Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Přírodovědecká fakulta

Ústav matematiky a biomatematiky

Metrické úlohy ve stereometrii

Bakalářská práce

Lenka Krepsová

Vedoucí práce: RNDr. Ing. Jana Kalová, Ph.D.

České Budějovice, 2013

Bibliografické údaje

Krepsová L., 2013: Metrické úlohy ve stereometrii [Metric problems in the solid geometry] - p.102, Faculty of Science, The University of South Bohemia, České Budějovice, Czech Republic.

Anotace

This thesis deals with metric problems in the solid geometry and it is divided into two parts. The first part is focused on the theory of the angular deflection of lines and planes, perpendicularity of lines and planes and the distance of points, lines and planes. This part consists of a summary of theorems and definitions as well as basic examples for explanation. The second part contains a collection of worksheets for students. This collection includes some solutions to the examples from the worksheets in the mathematic software GeoGebra. The solutions are intended for teachers. The worksheets and their solutions were tested by students during the tuition in the last year of the grammar school. This thesis can be used in tuition, self-studying and testing.

Práce se zabývá problematikou metrických úloh ve stereometrii a je rozdělena do dvou částí. První část je zaměřena na teorii odchylky přímek a rovin, kolmost přímek a rovin, vzdálenost bodů, přímek a rovin. V této části najdete souhrn vět a definic a základní příklady k procvičení. Druhá část obsahuje sbírku pracovních listů pro studenty. Tato sbírka zahrnuje řešení příkladů z pracovních listů v matematickém programu GeoGebra. Řešení jsou určena pro učitele. Pracovní listy a jejich řešení byly testovány studenty během výuky v posledním ročníku gymnázia. Tato práce je určena pro výuku, samostudium a testování.

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s §47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích dne 22. dubna 2013

Lenka Krepsová

Poděkování

Chtěla bych poděkovat své vedoucí práce RNDr. Ing. Janě Kalové, Ph.D. za čas a rady, které mi věnovala při tvorbě bakalářské práce. Dále bych chtěla poděkovat všem pedagogům a studentům za jejich ochotu spolupracovat při vyplňování dotazníku a také děkuji své rodině a příteli za podporu.

Obsah

1 Úvod **1**

2 Cíle, hypotézy a teoretická východiska práce **2**

3 Dotazníkové šetření **3**

3.1 Dotazníkový průzkum - pedagogové . . . 3

3.2 Dotazníkový průzkum - studenti . . . 3

3.3 Průběh testování . . . 4

4 Odchylka přímek, rovin **5**

4.1 Odchylka dvou přímek . . . 5

4.1.1 Vzájemná poloha dvou přímek v prostoru . . . 5

4.1.2 Definice odchylky dvou přímek . . . 6

4.1.3 Řešené příklady . . . 7

4.2 Odchylka přímky a roviny . . . 9

4.2.1 Vzájemná poloha přímky a roviny v prostoru . . . 9

4.2.2 Definice odchylky přímky a roviny . . . 10

4.2.3 Řešené příklady . . . 11

4.3 Odchylka dvou rovin . . . 12

4.3.1 Vzájemná poloha dvou rovin v prostoru . . . 12

4.3.2 Definice odchylky dvou rovin . . . 13

4.3.3 Řešené příklady . . . 14

5 Kolmost přímek a rovin **15**

5.1 Kolmost dvou přímek . . . 15

5.1.1 Definice kolmosti dvou přímek . . . 15

5.1.2 Řešené příklady . . . 16

5.2 Kolmost přímky a roviny . . . 17

5.2.1 Definice kolmosti přímky a roviny . . . 17

5.2.2 Řešené příklady . . . 18

5.3 Kolmost dvou rovin . . . 19

5.3.1 Definice kolmosti dvou rovin . . . 19

5.3.2 Řešené příklady 20

6 Vzdálenosti bodů, přímek a rovin **21**

6.1 Vzdálenost dvou bodů 21

6.1.1 Řešený příklad 21

6.2 Vzdálenost bodu od přímky 22

6.2.1 Řešený příklad 23

6.3 Vzdálenost bodu od roviny 24

6.3.1 Řešený příklad 24

6.4 Vzdálenost dvou přímek 26

6.4.1 Řešený příklad 27

6.5 Vzdálenost přímky od roviny 28

6.5.1 Řešený příklad 28

6.6 Vzdálenost dvou rovin 29

6.6.1 Řešený příklad 29

7 Závěr **31**

A Dotazník pro učitele a jeho vyhodnocení **33**

B Dotazník pro studenty a jeho vyhodnocení **40**

C Pracovní listy **43**

C.1 Odchylka přímek, rovin 43

C.1.1 Odchylka dvou přímek 44

C.1.2 Odchylka přímek a rovin 56

C.2 Kolmost přímek, rovin 67

C.2.1 Kolmost přímek a rovin 68

C.3 Vzdálenost přímek, rovin 77

C.3.1 Vzdálenost bodu od přímky a od roviny 78

C.3.2 Vzdálenost přímek a rovin 88

D Ukázkový pracovní lista a jeho řešení **99**

E Zavedené značení **102**

Seznam obrázků

1 Rovnoběžné přímky různé . . . 5
2 Přímky totožné . . . 5
3 Přímky různoběžné . . . 5
4 Přímky mimoběžné . . . 6
5 Odchylka dvou přímek . . . 6
6 Odchylka mimoběžných přímek . . . 7
7 Řešený příklad 1 a) . . . 7
8 Řešený příklad 1 b) . . . 8
9 Řešený příklad 1 c) . . . 8
10 Řešený příklad 2 . . . 9
11 Přímka ležící v rovině . . . 9
12 Přímka neležící v rovině . . . 10
13 Různoběžnost přímky a roviny . . . 10
14 Definice odchylky přímky a roviny . . . 10
15 Pravoúhlý průmět přímky do roviny . . . 11
16 Řešený příklad 3 a) . . . 11
17 Řešený příklad 3 b) . . . 12
18 Roviny rovnoběžné totožné . . . 12
19 Rovnoběžné roviny různé . . . 12
20 Různoběžné roviny . . . 13
21 Odchylka dvou rovin . . . 13
22 Odchylka dvou rovin . . . 14
23 Řešený příklad 4 a) . . . 14
24 Řešený příklad 4 b) . . . 15
25 Kolmost dvou přímek . . . 15
26 Řešený příklad 5 a) . . . 16
27 Řešený příklad 5 b) . . . 16
28 Kolmost přímky a roviny . . . 17
29 Řešený příklad 6 . . . 18
30 Řešený příklad 7 . . . 18

31 Kolmost dvou rovin 19
32 Řešený příklad 8 a) 20
33 Řešený příklad 8 b) 20
34 Vzdálenost dvou bodů 21
35 Řešený příklad 9 a) 21
36 Řešený příklad 9 b) 22
37 Vzdálenost bodu a přímky 22
38 Řešený příklad 10 a) 23
39 Řešený příklad 10 b) 23
40 Vzdálenost bodu od roviny 24
41 Řešený příklad 11 a) 25
42 Řešený příklad 11 b) 25
43 Vzdálenost dvou rovnoběžných přímek 26
44 Vzdálenost dvou mimoběžných přímek 26
45 Řešený příklad 12 a) 27
46 Řešený příklad 12 b) 27
47 Vzdálenost přímky od roviny 28
48 Řešený příklad 13 28
49 Vzdálenost dvou rovin 29
50 Řešený příklad 14 a) 30
51 Řešený příklad 14 b) 30

1 Úvod

Výuka geometrie na středních školách probíhá velmi často v pořadí planimetrie (geometrie v rovině), následuje stereometrie (geometrie v prostoru) a poslední částí je analytická geometrie. Bakalářská práce je zaměřena na problematiku náročné oblasti matematiky - geometrie v prostoru (stereometrie). Probíraná látka je vysvětlována v Euklidovském prostoru. Stereometrie se na středních školách vyučuje ve třech blocích. V prvním bloku se student seznámí s tělesy, počítání jejich objemů a povrchů, dále následuje výuka vzájemné polohy přímek a rovin v prostoru a provádějí se řezy těles. Poslední část se zabývá problematikou metrických úloh, která navazuje na znalosti získané v předchozím studiu stereometrie.

Obsah probírané látky je velmi rozsáhlý, proto je tato bakalářská práce zaměřena pouze na jediný blok stereometrie, metrické úlohy. Z dlouhodobých zkušeností středoškolských učitelů a žáků jsou tyto úlohy na rozdíl od geometrie v rovině (planimetrie) mnohem obtížnější na prostorovou představivost a časově náročnější na stanovení metody řešení úloh v prostoru. Významnými pomocníky při výuce se může stát použití informačních technologií, vhodného software nebo interaktivní tabule.

Tato bakalářská práce vznikla jako reakce na požadavek učitelů Gymnázia, Jírovcova 8, České Budějovice. Vzhledem k nedostatku vhodných materiálů a časové zaneprázdněnosti středoškolských učitelů byl stanoven požadavek na vytvoření učebních podpor (pracovní listy, prezentace potřebné k výkladu učiva, testy).

Předpokládá se, že dojde k ulehčení a k zefektivnění výuky. Vytvořené materiály budou zveřejněny i pro studenty, kterým bude usnadněn individuální způsob studia.

2 Cíle, hypotézy a teoretická východiska práce

Cílem bakalářské práce je zhotovení pracovních listů pro studenty, aby si mnohem lépe mohli představit řešenou úlohu v prostoru. Pracovní listy obsahují 48 zadání příkladů určených k procvičení probírané látky. Přiložené CD obsahuje řešení jednotlivých příkladů obsažených v pracovních listech.

Bakalářská práce je rozdělena do dvou hlavních částí, které se dále dělí do menších podkapitol.

První část je zaměřena teoreticky. Obsahuje přehled vět a definic a použitého značení na úrovni gymnaziálního učiva. Na gymnáziu je látka probírána mnohem podrobněji než na ostatních středních školách (střední odborné školy, odborná učiliště). Na odborých školách je možné vybrat pouze vhodnou část. Teoretická část může být také použita k samostudiu. Kromě přehledu teorie jsou uvedeny i základní příklady k ilustraci daného téma. Zadání příkladů vychází z učebnice pro gymnázia [2] a některá jsou vytvořena autorkou. Celkově je tato část rozdělena do tří kapitol. První kapitola se zabývá odchylkou přímek a rovin, druhá kapitola obsahuje problematiku kolmosti přímek a rovin a poslední kapitola obsahuje teorii týkající se vzdálenosti bodů, přímek a rovin.

Součástí práce je i praktická část. Tuto část tvoří soubor příkladů v pracovních listech pro žáky. Konkrétní zadání jsou doplněna obrázkem tělesa, do kterého student bude přímo znázorňovat své řešení zadané úlohy. I tato část je rozdělena do podkapitol, které jsou uspořádané pro přehlednost podle stejného systému jako v teoretické části. Pro učitele je přiloženo CD s řešením jednotlivých příkladů, postup výpočtu je krokován a podrobně vysvětlen. Takto zpracované úlohy lze použít také při přímé výuce. Požadavek na vytvoření pracovních listů a jejich řešení přišel z gymnázia, proto i příklady vybrané do pracovních listů pocházejí z učebnice pro gymnázia. [2]

Po předchozí analýze dosud napsané literatury a odborných prací bylo zjištěno, že problematikou stereometrie se zabývá velké množství učebnic a přehledů matematiky. Mnoho odborných prací se zabývalo všeobecným přehledem stereometrie, polohovými úlohami, řešenými ukázkovými příklady v matematickém programu Cabri geometrie, či vytvořením webové stránky s výkladem učiva.

3 Dotazníkové šetření

3.1 Dotazníkový průzkum - pedagogové

Před vlastní tvorbou pracovních listů a řešených příkladů pro vyučující, bylo provedeno dotazníkové šetření na středních školách všech typů (gymnázia, střední odborné školy, odborná učiliště). Dotazník byl anonymní. Vyučující odpovídali na 10 otázek. Cílem bylo zjistit, jakým způsobem vysvětlují problematiku metrických úloh ve stereometrii, jaké k tomu využívají pomůcky, zda jim tento způsob výuky vyhovuje či nikoli a zda by uvítali podpůrné materiály k výuce.

Dotazníkového šetření se zúčastnilo celkem 19 vyučujících (někteří vyučují i na více středních školách najednou). Stereometrie se vyučuje na všech typech středních škol, což bylo překvapivé u odborných učilišť. Zde se výuka stereometrie nepředpokládala pro svou náročnost. Vyučující při výkladu stereometrie využívají především tabuli a připravené prezentace, které pak promítají na promítací plátno, či využívají multimediální tabule. Někteří také připravují své vlastní materiály, které pak poskytují studentům. Ve výuce využívají především programy GeoGebra, Mathematica a Cabri. Tyto poznatky byly východiskem při tvorbě této bakalářské práce. Významným pomocníkem při výuce může být využití multimediální techniky a vhodně zvolený software. Úlohy v této práci byly vypracovány v programu GeoGebra. Tento program je zdarma a jeho ovládání je velmi jednoduché.

Většině učitelů jejich styl výuky vyhovuje, ale uvítali by změnu ke zkvalitnění výuky, která by jim usnadnila výklad stereometrie. Někteří využívají své vlastní pracovní listy, ale uvítali by vytvoření nových listů a jejich řešení, které by pak mohli využívat během výuky.

Ukázku dotazníku a jeho vyhodnocení lze nalézt v Příloze A.

3.2 Dotazníkový průzkum - studenti

Druhé dotazníkové šetření bylo provedeno mezi studenty posledního ročníku gymnázia. Celkově se ho zúčastnilo 68 studentů. Odpovídali na 4 otázky, které se opět týkaly stylu výuky stereometrie, jestli jim styl výuky vyhovuje a zda - li by uvítali pracovní listy a využívání informačních technologií při výuce.

Studenti uvedli, že vyučující jim látku vysvětluje na tabuli, používá prezentace a své materiály. Studenti byli se stylem výuky spokojeni nebo téměř spokojeni. Proto po vytvoření pracovních listů proběhlo jejich testování a následné porovnání, který způsob výuky bude studentům vyhovovat více.

Ve výuce by pracovní listy uvítali, aby nemuseli neustále překreslovat tělesa do sešitu. Také zastávají názor, že ve výuce by bylo vhodné pro názornost používat matematický software.

Ukázku dotazníku a jeho vyhodnocení lze nalézt v Příloze A.

3.3 Průběh testování

Testování zhotovených pracovních listů a jejich řešení proběhlo při hodině matematiky na Gymnáziu, Jírovcova 8, České Budějovice. Testovacím ročníkem se stal maturitní ročník osmiletého gymnázia. Výuka probíhalou formou opakování definic a vět pomocí prezentace. Tato prezentace byla rozdělena do třech hlavních částí: odchylka přímek a rovin, kolmost přímek a rovin, vzdálenost bodů, přímek a rovin.

Studentům byly rozdány pracovní listy. Po zopakování jednotlivých kapitol řešili zadané úlohy. Studenti během výuky odpovídali na dotazy a vysvětlovali, jak by postupovali při řešení, případně úlohy řešili samostatně a poté jim bylo postupně vysvětleno řešení v programu GeoGebra. Na závěr byl shrnut obsah opakování a proběhla diskuze. Studenti zhodnotili pracovní listy a jejich řešení a uvedli klady a zápory tohoto stylu výuky.

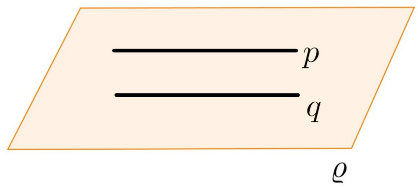
4 Odchylka přímek, rovin

4.1 Odchylka dvou přímek

4.1.1 Vzájemná poloha dvou přímek v prostoru

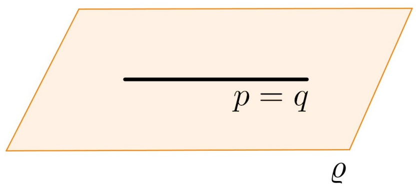
- Přímky p, q jsou rovnoběžné. Značíme $p \parallel q$.

  a) rovnoběžné různé: p a q leží v jedné rovině ϱ, $p \cap g = \{\}$



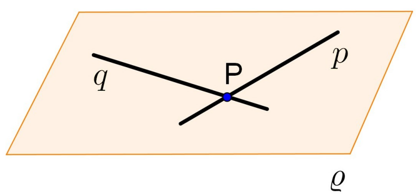
Obrázek 1: Rovnoběžné přímky různé

  b) totožné: p a q leží v jedné rovině ϱ, $p \cap g = p = q$



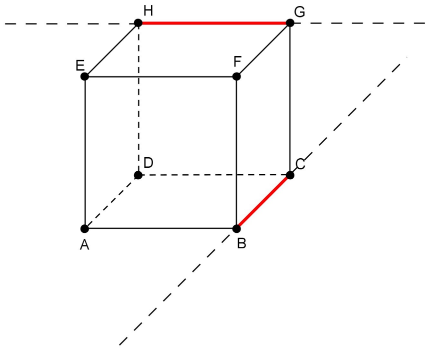
Obrázek 2: Přímky totožné

- Přímky p, q jsou různoběžné. Jejich průnikem je právě jeden bod P, který nazýváme průsečík. Značíme $p \nparallel q$ a $P \in p \cap q$.



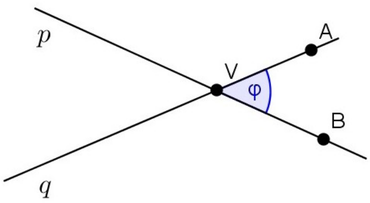
Obrázek 3: Přímky různoběžné

- Přímky p, q jsou mimoběžné. Každá z přímek leží v jiné rovině a nemají žádný průsečík. Značíme $p \cap q = \{\}$



Obrázek 4: Přímky mimoběžné

4.1.2 Definice odchylky dvou přímek



Obrázek 5: Odchylka dvou přímek

Věta 4.1.1 *Každým bodem v prostoru lze vést jen jednu rovnoběžku s danou přímkou.*

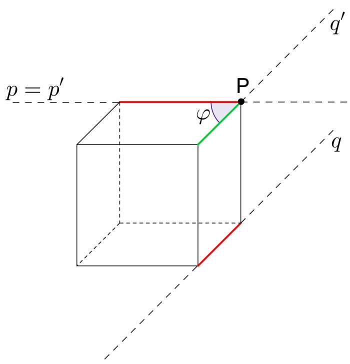
Věta 4.1.2 *Nechť p_1 a q_1 jsou různoběžky, p_2 a q_2 jsou rovněž různoběžky takové, že $p_1 \parallel p_2$, $q_1 \parallel q_2$. Pak pro odchylky $|\measuredangle p_1 q_1|$, $|\measuredangle p_2 q_2|$ platí $|\measuredangle p_1 q_1| = |\measuredangle p_2 q_2|$*

Odchylka dvou různoběžných přímek je velikost každého z ostrých (příp.pravých) úhlů, které spolu přímky svírají. [5, s.119]

Odchylka dvou rovnoběžných přímek je 0°. [5, s.119]

Odchylka mimoběžných přímek p, q je definována jako odchylka různoběžných přímek p' a q' vedených libovolným bodem P prostoru a rovnoběžných po řadě s danými mimoběžkami, je rovna velikosti každého z ostrých nebo pravých úhlů, které tyto mimoběžky svírají. Odchylka φ dvou libovolných přímek p, q se značí $|\measuredangle pq| = \varphi$. [3, s.291]

Poznámka 4.1.1 *Bod P se většinou volí na jedné z mimoběžek.*



Obrázek 6: Odchylka mimoběžných přímek

4.1.3 Řešené příklady

Příklad 1 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Vypočítejte odchylku přímek:

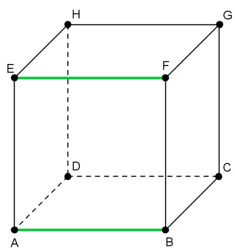
a) AB, EF

b) AC, CH

c) EF, BG

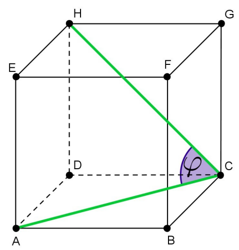
Řešení:

a) Odchylka přímek AB, EF je $\varphi = 0°$, protože přímky jsou rovnoběžné (obr. 7).



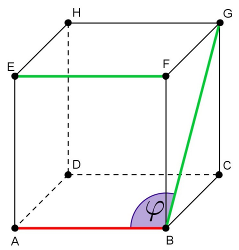
Obrázek 7: Řešený příklad 1 a)

b) Přímky AC, CH jsou různoběžné. Odchylkou je ostrý úhel, který spolu tyto dvě přímky svírají. V tomto případě (obr. 8) vidíme, že AC a CH jsou stěnové úhlopříčky a společně s přímkou AH tvoří rovnostranný trojúhelník. Víme, že velikost každého z úhlů v rovnostranném trojúhelníku je 60°. Odchylka $\varphi = 60°$.



Obrázek 8: Řešený příklad 1 b)

c) Přímky EF a BG jsou mimoběžné. Bodem B vedeme rovnoběžku s přímkou EF (obr. 9). Úsečky AB, BG tvoří strany obdélníka ABGH. Proto je odchylka $\varphi = 90°$.



