trhliny**. Tvar trhliny je určen úhlem v jejím vrcholu. Polohou trhliny je myšlena horizontální pozice vrcholu trhliny.
- **Tepelný odpor** R_m . Je nejvýznamnějším tepelným odporem mezi tekutou ocelí a stěnou krystalizátoru, a proto jeho hodnota výrazně ovlivňuje teploty v místech

termočlánků. Hodnoty stanovené 1D modelem vedení tepla slouží pro popis situace normálně tuhnoucí oceli, ale v případě přilepené části je hodnota R_m snížena.

- **Tloušťka ztuhlé oceli d_{oc} .** Je klíčovým parametrem pro modelování hot spotu a do značné míry souvisí s polohou a tvarem trhliny. Jako proměnlivá je uvažována i tloušťka normálně tuhnoucí oceli.

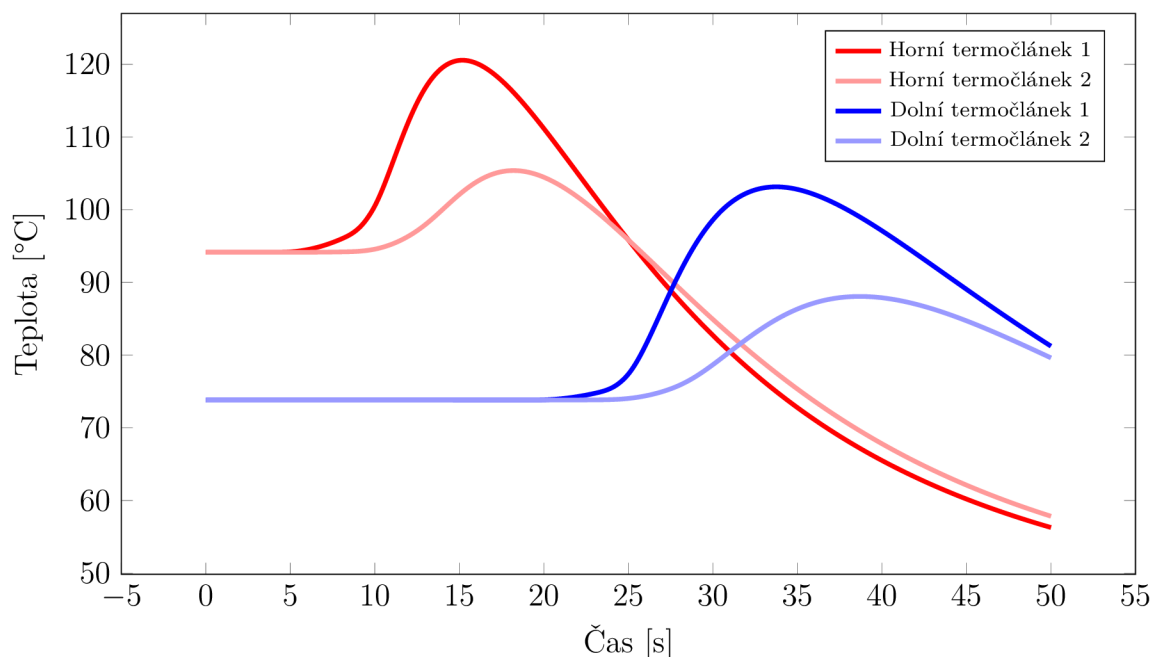
Výchozím stavem celé simulace je vždy ustálené vedení tepla stěnou krystalizátoru, které odpovídá rovnoměrnému bezproblémovému tuhnutí oceli. Následně je ale vygenerován hot spot, který se vlivem lící rychlosti posouvá směrem dolů. Hot spot nejprve ovlivní teplotu v rovině horních termočlánků, a s tím, jak se dále posouvá směrem dolů, následně ovlivní vypočítanou teplotu i v rovině termočlánků spodních. Vedení tepla je počítáno pro obě roviny termočlánků, přičemž výstupem každého z obou modelů budou průběhy teplot modelované v místech dvou termočlánků nejbližších vrcholu hot spotu, celkovým výstupem tedy budou průběhy teplot v místech 4 nejbližších termočlánků. Nejbližší termočlánky jsou vybrány proto, že nejdříve zachytí šíření hot spotu.



Obrázek 2.4: Naznačení průběhu teploty v horní rovině termočlánků.

Průběh teploty pro delší desku krystalizátoru v rovině horních termočlánků je naznačen na obrázku 2.4, kde osa x popisuje šířku desky a osa y její tloušťku, přičemž kladný směr osy y směřuje dovnitř krystalizátoru. Ustálené vedení tepla je narušeno rychlým lokálním nárůstem teploty v místech blízkých vrcholu trhliny, následně ale teplota opět rychle klesá, neboť za trhlinou je ztuhlá ocel, která nabývá relativně velké tloušťky. Na obrázku 2.5 jsou již průběhy teplot v místech jednotlivých termočlánků. Vrchol trhliny byl blíže termočlánkům s indexem 1, a proto byl v jejich pozicích nárůst teploty větší než v případě termočlánků s indexem 2.

Ze čtveřice průběhů teplot z obrázku 2.5 byl úpravami, které budou popsány v kapitole 4,



Obrázek 2.5: Průběhy teplot.

vytvořen jeden vzor v trénovací množině neuronové sítě, přičemž pomocí dvourozměrného modelu vedení tepla byl vytvořen velký počet těchto vzorů pro různé provozní podmínky. Je důležité poznamenat, že vygenerované průběhy teplot byly před samotným trénováním neuronové sítě vhodně zašuměny tak, aby více odpovídaly reálným datům a aby výsledná neuronová síť byla více robustní. Způsob, jakým bylo zašumění provedeno, bude také popsán v kapitole 4.

Modelem vytvořené průběhy teplot byly porovnávány s průběhy získanými z reálných dat zachycujících hot spot, přičemž bylo ověřeno, že modelované výsledky korespondují s naměřenými daty. Kontrolována byla především podobnost ve velikosti nárůstu teploty vlivem hot spotu, rychlost tohoto nárůstu a rychlost poklesu.

3. Neuronové sítě

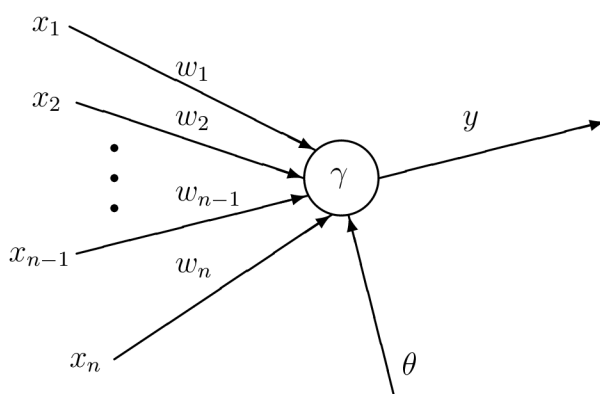
Jak bylo uvedeno v kapitole 1, úkolem protiprůvalového systému je na základě průběhů teplot z termočlánků zabudovaných v krystalizátoru vyhodnotit, zda došlo ke vzniku hot spotu a zda tedy hrozí, že nastane průval. Ovšem určit přímý vztah mezi výskytem hot spotu a průběhem teplot v termočláncích je obtížný úkol. V předchozí kapitole sice byly pro zadané provozní podmínky a parametry hot spotu vygenerovány průběhy teplot simulující teplotu v termočláncích, ovšem řešit zpětnou úlohu, tedy na základě teplot v termočláncích určit tloušťku ztuhlé oceli v jednotlivých bodech povrchu předlitku, již tak jednoduché není. Proto bude protiprůvalový systém vytvářený v této práci realizován pomocí umělé neuronové sítě, která umožňuje modelovat složité úlohy, které nelze uspokojivě pospat algoritmem nebo matematicky formulovat [29].

Umělá neuronová síť je výpočetním modelem, který svou architekturou napodobuje neuronovou síť živých organismů, jejichž charakteristickým rysem je schopnost učit se ze zkušenosti a adaptovat. Toho je docíleno i u umělé neuronové sítě (dále jen neuronové sítě), která během svého trénování získává zkušenosti a adaptuje se tak na řešení příslušného problému. Typickými oblastmi použití neuronových sítí jsou úlohy klasifikace, rozpoznávání, predikce, aproximace složitých funkcí apod.

V této kapitole bude nejprve popsán základní prvek neuronové sítě, dále bude popsána její architektura a následně bude rozebrán způsob, jakým se neuronová síť učí.

3.1. Formální neuron

Základem matematického modelu neuronové sítě je formální neuron (dále jen neuron), který je znázorněn na obrázku 3.1 [30]. Neuron má n vstupů, které jsou analogií k dendritům - vstupním přenosovým částem biologických neuronů. Každý vstup x_i , $i = 1, 2, \dots, n$ je vynásoben váhou spojení w_i , přičemž váha spojení může být i záporná, což znamená, že dané spojení příslušný vstup tlumí. Kladné váhy naopak umožňují rozšíření vstupního signálu.



