Pedagogická fakulta
Faculty of Education
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
University of South Bohemia in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích
Pedagogická fakulta
Katedra matematiky

Bakalářská práce

Řešení vybraných úloh z deskriptivní geometrie

Vypracovala: Sabina Římáková
Vedoucí práce: Mgr. Roman Hašek, Ph.D.

České Budějovice 2023

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci na téma Řešení vybraných úloh z deskriptivní geometrie jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích 3. července 2023 ………………………….

(podpis)

Poděkování

Ráda bych tímto poděkovala svému vedoucímu bakalářské práce panu Mgr. Romanu Haškovi, Ph.D. za odborné vedení, trpělivost, ochotu a cenné rady.

Abstrakt

Cílem této bakalářské práce je vytvoření sbírky řešených úloh z deskriptivní geometrie. Stěžejní částí mé práce je sbírka úloh, která je vytvořena v programu GeoGebra. Ta je propojena s textem práce pomocí hypertextového odkazu a QR kódu. Sbírka obsahuje celkem dvanáct řešených úloh, kdy ke každé z nich je přiložen postup řešení a PDF soubor určený k vytištění a ručnímu rýsování. Sbírka bude sloužit především k podpoře kurzu deskriptivní geometrie v bakalářském studiu matematiky, mohla by však najít uplatnění i na středních školách ve výuce deskriptivní geometrie a stereometrie.

Abstract

The aim of this bachelor's thesis is to create a collection of solved problems in descriptive geometry. The core part of my work is a collection of problems created in the GeoGebra software. It is linked to the text of the thesis through a hypertext link and a QR code. The collection includes a total of 12 solved problems, each accompanied by a solution procedure and a PDF file intended for printing and manual drawing. The collection will primarily serve to support the course of descriptive geometry in the Bachelor's degree program in Mathematics at the Faculty of Education. However, it could also be useful in high schools for teaching descriptive geometry and solid geometry.

Obsah

1 ÚVOD

Tato bakalářská práce přináší sbírku řešených úloh z deskriptivní geometrie. Konkrétně obsahuje dvanáct různých úloh z oblasti kótovaného a Mongeova promítání. Toto téma jsem si vybrala, jelikož jsem zde mohla zúročit své zkušenosti z hodin deskriptivní geometrie na střední škole.

Bakalářská práce je členěna do tří kapitol. První kapitola se věnuje konkrétním učebnicím a internetovým odkazům, které jsem využívala k psaní této práce. Dále jsou zde uvedená témata, která jsem v těchto zdrojích vyhledávala.

Ve druhé kapitole představuji software GeoGebra a možnosti jeho využívání při tvorbě interaktivních materiálů a využití při výuce geometrie. Součástí této kapitoly je také ukázka vybraných výukových materiálů tvořených právě v tomto programu. Tyto materiály jsou propojené s textem práce pomocí QR kódu a klasického hypertextového odkazu.

Obsahem třetí kapitoly je vlastní sbírka řešení vybraných úloh z deskriptivní geometrie. Sbírka je tvořena z celkem dvanácti různých úloh z oblasti kótovaného a Mongeova promítání. Každá úloha je tvořena slovním zadáním, grafickým zadáním, slovním postupem a PDF souborem se zadáním dané úlohy. Všechny úlohy jsou zpracované ve formě GeoGebra appletu s geometrickým zápisem konstrukce. Applety jsou tvořeny stylem krok za krokem. Pod každým appletem se nachází slovní postup, který je v souladu s geometrickým zápisem konstrukce. U každé úlohy je k dispozici PDF soubor se zadáním dané úlohy. Ten je určený k vytištění a ručnímu rýsování. Všechny úlohy jsou pak seskupeny do GeoGebra knihy (Římáková 2023) dostupné na odkazu https://www.geogebra.org/m/pfxqdguu.

Se sbírkou se dá pracovat různými způsoby. V této práci se vyskytují QR kódy a hypertextové odkazy. Pomocí nich si může student vyhledat danou úlohu přímo v GeoGebra knize a využít možnosti přehrání postupu konstrukce krok za krokem. Může také pracovat se samotnou prací, kde má k dispozici zadání úlohy, náhled řešení a slovní postup nebo si může vytisknout PDF soubor se zadáním dané úlohy a rýsovat ručně.

