UNIVERZITA PALACKÉHO V OLOMOUCI
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

JANA ŠŤASTNÁ
IV. ročník – prezenční studium

Obor: Matematika a technická a informační výchova

POLOHOVÉ A METRICKÉ ÚLOHY V MONGEOVĚ PROMÍTÁNÍ NA STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH

Diplomová práce

Vedoucí: Mgr. Jitka Hodaňová, Ph.D.

OLOMOUC 2010

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně a použila jen uvedených pramenů a literatury.

V Kostelci na Hané dne 12. 4. 2010 ....

PODĚKOVÁNÍ

Děkuji Mgr. Jitce Hodaňové, Ph.D., za odborné vedení diplomové práce a poskytování rad, ale i učitelům středních škol, u nichž jsem prováděla výzkum.

Obsah

PRAKTICKÁ ČÁST 1

Úvod

„Princip zobrazování prostorových útvarů na rovinu se objevuje v celé historii civilizace a jejím umění. Půdorys a nárys znali již staroegyptští stavitelé. Přesto je však historie dnešní deskriptivní geometrie poměrně krátká. Za jejího zakladatele je všeobecně považován významný francouzský matematik Gaspard Monge.“ (4, s. 9)

„U nás se deskriptivní geometrie vyučovala nejprve na pražské, tehdy německé, polytechnické škole. A byla to právě deskriptivní geometrie, kterou studenti uslyšeli jako první českou přednášku vůbec. Bylo to r. 1862 a přednášejícím byl prof. Rudolf Skuherský.“ (4, s. 9)

„Už žáci na základní škole se učí zobrazovat jednoduchá tělesa ve volném rovnoběžném promítání. Chceme-li však zobrazit nějaký útvar, musíme tomuto intuitivnímu kreslení dát přesnější pravidla. Zobrazit prostorový objekt znamená přiřadit mu takový rovinný útvar, abychom při pohledu na tento obraz měli pokud možno stejný dojem, jako když se díváme přímo na jeho vzor. V geometrickém zobrazení si chceme zobrazením zachovat co nejvíce geometrických vlastností originálu. Jednou z nejjednodušších možností, jak získat přesný geometrický obraz, je promítání.“ (4, s. 12)

„Typickou ukázkou takového promítání jsou stavební plány a technické výkresy, které nejsou ničím jiným, než vhodně upravenými a pro odborníka snadno čitelnými průměty navrhovaných staveb a strojů.“ (4, s. 12)

„S rozvojem výpočetní techniky můžeme už v dnešní době řešit realizaci těchto návrhů také za pomocí různých počítačových programů.“ (4, s. 10)

Názornost geometrie a její využití v praxi nás přivedlo na myšlenku vybrat si geometrii jako téma pro diplomovou práci.

Z celé škály zobrazovacích metod jsme vybrali Mongeovu projekci, která umožňuje snadno si zpětně vymodelovat útvar v prostoru, neboť využívá promítání na dvě navzájem kolmé průmětny a z možného výběru se nám proto jeví jako nejnázornější.

V první části diplomové práce se věnujeme vlastnostem a zobrazování jednotlivých prvků, polohovým a metrickým úlohám a zobrazování vybraných těles. Celou tuto část diplomové práce doprovázíme konstrukcemi, které pomáhají při orientaci v textu a rozvíjejí prostorovou představivost. U zobrazování a popisu prvků uvádíme konstrukce nejen v rovině, ale také v prostoru. Všechny konstrukce jsme z důvodu ušetření místa zmenšili na 75 % původní velikosti.

Druhou částí diplomové práce je soubor ukázkových konstrukcí včetně jejich zadání a postupu řešení, jen jsme sestrojili pomocí vlastností a konstrukcí popsaných v první části diplomové práce. Všechny tyto konstrukce jsme ponechali v nezměněné – 100% velikosti.

Třetí částí diplomové práce je vlastní výzkum. Oslovili jsme několik vytypovaných škol, u nichž se vzhledem k jejich zaměření dalo očekávat, že budou vyučovat deskriptivní geometrii nebo předmět s podobným zaměřením. Přesto, že všechny námi oslovené školy nám vyšly ochotně vstříc, bylo velmi obtížné průzkum zrealizovat, neboť značná část těchto škol již deskriptivní geometrii nevyučuje. Přes všechny obtíže jsme nakonec výzkum zrealizovali na Střední průmyslové škole stavební v Lipníku nad Bečvou a na Slovanském gymnáziu v Olomouci.

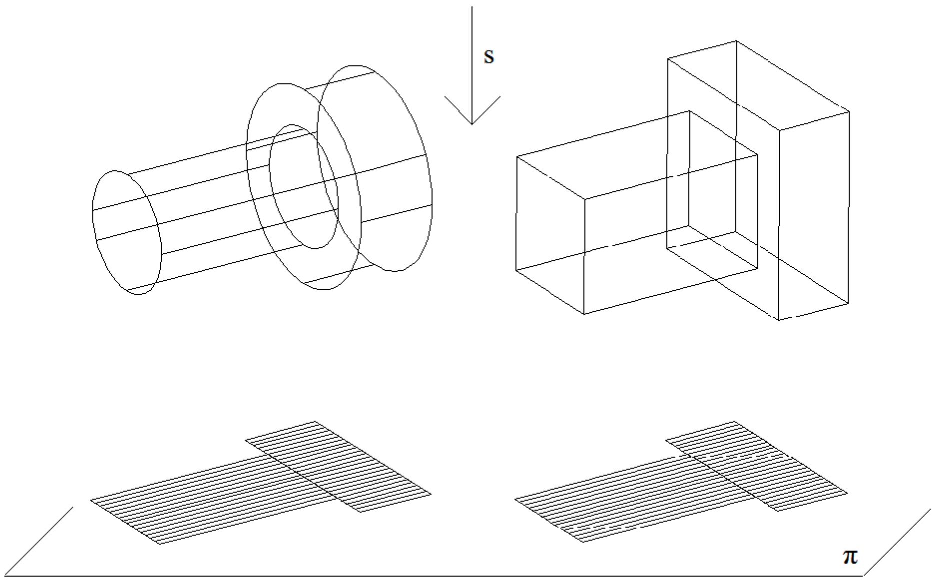
Konstrukce v celé diplomové práci jsme vytvářeli v programu AutoCad 2009.

TEORETICKÁ ČÁST

2. Vlastnosti promítání

„Rovnoběžné promítání na jednu průmětnu mám umožňuje zobrazit prostorový objekt na rovinu. Toto zobrazení není vzájemně jednoznačné, to znamená, že k obrazu (průmětu) objektu neumíme jednoznačně určit objekt v prostoru.“ (5, s. 20)

Obr. 2.1 – Dva odlišné objekty, jejichž rovnoběžné průměty jsou shodné



„Na předcházejícím obrázku jsou znázorněny dva zcela odlišné objekty, jejichž rovnoběžné průměty (průmětna π, směr promítání s) jsou shodné a neinformují dostatečně o tvaru objektu. V technické praxi potřebujeme vyrobit součástku na základě technického výkresu (průmětu). K dosažení jednoznačného přiřazení mezi body technického výkresu a body prostoru užijeme více průmětů a mluvíme pak o promítací metodě.“ (5, s. 20)

„V praxi nejběžnější zobrazovací metodou je pravoúhlé promítání na dvě vzájemně kolmé průmětny, nazývané podle svého autora Mongeovo promítání.“ (1, s. 29)

„Francouzský matematik Gaspar Monge, žijící v letech 1747 – 1818, je považován za zakladatele deskriptivní geometrie. Pravoúhlé promítání na dvě kolmé průmětny na jeho počest nazýváme Mongeovým promítáním. Tato zobrazovací metoda byla po třiceti letech utajování, kdy byla považována za součást vojenského tajemství, publikována až v r. 1799 v Mongeově knize Deskriptivní geometrie (Geometrie descriptive) i když je známo, že Monge o této zobrazovací metodě přednášel na vojenské škole již před rokem 1770. Mongeovo promítání se stalo nejpoužívanější zobrazovací metodou v technické praxi." (10, s. 110)

„Mongeovou metodou sdruženého půdorysného a nárysného průmětu lze poměrně snadno řešit rozmanité typy konstrukčních úloh, zejména metrických.

Tato relativní jednoduchost je ovšem často na úkor názornosti.

Zobrazení pomocí Mongeova promítání nachází užití v různých modifikacích především v technických oborech, kde je potřeba z průmětů prostorových objektů jednoduše zjistit jejich rozměry a případně další vzájemné vztahy." (2, s. 11)

3. Mongeovo promítání

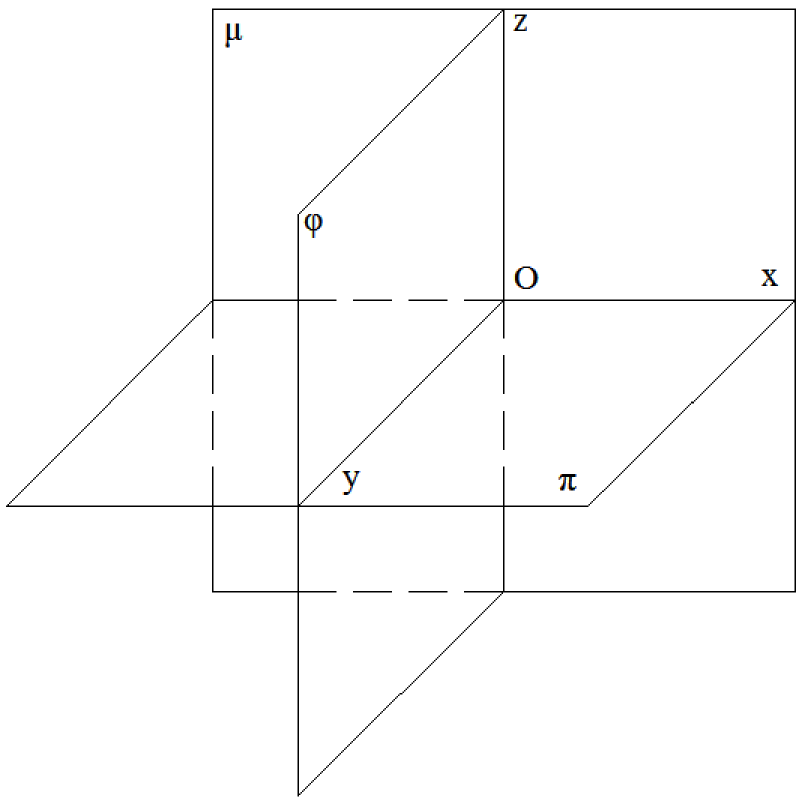
„Jsou dány dvě vzájemně kolmé roviny: **půdorysna π** a **nárysna ν** – hlavní průmětny. První průmětna, půdorysna π, je umístěna zpravidla vodorovně, druhá průmětna, nárysna ν, je pak průčelná. Kolmo k půdorysně π a nárysně ν, vedeme pomocnou třetí průmětnu, **bokorysnu ρ**. Společný bod všech tří průměten je počátek O souřadnicové soustavy, průsečnice první a druhé průmětny je osa x." (1, s. 29)

„Tuto osu nazveme **základnicí**." (3, s. 5)

„Osa y je průsečnice první a třetí průmětny, osa z je průsečnice druhé a třetí průmětny." (1, s. 29)

Pro orientaci os zavádíme pravotočivou souřadnicovou soustavu.

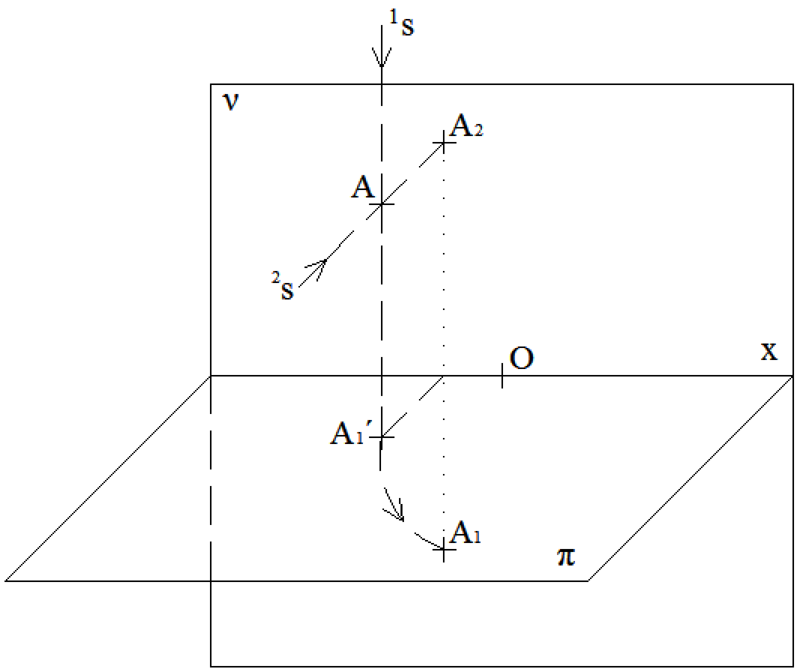
Obr. 3.1 – Zobrazení půdorysny π, nárysny ν, bokorysny ρ



„Z geometrického hlediska je zbytečné používat všechny tři hlavní průměty, neboť pro rekonstrukci promítnutých útvarů stačí dva z nich. My budeme používat průmět půdorysný a nárysný. Bokorysný průmět přidáme jen tehdy, když půjde o řešení problémů v rovině rovnoběžné s bokorysnou ρ." (4, s. 43)

„Obecný bod A prostoru zobrazíme tak, že jej nejprve pravoúhle promítneme do nárysny v (pomocí nárysně promítacího paprsku ${}^{2}s$), čímž dostaneme **nárysný průmět** bodu A – označíme ho A_2. Dále bod A pravoúhle promítneme do půdorysny π (půdorysně promítacím paprskem ${}^{1}s$) - obdržíme tím půdorysný průmět bodu A, který budeme označovat A_1'." (3, s. 5)

Obr. 3.2 – Zobrazení obecného bodu



„Abychom tuto prostorovou situaci zobrazili v rovině, sdružíme obě průmětny tak, že otočíme půdorysnu π kolem základnice x do nárysny v. Bod A_1' se přitom otočí do polohy A_1. Bod A_1 budeme nazývat **půdorysný průmět** bodu A.

Bod A jsme tak zobrazili do dvojice sdružených průmětů A_1, A_2.

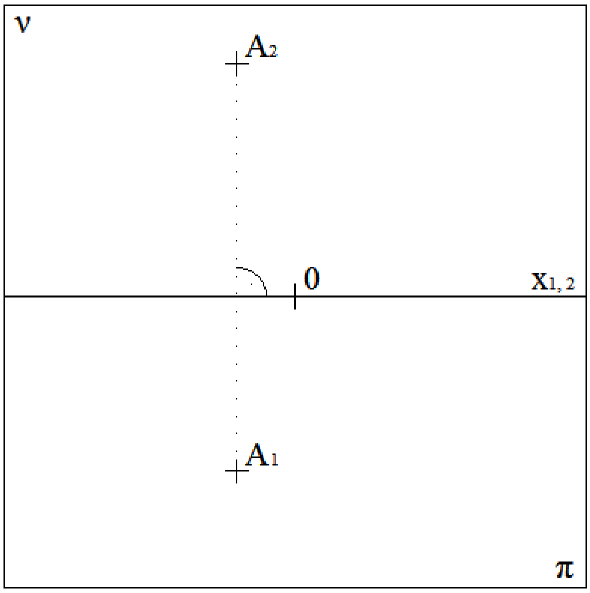
Spojnici A_1A_2 říkáme **ordinála**." (3, s. 5)

„Rovinu, do které zakreslujeme danou prostorovou situaci (sešit, tabule), nazýváme **nákresna.** V praxi ji obvykle ztotožňujeme s nárysnou v.

Je zřejmé, že pro základnici x platí $x = x_1 = x_2$, což budeme zapisovat $\boldsymbol{x_{1,2}}$." (3, s. 5)

„Počátek O souřadnicové soustavy v nákresně označujeme 0." (3, s. 6)

Obr. 3.3 – Zobrazení sdružených průmětů obecného bodu

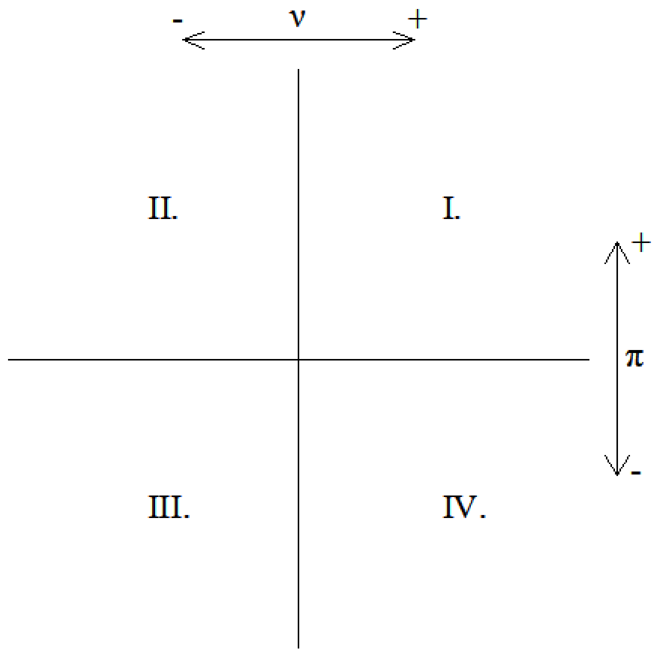


3.1 Zobrazení bodu

❖ **Rozdělen prostoru na kvadranty**

„Obě k sobě kolmé průmětny, půdorysna *π* a nárysna *ν*, dělí prostor na čtyři kvadranty (I. – IV.). Podle znamének souřadnic bodů jsme schopni okamžitě určit, ve kterém kvadrantu se daný bod nachází.“ (3, s. 6)

Obr. 3.4 – Rozdělení prostoru na kvadranty



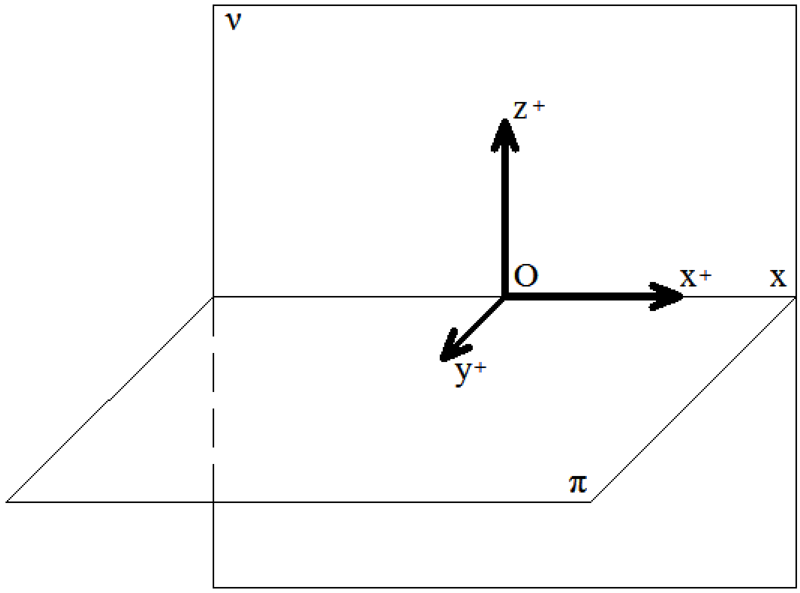
❖ **Umístění souřadnicového systému v prostoru**

„Kartézský souřadnicový systém (osy *x, y, z* navzájem k sobě kolmé) umístíme tak, že osa *x* splývá se základnicí $x_{1,2}$, osa *y* leží v půdorysně *π* a osa *z* leží v nárysně *ν*.

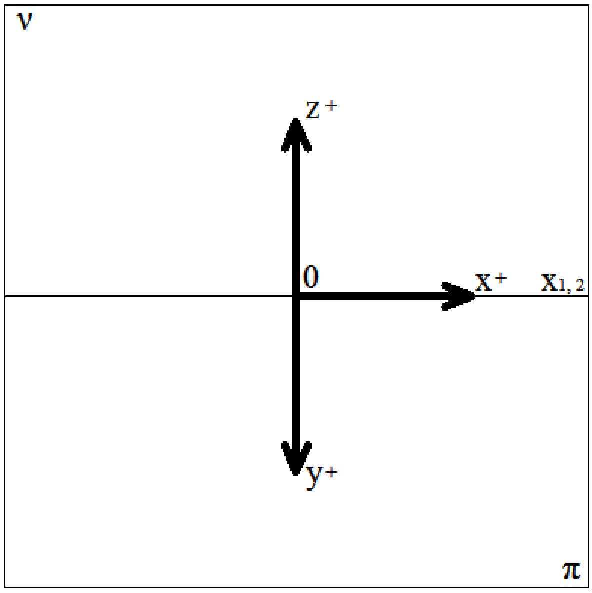
Kladnou polorovinou půdorysny *π* rozumíme polorovinu, v níž je poloosa *y* kladná. Za kladnou polorovinu nárysny *ν* prohlásíme polorovinu s kladnou poloosou *z*.

Při sdružování průměten otáčíme půdorysnu *π* tak, aby její záporná polorovina splynula s kladnou polorovinou nárysny *ν*.“ (3, s. 6)

Obr. 3.5 – Umístění souřadnicového systému v prostoru



Obr. 3.6 – Umístění souřadnicového systému v nákresně

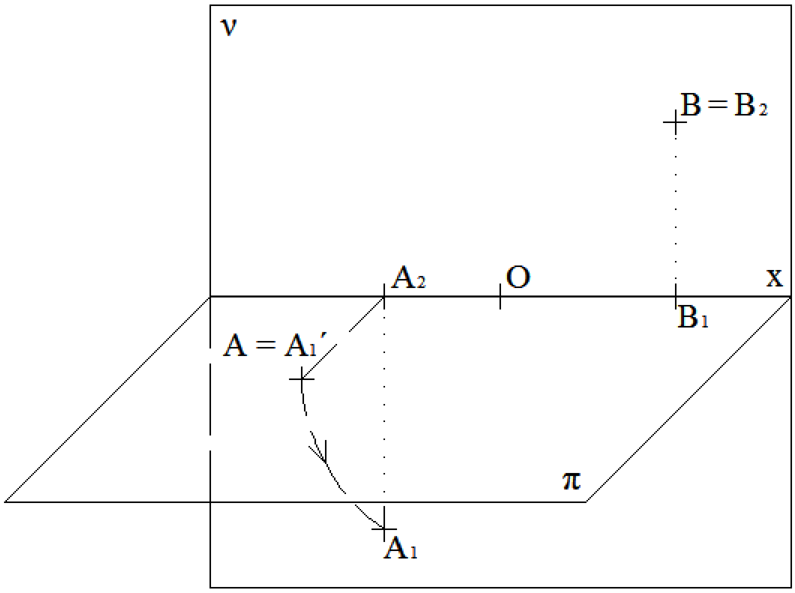


3.1.1 Zobrazení bodů, které leží v průmětně

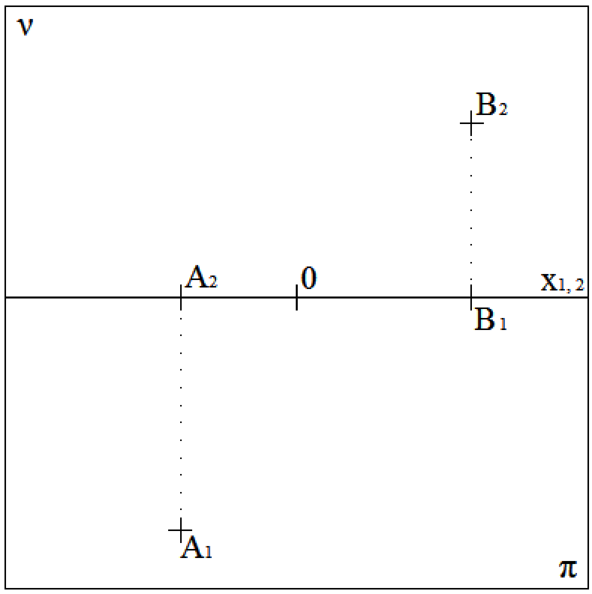
„Pokud bod A leží v půdorysně π, je zřejmé, že jeho nárysný průmět A_2 musí ležet na základnici $x_{1,2}$.

Naopak, leží-li bod B v nárysně ν, leží půdorysný průmět B_1 na základnici $x_{1,2}$." (3, s. 6)

Obr. 3.7 – Body *A, B,* které leží v průmětnách



Obr. 3.8 – Sdružené průměty bodů *A, B,* které leží v průmětnách



3.1.2 Zobrazení bodů, které neleží v průmětně (půdorysně π a nárysně ν)

„Při zobrazení bodů, které neleží v průmětně (půdorysně π a nárysně ν), je vhodné si uvědomit, že průmětny (půdorysna π a nárysna ν) dělí prostor na čtyři kvadranty.“ (13, s. 142)

„Průmětny (půdorysnu π a nárysnu ν) sdružujeme tak, aby kladná polorovina půdorysny π po otočení splynula se zápornou polorovinou nárysny ν. V nákresně volíme obvykle základnici $x_{1,2}$ vodorovnou a kladnou polorovinu nárysny ν nad základnicí $x_{1,2}$. Tím je však již v nákresně jednoznačně stanovena poloha obrazů všech čtyř polorovin průměten, tj. jejich orientace.“ (13, 142)

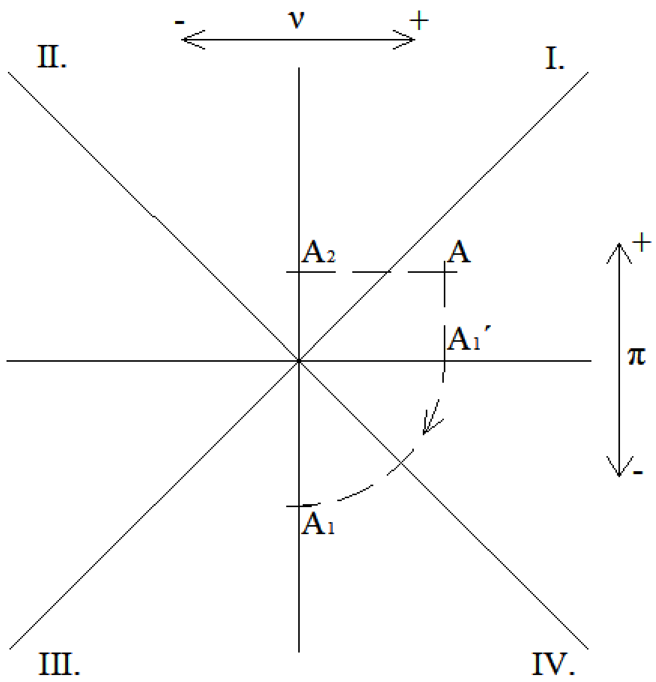
„Pro půdorysné průměty bodů je kladná polorovina pod základnicí $x_{1,2}$. Pro nárysné průměty bodů je kladná polorovina nad základnicí $x_{1,2}$. Pro půdorysné průměty bodů je záporná polorovina nad základnicí $x_{1,2}$. Pro nárysné průměty bodů je záporná polorovina pod základnicí $x_{1,2}$.“ (13, s. 142)

„Protože při otáčení půdorysny π do nárysny ν se vzdálenosti zachovávají, můžeme vyslovit důležitou větu, která udává souvislost mezi polohou bodu k průmětnám a polohou jeho sdružených průmětů k základnici $x_{1,2}$: Orientovaná vzdálenost půdorysného průmětu bodu od základnice $x_{1,2}$ se rovná orientované vzdálenosti bodu od nárysny ν. Orientovaná vzdálenost nárysného průmětu bodu od základnice $x_{1,2}$ se rovná orientované vzdálenosti bodu od půdorysny π.“ (13, s. 142)

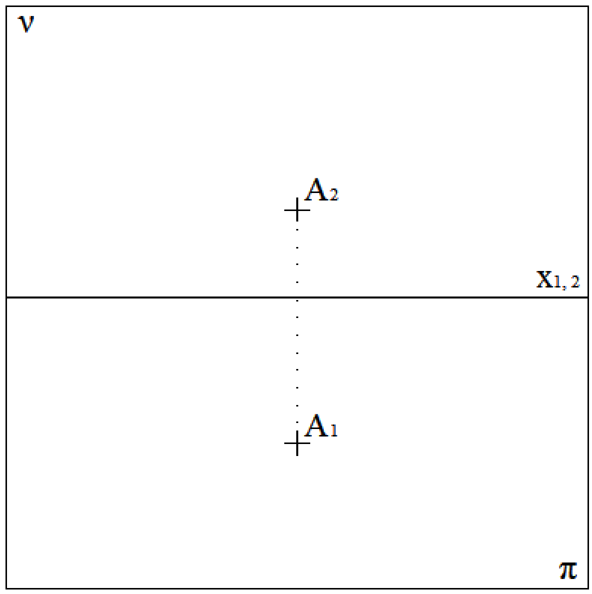
„Poloha bodu v jednotlivých kvadrantech je tedy přímo charakterizována polohou dvojice jeho sdružených průmětů vzhledem k základnici $x_{1,2}$:

- bod A leží v I. kvadrantu právě tehdy, když je A_1 pod základnicí $x_{1,2}$, A_2 nad základnicí $x_{1,2}$,
- bod B leží v II. kvadrantu právě tehdy, když jsou B_1 i B_2 nad základnicí $x_{1,2}$,
- bod C leží v III. kvadrantu právě tehdy, když je C_1 nad základnicí $x_{1,2}$ a C_2 pod základnicí $x_{1,2}$,
- bod D leží v IV. kvadrantu právě tehdy, když jsou D_1 i D_2 pod základnicí $x_{1,2}$.“ (13, s. 142)

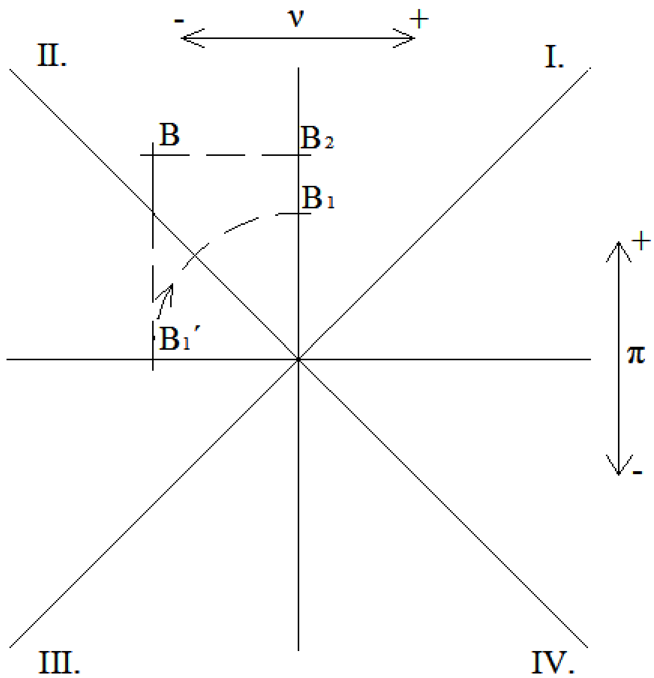
Obr. 3.9 – Bod *A*, který leží v I. kvadrantu



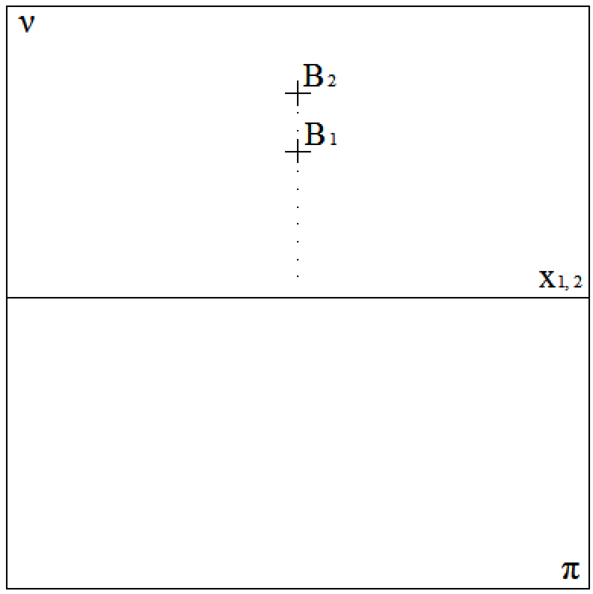
Obr. 3.10 – Sdružené průměty bodu *A*, který leží v I. kvadrantu



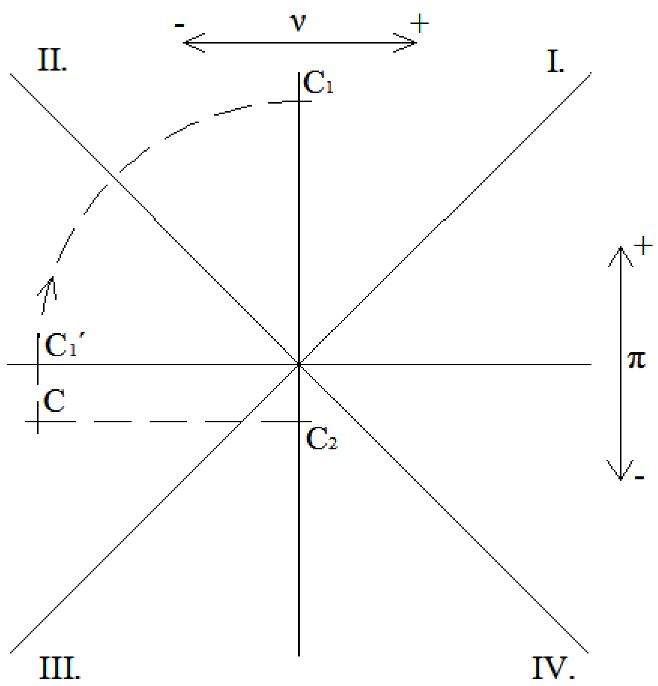
Obr. 3.11 – Bod *B*, který ležící v II. kvadrantu



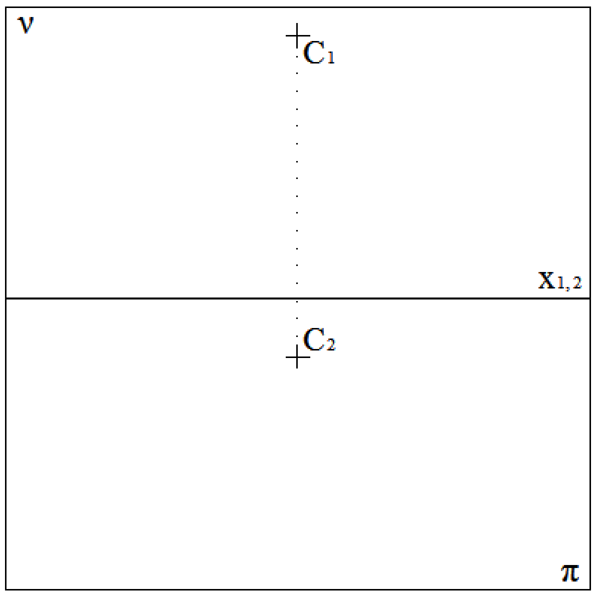
Obr. 3.12 – Sdružené průměty bodu *B*, který leží v II. kvadrantu



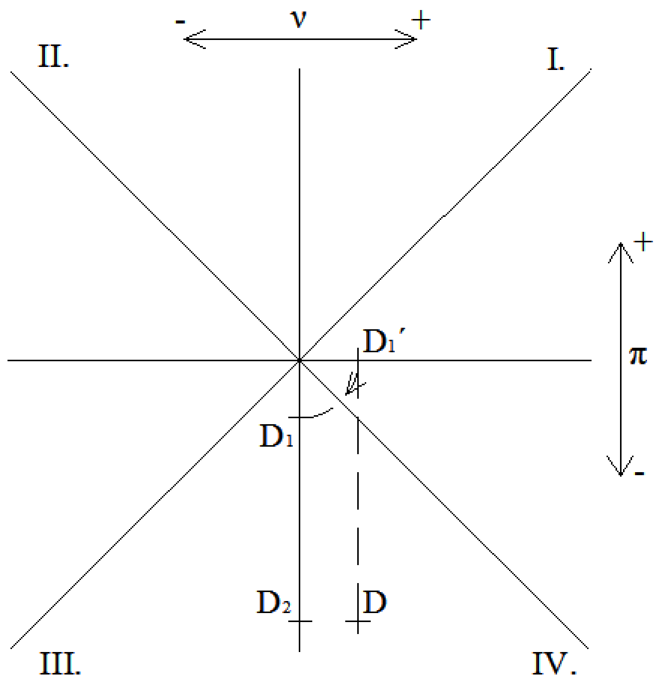
Obr. 3.13 – Bod *C*, který leží v III. kvadrantu



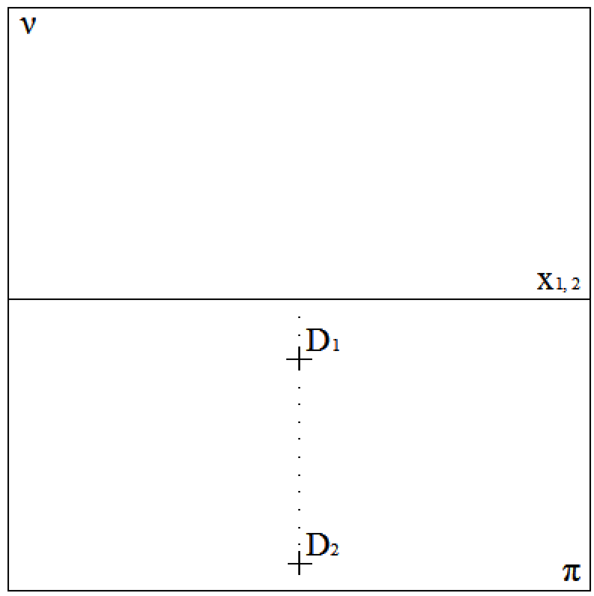
Obr. 3.14 – Sdružené průměty bodu *C*, který leží v III. kvadrantu