Obrázek 3.1: Formální neuron. Dle [30].

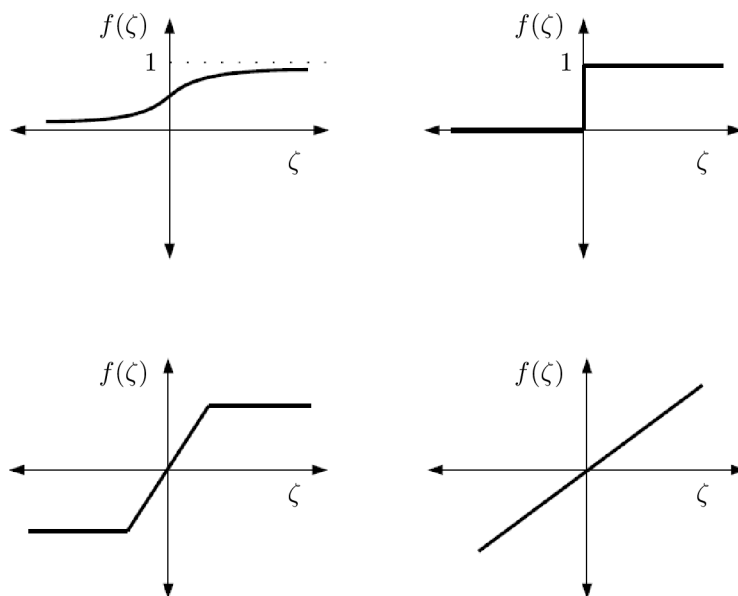
Výsledkem součtu všech vážených vstupů je tzv. vnitřní potenciál neuronu γ [30]

$$\gamma = \sum_{i=1}^n w_i x_i. \quad (3.1)$$

Vnitřní potenciál neuronu společně s prahovou hodnotou θ pak určují hodnotu výstupu y vztahem

$$y = f\left(\sum_{i=1}^n w_i x_i + \theta\right), \quad (3.2)$$

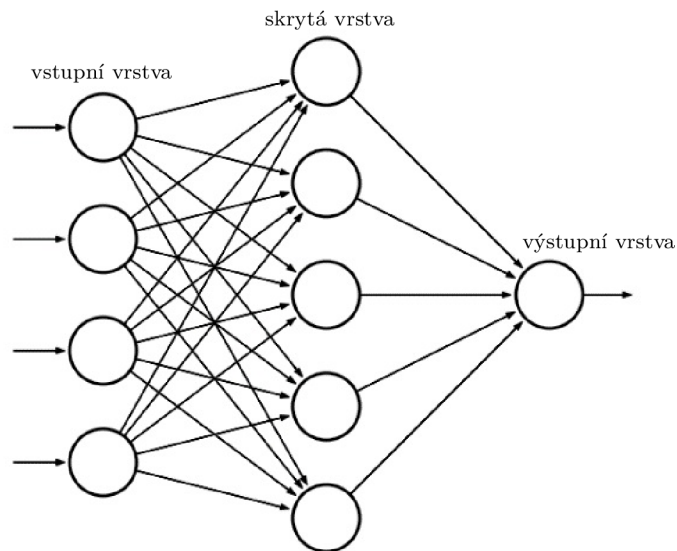
kde $f(\zeta)$ je tzv. aktivační/přenosová funkce, která převádí hodnotu ζ do daného vymezeného intervalu, nejčastěji do $\langle 0, 1 \rangle$ [29]. Nejpoužívanější aktivační funkce jsou na obrázku 3.2.



Obrázek 3.2: Používané aktivační funkce [29].

3.2. Architektura neuronové sítě

Neuronová síť je tvořena formálními neurony, které jsou navzájem propojeny, přičemž výstup jednoho neuronu je obecně vstupem více neuronů [30]. Propojení neuronů může být v podstatě libovolné, avšak v praxi se používají neuronové sítě vícevrstvé, ve kterých jsou neurony uspořádány do několika disjunktních vrstev, přičemž první vrstva se nazývá vstupní, poslední vrstva je výstupní a vrstvy mezi vstupní a výstupní vrstvou se nazývají jako skryté nebo též pracovní [9, 30]. Toto uspořádání má opět svůj předobraz v biologii: vstupní vrstva je analogií k receptorům, tedy sensorům umožňujícím přijímat



Obrázek 3.3: Neuronová síť s jednou skrytou vrstvou [1].

různé druhy podnětů, zatímco výstupní vrstva zase odpovídá příslušným orgánům, které na podnět reagují. Skryté vrstvy pak odpovídají cestě mezi receptory a příslušnými výkonnými orgány. Neurony v rámci jedné vrstvy nejsou propojeny, ale každý neuron dané vrstvy je spojen s každým neuronem vrstvy následující (pokud vrstva existuje). Spojení mezi dvěma sousedními vrstvami lze tak popsat pomocí úplného bipartitního grafu [29]. Schematické naznačení neuronové sítě s jednou skrytou vrstvou je na obrázku 3.3.

Klíčem k tomu, aby neuronová síť správně plnila svou úlohu, je vhodná volba počtu skrytých vrstev sítě a také počtu jednotlivých neuronů. Pokud je řešená úloha značně komplexní a použitá neuronová síť je malá, pak výstupy ze sítě nemusí odpovídat výstupům požadovaným. Naopak při použití rozsáhlé sítě na jednoduchý problém může dojít k jejímu přeučení: síť sice dává správnou hodnotu výstupu pro natrénované vzory, ale nedokáže pro jiné vzory zobecnit získané znalosti.

Před aplikací neuronové sítě na řešení požadované úlohy je třeba ji pomocí dodaných vstupů a odpovídajících výstupů naučit, jak by se měla chovat - tento proces se nazývá fáze učení. Samotná aplikace neuronové sítě pro dodané vstupy bez známých výstupů se pak nazývá fáze predikce [28].

3.3. Učení neuronové sítě

Učení neuronové sítě lze rozdělit na tzv. učení bez učitele a učení s učitelem. V prvním případě při učení nejsou dodány požadované výstupy, a síť se tak učí tím, že organizuje tréninkové vstupy do shluků, a odhaluje tak jejich společné vlastnosti [30]. Naopak při tzv. učení s učitelem jsou kromě vstupů dodány i odpovídající požadované výstupy, a učení pak probíhá ve smyslu minimalizace rozdílu mezi výstupy požadovanými a výstupy získanými pomocí neuronové sítě. Z matematického hlediska lze učení neuronové sítě považovat za optimalizační úlohu, při které jsou hledány vhodné váhy jednotlivých spojení mezi neurony

tak, aby se výstupy sítě co nejvíce blížily výstupům požadovaným. V dalším textu bude popsáno, jak probíhá proces učení neuronové sítě s jednou skrytou vrstvou.

Na začátku fáze učení jsou náhodně vygenerovány hodnoty prahů jednotlivých neuronů a vah všech spojení mezi neurony, přičemž generované hodnoty jsou blízké nule. Následně je vybrán vzor z trénovací množiny, který je přiveden na vstupy neuronové sítě. Dopředným šířením pomocí vztahu (3.2) je vypočten odpovídající výstup sítě, který je obecně různý od požadovaného výstupu. Pomocí algoritmu nazývaného jako *zpětné šíření chyby* (*backpropagation*) jsou váhy upraveny tak, aby se mezi požadovaným a získaným výstupem rozdíl zmenšil. Tento proces je následně proveden pro všechny vzory z trénovací množiny. V okamžiku, kdy jsou využity všechny vzory, je ukončena jedna epocha. Epochy jsou opakovány, dokud neuronová síť nedosáhne požadovaného výkonu.