Sbírka je určena především k podpoře úvodního kurzu deskriptivní geometrie v bakalářském studiu matematiky, mohla by však najít uplatnění také na středních školách ve výuce deskriptivní geometrie a stereometrie.

2 REŠERŠE ZDROJŮ

2.1 Učebnice

V České republice vyšla řada kvalitních učebnic deskriptivní geometrie. Nejvíce jsem využívala učebnice Deskriptivní geometrie pro střední školy (Pomykalová 2010), Deskriptivní geometrie I (Drábek et al. 1978), Deskriptivní geometrie I. (Urban 1965), Deskriptivní geometrie pro technické školy vysoké, vyšší a střední (Kargerová 1997). V těchto učebnicích jsou velmi dobře zpracované kapitoly ohledně kótovaného a Mongeova promítání. V těchto učebnicích jsem zároveň vyhledávala příklady do GeoGebra knihy.

Dále jsem využívala učebnice Atlas geometrie, Geometrie krásná a užitečná (Voráčová et al. 2012), Umění vidět v matematice (Kuřina 1989), 10 pohledů na geometrii (Kuřina 1996), 10 geometrických transformací (Kuřina 2002) a Matematika pro gymnázia: stereometrie (Pomykalová 1995).

V souvislosti s psaním bakalářské práce jsem se nejvíce zaměřovala na témata sklápění roviny, otáčení roviny, osová afinita, vzájemná poloha dvou přímek, vzájemná poloha dvou rovin, zobrazení kružnice v Mongeově promítání, řez hranolu rovinou, řez rotačního tělesa rovinou a zobrazení mnohostěnu v Mongeově promítání.

2.2 Internetové zdroje

Pro vyhledávání informací ohledně kótovaného a Mongeova promítání jsem využívala internetové zdroje Základy geometrie a Geometrie (Doležal 2007) a Geometrie III (Hašek 2022).

Samotná sbírka je tvořena v internetovém softwaru GeoGebra (GeoGebra 2023c) dostupném na https://www.geogebra.org/. Návody, jak vytvořit samotné aktivity a GeoGebra knihu, jsou dostupné na https://www.geogebra.org/a/14?lang=cs. (GeoGebra 2023b)

3 PROGRAM GEOGEBRA PRO VÝUKU GEOMETRIE

3.1 GeoGebra

Mezi nejznámější softwary podporující výuku nejen geometrie patří bezpochyby program GeoGebra. Jakýkoli uživatel se může bezplatně registrovat a vytvořit si účet zadáním své e-mailové adresy a vytvořením hesla na oficiálních stránkách programu GeoGebra https://www.geogebra.org/. Výhodou je, že uživatelé nejsou limitováni technologiemi, které podporují tento program. Mohou si ho totiž stáhnout do svého počítače, chytrého telefonu či tabletu. V takovém případě ho mohou všichni využívat téměř kdykoli a kdekoli, jestliže mají přístup k internetu. (GeoGebra 2023c)

Pokud je uživatel úplný nováček a nikdy se s programem GeoGebra nesetkal, může využít návody v českém i anglickém jazyce, které jsou dostupné na tomto internetovém odkazu https://www.geogebra.org/a/14?lang=cs. (GeoGebra 2023b)

3.2 Využití programu GeoGebra

Uživatel má mnoho možností, jak GeoGebru využívat. Může vytvářet dynamické applety, ve kterých může spustit automatické přehrávání jednotlivých kroků nebo nastavit, aby se jednotlivé objekty různě pohybovaly. Každý objekt je možno barevně odlišit od ostatních. Program GeoGebra umožňuje uživatelům řešit úlohy nejenom z 2D, ale také z 3D prostoru. V jednotlivých appletech je také možnost přidávat text či obrázky pro vytvoření vizuálně zajímavějšího obsahu. Každý applet má uživatel možnost uložit jako soukromý nebo ho může ponechat veřejný a sdílet ho s ostatními uživateli GeoGebry. Sdílet je může např. pomocí odkazů, čehož je využito i v této bakalářské práci.