Obr. 3.15 – Bod *D*, který leží ve IV. kvadrantu

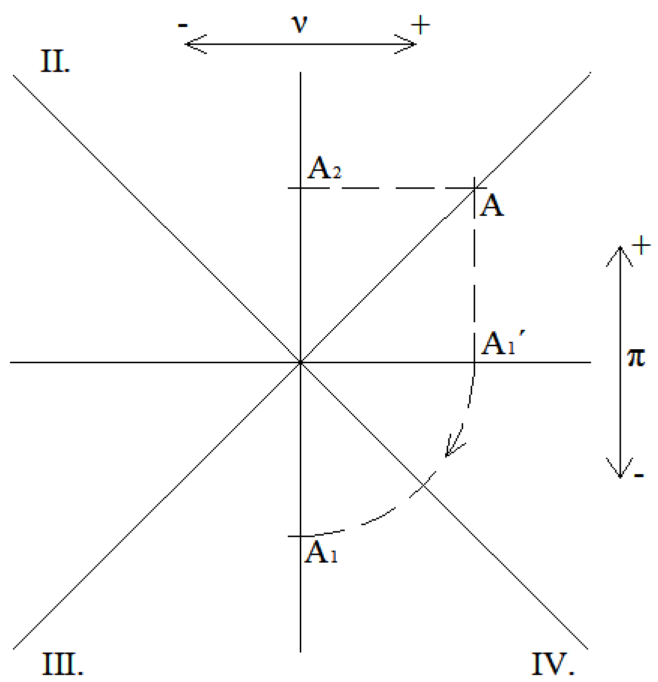


Obr. 3.16 – Sdružené průměty bodu *D*, který leží ve IV. kvadrantu

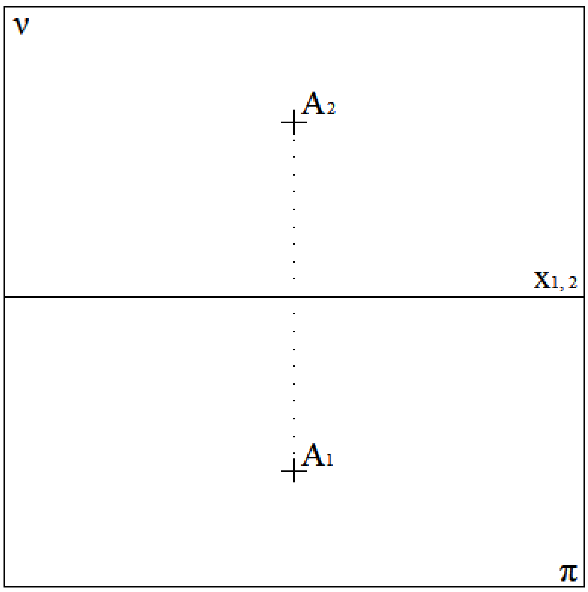


„Zvláštní pozornost věnujeme bodům, které mají stejnou y-ovou a z-ovou souřadnici. Tyto body vyplní tzv. **rovinu souměrnosti** $\boldsymbol{\sigma}$, která půlí *I.* a *III.* kvadrant. Průměty těchto bodů jsou souměrné podle základnice $x_{1,2}$." (3, s. 7)

Obr. 3.17 - Bod *A*, který leží v rovině souměrnosti σ

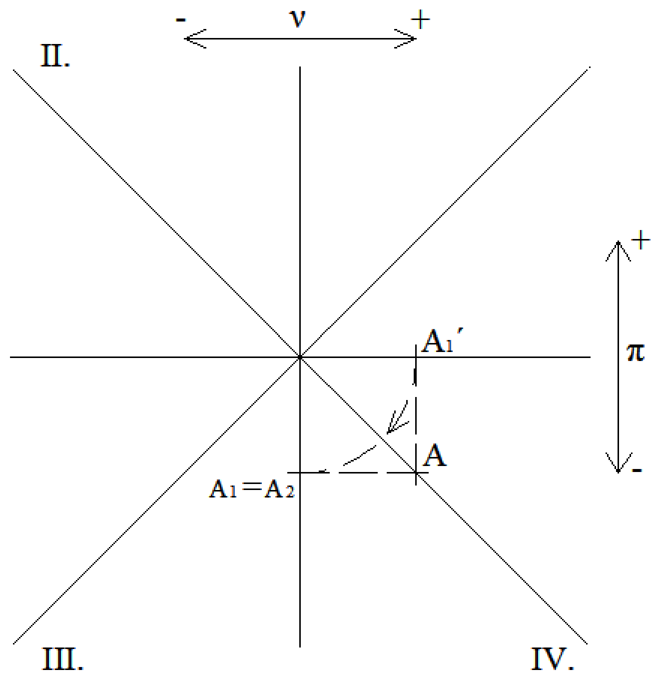


Obr. 3.18 – Sdružené průměty bodu *A*, který leží v rovině souměrnosti σ

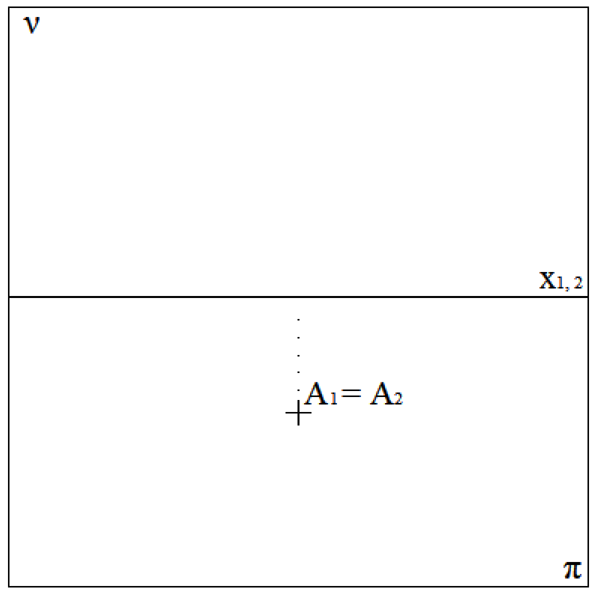


„Body, pro jejichž souřadnice platí *y* = -z, pak vyplní tzv. **rovinu totožnosti *ω*** půlící II. a IV. kvadrant. Pro všechny body této roviny platí, že jejich půdorysný průmět je totožný s nárysným průmětem.“ (3, s. 7)

Obr. 3.19 – Bod *A*, který leží v rovině totožnosti *ω*



Obr. 3.20 – Sdružené průměty bodu *A*, který leží v rovině totožnosti *ω*



3.1.3 Konstrukce sdružených obrazů bodu

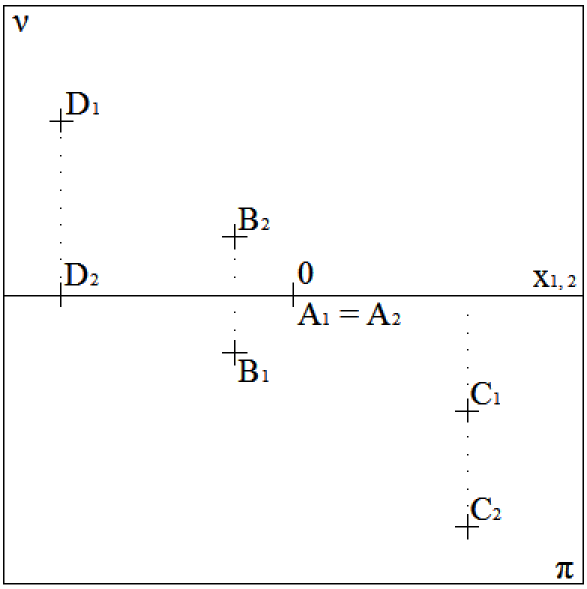
„V nákresně kromě základnice $x_{1,2}$ zobrazíme ještě počátek *0*. To umožňuje v nákresně jednoznačně zobrazit bod *A[x, y, z]* prostoru.“ (13, s. 143)

„Souřadnice *x*: Je to souřadnice toho bodu základnice $x_{1,2}$, ve kterém ji protíná ordinála.“ (4, s. 46)

„Souřadnice *y*: Její absolutní hodnota je vzdálenost půdorysného průmětu od základnice $x_{1,2}$. Souřadnice je kladná, je-li půdorysný průmět pod základnicí $x_{1,2}$, je záporná, je-li půdorysný průmět nad základnicí $x_{1,2}$, a je nulová, je-li půdorysný průmět na základnici $x_{1,2}$.“ (4, s. 46)

„Souřadnice *z*: Její absolutní hodnota je vzdálenost nárysného průmětu od základnice $x_{1,2}$. Souřadnice je kladná, je-li nárysný průmět bodu nad základnicí $x_{1,2}$, je záporná, když je nárysný průmět bodu pod základnicí $x_{1,2}$, a je nulová, je-li nárysný průmět bodu na základnici $x_{1,2}$.“ (4, s. 46)

Obr. 3.21 – Sdružené průměty bodů *A*[0, 0, 0], *B*[-1, 1, 1], *C*[3, 2, -4], *D*[-4, -3, 1]

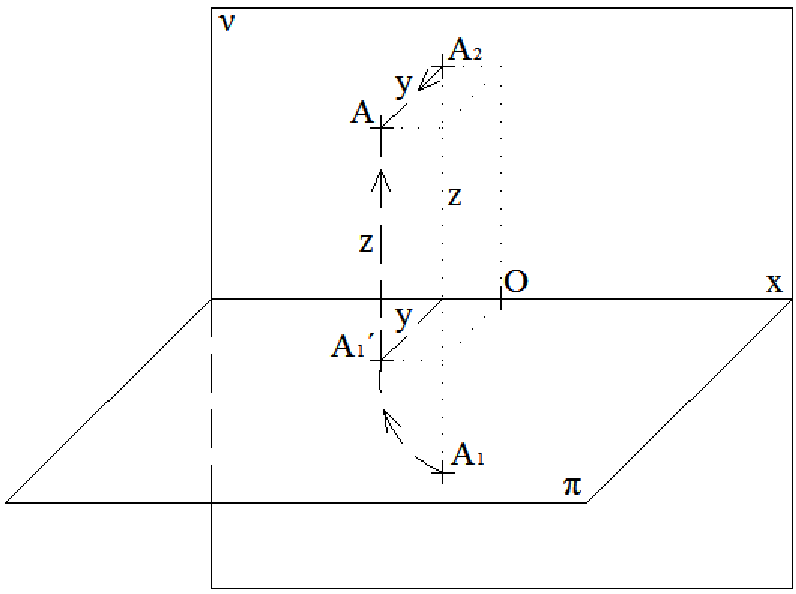


3.1.4 Rekonstrukce polohy bodu

„Mongeovo promítání není názorná promítací metoda. Z půdorysného a nárysného průmětu je možné vymodelovat objekt v prostoru, ale tento proces vyžaduje značné zkušenosti a rozvinutou prostorovou představivost. Proto je důležité si od začátku vypěstovat schopnost rekonstrukce, tj. konstrukci prostorového modelu ze sdružených průmětů útvaru. Základem je rekonstrukce bodu z jeho půdorysného a nárysného průmětu.“ (4, s. 46)

„Jsou-li známy souřadnice bodu *A* ze sdružených průmětů A_1, A_2, můžeme ve zvolené soustavě souřadnic *{O, x, y, z}* sestrojit souřadnicový kvádr a jeho vrchol protilehlý bodu *O* je hledanou polohou bodu *A* v soustavě souřadnic *{O, x, y, z}*.“ (4, s. 46)

Obr. 3.22 – Rekonstrukce polohy bodu *A* ve zvolené soustavě souřadnic {0, -1, 3, 4}



3.2 Zobrazení přímky

3.2.1 Přímka v obecné poloze

„Přímky v obecné poloze jsou přímky, které nejsou:

- kolmé k půdorysně π, kolmé k nárysně v, kolmé k základnici $x_{1,2}$,
- rovnoběžné s půdorysnou π, rovnoběžné s nárysnou v, rovnoběžné se základnicí $x_{1,2}$." (3, s. 8)

„Zobrazujeme-li půdorysný průmět přímky a, vedeme každým bodem přímky a půdorysně promítací paprsek. Všechny tyto promítací paprsky vytvoří **půdorysně promítací rovinu** přímky a. Průsečnice této roviny s půdorysnou π je **půdorysným průmětem přímky** a." (3, s. 8)

„Při zobrazení nárysného průmětu přímky a, vedeme každým bodem přímky a nárysně promítací paprsek. Všechny tyto promítací paprsky vytvoří **nárysně promítací rovinu** přímky a. Průsečnice této roviny s nárysnou v je **nárysným průmětem přímky** a." (3, s. 8)

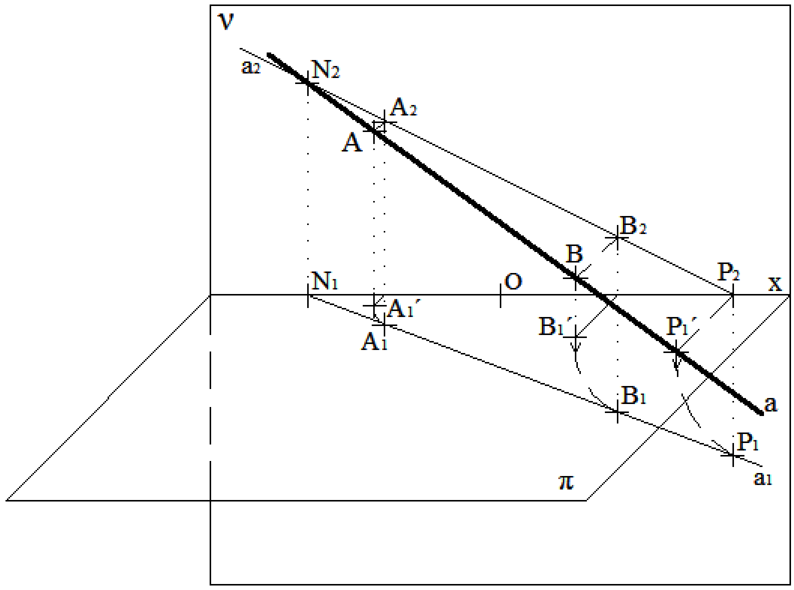
„Přímka a je tedy určena dvojicí sdružených průmětů a_1, a_2." (3, s. 8)

„Přímku většinou určujeme pomocí dvou různých bodů. Pro určení průmětů přímky a tedy stačí určit průměty těchto bodů. Jelikož incidence se promítáním zachovává, musí platit: náleží-li bod A přímce a, pak půdorysný průmět A_1 bodu A náleží půdorysnému průmětu a_1 přímky a a nárysný průmět A_2 bodu A náleží nárysnému průmětu a_2 přímky a, přičemž sdružené průměty A_1, A_2 bodu A leží na ordinále." (3, s. 8)

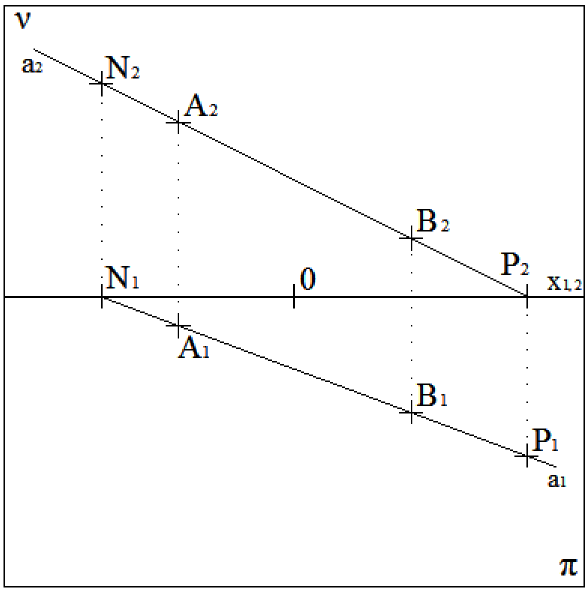
„Na přímce a máme také body zvláštního významu – jsou to stopníky přímky.

Stopník přímky je průsečík přímky s průmětnou (půdorysnou π, nárysnou v). Průsečík přímky a s půdorysnou π se nazývá **půdorysný stopník** $\boldsymbol{P}$, průsečík přímky a s nárysnou v se nazývá **nárysný stopník** $\boldsymbol{N}$**.** Při jejich konstruování vycházíme ze skutečnosti, že když půdorysný průmět P_1 půdorysného stopníku P leží v půdorysně π, pak nárysný průmět P_2 půdorysného stopníku P leží na základnici $x_{1,2}$. Jestliže nárysný průmět N_2 nárysného stopníku N leží v nárysně v, pak půdorysný průmět N_1 nárysného stopníku N leží na základnici $x_{1,2}$." (3, s. 8)

Obr. 3.23 – Přímka *a*, která leží v obecné poloze, *a* = ↔*AB*, *A*[-2, 0.5, 3], *B*[2, 2, 1]



Obr. 3.24 – Sdružené průměty přímky *a*, která leží v obecné poloze, a = ↔AB, *A*[-2, 0.5, 3], *B*[2, 2, 1]



3.2.2 Přímka ve speciální poloze

„Přímky ve speciální poloze jsou přímky, které jsou:

- kolmé k půdorysně π, kolmé k nárysně v, kolmé k základnici $x_{1,2}$,
- rovnoběžné s půdorysnou π, rovnoběžné s nárysnou v, rovnoběžné se základnicí $x_{1,2}$." (3, s. 8)

❖ **Promítací přímky**

„Promítací přímka je přímka kolmá k průmětně (půdorysně π, nárysně v).
V Mongeově promítání máme tedy půdorysně promítací přímky, které jsou kolmé k půdorysně π a nárysně promítací přímky, kolmé k nárysně v." (4, s. 48)

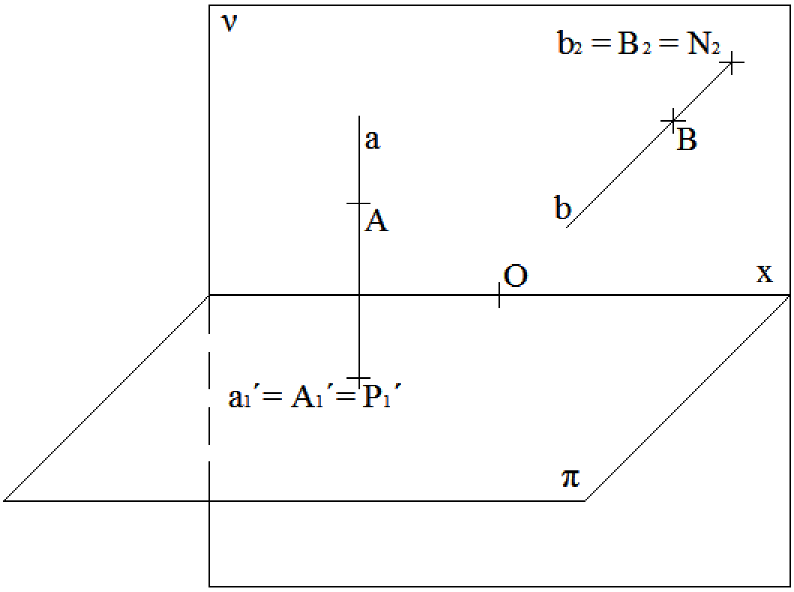
„Půdorysně promítací přímky se do půdorysny π promítají jako body. Leží-li bod A na přímce a, pak $A_1 = a_1$." (4, s. 48)

„Nárysně promítací přímky se do nárysny v promítají jako body. Leží-li bod B na přímce b, pak $B_2 = b_2$." (4, s. 48)

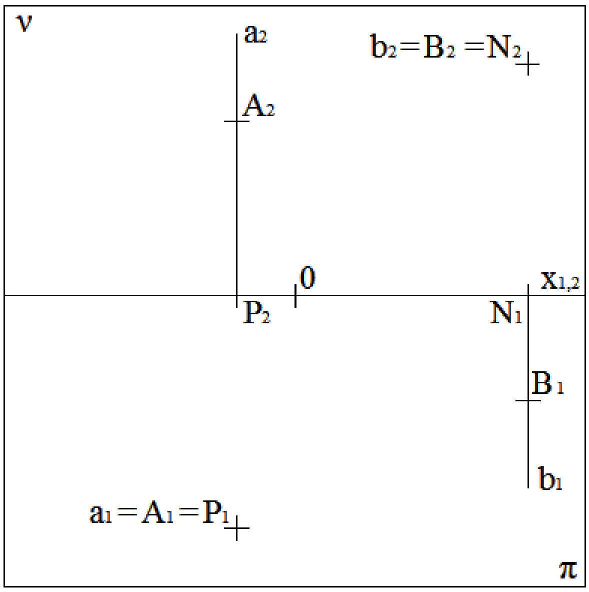
„V Mongeově promítání je půdorysný průmět a_1 přímky a kolmé k půdorysně π bod. V tomto bodě splývají půdorysné průměty A_1, P_1,... všech bodů přímky a. Protože jejich nárysné průměty A_2, P_2,… leží na ordinále půdorysného průmětu a_1 přímky a, je nárysným průmětem a_2 přímky a tato ordinála. Na základnici $x_{1,2}$, najdeme nárysný průmět P_2 půdorysného stopníku P, jehož z-ová souřadnice se rovná nule. Protože přímka a je rovnoběžná s nárysnou v, promítají se do nárysny v úsečky ležící na přímce a ve své skutečné velikosti. Je tedy $|AP| = |A_2P_2|$." (4, s. 48)

„Nárysný průmět b_2 přímky b kolmé k nárysně v je bod. V tomto bodě splývají nárysné průměty B_2, N_2,… všech bodů přímky b. Protože jejich půdorysné průměty B_1, N_1,… leží na ordinále nárysného průmětu b_2 přímky b, je půdorysným průmětem b_1 přímky b tato ordinála. Na základnici $x_{1,2}$, najdeme půdorysný průmět N_1 nárysného stopníku N, jehož y-ová souřadnice se rovná nule. Protože přímka b je rovnoběžná s půdorysnou π, promítají se do půdorysny π úsečky ležící na přímce b ve skutečné velikosti. Proto je $|BN| = |B_1N_1|$." (4, s. 48)

Obr. 3.25 – Půdorysně promítací přímka *a*, nárysně promítací přímka *b*



Obr. 3.26 – Sdružené průměty půdorysně promítací přímky *a*, nárysně promítací přímky *b*

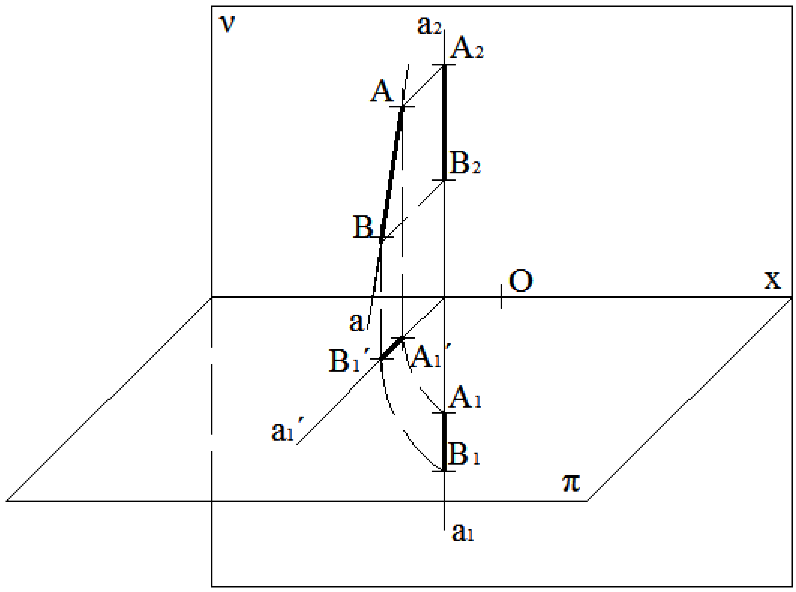


❖ **Přímky kolmé k základnici x**

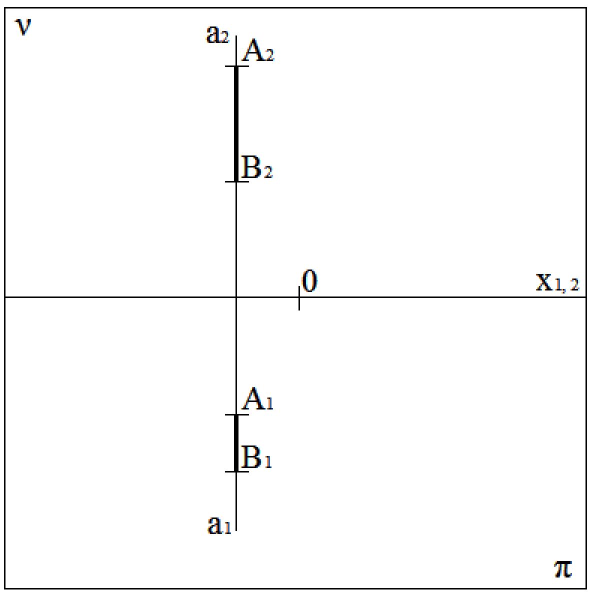
„Přímka *a* leží v rovině γ kolmé k základnici *x*. Proto je půdorysný průmět přímky *a* kolmý k základnici $x_{1,2}$ a také nárysný průmět přímky *a* kolmý k základnici $x_{1,2}$. Jakákoliv jiná přímka, která není promítací, roviny γ má ovšem tytéž průměty. Přímku *a* kolmou k základnici $x_{1,2}$ nelze proto jednoznačně určit průměty a_1 a a_2. Určíme ji sdruženými průměty A_1, A_2, B_1, B_2 dvou jejích bodů *A* a *B*, které jsou od sebe různé.“ (4, s. 57)

„Sdružené průměty $a_1 = \leftrightarrow A_1B_1$ a $a_2 = \leftrightarrow A_2B_2$ přímky a kolmé k základnici $x_{1,2}$, $a = \leftrightarrow AB$, leží na společné ordinále, která je současně půdorysným průmětem γ_1 a nárysným průmětem γ_2 roviny γ kolmé k základnici $x_{1,2}$. Polohu přímky a získáme rekonstrukcí bodů A, B. (4, s. 57)

Obr. 3.27 – Přímka a kolmá k základnici x, $a = \leftrightarrow AB$, A[-1, 2, 4], B[-1, 3, 2]



Obr. 3.28 – Sdružené průměty přímky a, která je kolmá k základnici $x_{1,2}$, $a = \leftrightarrow AB$, A[-1, 2, 4], B[-1, 3, 2]



3.2.3 Zobrazení dvojice přímek

„Při zkoumání vzájemných poloh přímek (bodů, přímek, rovin) vycházíme z toho, že rovnoběžné promítání zachovává incidenci. To znamená, že leží-li bod na přímce, pak jeho průmět leží na průmětu této přímky.“ (5, s. 26)

„Dvě přímky v prostoru mohou být:

- rovnoběžné – přímky mají společný nevlastní bod,
- různoběžné – přímky mají společný vlastní bod,
- mimoběžné – přímky nemají společný bod.“ (1, s. 32)

❖ **Dvojice rovnoběžných přímek**

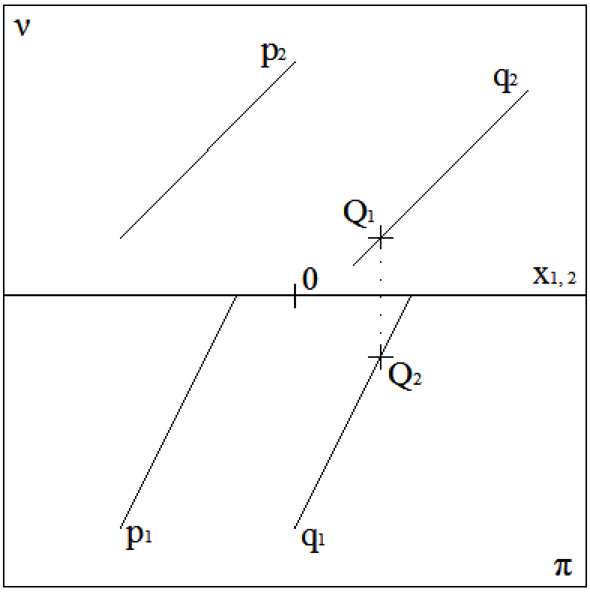
„Přímky *p, q*, z nichž žádná není kolmá k základnici $x_{1,2}$, jsou spolu rovnoběžné právě tehdy, když jejich první průměty a rovněž druhé průměty jsou spolu rovnoběžné, $p_1||q_1$, $p_2||q_2$ a nejsou kolmé k základnici $x_{1,2}$.“ (13, s. 151)

Toto tvrzení vyplývá z toho, že první i druhé promítací roviny rovnoběžných přímek jsou spolu rovnoběžné. Průmětny (půdorysna π, nárysna υ) je proto protínají v rovnoběžných přímkách. Jestliže obráceně průměty jsou spolu rovnoběžné, pak první i druhé promítací roviny jsou také vzájemně rovnoběžné a protínají se v rovnoběžných přímkách *p, q*.

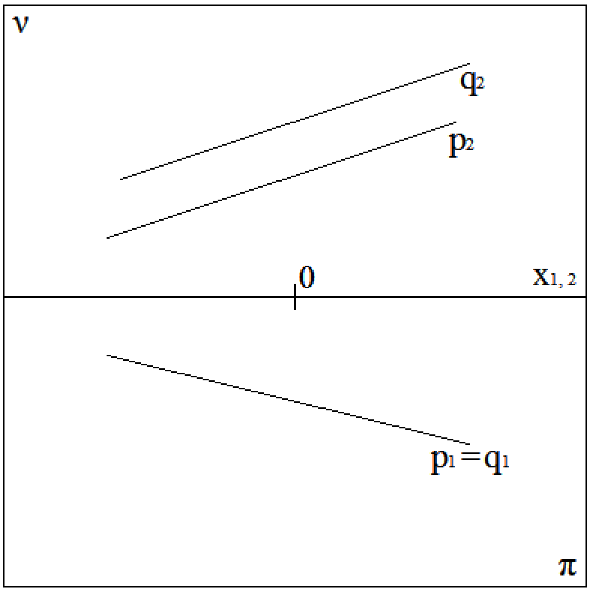
„Rozlišujeme 3 případy, kdy rovnoběžné přímky:

- neleží ve stejné promítací rovině,
- leží ve společné půdorysné promítací rovině,
- leží ve společné nárysné promítací rovině.“ (13, s. 151)

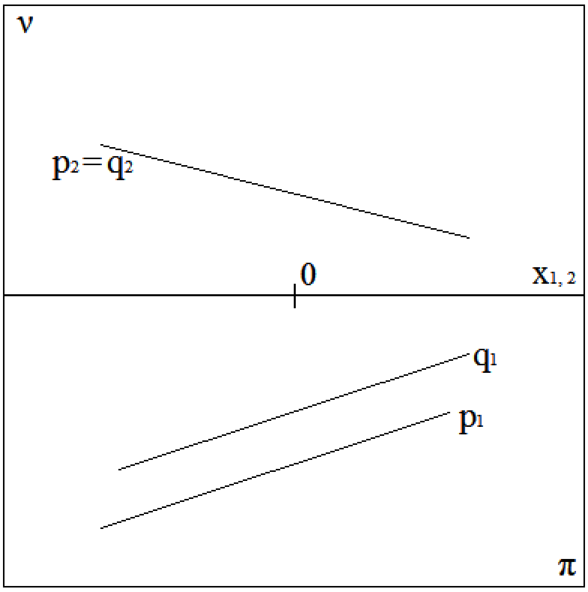
Obr. 3.29 – Sdružené průměty rovnoběžných přímek *p*, *q*, které neleží ve stejné promítací rovině



Obr. 3.30 – Sdružené průměty rovnoběžných přímek *p*, *q*, které leží ve společné půdorysné promítací rovině



Obr. 3.31 – Sdružené průměty rovnoběžných přímek *p*, *q* , které leží ve společné nárysné promítací rovině



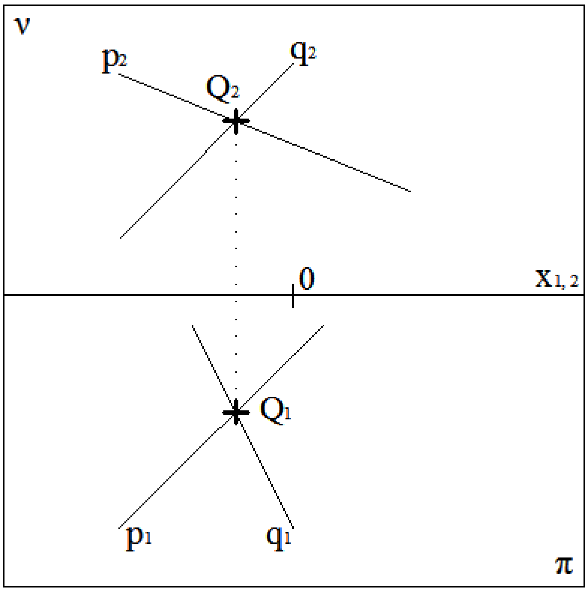
„O rovnoběžnosti přímek můžeme ihned rozhodnout v případě, že jde o promítací přímky. Všechny první i druhé promítací přímky jsou vzájemně rovnoběžné.“ (13, s. 152)

❖ **Dvojice různoběžných přímek**

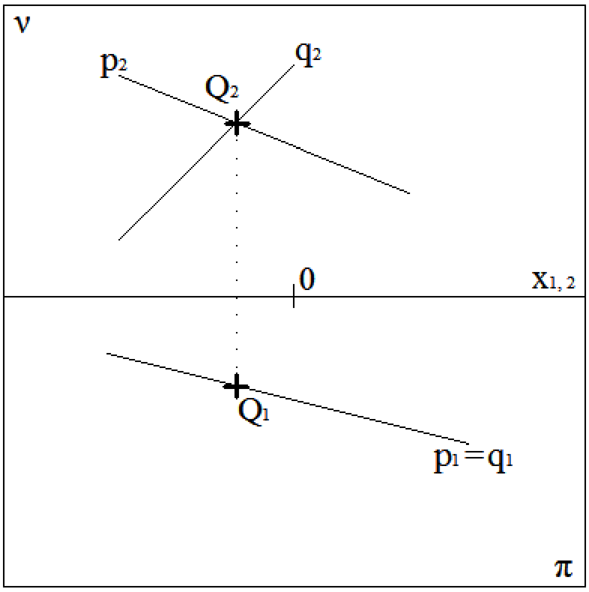
„Dvě přímky *p, q,* z nichž žádná není kolmá k základnici $x_{1,2}$, jsou různoběžné právě tehdy, když jejich průmětem jsou buď dvě dvojice různoběžek p_1, q_1 a p_2, q_2, jejichž průsečíky $p_1 \cdot q_1$ a $p_2 \cdot q_2$ leží na ordinále, nebo když jedním jejich průmětem je jediná přímka a druhým průmětem různoběžky. (13, s. 152)

„Nechť bod *Q* je průsečík přímek *p, q*. Protože incidence se promítáním zachovává, musí pro průmět bodu *Q* platit, že půdorysný průmět Q_1 bodu *Q* náleží průniku půdorysných průmětů přímek p_1 a q_1 a nárysný průmět Q_2 bodu *Q* náleží průniku nárysných průmětů přímek p_2 a q_2. Obecně tedy platí, že sdružené průměty přímek spolu různoběžných jsou opět různoběžky, přičemž sdružené průměty jejich průsečíků leží na ordinále.“ (3, s. 10)

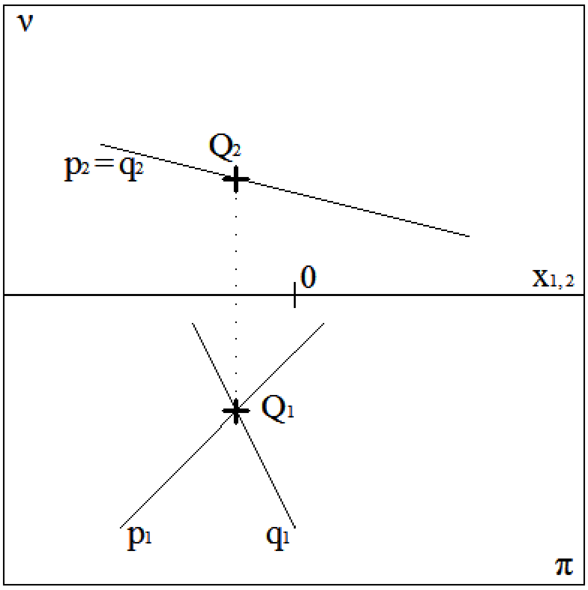
Obr. 3.32 – Různoběžné přímky, jejichž průmětem jsou dvě dvojice různoběžek, průměty jejich průsečíku leží na ordinále



Obr. 3.33 – Různoběžné přímky, jejichž půdorysným průmětem je jediná přímka a nárysným průmětem jsou různoběžky



Obr. 3.34 – Různoběžné přímky, jejichž půdorysným průmětem jsou různoběžky a nárysným průmětem je jediná přímka



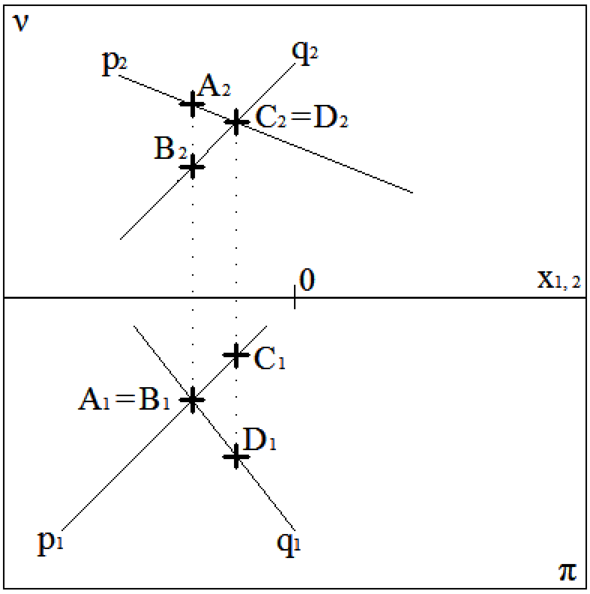
❖ **Dvojice mimoběžných přímek**

„Pro nalezení sdružených průmětů přímek spolu mimoběžných neplatí žádná poučka – sdružené průměty jsou buď spolu různoběžné nebo rovnoběžné přímky, průsečíky jejich průmětů nejsou na ordinále – pokud jsou přímky v obecných polohách.“ (3, s. 10)

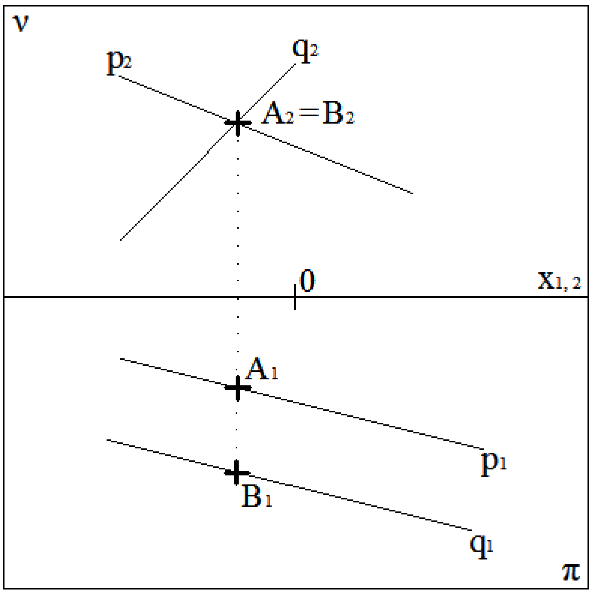
„Jsou-li *p, q* mimoběžky, které se v obou průmětech zobrazí jako různoběžky, pak průsečíky nesmí ležet na ordinále.