Otázkou zůstává, jak funguje algoritmus zpětného šíření chyby, pomocí něhož jsou váhy upravovány. Myšlenka tohoto algoritmu spočívá ve snaze minimalizovat chybu sítě vyjádřenou v závislosti na váhách spojení mezi jednotlivými neurony. Chybu sítě lze definovat vztahem [30]

$$E(\mathbf{w}) = \sum_p E_p(\mathbf{w}), \quad (3.3)$$

kde \mathbf{w} je vektor všech vah neuronové sítě a $E_p(\mathbf{w})$ je parciální chyba sítě vzhledem k p -tému vzoru z trénovací množiny, kterou lze definovat jako

$$E_p(\mathbf{w}) = \frac{1}{2} \sum_k (y_k - d_{k,p})^2. \quad (3.4)$$

Parciální chyba je tedy úměrná součtu čtverců odchylek výstupů sítě y_k od požadovaných výstupů $d_{k,p}$ pro p -tý vzor [30]. Hodnoty vah spojení mezi skrytou a výstupní vrstvou budou upraveny ve směru záporného gradientu chybové funkce podle vztahu

$$w_{jk}^{n+1} = w_{jk}^n - \eta \frac{\partial E}{\partial w_{jk}}, \quad (3.5)$$

kde w_{jk} je spojení mezi j -tým neuronem skryté vrstvy a k -tým neuronem výstupní vrstvy a $\eta \in (0, 1)$ je parametr zvaný jako rychlost učení. Samotnou derivaci $\frac{\partial E}{\partial w_{jk}}$ lze vyjádřit pomocí pravidel o derivaci součtu a složené funkce [30]

$$\frac{\partial E}{\partial w_{jk}} = \sum_p \frac{\partial E_p}{\partial w_{jk}}, \quad (3.6)$$

kde lze derivaci $\frac{\partial E_p}{\partial w_{jk}}$ vyjádřit jako

$$\frac{\partial E_p}{\partial w_{jk}} = \frac{\partial E_p}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial \gamma_k} \frac{\partial \gamma_k}{\partial w_{jk}}, \quad (3.7)$$

kde γ_k je vnitřní potenciál k -tého neuronu ve výstupní vrstvě. Za předpokladu, že aktivační funkcí tohoto neuronu je sigmoida daná vztahem

$$f(\zeta) = \frac{1}{1 + e^{-\zeta}} \quad (3.8)$$

a s využitím vztahu pro vnitřní potenciál neuronu (3.1) lze získat vztah pro derivaci $\frac{\partial E_p}{\partial w_{jk}}$ ve tvaru [27]

$$\frac{\partial E_p}{\partial w_{jk}} = (y_k - d_{k,p}) f \left(\sum_j w_{jk} y_j + \theta_k \right) \left(1 - f \left(\sum_j w_{jk} y_j + \theta_k \right) \right) y_j, \quad (3.9)$$

kde y_j je výstup j -tého neuronu skryté vrstvy. Vztah (3.10) lze kompaktněji zapsat ve tvaru

$$\frac{\partial E_p}{\partial w_{jk}} = (y_k - d_{k,p}) y_k (1 - y_k) y_j, \quad (3.10)$$

kde y_k je výstup k -tého neuronu výstupní vrstvy. Obdobně lze vyjádřit derivaci $\frac{\partial E_p}{\partial w_{ij}}$ parciální chyby podle váhy w_{ij} spojení mezi i -tým neuronem vstupní vrstvy a j -tým neuronem skryté vrstvy. Úskalím je však výpočet derivace $\frac{\partial E_p}{\partial y_j}$. Ta bude opět vyjádřena pomocí pravidla o derivaci složené funkce [30]

$$\frac{\partial E_p}{\partial y_j} = \sum_k \frac{\partial E_p}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial \gamma_k} \frac{\partial \gamma_k}{\partial y_j}. \quad (3.11)$$

Zbýlý postup je analogický jako postup pro váhy mezi skrytou a výstupní vrstvou.

Důležité je poznamenat, že chyba E byla minimalizována užitím gradientní metody, která slouží pouze k nalezení lokálního minima. Proto se v praxi používají jiné optimalizační algoritmy, které mají potenciál nalézt minimum globální.

V další kapitole bude popsána implementace neuronové sítě pro úlohu predikce průvalu a budou rozebrány dosažené výsledky.

4. Implementace a výsledky

V této kapitole bude popsáno, jak byla neuronová síť aplikována na úlohu predikce průvalu, bude popsána trénovací množina, architektura sítě a posléze budou prezentovány dosažené výsledky.

4.1. Trénovací množina

Problém, který bude neuronová síť řešit, by se dal charakterizovat jako úloha klasifikace. Pro zadaný vzor neuronová síť rozhodne, zda v jeho případě hrozí průval, nebo nikoli, a zařadí tak vzor do skupiny vzorů s hot spotem, nebo bez hot spotu.

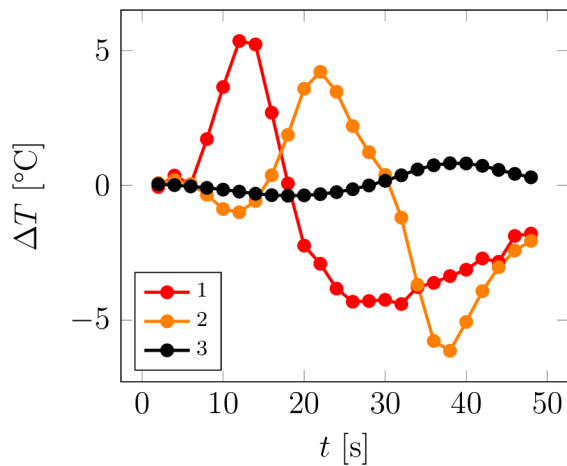
Důležitá je volba tvaru jednotlivých vzorů. Termočlánky neposkytují spojitý průběh teploty, ale pouze v čase diskrétní hodnoty, což je třeba zohlednit. Aby protiprůvalový systém mohl dostatečně přesně zachytit všechny výkyvy teplot, je třeba, aby byly teploty snímány pokud možno s co největší frekvencí. Vysoká frekvence ale znamená více vzorků, a při zvoleném přístupu by to i znamenalo vytvořit rozsáhlejší neuronovou síť. V této práci bude dále pracováno s předpokladem, že teploty jsou snímány s časovým intervalem 2 sekund. V případě generovaných dat tento předpoklad nepředstavuje problém, avšak data reálná, která byla snímána s intervalem minimálně 10 sekund, bylo třeba vhodně interpolovat.

Délka časového úseku, ze kterého jsou hodnoty z termočlánků brány, byla nastavena na 50 sekund, což je dostatečné k tomu, aby mohl být horními i dolními termočlánky zachycen průběh hot spotu. S přihlédnutím ke zvolené frekvenci snímání teplot lze tedy vyvodit, že bráno bude posledních 26 naměřených (případně vygenerovaných) teplot z příslušného termočlánku.

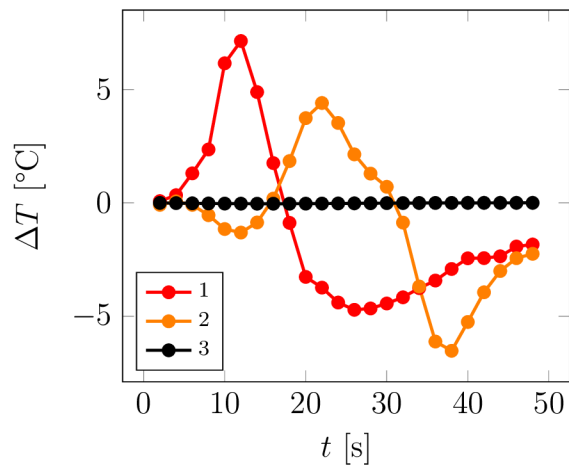
Neuronová síť nebude o existenci průvalu rozhodovat centrálně na základě teplot ze všech termočlánků zabudovaných v krystalizátoru, ale bude aplikována pro konkrétní skupiny termočlánků. Pokud bude alespoň v jedné skupině vyhodnoceno, že může dojít k průvalu, pak by měla být snížena licí rychlost. Jedna skupina bude tvořena 4 termočlánky: dvěma sousedními termočlánky v horní řadě a dvěma odpovídajícími termočlánky v řadě spodní. Protože na delší straně uvažovaného krystalizátoru je zabudováno 9 termočlánků v horní i spodní řadě, lze tak aplikovat neuronovou síť na 8 uvažovaných čtveřic. Na kratší straně jsou v horní i spodní řadě pouze 2 termočlánky, a tak lze neuronovou síť aplikovat pouze na 1 uvažovanou čtveřici.

Samotné časové řady teplot ze 4 uvažovaných termočlánků budou před použitím diferencovány. Význam tohoto kroku je ten, že samotná hladina teploty v termočláncích není pro vznik hot spotu rozhodující a důležité jsou naopak teplotní rozdíly mezi jednotlivými měřeními. Diferencovaná časová řada bude mít o jeden prvek méně než řada původní.

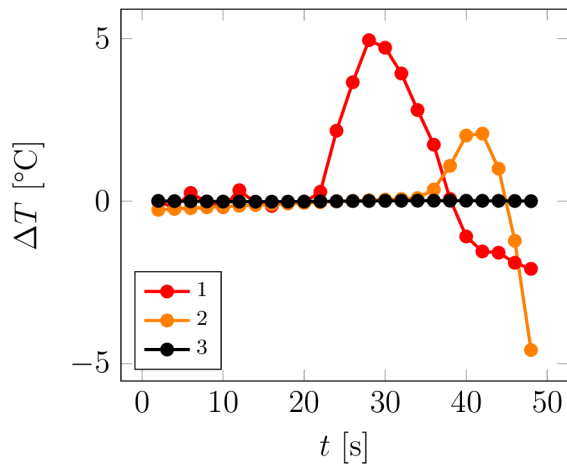
Shrnutím informací z výše uvedených odstavců lze vyvodit, že z každého termočlánku bude využito posledních 25 hodnot diferencované časové řady naměřených teplot. Jeden vzor v trénovací množině uvažované neuronové sítě pro 4 termočlánky pak bude tvořen 100 hodnotami. Důležité je poznamenat, že v případě generovaných dat byly příslušné časové řady zašuměny, aby více odpovídaly reálnému procesu.