Obrázek 9: Řešený příklad 1 c)

Příklad 2 Podstavou kolmého trojbokého hranolu $ABCA'B'C'$ je rovnoramenný trojúhelník ABC. $|\mathrm{AB}| = 3\,\mathrm{cm}, |\mathrm{AC}| = |\mathrm{BC}| = 4\,\mathrm{cm}, |\mathrm{AA'}| = 4\,\mathrm{cm}$. Určete odchylku přímek AC' a BC'.

Řešení:

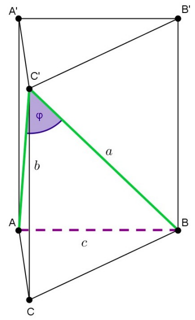
Zadání příkladu je znázorněné na obrázku 10. Přímky AC' a BC' jsou různoběžné.
Pro výpočet odchylky využijeme vzniklého trojúhelníku ABC'. Trojúhelník není pravoúhlý, známe ale všechny velikosti stran, a proto využijeme kosinovou větu $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\varphi$. Nejprve si spočteme délky stran a, b, c a poté dosadíme do vzorce pro $\cos\varphi = \frac{a^2+b^2-c^2}{2 \cdot a \cdot b}$ a vypočteme hledanou odchylku.

$a = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$,

$\mathrm{b} = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$,

$\mathrm{c} = 3\,\mathrm{cm}$

Po dosazení dostáváme velikost odchylky $\varphi \doteq 30,75°$



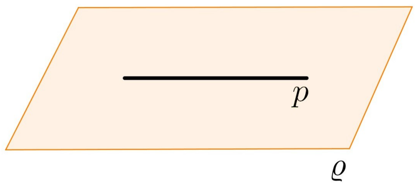
Obrázek 10: Řešený příklad 2

4.2 Odchylka přímky a roviny

4.2.1 Vzájemná poloha přímky a roviny v prostoru

- Přímka p a rovina ϱ jsou rovnoběžné. Značíme $p \parallel \varrho$.

  a) přímka leží v rovině: přímka $p \in \varrho$, $p \cap \varrho = p$

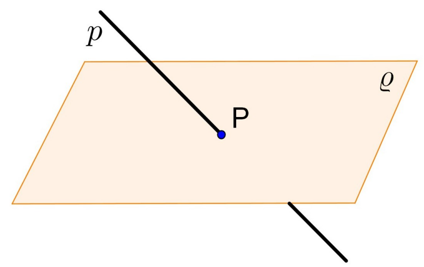


Obrázek 11: Přímka ležící v rovině

b) přímka neleží v rovině: přímka $p \notin \varrho$, $p \cap \varrho = \{\}$

Obrázek 12: Přímka neležící v rovině

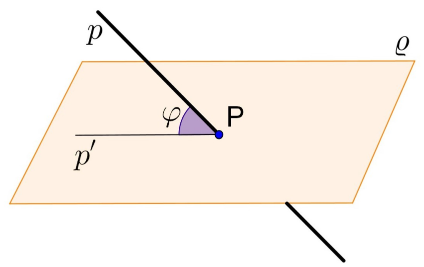
- Přímka p a rovina ϱ jsou různoběžné. Jejich průnikem je právě jeden bod P, který nazýváme průsečík. Značíme $p \nparallel \varrho$ a $P \in p \cap \varrho$.



Obrázek 13: Různoběžnost přímky a roviny

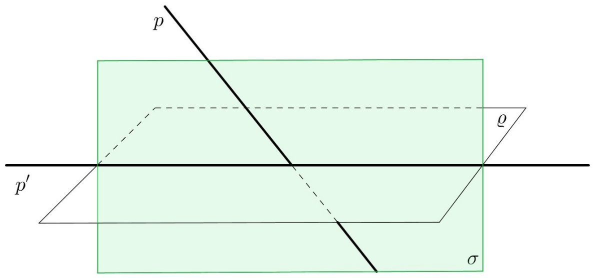
4.2.2 Definice odchylky přímky a roviny

Odchylka přímky p a roviny ϱ (přímky p od roviny ϱ), jež nejsou k sobě kolmé, je definována jako odchylka přímky p a jejího pravoúhlého průmětu p' do roviny ϱ ; pro p $\perp$ ϱ je odchylkou přímky p a roviny ϱ velikost pravého úhlu. [3, s.291]



Obrázek 14: Definice odchylky přímky a roviny

Poznámka 4.2.1 *Pravoúhlý průmět přímky p do roviny ϱ : Přímkou p, která není kolmá k rovině ϱ, prochází jediná rovina σ kolmá k rovině ϱ. Průsečnice rovin ϱ a σ je přímka p', která je pravoúhlým průmětem přímky p do roviny ϱ. Rovina σ se nazývá promítací rovina.*



Obrázek 15: Pravoúhlý průmět přímky do roviny

Odchylku značíme: $\mid \measuredangle p\varrho \mid = \varphi = \mid \measuredangle pp' \mid$. Platí, že $0° < \varphi < 90°$.

4.2.3 Řešené příklady

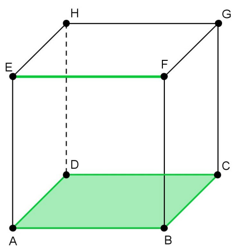
Příklad 3 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Vypočítejte odchylku přímky a roviny:

a) ABC, EF

b) BCE, BG

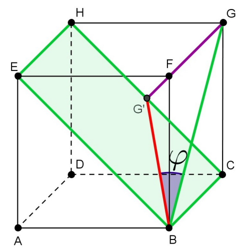
Řešení:

a) Odchylka přímky EF a roviny ABC je $\varphi = 0°$, protože přímka EF a rovina ABC rovnoběžné (obr. 16).



Obrázek 16: Řešený příklad 3 a)

b) Provedeme pravoúhlý průmět BG' přímky BG do roviny BCE. Vznikne pravoúhlý trojúhelník BGG'(obr. 17). Délka strany $|GG'| = \frac{a\sqrt{2}}{2}, |BG| = a\sqrt{2}$. Pro výpočet odchylky φ použijeme goniometrickou funkci sinus: $\sin\varphi = \dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$.
Odchylka $\varphi = 30°$.



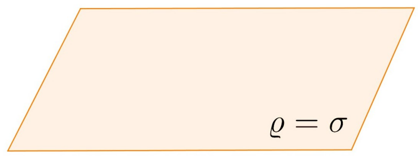
Obrázek 17: Řešený příklad 3 b)

4.3 Odchylka dvou rovin

4.3.1 Vzájemná poloha dvou rovin v prostoru

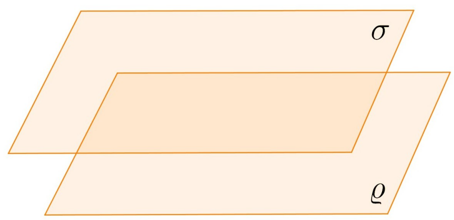
- Rovina ϱ a rovina σ jsou rovnoběžné. Značíme $\varrho \parallel \sigma$.

  a) totožné: rovina $\varrho \cap \sigma = \varrho = \sigma$



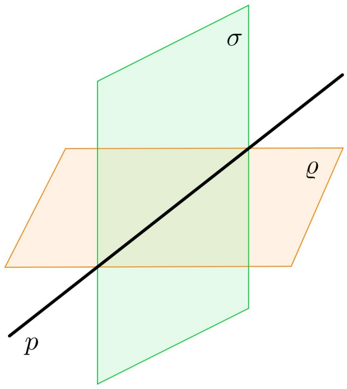
Obrázek 18: Roviny rovnoběžné totožné

  b) rovnoběžné různé: rovina $\varrho \cap \sigma = \{\}$



Obrázek 19: Rovnoběžné roviny různé

- Rovina ϱ a rovina σ jsou různoběžné. Jejich průnikem je přímka p, kterou nazýváme průsečnicí. Značíme $\varrho \nparallel \sigma$ a $p \in \varrho \cap \sigma$.

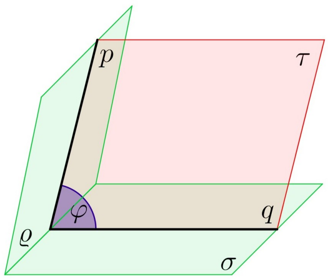


Obrázek 20: Různoběžné roviny

4.3.2 Definice odchylky dvou rovin

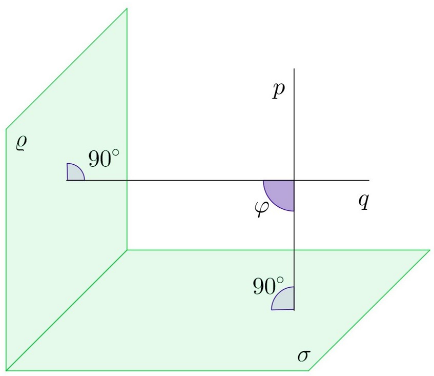
Odchylky dvou rovin můžeme stanovit dvěma způsoby:

a) Odchylka dvou rovin ϱ a σ je rovna odchylce průsečnic p, q těchto rovin s libovolnou rovinou τ kolmou k oběma rovinám ϱ, σ. [1, s.514]



Obrázek 21: Odchylka dvou rovin

b) **Věta 4.3.1** *Odchylka dvou rovin ϱ a σ je rovna odchylce přímek p, q, z nichž jedna je kolmá k rovině ϱ a druhá k rovině σ*



Obrázek 22: Odchylka dvou rovin

Odchylku dvou rovin značíme podle a): $|\measuredangle \varrho\sigma| = \varphi = |\measuredangle pq|$. Platí, že $0^\circ < \varphi < 90^\circ$.

4.3.3 Řešené příklady

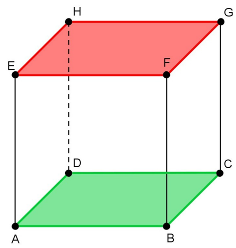
Příklad 4 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Určete odchylku dvou rovin:

a) ABC, EFG

b) ACG, BDF

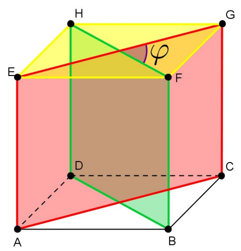
Řešení:

a) Roviny ABC a EFG jsou rovnoběžné. Odchylka $\varphi = 0^\circ$ (obr. 23).



Obrázek 23: Řešený příklad 4 a)

b) Vyznačíme rovinu EFG, která je kolmá k oběma rovinám. Odchylku rovin ACG, BDF spočítáme jako odchylku průsečnic těchto rovin s proloženou rovinou EFG. Tyto průsečnice tvoří stěnové úhlopříčky, které jsou na sebe kolmé. Odchylka $\varphi = 90°$.

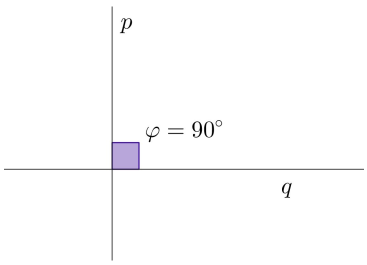


Obrázek 24: Řešený příklad 4 b)

5 Kolmost přímek a rovin

5.1 Kolmost dvou přímek

5.1.1 Definice kolmosti dvou přímek



Obrázek 25: Kolmost dvou přímek

Různoběžky p, q jsou k sobě kolmé, právě když v rovině jimi určené spolu svírají pravé úhly. Dále v prostoru definujeme kolmosti mimoběžek takto: Mimoběžky p, q jsou k sobě kolmé, právě když přímky $p' \parallel p$ a $q' \parallel q$ vedené libovolným bodem M prostoru spolu svírají pravé úhly. [3, s.286]

Značíme $p \perp q$ a pro odchylku platí $\varphi = |\measuredangle pq| = 90°$.

5.1.2 Řešené příklady

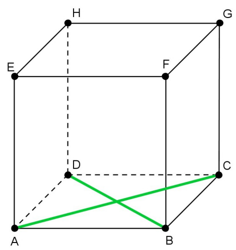
Příklad 5 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Dokažte, že přímky jsou k sobě kolmé.

a) AC, BD

b) FH, DH

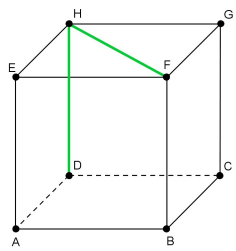
Řešení:

a) Stěny krychle jsou čtverce. Přímky AC a BD tvoří úhlopříčky čtverce $ABCD$. Úhlopříčky jsou na sebe kolmé.



Obrázek 26: Řešený příklad 5 a)

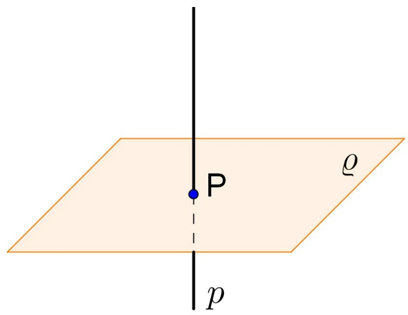
b) Rovina EFH obsahuje přímku FH a zároveň tato rovina je kolmá k přímce DH, protože stěny a hrany krychle jsou na sebe kolmé.



Obrázek 27: Řešený příklad 5 b)

5.2 Kolmost přímky a roviny

5.2.1 Definice kolmosti přímky a roviny



Obrázek 28: Kolmost přímky a roviny

O přímce p a rovině ϱ říkáme, že jsou navzájem kolmé, jestliže přímka p je kolmá ke každé přímce roviny ϱ. [1, s.514]

Přímka kolmá k rovině se nazývá kolmice k rovině. Její průsečík P s touto rovinou se nazývá pata kolmice. [3, s.286]

Značíme: $p \perp \varrho$.

O kolmosti přímky a roviny platí následují věty:

Věta 5.2.1 *Kritérium kolmosti přímky a roviny: Je - li přímka p kolmá ke dvěma různoběžným přímkám a, b roviny ϱ, pak je kolmá k této rovině.*

Věta 5.2.2 *Daným bodem lze vést k dané rovině právě jednu kolmici.*

Věta 5.2.3 *Všechny kolmice k téže rovině jsou navzájem rovnoběžné.*

Věta 5.2.4 *Daným bodem lze k dané přímce vést právě jednu kolmou rovinu.*

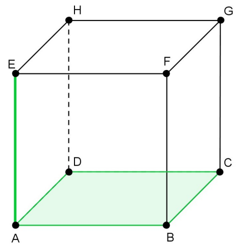
Věta 5.2.5 *Všechny roviny kolmé k téže přímce jsou navzájem rovnoběžné.*

5.2.2 Řešené příklady

Příklad 6 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Dokažte, že přímka AE a rovina ABC jsou k sobě kolmé.

Řešení:

Najdeme dvě různoběžné přímky v rovině ABC, k nimž je AE kolmá. Například AD a AB. (Věta 5.2.1)

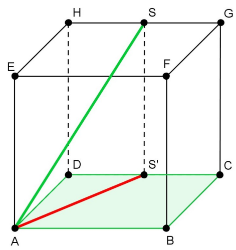


Obrázek 29: Řešený příklad 6

Příklad 7 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Určete pravoúhlý průmět přímky AS do roviny ABC. Bod S je středem hrany GH.

Řešení:

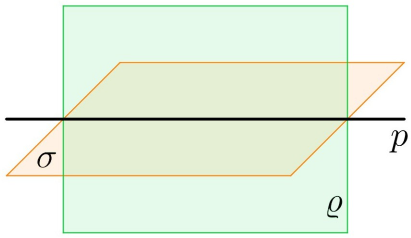
Přímka AS' je pravoúhlým průmětem přímky AS do roviny ABC. (obr. 30)



Obrázek 30: Řešený příklad 7

5.3 Kolmost dvou rovin

5.3.1 Definice kolmosti dvou rovin



Obrázek 31: Kolmost dvou rovin

Pro kolmost dvou rovin platí:

Věta 5.3.1 *Kritérium kolmosti dvou rovin: Roviny ϱ, σ jsou k sobě kolmé, jestliže jedna z nich je kolmá k některé přímce druhé roviny. Platí i věta obrácená.*

Věta 5.3.2 *Jestliže dvě různoběžné roviny ϱ, σ jsou kolmé k rovině τ, pak průsečnice rovin ϱ, σ je kolmá k rovině τ.*

Další věty vyjadřují vztahy mezi kolmostí a rovnoběžností přímek a rovin:

Věta 5.3.3 *Jestliže přímka p a rovina ϱ jsou kolmé k rovině σ, pak p a ϱ, jsou navzájem rovnoběžné.*

Věta 5.3.4 *Jestliže přímka p a rovina ϱ mají společný bod a jsou kolmé k rovině σ, pak přímka p leží v rovině ϱ.*

Věta 5.3.5 *Jestliže rovina ϱ je rovnoběžná s přímkou p kolmou k rovině σ, pak jsou roviny ϱ, σ navzájem kolmé.*

Pro odchylku dvou kolmých rovin platí: $\varphi = |\measuredangle \varrho\sigma| = 90°$ a značíme $\varrho \perp \sigma$.

5.3.2 Řešené příklady

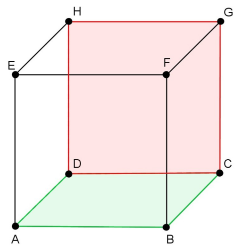
Příklad 8 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Vyšetřete, zda roviny jsou k sobě kolmé.

a) ABC, CDH

b) ABC, BCH

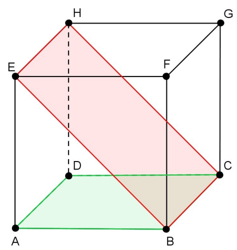
Řešení:

a) Najdeme přímku, která leží v rovině ABC a která je kolmá k rovině CDH. Například přímka AD je kolmá k rovině CDH. (Věta 5.3.1)



Obrázek 32: Řešený příklad 8 a)

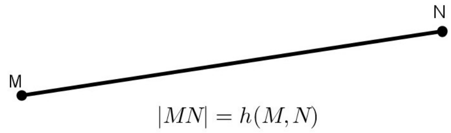
b) Roviny na sebe nejsou kolmé. Přímka AB ležící v rovině ABC a přímka BE ležící v rovině BCH na sebe nejsou kolmé.



Obrázek 33: Řešený příklad 8 b)

6 Vzdálenosti bodů, přímek a rovin

6.1 Vzdálenost dvou bodů



Obrázek 34: Vzdálenost dvou bodů

Vzdáleností dvou bodů M, N v prostoru rozumíme délku úsečky MN.

Značíme $|MN| = h(M, N)$.

6.1.1 Řešený příklad

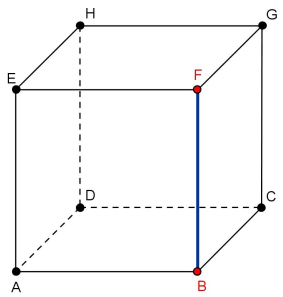
Příklad 9 Je dána krychle $ABCDEFGH$ o délce hrany a. Vypočtěte vzdálenost bodů:

a) B a F

b) A a G

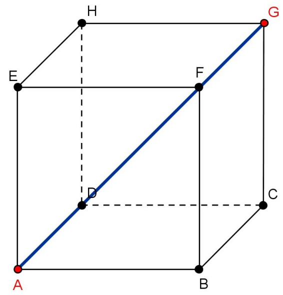
Řešení:

a) Vzdálenost bodů B a F je rovna délce hrany krychle $ABCDEFGH$. $|BF| = a$. (obr. 35)



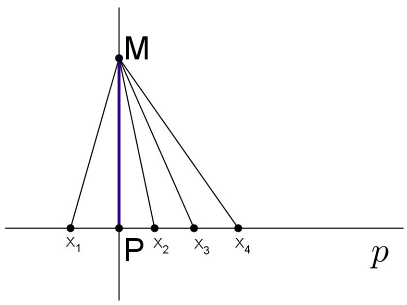
Obrázek 35: Řešený příklad 9 a)

b) Vzdálenost bodů A a G je rovna délce tělesové úhlopříčky krychle $ABCDEFGH$. $|AG| = a\sqrt{3}$. (obr. 36)



Obrázek 36: Řešený příklad 9 b)

6.2 Vzdálenost bodu od přímky



Obrázek 37: Vzdálenost bodu a přímky

Vzdálenost bodu M od přímky p je nejmenší vzdálenost ze všech vzdáleností bodu M od jednotlivých bodů X přímky p. [5, s.122]
Jestliže bod P je pata kolmice k vedené bodem M k přímce p v rovině dané bodem M a přímkou p, pak je hledanou vzdáleností vzdálenost bodů M, P. [5, s.122]

Značíme $h(M, p) = |Mp| = |MP|$.

6.2.1 Řešený příklad

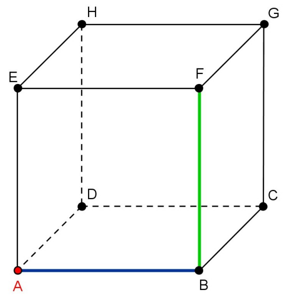
Příklad 10 Je dána krychle $ABCDEFGH$ s hranou délky a. Určete početně vzdálenost bodu A od přímky:

a) BF

b) GH

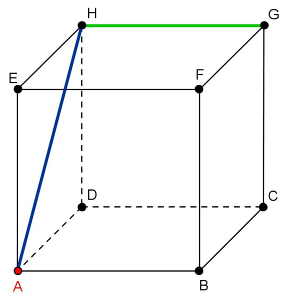
Řešení:

a) Délka úsečky AB je hledanou vzdáleností bodu A od přímky BF. $|AB| = a$ (obr. 38).