Jestliže jedna dvojice průmětů mimoběžných přímek jsou rovnoběžky, pak druhá dvojice průmětů musí být různoběžky.“ (13, s. 153)

Obr. 3.35 – Mimoběžné přímky, jejichž půdorysným i nárysným průmětem jsou dvojice různoběžek

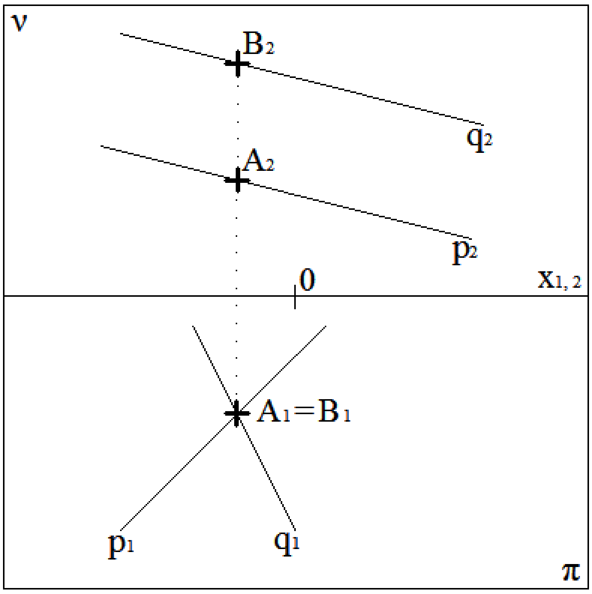


Obr. 3.36 – Mimoběžné přímky, jejichž půdorysným průmětem je dvojice rovnoběžek a nárysným průmětem dvojice různoběžek



Obr. 3.37 – Mimoběžné přímky, jejichž půdorysným průmětem je dvojice různoběžek

a nárysným průmětem dvojice rovnoběžek



3.3 Zobrazení roviny

„Průmětem roviny, která není kolmá k průmětně (půdorysně π, nárysně ν), je celá průmětna (půdorysna π, nárysna ν). Průmětem roviny kolmé k průmětně (půdorysně π, nárysně ν) je přímka, tj. průsečnice roviny s průmětnou (půdorysnou π, nárysnou ν). Půdorysný průmět roviny α kolmé k půdorysně π označíme α_1, nárysný průmět roviny α kolmé k nárysně ν označíme α_2.“ (1, s. 33)

„Je zřejmé, že rovina není jednoznačně určena svými průměty, proto pro zobrazování roviny užíváme sdružené průměty jejích určujících prvků:

- tří bodů, které neleží na jedné přímce,
- přímky a bodu, který na ní neleží,
- dvou různých rovnoběžek,
- dvou různoběžek.“ (1, s. 33)

„Známe-li sdružené průměty určujících prvků roviny, můžeme v ní provádět potřebné geometrické konstrukce. Užíváme přitom známých vět o incidenci:

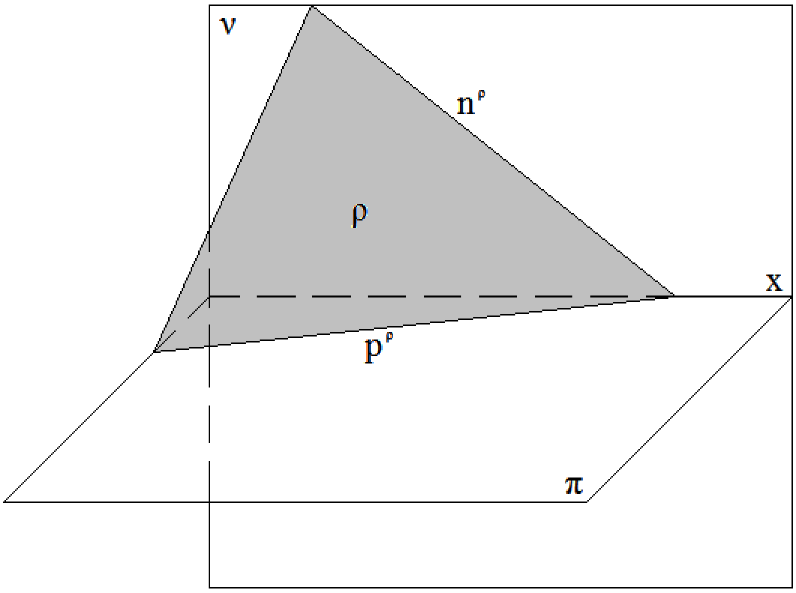
- přímka leží v rovině právě tehdy, když prochází jejími dvěma různými body,
- bod leží v rovině právě tehdy, když leží na přímce roviny,
- promítáním se incidence zachovává.“ (13, s. 146)

3.3.1 Rovina v obecné poloze

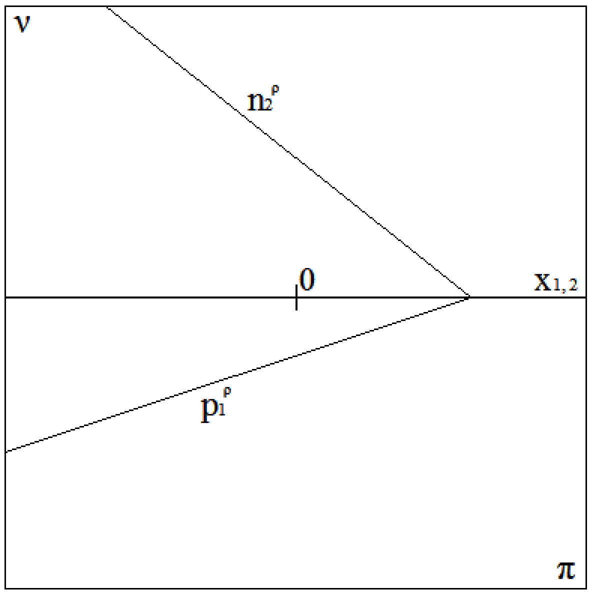
„Průměty roviny, která není promítací - není kolmá k žádné průmětně (půdorysně π, nárysně ν), dostaneme tak, že každý její bod promítneme do průmětny (půdorysny π, nárysny ν). Průměty všech těchto bodů roviny pokryjí celou průmětnu (půdorysnu π, nárysnu ν). Průmětem roviny, která není promítací, je tedy celá průmětna (půdorysna π, nárysna ν).“ (3, s. 11)

„Ve většině případů určujeme rovinu pomocí jejich stop. **Stopa roviny** je průsečnice roviny s průmětnou (půdorysnou π, nárysnou ν). **Půdorysná stopa** p_1^ρ je průsečnice roviny s půdorysnou π. **Nárysná stopa** n_2^ρ je průsečnice roviny s nárysnou ν. Obě tyto stopy se protínají na základnici $x_{1,2}$." (3, s. 11)

Obr. 3.38 – Rovina ρ, která není promítací, $\rho(3, 1, 2)$



Obr. 3.39 – Sdružené průměty stopy roviny ρ, která není promítací, $\rho(3,1,2)$



3.3.2 Rovina ve speciální poloze

„Polohu roviny považujeme za speciální, jestliže:

- je kolmá k některé průmětně (půdorysně π, nárysně ν), případně k oběma průmětnám (půdorysně π, nárysně ν),
- je rovnoběžná s některou průmětnou (půdorysnou π, nárysnou ν), nebo se základnicí $x_{1,2}$." (3, s. 12)

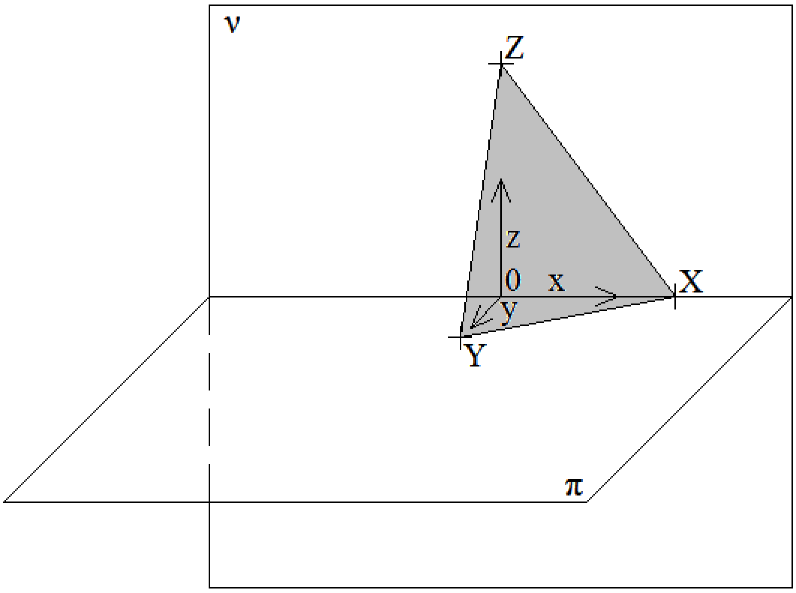
„Půdorysným průmětem roviny kolmé k průmětně (půdorysně π, nárysně ν) je přímka, jejím nárysným průmětem je celá průmětna (půdorysna π, nárysna ν). (5, s. 26)

- **Zobrazení roviny, která je promítací**

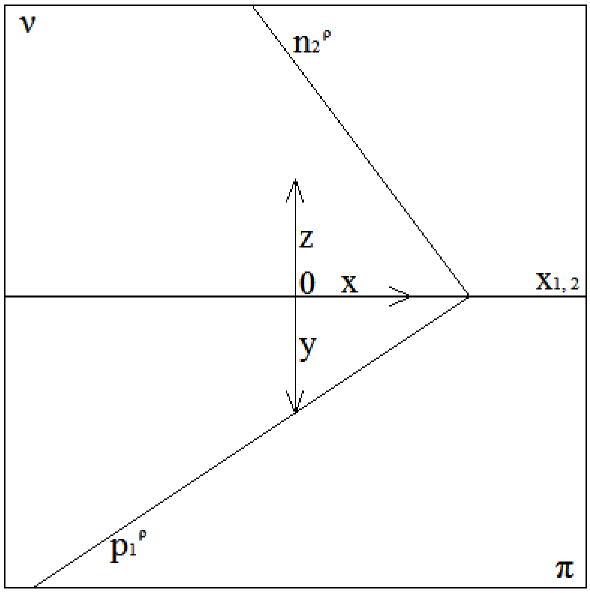
„Průmětem roviny, která je promítací, je vždy alespoň v jednom průmětu přímka. Rovina, která je rovnoběžná s některou průmětnou, se nazývá **hlavní rovina**." (3, s. 12)

„Rovinu, která neprochází počátkem souřadnicového systému, určujeme jejími průsečíky X, Y, Z se souřadnicovými osami x, y, z. Stručně však píšeme jen symbol $\rho(x, y, z)$, přičemž x značí x-ovou souřadnici bodu X, y značí y-ovou souřadnici bodu Y a z značí z-ovou souřadnici bodu Z. Je-li rovina rovnoběžná s některou z os, píšeme místo souřadnice symbol ∞. Jinak můžeme zadat rovinu pomocí průsečíku s osou x a velikostí odchylek stop s kladnou částí osy x. (3, s. 12)

Obr. 3.40 – Rovina ρ, která neprochází počátkem souřadnicového systému, $\rho(3, 2 ,4)$



Obr. 3.41 – Sdružené průměty stopy roviny ρ, která neprochází počátkem souřadnicového systému, $\rho(3, 2 ,4)$

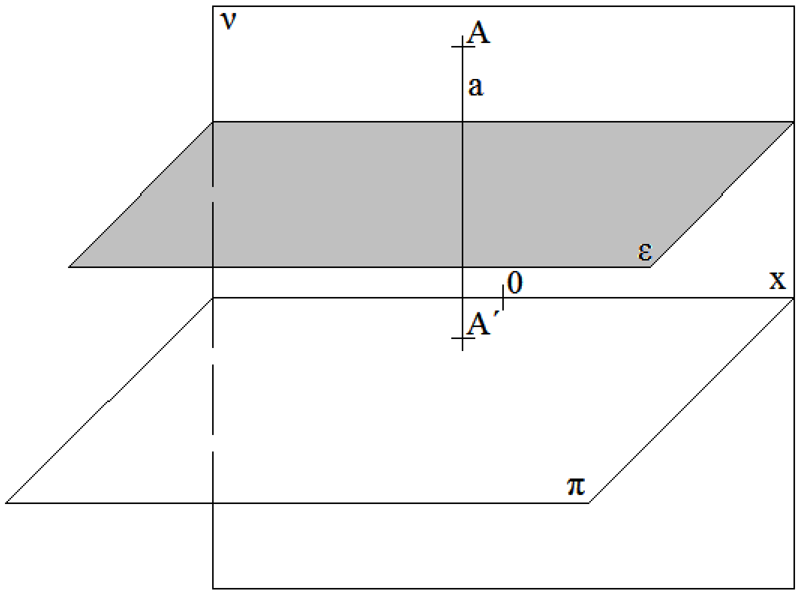


❖ **Zobrazení vodorovné (horizontální) hlavní roviny**

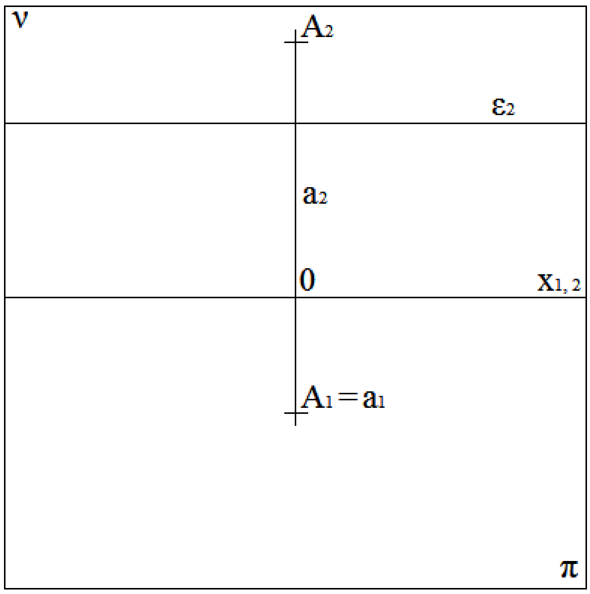
„Vodorovná rovina ε se do nárysny v promítá jako nárysný průmět ε_2 přímky ε a protože je rovnoběžná s půdorysnou π, je její nárysný průmět přímky ε_2 rovnoběžný se základnicí $x_{1,2}$. Kolmice k rovině ε je půdorysně promítací přímka a. Každá přímka roviny ε je též vodorovná, je to hlavní přímka vzhledem k půdorysně π.“ (4, s. 49)

„V Mongeově promítání určíme vodorovnou hlavní rovinu ε nárysným průmětem ε_2. Tento nárysný průmět je rovnoběžný se základnicí $x_{1,2}$. (4, s. 50)

Obr. 3.42 – Vodorovná (horizontální) hlavní rovina ε



Obr. 3.43 – Sdružené průměty vodorovné (horizontální) hlavní roviny ε



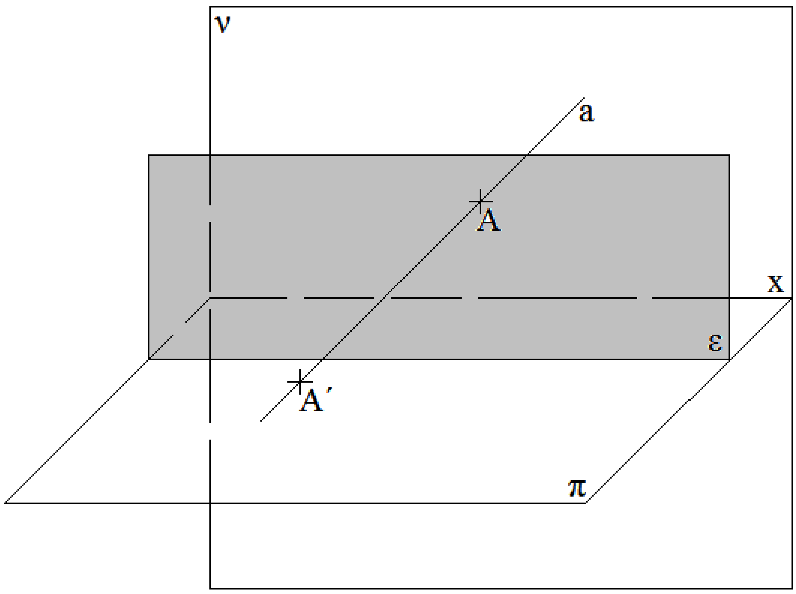
- **Zobrazení průčelné (frontální) hlavní roviny**

„Průčelná rovina ε se promítá do půdorysny π jako půdorysný průmět ε_1 přímky ε a protože je rovnoběžná s nárysnou v, je její půdorysný průmět ε_1 rovnoběžný se základnicí $x_{1,2}$. Kolmice k rovině ε je nárysně promítací přímka a.

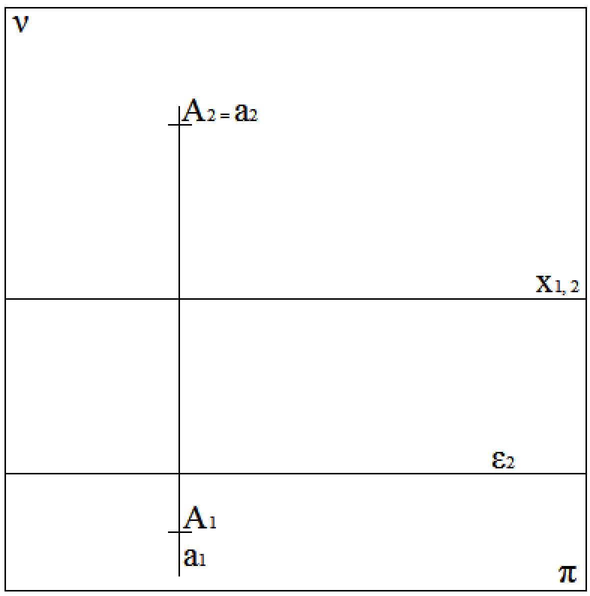
Každá přímka roviny ε je též průčelná, je to hlavní přímka vzhledem k nárysně v.“ (4, s. 50)

„V Mongeově promítání určíme průčelnou rovinu ε půdorysným průmětem ε_1. Tento půdorysný průmět je rovnoběžný se základnicí $x_{1,2}$.“ (4, s. 51)

Obr. 3.44 – Průčelná (frontální) hlavní rovina ε



Obr. 3.45 – Sdružené průměty průčelné (frontální) hlavní roviny ε



3.4 Zobrazení bodu, přímky ležící v rovině

„Přímka, která leží v rovině *α*, je rovnoběžná s některou průmětnou, se nazývá **hlavní přímka roviny**. Protože v Mongeově promítání máme dvě průmětny (půdorysnu *π*, nárysnu *v)*, existují dvě soustavy hlavních přímek.“ (3, s. 13)

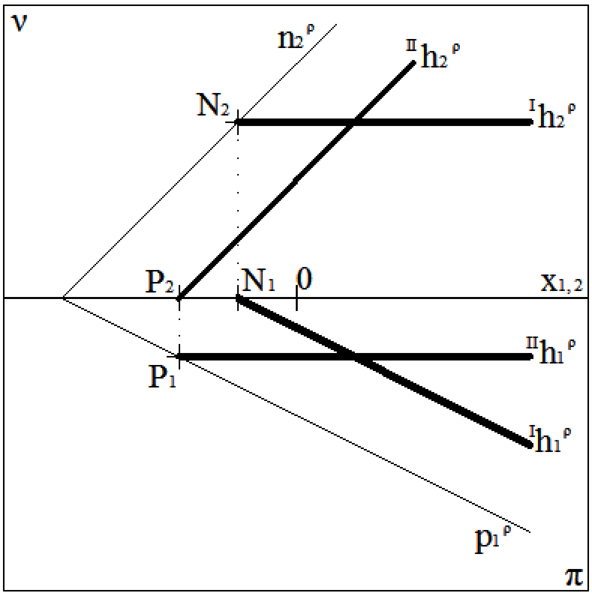
„**Půdorysné (horizonální) hlavní přímky**, nebo také **hlavní přímky I. osnovy**, jsou rovnoběžné s půdorysnou *π*. Půdorysné hlavní přímky označujeme ${}^{I}h^{\rho}$.“ (3, s. 13)

„**Nárysné (frontální) hlavní přímky**, nebo také **hlavní přímky II. osnovy**, jsou rovnoběžné s nárysnou *v*. Nárysné hlavní přímky označujeme ${}^{II}h^{\rho}$.“ (3, s. 13)

„Jeden průmět hlavní přímky je vždy rovnoběžný se základnicí $x_{1,2}$, druhý průmět je rovnoběžný se stopou roviny. Stopy roviny můžeme považovat za hlavní přímky ležící přímo v průmětně *(*půdorysně *π*, nárysně *v*). Hlavních přímek používáme při zobrazování druhého průmětu bodu ležícího v rovině.“ (3, s. 13)

„Zvláštním případem hlavní přímky první osnovy je půdorysná stopa roviny. Zvláštním případem hlavní přímky druhé osnovy je nárysná stopa roviny.“ (1, s. 34)

Obr. 3.46 – Sdružené průměty hlavních přímek I. a II. osnovy roviny *ρ*, *ρ*(-4, 3, 4)

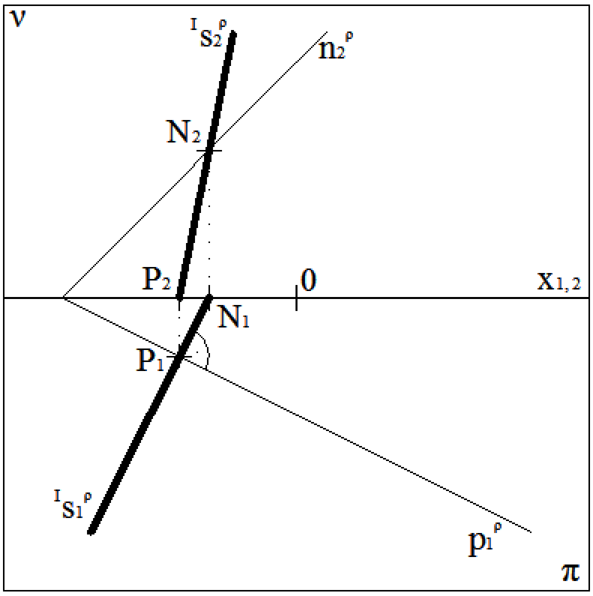


„Další význačnou přímkou ležící v rovině je **spádová přímka**. Spádová přímka je kolmá na hlavní přímky, tím i na stopu roviny. Tato přímka udává spád roviny vzhledem k průmětně (půdorysně π, nárysně ν).

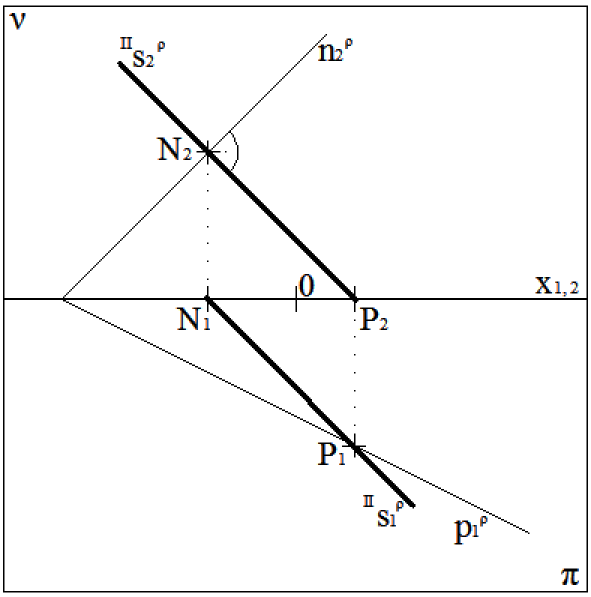
Ke dvěma různým soustavám hlavních přímek existují dvě soustavy spádových přímek – **I. a II. osnovy**. Spádová přímka je vždy v jednom průmětu kolmá ke stopě roviny.“ (3, s. 14)

„Spádové přímky I. osnovy označujeme ${}^{I}s^{\rho}$. Spádové přímky II. osnovy označujeme ${}^{II}s^{\rho}$. Půdorysný průmět spádové přímky I. osnovy je kolmý k půdorysnému průmětu hlavní přímky I. osnovy. Podobně nárysný průmět spádové přímky II. osnovy je kolmý k nárysnému průmětu hlavní přímky II. osnovy.“ (1, s. 35)

Obr. 3.47 – Sdružené průměty spádových přímek I. osnovy roviny ρ, $\rho(-4, 3, 4)$



Obr. 3.48 – Sdružené průměty spádových přímek II. osnovy roviny ρ, $\rho(-4, 3, 4)$



4. Polohové úlohy

„Polohové úlohy se týkají vzájemné polohy bodů, přímek a rovin.

Základní polohové úlohy jsou:

- daným bodem vést k dané přímce rovnoběžnou přímku,
- daným bodem vést k dané rovině rovnoběžnou rovinu,
- sestrojit průsečnici daných dvou rovin,
- sestrojit průsečík dané přímky s danou rovinou.“ (1, s. 37)

„Při konstrukci polohových úloh vyznačujeme také viditelnost.“ (1, s. 38)

4.1 Daným bodem vést k dané přímce rovnoběžnou přímku

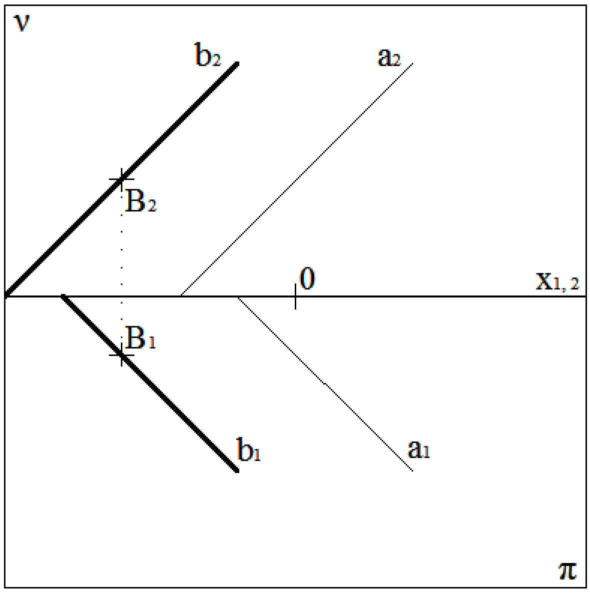
„Úlohy, kdy máme daným bodem B vést přímku b rovnoběžnou s danou přímkou a, řešíme pomocí vlastností rovnoběžných přímek.

Platí: jestliže přímka a je rovnoběžná s přímkou b, pak půdorysný průmět a_1 přímky a je rovnoběžný s půdorysným průmětem b_1 přímky b a nárysný průmět a_2 přímky a je rovnoběžný s nárysným průmětem b_2 přímky b.“ (1, s. 38)

„Řešení:

1. Půdorysným průmětem B_1 daného bodu B vedeme půdorysný průmět b_1 přímky b rovnoběžný s půdorysným průmětem a_1 dané přímky a.
2. Nárysným průmětem B_2 daného bodu B vedeme nárysný průmět b_2 přímky b rovnoběžný s nárysným průmětem a_2 dané přímky a.“ (1, s.38)

Obr. 4.1 – Daným bodem *B* vedená přímka *b* rovnoběžná s danou přímkou *a*, *B*[-3, 1, 2]



4.2 Daným bodem vést k dané rovině rovnoběžnou rovinu

„Úlohy, kdy máme daným bodem B vést rovinou β rovnoběžnou s danou rovinou α, řešíme pomocí vlastností dvou rovnoběžných rovin a jejich hlavních přímek.

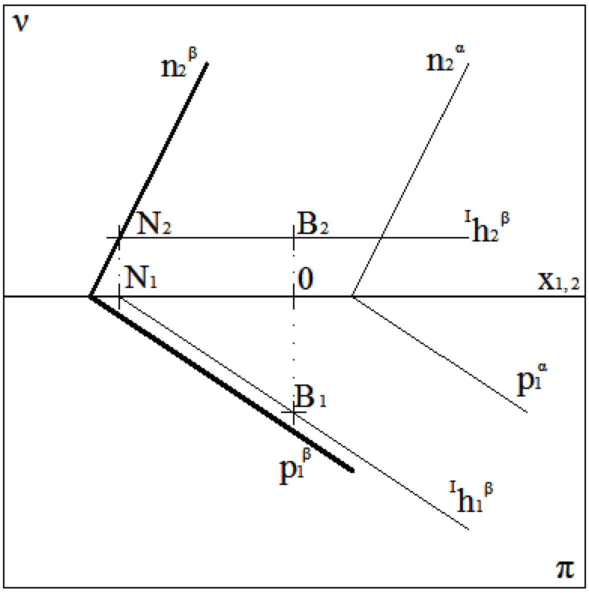
Platí: jestliže rovina α je rovnoběžná s rovinou β, pak jsou spolu rovnoběžné:

- půdorysný průmět p_1^α stopy roviny α, půdorysný průmět p_1^β stopy roviny β, půdorysný průmět hlavní přímky I. osnovy ${}^{I}h_1^\alpha$ roviny α a půdorysný průmět hlavní přímky I. osnovy ${}^{I}h_1^\beta$ roviny β,
- nárysný průmět n_2^α stopy roviny α, nárysný průmět n_2^β stopy roviny β, nárysný průmět hlavní přímky II. osnovy ${}^{II}h_2^\alpha$ roviny α a nárysný průmět hlavní přímka II. osnovy ${}^{II}h_2^\beta$ roviny β." (1, s. 38)

„Řešení:

1. Půdorysným průmětem B_1 daného bodu B vedeme půdorysný průmět přímky I. osnovy ${}^{I}h_1^\beta$ roviny β. Půdorysný průmět ${}^{I}h_1^\beta$ přímky I. osnovy roviny β je rovnoběžný s půdorysným průmětem p_1^α stopy dané roviny α.
2. Nárysným průmětem B_2 daného bodu B vedeme nárysný průmět přímky I. osnovy ${}^{I}h_2^\beta$ roviny β. Nárysný průmět přímky I. osnovy ${}^{I}h_2^\beta$ roviny β je rovnoběžný se základnicí $x_{1,2}$.
3. Získáme průměty N_1, N_2, což jsou průměty nárysného stopníku přímky I. osnovy ${}^{I}h_2^\beta$ roviny β.
4. Získaným nárysným průmětem N_2 nárysného stopníku N vedeme nárysný průmět n_2^β stopy roviny β, tento nárysný průmět n_2^β stopy roviny β je rovnoběžný s daným nárysným průmětem n_2^α stopy roviny α.
5. Průsečíkem základnice $x_{1,2}$ a nárysného průmětu n_2^β stopy roviny β vedeme půdorysný průmět p_1^β stopy roviny β, která je rovnoběžná s půdorysným průmětem p_1^α stopy roviny α." (1, s. 38)

Obr. 4.2 – Daným bodem *B* vedená rovina *β* rovnoběžná s danou rovinou *α*, *α*(1, 2, 4), *B*[-3, 1, 2]



4.3 Sestrojit průsečnici daných dvou rovin

„Při řešení úloh, kdy máme sestrojit průsečnici *r* daných dvou rovin α, β, využíváme znalosti, že průsečnice *r* je přímka, která leží v obou daných rovinách.

Její půdorysný stopník P leží tedy současně na půdorysné stopě roviny α i na půdorysné stopě roviny β. Podobně její nárysný stopník *N* leží současně na nárysných stopách obou rovin.“ (1, s. 38)

„Řešení:

1. Půdorysný průmět P_1 půdorysného stopníku P je průnik půdorysného průmětu p_1^{α} stopy roviny α a půdorysného průmětu p_1^{β} stopy roviny β.

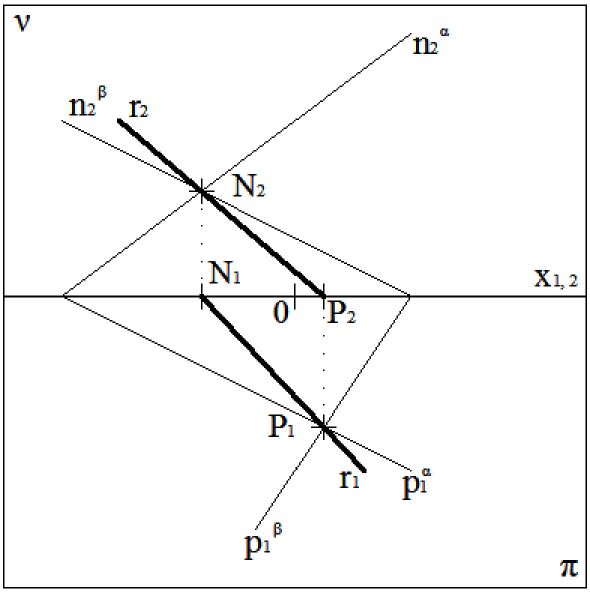
2. Nárysný průmět P_2 půdorysného stopníku P je průsečík ordinály vedené půdorysným průmětem P_1 půdorysného stopníku P a základnice $x_{1,2}$.

3. Nárysný průmět N_2 nárysného stopníku N je průnik nárysného průmětu n_2^{α} stopy roviny α a nárysného průmětu n_2^{β} stopy roviny β.

4. Půdorysný průmět N_1 nárysného stopníku N je průsečík ordinály vedené nárysným průmětem N_2 nárysného stopníku N a základnice $x_{1,2}$.

5. Spojením půdorysného průmětu P_1 půdorysného stopníku P a půdorysného průmětu N_1 nárysného stopníku N dostaneme půdorysný průmět r_1 přímky r. Spojením nárysného průmětu P_2 půdorysného stopníku P a nárysného průmětu N_2 nárysného stopníku N dostaneme nárysný průmět r_2 přímky r.“ (1, s. 38)

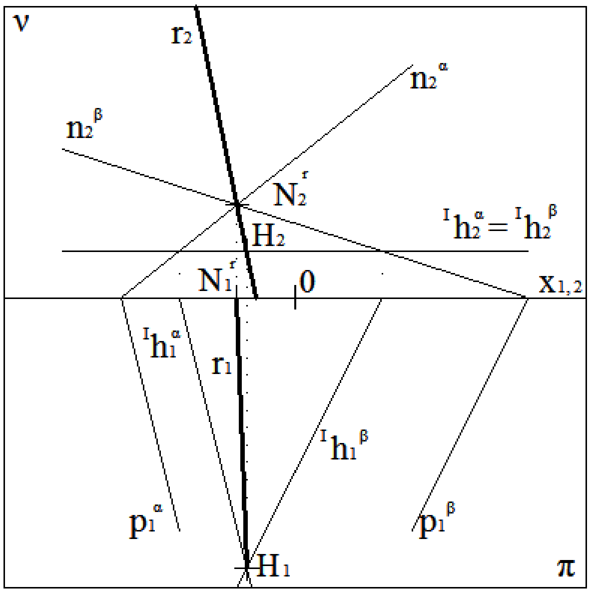
Obr. 4.3 – Průsečnice *r* daných rovin *α* a *β*, *α*(-4, 2, 3), *β*(2, 3, 1)



„Pokud je průsečík stop nepřístupný, lze pro spojení průsečnice *r* daných rovin *α* a *β* užít průsečík *H* libovolných hlavních přímek h^α, h^β rovin *α* a *β* stejně vzdálených od průmětny (půdorysny *π*, nárysny *ν*).

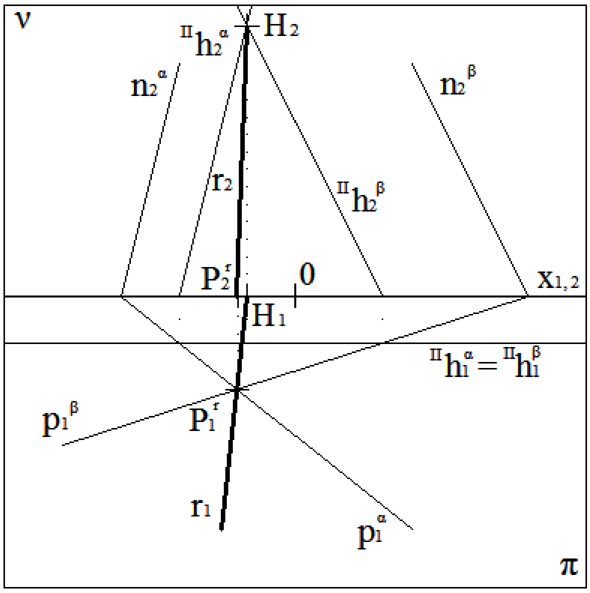
Bod *H* náležící přímce *r* leží v rovině *α* i *β*." (1, s. 38)

Obr. 4.4 – Průsečnice *r* daných rovin *α* a *β* s nepřístupným průsečíkem v rovině *α*, *α(-3, 12, 2.5), β(4, 8, 1.5)*



Obr. 4.5 – Sdružené průměty průsečnice *r* rovin *α* a *β*, s nepřístupným průsečíkem v rovině *β*,

α(-3, 2.5, 12), β(4, 1.5, 8)



4.4 Sestrojit průsečík dané přímky s danou rovinou

„Při řešení úloh, kdy máme sestrojit průsečík dané přímky s danou rovinou můžeme používat dva druhy řešení:

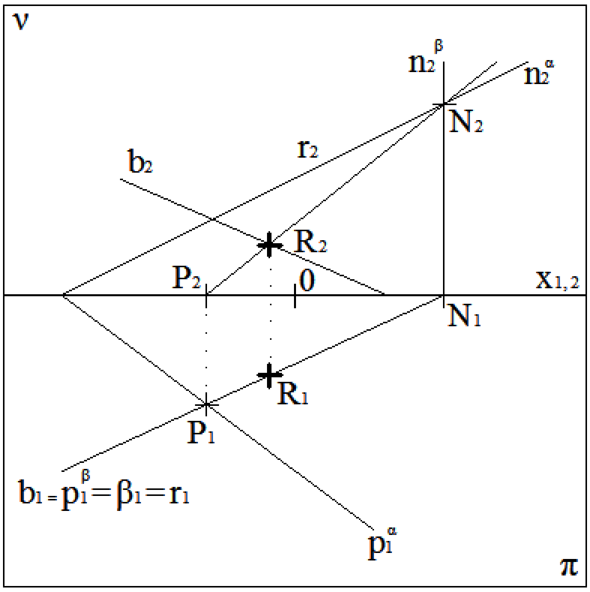
- užití promítací roviny dané přímky *b*,
- užití krycí přímky k přímky *b*.“ (1, s. 39)

„První možností při sestrojení průsečíku *R* dané přímky *b* s danou rovinou α je užití promítací roviny dané přímky *b*.“ (1, s. 39)

„Řešení:

1. Vytvoření promítací roviny β přímky *b*, tato promítací rovina je kolmá k půdorysně π, půdorysný průmět b_1 promítací přímky *b* se rovná půdorysnému průmětu p_1^{β} stopy roviny β, nárysný průmět n_2^{β} stopy roviny β je kolmý k základnici $x_{1,2}$.
2. Sestrojení přímky *r*. Tato přímka je průnikem rovin α a β. Půdorysný průmět r_1 přímky *r* je totožný s půdorysným průmětem b_1 dané přímky *b*. Nárysný průmět r_2 přímky *r* vznikne spojením nárysného průmětu P_2 půdorysného stopníku *P* a nárysného průmětu N_2 nárysného stopníku *N*.
3. Sestrojení nárysného průmětu R_2 bodu *R*. Nárysný průmět R_2 bodu *R* je průnikem nárysného průmětu r_2 přímky *r* a nárysného průmětu b_2 přímky *b*.
4. Sestrojení půdorysného průmětu R_1 bodu *R*. Půdorysný průmět R_1 bodu *R* je průsečík ordinály vedené nárysným průmětem R_2 bodu R a půdorysným průmětem b_1 přímky *b*.“ (1, s. 39)

Obr. 4.6 – Průsečík *R* dané přímky *b* s danou rovinou *α* – princip užití promítací roviny dané přímky *b, α*(-4, 3, 2)



„Druhou možností při sestrojení průsečíku *R* dané přímky *b* s danou rovinou *α* je převedení této úlohy na úlohu sestrojení průsečíku dvou přímek – princip **krycí přímky**." (3, s. 16)

„V promítací rovině existují dva druhy krycích přímek:

- **půdorysně krycí přímka**,

- **nárysně krycí přímka**." (3, s. 17)

„Řešení (použití půdorysně krycí přímky *k*):

1. V půdorysně promítací rovině *α* zvolíme přímku *k*, jejíž půdorysný průmět k_1 se kryje s půdorysným průmětem b_1 přímky *b* - tzv. půdorysně krycí přímku.