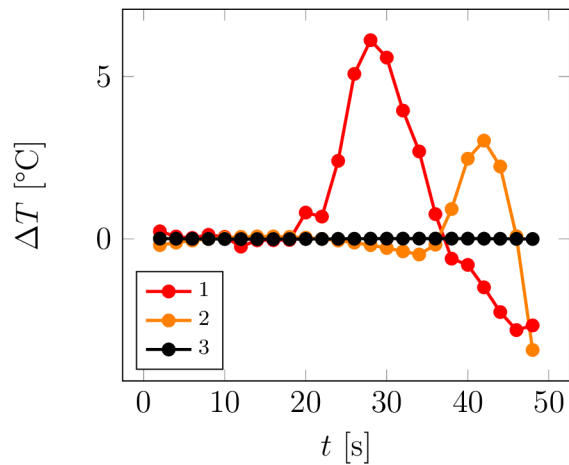
(a) Levý horní termočlánek



(b) Pravý horní termočlánek



(c) Levý dolní termočlánek



(d) Pravý dolní termočlánek

Obrázek 4.1: Ukázka typických vzorů v trénovací množině.

Zašumění bylo realizováno přičtením hodnoty vybrané z normálního rozdělení $N(0, \sigma)$ ke každé z 25 hodnot časové řady.

Ukázka typických vzorů je na obrázku 4.1, kde vzor 1 odpovídá hot spotu vygenerovanému pomocí 2D modelu vedení tepla, vzor 2 přísluší hot spotu získanému z reálných dat a vzor 3 je zástupce reálných dat bez hot spotu. Z uvedeného by se mohlo zdát, že rozlišit vzory s hot spotem, které jsou charakteristické vysokým nárůstem a následným poklesem hodnot diferencí, od vzorů bez hot spotu, které spíše lehce oscilují okolo nulové hodnoty, by bylo snadné. Avšak při odlévání dochází k různým teplotním výkyvům, díky čemuž mohou vzory vytvořené z reálných dat bez hot spotu často vypadat jako vzory s hot spotem.

Celá trénovací množina sestávala z 5000 vzorů vytvořených z reálných dat bez hot spotu, 5000 vzorů s hot spotem vygenerovaných pomocí 2D modelu a 7 vzorů s hot spotem z reálných dat. Faktem je, že v reálném procesu relativně často dochází k tomu, že termočlánek neměří správně a jeho měření by neměla být použita. V takovém případě je odpovídající časová řada nahrazena nulovou časovou řadou. V případě normálního lití vadný termočlánek nepředstavuje zásadní problém, avšak při vzniku hot spotu je validní informace z každého termočlátku důležitá. Vygenerovaná data proto obsahují značné množství vzorů, ve kterých je jeden z termočlávků simulován jako vadný, a síť by tak měla správně zareagovat i v tomto případě.

Důležité je poznamenat, že všechny vzory z trénovací množiny byly brány nebo vytvářeny za podmínky přibližně stálé lící rychlosti. To je rozumné omezení, neboť v případě změny lící rychlosti dochází ke složitým nestabilním podmínkám lití a reakce protiprůvalového systému nemusí být správná [12], proto byl systém vytvářen pouze na základě dat, kdy se lící rychlost příliš nemění.

4.2. Architektura sítě

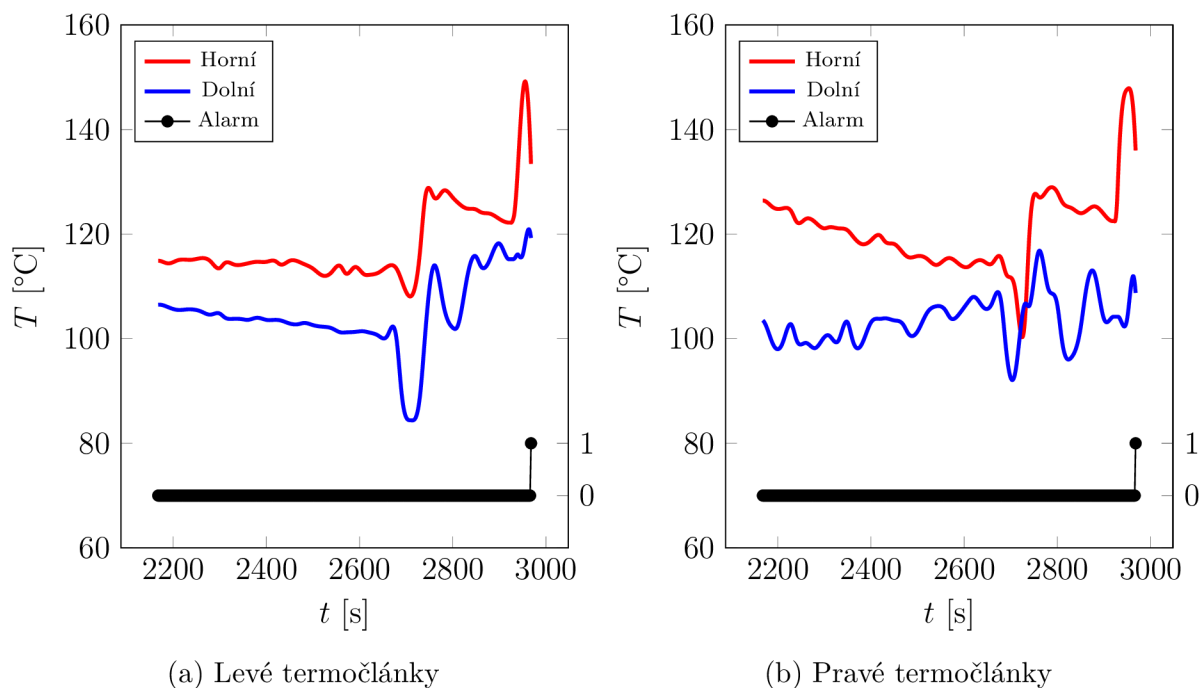
Pro realizaci neuronové sítě byly využity funkce z *Neural Network Toolboxu* z prostředí MATLAB ve verzi R2015a, ve kterém lze s neuronovými sítěmi efektivně a jednoduše pracovat. Funkce z toolboxu byly využity pro inicializaci sítě, její trénování a vizualizaci dosaženého výkonu a výsledků klasifikace.

Protože se 1 vzor z trénovací množiny skládá ze 100 hodnot, vstupní vrstva neuronové sítě byla tvořena 100 neurony. Počet neuronů ve skryté vrstvě byl vyladěn na 40, přičemž přenosovou funkcí neuronů ve skryté vrstvě byla sigmoida, viz vztah (3.8). Výstupní vrstva byla tvořena 2 neurony, výstup z prvního neuronu určoval stupeň příslušnosti daného vzoru do třídy vzorů bez hot spotu, zatímco výstup z druhého neuronu určoval stupeň příslušnosti vzoru do třídy s hot spotem.

Síť byla trénována pomocí funkce `trainlm`, která je založena na metodě zpětného šíření chyby, kde je pro optimalizaci použit algoritmus Levenberg-Marquardt, viz text [11]. Trénovací množina byla rozdělena na část trénovací, validační a testovací v poměrech 0,7:0,15:0,15. Trénovací část slouží k trénování sítě, zatímco validační část slouží k ověření, že trénování zlepšuje kvalitu výstupů sítě. Testovací část pak slouží k nezávislému ověření kvality výstupů sítě.

4.3. Výsledky

Natrénovaná síť správně klasifikovala všechny vzory z trénovací množiny s jedinou výjimkou: vzor, který příslušel situaci bez hot spotu, byl oklasifikován jako vzor s hot spotem. Protože bylo k dispozici velké množství reálných dat, ze kterých bylo možno vytvořit vzory patřící do skupiny bez hot spotu, byla síť dále testována pro 500 000 těchto vzorů. Úspěšnost sítě při této klasifikaci byla 99,9912 %, z uvedených 500 000 vzorů tedy síť klasifikovala chybně 44. Síť tedy s vysokou spolehlivostí rozeznává všechny drobné teplotní výkyvy a nuance od skutečného hot spotu.