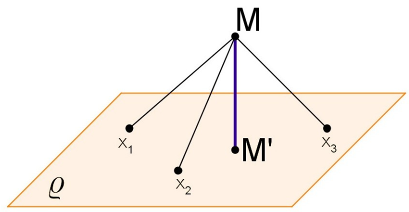
Obrázek 38: Řešený příklad 10 a)

b) Délka úsečky AH je hledanou vzdáleností bodu A od přímky GH. AH je zároveň stěnovou úhlopříčkou krychle $ABCDEFGH$. $|AH| = a\sqrt{2}$. (obr. 39)



Obrázek 39: Řešený příklad 10 b)

6.3 Vzdálenost bodu od roviny



Obrázek 40: Vzdálenost bodu od roviny

Vzdálenost bodu M od roviny ϱ je vzdálenost bodu M a jeho pravoúhlého průmětu M' do roviny ϱ. Vzdálenost bodu M od roviny ϱ je nejmenší ze všech vzdáleností bodu M od jednotlivých bodů X roviny ϱ. [5, s.122]

Značíme $h(M, \varrho) = |M, \varrho| = |MM'|$.

6.3.1 Řešený příklad

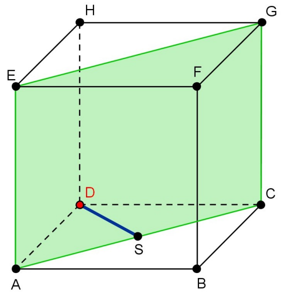
Příklad 11 Je dána krychle $ABCDEFGH$ s hranou délky a. Vypočtěte vzdálenost bodu D od roviny:

a) ACG

b) ACH

Řešení:

a) Najdeme pravoúhlý průmět bodu D do roviny ACG. Pravoúhlým průmětem bodu D do roviny ACG je střed S dolní podstavy. Vzdálenost bodů D a S je hledanou vzdáleností bodu D od roviny ACG. $|DS| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.



Obrázek 41: Řešený příklad 11 a)

b) Najdeme pravoúhlý průmět S bodu D do roviny ACH. Vzdálenost bodů D a S je hledanou vzdáleností bodu D od roviny ACH. Při výpočtu budeme vycházet z obdélníku $BDFH$ o délce stran $|BF| = a$, $|BD| = a\sqrt{2}$. Pro zjištění vzdálenosti využijeme podobnosti trojúhelníků DHK a SDK.

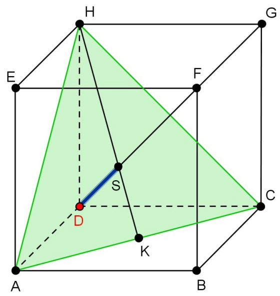
Délky stran trojúhelníku DHK a SDK jsou:
$|HK| = \sqrt{|DH|^2 + |DK|^2} = \sqrt{a^2 + (\frac{a\sqrt{2}}{2})^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$,
$|DK| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Nyní vypočteme vzdálenost $|DS|$, která je hledanou vzdáleností bodu D od roviny ACH.

$\frac{|DS|}{|DH|} = \frac{|DK|}{|HK|}$

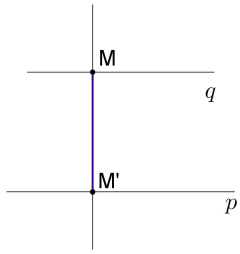
$\frac{|DS|}{a} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{6}}{2}}$

$|DS| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$



Obrázek 42: Řešený příklad 11 b)

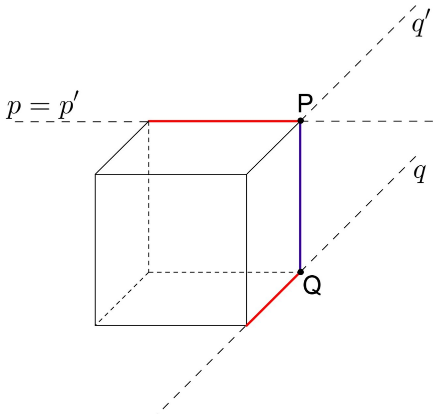
6.4 Vzdálenost dvou přímek



Obrázek 43: Vzdálenost dvou rovnoběžných přímek

Vzdálenost dvou rovnoběžných přímek je vzdálenost libovolného bodu jedné přímky od druhé přímky. [9, s.146]

Vzdálenost rovnoběžných přímek p, q označujeme $h(p, q) = |pq|$.



Obrázek 44: Vzdálenost dvou mimoběžných přímek

Vzdáleností dvou mimoběžek p, q se rozumí délka úsečky PQ, kde P, Q jsou po řadě průsečíky mimoběžek p, q s takovou příčkou mimoběžek, která je k oběma kolmá. [1, s.513]

Vzdálenost mimoběžných přímek p, q značíme $h(p, q) = |pq| = |PQ|$.

6.4.1 Řešený příklad

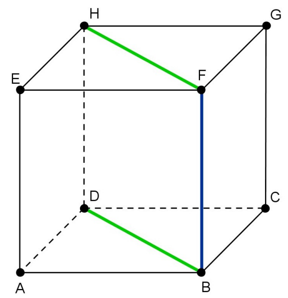
Příklad 12 Je dána krychle $ABCDEFGH$ s hranou délky a. Určete početně vzdálenost přímek:

a) FH, BD

b) AE, HG

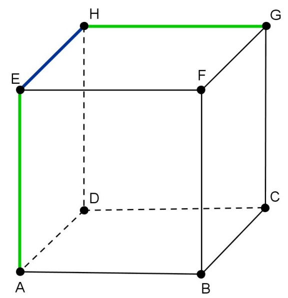
Řešení:

a) Vzdálenost určíme například jako vzdálenost bodu F od přímky BD. Vzdálenost přímek FH, BD je délka hrany krychle $ABCDEFGH$. (obr. 45)



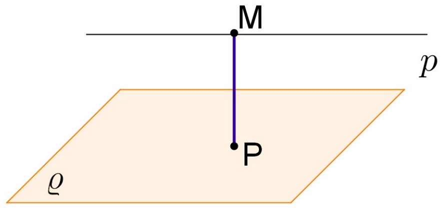
Obrázek 45: Řešený příklad 12 a)

b) Přímky AE, HG jsou mimoběžné. Najdeme tedy přímku q, kolmou k oběma mimoběžkám. Tato přímka je určena například body E,H. Vzdálenost průsečíků mimoběžek s danou přímkou q je vzdálenost bodů E a H. $|EH| = a$. (obr. 46)



Obrázek 46: Řešený příklad 12 b)

6.5 Vzdálenost přímky od roviny



Obrázek 47: Vzdálenost přímky od roviny

Vzdáleností přímky p od roviny ϱ s ní rovnoběžné rozumíme vzdálenost libovolného bodu M přímky p od roviny ϱ. [1, s.513]

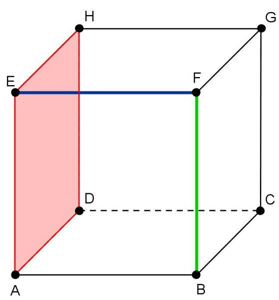
Značíme $h(p, \varrho) = |p\varrho| = |MP|$. Bodem P rozumíme patu kolmice vedené bodem M k rovině ϱ.

Poznámka 6.5.1 *Kritérium rovnoběžnosti přímky a roviny definované pomocí vzdálenosti: Přímka p je rovnoběžná s rovinou ϱ, pokud na přímce p leží alespoň dva různé body téhož poloprostoru ohraničeném rovinou ϱ, které mají od roviny ϱ stejnou vzdálenost.*

6.5.1 Řešený příklad

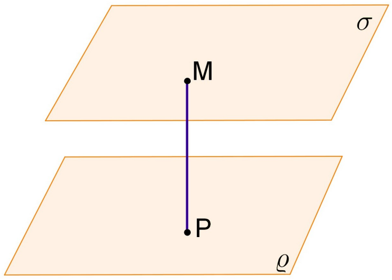
Příklad 13 Je dána krychle $ABCDEFGH$ s hranou délky a. Určete početně vzdálenost přímky BF od roviny ADE. *Řešení:*

Najdeme pravoúhlý průmět E bodu F do roviny ADE. Velikost úsečky FE je rovna délce hrany krychle $ABCDEFGH$. Hledaná vzdálenost přímky BF od roviny ADE je $|FE| = a$ (obr. 48).



Obrázek 48: Řešený příklad 13

6.6 Vzdálenost dvou rovin



Obrázek 49: Vzdálenost dvou rovin

Vzdálenost dvou rovnoběžných rovin ϱ, σ je vzdálenost libovolého bodu jedné roviny od druhé roviny. [9, s.146]

Značíme $h(\varrho, \sigma) = |\varrho\sigma|$.

Poznámka 6.6.1 *Kritérium rovnoběžnosti dvou rovin definované pomocí vzdálenosti: Dvě roviny ϱ a σ jsou rovnoběžné, jestliže lze v rovině ϱ najít tři různé body ležící ve stejném poloprostoru s hraniční rovinou ϱ a neleží v jedné přímce, které mají od roviny ϱ stejnou vzdálenost.*

6.6.1 Řešený příklad

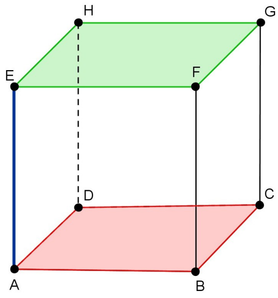
Příklad 14 Je dána krychle $ABCDEFGH$ s hranou délky a. Určete početně vzdálenost rovin

a) ABC, EFG

b) AFH, BDG

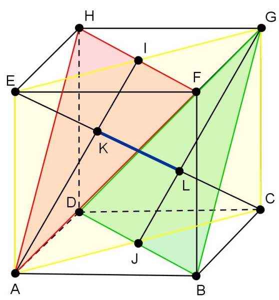
Řešení:

a) Roviny ABC, EFG jsou rovnoběžné, jejich vzdálenost se rovná délce hrany krychle $ABCDEFGH$. (obr. 50)



Obrázek 50: Řešený příklad 14 a)

b) Krychlí proložíme rovinu ACE, která je kolmá k oběma rovinám (obr. 51). Zjistíme délku úsečky AI, kde I je střed horní podstavy krychle.
Použijeme Pythagorovu větu: $|AI| = \sqrt{|AE|^2 + |EI|^2} = \sqrt{a^2 + (\frac{a\sqrt{2}}{2})^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.
Dále využijeme podobnosti trojúhelníků EIK a AIE. Zjistíme tak délku úseček $|EK| = |CL| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Jelikož víme, že délka tělesové úhlopříčky je rovna $a\sqrt{3}$, snadno dopočteme délku úsečky KL.
$|KL| = a\sqrt{3} - 2 \cdot (\frac{a\sqrt{3}}{3}) = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.



Obrázek 51: Řešený příklad 14 b)

7 Závěr

Bakalářská práce je zaměřena na problematiku výuky metrických úloh ve stereometrii. K zefektivnění výuky bylo navrženo řešení v podobě pracovních listů pro studenty a řešených příkladů pro pedagogy. Celý soubor obsahuje 48 zadání příkladů. Náhodně vybrané pracovní listy z každé kapitoly a jejich řešení byly testovány v praxi při hodině matematiky na Gymnáziu, Jírovcova 8, České Budějovice. Do testování se zapojili studenti posledního ročníku osmiletého gymnázia.

Studenti se shodli, že pracovní listy jim ulehčí práci při hodinách a také bude možné látku probírat rychleji a efektivněji. Promítání řešení příkladů může velmi pomoci vyučujícím při výkladu nové látky. Někteří studenti mají problém s prostorovou představivostí, názorná ukázka jim může pomoci lépe pochopit danou problematiku. Zároveň byly studenty uvedeny také námitky. V případě pracovních listů mají studenti obavy, že se jim samostatné volné listy mohou ztratit. Řešení příkladů promítané na plátno může vést k tomu, že studenti budou vyčkávat, až se objeví řešení, které si pak opíší, a nebudou mít snahu řešení vymyslet sami. Dospělo se k závěru, že při výuce bude vhodné kombinovat více metod. Pracovní listy lze využívat i pro domácí přípravu, testy a procvičování a řešené příklady mohou být zveřejněné na výukovém serveru školy a zpřístupněné pro studenty.

Tuto bakalářskou práci lze dále rozšířit o problematiku polohových úloh nebo těles. Příklady jsou řešeny pouze početně, proto by bylo vhodné vytvořit také soubor příkladů, které budou řešeny konstrukčně. V bakalářské práci byly řešeny základní typy úloh, které se probírají na středních školách. Bylo by velmi zajímavé a přínosné vytvořit sbírku náročnějších úloh.

Reference

[1] POLÁK, Josef. Přehled středoškolské matematiky. 9. vyd. Praha: Prometheus, 2008, 660 s. ISBN 9788071963561.

[2] POMYKALOVÁ, Eva. Matematika pro gymnázia. 4. vyd. Praha: Prometheus, 2008, 223 s. ISBN 9788071961789.

[3] POLÁK, Josef. Středoškolská matematika v úlohách II. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1999, 626 s. ISBN 8071961663.

[4] GeoGebra [online]. 2013 [cit. 2013-10-22]. Dostupné z: `http://www.geogebra.org/cms/cs/`

[5] KUBEŠOVÁ, Naděžda a CIBULKOVÁ Eva. Matematika: přehled středoškolského učiva. 2. vyd. Třebíč: Petra Velanová, 2006, 239 s. Maturita (Petra Velanová). ISBN 9788086873053.

[6] ZGODOVÁ, Aneta. Volné rovnoběžné promítání [online]. Brno, 2011 [cit. 2012-10-21]. Dostupné z: `is.muni.cz/th/324385/prif_b/Volne_rovnobezne_promitani.pdf`. Diplomová práce. Masarykova univerzita.

[7] KABOUREK, Jiří a Jan VEJMOLA. Stereometrie. Elektronický učitel [online]. 2008 [cit. 2013-01-02]. Dostupné z: `http://www.eucitel.cz/software/?id=6`

[8] PETÁKOVÁ, Jindra. Matematika - příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy. Dotisk 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998, 303 s. ISBN 9788071960997.

[9] ČERMÁK, Pavel a ČERVINKOVÁ Petra. Odmaturuj! z matematiky 1. Vyd. 4. Brno: Didaktis, 2007, 208 s. Odmaturuj!. ISBN 9788073581022.

[10] BOUCNÍK, Pavel. Odmaturuj! z matematiky 3: [sbírka řešených příkladů]. Vyd. 1. Brno: Didaktis, 2004, 248 s. Odmaturuj!. ISBN 8073580101.

[11] KRYNICKÝ, Martin. Realisticky. Matematika SŠ [online]. 2010 [cit. 2013-01-12]. Dostupné z: `www.realisticky.cz/dil.php?id=2`

A Dotazník pro učitele a jeho vyhodnocení

Dobrý den,

jsem studentkou 3. ročníku matematiky a informatiky pro učitelství na Přírodovědecké fakultě JČU. Zasílám tento dotazník s prosbou o jeho vyplnění. Tento dotazník slouží jako průzkum k bakalářské práci, je určen pro učitele matematiky na středních školách a je anonymní. Jeho hlavním cílem je zjistit, jakým způsobem se vyučují metrické úlohy ve stereometrii a co by mohlo pomoci ke zlepšení stylu výuky. Na základě výsledků bude navrženo řešení pro usnadnění a zkvalitnění výuky.

Děkuji za spolupráci.

Lenka Krepsová

Otázka číslo 1
Typ střední školy:

- gymnázium
- střední odborná škola
- odborné učiliště

Otázka číslo 2
Je výuka stereometrie zahrnuta do učebních plánů Vaší školy?

- ano
- ne

Otázka číslo 3
Jakým způsobem vysvětlujete problematiku metrických úloh ve Vašich hodinách?

- Vše znázorňuji na tabuli
- Pomocí prezentace, promítacího plátna, multimediální tabule...
- Mám připravené své materiály, které rozdávám studentům při hodině
- Jiné:

Otázka číslo 4
Vyhovuje Vám Váš způsob výuky stereometrie?

- ano
- nevím
- ne

Otázka číslo 5
Uvítali byste změnu, která by usnadnila výklad stereometrie?

- ano
- nevím

- ne

Otázka číslo 6
Používáte pracovní listy pro výuku stereometrie pro studenty?

- ano
- ne

Otázka číslo 7
Uvítali byste vytvoření výukových listů pro studenty?

- ano
- nevím
- ne

Otázka číslo 8
Používáte k výuce metrických úloh matematický software?

- ano
- ne

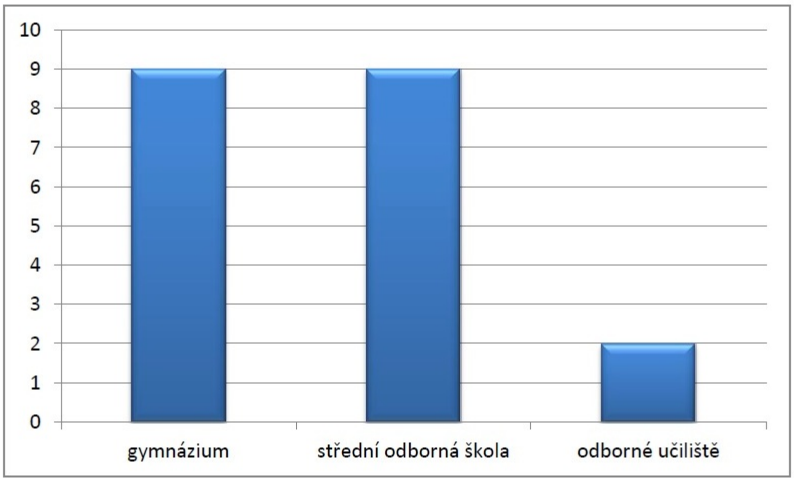
Otázka číslo 9
Na tuto otázku prosím odpovězte, pokud SW používáte nebo o jeho použití uvažujete. Jaký software používáte pro výuku metrických úloh?

- GeoGebra
- Mathematica
- Cabri
- Maple
- Maxima
- Jiné:

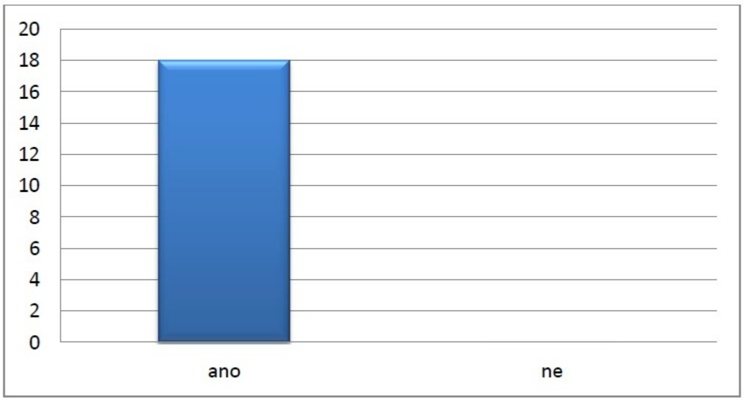
Otázka číslo 10
Uvítali byste sbírku řešených příkladů vytvořenou v matematickém softwaru pro názorné procvičování problematiky metrických úloh?