2. Pokud přímka *b* neleží v promítací rovině *α*, ani s ní není rovnoběžná, jsou přímky *b*, *k* různoběžné.

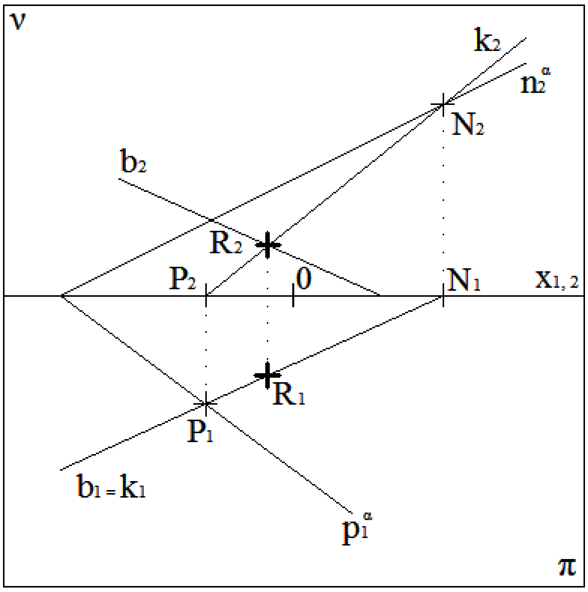
3. Leží-li půdorysný průmět k_1 přímky *k* v půdorysně promítací rovině *α*, dovedeme najít nárysný průmět k_2. Nárysný průmět k_2 přímky *k* vznikne spojením nárysného průmětu P_2 půdorysného stopníku *P* a nárysného průmětu N_2 nárysného stopníku *N*.

4. Nárysný průmět R_2 bodu *R* je průnik nárysného průmět k_2 přímky *k* a nárysného průmětu b_2 přímky *b*.

5. Půdorysný průmět R_1 bodu R je průnik ordinály vedené nárysným průmětem R_2 bodu R a půdorysným průmětem b_1 přímky b.

6. Nalezený průsečík R přímek b, k je tedy zároveň průsečíkem dané přímky b a dané roviny α." (3, s. 17)

Obr. 4.7 – Průsečík *R* dané přímky *b* s danou rovinou *α* – princip užití tzv. půdorysně krycí přímky, *α*(-4, 3, 2)



„Řešení (použití nárysně krycí přímky *k*):

1. V nárysně promítací rovině α zvolíme přímku k, jejíž nárysný průmět k_2 se kryje s nárysným průmětem b_2 přímky b - tzv. nárysně krycí přímku.

2. Pokud přímka b neleží v promítací rovině α, ani s ní není rovnoběžná, jsou přímky b, k různoběžné.

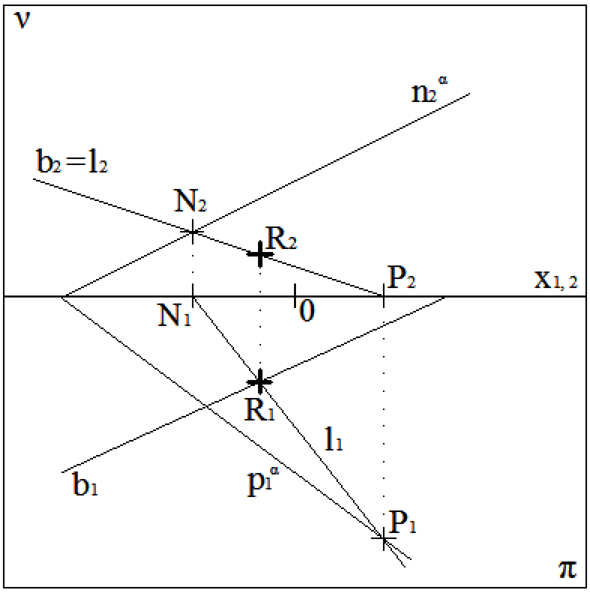
3. Leží-li nárysný průmět k_2 přímky k v nárysně promítací rovině α, dovedeme najít její půdorysný průmět k_1. Půdorysný průmět k_1 přímky k vznikne spojením půdorysného průmětu P_1 půdorysného stopníku P a půdorysného průmětu N_1 nárysného stopníku N.

4. Půdorysný průmět R_1 bodu R je průnik půdorysného průmětu k_1 přímky k a půdorysného průmětu b_1 přímky b.

5. Nárysný průmět R_2 bodu R je průnik ordinály vedené půdorysným průmětem R_1 bodu R a nárysným průmětem b_2 přímky b.

6. Nalezený průsečík R přímek b, k je zároveň průsečíkem dané přímky b a dané roviny α.“ (3, s. 17)

Obr. 4.8 – Průsečík *R* dané přímky *b* s danou rovinou *α* – princip užití tzv. nárysně krycí přímky, *α*(-4, 3, 2)



„Pro krycí přímku volíme obvykle ten průmět, u kterého dovedeme snáze najít stopníky (za předpokladu, že je rovina určena stopami).“ (3, s. 17)

„Princip krycí přímky nelze použít v případech, kdy buď rovina α, nebo přímka b jsou promítací (kolmé k některé průmětně – půdorysně π, nárysně ν).“ (3, s. 17)

„Krycí přímku lze také vytvořit jako průsečnici promítací roviny proložené přímkou b s rovinou α.“ (3, s. 18)

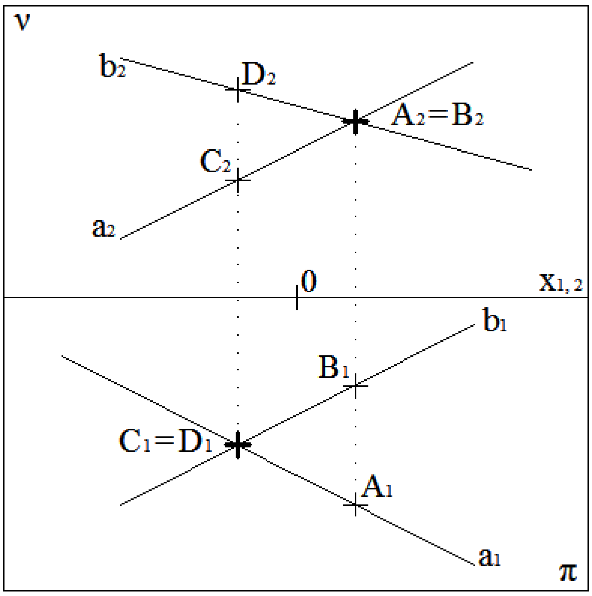
4.5 Viditelnost

„Mnohdy jsme nuceni u překrývajících se rovinných útvarů určit jejich viditelnost. V Mongeově promítání je třeba zvlášť rozhodnout o viditelnosti v půdorysně π a zvlášť v nárysně v.“ (3, s. 18)

„Směr promítání orientujeme tak, aby odpovídal názorné představě pohledu shora a zepředu, tedy tak, aby kladný smysl byl dán postupem z kladného poloprostoru určeného průmětnou (půdorysnou π, nárysnou v) do záporného poloprostoru. Ze dvou různých bodů *A, B* téže půdorysné promítací přímky je bod *A* viditelný, je-li $z_A > z_B$. Ze dvou různých bodů *A, B* téže nárysné promítací přímky je bod *A* viditelný, je-li $y_A > y_B$. (3, s. 18)

„O viditelnosti v půdorysně π rozhodneme, určíme-li z nárysných průmětů A_2, B_2 bodů *A, B*, který z těchto bodů má větší z-ovou souřadnici. Obdobně z půdorysných průmětů A_1, B_1 bodů *A, B*, určíme který z těchto bodů má větší y-ovou souřadnici a je tedy vidět v nárysně v.“ (3, s. 18)

Obr. 4.9 – Sdružené průměty přímek *a*, *b*, $a = \leftrightarrow AC$, $b = \leftrightarrow BD$, v nárysně v je viditelný bod *A*, v půdorysně π je viditelný bod *D*, *A*[1, 3.5, 3], *B*[1, 1.5, 3], *C*[-1, 2.5, 2], *D*[-1, 2.5, 3.5]



5. Metrické úlohy

„Jak vyplývá z názvu (metrien = měřit), metrická geometrie, na rozdíl od polohové, užívá pro studium geometrických útvarů pojmy související s měřením: velikost úsečky a velikost úhlu. Mezi metrické úlohy patří také všechny úlohy týkající se kolmosti.“ (10, s. 153)

„Všechny rovinné útvary, které leží buď přímo v některé hlavní průmětně (půdorysně π, nárysně *ν),* nebo v hlavní rovině, se zobrazí v jednom průmětu ve skutečné velikosti. Všechny ostatní útvary ležící v obecné rovině se zobrazí zkresleně. Pokud tedy chceme zkoumat skutečnou velikost útvarů, musíme tak učinit pouze převedením těchto útvarů do průmětny (půdorysny π, nárysny *ν)* nebo alespoň do hlavní roviny.“ (3, s. 19)

Mezi metrické úlohy patří:

- skutečná velikost úsečky,
- odchylka přímky od průmětny,
- odchylka roviny od průmětny,
- přímka kolmá k rovině,
- rovina kolmá k přímce,
- otáčení roviny do průmětny (půdorysny π, nárysny *ν).*

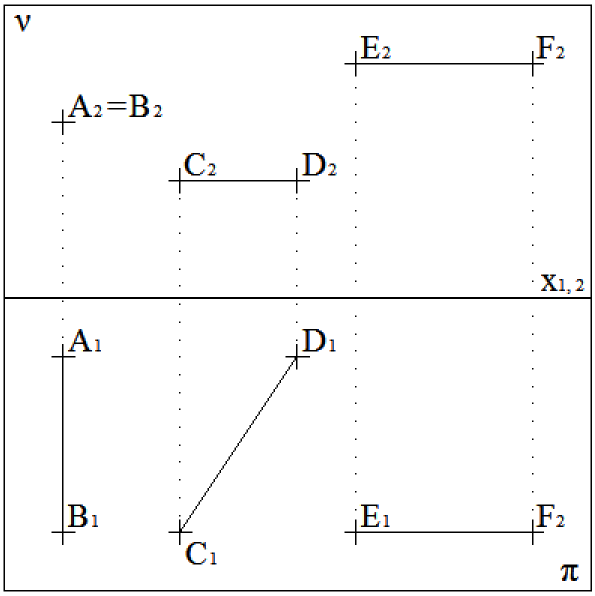
5.1 Skutečná velikost úsečky

„Sestrojení skutečné velikosti úsečky je nejzákladnější metrickou úlohou.“ (13, s. 162)

„Skutečná velikost úsečky, která je rovnoběžná s některou průmětnou, se rovná velikosti průmětu úsečky do této průmětny.

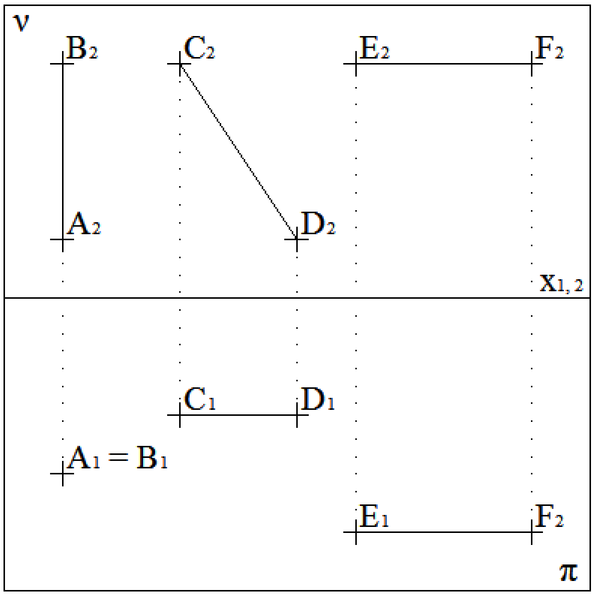
Je-li úsečka AB rovnoběžná s půdorysnou π, pak $|AB| = |A_1B_1|$.“ (3, s. 19)

Obr. 5.1 – Sdružené průměty úseček *AB*, *CD*, *EF* rovnoběžných s půdorysnou *π*



„Je-li úsečka *AB* rovnoběžná s nárysnou *ν*, pak $|AB| = |A_2B_2|$." (3, s. 19)

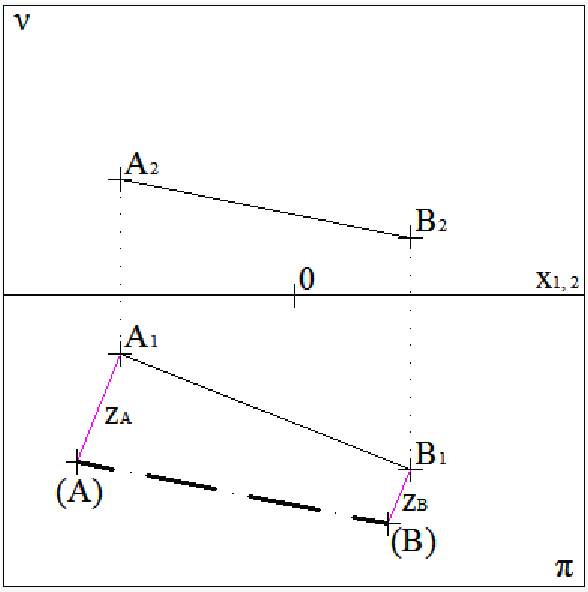
Obr. 5.2 – Sdružené průměty úseček *AB*, *CD*, *EF* rovnoběžných s nárysnou *ν*



5.2 Sklápění promítací roviny do průmětny

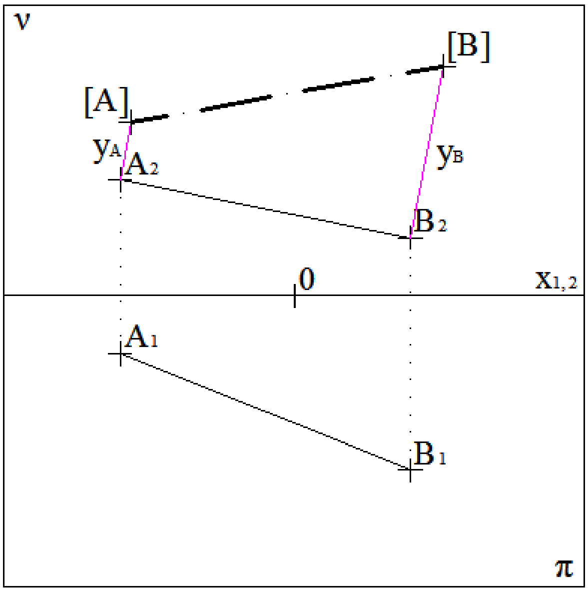
„Není-li úsečka rovnoběžná se žádnou průmětnou (půdorysnou *π*, nárysnou *v*), převedeme úsečku do některé průmětny (půdorysny *π*, nárysnou *v*) tak, že sklopíme promítací rovinu přímky, na které úsečka leží, buď do půdorysny *π* nebo do nárysny *v*. Při sklápění do půdorysny *π* se každý bod přímky pohybuje po kružnici, jejíž rovina je kolmá k promítací rovině přímky. Střed kružnice je přímo v průmětu bodu, poloměr kružnice je roven z-ové souřadnici bodu. **Sklopený bod *A***, označujeme ***(A)***, tedy najdeme na kolmici v bodě A_1 k úsečce A_1B_1 ve vzdálenosti z_A od bodu A_1. Obdobně obdržíme sklopený bod *B* – *(B)*. Velikost úsečky *AB* je tedy rovna velikosti úsečky *(A)(B)*.“ (3, s. 19)

Obr. 5.3 – Sklopení promítací roviny do půdorysny *π* – užití promítacího lichoběžníku, *A*[-3, 1, 2], *B*[2, 3, 1]



„Při sklápění do nárysny *v* postupujeme naprosto analogicky jako při sklápění do půdorysny *π*. Velikost úsečky AB je pak *[A][B]*.“ (3, s. 19)

Obr. 5.4 – Sklopení promítací roviny do nárysny *v* – užití promítacího lichoběžníku, *A*[-3, 1, 2], *B*[2, 3, 1]



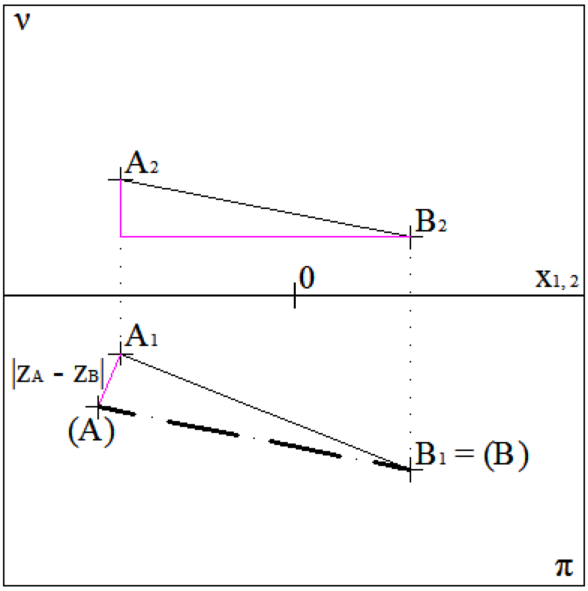
„Ke zjištění skutečné velikosti úsečky užíváme **promítací lichoběžník** (průměty bodů a sklopené průměty bodů tvoří vrcholy lichoběžníku).“ (3, s. 20)

„Místo do průmětny (půdorysny *π*, nárysny *v*) můžeme sklápět do některé hlavní roviny. Pokud zjišťujeme skutečnou velikost úsečky, s výhodou volíme hlavní rovinu procházející některým jejím krajním bodem.

Velikost úsečky *AB* určíme sklopením promítací roviny úsečky do hlavní roviny procházející bodem *B*.

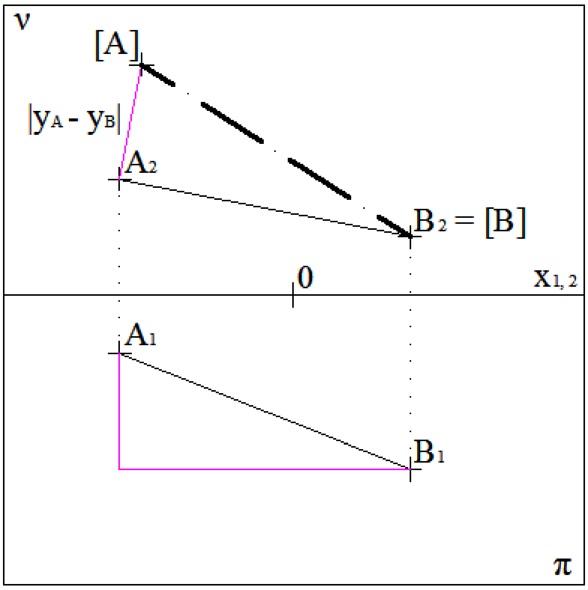
Sklopený bod *(B)* splývá se svým průmětem, poloměr kružnice při sklápění bodu *A* je roven $|z_A - z_B|$.“ (3, s. 20)

Obr. 5.5 – Sklopení promítací roviny do půdorysny π – užití rozdílového trojúhelníku, A[-3, 1, 2], B[2, 3, 1]



„Sklopený bod *[B]* splývá se svým průmětem, poloměr kružnice při sklápění bodu *A* je roven $|y_A - y_B|$." (3, s. 20)

Obr. 5.6 – Sklopení promítací roviny do nárysny ν – užití rozdílového trojúhelníku, A[-3, 1, 2], B[2, 3, 1]



„Při zjištění skutečné velikosti úsečky sklopením do některé hlavní roviny používáme **rozdílový trojúhelník** (nanášíme absolutní hodnotu rozdílu souřadnic). Rozdílového trojúhelníku využíváme zejména v případech velkých souřadnic bodů.“ (3, s. 20)

„Sestrojení skutečné velikosti úsečky provedeme vždy jen jednou metodou, která je pro sestrojení nejvhodnější.“ (12, s. 55)

5.3 Odchylka přímky od průmětny

„Odchylka přímky od průmětny (půdorysny π, nárysny ν) je ostrý úhel sevřený přímkou a jejím pravoúhlým průmětem do této průmětny (půdorysny π, nárysny ν).“ (12, s. 52)

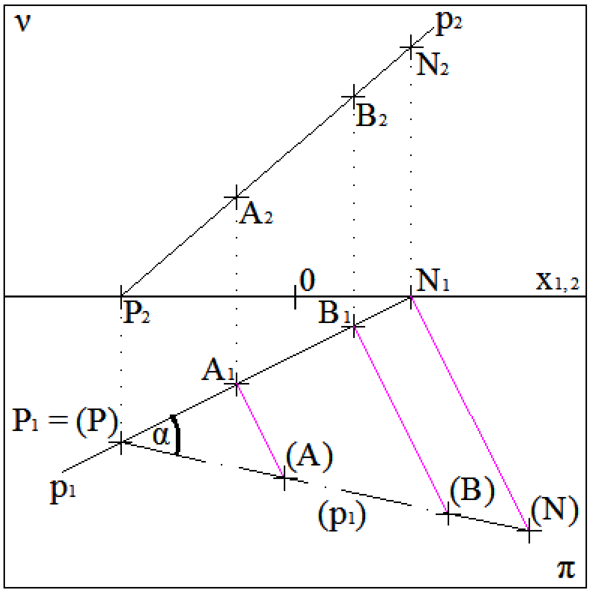
„Odchylce přímky od půdorysny π říkáme **půdorysná odchylka (první odchylka roviny),** značíme ji $\boldsymbol{\alpha}$. (3, s. 20)

„Odchylce přímky od nárysny ν říkáme **nárysná odchylka (druhá odchylka roviny)**, značíme ji $\boldsymbol{\beta}$. (3, s. 20)

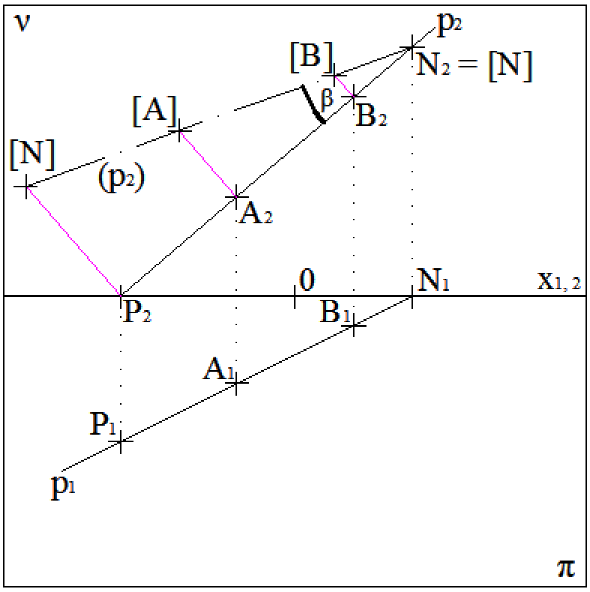
„Při stanovení skutečné velikosti půdorysné odchylky přímky p, si musíme uvědomit, že přímka p i její půdorysný průmět p_1 leží v téže půdorysné promítací rovině. Tuto promítací rovinu sklopíme do půdorysny π pomocí dvou jejich libovolných bodů – pokud možno, s výhodou použijeme půdorysný průmět P_1 půdorysného stopníku P, neboť $P_1 = (P)$. Odchylka přímky p od půdorysny π je rovna velikosti úhlu $\alpha = \angle p_1 (p)$.“ (3, s. 20)

„Při stanovení skutečné velikosti nárysné odchylky přímky p, si musíme uvědomit, že přímka p i její nárysný průmět p_2 leží v téže nárysné promítací rovině. Tuto promítací rovinu sklopíme do nárysny ν pomocí dvou jejich libovolných bodů – pokud možno, s výhodou použijeme nárysný průmět N_2 nárysného stopníku N, neboť $N_2 = (N)$. Odchylka přímky p od nárysny ν je rovna velikosti úhlu $\beta = \angle p_2 (p)$.“ (3, s. 20)

Obr. 5.7 – Odchylka α přímky p od půdorysny π, p = ↔AB, A[-1, 1.5, 2], B[1, 0.5, 3.5]



Obr. 5.8 – Odchylka β přímky p od nárysny v, p = ↔AB, A[-1, 1.5, 2], B[1, 0.5, 3.5]



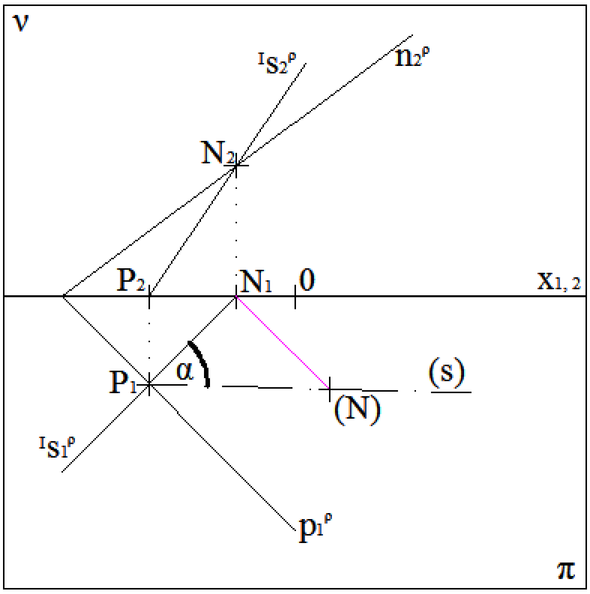
„Jestliže je přímka rovnoběžná právě s jednou průmětnou (půdorysnou π, nárysnou v), lze její odchylku od zbývající průmětny (půdorysny π, nárysny v) určit přímo bez sklápění.“ (12, s. 53)

„Jestliže je přímka rovnoběžná se základnicí $x_{1,2}$, jsou její odchylky od obou průměten (půdorysny π, nárysny v) nulové“ (12, s. 53)

5.4 Odchylka roviny od průmětny

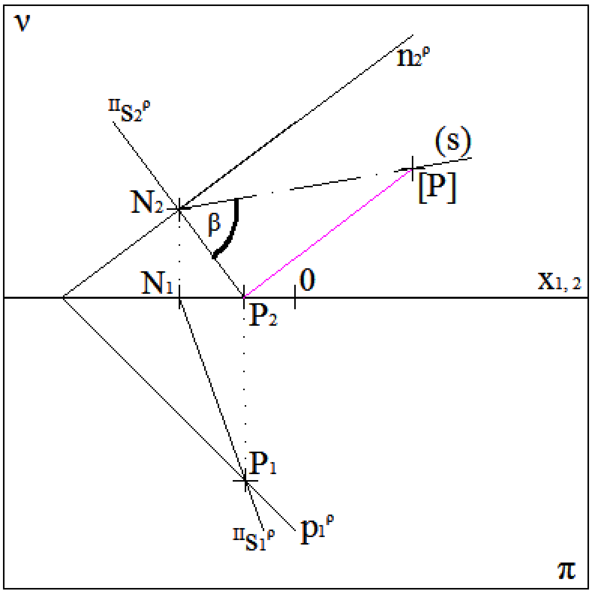
„Odchylka α roviny ρ od půdorysny π je úhel, který svírá rovina ρ s půdorysnou π. Nabývá hodnot od 0° do 90° a je rovna odchylce spádové přímky první osnovy od půdorysny π. Odchylka α spádové přímky od půdorysny π je úhel sevřený spádovou přímkou a jejím půdorysným průmětem. Úhel α sestrojíme sklopením odchylkového trojúhelníku do půdorysny π.“ (12, s. 73)

Obr. 5.9 – Odchylka α roviny ρ od půdorysny π, $\rho(-4, 4, 3)$



„Odchylka β roviny ρ od nárysny ν je úhel, který svírá rovina ρ s nárysnou ν. Je rovna odchylce spádové přímky druhé osnovy od nárysny ν. Může tedy nabývat hodnot od 0° do 90°. Odchylka β je sevřena spádovou přímkou druhé osnovy a jejím nárysným průmětem. Sestrojíme ji sklopením odchylkového trojúhelníku do nárysny ν.“ (12, s. 73)

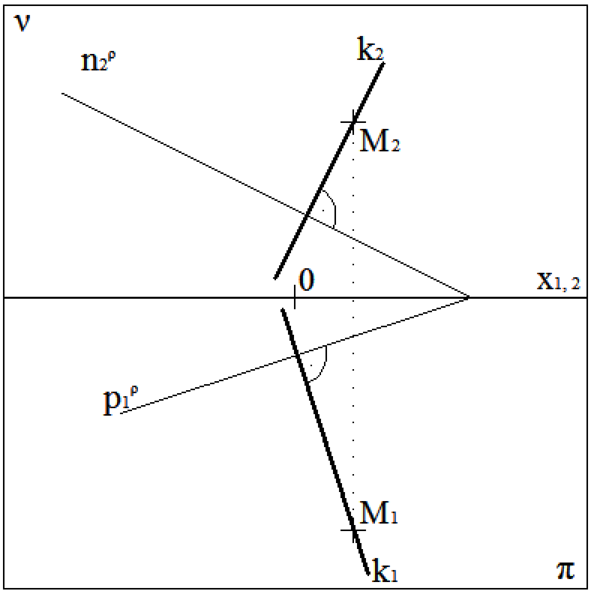
Obr. 5.10 – Odchylka β roviny ρ od nárysny ν, $\rho(-4, 4, 3)$



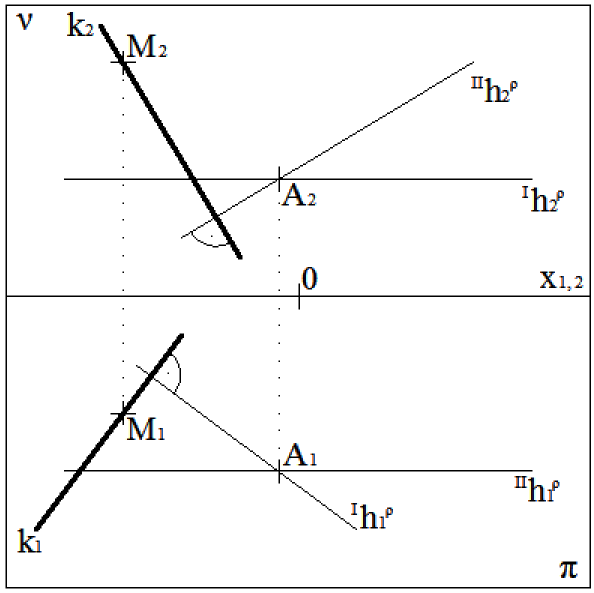
5.5 Přímka kolmá k rovině

„V Mongeově promítání se poměrně velmi snadno řeší úlohy týkající se vzájemné kolmosti přímek a rovin. Z definice přímky kolmé k rovině víme, že tato přímka je kolmá ke všem přímkám roviny. Je tedy kolmá i ke stopě roviny. Průmět přímky kolmé k rovině musí tedy být kolmý ke stopě roviny, neboť jedno rameno pravého úhlu (mezi přímkou a stopou roviny) leží přímo v průmětně (půdorysně *π*, nárysně *ν*). Je tedy půdorysný průmět přímky kolmé k rovině kolmý k půdorysné stopě (a tím i k půdorysným průmětům půdorysných hlavních přímek) a zároveň nárysný průmět kolmý k nárysné stopě (a tím i k nárysným průmětům nárysných hlavních přímek). Je-li rovina ρ rovnoběžná s některou průmětnou (půdorysnou *π*, nárysnou *ν*), je kolmice k ní promítací přímkou.“ (3, s. 21)

Obr. 5.11 – Přímka *k* kolmá k rovině *ρ*, přímka *k* je dána průměty stopy roviny *ρ* a prochází bodem *M*, *M*[1, 4, 3], *ρ*(3, 1, 1.5)



Obr. 5.12 – Přímka *k* kolmá k rovině *ρ,* přímka *k* je dána dvojicí hlavních přímek a prochází bodem *M*[-3, 2, 4]

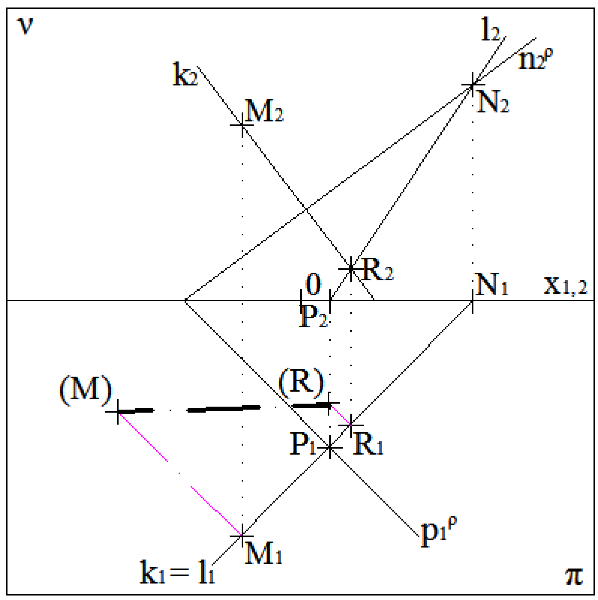


❖ **Určení vzdálenosti bodu od roviny**

„Úloha určit vzdálenost bodu *M* od roviny *ρ* sestává vlastně ze tří základních úloh:

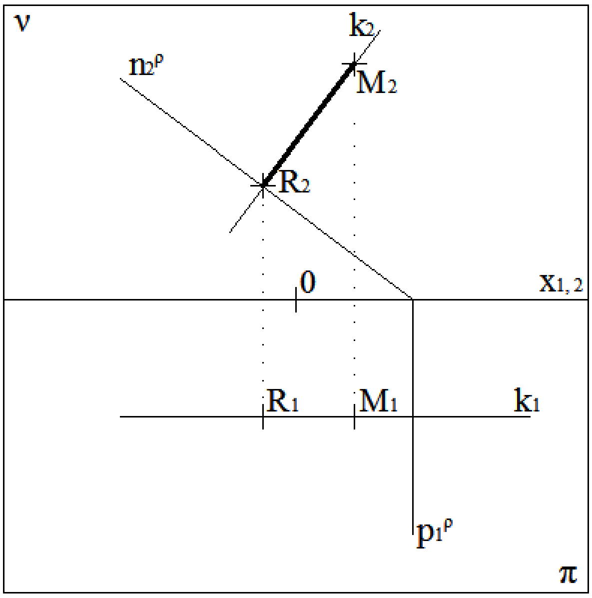
- bodem *M* vést kolmici *k* rovině *ρ,*
- určit průsečík *R* kolmice *k* s rovinou *ρ,*
- určit skutečnou velikost úsečky *MR*, což je vlastně vzdálenost bodu *M* od roviny *ρ.*“ (3, s. 22)

Obr. 5.13 – Vzdálenost bodu *M* od roviny *ρ, M*[-1, 4, 3], *ρ*(-2, 2, 1.5)



„Pokud je rovina ρ promítací, lze v jednom průmětu přímo zjistit vzdálenost bodu od této roviny.“ (3, s. 22)

Obr. 5.14 – Vzdálenost bodu *M* od roviny ρ, rovina ρ je promítací, *M*[1, 2, 4], ρ*(2, ∞, 1.5)*



5.6 Rovina kolmá k přímce

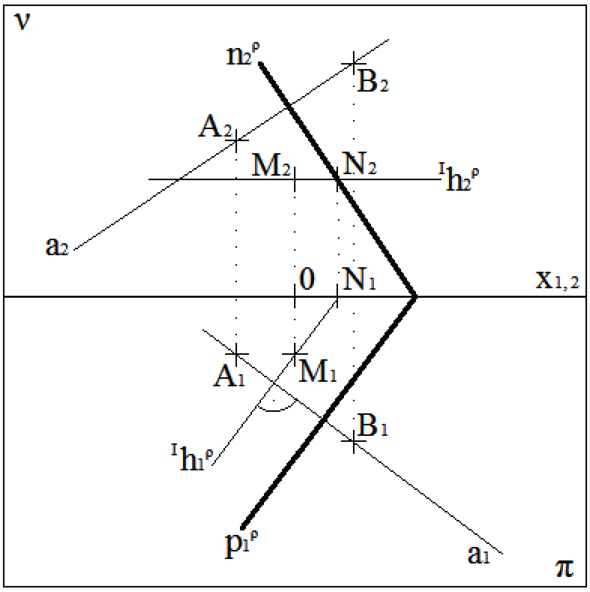
„Úloha, kdy je rovina kolmá k dané přímce je vlastně úloha opačná k úloze, kdy je přímka kolmá k rovině.“ (3, s. 23)

„Zobrazí-li se přímka kolmá k rovině jako kolmice ke stopám roviny, pak obráceně rovina kolmá k přímce musí mít stopy kolmé k průmětům přímky. Jsou-li stopy kolmé k průmětům přímky, jsou kolmé k průmětům přímky i odpovídající průměty hlavních přímek. Je tedy půdorysný průmět ${}^{I}h_1^{\rho}$ hlavní přímky první osnovy roviny ρ kolmý k půdorysnému průmětu dané přímky a zároveň nárysný průmět ${}^{II}h_2^{\rho}$ hlavní přímky druhé osnovy kolmý k nárysnému průmětu dané přímky. Z toho vyplývá konstrukce roviny ρ procházející daným bodem kolmo k dané přímce. Daným bodem vedeme některou z hlavních přímek roviny ρ.“ (3, s. 23)

„Vedeme-li daným bodem některou z hlavních přímek roviny ρ, například ${}^{I}h^{\rho}$, pak, půdorysný průmět ${}^{I}h_1^{\rho}$ hlavní přímky první osnovy je kolmý k půdorysnému průmětu dané přímky, nárysný průmět ${}^{I}h_2^{\rho}$ hlavní přímky první osnovy je rovnoběžný se základnicí $x_{1,2}$. Poté najdeme nárysný průmět N_2 nárysného stopníku N ležící na nárysném průmětu ${}^{I}h_2^{\rho}$ hlavní přímky první osnovy, tímto nárysným průmětem N_2 nárysného stopníku N prochází nárysná stopa n_2^{ρ} kolmá k nárysnému průmětu dané přímky.