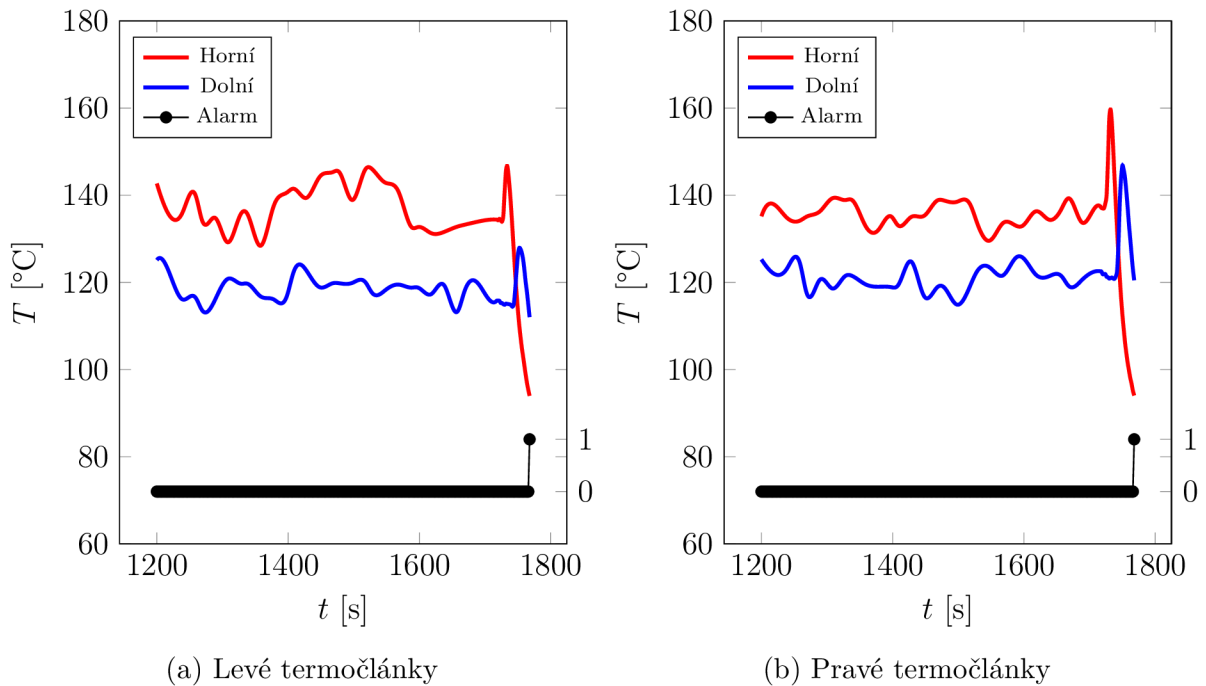


Obrázek 4.2: Průběh teplot a reakce neuronové sítě.

Na obrázku 4.2 je spojitě vyobrazen průběh teplot ze čtveřice termočlánků a odpovídající průběh výstupu neuronové sítě. Nulová hodnota výstupu neuronové sítě odpovídá situaci bez hot spotu, zatímco v případě, že je výstup roven jedné, síť detekovala nežádoucí situaci. Jak je vidět, neuronová síť zareaguje až ve chvíli, kdy je všemi čtyřmi termočlánky zachycen šířící se hot spot, což nastalo přibližně v čase 2950 s. Síť zareagovala na prudký nárůst a následný prudký pokles teploty. Naopak kolem času 2700 s jde vidět, že ačkoli došlo k prudkému nárůstu teplot, síť nezareagovala, protože průběhy teplot neměly dostatečně podobné parametry s průběhy při šíření hot spotu. Konkrétně nedošlo k příliš prudkému poklesu teplot v horní řadě termočlánků a i celkový průběh celého nárůstu byl pomalejší než v případě skutečného hot spotu. Kromě tohoto okamžiku síť dále ignorovala všechny větší či menší teplotní výkyvy, které jsou v reálném procesu zcela běžné.

Další situace je popsána na obrázku 4.3. Lze pozorovat, že opět docházelo k různým teplotním výkyvům, které byly neuronovou sítí správně ignorovány. Například v levém horním termočlánku teplota mezi časy 1300 s a 1500 s narostla o téměř 20 °C, avšak tento nárůst byl příliš pomalý a v ostatních termočláncích byl menší nebo zanedbatelný. Zachycený hot spot měl naopak typický průběh, kdy ve všech 4 termočláncích došlo k velmi rychlému zvýšení teploty a následnému poklesu vlivem tloušťky přilepené části kůry. Nárůst teplot v levých termočláncích nebyl příliš výrazný, ale s ohledem na situaci v pravých termočláncích neuronová síť klasifikaci provedla správně.

Průběhy teplot na obou uvedených obrázcích byly zachyceny za přibližně stálé lící rychlosti a stálých podmínek obecně, a i přesto hodnoty teplot z termočlánků během odlévání značně fluktovaly. Lze tedy usuzovat, že použití neuronové sítě pro predikci průvalu je vhodné, neboť situace, kdy je třeba od sebe rozlišit neškodný teplotní výkyv a hot spot, nastávají běžně, přičemž podobnost obou případů může být vysoká.

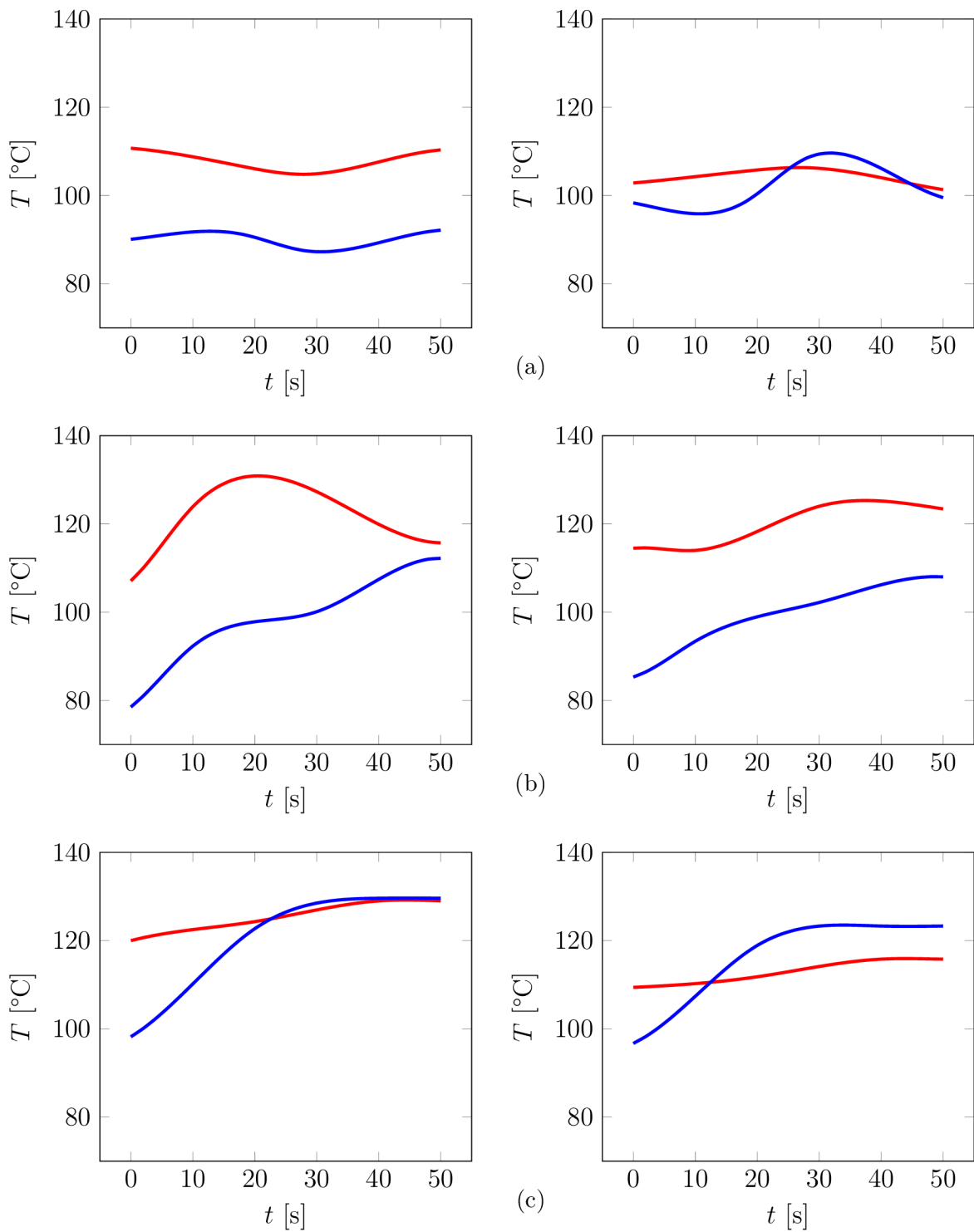


Obrázek 4.3: Průběh teplot a reakce neuronové sítě.