- ano
- nevím
- ne

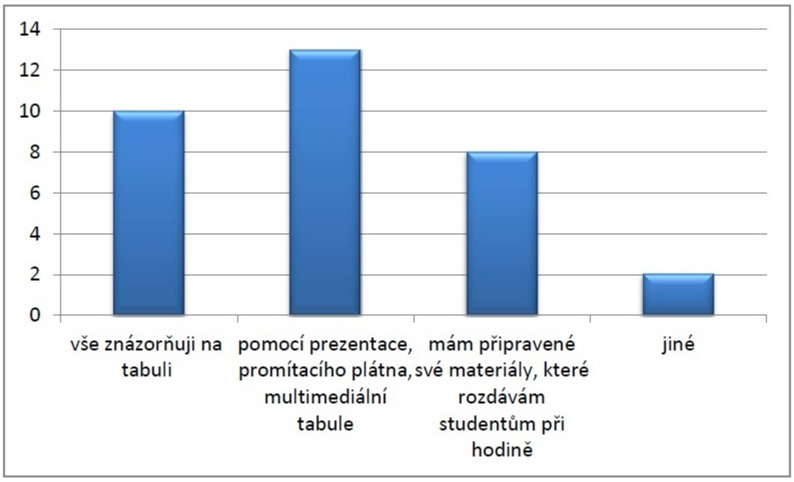
1. **Typ střední školy**



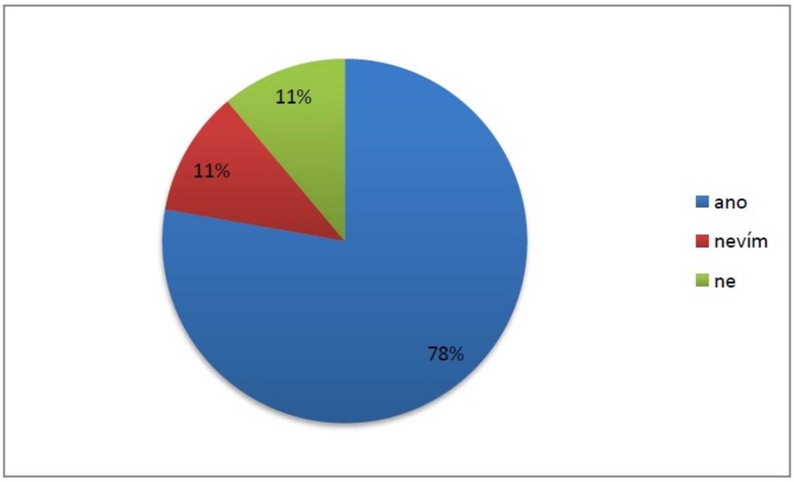
2. **Je výuka stereometrie zahrnuta do učebních plánů Vaší školy?**



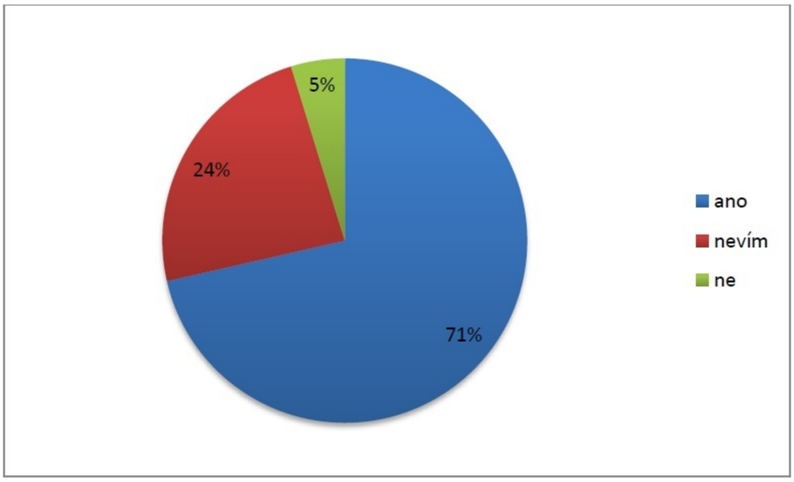
3. Jakým způsobem vysvětlujete problematiku metrických úloh ve Vašich hodinách?



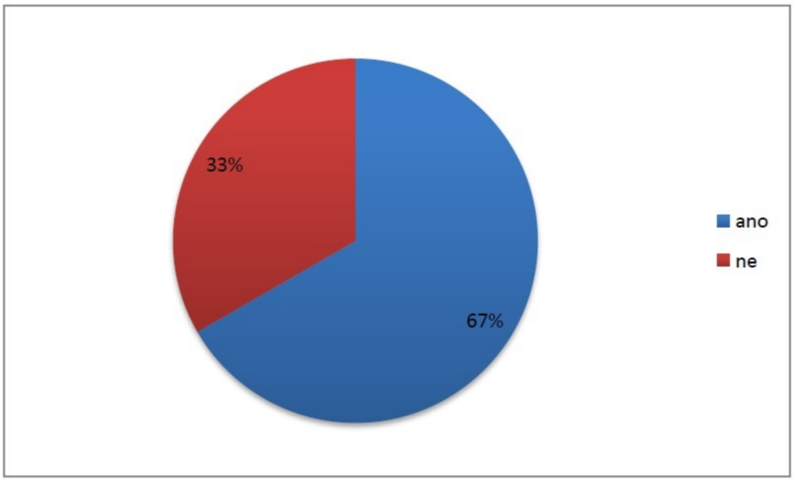
4. Vyhovuje Vám Váš způsob výuky stereometrie?



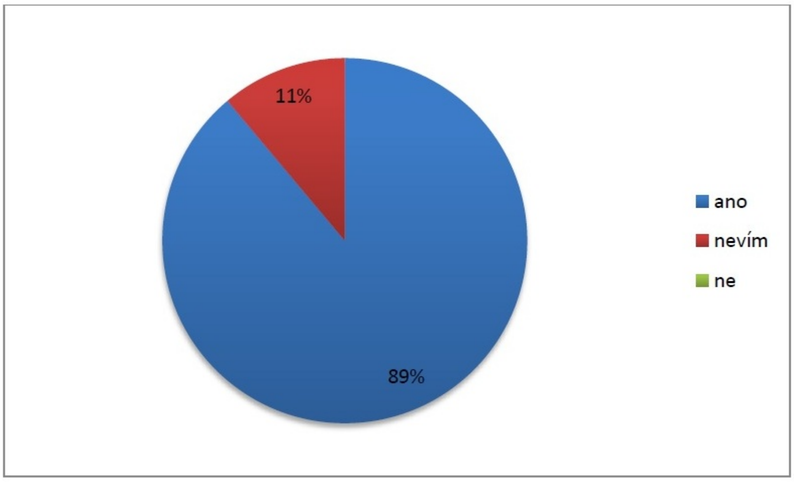
5. Uvítali byste změnu, která by usnadnila výklad stereometrie?



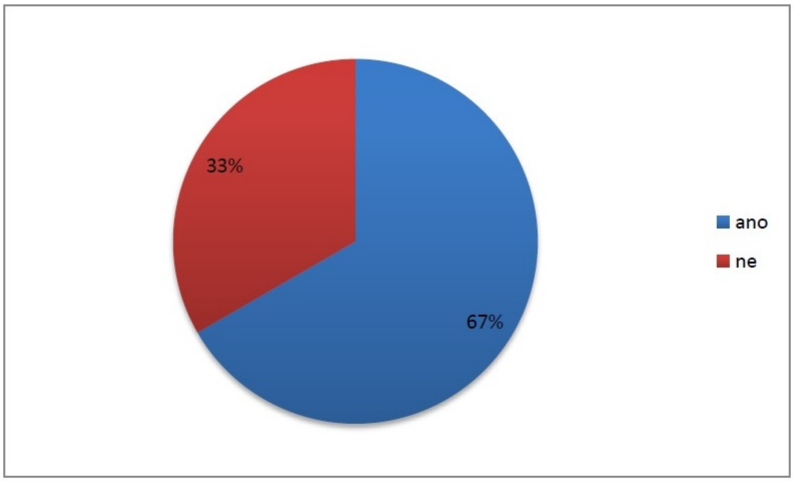
6. Používáte pracovní listy pro výuku stereometrie pro studenty?



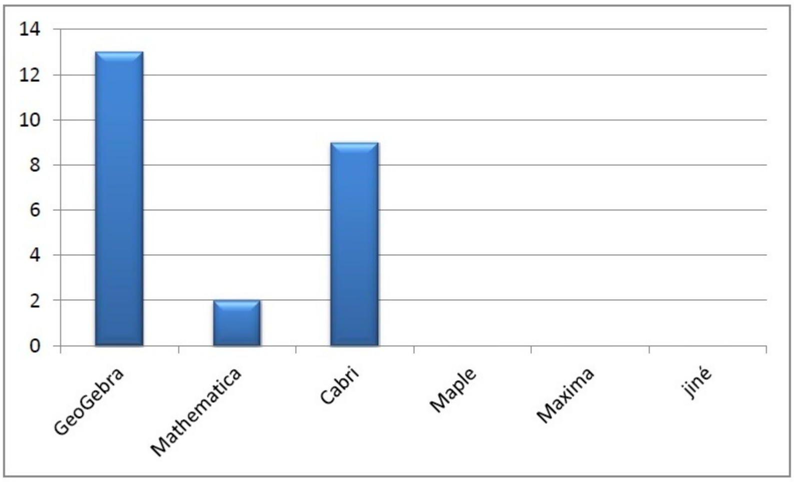
7. Uvítali byste vytvoření výukových listů pro studenty?



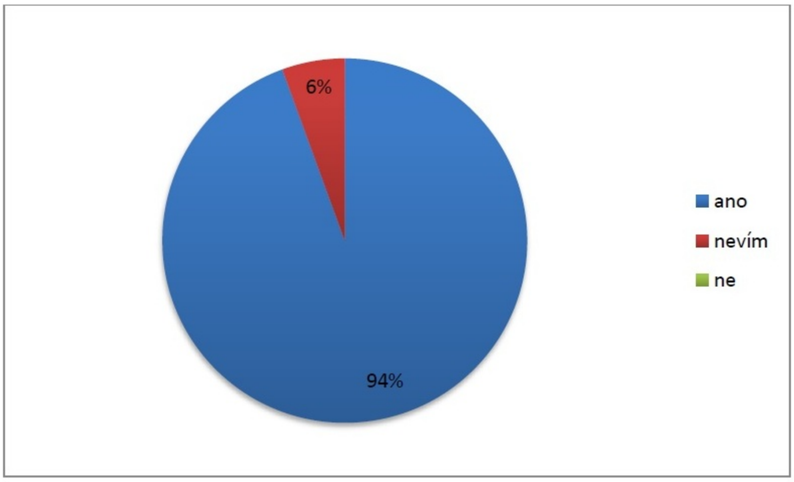
8. Používáte k výuce metrických úloh matematický software?



9. **Na tuto otázku prosím odpovězte, pokud SW používáte nebo o jeho použití uvažujete. Jaký software používáte pro výuku metrických úloh?**



10. **Uvítali byste sbírku řešených příkladů vytvořenou v matematickém softwaru pro názorné procvičování problematiky metrických úloh?**



B Dotazník pro studenty a jeho vyhodnocení

Dobrý den,

prosím o vyplnění tohoto krátkého dotazníku. Jsem studentkou 3. ročníku matematiky a informatiky pro učitelství na Přírodovědecké fakulty JČU. Dotazník Vám zabere maximálně 5 minut a slouží jako průzkum k bakalářské práci. Je určen pro studenty středních škol a je anonymní. Jeho hlavním cílem je zjistit, jakým způsobem se vyučují metrické úlohy ve stereometrii a co by mohlo pomoci ke zlepšení stylu výuky. Na základě výsledků bude navrženo řešení pro usnadnění a zkvalitnění výuky.

Děkuji za spolupráci.

Lenka Krepsová

Jsem studentem ______ročníku.

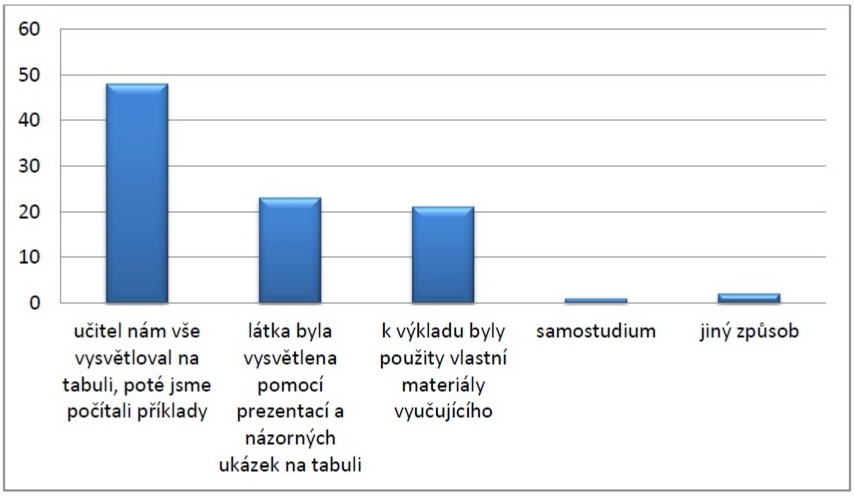
1. Jak probíhala výuka stereometrie (geometrie v prostoru) na Tvé škole:
   - ☐ učitel nám vše vysvětloval na tabuli, poté jsme počítali příklady
   - ☐ látka byla vysvětlena pomocí prezentací a názorných ukázek na tabuli
   - ☐ k výkladu byly použity vlastní materiály vyučujícího
   - ☐ samostudium
   - ☐ jiný způsob:______________________________

2. Byl/a jsi se stylem výuky stereometrie spokojen/a?
   - ☐ ano
   - ☐ spíše ano
   - ☐ spíše ne
   - ☐ ne

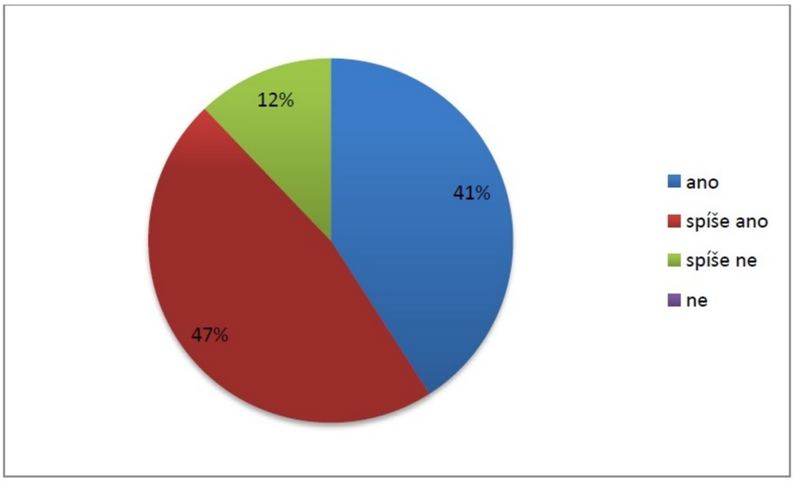
3. Uvítal/a bych pracovní listy, abych nemusel/a neustále překreslovat tělesa do sešitu:
   - ☐ ano
   - ☐ spíše ano
   - ☐ spíše ne
   - ☐ ne

4. Během výuky by bylo lepší použít názorné ukázky probírané látky pomocí vhodného matematického programu:
   - ☐ ano
   - ☐ spíše ano
   - ☐ spíše ne
   - ☐ ne

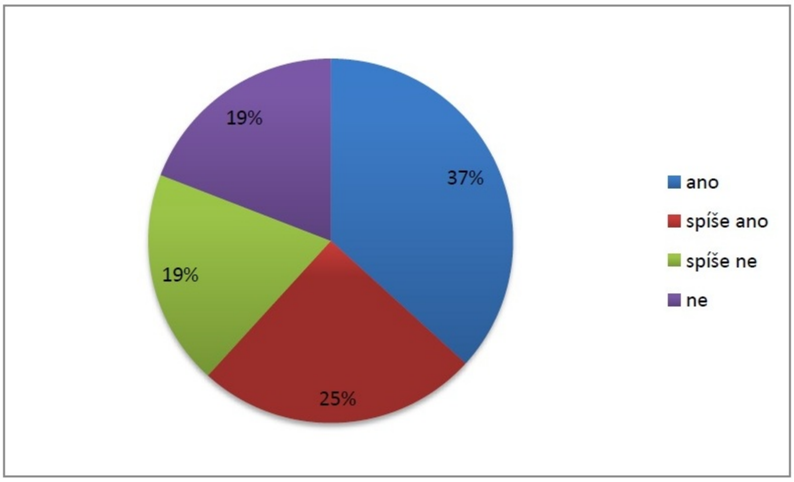
1. Jak probíhala výuka stereometrie (geometrie v prostoru) na Tvé škole?



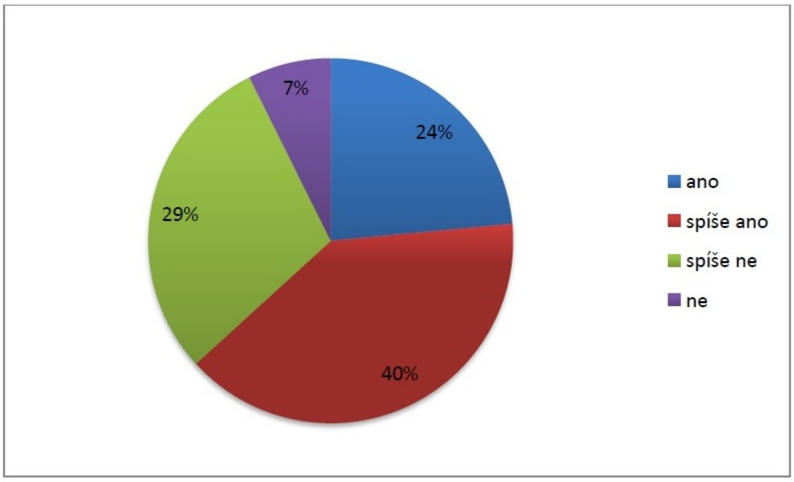
2. Byl/a jsi se stylem výuky stereometrie spokojen/a?



3. **Uvítal/a bych pracovní listy, abych nemusel/a neustále překreslovat tělesa do sešitu.**



4. **Během výuky by bylo lepší použít názorné ukázky probírané látky pomocí vhodného matematického programu.**



C Pracovní listy

C.1 Odchylka přímek, rovin

Příloha B obsahuje pracovní listy pro studenty, které slouží k procvičení následující látky:

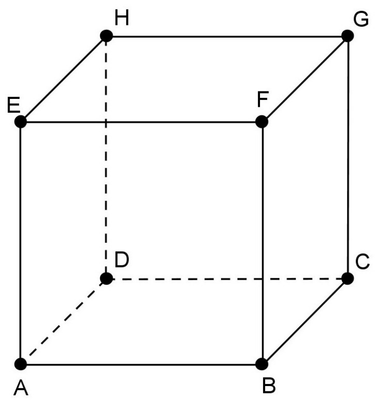
- Odchylka dvou přímek
- Odchylka přímek a rovin

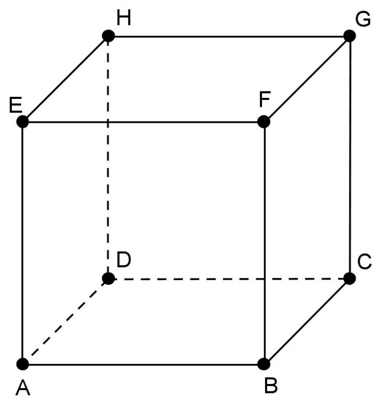
Na přiloženém CD lze nalézt řešení v matematickém software GeoGebra s možností krokování postupu řešení.

C.1.1 Odchylka dvou přímek

Příklad 1 Je dána krychle $ABCDEFGH$ se čtvercovou podstavou. Porovnejte odchylky dvojic přímek. Řešte početně.