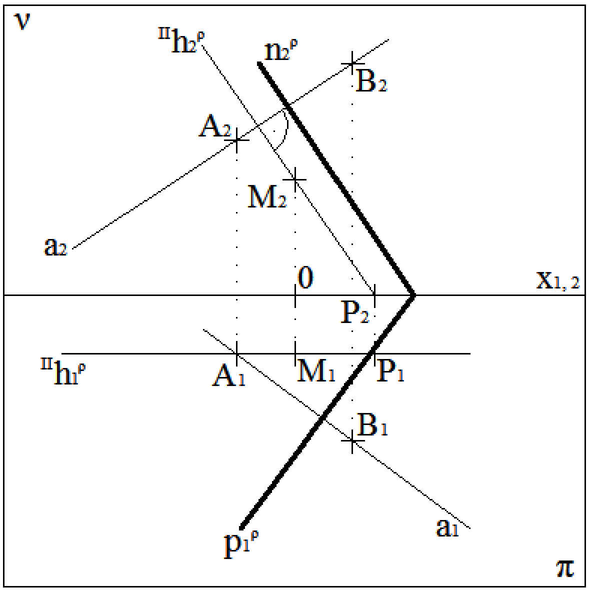
Pak je půdorysná stopa p_1^{ρ} roviny ρ kolmá k půdorysnému průmětu dané přímky.“ (3, s. 23)

Obr. 5.15 – Rovina ρ kolmá k přímce a vedená bodem M – řešení pomocí ${}^{I}h^{\rho}$, $a = \leftrightarrow AB$, $A[-1, 1, 2.5]$, $B[1, 2.5, 4]$, $M[0, 1, 2]$



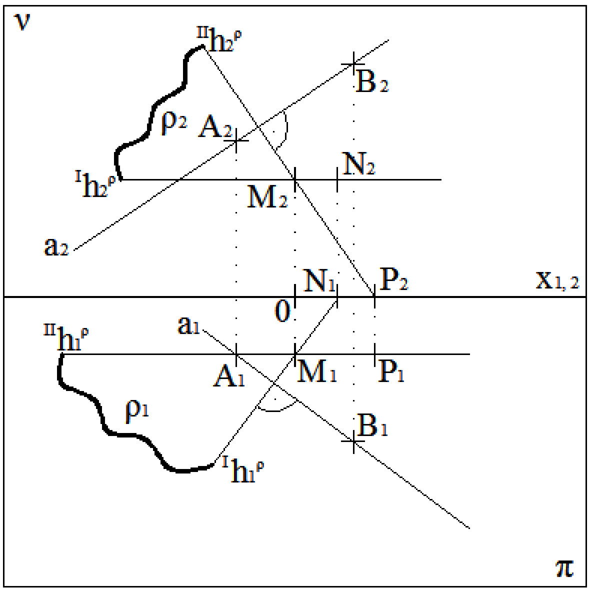
„Stejný výsledek dostaneme, použijeme-li následující řešení: Vedeme-li daným bodem některou z hlavních přímek roviny ρ, například ${}^{II}h^{\rho}$, pak, nárysný průmět ${}^{II}h_2^{\rho}$ hlavní přímky druhé osnovy je kolmý k nárysnému průmětu dané přímky, půdorysný průmět ${}^{II}h_1^{\rho}$ hlavní přímky druhé osnovy je rovnoběžný se základnicí $x_{1,2}$. Poté najdeme půdorysný průmět P_1 půdorysného stopníku P ležící na půdorysném průmětu ${}^{II}h_1^{\rho}$ hlavní přímky druhé osnovy, tímto půdorysným průmětem P_1 půdorysného stopníku P prochází půdorysná stopa p_1^{ρ} roviny ρ kolmá k půdorysnému průmětu dané přímky. Pak je nárysná stopa n_2^{ρ} roviny ρ kolmá k nárysnému průmětu dané přímky.“ (3, s. 23)

Obr. 5.16 – Rovina ρ kolmá k přímce *a* vedená bodem *M* – řešení pomocí ${}^{II}h^{\rho}$, $a = \leftrightarrow AB$, *A*[-1, 1, 2.5], *B*[1, 2.5, 4], *M*[0, 1, 2]



„Rovinu můžeme zachytit i jinak – daným bodem vedeme obě hlavní přímky (${}^{I}h^{\rho}$, ${}^{II}h^{\rho}$). Tato dvojice přímek plně určuje rovinu ρ kolmou k dané přímce.“ (3, s. 23)

Obr. 5.17 – Rovina ρ kolmá k přímce *a* vedená bodem M, $a = \leftrightarrow AB$, *A*[-1, 1, 2.5], *B*[1, 2.5, 4], *M*[0, 1, 2]

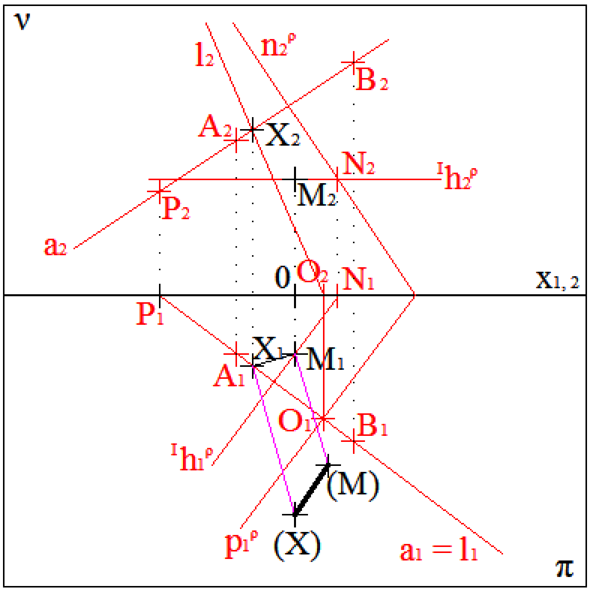


❖ Určení vzdálenosti bodu od přímky

„Víme, že obecně nelze přímo zobrazit z daného bodu kolmici k přímce tak, aby ji protínala /obecně se pravý úhel nezobrazí jako pravý/. Všechny přímky vedené daným bodem kolmo k dané přímce vyplní rovinu ρ procházející daným bodem kolmo k dané přímce. Postup řešení této úlohy je následující:

- daným bodem - M vedeme rovinu ρ kolmou k dané přímce,
- určíme průsečík X roviny ρ s danou přímkou,
- skutečná velikost úsečky MX je pak vzdálenost daného bodu M od dané přímky.“ (3, s. 24)

Obr. 5.18 – Vzdálenost bodu M od přímky a, $a = \leftrightarrow AB$, $A[-1, 1, 2.5]$, $B[1, 2.5, 4]$, $M[0, 1, 2]$



5.7 Otáčení roviny do průmětny (půdorysny *π*, nárysny *ν*)

„Konstruktivní úlohy v rovinách kolmých k některé průmětně (půdorysně *π*, nárysně *ν*) řešíme nejčastěji sklopením těchto rovin do průmětny (půdorysny *π*, nárysny *ν*). Rovinu kolmou k půdorysně *π* sklápíme do půdorysny *π* pomocí *z*-ových souřadnice bodů ležících v rovině. Rovinu kolmou k nárysně *ν* sklápíme do nárysny ν pomocí *y*-ových souřadnice bodů ležících v rovině.

Ve sklopení provedeme potřebnou konstrukci a nalezený výsledek zobrazíme v obou průmětech tak, že jednotlivé průměty bodů odvodíme ze sklopení zpětným pochodem." (12, s. 98)

„Konstruktivní úlohy v obecné rovině řešíme otočením dané roviny do průmětny (půdorysny *π*, nárysny *ν*) nebo do roviny rovnoběžné s průmětnou." (12, s. 98)

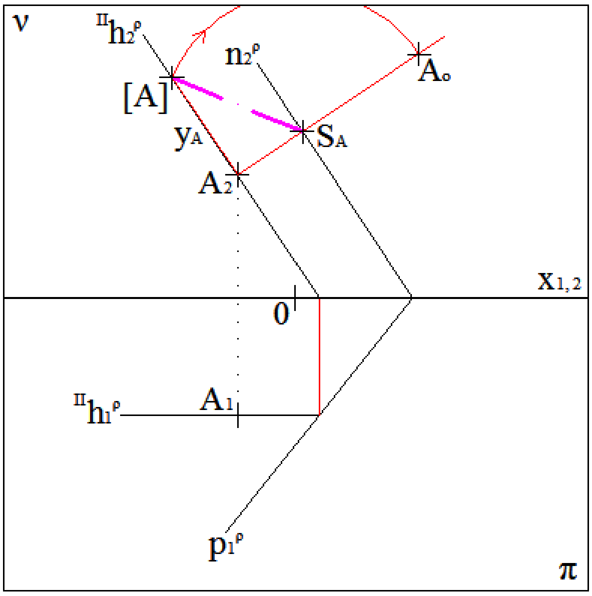
„**Osa otáčení *o*** je přímka, kolem které se útvary otáčejí. Body osy zůstávají při otáčení na místě (vzhledem k ose otáčení jsou samodružné). Nechť *A* je bod otáčeného útvaru. Bod *A* se otáčí v *rovině otáčení τ*, která jím prochází a je kolmá k ose otáčení *o*. Rovina *τ* protne osu otáčení *o* v bodě ***S***, který nazýváme **středem otáčení** bodu *A*. Bod *A* se při otáčení pohybuje po kružnici otáčení k^A, jejíž poloměr $r^A = SA$ se nazývá **poloměr otáčení**. Poloměr otáčení r^A bodu *A* určíme ve sklopení roviny *τ* do průmětny (půdorysny *π*, nárysny *ν*)." (12, s. 99)

„Máme-li sestrojit útvar v rovině, která je vzhledem k průmětnám (půdorysně *π*, nárysně *ν*) v obecné poloze, musíme tuto rovinu otočit tak, aby útvary v ní ležící, se po promítnutí jevily ve skutečné velikosti. Proto obecně položenou rovinu otáčíme do:

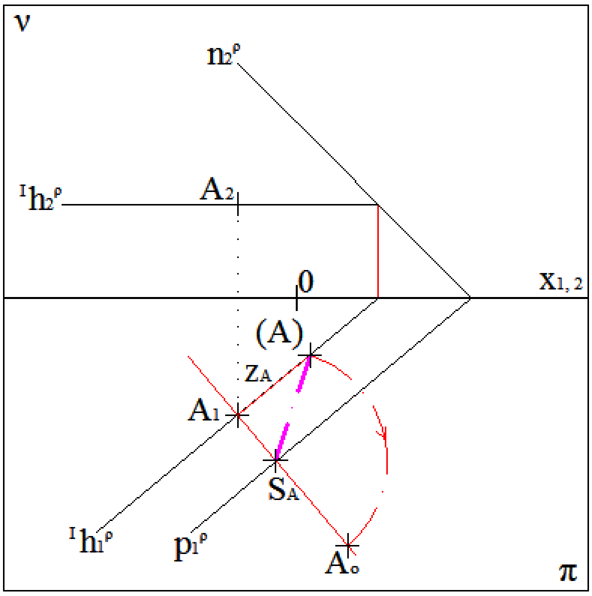
- půdorysny *π*, nebo do roviny s půdorysnou *π* rovnoběžné,
- nárysny *ν*, nebo do roviny s nárysnou *ν* rovnoběžné.

Otáčíme-li do půdorysny *π*, nebo nárysny *ν*, otáčíme podle hlavní přímky I. osnovy, nebo II. osnovy. Osa otáčení je tedy příslušná stopa p_1^ρ, nebo n_2^ρ, nebo hlavní přímka ${}^{I}h^\rho$, nebo ${}^{II}h^\rho$. Roviny otáčení jsou kolmé k půdorysně *π*, nebo k nárysně *ν* a jeví se v půdorysném, nebo nárysném průmětu jako přímky. Středy otáčení jsou průsečíky roviny otáčení *τ* s osou otáčení *o*. Skutečnou velikost poloměru otáčení sestrojíme užitím půdorysného, nebo nárysného promítacího trojúhelníku. Otočené body označíme např. A_0, B_0, ..., podle názvů bodů, které jsme otáčeli.“ (12, s. 99)

Obr. 5.19 – Otočení roviny ρ do půdorysny π, $A[-1, 2, ?]$, $\rho(2, 2.5, 3)$



Obr. 5.20 – Otočení roviny ρ do nárysny v, $A[-1, 2, ?]$, $\rho(2, 2.5, 3)$



„Přímka roviny rovnoběžná s osou otáčení (hlavní přímka) je rovnoběžná s osou i po otočení. Přímka roviny kolmá k ose otáčení (spádová přímka) se po otočení ztotožní se svým průmětem.“ (12, s. 100)

„Touto konstrukcí přicházíme k důležité závislosti otočeného útvaru a jeho průmětu v nákresně. Využitím této závislosti lze jeden útvar z druhého odvodit. Tato geometrická závislost (geometrická příbuznost) se nazývá osová afinita.“ (12, s. 100)

❖ **Osová afinita**

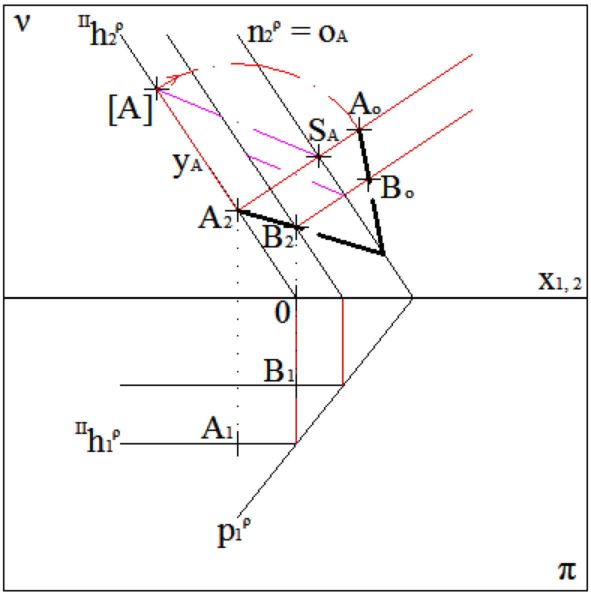
„Osová afinita = afinita.

Afinita má tyto vlastnosti:

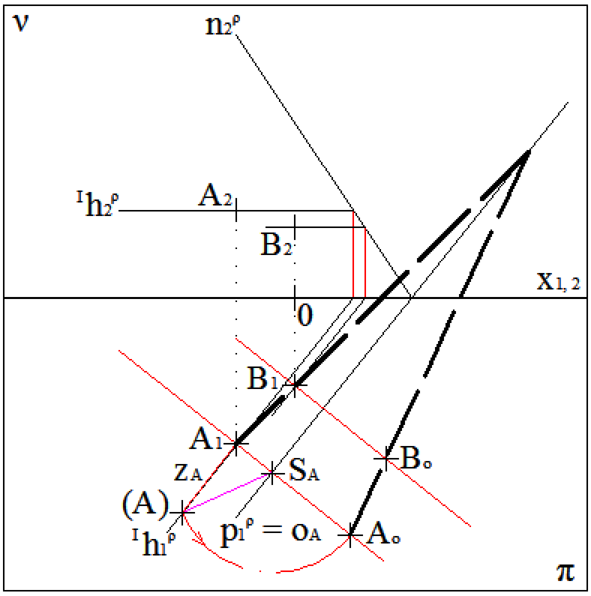
- Odpovídající si body A_1 a A_0, B_1 a B_0, ... leží na přímkách, které jsou navzájem rovnoběžné. Směr přímek A_1A_0, B_1B_0, ... spojujících v afinitě si odpovídající body se nazývá **směr afinity**. Bodu A_1 je přiřazen jediný bod A_0 a opačně bodu A_0 odpovídá jediný bod A_1.
- Přímkám a_1, b_1, ... odpovídají přímky a_0, b_0, ... Odpovídající si přímky se protínají na ose afinity. Průsečíky přímek s osou afinity jsou samodružné body.
- Leží-li bod A_1 na přímce c_1, pak odpovídající bod A_0 leží na přímce c_0.
- Rovnoběžným přímkám odpovídají zase přímky rovnoběžné.
- Na rovnoběžkách s osou afinity se zachovává délka úsečky.
- Půlícímu bodu S úsečky AB odpovídá půlící bod S_0 úsečky A_0B_0.
- Poměr úseků vymezených na přímce rovnoběžné se směrem afinity v afinitě si odpovídajícími nesamodružnými body a bodem osy (např. $A_1S_A : A_0S_A$), je pro všechny dvojice odpovídajících si bodů týž. Tento poměr úseků se nazývá **charakteristika afinity**.“ (12, s. 101)

„Afinita je určena osou a dvojicí si odpovídajících bodů A_1, A_0, z nichž žádný neleží na ose afinity.“ (12, s. 101)

Obr. 5.21 – Otočení roviny ρ do půdorysny π pomocí osové afinity A[-1, 2.5, ?], B[0, 1.5, ?], ρ(2, 2.5, 3)



Obr. 5.22 – Otočení roviny ρ do nárysny ν pomocí osové afinity, A[-1, 2.5, ?], B[0, 1.5, ?], ρ(2, 2.5, 3)



6. Zobrazení v Mongeově promítání

6.1 Zobrazení kružnice

„Abychom mohli v Mongeově promítání zobrazit oblá tělesa, jako např. rotační válec a kužel, musíme umět zobrazit kružnici.“ (3, s. 26)

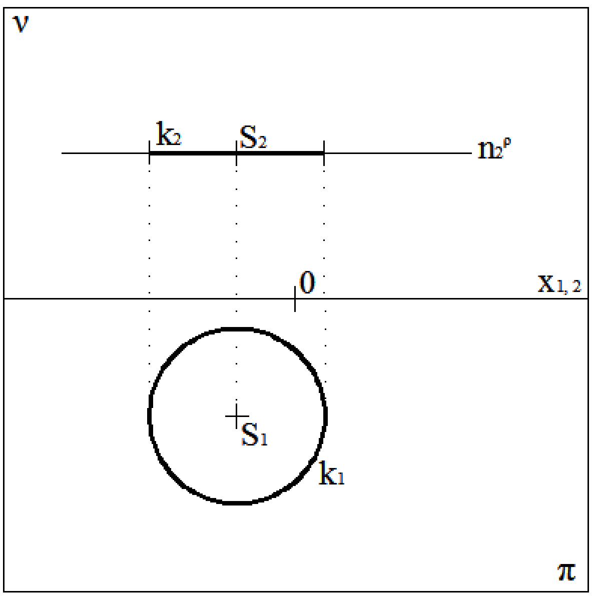
„Kružnice v prostoru je určena středem, poloměrem a rovinou, ve které leží.

Pravoúhlým průmětem kružnice je:

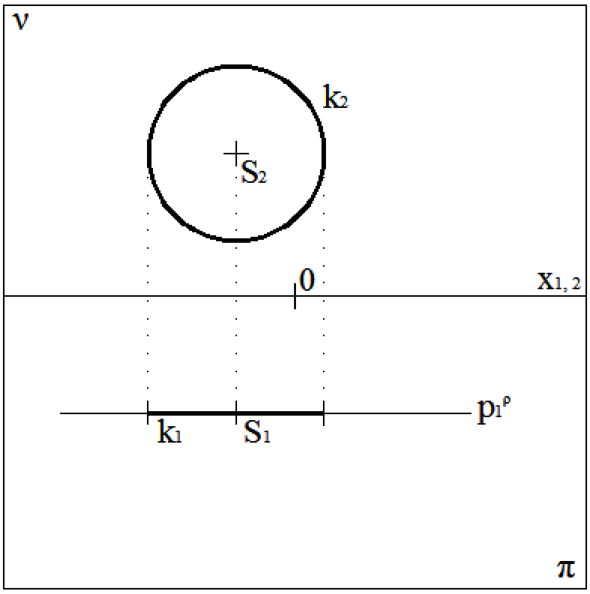
- shodná kružnice, jestliže rovina kružnice je rovnoběžná s průmětnou (půdorysnou *π*, nárysnou *v*),
- úsečka velikosti průměru kružnice, jestliže rovina kružnice je kolmá k průmětně (půdorysně *π*, nárysně *v*),
- elipsa, jestliže rovina kružnice je v obecné poloze vzhledem k průmětně (půdorysně *π*, nárysně *v*).“ (1, s. 44)

„Je-li rovina kružnice rovnoběžná s průmětnou (půdorysnou *π*, nárysnou *v*), je průmětem kružnice do této průmětny (půdorysny *π*, nárysny *v*) shodná kružnice. Druhým průmětem je úsečka o velikosti *2r*.“ (1, s. 44)

Obr. 6.1 – Kružnice *k*, která leží v rovině rovnoběžné s půdorysnou *π*, *k*(S, 1.5), *S*[-1, 2, 2.5]

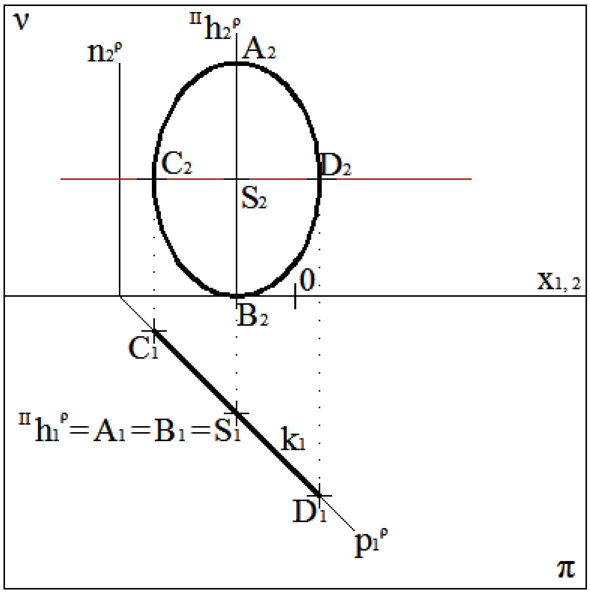


Obr. 6.2 – Kružnice *k*, která leží v rovině rovnoběžné s nárysnou *ν*, *k*(S, 1.5), *S*[-1, 2, 2.5]



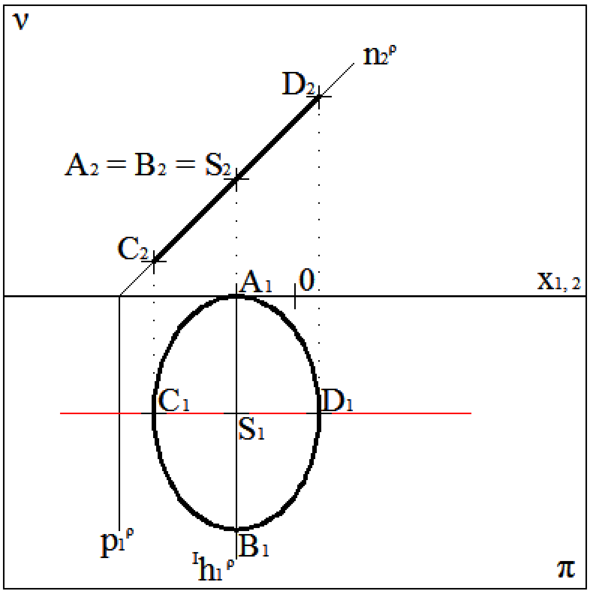
„Je-li rovina kružnice promítací, je jedním průmětem kružnice úsečka. Je-li rovina ρ kolmá k nárysně ν a kosá k půdorysně π, pak nárysným průmětem kružnice ležící v této rovině je úsečka o středu *S* a velikosti *2r* a půdorysným průmětem je elipsa. Při promítání do půdorysny π dojde ke zkrácení všech průměrů kružnice až na jeden, který leží na přímce rovnoběžné s půdorysnou π – půdorysné hlavní přímce. Velikost tohoto průměru se zachovává (je rovna *2r*) a tento průměr bude tedy hlavní osou elipsy. Nejvíce se promítáním zkrátí průměr ležící na spádové přímce roviny ρ – ten pak bude vedlejší osou elipsy. Půdorysné průměty vedlejších vrcholů odvodíme přímo z nárysu *ν*.“ (3, s. 26)

Obr. 6.3 – Kružnice k, která leží v rovině kolmé k půdorysně π, $\rho(-3, 3, \infty)$, $k(S, 2)$, $S[-1, 2, 2]$



„Je-li rovina ρ kolmá k půdorysně π a kosá k nárysně v, pak půdorysným průmětem kružnice ležící v této rovině je úsečka o středu S a velikosti $2r$ a nárysným průmětem je elipsa. Při promítání do nárysny v dojde ke zkrácení všech průměrů kružnice až na jeden, který leží na přímce rovnoběžné s nárysnou v – nárysné hlavní přímce. Velikost tohoto průměru se zachovává (je rovna $2r$) a tento průměr bude tedy hlavní osou elipsy. Nejvíce se promítáním zkrátí průměr ležící na spádové přímce roviny ρ – ten pak bude vedlejší osou elipsy. Nárysné průměty vedlejších vrcholů odvodíme přímo z půdorysného průmětu.“ (3, s. 26)

Obr. 6.4 – Kružnice k, která leží v rovině kolmé k nárysně v, $\rho(-3, \infty, 3)$, $k(S, 2)$, $S[-1, 2, 2]$



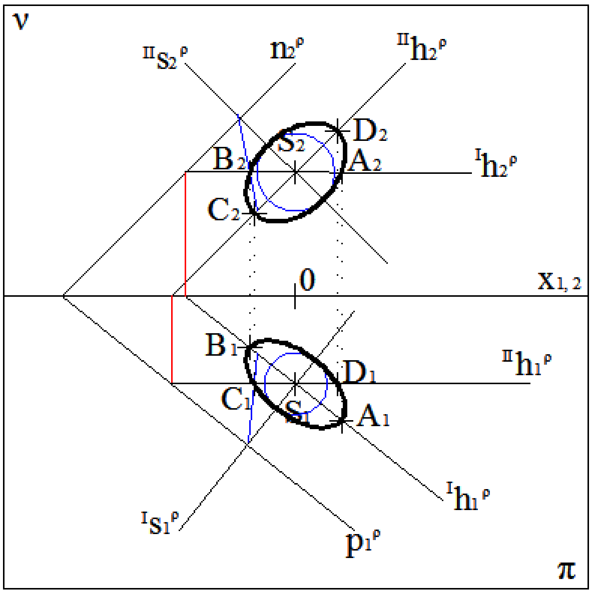
„Průmětem kružnice ležící v obecné rovině je elipsa.

Pokud kružnice leží v rovině kosé k oběma průmětnám (půdorysně π, nárysně v), budou oba průměty kružnice elipsy. Opět bude platit, že jediný průměr kružnice, který se promítáním nezmění, bude ležet na půdorysné či nárysné hlavní přímce. Hlavní osa elipsy v půdorysně π bude tedy ležet na půdorysné hlavní přímce $^Ih_1^\rho$ roviny ρ procházející bodem S, v nárysně v pak na nárysné hlavní přímce $^{II}h_2^\rho$ roviny ρ procházející bodem S a v obou případech bude velikost hlavní poloosy rovna poloměru r kružnice. (3, s. 26)

K sestrojení vedlejších vrcholů použijeme např. tuto konstrukci: najdeme druhý průmět některého z hlavních vrcholů – např. A_1', B_2 na odpovídající hlavní přímce. V obou průmětech je pak elipsa určena hlavní osou a bodem, proužkovou konstrukcí (zvlášť v půdorysně π a zvlášť v nárysně v) určíme velikost vedlejší poloosy. Musíme však dávat pozor, neboť při konstrukci hlavní vrcholy elipsy v půdorysně π a nárysně v nejsou odpovídající si body a neleží tudíž obecně na ordinálách.“ (3, s. 27)

„V případě, že pro kružnici známe jiné určující prvky než střed S a poloměr r, pak úlohy většinou řešíme otočením roviny kružnice do některé průmětny (půdorysny π, nárysny v).“ (3, s. 27)

Obr. 6.5 – Kružnice k, která leží v obecné rovině *ρ, ρ*(-4, 3, 4), *k*(S, 1), *S*[0, 1.5, 2]



6.2 Zobrazení těles

„Půdorysným, nárysným průmětem jednoduchého tělesa v Mongeově promítání je množina půdorysných (nárysných) průmětů všech bodů tohoto tělesa. Konstrukce sdružených průmětů jednoduchého tělesa je nejpohodlnější, je-li toto těleso v základní poloze, tj. je-li umístěno v prvním kvadrantu tak, že jedna jeho podstava leží v některé průmětně (půdorysně π, nárysně ν).“ (6, s. 148)

„Pro určení sdružených obrazů jednoduchého hranatého tělesa stačí, jestliže určíme sdružené průměty všech jeho hran.“ (6, s. 148)

„Sdružené průměty válců a kuželů jsou ohraničeny částmi průmětů podstavných hran a průměty tzv. obrysových stran. Příslušnou hranici nazýváme půdorysným (nárysným) obrysem oblého tělesa. (6, s. 150)

„V praxi se často vyskytují tělesa složená z jednoduchých těles nebo z jejich částí. Dbáme na to, aby v každém průmětu byly vyznačeny všechny hrany vyskytující se na tělese, přičemž viditelné vytahujeme silně a neviditelné čárkovaně.“ (6, s. 152)

„Zobrazování složitějších těles – strojních součástí – tvoří důležitou součást tzv. technického kreslení. Při kreslení technických výkresů se však kromě zásad deskriptivní geometrie uplatňují i požadavky praxe.“ (6, s. 154)

PRAKTICKÁ ČÁST 1

7. Konstrukční úlohy - polohové a metrické úlohy

7.1 Úloha 1

- **Zadání úlohy:**

„Bodem A veďte přímku k kolmou k rovině $\rho = \leftrightarrow KLM$.

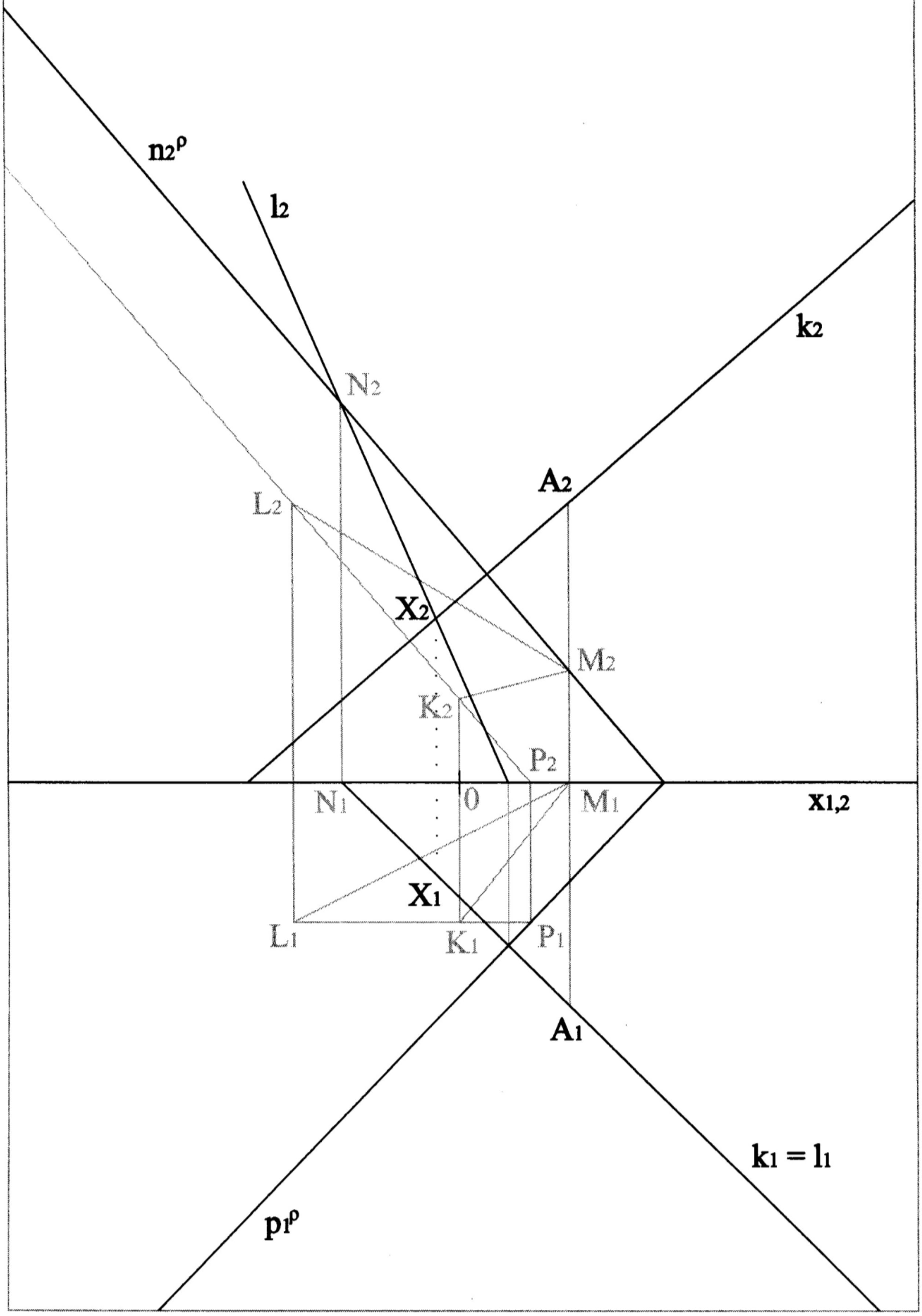
$A[2, 4, 5]$, $K[0, 2.5, 1.5]$, $L[-3, 2.5, 5]$, $M[2, 0, 2]$." (1, str. 49, úl. 18)

- **Řešení úlohy:**

Pomocí bodů K, L, M vyneseme rovinu α a zkonstruujeme její půdorysnou a nárysnou stopu. Půdorysným průmětem bodu A sestrojíme kolmici na půdorysnou stopu roviny α, a její krycí přímku pomocí stopníků přeneseme do nárysny v. Průnik přímky k s rovinou α nejprve určíme v nárysně v jako průsečík krycí přímky s kolmicí vedenou průmětem bodu A na nárysnou stopu a pak jej přeneseme do půdorysny π.

7.1 Kolmice vedená bodem A k rovině ρ

ρ(K[0; 2,5; 1,5], L[-3; 2,5; 5], M[2; 0; 2]); A[2; 4; 5]



7.2 Úloha 2

- **Zadání úlohy:**

„Sestrojte roviny, které mají od dané roviny ρ vzdálenost 30 mm.

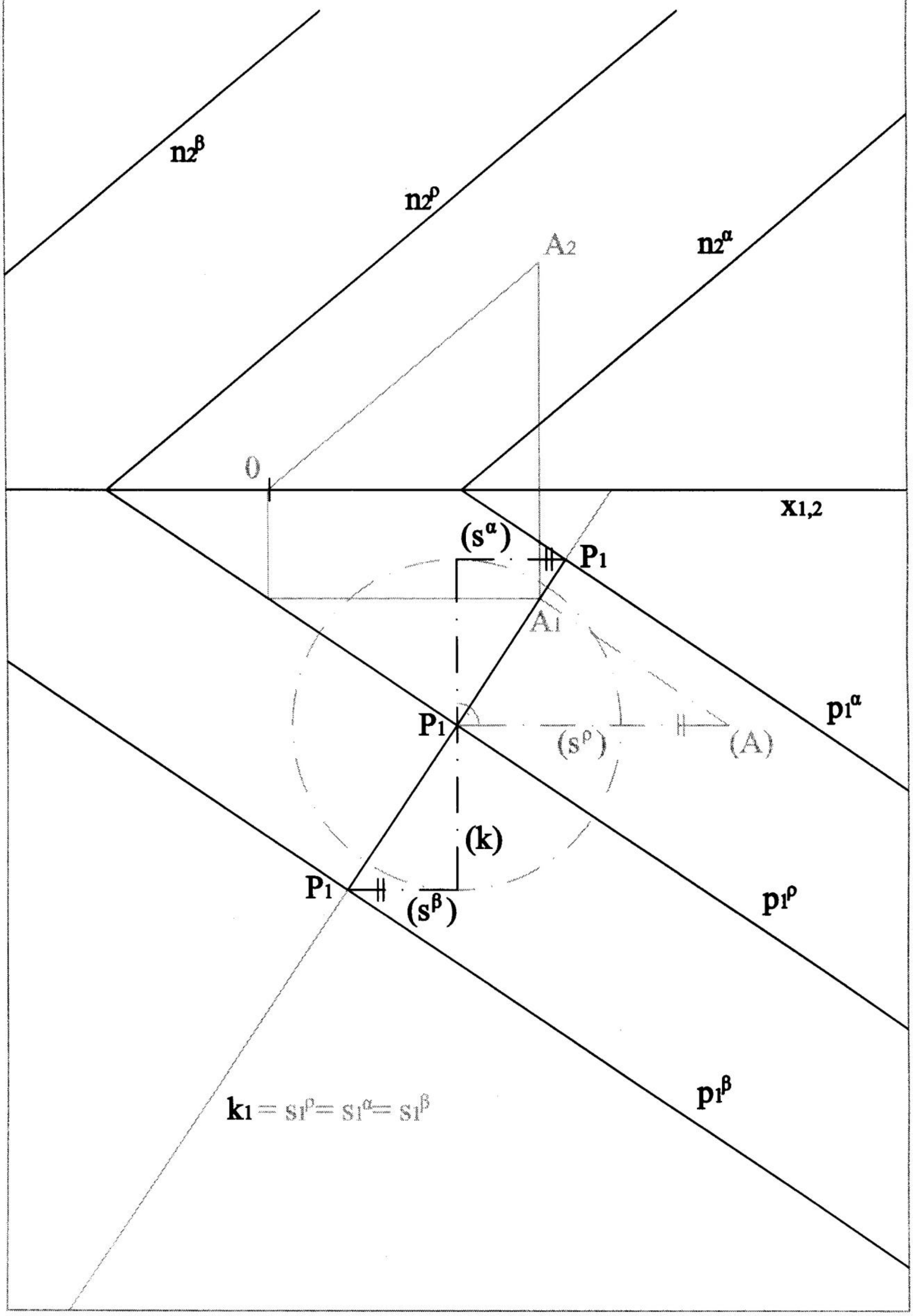
ρ(-3, 2, 2.5).“ (12, str. 92, úl. 4.61)

- **Řešení úlohy:**

Vyneseme rovinu ρ a v půdorysně π zkonstruujeme spádovou přímku procházející půdorysným průmětem bodu A. Na spádovou přímku ve sklopení sestrojíme kolmici procházející jejím stopníkem od nějž na ni vyneseme požadovanou vzdálenost. Od takto získaných bodů spustíme rovnoběžky se spádovou přímkou ve sklopení a sestrojíme jejich stopníky, jenž jsou stopníky hledaných dvou rovin. Vzniklými stopníky proložíme roviny rovnoběžně s rovinou ρ, čímž v půdorysně π i v nárysně ν dostáváme stopy rovin rovnoběžné se stopami roviny ρ.

7.2 Roviny ležící ve vzdálenosti 30 mm od roviny ρ

ρ(-3; 2; 2,5)



7.3 Úloha 3

- **Zadání úlohy:**

„Určete vzdálenost bodu *A* od roviny ρ.