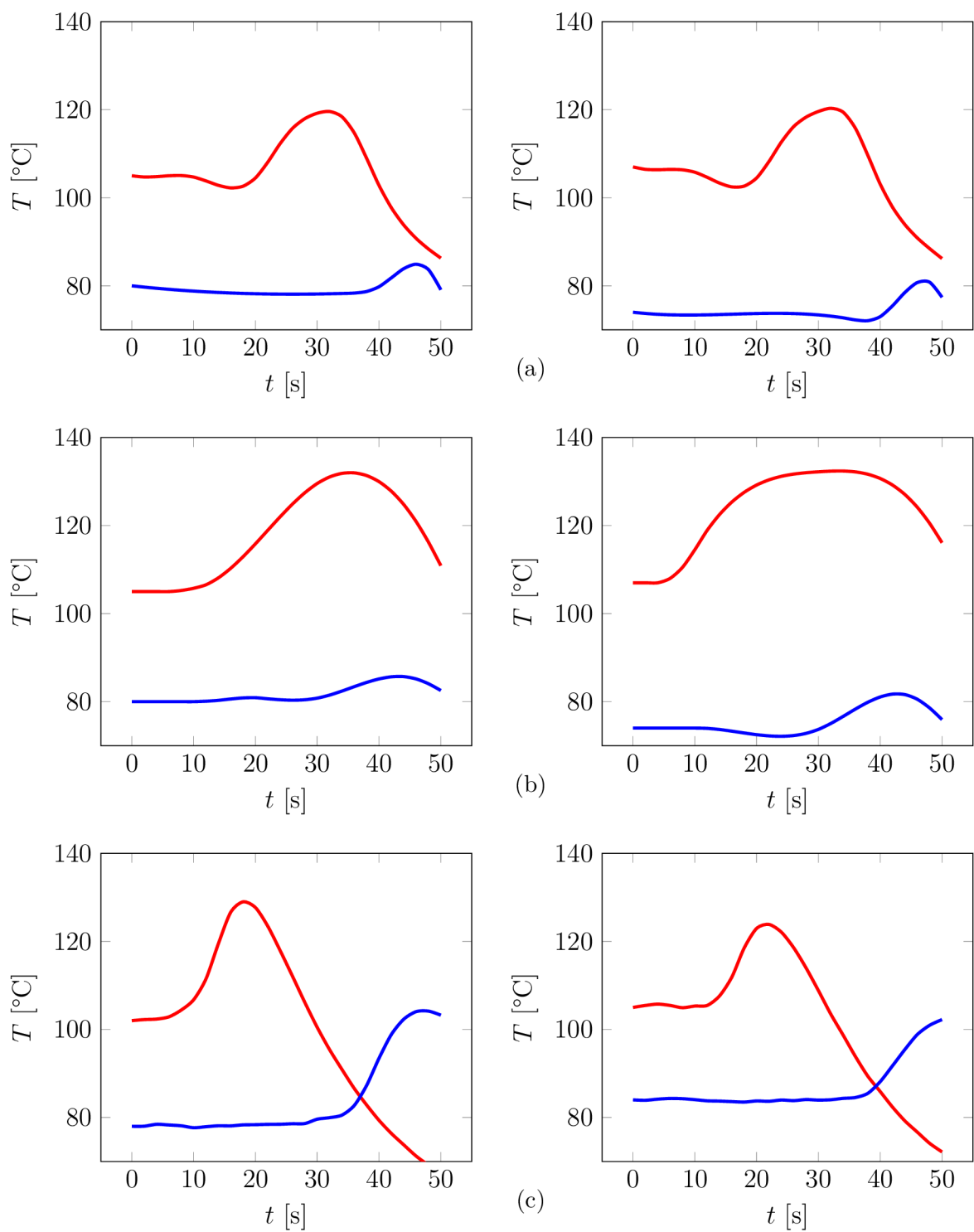
Na obrázcích 4.4 a 4.5 jsou spojitě vykresleny ukázky případů bez hot spotu, resp. případů s hot spotem, přičemž levý obrázek přísluší vždy levé dvojici termočlánků a pravý obrázek dvojici pravé, stejně jako v případě obrázků 4.2 a 4.3. Jak lze pozorovat např. z obrázku 4.4 c), běžně dochází k rychlým a poměrně vysokým nárůstům teplot, které mohou značit šířící se hot spot, avšak bez následného poklesu teplot vzor není klasifikován jako problematický. Na obrázku 4.4 b) sice v levém horním termočlánku došlo k vývoji teploty, který by mohl odpovídat hot spotu, avšak tento vývoj nastal pouze v jednom z termočlánků, a proto ani tento případ nebyl klasifikován jako problematický.

Jak již bylo vícekrát řečeno, případy odpovídající hot spotu jsou charakteristické rychlým nárůstem i poklesem teplot, což koresponduje s průběhy na obrázku 4.5, ze kterého lze ovšem také pozorovat, že se případy liší například rychlostí nebo velikostí nárůstu teplot, případně jejich poklesu. I z tohoto pohledu se neuronová síť jeví jako dobrý prostředek pro užití v protiprůvalovém systému, neboť je předurčena k tomu, aby na základě naučených vzorů detekovala i hot spoty s různě odlišnými parametry.

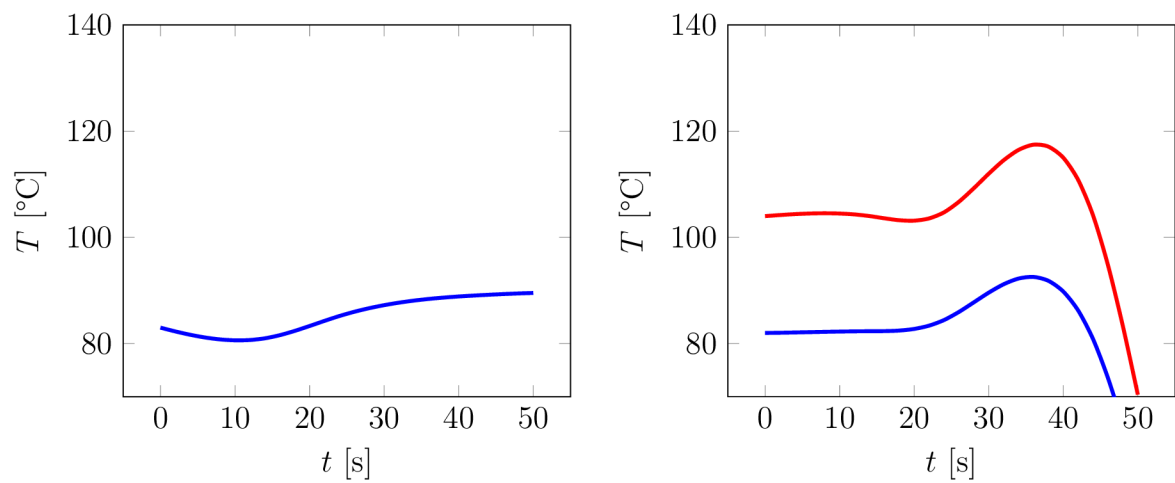
Na obrázku 4.6 je vyobrazen chybně klasifikovaný průběh teplot. Pravá dvojice termočlánků zaznamenala typický průběh teploty při hot spotu, avšak levým spodním termočlánkem byl zaznamenán pouze mírný a pozvolný nárůst teploty a levý horní termočlánek byl vyřazen z důvodu selhání. Síť klasifikovala tento případ jako rizikový a zařadila jej do třídy s hot spotem, ačkoli se jednalo o případ bez hot spotu.



Obrázek 4.4: Průběhy teplot odpovídající vzorům bez hot spotu.



Obrázek 4.5: Průběhy teplot odpovídající vzorům s hot spotem.



Obrázek 4.6: Chybně klasifikovaný průběh teplot.

5. Závěr

Cílem této práce bylo na základě reálných dat vytvořit protiprůvalový systém realizovaný pomocí neuronové sítě. Aby mohla být neuronová síť kvalitně natrénována a protiprůvalový systém tak mohl správně plnit svou úlohu, je třeba, aby trénovací množina obsahovala dostatečné množství kvalitních vzorů. Vzory příslušící k situacím bez hot spotu byly k dispozici v dostatečném množství, avšak počet vzorů popisujících hot spot byl pro správné natrénování sítě nedostatečný. Proto byly tyto vzory vhodně vygenerovány pomocí modelů vedení tepla stěnou krystalizátoru realizovaných v prostředí MATLAB. Jednorozměrný model vedení tepla sloužil k výpočtu hodnot parametrů figurujících v okrajové podmínce, které byly následně uplatněny ve dvourozměrném modelu vedení tepla, jehož účelem již bylo generování vhodných dat. Kromě vytváření dat do trénovací množiny neuronové sítě sloužily oba modely vedení tepla také k lepšímu pochopení souvislosti mezi hot spotem a průběhy teplot v termočláncích. Z hlediska trénování neuronové sítě by samozřejmě bylo lepší, pokud by byl k dispozici dostatek kvalitních reálných dat namísto toho, aby data byla uměle generována, avšak v praxi průval nenastává příliš často, a proto byl příslušných reálných dat nedostatek.

Samotná neuronová síť byla realizována opět pomocí prostředí MATLAB, nyní s využitím Neural Network Toolboxu. Řešený problém byl pro neuronovou síť v podstatě úlohou klasifikace, neboť ta měla za úkol pro daný vzor rozhodnout, zda přísluší do třídy vzorů s hot spotem nebo do třídy bez něj. Natrénovaná neuronová síť byla testována na velkém množství dodaných reálných dat, kde vykazala vysokou spolehlivost rozpoznávání, a proto lze usuzovat, že by samotný protiprůvalový systém byl úspěšný i v reálném procesu. Protože je ale samotný proces plynulého odlévání oceli značně komplexní, je otázkou, zda nemohou nastat netypické případy průvalu, které neuronová síť nezachytí. V takovém případě by však výhodou neuronové sítě byla možnost přidat tento netypický případ do trénovací množiny sítě, a síť by se tak v podstatě mohla stále učit z historie procesu a zdokonalovat se.