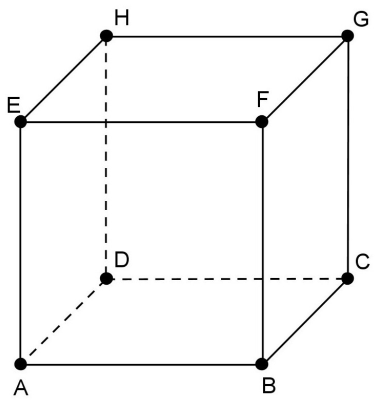
a) AF, CH a BE, DG

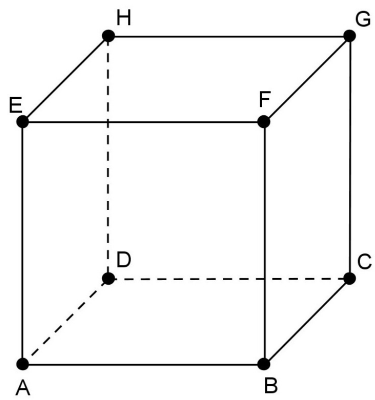




Řešení:

b) AB, CE a BH, AD

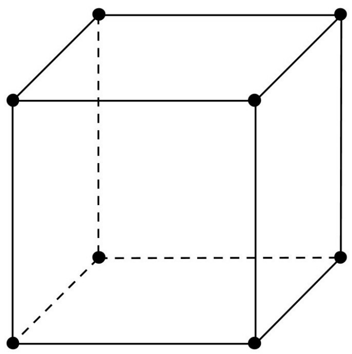


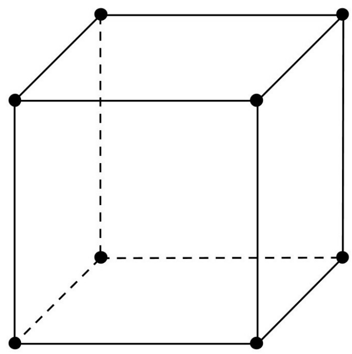


Řešení:

Příklad 2 Je dána krychle s délkou hrany a. Vypočtěte odchylku:

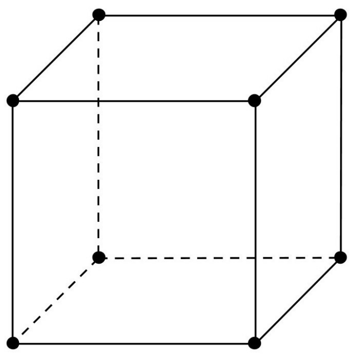
a) dvou stěnových úhlopříček (2 řešení)





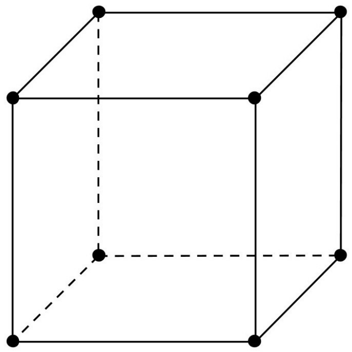
Řešení:

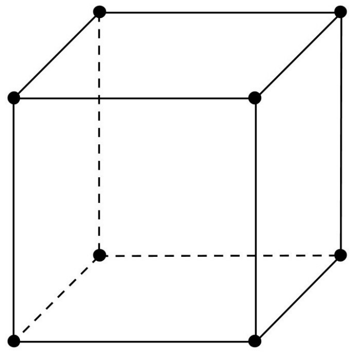
b) dvou tělesových úhlopříček



Řešení:

c) stěnové a tělesové úhlopříčky (2 řešení)



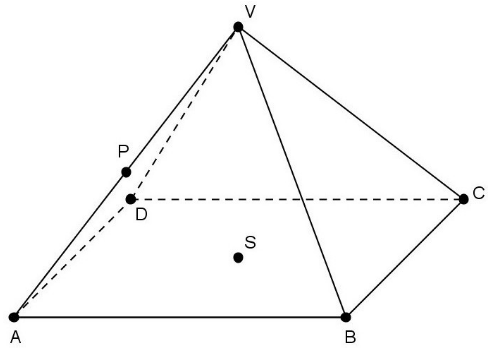


Řešení:

Příklad 3 Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$, jehož stěny jsou rovnostranné trojúhelníky. Bod S je středem jeho podstavy, bod P je středem hrany AV. Vypočtěte odchylku přímek:

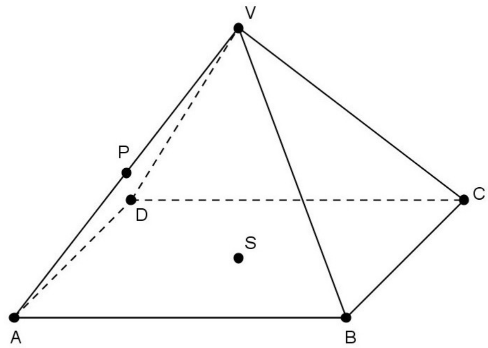
a) BC, SV

Řešení:

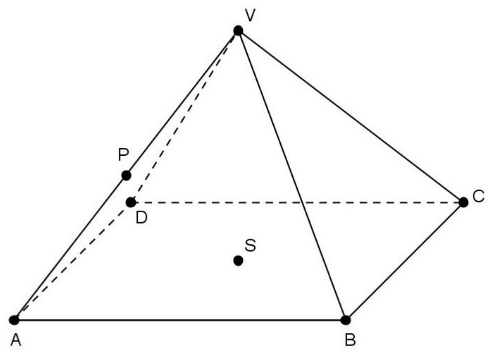


b) AB, CV

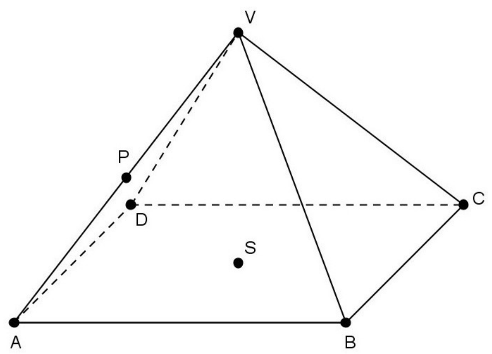
Řešení:



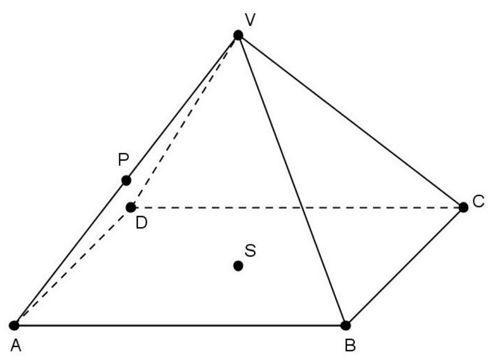
c) AD, CV Řešení:



d) BV, CP Řešení:

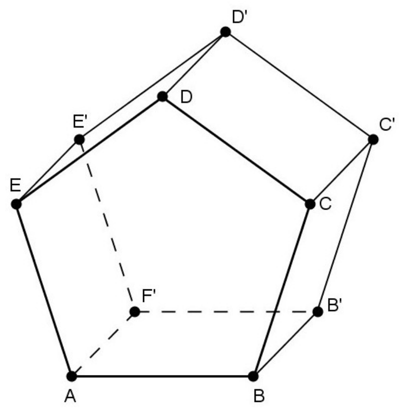


e) SV, BP Řešení:

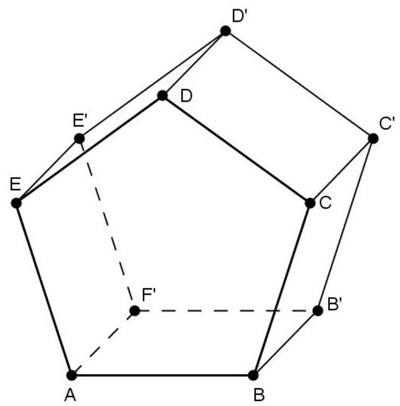


Příklad 4 Je dán pravidelný pětiboký hranol $ABCDEA'B'C'D'E'$, jehož boční stěny jsou čtverce. Vypočtěte odchylku přímek:

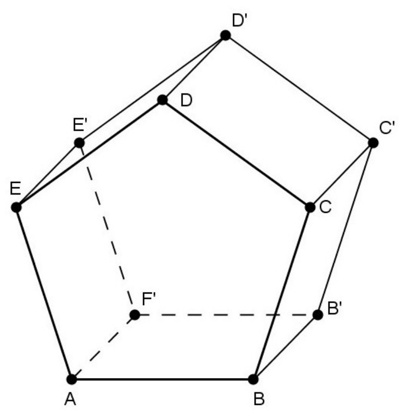
a) AB, DD' Řešení:



b) $AB, C'E'$ Řešení:

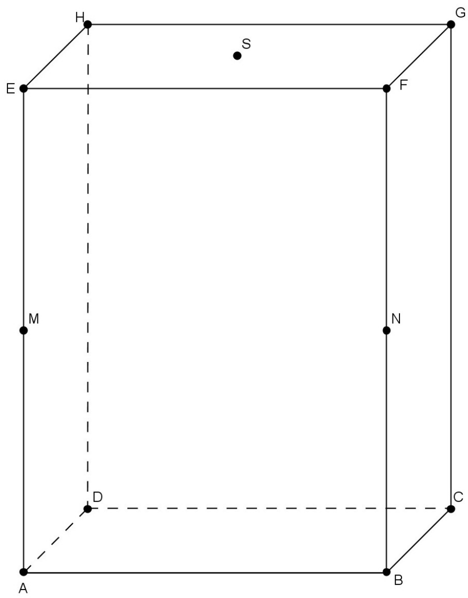


c) AB, CD' Řešení:

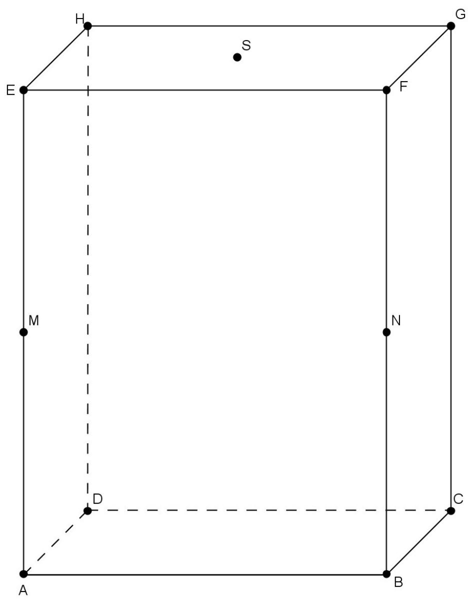


Příklad 5 V kvádru $ABCDEFGH$ s rozměry $|AB| = 6\,\mathrm{cm}, |BC| = 3\,\mathrm{cm}, |AE| = 8\,\mathrm{cm}$ je bod S středem horní podstavy, body M, N po řadě středy hran AE a BF. Vypočtěte odchylku přímek:

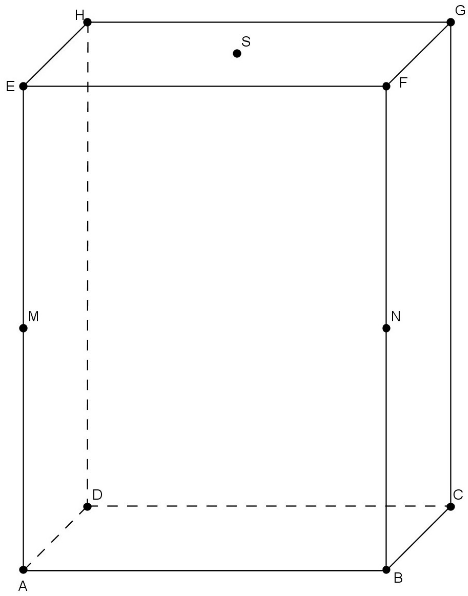
a) BE, CG Řešení:



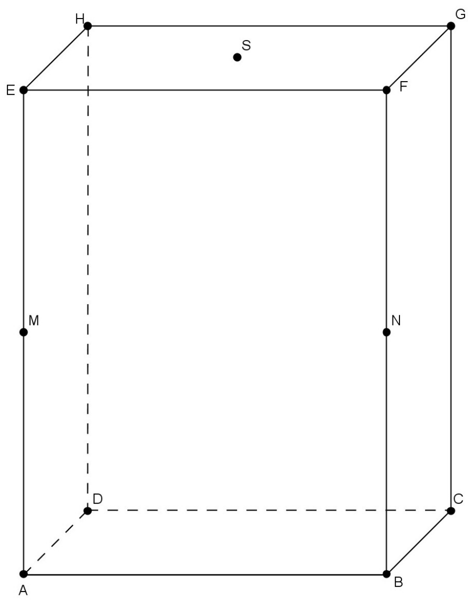
b) EG, BD Řešení:



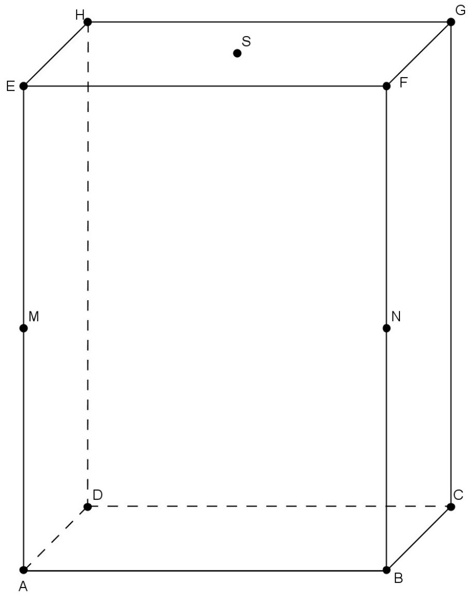
c) AE, BS Řešení:



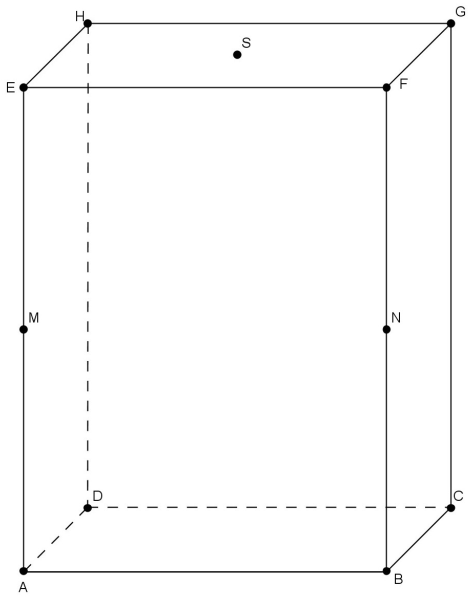
d) BM, NG Řešení:



e) AC, BH Řešení:



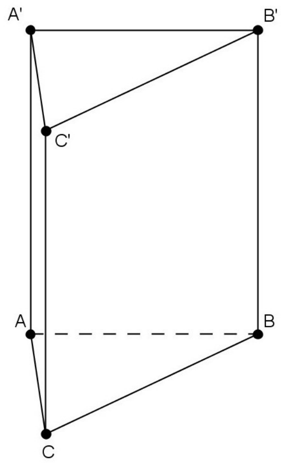
f) AC, BS Řešení:



Příklad 6 Podstavou kolmého trojbokého hranolu $ABCA'B'C'$ je rovnoramenný trojúhelník ABC; $|AB| = 3\,\text{cm}, |AC| = |BC| = 4\,\text{cm}, |AA'| = 4\,\text{cm}$. Vypočtěte odchylku přímek:

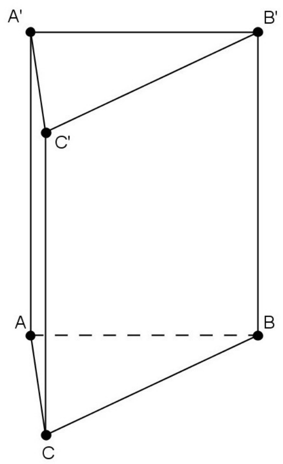
a) BA', BC'

Řešení:



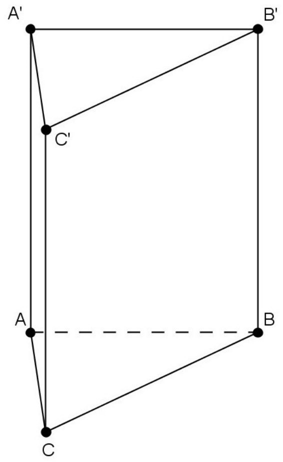
b) $A'B', BC$

Řešení:



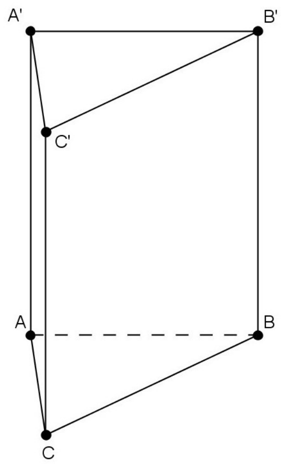
c) AB', BC

Řešení:



d) $A'C, BC'$

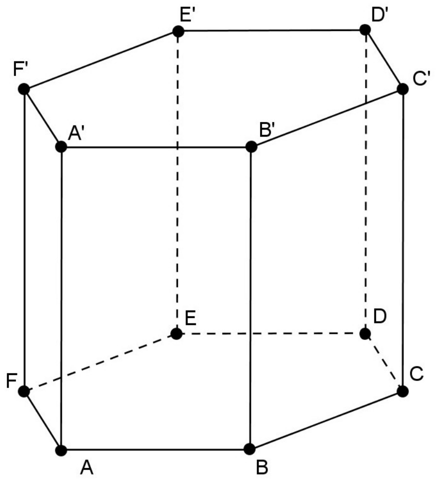
Řešení:



Příklad 7 Je dán pravidelný šestiboký hranol $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$; $|AB| = a = 2,5\,\text{cm}, |AA'| = b = 4\,\text{cm}$. Vypočtěte odchylku:

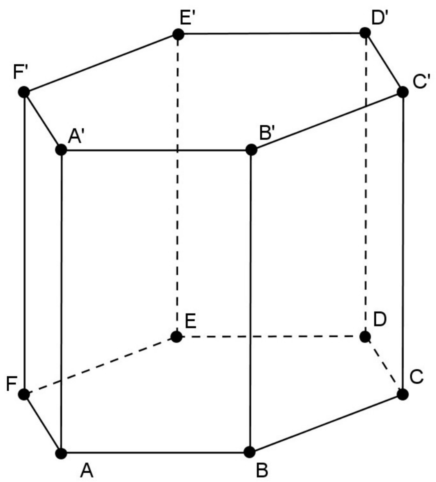
a) DE', BD'

Řešení:



b) BC', CF'

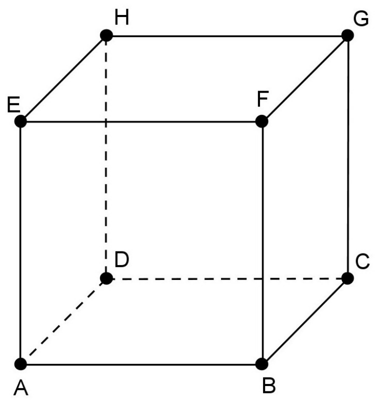
Řešení:



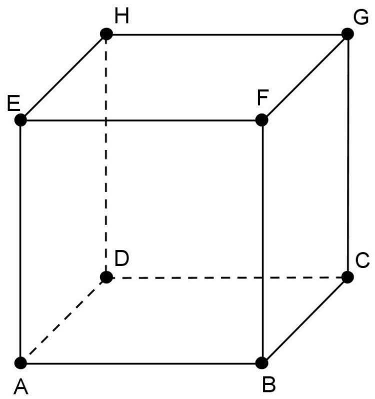
C.1.2 Odchylka přímek a rovin

Příklad 1 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Vypočtěte odchylku rovin:

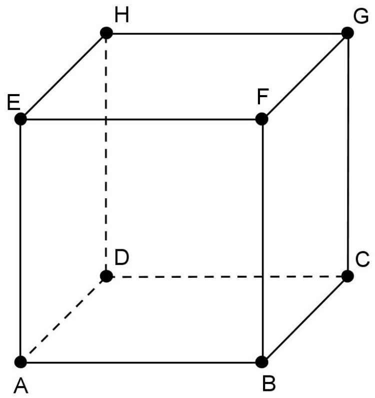
a) ABC, BDH Řešení:



b) ABE, ABH Řešení:

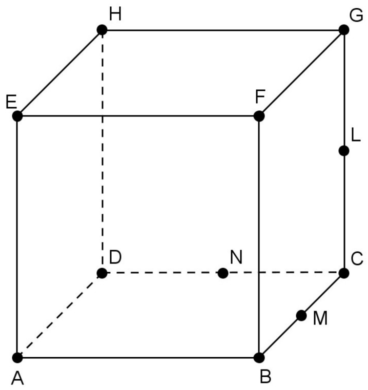


c) ABC, BEG Řešení:

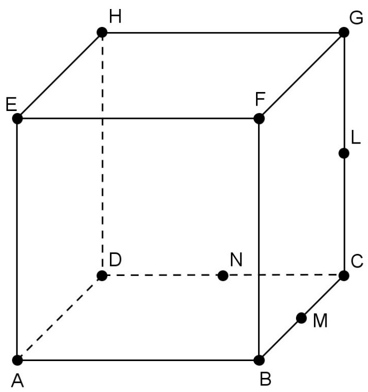


Příklad 2 Body M, N, L jsou po řadě středy stran BC, CD, CG krychle $ABCDEFGH$. Vypočtěte odchylku roviny ABC a rovin:

a) MNG Řešení:

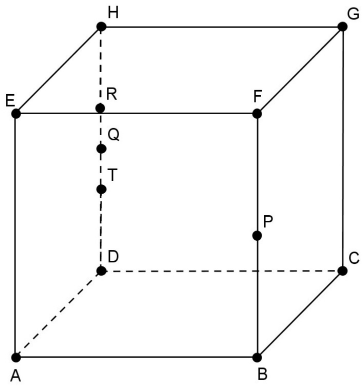


b) BNL Řešení:

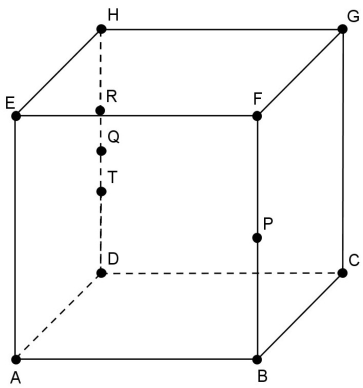


Příklad 3 Je dána krychle ABCDEFGH. Body P, Q jsou po řadě středy hran BF, DH . Body R, T dělí hranu DH na třetiny, bod T je blíže bodu D. Vypočtěte odchylky rovin:

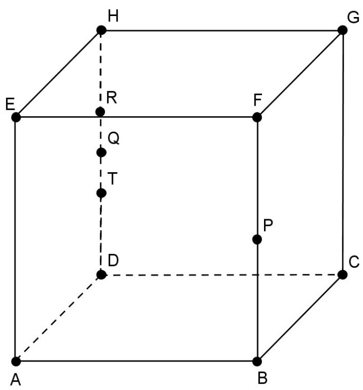
a) ACF, ACH Řešení:



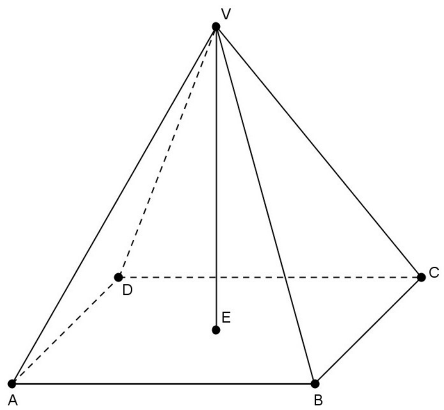
b) ACP, ACQ Řešení:



c) ACF, ACT Řešení:

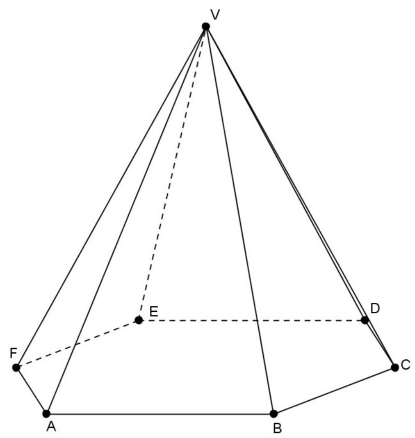


Příklad 4 Výška pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ je rovna délce jeho podstavných hran. Vypočtěte odchylku dvou protějších stěn.