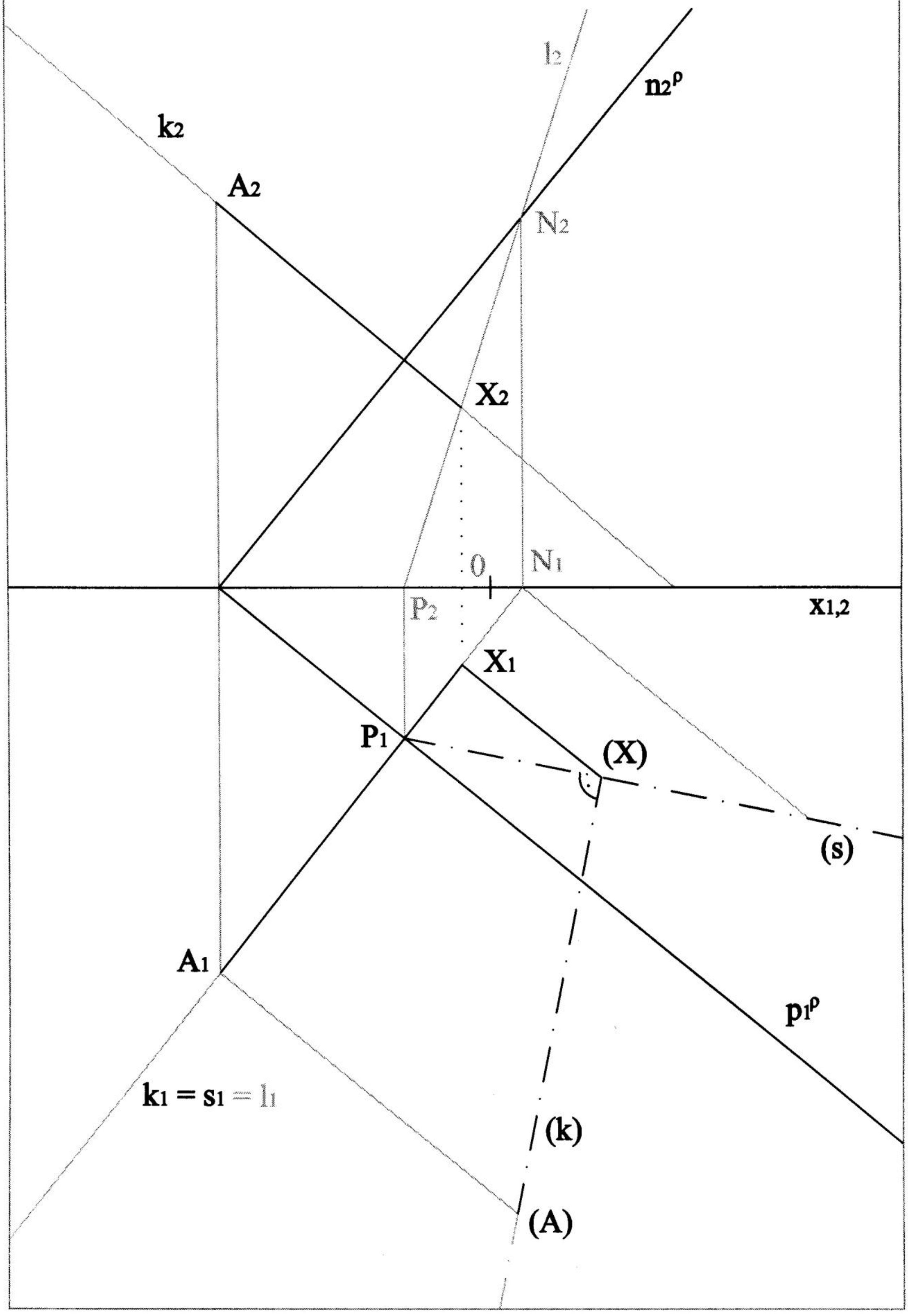
A[-5, 7, 7], ρ(-5, 4, 6).“ (1, s. 50, úl. 20)

- **Řešení úlohy:**

Průměty bodu *A* proložíme přímku kolmou na stopy roviny. Její půdorysnou krycí přímku přeneseme do nárysny a vzniklý průsečík s kolmicí na nárysnou stopu roviny označíme jako nárysný průmět bodu *X*. Sklopením přímky *AX* v půdorysně určíme vzdálenost *AX* ve skutečnosti.

7.3 Vzdálenost bodu A od roviny ρ

$\rho(-5;\ 4;\ 6)$; $A[-5;\ 7;\ 7]$



7.4 Úloha 4

❖ **Zadání úlohy:**

„Trojúhelník *ABC* leží v rovině ρ. Určete jeho skutečnou velikost.

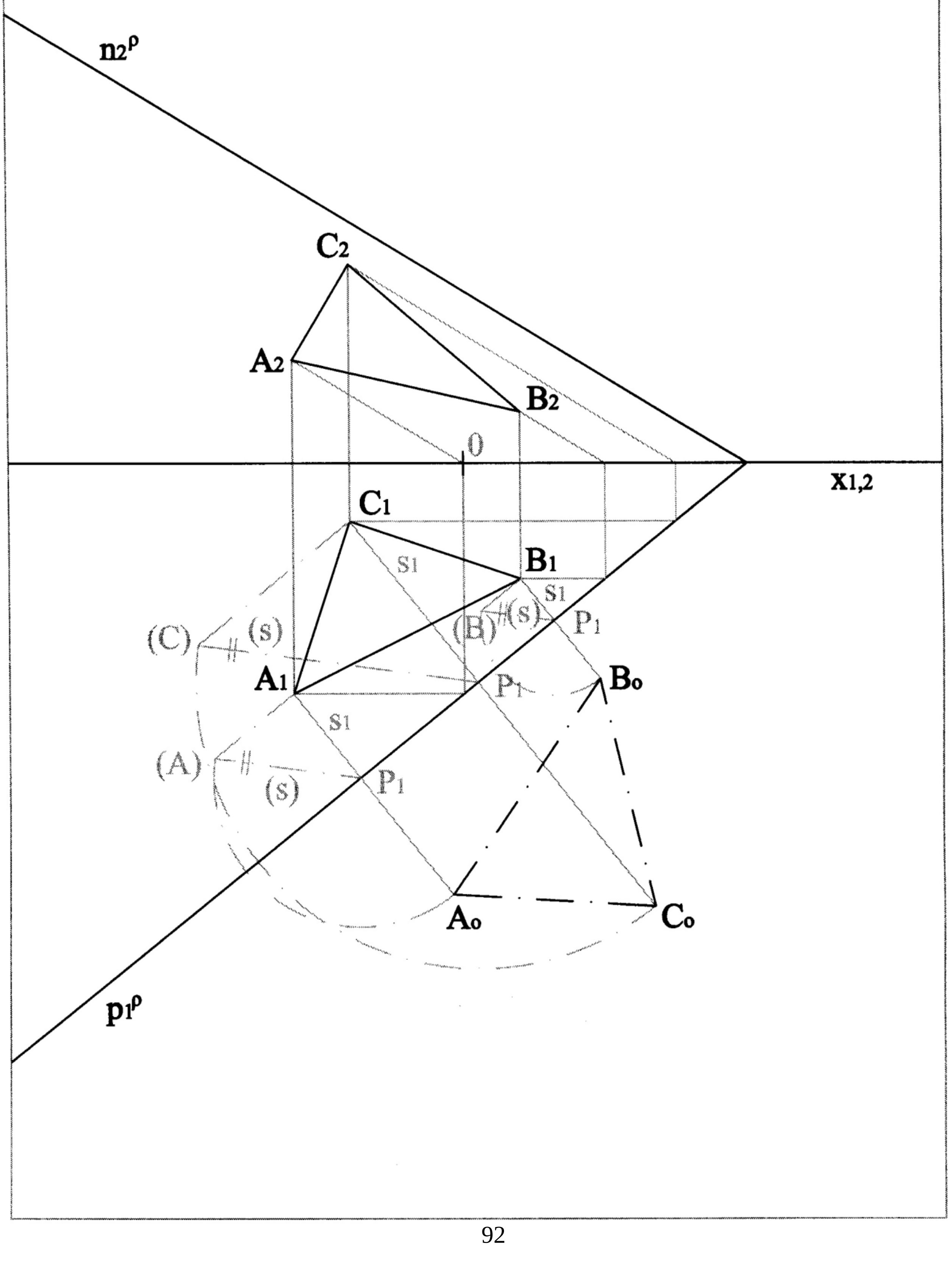
A[-3, 4, ?], *B*[1, 2, ?], *C*[-2, 1, ?], ρ(5, 4, 3).“ (12, s. 100, úl. 4.66)

❖ **Řešení úlohy:**

Za pomocí hlavních přímek roviny ρ najdeme nárysné průměty bodů *A*, *B*, *C*. Rovinu ρ otočíme do půdorysny π, kde sestrojíme trojúhelník *ABC* ve skutečnosti, čímž určíme jeho skutečnou velikost.

7.4 Skutečná velikost trojúhelníku ABC

$\rho(5; 4; 3)$; $A[-3; 4; ?]$, $B[1; 2; ?]$, $C[-2; 1; ?]$



7.5 Úloha 5

❖ **Zadání úlohy:**

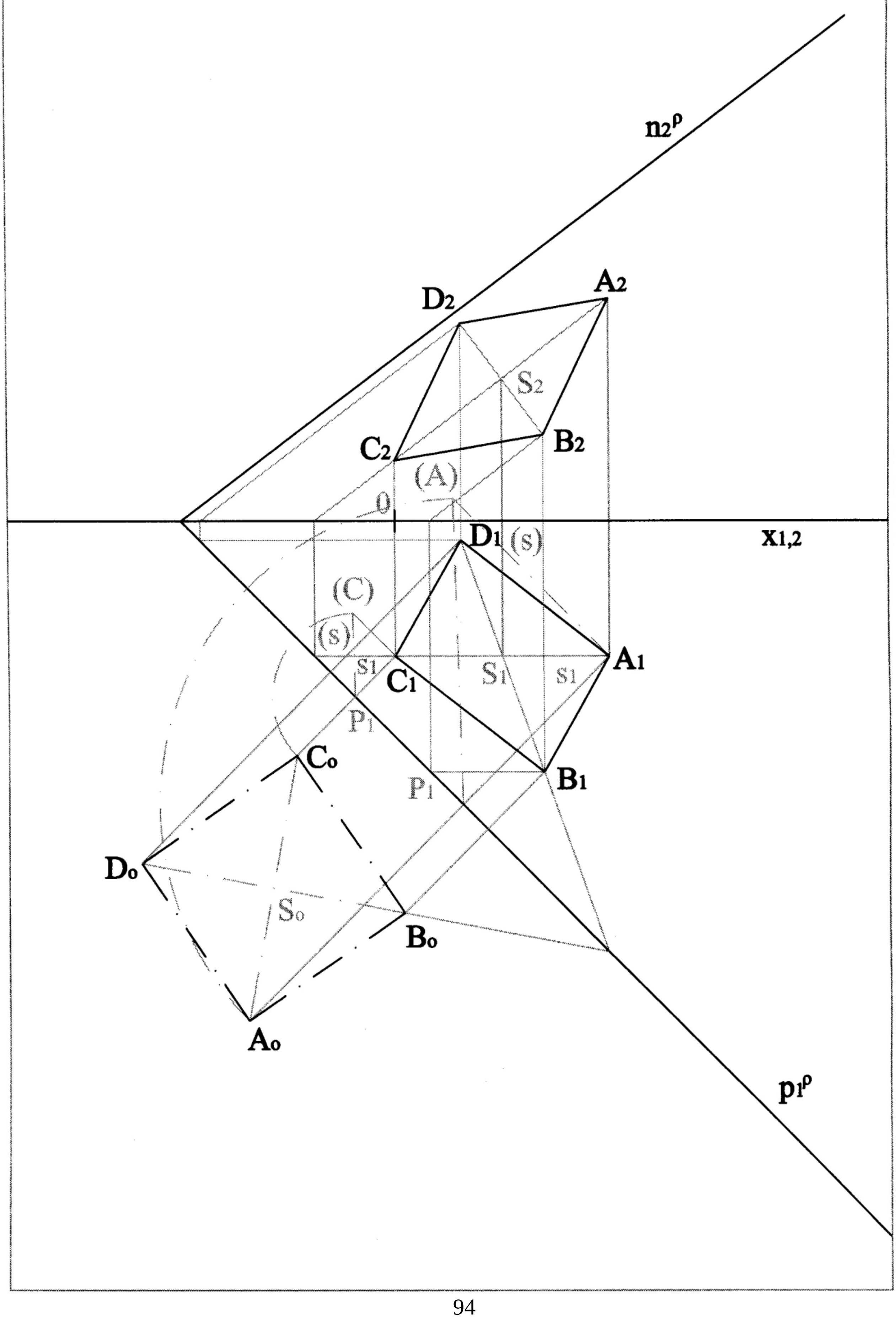
„V rovině ρ je dán čtverec *ABCD* úhlopříčkou *AC*. Sestrojte jeho sdružené průměty. ρ(-4, 4, 3), *A*[4, 2.5, ?], *C*[0, 2.5, ?]." (1, s. 50, úl. 25)

❖ **Řešení úlohy:**

Pomocí hlavních přímek roviny α doplníme chybějící průměty bodů *A* a *C* a rovinu ρ otočíme do půdorysny π. V otočení zkonstruujeme skutečnou velikost čtverce, který zpětně přeneseme do půdorysny π a do nárysny ν.

7.5 Sdružené průměty čtverce ABCD

$\rho(-4; 4; 3)$; $A[4; 2{,}5; ?]$, $C[0; 2{,}5; ?]$



7.6 Úloha 6

❖ **Zadání úlohy:**

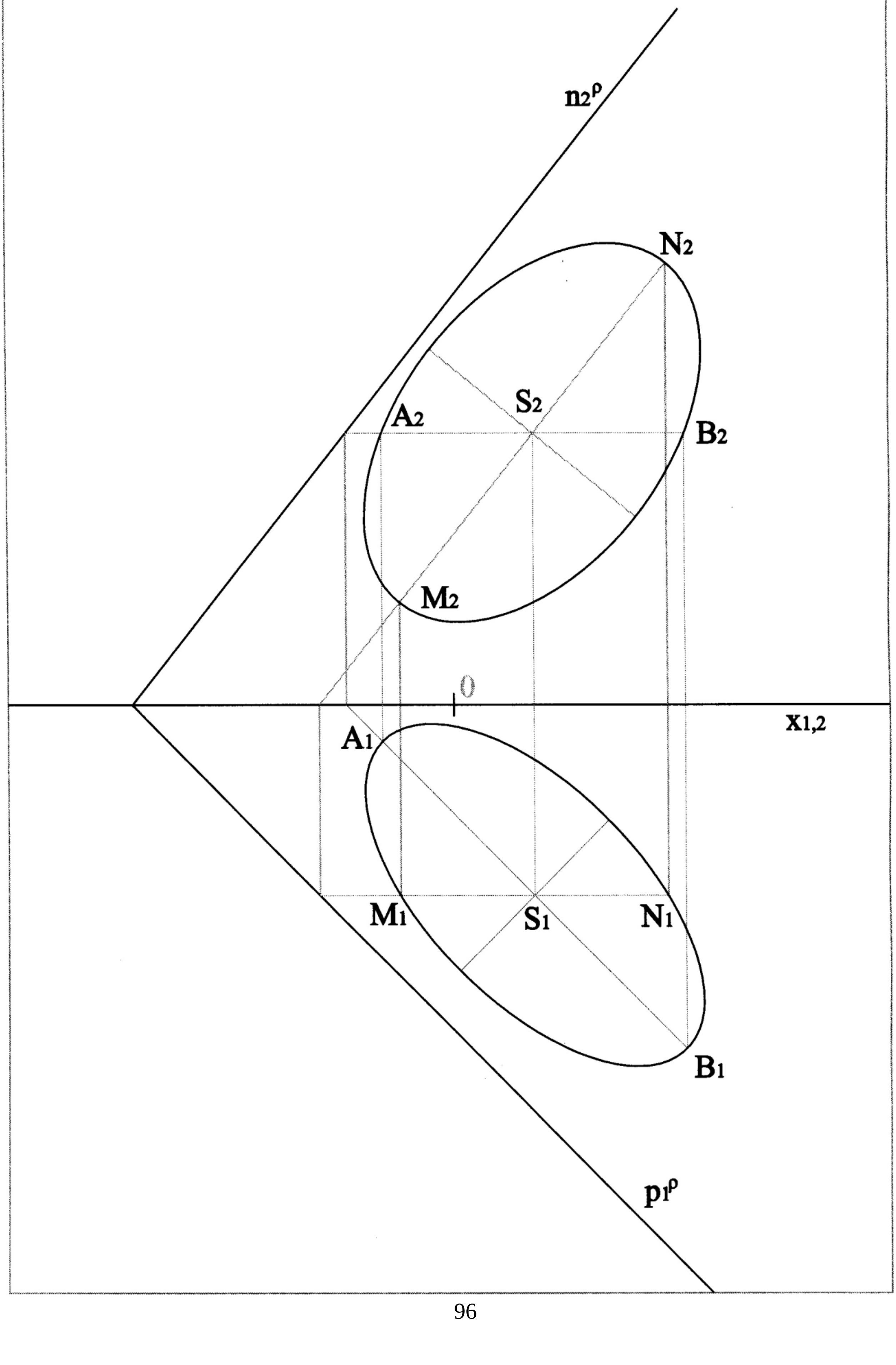
„Sestrojte sdružené průměty kružnice *k* se středem *S* a poloměr *r*. Kružnice leží v rovině ρ. ρ(-6, 6, 7.5), *S*[1.5, 3.5, ?], *r* = 40 mm.“ (1, s. 50, úl. 29/b)

❖ **Řešení úlohy:**

Vyneseme zadání roviny α a v ní ležícího středu *S*. Kružnice se v průmětnách zobrazí jako elipsa, jejíž hlavní vrcholy leží na hlavní přímce roviny α. Pomocí hlavních přímek roviny α najdeme chybějící průměty těchto vrcholů a proužkovou konstrukcí obě elipsy sestrojíme.

7.6 Sdružené průměty kružnice k se středem S

$\rho(-6; 6; 7{,}5)$; $S[1{,}5; 3{,}5; ?]$; $r = 40$ mm



8. Konstrukční úlohy - tělesa a útvary

8.1 Úloha 1

❖ **Zadání úlohy:**

„Zobrazte pravidelný dutý šestiboký hranol s kruhovým otvorem, který má podstavu v rovině ρ, střed podstavy S, jeden vrchol podstavy A a výšku $v = 3$. Osa válcového otvoru je shodná s osou hranolu, poloměr tohoto válce je $r = 3$.

$\rho(-3.5, 4, -2)$, $A[-7, 3, ?]$, $S[-4, 6, ?]$.“ (11, s. 38, úl. 5.9)

❖ **Řešení úlohy:**

Dutý šestiboký hranol se skládá ze dvou těles: šestibokého hranolu a válce. Přestože obě tělesa mají společný střed podstav S a osu tělesa, lze je řešit zcela samostatně.

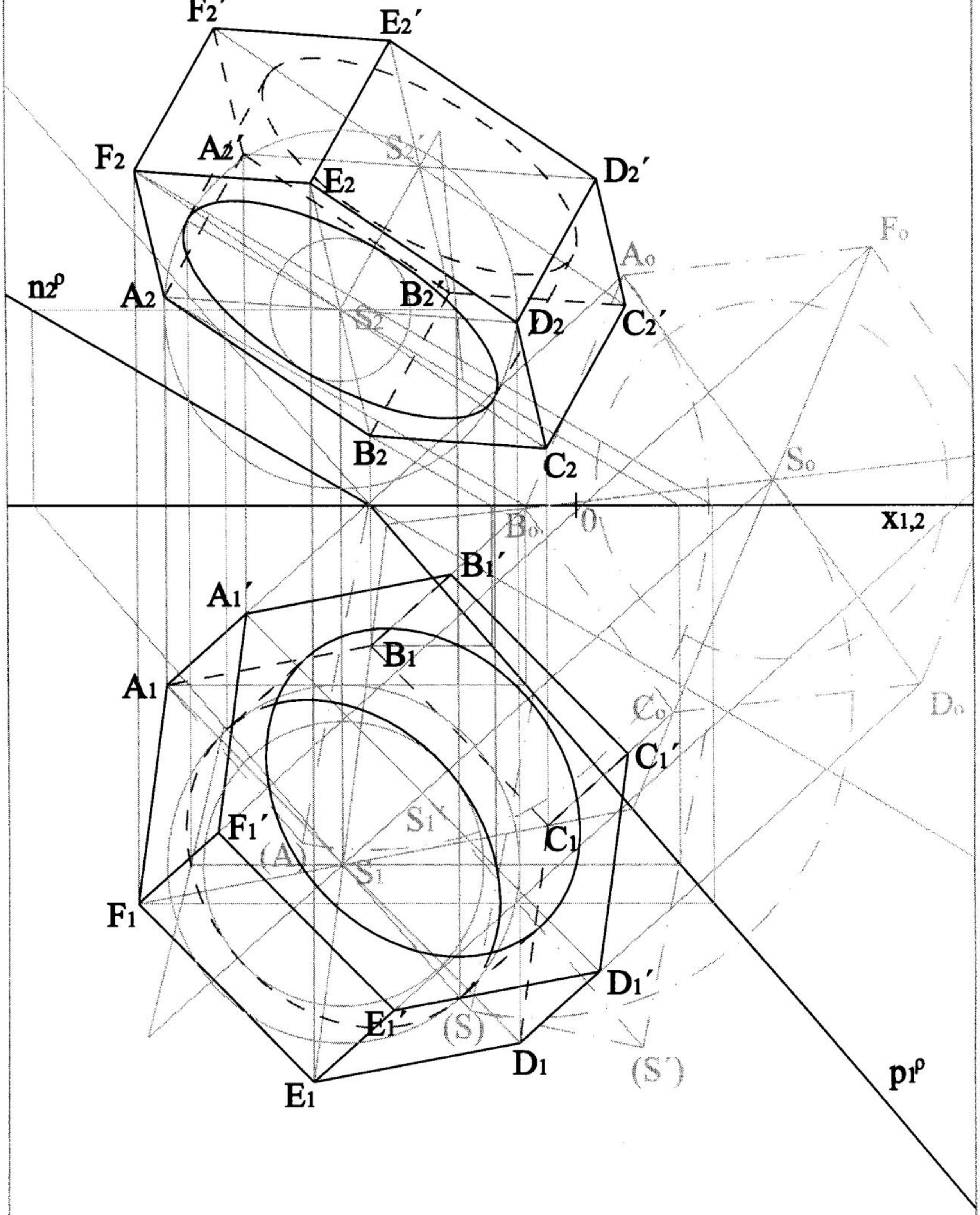
Hranol: Protože podstava hranolu leží v rovině ρ určíme polohu nárysných průmětů bodů A a S dolní podstavy hranolu, využitím hlavních přímek roviny ρ. Po otočení roviny ρ do půdorysny π vyrýsujeme podstavu hranolu ve skutečné velikosti a pomocí afinity najdeme zpětně její půdorysný průmět. Přenesením vrcholů půdorysného průmětu s využitím hlavních přímek roviny ρ sestrojíme nárysný průmět. Pomocí zadané výšky sestrojíme horní podstavu hranolu.

Válec: Vzhledem k tomu, že kruhová podstava válce se v průmětnách roviny ρ zobrazuje jako elipsa, existují body, jenž leží na hlavní přímce roviny ρ a jsou hlavními vrcholy této elipsy. Užitím hlavních přímek sestrojíme hledané průměty těchto bodů a pomocí proužkové konstrukce sestrojíme elipsy prezentující průměty horní podstavy válce.

Výslednou viditelnost vyznačíme u obou těles současně.

8.1 Dutý šestiboký hranol

ρ(-3,5; 4; -2); A[-7; 3; ?], S[-4; 6; ?]; v = 30 mm, r = 30 mm



8.2 Úloha 2

- **Zadání úlohy:**

„Zobrazte těleso, jehož podstava leží v rovině ρ a tvoří ji šesticípá hvězda se středem v bodě S a vrcholem v bodě A. Výška tělesa je $v = 8$.

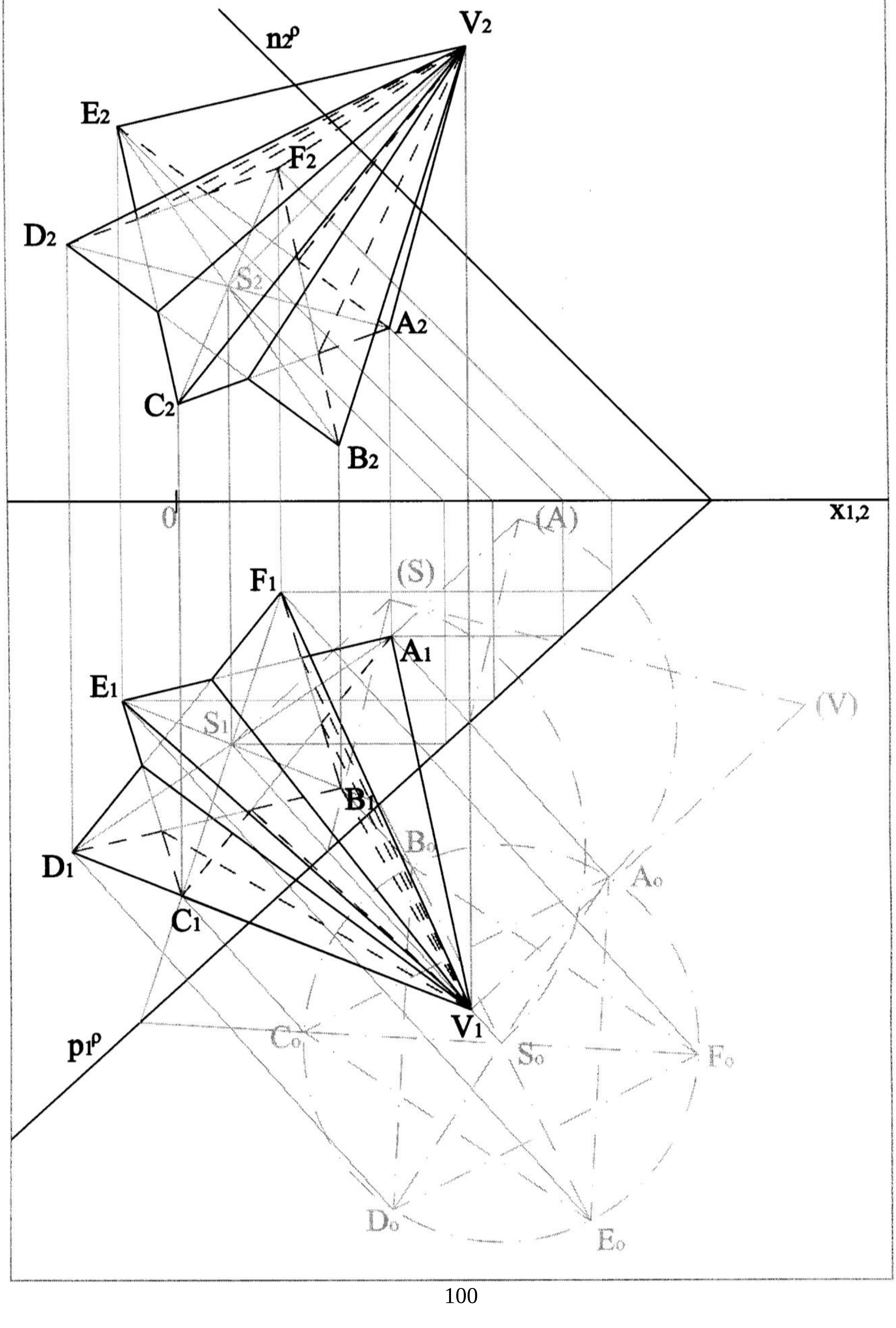
$\rho(10, 9, 10)$, $A[4, 2.5, ?]$, $S[1, 4.5, ?]$.“ (11, s. 40, úl. 5.11)

- **Řešení úlohy:**

Hledané nárysné průměty bodů A a S najdeme pomocí hlavních přímek roviny ρ, neboť body A a S jsou součástí podstavy, která leží v rovině ρ. Otočením roviny ρ získáme body v otočení, za pomocí nichž sestrojíme podstavu hledaného tělesa ve skutečné velikosti. Užitím osové afinity přeneseme body jeho podstavy do půdorysny π a hlavními přímkami také do nárysny ν. Po sestrojení vrcholu v půdorysně π a v nárysně ν vyznačíme výslednou viditelnost.

8.2 Těleso s podstavou šesticípé hvězdy

ρ(10; 9; 10); A[4; 2,5; ?], S[1; 4,5; ?]; v = 80 mm



8.3 Úloha 3

❖ **Zadání úlohy:**

„Zobrazte krychli *ABCDEFGH*, jejíž jedna stěna ležící v rovině ρ je dána úhlopříčkou *AC*. Ve všech osmi rozích této krychle vyřízněte menší krychle. Délka hrany každé menší krychle je rovna jedné třetině délky hrany základní krychle a stěny menších krychlí jsou rovnoběžné se stěnami krychle *ABCDEFGH*.

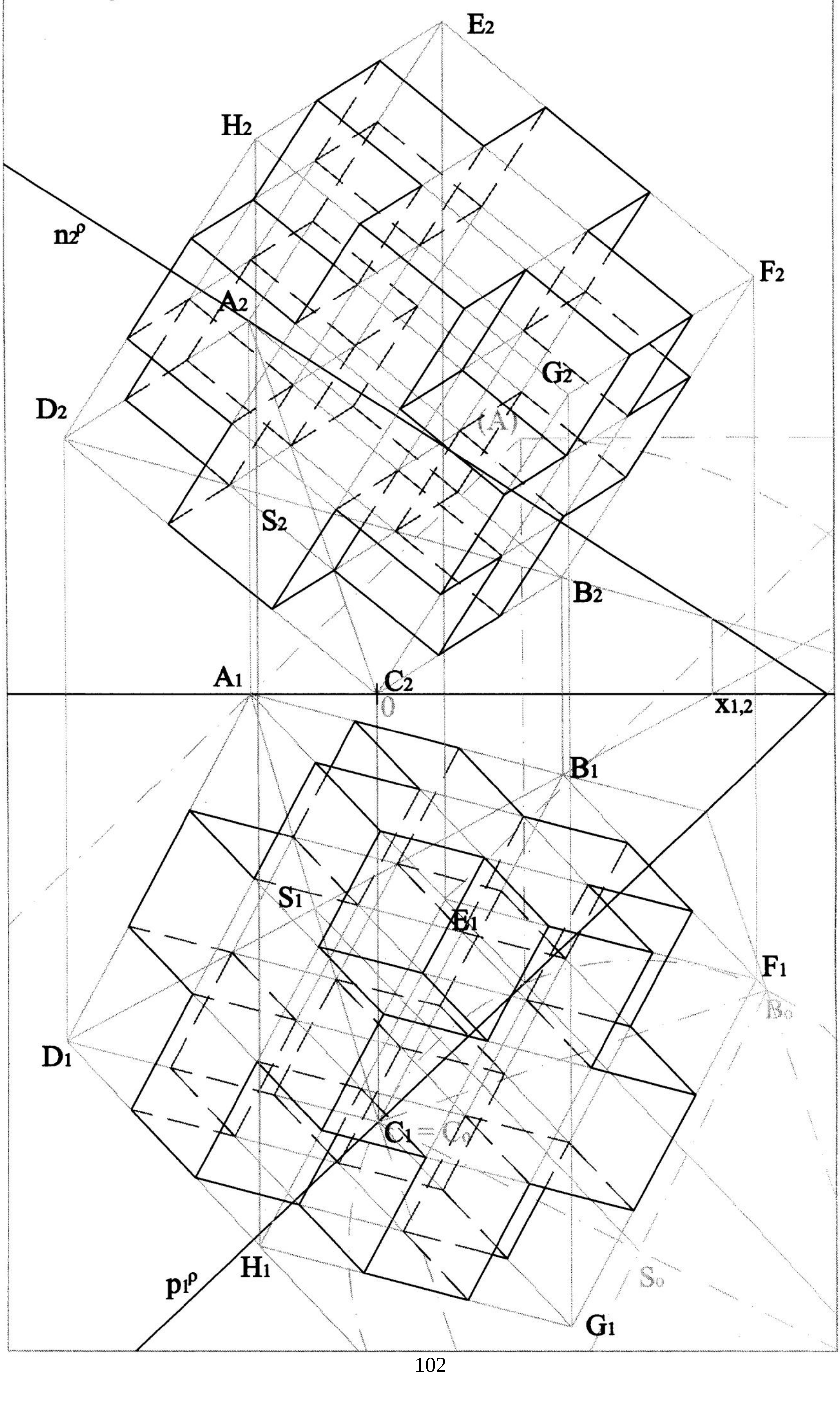
$\rho(9, 8.5, 5.8)$, $A[-2.5, 0, ?]$, $C[0, ?, 0]$, $z_E > z_A$.“ (7, s. 41, úl. 181)

❖ **Řešení úlohy:**

Příklad začneme konstruovat jako klasickou krychli, jejíž úhlopříčka *AC* strany *ABCD* leží v rovině ρ. K nalezení nárysných průmětů bodů *A*, *C* využijeme hlavních přímek roviny ρ. Rozpůlením půdorysného a nárysného průmětu úhlopříčky *AC* strany *ABCD* dostaneme průměty středu *S* dolní podstavy krychle. Otočíme rovinu ρ do půdorysny π, sestrojíme podstavu krychle ve skutečné velikosti a zpětně ji přeneseme do půdorysny π a do nárysny ν. Nanesením výšky, jejíž délka je shodná s délkou strany krychle, najdeme vrcholy horní podstavy krychle. Rozdělením hran krychle na třetiny zkonstruujeme pomocnou síť, jejíž viditelnost vytáhneme tak, aby vždy „chyběla“ rohová krychlička.

8.3 Krychle

$\rho(9; 8{,}5; 5{,}8)$; $A[-2{,}5; 0; ?]$, $C[0; ?; 0]$; $z_E > z_A$



8.4 Úloha 4

- **Zadání úlohy:**

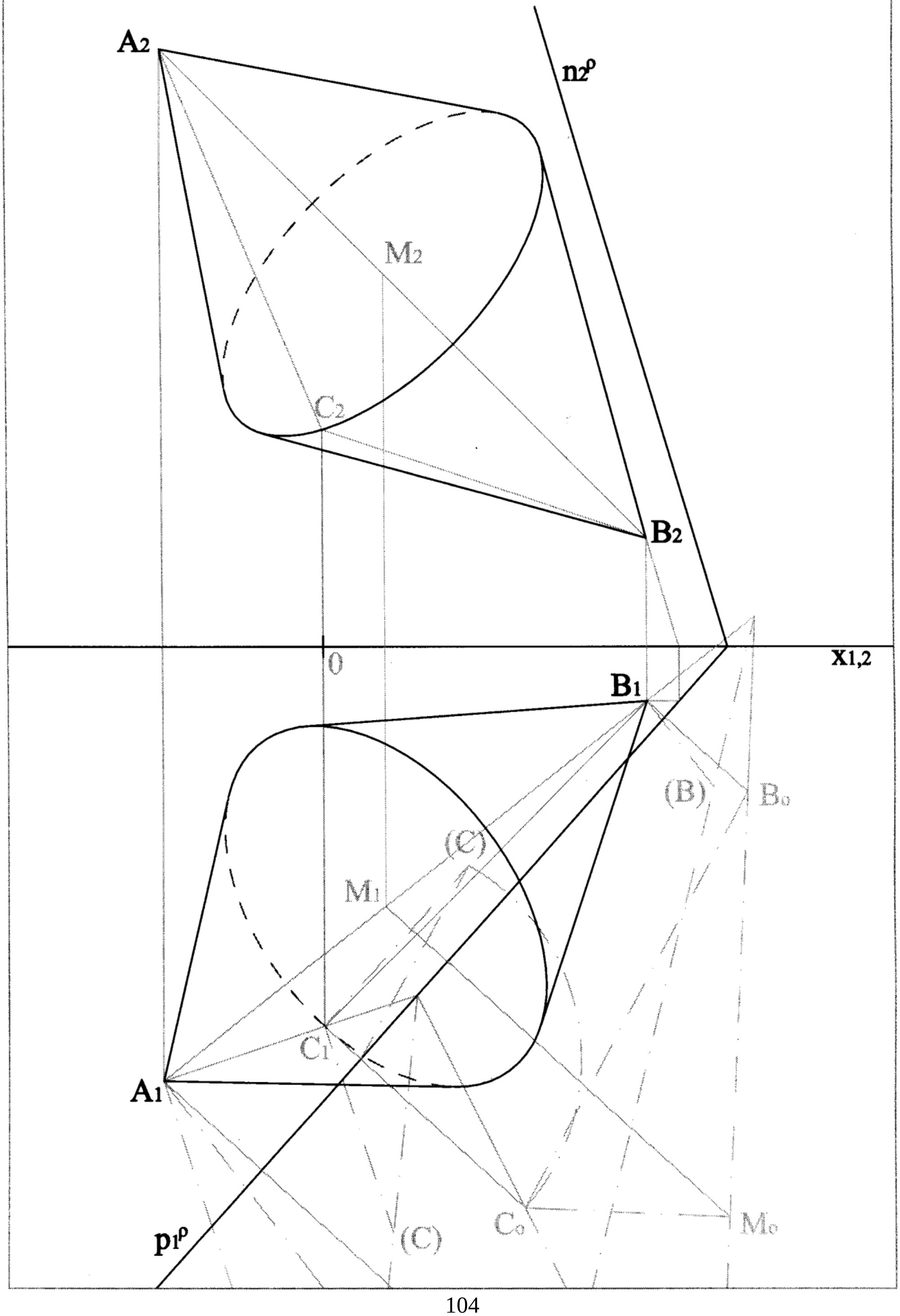
„Zobrazte těleso, které vznikne rotací trojúhelníka *ABC* kolem jeho strany *AB*.
A[-3, 8, 11], *B*[6, 1, 2], *C*[0, 7, 4].“ (9, s. 39, úl. 3.28)

- **Řešení úlohy:**

Při rotaci trojúhelníka *ABC* kolem strany *AB* obíhá jeho třetí vrchol *C* po kružnicové trajektorii, která je obvodem podstavy dvou kuželů. Těleso vytvoříme spojením dvou kuželů, jenž mají společnou podstavu, ale různé vrcholy. Uvažujme vrcholy *ABC* daného trojúhelníka zároveň jako body určující rovinu ρ. Sestrojíme stopy roviny ρ a otočíme rovinu ρ do půdorysny π, kde vyrýsujeme trojúhelník *ABC* ve skutečné velikosti a najdeme bod *M* v otočení představující střed podstavy. Sestrojíme půdorysný a nárysný průmět bodu *M*. Nechť podstava tělesa leží v obecné rovině, která je kolmá na výšku *AB*. Pak kolmice procházející bodem *M*, jedna z hlavních přímek této roviny, je hlavní osou zkreslené kruhové podstavy tělesa - elipsy. Elipsu v půdorysně π i v nárysně ν sestrojíme využitím proužkové konstrukce a vytáhneme viditelnost.

8.4 Těleso vzniklé rotací trojúhelníka ABC

A[-3; 8; 11], B[6; 1; 2], C[0; 7; 4]



8.5 Úloha 5

❖ **Zadání úlohy:**

„Zobrazte krychli *ABCDEFGH* se stěnou *ABCD* v rovině ρ, jejíž osa *o* kolmá k rovině ρ prochází bodem *K*. Dále zobrazte desku, která má tvar pravidelného čtyřbokého hranolu o délce podstavné hrany $a = 6$ a výšce v = 1. Deska je umístěna na horní stěně krychle tak, že osa procházející středy jejich podstav splývá s osou *o* a její hrany jsou rovnoběžné s hranami krychle.

ρ(8.5, 6, 5.5), *A*[-3.5, 3, ?], *K*[0, 5, 4], $y_E > y_A$.“ (7, s. 41, úl. 182)

❖ **Řešení úlohy:**

Příklad se skládá ze dvou těles: krychle a desky ležící na ní.

Krychle: Podstava krychle leží v rovině ρ a je zadána jedním vrcholem *A* dolní podstavy a jejím středem *S*, jenž najdeme jako průnik osy *o* s rovinou ρ. Po otočení roviny ρ do půdorysny π narýsujeme podstavu krychle ve skutečné velikosti a sestrojíme její půdorysný a nárysný průmět. S pomocí výšky krychle, jenž je stejná jako délka hrany podstavy, určíme vrcholy horní podstavy.