Seznam použité literatury

- [1] ASTROML [online] [cit. 2019-05-15] Dostupné z: http://www.astroml.org/book_figures/appendix/fig_neural_network.html.
- [2] BIRAT, J. P., et al. The Making, Shaping and Treating of Steel: Casting Volume: 11th. EDITION. ALAN W. CRAMB. Pittsburgh 2003, ISBN 0-930767-04-7.
- [3] BLAZEK, K. E. a Ismael G. SAUCEDO. Characterization of the Formation, Propagation and Recovery of Sticker/Hanger Type Breakouts, ISIJ International, Vol. 30, 1990.
- [4] BRANDIMARTE, Paolo. Numerical methods in finance and economics: a MATLAB-based introduction. 2nd ed. Hoboken, N.J.: Wiley Interscience, 2006. ISBN 978-0-471-74503-7.
- [5] CENGEL, Yunus A. Heat transfer: a practical approach. 2nd ed. Boston: McGraw-Hill, 2003. ISBN 9780072458930.
- [6] COMSOL [online] [cit. 2019-03-27] Dostupné z: <https://www.comsol.de/offers/continuous-casting-article>.
- [7] ČERMÁK, Libor a Rudolf HLAVIČKA. Numerické metody. Vydání třetí. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2016. ISBN 978-80-214-5437-8.
- [8] ČERMÁK, Libor. Numerické metody pro řešení diferenciálních rovnic. Brno: Litera Brno, 2013. ISBN 978-80-903586-7-6.
- [9] ČERMÁK, Petr. Umělá inteligence, Moravská vysoká škola Olomouc, o.p.s., 2018
- [10] FRANČŮ, Jan. Parciální diferenciální rovnice. 4., dopl. vyd. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2011. ISBN 978-80-214-4399-0.
- [11] HAGAN, M.T. a M. MENHAJ. Training feed-forward networks with the Marquardt algorithm. IEEE Transactions on Neural Networks, Vol. 5, No. 6, 1999, pp. 989–993, 1994
- [12] HE, F., et al. Development and Application of Mould Breakout Prediction System with Online Thermal Map for Steel Continuous Casting. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, Ironmaking & Steelmaking, 2015. ISSN 0301-9233.
- [13] HE, F. a Lingying ZHANG. Mold Breakout Prediction in Slab Continuous Casting Based on Combined Method of GA-BP Neural Network and Logic Rules. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2018. ISSN 1662-8985.
- [14] HIBBELER, L.C., et al. A reduced-order model of mould heat transfer in the continuous casting of steel, Applied Mathematical Modelling (2016), <http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2016.04.002>

- [15] HIBBELER, L.C., et al. Calibration of thermal models of steel continuous casting molds. *Iron and Steel Technology* (2013). 10. 199-210.
- [16] HUIRONG, L., et al. The overview on Sticking Breakout Behavior for Thin Slab Continuous Casting. *Advanced Materials Research*, 2014. ISSN 1433-3015.
- [17] INCROPERA, Frank P. a David P. DEWITT. *Fundamentals of heat and mass transfer*. 6th ed. New York: J. Wiley, 2007. ISBN 0471386502.
- [18] IRVING, W.R. *Continuous Casting of Steel*. United Kingdom: Maney Publishing, 1993. ISBN 0901716537.
- [19] KLAPKA, Jindřich. *Metody operačního výzkumu*. Vyd. 2. Brno: VUTIUM, 2001. ISBN 8021418397.
- [20] KLIMEŠ, Lubomír. *Optimalizace parametrů sekundárního chlazení plynulého odlévání oceli: Optimization of secondary cooling parameters of continuous steel casting: zkrácená verze Ph.D. Thesis*. Vysoké učení technické v Brně, 2014. ISBN 978-80-214-5114-8.
- [21] MAUDER, Tomáš. *Optimalizace bramového plynulého odlévání oceli za pomoci numerického modelu teplotního pole: Optimization of slab concasting via numerical model of temperature field: zkrácená verze Ph.D. Thesis*. Vysoké učení technické v Brně, 2012. ISBN 978-80-214-4592-5.
- [22] MINKOWYCZ, W. J., E. M. SPARROW a Jayathi MURTHY. *Handbook of numerical heat transfer*. 2nd ed. Hoboken, N.J.: J. Wiley, 2006. ISBN 9780471348788.
- [23] MOLER, C.B. *Numerical Computing with MATLAB*, Siam, Philadelphia, 2004. <http://www.mathworks.com/moler>.
- [24] NPTEL [online] [cit. 2019-05-03] Dostupné z: https://nptel.ac.in/courses/113104059/lecture33/33_4.htm.
- [25] PAVELEK, Milan. *Termomechanika*. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2011. ISBN 978-80-214-4300-6.
- [26] QIAN, H., et al. Recovery Mechanism of Sticking-Type Breakout during Continuous Casting of Steel. *Ironmaking & Steelmaking*, 2017. ISSN 0301-9233.
- [27] RASHID, Tariq. *Make Your Own Neural Network*. 1st ed. CreateSpace Independent Publishing Platform, USA. 2016.
- [28] SHI, Guangren. *Data mining and knowledge discovery for geoscientists*. Boston: Elsevier, 2014. ISBN 9780124104372.
- [29] ŠEDA, Jan. *Algoritmické obchodování na burze s využitím umělých neuronových sítí*. Brno, 2016. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta informačních technologií. Vedoucí práce Szoke Igor.

- [30] ŠÍMA, Jiří. Teoretické otázky neuronových sítí. Praha: Matfyzpress, 1996, ISBN 80-85863-18-9.
- [31] ŠTĚTINA, Josef. Dynamický model teplotního pole plynule odlévané bramy: dizertační práce. Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava, Fakulta metalurgie a materiálového inženýrství, 2007.
- [32] ŠTĚTINA, Josef. Simulační modely pro optimalizaci a řízení plynulého odlévání oceli: Simulation models for optimization and control of the steel continuous casting: teze přednášky k profesorskému jmenovacímu řízení v oboru Konstrukční a procesní inženýrství. Brno: VUTIUUM, 2015. ISBN 978-80-214-5267-1.
- [33] THOMAS, J. W. Numerical partial differential equations. New York: Springer, 1999. ISBN 0-387-97999-9.
- [34] ZHANG, Ben-guo, et al. Breakout Prediction Based on BP Neural Network of LM Algorithm in Continuous Casting Process. International Conference on Measuring Technology and Mechatronics Automation, 2010.

Seznam použitých zkratek a symbolů

Symbol	Jednotka	Veličina
c	$\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$	měrná tepelná kapacita
d_{oc}	m	tloušťka vrstvy ztuhlé oceli
e	$\text{J} \cdot \text{m}^{-3}$	hustota vnitřní energie
f	$\text{J} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$	hustota vnitřních zdrojů
f_2	-	zlomek podílu tuhé fáze (fáze 2)
E	-	chyba neuronové sítě
E	J	vnitřní energie
E_p	-	parciální chyba neuronové sítě
h_t	s	časový diskretizační krok
h_x	m	prostorový diskretizační krok ve směru osy x
h_y	m	prostorový diskretizační krok ve směru osy y
i, j, k, n	-	indexy
k	$\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$	tepelná vodivost
k_{oc}	$\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$	tepelná vodivost ztuhlé oceli
L_f	$\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}$	latentní teplo fázové přeměny
ℓ_x	m	délka intervalu ve směru osy x
ℓ_y	m	délka intervalu ve směru osy y
m	kg	hmotnost
\dot{q}	$\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$	měrný tepelný tok
Q_f	J	teplo dodané vnitřními zdroji
Q_S	J	teplo přivedené do kontrolního objemu
R	$\text{m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{W}^{-1}$	tepelný odpor
R_m	$\text{m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{W}^{-1}$	tepelný odpor mezi předlitkem a krystalizátorem
R_{pr1}	$\text{m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{W}^{-1}$	tepelný odpor tekutého licího prášku
R_{pr2}	$\text{m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{W}^{-1}$	tepelný odpor ztuhlého licího prášku
R_{vz}	$\text{m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{W}^{-1}$	tepelný odpor vzduchové mezery
t	s	čas
T	K, °C	teplota
T_0	K, °C	počáteční teplota
T_∞	K, °C	teplota okolí
T_{sol}	K, °C	teplota solidu
T_{tc}	K, °C	vypočtená teplota v místě termočlánku
T_{tc}^*	K, °C	teplota naměřená termočlánkem