Řešení:

Příklad 5 Je dán pravidelný šestiboký jehlan $ABCDEFV$. Délka jeho podstavných hran je a, výška $v = \frac{3}{2}a$. Vypočtěte odchylku rovin ABC, ACV.

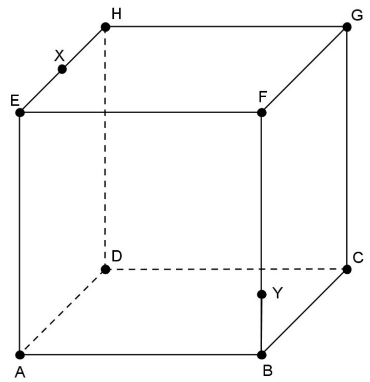


Řešení:

Příklad 6 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Vypočtěte odchylku přímky p a roviny ρ.

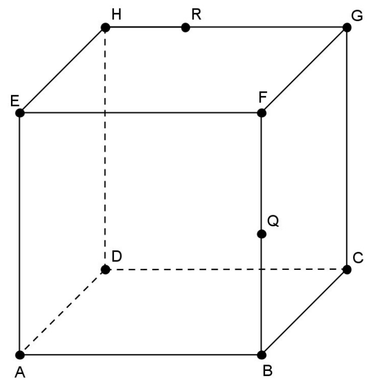
a) $p = \leftrightarrow XY, \rho = \leftrightarrow ABC$ bod X je středem hrany EH a bod Y je bodem hrany BF, $|BY| = |YF| = 1 : 3$

Řešení:



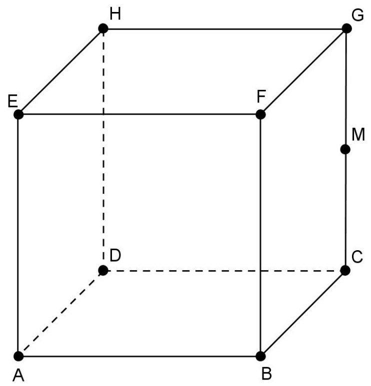
b) $p = \leftrightarrow QR, \rho = \leftrightarrow ABE$ bod Q je středem hrany BF a bod R je bodem hrany GH, $|HR| = \frac{1}{3}|GH|$.

Řešení:



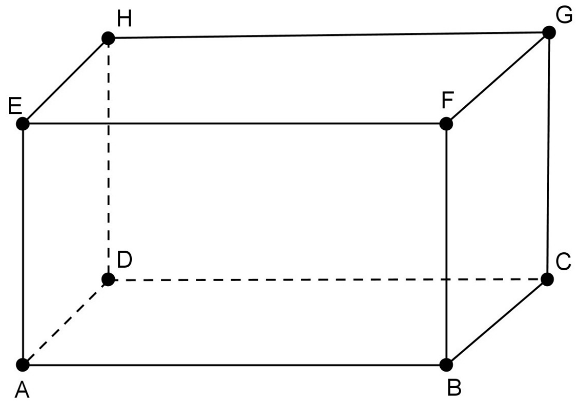
c) $p = \leftrightarrow CE, \rho = \leftrightarrow BDM$ bod M je středem hrany CG.

Řešení:



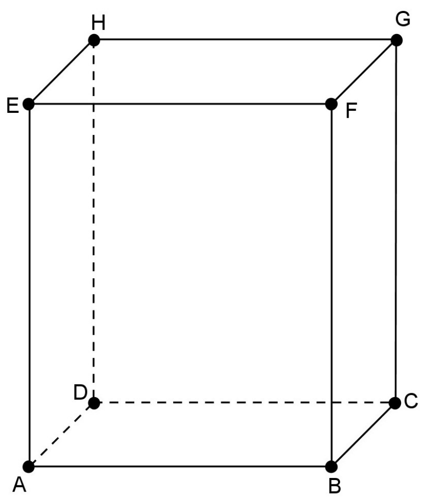
Příklad 7 Odchylka tělesové úhlopříčky kvádru od roviny jeho podstavy je $45°$. Určete vztah mezi jeho délkou, šířkou a výškou.

Řešení:



Příklad 8 Je dán kvádr $ABCDEFGH$, $|AB| = 5\,\mathrm{cm}$, $|BC| = 3\,\mathrm{cm}$, $|AE| = 6\,\mathrm{cm}$. Vypočtěte odchylku přímky BG a roviny BCE.

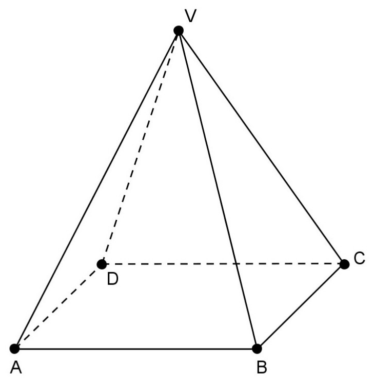
Řešení:



Příklad 9 Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$. Vypočítejte odchylku přímky BV a roviny ABC, je - li:

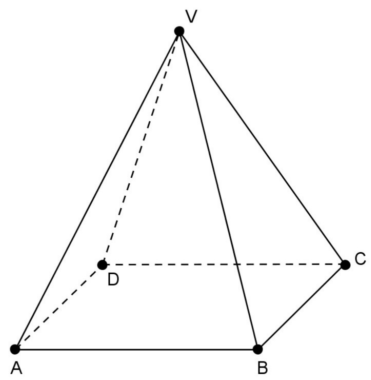
a) odchylka φ přímky BV a přímky AB $\varphi = 75°$

Řešení:



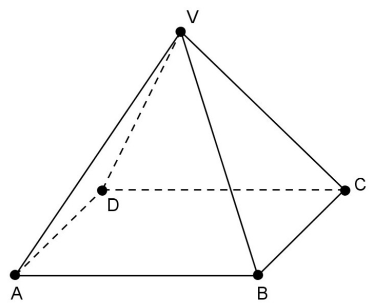
b) délka podstavné hrany 15 cm a obsah trojúhelníku $ACV = 127,5\,\mathrm{cm}^2$

Řešení:



c) délka všech jeho hran stejná

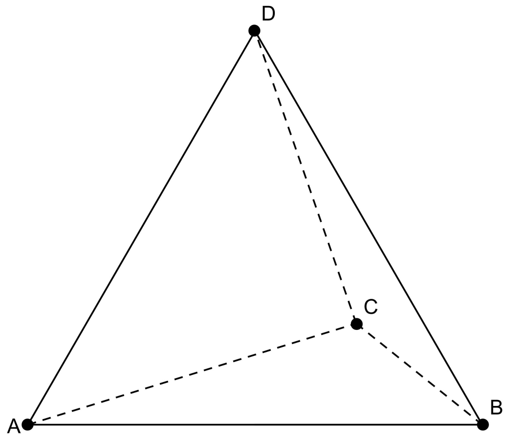
Řešení:



Příklad 10 Je dán pravidelný čtyřstěn $ABCD$. Vypočítejte odchylku:

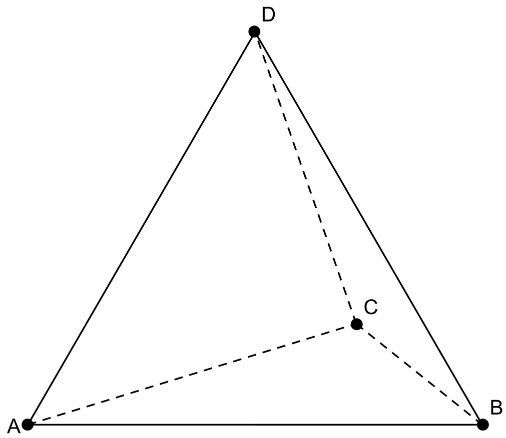
a) rovin dvou stěn čtyřstěnu

Řešení:



b) přímky, která obsahuje hranu čtyřstěnu, a roviny stěny čtyřstěnu, která tuto hranu neobsahuje.

Řešení:

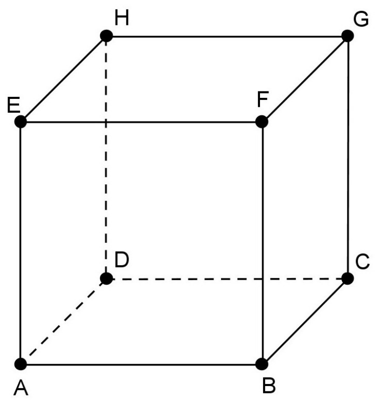


Příklad 11 Určete délku úsečky $A'B'$, která je pravoúhlým průmětem úsečky AB do roviny ϱ, je - li α odchylka přímky AB a roviny $\varrho(0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi)$.

Řešení:

Příklad 12 V rovině ρ je dána přímka p. Přímkou p veďte rovinu σ tak, aby odchylka rovin ρ a σ byla 45°. Znázorněte na krychli: $\rho =\leftrightarrow ABC, p =\leftrightarrow AC$. Kolik má úloha řešení?

Řešení:



C.2 Kolmost přímek, rovin

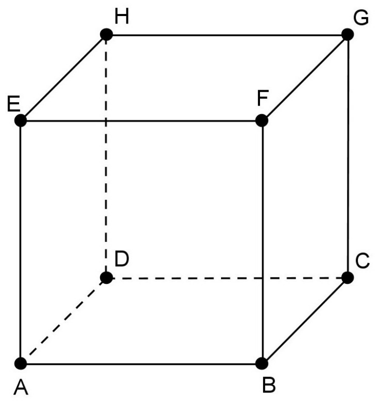
Příloha C obsahuje pracovní listy pro studenty, které slouží k procvičení následující látky:

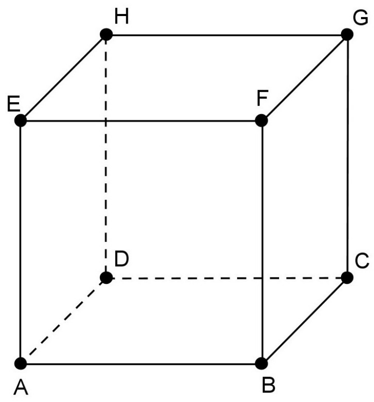
- Kolmost přímek a rovin

Na přiloženém CD lze nalézt řešení v matematickém software GeoGebra s možností krokování postupu řešení.

C.2.1 Kolmost přímek a rovin

Příklad 1 Vyjmenujte dvojice hran krychle $ABCDEFGH$, které leží v navzájem kolmých mimoběžkách určených vrcholy krychle. Které stěnové úhlopříčky krychle jsou kolmé k tělesové úhlopříčce BH? Zdůvodněte.

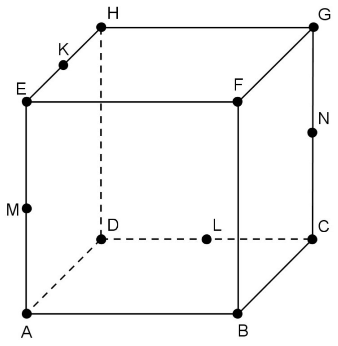




Řešení:

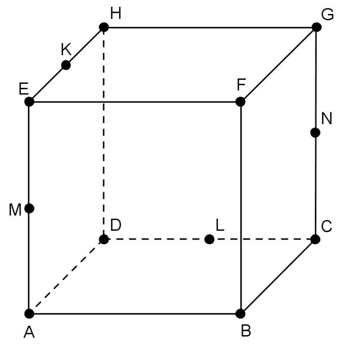
Příklad 2 Body K, L, M, N jsou po řadě středy hran EH, CD, AE, CG krychle $ABCDEFGH$. Ověřte kolmost přímek a rovin.

a) $\leftrightarrow HM, \leftrightarrow EF$



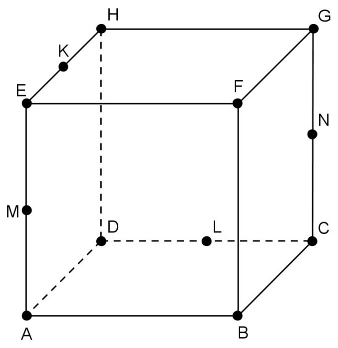
Řešení:

b) $\leftrightarrow MN, \leftrightarrow BH$



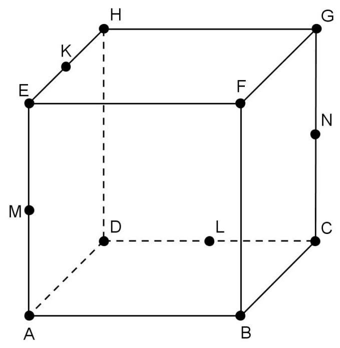
Řešení:

c) $\leftrightarrow AL, \leftrightarrow BK$



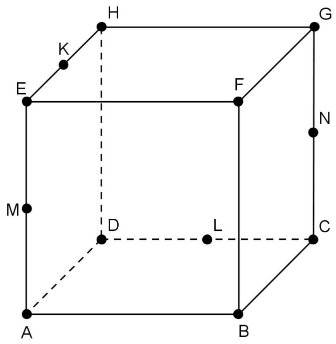
Řešení:

d) $\leftrightarrow FH, \leftrightarrow ACG$



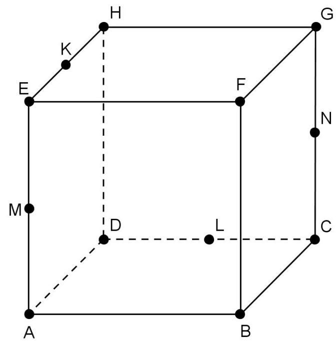
Řešení:

e) $\leftrightarrow LM, \leftrightarrow ACH$



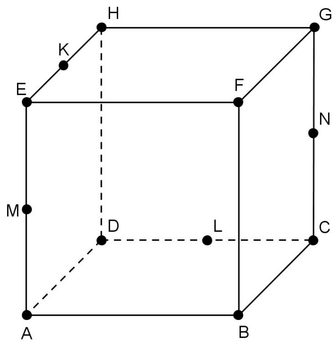
Řešení:

f) $\leftrightarrow AL, \leftrightarrow BFK$



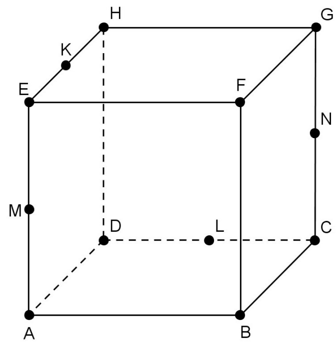
Řešení:

g) $\leftrightarrow BCE, \leftrightarrow DGH$



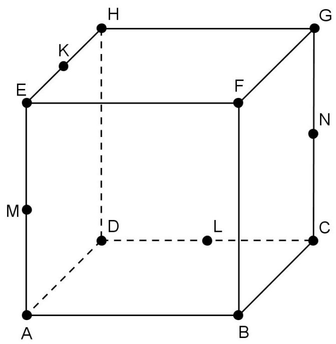
Řešení:

h) $\leftrightarrow ACK, \leftrightarrow BDH$



Řešení:

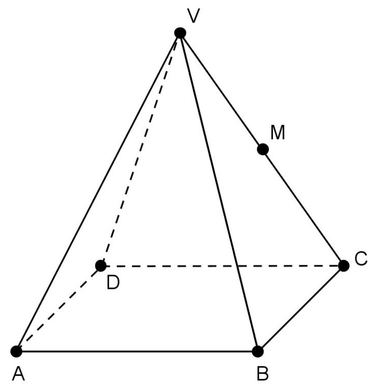
i) $\leftrightarrow ALK, \leftrightarrow BDH$



Řešení:

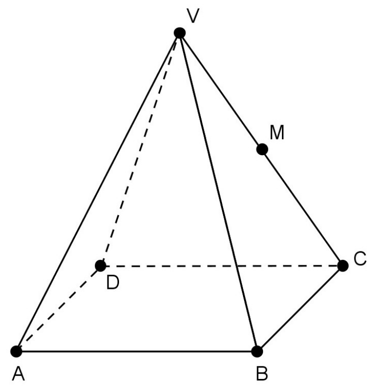
Příklad 3 Bod M je středem hrany CV pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$. Ověřte kolmost přímek a rovin.

a) $\leftrightarrow AC, \leftrightarrow BV$



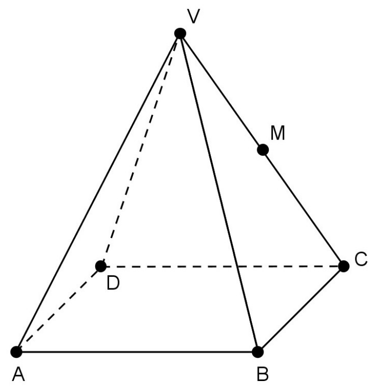
Řešení:

b) $\leftrightarrow BM, \leftrightarrow CD$



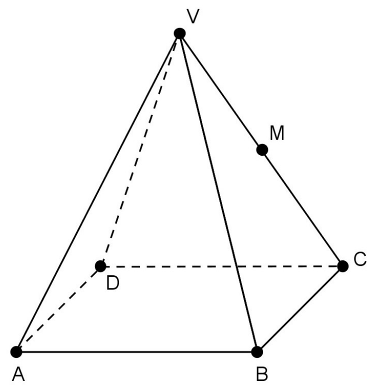
Řešení:

c) $\leftrightarrow AD, \leftrightarrow CDV$



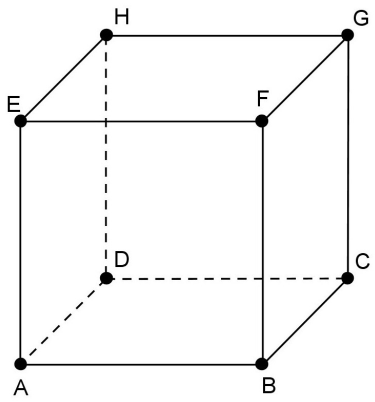
Řešení:

d) $\leftrightarrow AM, \leftrightarrow BDV$



Řešení:

Příklad 4 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Zobrazte ve volném rovnoběžném promítání patu kolmice vedené bodem F k rovině BEG.

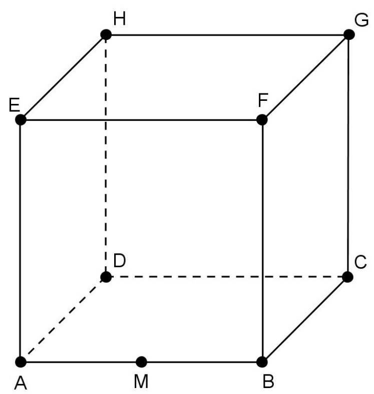


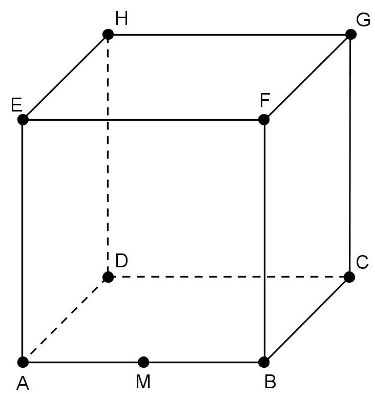
Řešení znázorněte do obrázku.

Příklad 5 Je dána krychle $ABCDEFGH$ bod M je středem hrany AB. Určete patu kolmice vedené:

a) bodem E k přímce HF

b) bodem H k přímce CM





Řešení znázorněte do obrázku.

Příklad 6 Rozhodněte a zdůvodněte, zda pro libovolné přímky p, q a pro libovolné roviny ϱ, σ, τ platí:

(Můžete znázornit obrázkem.)

a) $\varrho \perp \sigma \wedge \sigma \perp \tau \Rightarrow \varrho \parallel \tau$

Řešení:

b) $\varrho \perp \sigma \wedge \sigma \perp \tau \Rightarrow \varrho \perp \tau$

Řešení:

c) $p \perp \varrho \wedge \varrho \perp \sigma \Rightarrow p \parallel \sigma$

Řešení:

d) $p \perp \varrho \wedge p \perp \sigma \Rightarrow p \perp \sigma$

Řešení:

e) $p \perp \varrho \wedge p \perp q \Rightarrow q \parallel p$

Řešení:

Příklad 7 Jsou dány tři navzájem rovnoběžné přímky k, l, m, které neleží v jedné rovině. Bod K je libovolný bod přímky k a body L a M jsou paty kolmic k_1, k_2 vedených bodem K po řadě k přímkám l a m. Dokažte, že přímka LM je kolmá k oběma přímkám l, m.