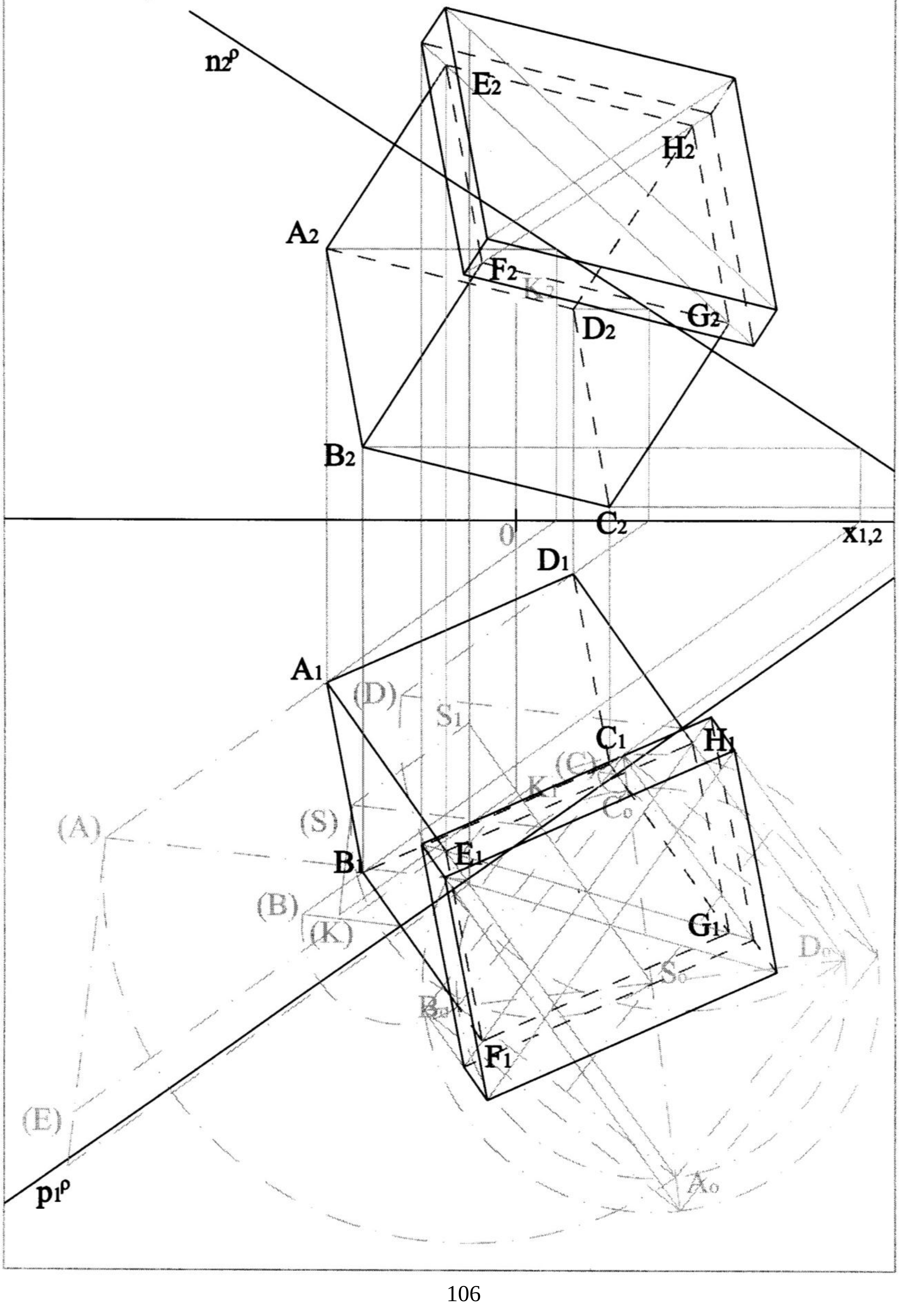
Deska: V otočení jsou středy podstav desky a krychle splývající a jejich hrany vzájemně rovnoběžné. Sestrojíme podstavu desky ve skutečné velikosti a zpětně ji přeneseme do půdorysny π a nárysny *v*. Naneseme výšky, sestrojíme podstavy.

Výslednou viditelnost vyznačíme u obou těles současně.

8.5 Krychle s deskou

$\rho(8{,}5;\ 6;\ 5{,}5)$; $A[-3{,}5;\ 3;\ ?]$, $K[0;\ 5;\ 4]$; $y_E > y_A$

$a = 60$ mm, $v = 10$ mm



8.6 Úloha 6

- **Zadání úlohy:**

„Kosý čtyřboký hranol má čtvercovou podstavu *ABCD* v půdorysně určenou vrcholem *A* a jejím středem *S*, střed jeho horní podstavy je *S´*. Zobrazte normálový řez tohoto hranolu rovinou ρ, která prochází středem úsečky *SS´*.

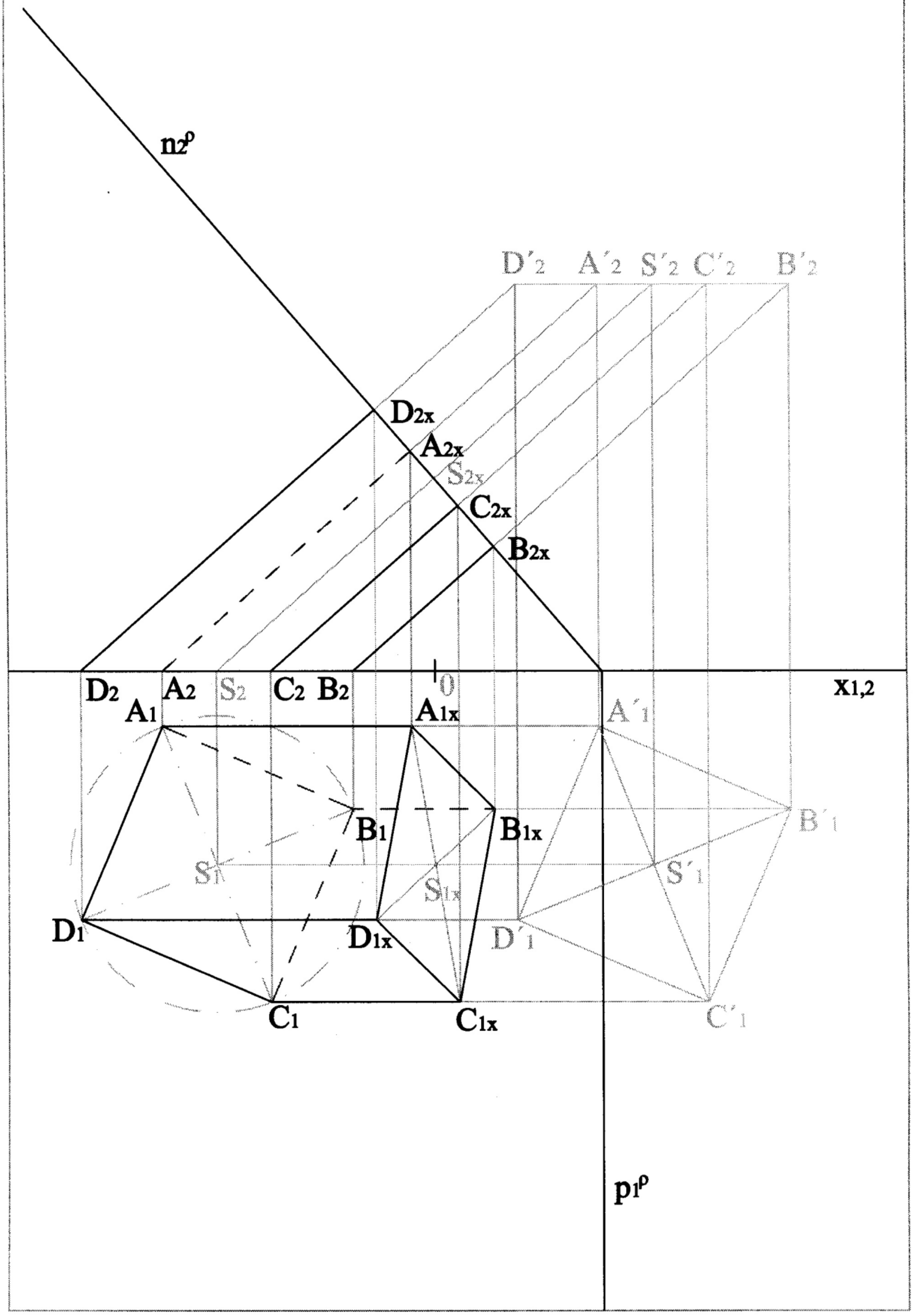
A[-5, 1, 0], *S*[-4, 3.5, 0], *S´*[4, 3.5, 7].“ (7, s. 41, úl. 185)

- **Řešení úlohy:**

Kosý čtyřboký hranol stojí přímo v půdorysně π, proto se dolní i horní podstava při zobrazování do půdorysny π nezkreslují. Dolní podstavu tělesa se středem *S* sestrojíme ihned po vynesení zadání a její rozměry využijeme ke konstrukci horní podstavy se středem *S´*. Normálový řez roviny ρ sestrojíme v nárysně ν jako kolmici na osu objektu procházející jejím středem a v půdorysně π jej zobrazíme kolmo na základnici $x_{1,2}$.

8.6 Kosý čtyřboký hranol

A[-5; 1; 0], S[-4; 3,5; 0], S´[4; 3,5; 7]



8.7 Úloha 7

❖ **Zadání úlohy:**

„Zobrazte pravidelný šestiboký jehlan *ABCDEFV* o výšce v, jehož podstava o středu S leží v rovině ρ kolmé k nárysně ν.

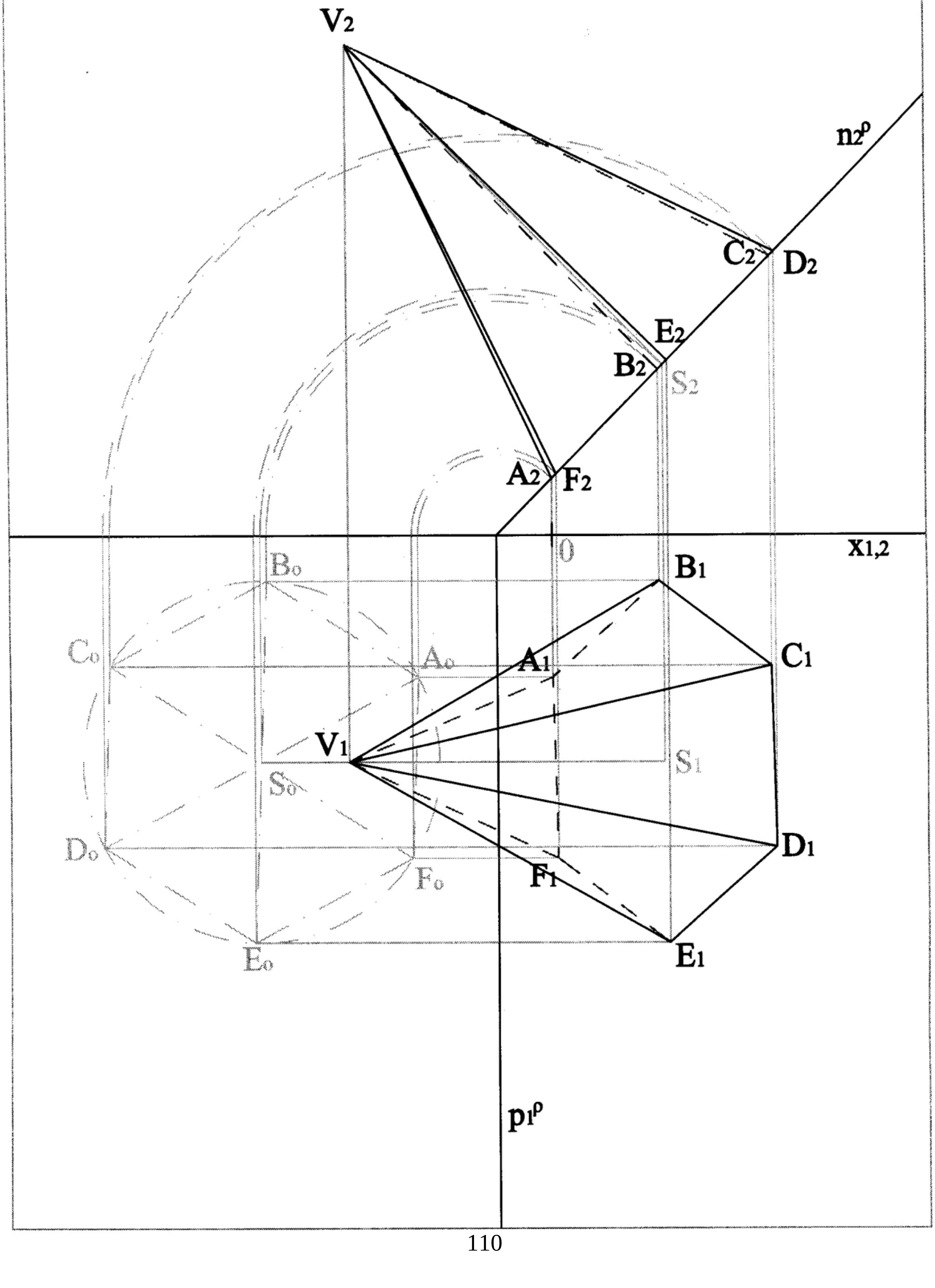
$S[2, 4, 3]$, $A[0, 2.5, 1]$, $v = 8$, $z_V > z_S$.“ (7, s. 41, úl. 189)

❖ **Řešení úlohy:**

Zkonstruujeme rovinu ρ, jejíž půdorysná stopa roviny leží kolmo na základnici $x_{1,2}$ a její nárysná stopa prochází nárysnými průměty bodů podstavy jehlanu. Rovinu ρ otočíme do půdorysny π. S využitím bodů A a S v otočení sestrojíme podstavu jehlanu ve skutečnosti a přeneseme ji zpátky do půdorysny π a do nárysny ν. Vyneseme výšku jehlanu a vytáhneme viditelnost.

8.7 Šestiboký jehlan

S[2; 4; 3], A[0; 2,5; 1]; v = 80 mm; zv > zs



8.8 Úloha 8

- **Zadání úlohy:**

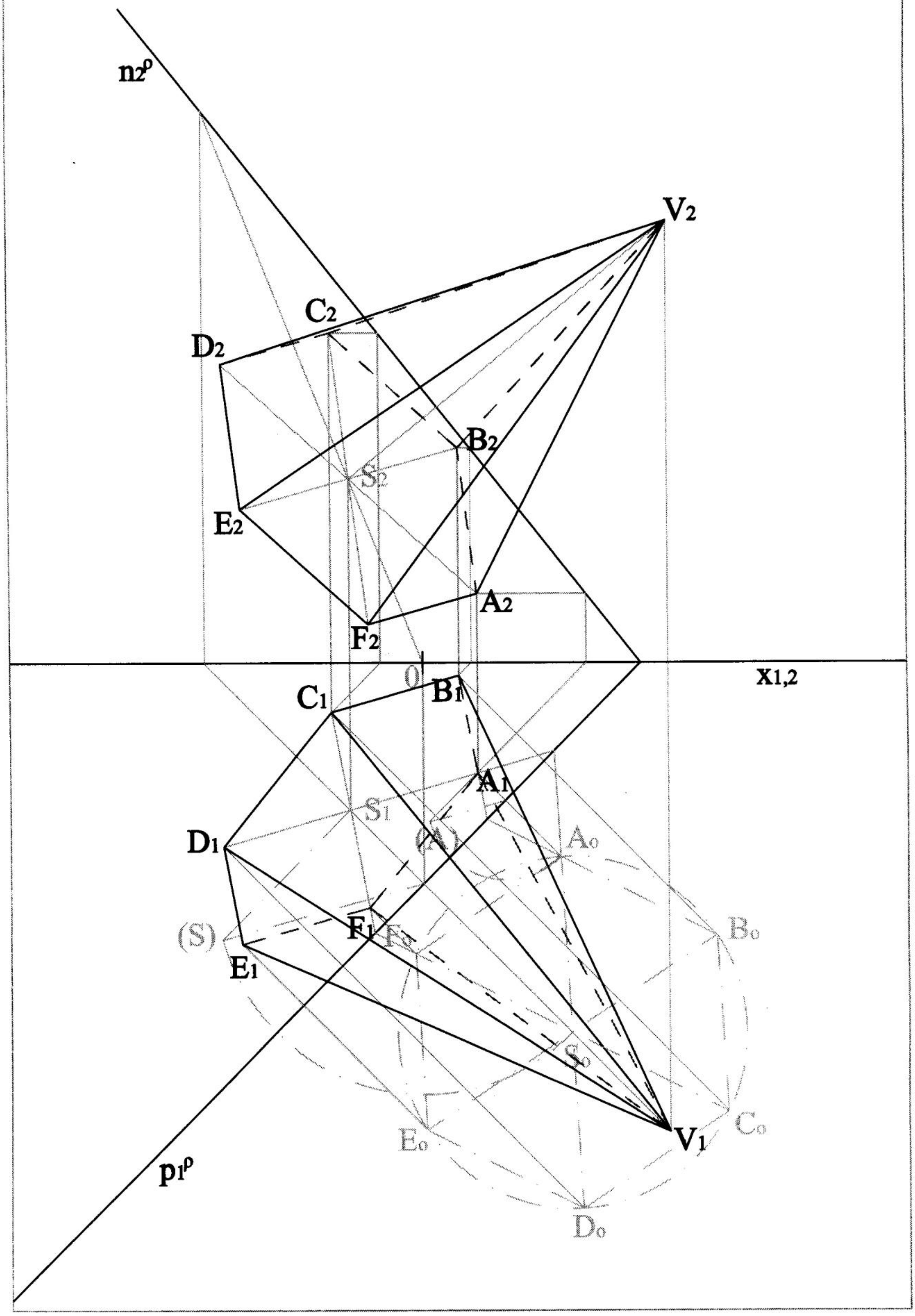
„Zobrazte pravidelný šestiboký jehlan s vrcholem *V* a podstavou *ABCDEF* v rovině *ρ*. *ρ*(4, 4, 5), *A*[1, 2, ?], *V*[4.5, 8.5, 8].“ (7, s. 42, úl. 191)

- **Řešení úlohy:**

Vrcholem *V* proložíme přímku kolmo k rovině *ρ* a její krycí přímku přeneseme pomocí stopníků z půdorysny *π* do nárysny *ν*. Průnikem výšky a krycí přímky v nárysně *ν* je nárysný průmět středu S podstavy tělesa, jenž přeneseme do půdorysny *π*. Rovinu *ρ* otočíme a podstavu tělesa zkonstruujeme ve skutečné velikosti. Body podstavy přeneseme zpátky do obou průměten a vytáhneme viditelnost.

8.8 Šestiboký jehlan

$\rho(4; 4; 5)$; $A[1; 2; ?]$, $V[4{,}5; 8{,}5; 8]$



8.9 Úloha 9

- **Zadání úlohy:**

„Zobrazte pravidelný čtyřstěn *ABCD*, jehož stěna *ABC* leží v rovině ρ.

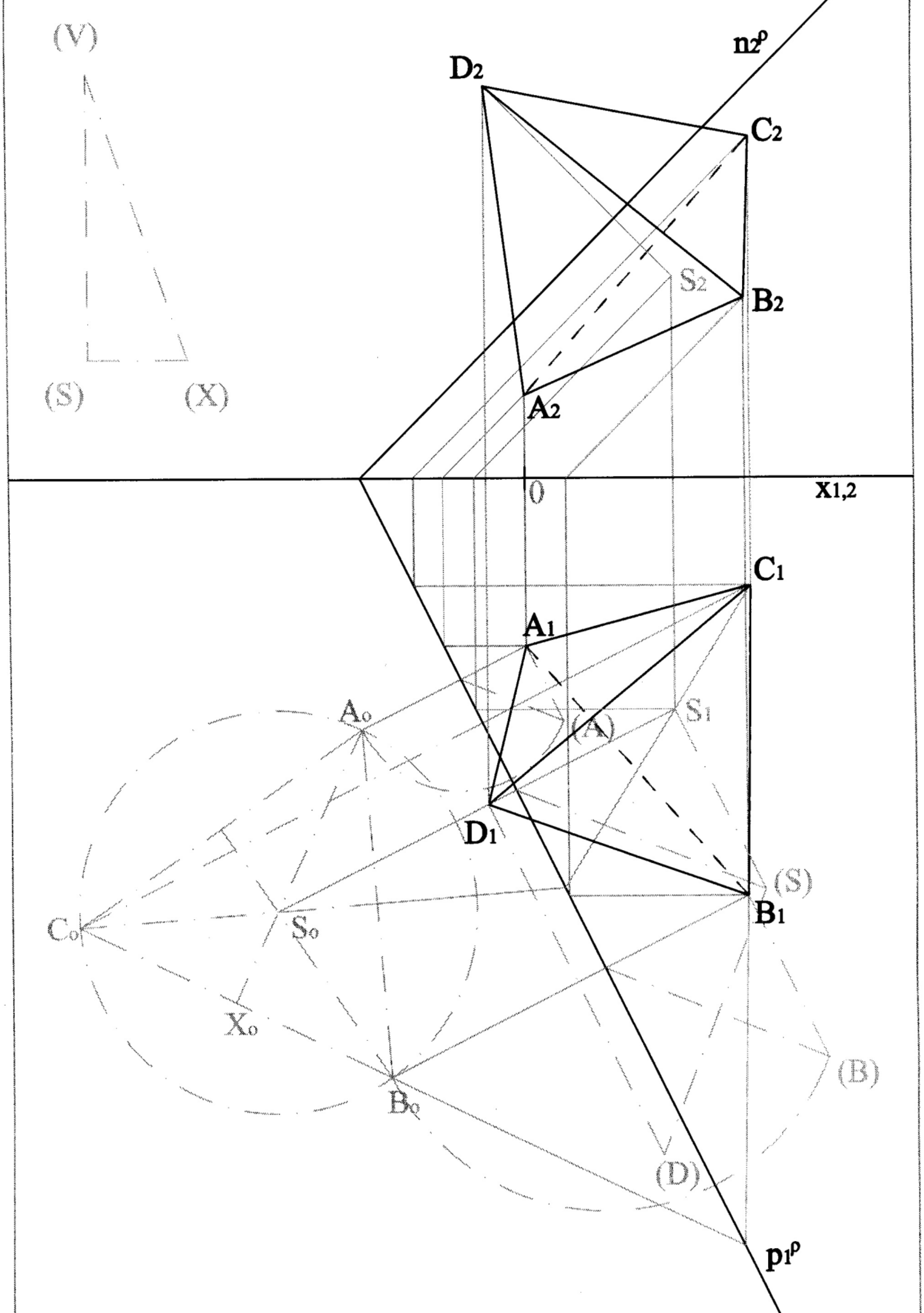
$\rho(-3, 6, 3)$, $A[0, 3, ?]$, $B[4, 7.5, ?]$, $z_C>0$, $z_D>z_A$." (7, s. 42, úl. 194)

- **Řešení úlohy:**

Pomocí hlavních přímek najdeme chybějící průměty zadaných bodů podstavy, kterou s rovinou ρ otočíme do půdorysny π. Sestrojíme její skutečnou velikost a zpětně ji přeneseme na obě průmětny. Sestrojíme střed podstavy *S* a střed hrany podstavy tělesa *X*. Výšku čtyřstěnu určíme z pomocné konstrukce pravoúhlého trojúhelníka, kdy přepona je vzdálenost *VX*, jedna odvěsna *SX* a druhá odvěsna představuje hledanou výšku. Výšku vyneseme a vytáhneme viditelnost.

8.9 Čtyřstěn

$\rho(-3; 6; 3)$; $A[0; 3; ?]$, $B[4; 7{,}5; ?]$; $z_C > 0$, $z_D > z_A$



PRAKTICKÁ ČÁST 2

9. Test úrovně základních znalostí kótovaného a Mongeova promítání

Testem úrovně základních znalostí jsme se zaměřili na zjištění znalostí z kótovaného a Mongeova promítání na jednotlivých typech středních škol /Střední průmyslové škole stavební v Lipníku nad Bečvou, Slovanském gymnáziu v Olomouci/

Studenty těchto středních škol jsme vybrali z důvodu, že tyto školy jsou v dnešní době jedny z mála středních škol v okresech Přerov a Olomouc, které deskriptivní geometrii vyučují.

Ze Střední průmyslové školy stavební se výzkumu zúčastnilo 30 studentů 2. ročníku, ze Slovanského gymnázia 8 studentů 3. ročníku.

Test se skládá ze tří úloh. Každou z úloh jsme hodnotili uvedenými počty bodů (podle počtu prováděných kroků).

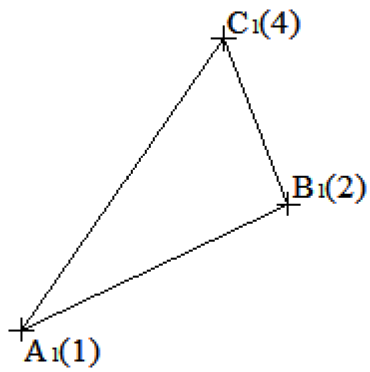
Na následujících stránkách uvádíme jednotlivé úlohy, jejich zadání, postupné kroky s grafy, v kterých ukazujeme, jak studenti uspěli v dané úloze u jednotlivých kroků a úspěšnost řešení úlohy /v procentech/.

Na konci diplomového testu uvádíme úspěšnost řešení všech úloh /v procentech/ na jednotlivých typech škol.

9.1 Úloha 1 – Kótované promítání

❖ **Zadání úlohy:**

„Zobrazte střed S kružnice opsané trojúhelníku ABC, jestliže: $A_1(1)$, $B_1(2)$, $C_1(4)$.“ (7, s. 11, úl. 45)

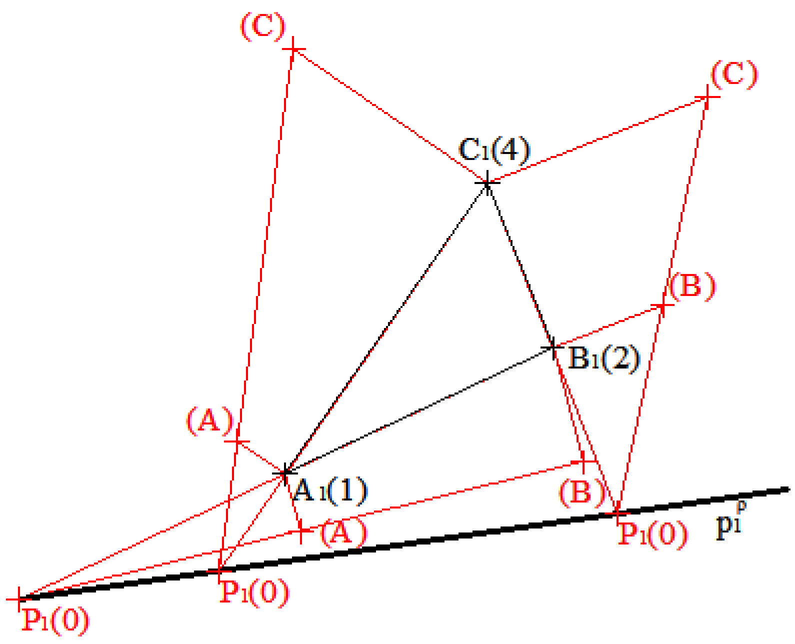


❖ **Bodování úlohy:**

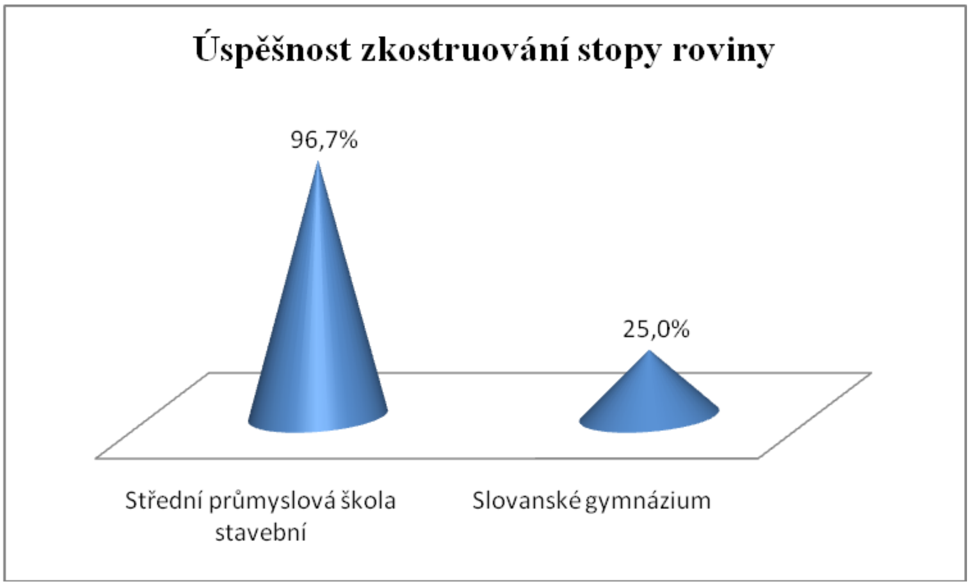
V této úloze mohli studenti dosáhnout maximálního počtu bodů – 4 body:

- 1 bod – konstrukce stopy roviny,
- 1 bod – konstrukce trojúhelníku ABC ve skutečné velikosti,
- 1 bod – konstrukce středu S kružnice opsané trojúhelníku ABC,
- 1 bod – konstrukce půdorysného průmětu S_1 bodu S.

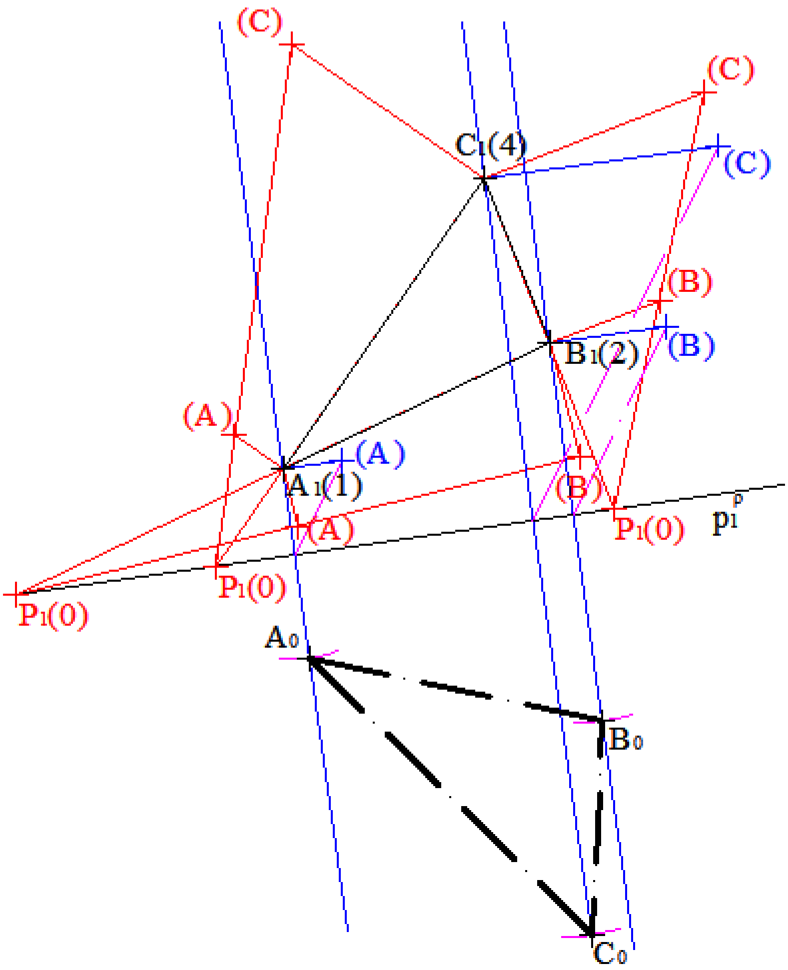
❖ **Konstrukce stopy roviny:**



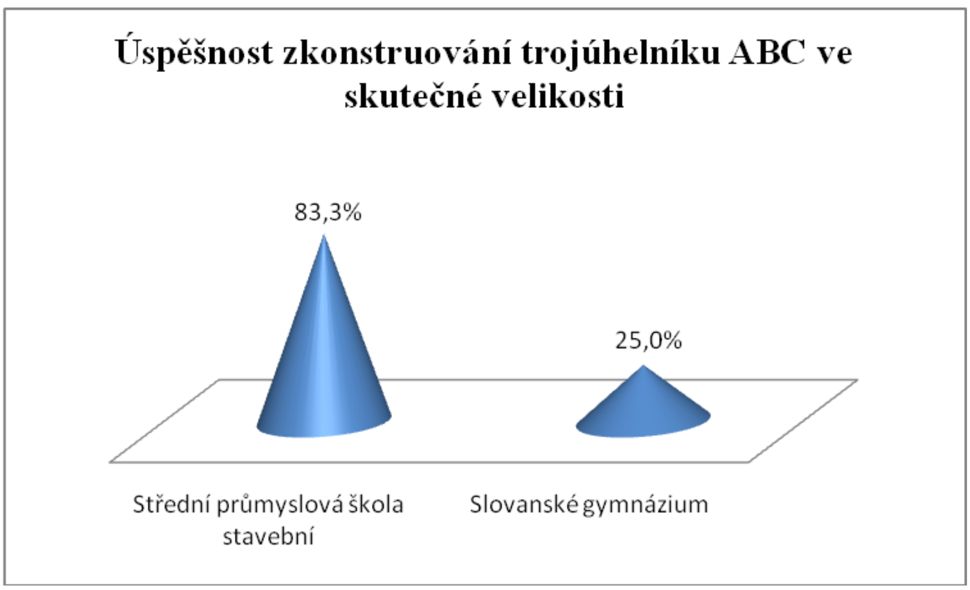
Statistika: Počet studentů /v procentech/, kteří zkonstruovali stopu roviny:



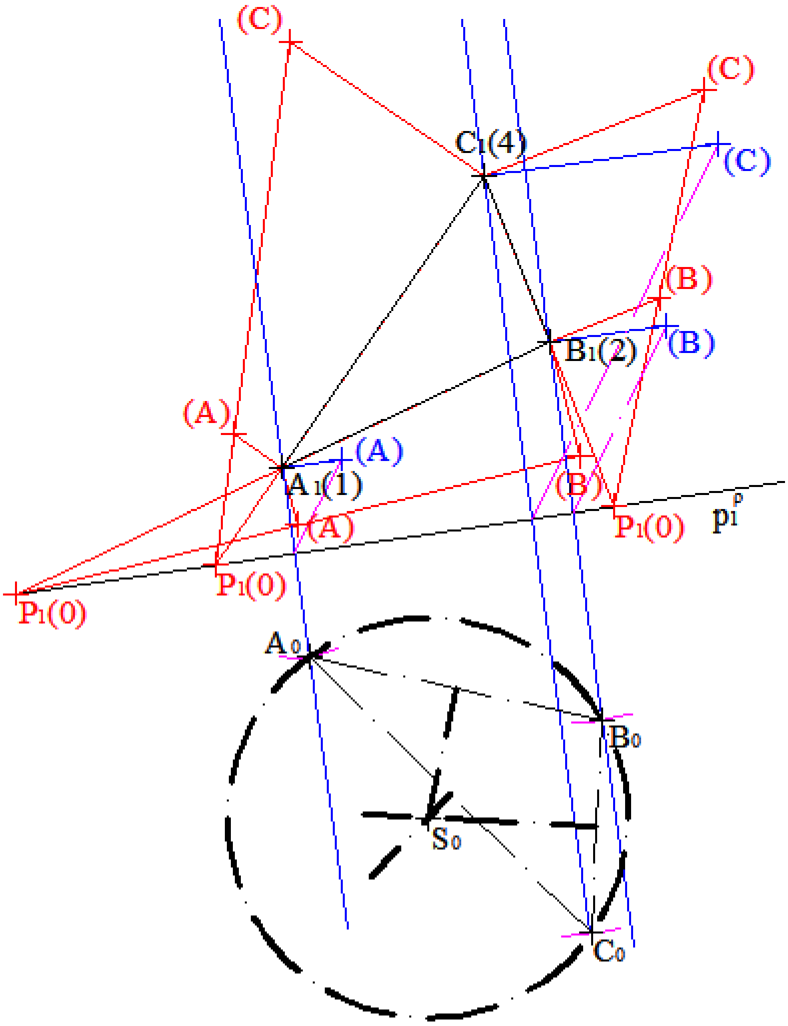
- **Konstrukce trojúhelníku ABC ve skutečné velikosti:**



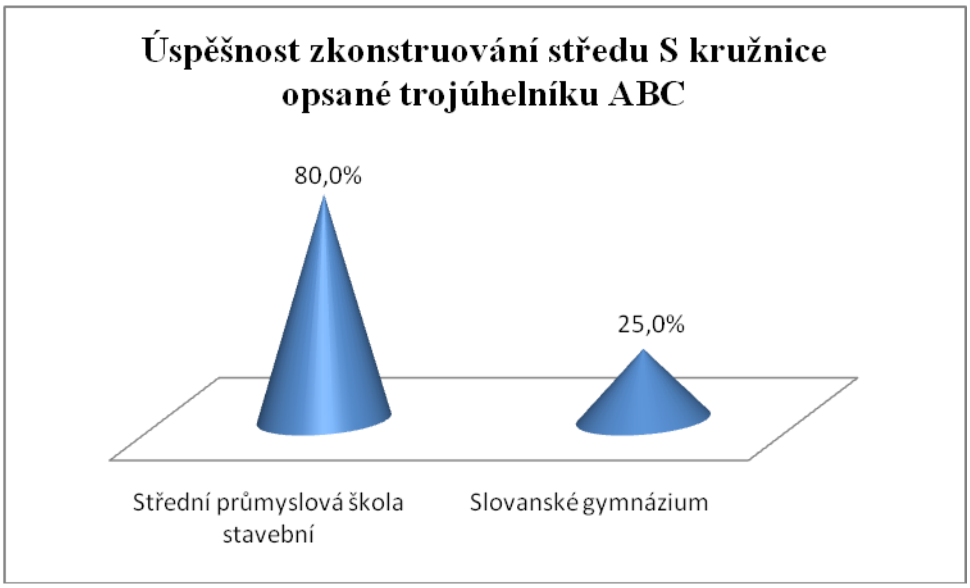
Statistika: Počet studentů /v procentech/, kteří zkonstruovali trojúhelník ABC ve skutečné velikosti:



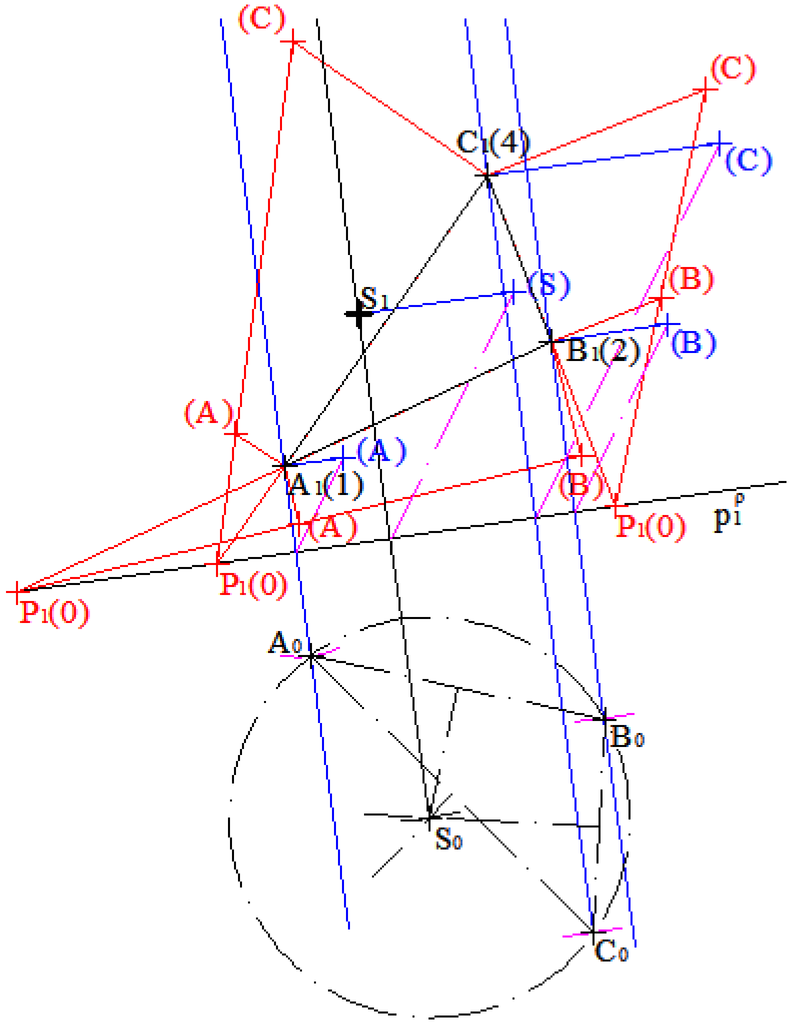
❖ **Konstrukce středu S kružnice opsané trojúhelníku ABC:**



Statistika: Počet studentů /v procentech/, kteří zkonstruovali střed S kružnice opsané trojúhelníku ABC:

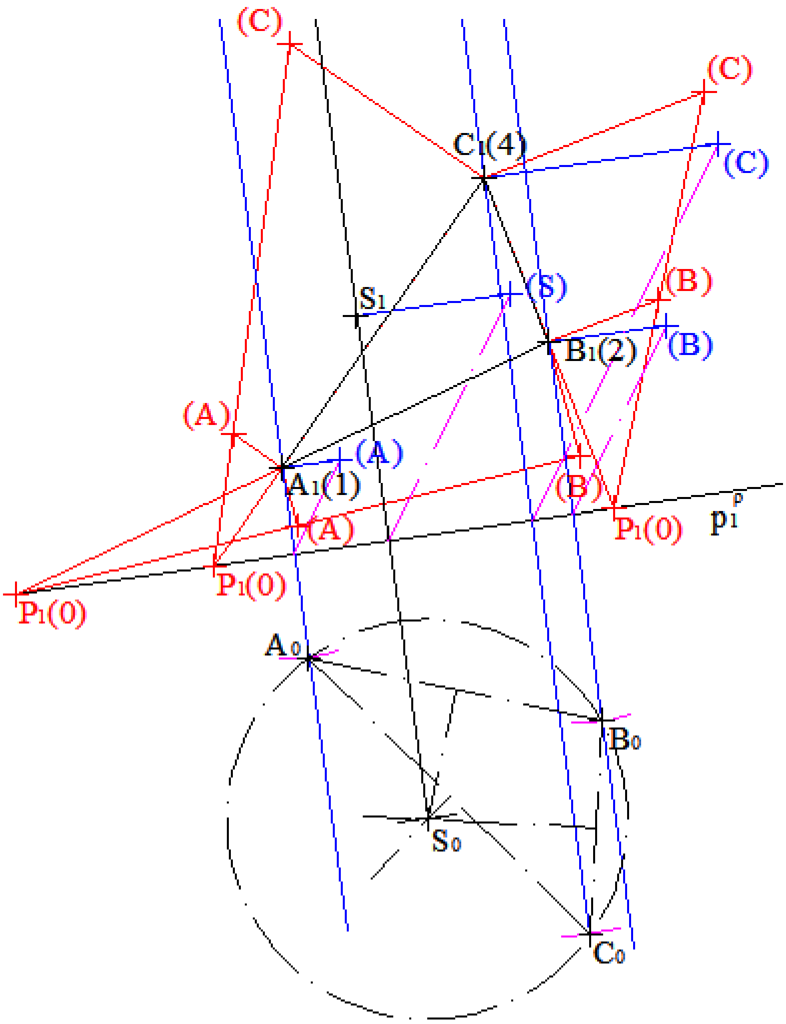


❖ **Konstrukce průmětu S_1 bodu S:**

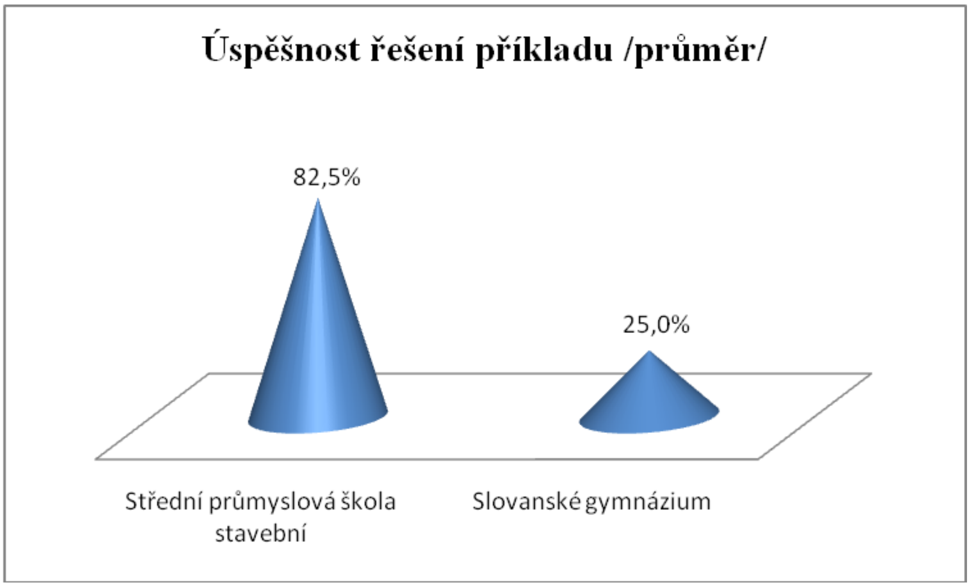


Statistika: Počet studentů /v procentech/, kteří zkonstruovali průmět S_1 bodu S:

❖ **Celkové řešení:**



Statistika: Úspěšnost úlohy /průměr/ na jednotlivých typech škol:



9.2 Úloha 2 - Mongeovo promítání

❖ **Zadání úlohy:**

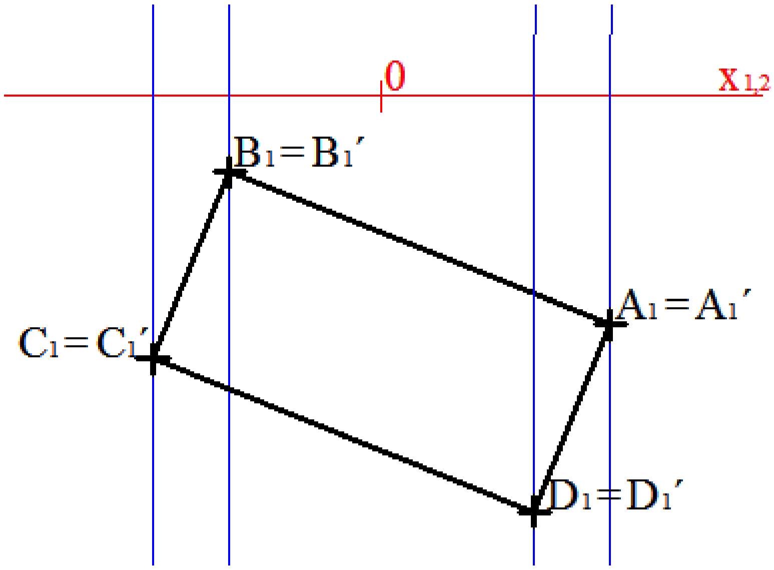
„V Mongeově promítání zobrazte kolmý čtyřboký hranol o výšce v, jehož obdélníková podstava ABCD leží v půdorysně. Určete oba průměty bodu M, který leží na jeho plášti. A[3, 3, 0], B[-2, 1, 0], [-3, ?, 0], v = 7, M[-1, ?, 5].“ (7, s. 41, úl. 173)

❖ **Bodování úlohy:**

V této úloze mohli studenti dosáhnout maximálního počtu bodů – 3 body:

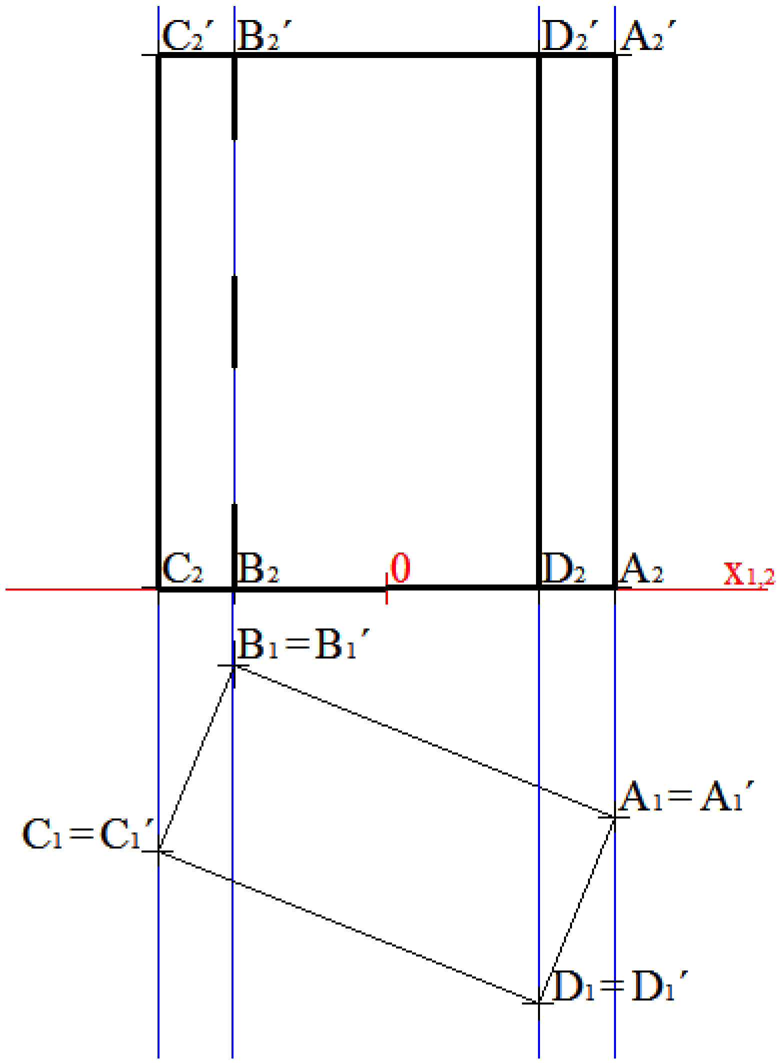
- 1 bod – konstrukce půdorysu útvaru,
- 1 bod – konstrukce nárysu útvaru,
- 1 bod – konstrukce průmětů bodů M.

❖ **Konstrukce půdorysu útvaru:**

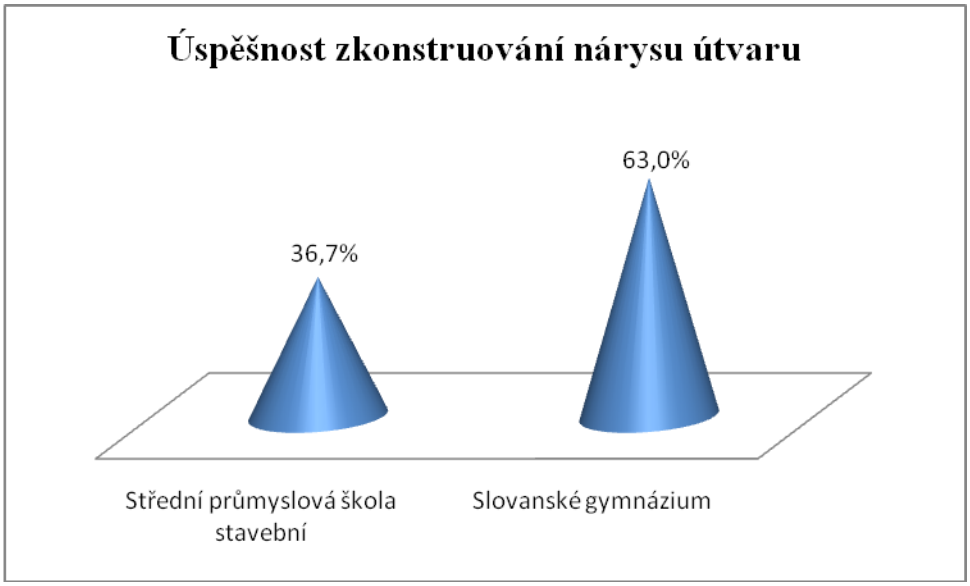


Statistika: Počet studentů /v procentech/, kteří zkonstruovali půdorys útvaru:

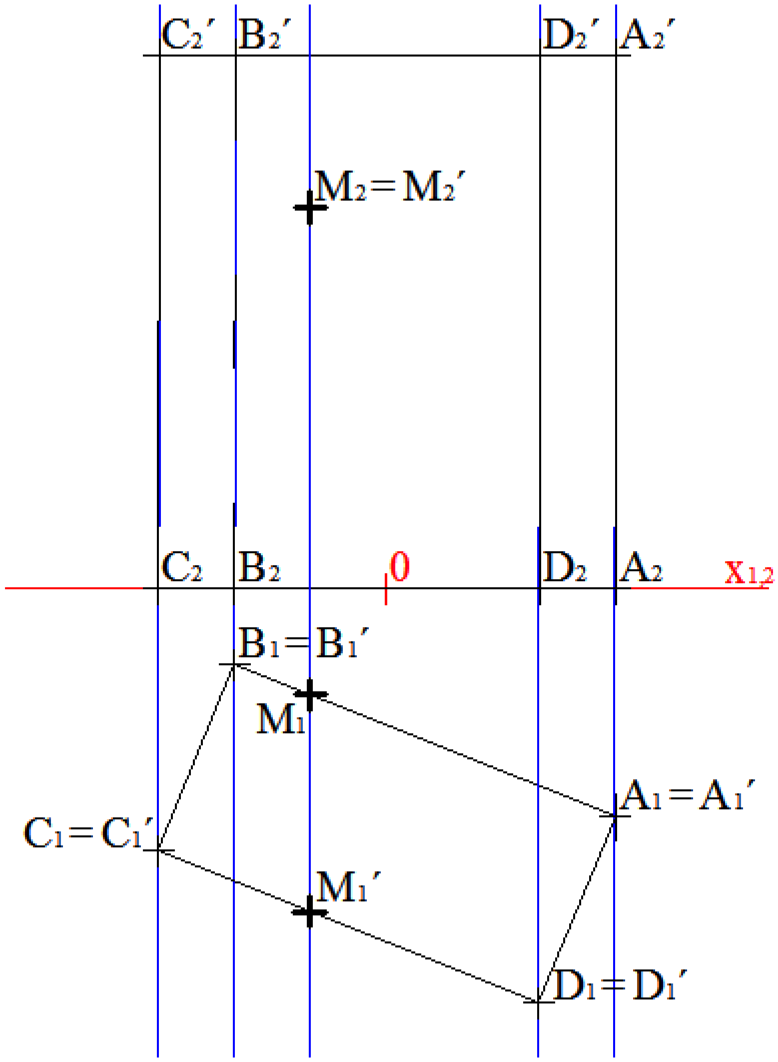
- **Konstrukce nárysu útvaru:**



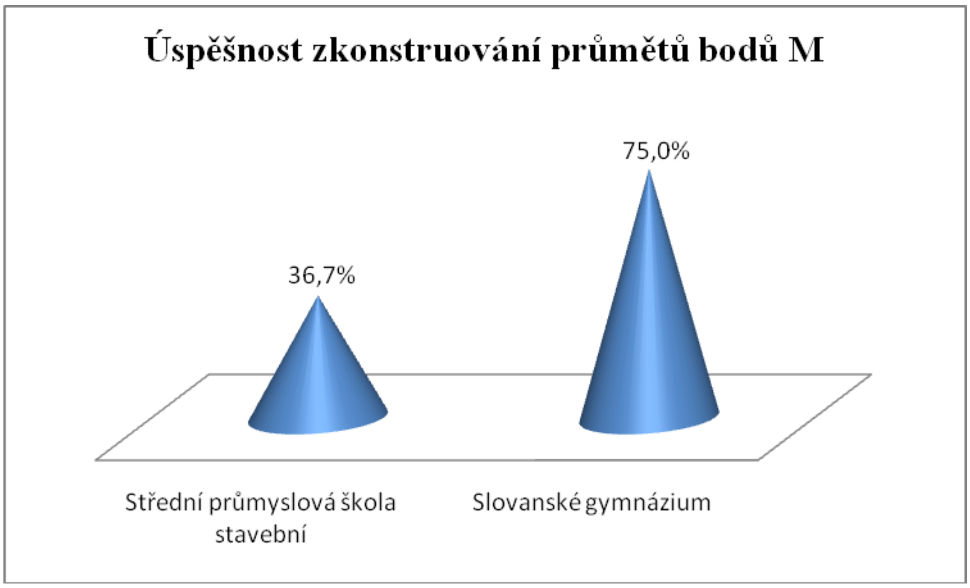
Statistika: Počet studentů /v procentech/, kteří zkonstruovali nárys útvaru:



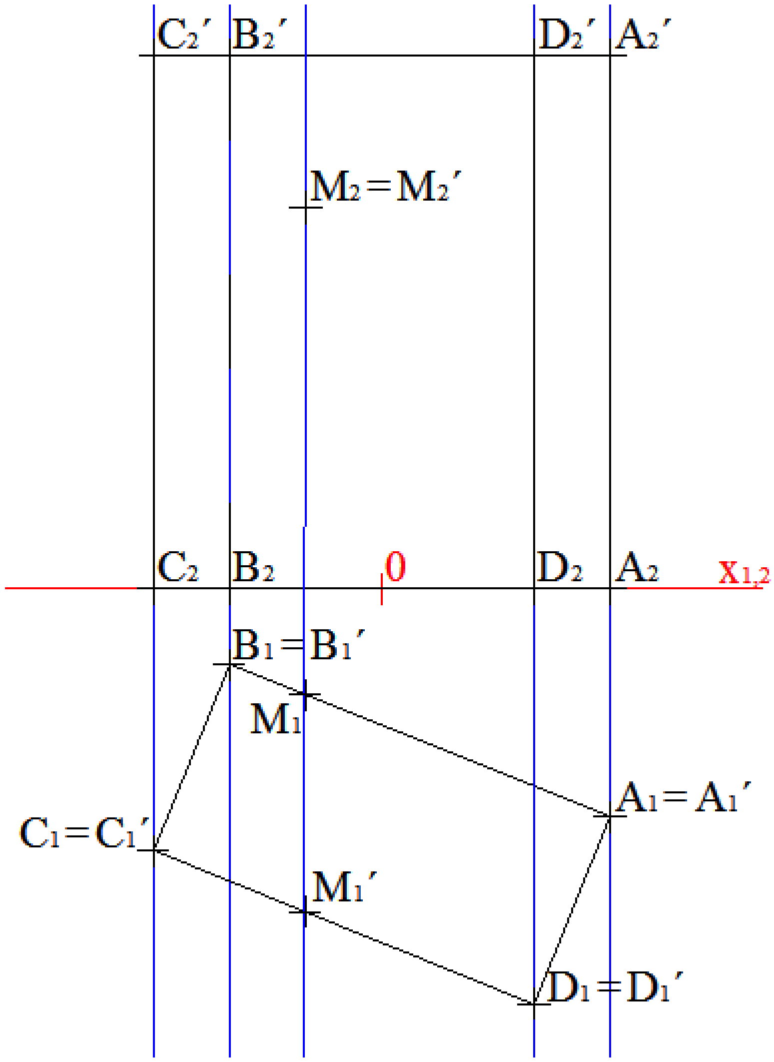
❖ **Konstrukce průmětů bodů M:**



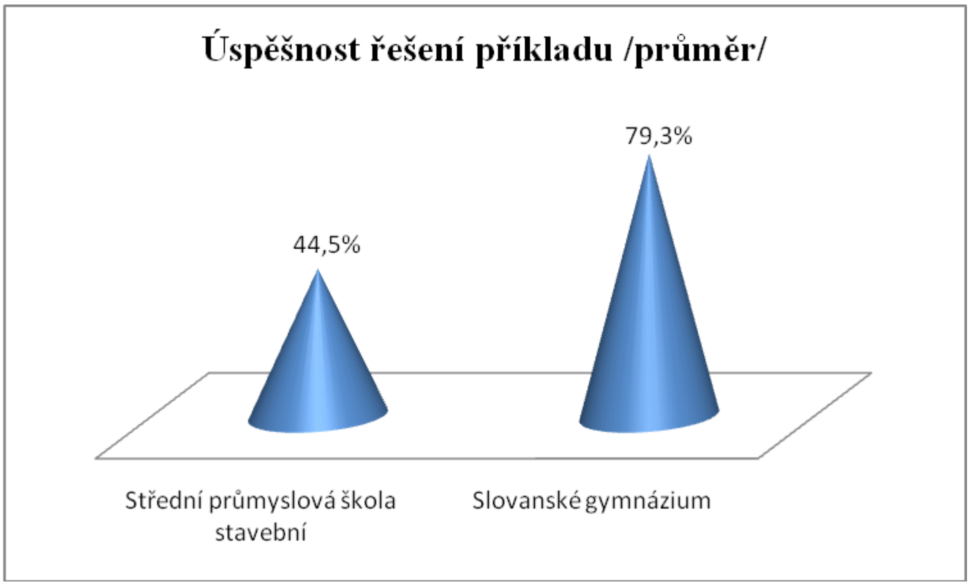
Statistika: Počet studentů /v procentech/, kteří zkonstruovali průměty bodů M:



❖ **Celkové řešení:**



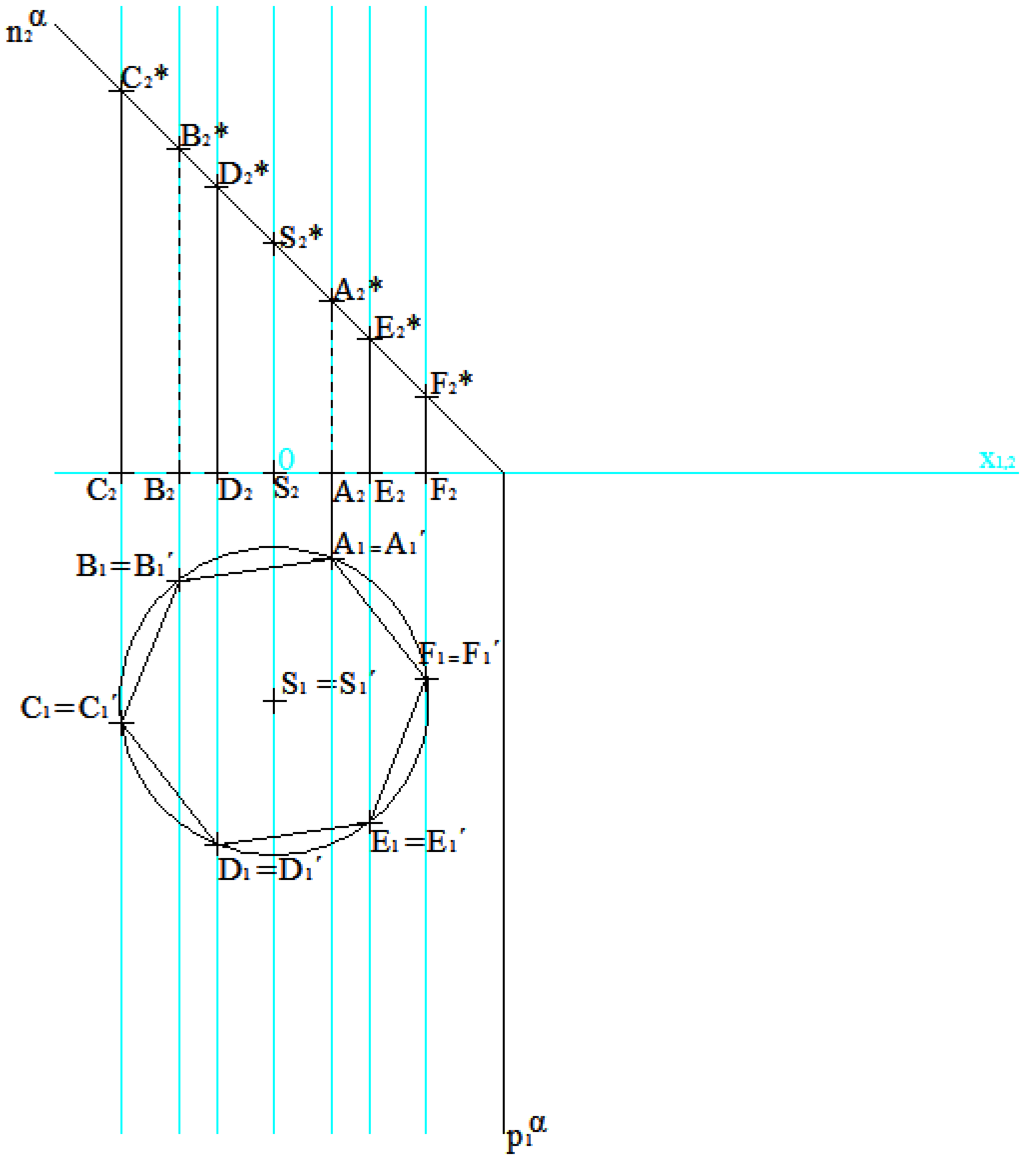
Statistika: Úspěšnost řešení úlohy /průměr/ na jednotlivých typech škol:



9.3 Úloha 3 - Mongeovo promítání

❖ **Zadání úlohy:**

„Podle výkresu určete skutečnou velikost horní podstavy ležící v řezné rovině. Měřítko výkresu 1:1.“ (7, s. 41, úl. 183)

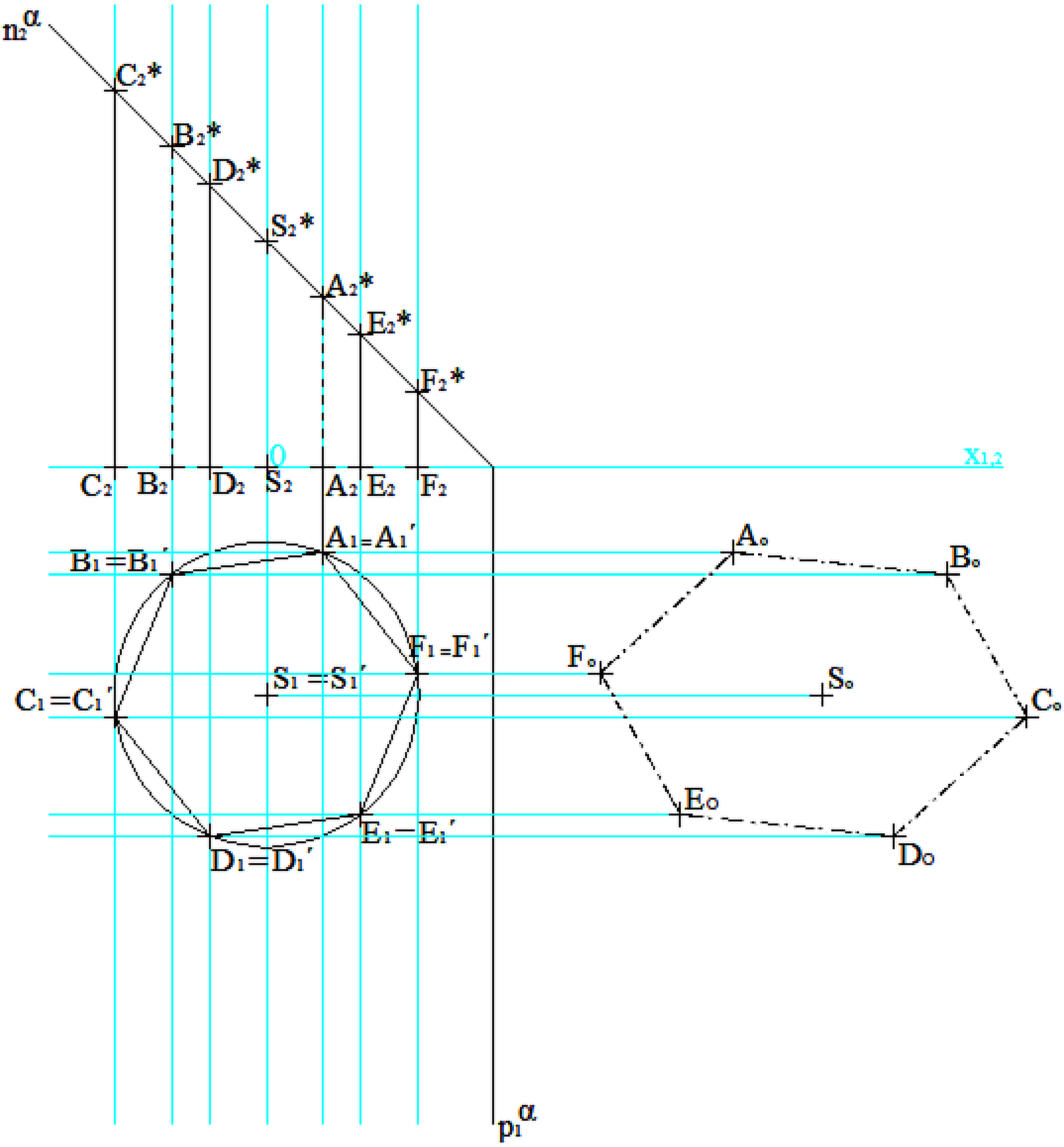


❖ **Bodování úlohy:**

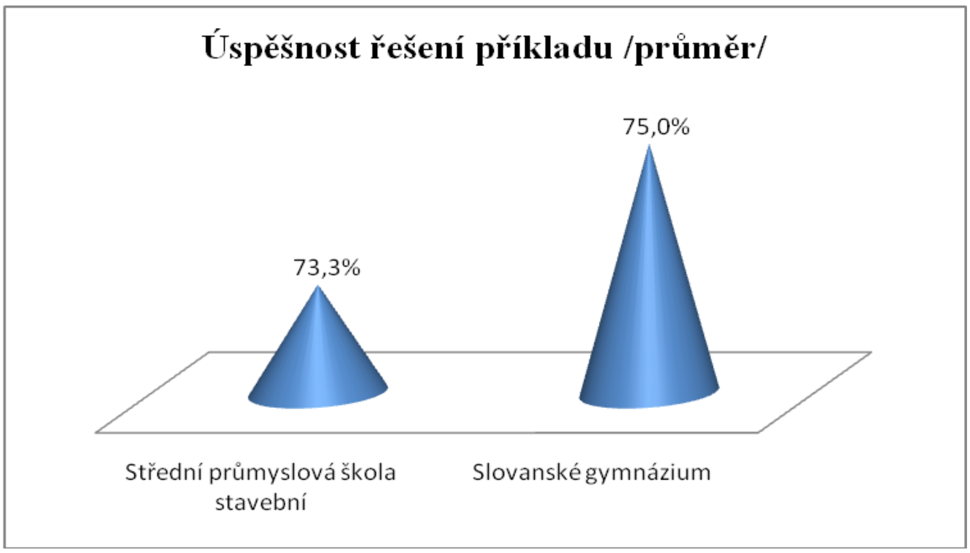
V této úloze mohli studenti dosáhnout maximálního počtu bodů – 1 bod:

- 1 bod – konstrukce řezu ve skutečnosti.

❖ **Celkové řešení /konstrukce řezu ve skutečnosti/**



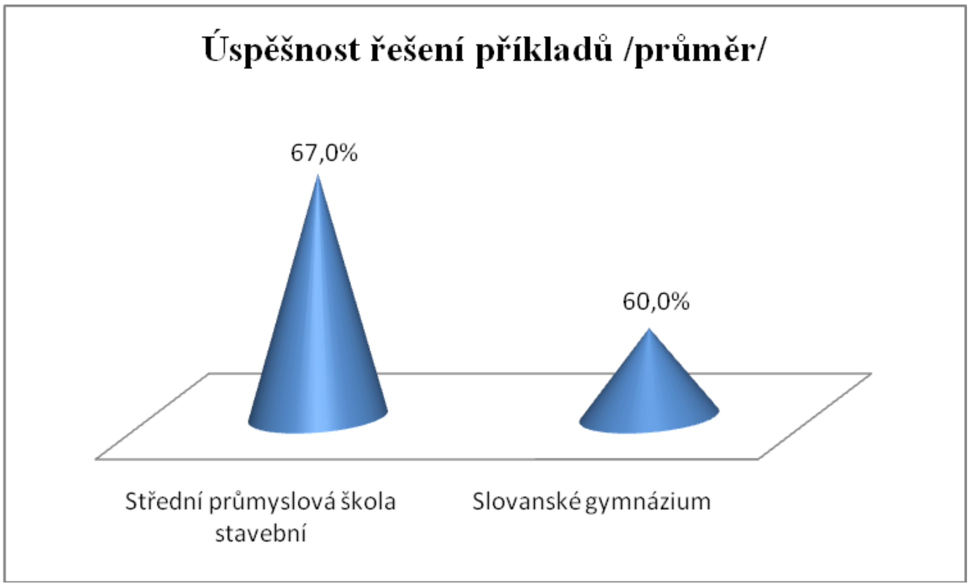
Statistika: Úspěšnost řešení úlohy /průměr/ na jednotlivých typech škol:



9.4 Vyhodnocení testu

Na závěr testu úrovně základních znalostí kótovaného a Mongeova promítání uvádíme statistiku řešení úloh /průměr/ na jednotlivých typech škol.

Statistika: Úspěšnost řešení úloh /průměr/ na jednotlivých typech škol:



Ze statistiky úspěšnosti řešení úloh /průměrně/ na jednotlivých typech škol vyplývá, že lépe uspěli studenti Střední průmyslové školy stavební v Lipníku nad Bečvou. Studenti této školy dobře znají stavební plány a technické výkresy, které jsou vlastně vhodně upravenými a čitelnými průměty projektovaných staveb. Nejen to, ale i stále se rozvíjející metody počítačové grafiky s kterými studenti pracují, přispívají k rozvíjení jejich představivosti a proto jsme jejich lepší umístění očekávali.

10. Závěr

V diplomové práci jsme se zaměřili na Mongeovo promítání, tj. metodu pravoúhlého promítání na dvě k sobě kolmé průmětny, která se nám jeví jako názorná, protože ze dvou průmětů zobrazovaného objektu dokážeme zpětně vymodelovat prostorový útvar.

V první části diplomové práce jsme ukázali vlastnosti a zobrazení základních objektů v Mongeově promítání, které jsou důležité pro vytvoření prostorové představivosti. Dále jsme se zaměřili na polohové a metrické úlohy a na zobrazování těles.
Tuto část diplomové práce doprovázíme konstrukcemi.

V druhé části diplomové práce předkládáme soubor vypracovaných konstrukcí, v kterých využíváme metody pravoúhlého promítání na dvě k sobě kolmé průmětny.
Tyto úlohy jsme ponechali v 100% velikosti, uvádíme u nich postup řešení.

V poslední části diplomové práce uvádíme výzkum úrovně základních znalostí kótovaného a Mongeova promítání na dvou typech středních škol.
Výsledky výzkumu jsme pro přehlednost znázornili do grafů.

Použitá literatura a prameny

1. BORECKÁ, K., CHVALINOVÁ, L., LOVEČKOVÁ, M. a kol. *Konstruktivní geometrie.* 2. vyd. Brno: Akademické nakladatelství Cerm, 2006. 146 s. ISBN 80-214-3229-2.
2. DOLEŽAL, J. *Geometrie.* 1. vyd. Ostrava: 2007. 373 s. ISBN 978-80-248-1318-9.
3. DOLEŽAL, M. *Základy deskriptivní a konstruktivní geometrie. Díl 3. Mongeovo promítání.* 1.vyd. Ostrava: 1997. 38 s. ISBN 80-7078-465-2.
4. DRS, L. *Deskriptivní geometrie pro střední školy I.* 2. vyd. Praha: Promethus, 1994. 130 s. ISBN 80-7196-321-6.
5. KARGEROVÁ, M., MERTL, P. *Konstruktivní geometrie.* 1. vyd. Praha: ČVUT, 2000. 186 s. ISBN 80-01-02218-8.
6. MACHALA, F., SROVNAL, J. *Konstrukční geometrie.* 1. vyd. Olomouc: UP, 1985. 189 s. ISBN nemá.
7. MAŇÁSKOVÁ, E. *Sbírka úloh z deskriptivní geometrie.* 1. vyd. Praha: Prometheus, 2006. 72 s. ISBN 80-7196-160-4.
8. NOVÁK, L. a kol. *Algebra a geometrie*. 5. vyd. Zlín: Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, 2006. 126 s. ISBN 80-7318-498-2.
9. PLOCKOVÁ, E., ŘEHÁK, M. *Sbírka řešených příkladů z deskriptivní a konstruktivní geometrie. Díl 3:Mongeova projekce.* 3. vyd. Ostrava: 2008. 55 s. ISBN 978-80-248-1802-3.
10. ŘÍHA, O. *Konstrukční geometrie II.* 2. vyd. Brno: MU, 2009. 223 s. ISBN 978-80-210-4803-4.
11. ŠŤAUBEROVÁ, Z. *Mongeovo promítání.*1. vyd. Plzeň: 2004. 48 s. ISBN 80-7043-323-X.
12. ŠVERCL, J. *Zobrazovací metody.* 1. vyd. Praha: ROH, 1971. 228 s. ISBN nemá.
13. URBAN, A. *Deskriptivní geometrie I.* 1. vyd. Praha: SNTL, 1965. 368 s. ISBN nemá.

Anotace diplomové práce

Jméno a příjmení:	Jana Šťastná
Katedra:	Katedra matematiky PdF UP Olomouc
Vedoucí práce:	Mgr. Jitka Hodaňová, Ph.D.
Rok obhajoby:	2010

Název práce:	Polohové a metrické úlohy v Mongeově promítání na středních školách
Název v angličtině:	Positional and metrical tasks in two-plane projection at high schools
Anotace práce:	Diplomová práce je zaměřena na polohové a metrické úlohy v Mongeově promítání. V úvodní části diplomové práce se věnujeme základním úlohám Mongeova promítání. Další částí je soubor narýsovaných úloh, v kterých se objevuje tématika zobrazování objektů v Mongeově promítání. Poslední částí diplomové práce je test úrovně základních znalostí kótovaného a Mongeova promítání, který byl proveden na Střední průmyslové škole stavební v Lipníku nad Bečvou a Slovanském gymnáziu v Olomouci.
Klíčová slova:	Bod, přímka, rovina, půdorysna π, nárysna ν, půdorysný průmět, nárysný průmět.
Anotace v angličtině:	The Dissertation is aimed on the positional and metric tasks of the two-plane projection. The introduction is focused on basic examples of two-plane projection. Following part consist of a set of drawn tasks specialized on the theme of the depiction of objects in the two-plane projection. Last part of this work is a test of the level of basic knowledge of quoted and two-plane projection conducted at the Secondary school for Building Construction in Lipník nad Bečvou and at Slavic college in Olomouc.
Klíčová slova v angličtině:	Point, the line, the level, ground plan π, elevation ν, ground projection, elevation projection
Rozsah práce:	132 stran
Jazyk práce:	Čeština