Symbol	Jednotka	Veličina
T_v	K, °C	teplota chladicí vody
T_Γ	K, °C	předepsaná teplota na hranici Γ
V	m^3	objem
v_c	$\text{m} \cdot \text{min}^{-1}$	licí rychlost
w_{ij}, w_{jk}	-	váhy spojení mezi neurony
x	m	souřadnice kartézského systému
y	m	souřadnice kartézského systému
z	m	souřadnice kartézského systému
α	$\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$	součinitel přestupu tepla
γ	-	vnitřní potenciál neuronu
ε	-	emisivita povrchu
η	-	rychlost učení
θ	-	prahová hodnota
ρ	$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$	hustota
σ	$\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$	Stefanova-Boltzmannova konstanta
τ	s	délka časového intervalu

Seznam obrázků

1.1	Typy licích strojů	14
1.2	Zařízení pro plynulé odlévání oceli	15
1.3	Průřez částí krystalizátoru	16
1.4	Vznik a šíření hot spotu	18
1.5	Přilepená část skořepiny	18
1.6	Monitorování teplot	20
2.1	Stěna krystalizátoru	28
2.2	Průběh teplot	35
2.3	Část horizontálního řezu stěnou krystalizátoru	36
2.4	Naznačení průběhu teploty v horní rovině termočlánků	45
2.5	Průběhy teplot	46
3.1	Formální neuron	47
3.2	Používané aktivační funkce	48
3.3	Neuronová síť s jednou skrytou vrstvou	49
4.1	Ukázka typických vzorů v trénovací množině	54
4.2	Průběh teplot a reakce neuronové sítě 1	56
4.3	Průběh teplot a reakce neuronové sítě 2	57
4.4	Průběhy teplot bez hot spotu	58
4.5	Průběhy teplot s hot spotem	59
4.6	Chybně klasifikovaný průběh teplot	60
B.1	Schematické naznačení pozic termočlánků	77

Seznam tabulek

A.1 Využitá reálná data	75
-----------------------------------	----

Seznam příloh

- A. Využitá reálná data
- B. Umístění termočlánků

A. Využitá reálná data

Dodaná reálná data byla poskytnuta z let 2010, 2011, 2014 a 2015 ve formátu .csv. Jeden soubor obsahuje záznam procesu obvykle o délce 0,5-1 hodiny. Zaznamenávané veličiny byly snímány nepravidelně v intervalech 10 nebo 20 sekund a sloužily k vypočtení některých dalších sledovaných veličin. Zaznamenávaných parametrů bylo přibližně 500, přičemž parametry využitá v této práci jsou uvedeny a popsány v níže uvedené tabulce.

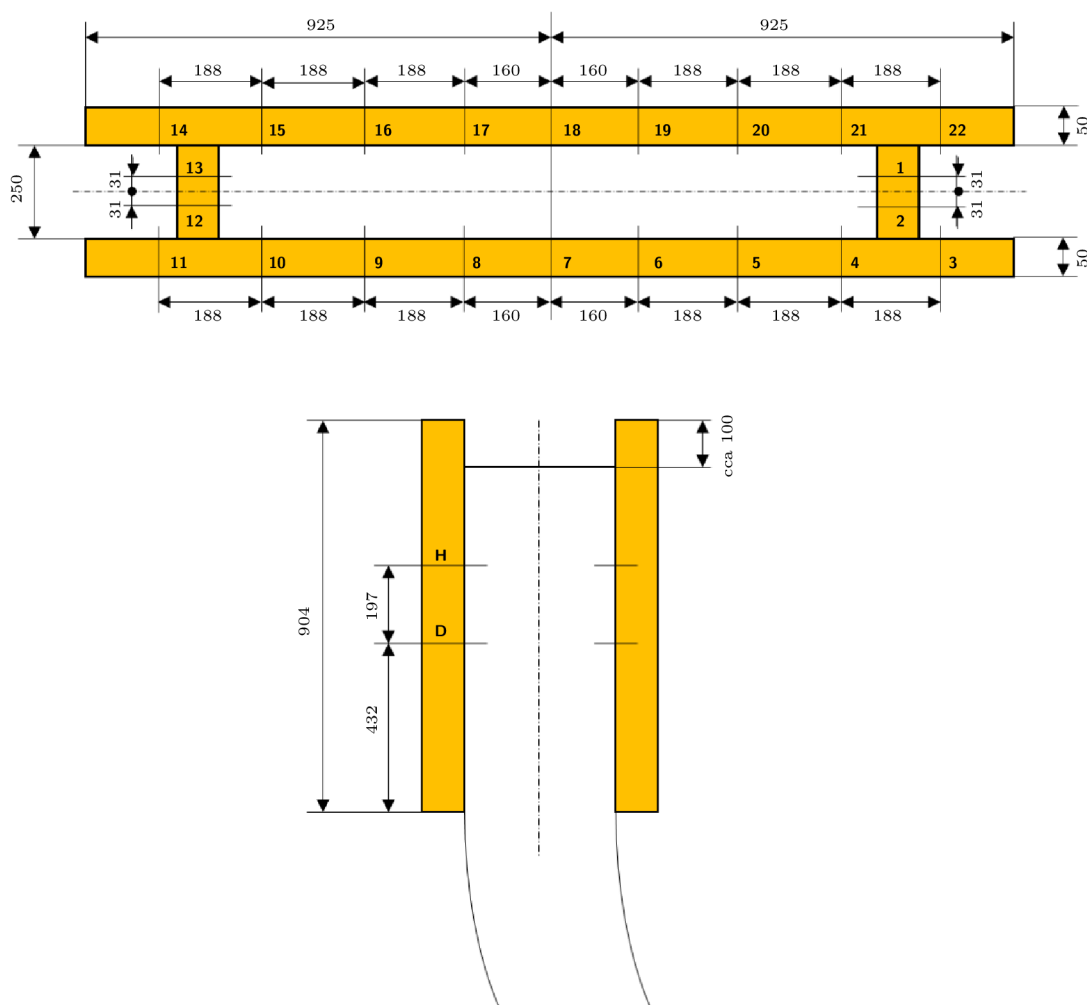
Tabulka A.1: Využitá reálná data

Označení	Popis
Cas	Čas, ve kterém byla data snímána
Hladina	Vzdálenost hladiny oceli od horní hrany krystalizátoru
T1H-T22H	Teploty z horní roviny termočlánků
T1D-T22D	Teploty z dolní roviny termočlánků
TvstupKr	Teplota chladicí vody na vstupu do krystalizátoru
TvysR	Teplota chladicí vody na výstupu ze strany velkého rádia
Tvysr	Teplota chladicí vody na výstupu ze strany malého rádia
TvysP	Teplota chladicí vody na výstupu z pravé strany
TvysL	Teplota chladicí vody na výstupu z levé strany
Průtok R	Průtok chladicí vody stranou velkého rádia
Průtok r	Průtok chladicí vody stranou malého rádia
Průtok pravá	Průtok chladicí vody pravou stranou
Průtok levá	Průtok chladicí vody levou stranou
Rychlost	Licí rychlost
W	Šířka bramy
H	Tloušťka bramy
Tsolidus	Teplota solidu odlévané oceli
QR	Tepelný tok stranou velkého rádia
Qr	Tepelný tok stranou malého rádia
QP	Tepelný tok pravou stranou
QL	Tepelný tok levou stranou
qm1R	Měrný tepelný tok stranou velkého rádia
qm2r	Měrný tepelný tok stranou malého rádia
qm1P	Měrný tepelný tok pravou stranou
qm2L	Měrný tepelný tok levou stranou
Qcelk	Celkový tepelný tok krystalizátorem

Označení	Popis
Kura0-H1	Tloušťka kůry ve středu strany malého rádia při spodní hraně krystalizátoru
Kura0-H2	Tloušťka kůry ve čtvrtině strany malého rádia při spodní hraně krystalizátoru
Kura0-H3	Tloušťka kůry v rohu strany malého rádia při spodní hraně krystalizátoru
Kura0-B1	Tloušťka kůry v rohu boční strany při spodní hraně krystalizátoru
Kura0-B2	Tloušťka kůry ve čtvrtině boční strany při spodní hraně krystalizátoru
Kura0-B3	Tloušťka kůry ve středu boční strany při spodní hraně krystalizátoru
Kura0-D3	Tloušťka kůry v rohu strany velkého rádia při spodní hraně krystalizátoru
Kura0-D2	Tloušťka kůry ve čtvrtině strany velkého rádia při spodní hraně krystalizátoru
Kura0-D1	Tloušťka kůry ve středu strany velkého rádia při spodní hraně krystalizátoru

B. Umístění termočlánků

Na obrázku B.1 jsou schematicky naznačeny pozice jednotlivých termočlánků, přičemž vzdálenost termočlánků od vnitřního povrchu desky je brána jako 16 mm. Pro některé odlévané formáty nemusí být v provozu všechny termočlánky. Kratší desky jsou výměnné, lze tak odlévat bramy o různé tloušťce. Obrázky jsou ilustrativní, nezachycují např. zakřivení krystalizátoru, nejsou v nich znázorněny kanály pro chladicí vodu apod.



Obrázek B.1: Schematické naznačení pozic termočlánků. Dle [31].