Řešení:

Příklad 8 Popište konstrukci roviny, která prochází daným bodem a je kolmá ke dvěma daným různám rovinám.

a) rovnoběžným

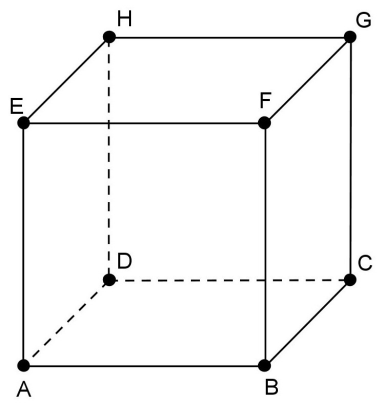
Řešení:

b) různoběžným

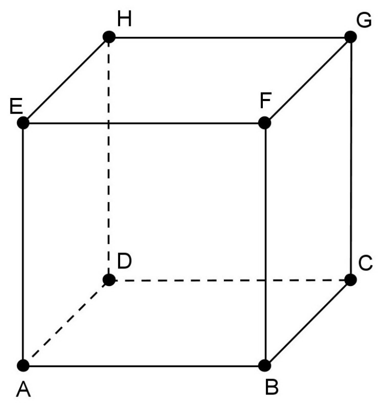
Řešení:

Příklad 9 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Určete pravoúhlý průmět bodu B do roviny. Řešení znázorněte do obrázku.

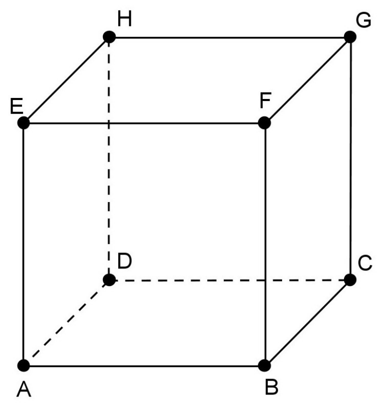
a) rovina ADH



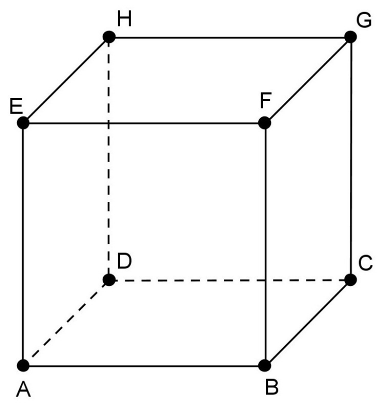
b) rovina ACG



a) rovina CDE

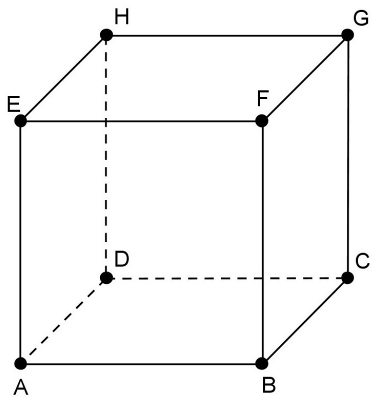


b) rovina EDG

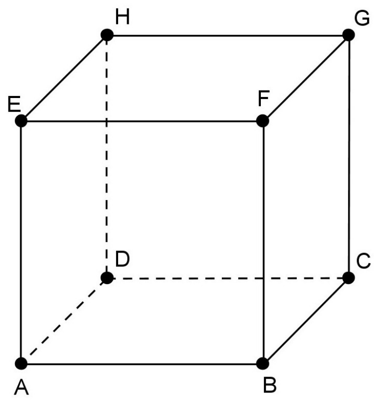


Příklad 10 Je dána krychle $ABCDEFGH$. Určete pravoúhlý průmět přímky DF do roviny. Řešení znázorněte do obrázku.

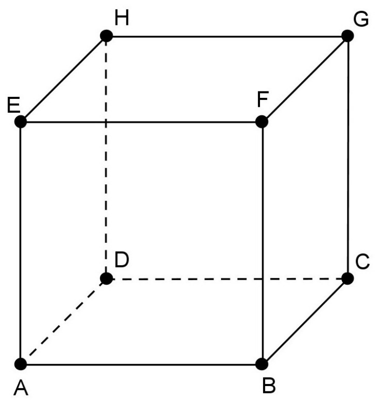
a) rovina ABC



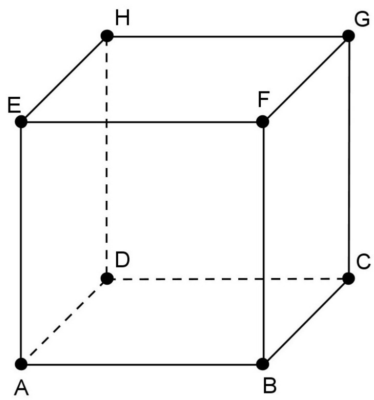
b) rovina ADH



a) rovina ACG



b) rovina DEG



C.3 Vzdálenost přímek, rovin

Příloha D obsahuje pracovní listy pro studenty, které slouží k procvičení následující látky:

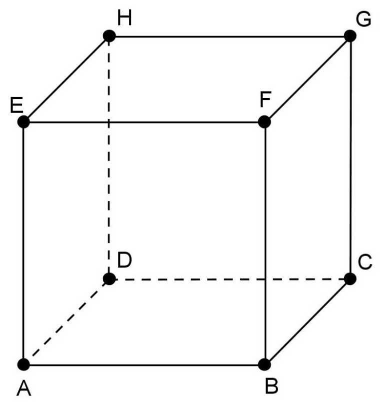
- Vzdálenost bodu od přímky a od roviny
- Vzdálenost přímek a rovin

Na přiloženém CD lze nalézt řešení v matematickém software GeoGebra s možností krokování postupu řešení.

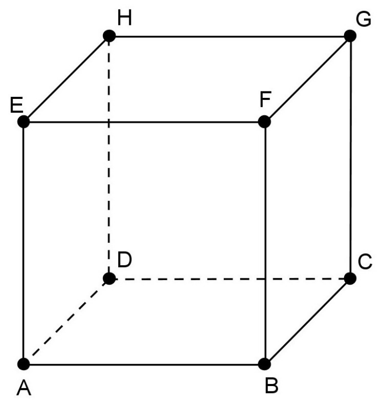
C.3.1 Vzdálenost bodu od přímky a od roviny

Příklad 1 Je dána krychle $ABCDEFGH$ s délkou hrany a. Vypočtěte vzdálenost bodu A od přímky:

a) DH Řešení:

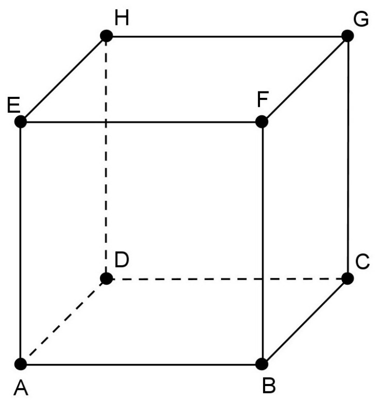


b) FG Řešení:



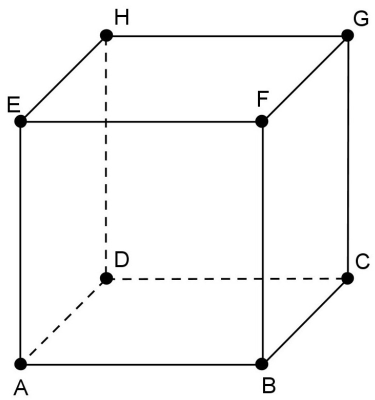
c) FH

Řešení:



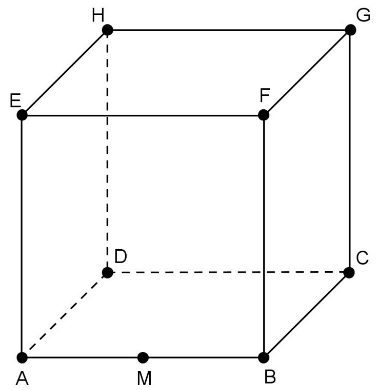
d) BH

Řešení:



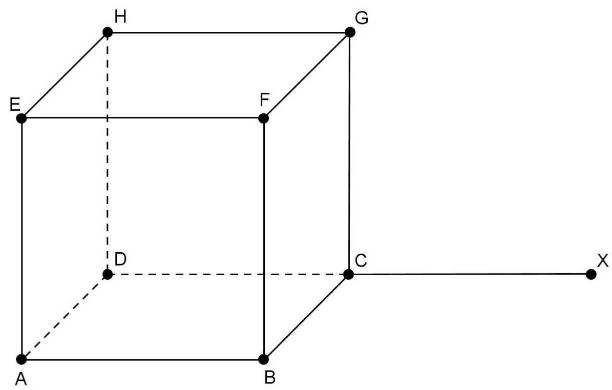
Příklad 2 Je dána krychle $ABCDEFGH$ s délkou hrany $a = 4\,\mathrm{cm}$. Bod M je středem hrany AB. Vypočtěte vzdálenost bodu G od přímky HM.

Řešení:



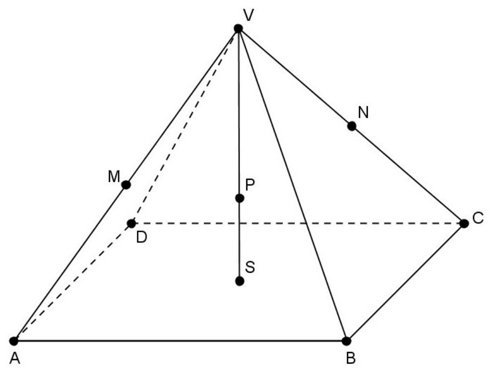
Příklad 3 Je dána krychle $ABCDEFGH$ s hranou délky a. Bod X je bodem polopřímky DC a bod C je středem úsečky DX. Dokažte, že vzdálenost bodu X od přímky BH je rovna délce úsečky BX.

Řešení:

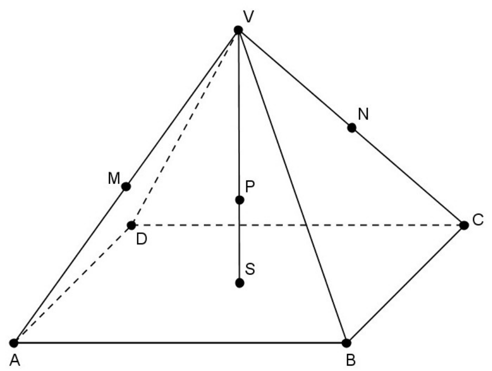


Příklad 4 Všechny hrany pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ mají délku a. Bod S je středem podstavy, body M, N jsou po řadě středy úseček AV a CV a bod P leží na úsečce VS, $|VP| : |PS| = 2 : 1$. Vypočtěte vzdálenost bodu od přímky BC.

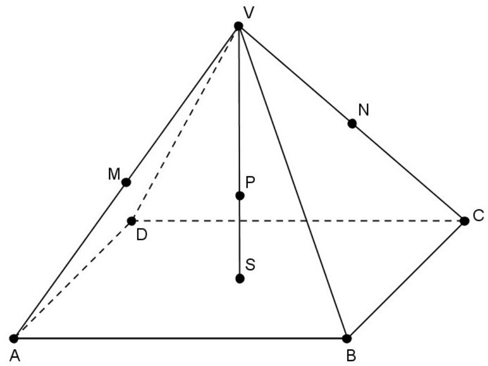
a) bodu S Řešení:



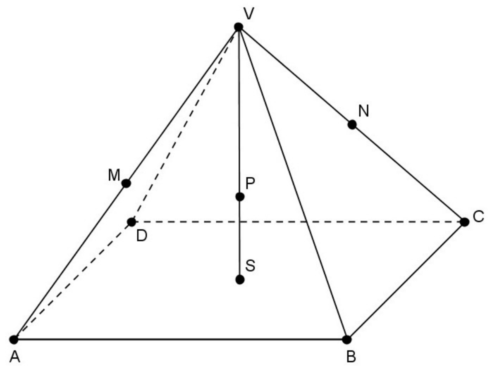
b) bodu V Řešení:



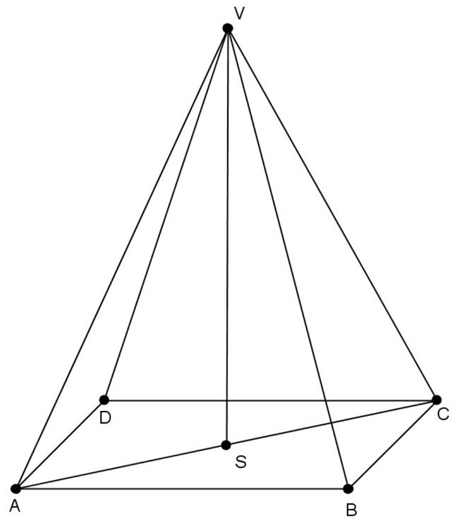
c) bodu P Řešení:



d) bodu N Řešení:

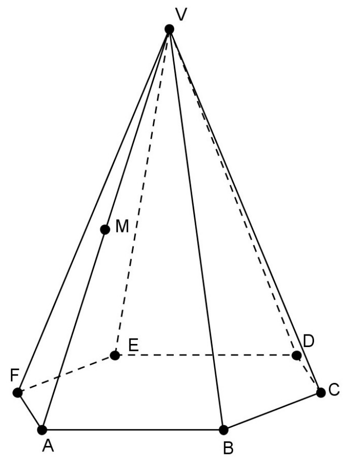


Příklad 5 Podstavou kolmého čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ je obdélník $ABCD$ s rozměry $|AB| = 4\,\text{cm}, |BC| = 3\,\text{cm}$, výška jehlanu je $v = 5\,\text{cm}$. Vypočtěte vzdálenost jeho vrcholů B, D od přímky AV.



Řešení:

Příklad 6 Bod M je středem hrany AV pravidelného šestibokého jehlanu $ABCDEFV$, $|AB| = a, v = 2a$. Vypočtěte vzdálenost bodu M od přímky AB.

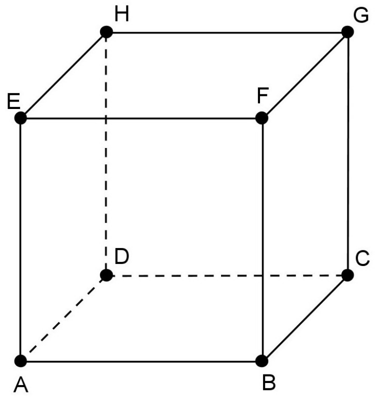


Řešení:

Příklad 7 Je dána krychle $ABCDEFGH$ a hranou délky a. Vypočtěte vzdálenost:

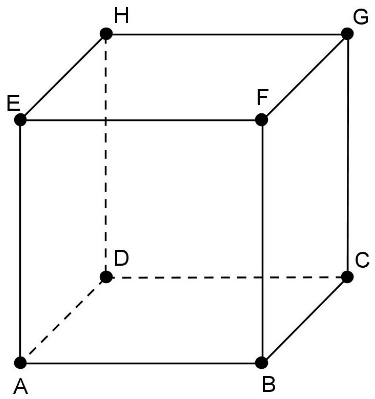
a) bodu B od roviny ACF

Řešení:



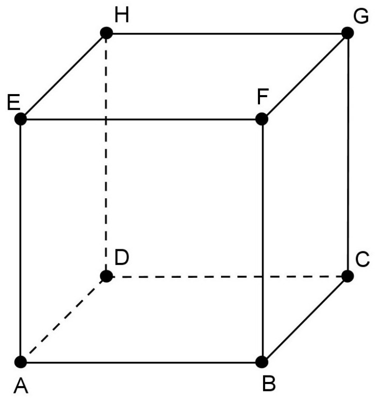
b) bodu D od roviny ACH

Řešení:



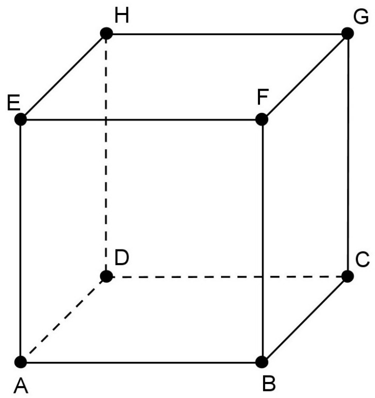
c) bodu F od roviny BEG

Řešení:

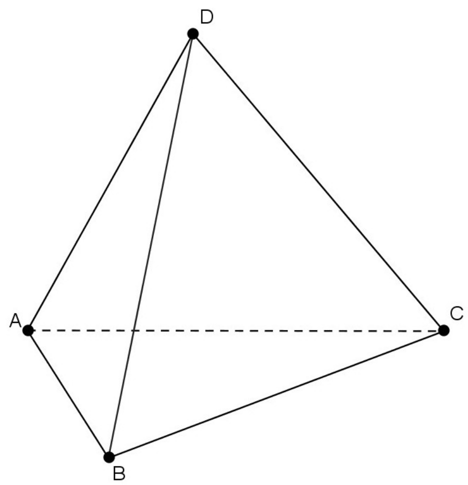


d) bodu A od roviny BED

Řešení:

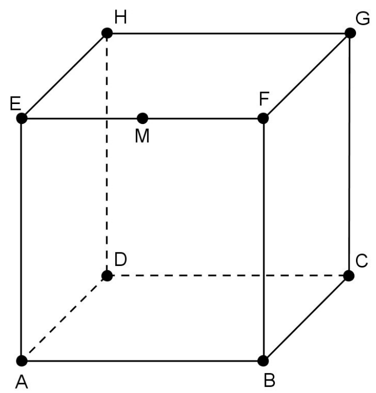


Příklad 8 Pravidelný čtyřstěn $ABCD$ má hranu délky $a = 5\,\text{cm}$. Vypočtěte vzdálenost bodu D od roviny ABC.



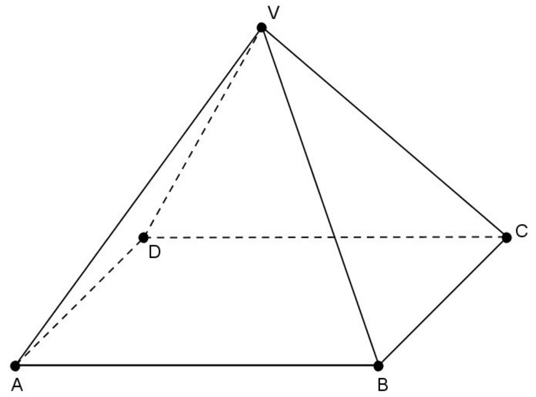
Řešení:

Příklad 9 Bod M je středy hrany EF krychle $ABCDEFGH$. Délka hrany krychle $a = 4\,\text{cm}$. Vypočtěte vzdálenost bodu M od roviny ABG



Řešení:

Příklad 10 V pravidelném čtyřbokém jehlanu $ABCDV$ je délka podstavné hrany a, výška jehlanu je v. Vypočtěte vzdálenost bodu B od roviny ACV.



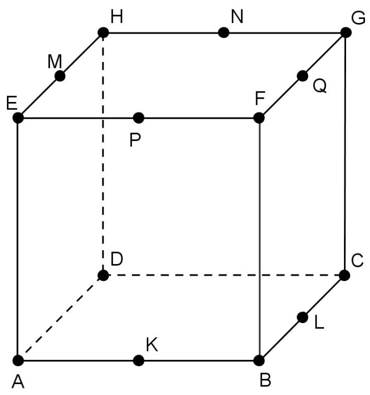
Řešení:

C.3.2 Vzdálenost přímek a rovin

Příklad 1 Je dána krychle $ABCDEFGH$ s hranou délky a. Body K, L, M, N, P, Q jsou po řadě středy hran AB, BC, EH, GH, EF, FG. Vypočtěte vzdálenost přímek:

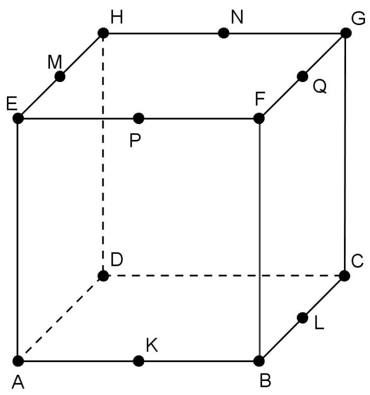
a) BF a CG

Řešení:



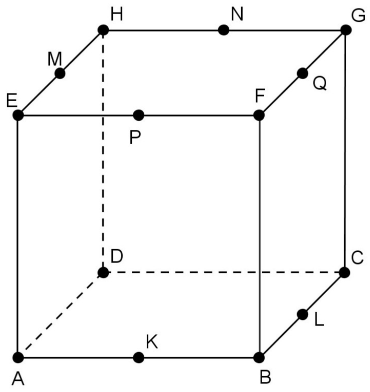
b) AH a BG

Řešení:



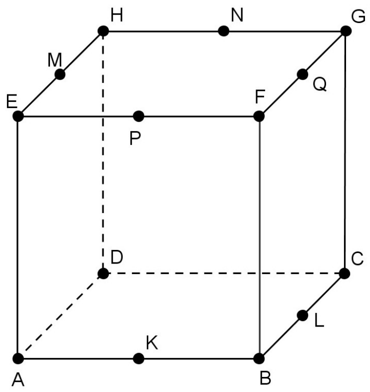
c) KL a PQ

Řešení:



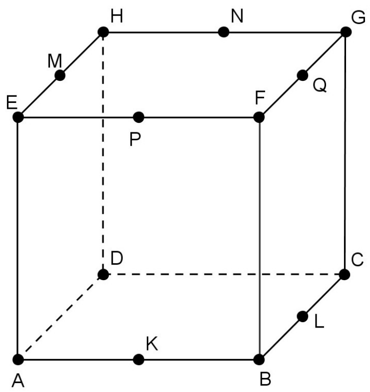
d) PQ a MN

Řešení:



e) MN a KL

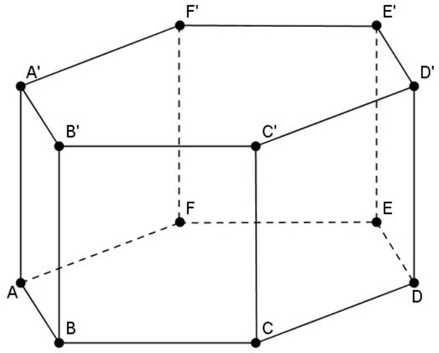
Řešení:



Příklad 2 Pravidelný šestiboký hranol $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ má podstavnou hranu délky a, jeho boční stěny jsou čtverce. Vypočtěte vzdálenost přímek:

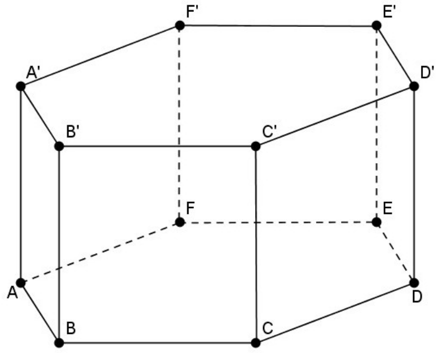
a) AD a $E'F'$

Řešení:



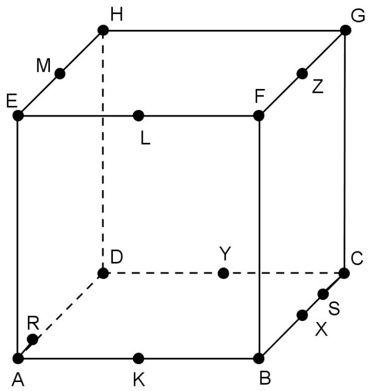
b) AS a BC', bod S je středem podstavy $A'B'C'D'E'F'$

Řešení:

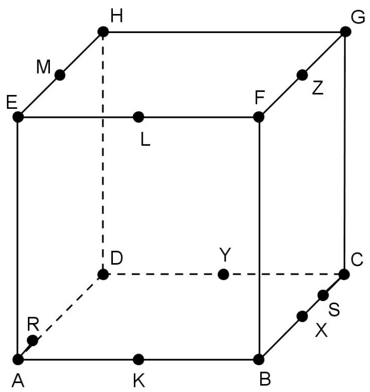


Příklad 3 Je dána krychle $ABCDEFGH$ s hranou délky a. Body K, L, M, X, Y, Z jsou po řadě středy hran AB, EF, EH, BC, CD, FG. Bod R je bodem hrany AD, $|AR| = \frac{1}{5}a$, bod S je bodem hrany BC, $|CS| = \frac{1}{4}a$. Vypočtěte vzdálenost rovin.

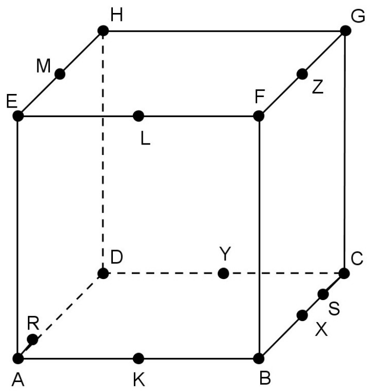
a) ABC a EFG Řešení:



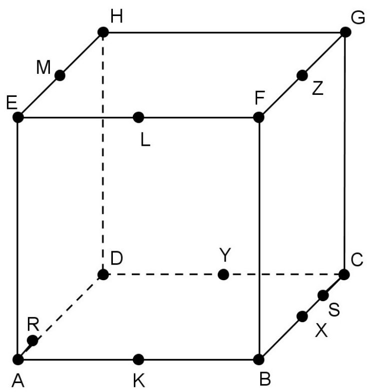
b) ρ a σ, $R \in \rho$, $S \in \sigma$, $\rho \parallel \sigma \parallel\!\leftrightarrow ABE$ Řešení:



c) ABM a GHX Řešení:



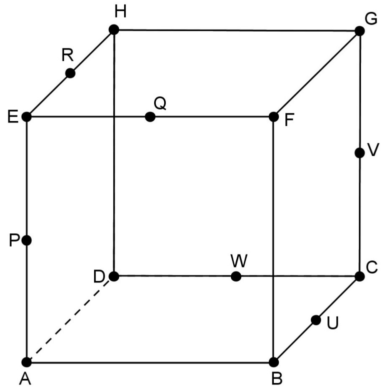
d) KLM a XYZ Řešení:



Příklad 4 Krychle $ABCDEFGH$ má hranu délky $a = 5\,\mathrm{cm}$, body P, Q, R, U, V, W jsou po řadě středy hran AE, EF, EH, BC, CG, CD. Vypočtěte vzdálenost rovin:

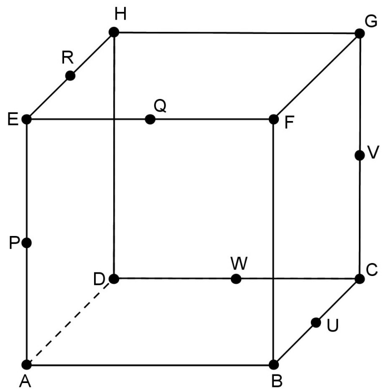
a) PQR a UVW

Řešení:

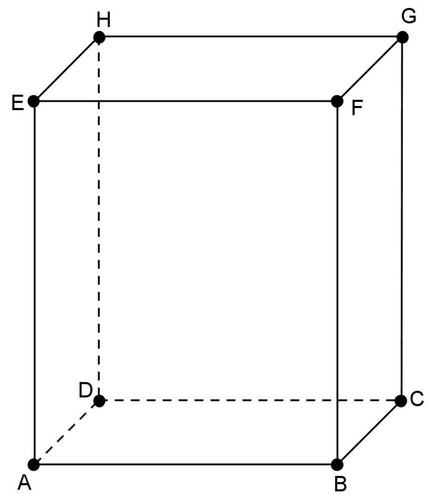


b) CFH a α, rovina α je s rovinou CFH rovnoběžná a prochází bodem V

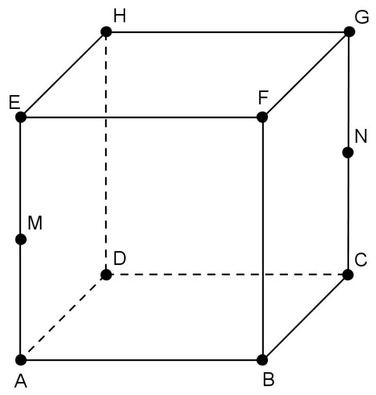
Řešení:



Příklad 5 Jsou dány dvě rovnoběžné roviny α a β. Najděte množinu všech bodů, pro které poměr vzdáleností od roviny α a β je $\frac{3}{2}$. Zobrazte ve volném rovnoběžného promítání pomocí kvádru $ABCDEFGH$, volte $\alpha =\leftrightarrow ADE$, $\beta =\leftrightarrow ADE$. Řešení znázorněte do obrázku.



Příklad 6 V krychli $ABCDEFGH$ s hranou délky a je bod M středem hrany AE a bod N středem hrany CG. Určete vzdálenost přímky MN od roviny DEG. Řešte úlohu početně pro $a = 5\,\text{cm}$.

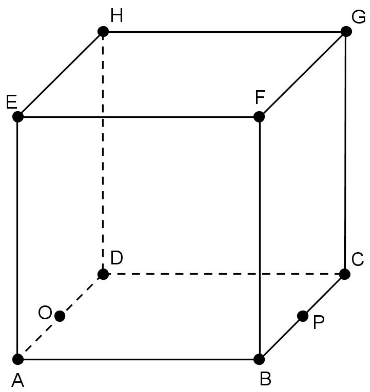


Řešení:

Příklad 7 Je dána krychle $ABCDEFGH$ s hranou délky a, bod O je středem hrany AD, bod P je středem hrany CD. Vypočtěte vzdálenost mimoběžek:

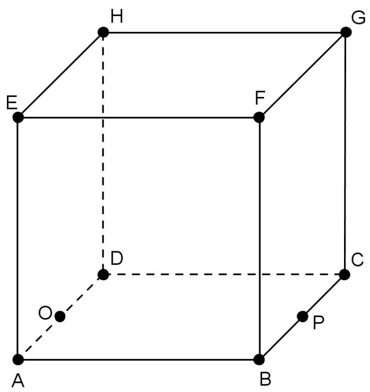
a) AB a FH

Řešení:



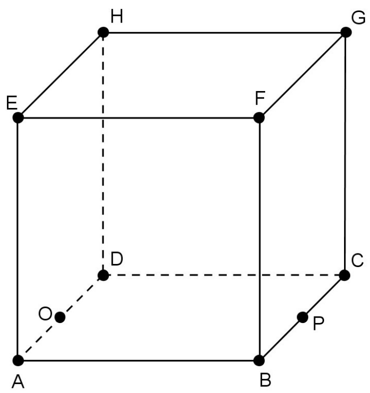
b) BO a EG

Řešení:

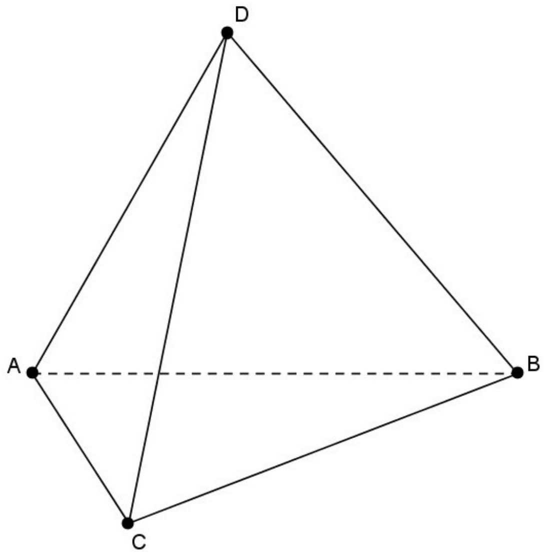


c) BC a PG

Řešení:

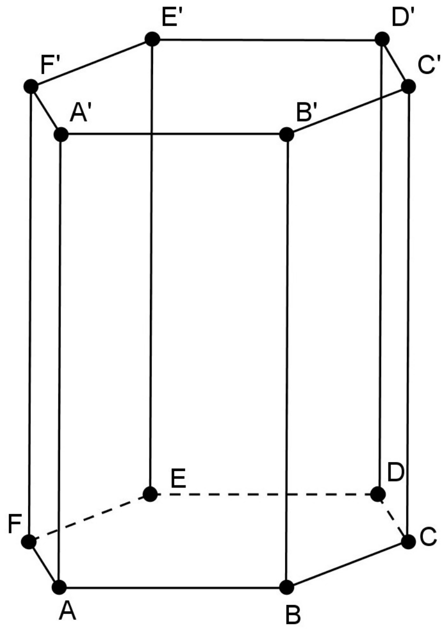


Příklad 8 Vrcholy pravidelného čtyřstěnu $ABCD$ s hranou délky $a = 4\,\mathrm{cm}$ jsou určeny mimoběžky AB a CD. Vypočtěte jejich vzdálenost.



Řešení:

Příklad 9 Je dán pravidelný šestiboký hranol $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ s podstavnou hranou délky a, boční hrany mají délku $2a$. Vypočtěte vzdálenost mimoběžek BB' a $A'F'$.



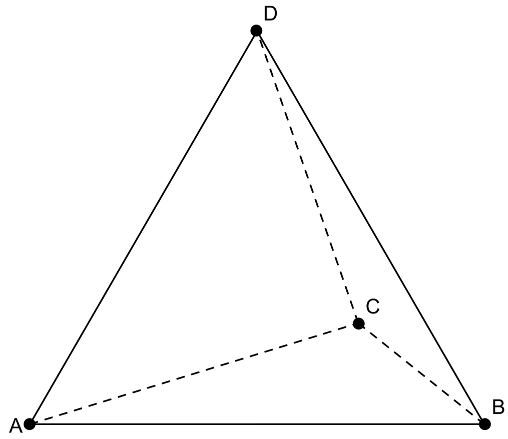
Řešení:

D Ukázkový pracovní lista a jeho řešení

Příklad 13 Je dán pravidelný čtyřstěn $ABCD$. Vypočítejte odchylku:

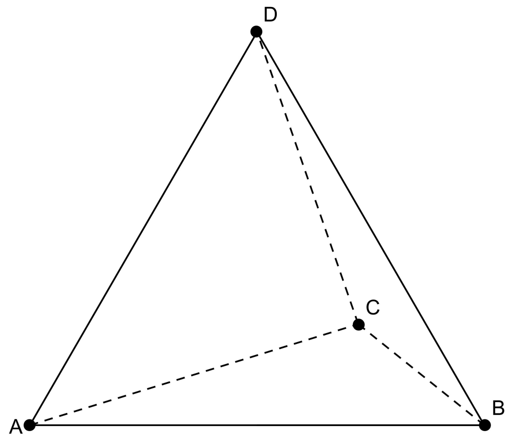
a) rovin dvou stěn čtyřstěnu

Řešení:



b) přímky, která obsahuje hranu čtyřstěnu, a roviny stěny čtyřstěnu, která tuto hranu neobsahuje.

Řešení:

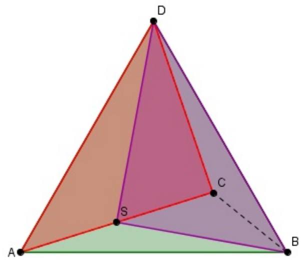


Soubor Úpravy Zobrazit Nastavení Nástroje Okno Nápověda

Ukazovátko
Přesun nebo výběr objektů (zrušit klávesou Esc)

Příklad 1 a)

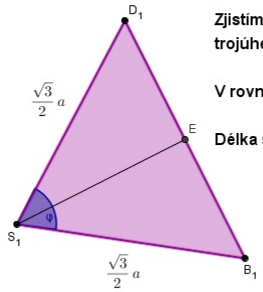
Je dán pravidelný čtyřstěn ABCD. Určete odchylku rovin dvou stěn čtyřstěnu.



Řešení:

1. Proložíme rovinu BDS kolmou k oběma rovinám.

2. Z trojúhelníku BDS zjistíme odchylku φ.



Zjistíme délku stran trojúhelníku BDS. Stěny čtyřstěnu tvoří rovnostranné trojúhelníky.

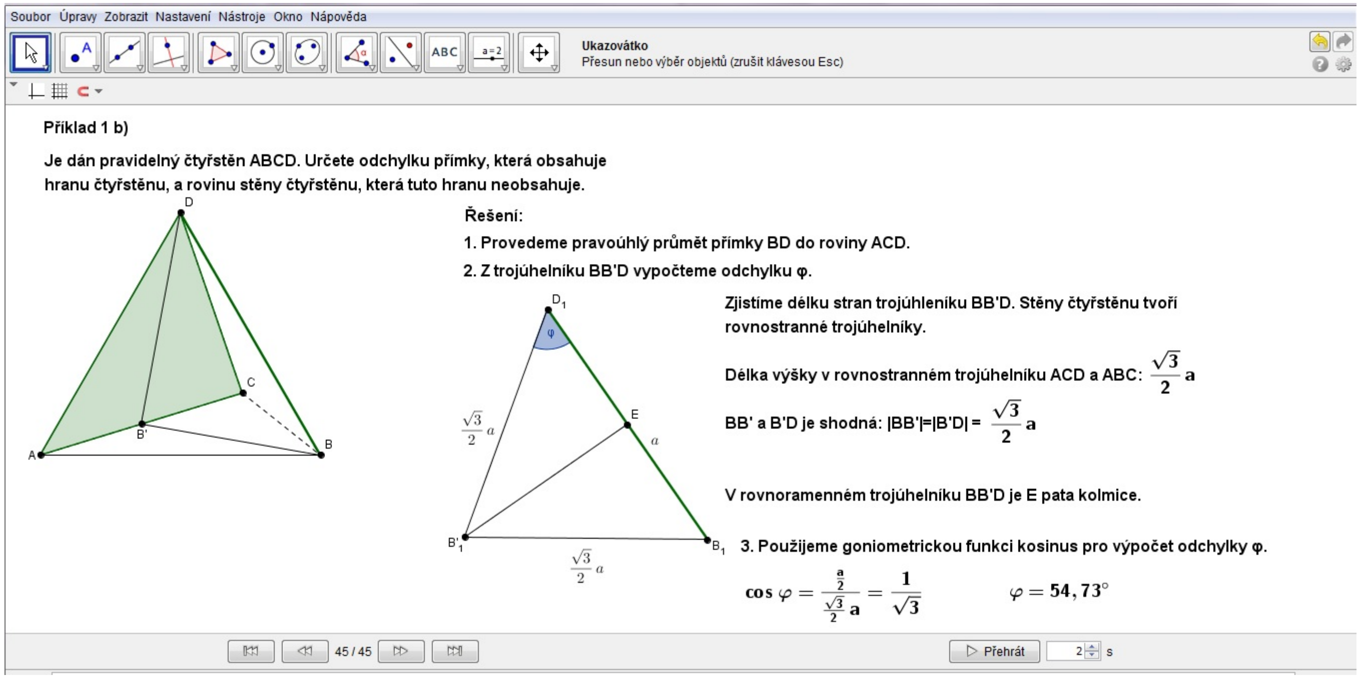
V rovnoramenném trojúhelníku BDS je E pata výšky. Pak platí:

Délka stran DS a BS je shodná: |DS|=|BS| = $\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{a}$

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\varphi = 70{,}53^\circ$$

42 / 42 Přehrát 2 s


Soubor Úpravy Zobrazit Nastavení Nástroje Okno Nápověda
Ukazovátko
Přesun nebo výběr objektů (zrušit klávesou Esc)
Příklad 1 b)
Je dán pravidelný čtyřstěn ABCD. Určete odchylku přímky, která obsahuje hranu čtyřstěnu, a rovinu stěny čtyřstěnu, která tuto hranu neobsahuje.
D
C
B'
A
B
Řešení:
1. Provedeme pravoúhlý průmět přímky BD do roviny ACD.
2. Z trojúhelníku BB'D vypočteme odchylku φ.
D_1
φ
E
$\frac{\sqrt{3}}{2}a$
a
B'_1
B_1
$\frac{\sqrt{3}}{2}a$
Zjistíme délku stran trojúhleníku BB'D. Stěny čtyřstěnu tvoří rovnostranné trojúhelníky.
Délka výšky v rovnostranném trojúhelníku ACD a ABC: $\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{a}$
BB' a B'D je shodná: |BB'|=|B'D| = $\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{a}$
V rovnoramenném trojúhelníku BB'D je E pata kolmice.
3. Použijeme goniometrickou funkci kosinus pro výpočet odchylky φ.
$\cos\varphi = \frac{\frac{\mathbf{a}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{a}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$
$\varphi = 54,73°$
45 / 45
Přehrát
2
s

E Zavedené značení

P, Q	body P, Q
p, q	přímky p, q
$\leftrightarrow PQ$	přímka PQ
$\mapsto PQ$	polopřímka PQ
σ	rovina σ
$\leftrightarrow PQS$	rovina PQS
$\leftrightarrow Qp$	rovina QP
$\leftrightarrow pq$	rovina pq
$\measuredangle PVQ$	konvexní úhel PVQ
$\in$, $\notin$	je/není prvkem
$P = Q$, $P \neq Q$	bod P je/není totožný s bodem Q
$p = q$, $p \neq q$	přímka p je/není totožná s q
$\rho = \sigma$, $\rho \neq \sigma$	přímka ρ je/není totožná s σ
$\parallel$, $\nparallel$	je/není rovnoběžno
$p \cap q = P$	průsečík P přímek p,q
$\rho \cap \sigma = p$	průsečnice p přímek p,q
$\perp$	je kolmo
$p \perp q$	přímka p je kolmá k přímce q
$p \perp \rho$	přímka p je kolmá k rovině ρ
$\rho \perp \sigma$	rovina ρ je kolmá k rovině σ
$\lvert PQ \rvert$	vzdálenost bodů P, Q
$\lvert Pq \rvert$	vzdálenost bodu P od přímky q
$\lvert P\rho \rvert$	vzdálenost bodu P od roviny ρ
$\lvert pq \rvert$	vzdálenost rovnoběž. (mimoběž.) přímek p, q
$\lvert \rho\sigma \rvert$	vzdálenost rovnoběžných rovin ρ, σ
$\lvert \measuredangle PVQ \rvert$	velikost konvexního úhlu $\measuredangle PVQ$
$\lvert \measuredangle pq \rvert$	odchylka přímek p, q
$\lvert \measuredangle p\rho \rvert$	odchylka přímky p od roviny ρ
$\lvert \measuredangle \rho\sigma \rvert$	odchylka rovin ρ, σ