Při vytváření appletů je možno využít nástrojový panel, který výrazně usnadňuje realizování geometrické konstrukce v tomto programu. Mimo jiné může uživatel skrýt pomocné prvky, např. pomocné čáry či pomocné body, které by mohly narušovat celkový vizuál výsledného appletu.

Na svém profilu má pak uživatel prostor vytvářet aktivity, do kterých může vkládat již vytvořené applety, text, obrázky, videa, PDF soubory či různé otázky. Je zde možnost zpětně applety, i veškeré aktivity, upravovat a vylepšovat. Tato funkce lze využít i pro úpravu kopií appletů ostatních uživatelů. Ti je však musí mít veřejně dostupné. V této sbírce jsem využila možnosti přidání textů a PDF souboru k appletu.

Program GeoGebra nabízí možnost vytvoření GeoGebra knihy. Tato funkce umožňuje uživateli seskupit jednotlivé aktivity, týkající se určitého tématu, do jednoho souboru. Z tohoto důvodu je také sbírka Řešení vybraných úloh z deskriptivní geometrie (Římáková 2023) ve formě GeoGebra knihy, jelikož jsou všechny jednotlivé úlohy pohromadě a zároveň přehledně uspořádané.

Mezi učiteli je často využívaná funkce GeoGebra Classroom. Učitelé studentům zadají různé úkoly ve formě předem připravených aktivit a sdílí je s nimi pomocí speciálních kódů. Učitel může v reálném čase na své obrazovce sledovat studenty, jak pracují a řeší jednotlivé úlohy. Učitel může zvolit možnost anonymity, tudíž každý student, který se do GeoGebra Classroom připojil, bude vidět pouze pod číslem a ne pod svým skutečným jménem.

Na ukázku jsem vybrala dva konkrétní materiály jiných autorů, které jsou vytvořené v programu GeoGebra, pro podporu výuky deskriptivní geometrie. První applet ukazuje zobrazení čtverce v kótovaném promítání. Ve druhém appletu je vyobrazen vznik kuželoseček pomocí řezu na kuželové ploše v Mongeově promítání.

https://www.geogebra.org/m/zSGQqxEW

https://www.geogebra.org/m/r4ujvejp

4 ŘEŠENÍ VYBRANÝCH ÚLOH Z DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE

Tato sbírka úloh ve formě GeoGebra knihy (Římáková 2023) je určena jako opora při studiu úvodního kurzu deskriptivní geometrie v bakalářském studiu matematiky.

Ve sbírce se nachází celkem 12 různých úloh, 6 úloh týkajících se kótovaného promítání a 6 úloh zaměřených na Mongeovo promítání. Každá z nich je vzorově vyřešena formou animace krok za krokem a následně se pod každou úlohou vyskytuje slovní postup řešení odkazující ke konkrétním krokům postupu v appletu. Zároveň pod každou úlohou naleznete PDF soubor se zadáním, který je určený k vytištění a následnému ručnímu rýsování.

Odkaz na sbírku:

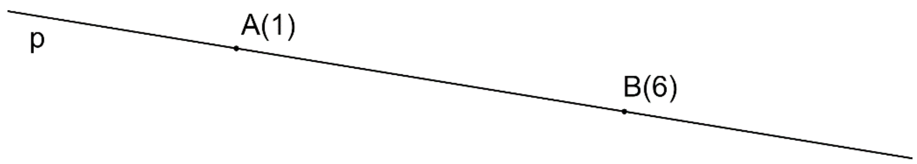
https://www.geogebra.org/m/pfxqdguu

4.1 Kótované promítání

Kótovanému promítání se podrobně věnuje Pomykalová (2010, s. 70-106). Toto téma dále dobře vysvětluje Drábek et al. (1978, s. 117-124) nebo Urban (1965, s. 116-139). Téma kótované promítání také dobře vysvětluje Hašek (2022, s. 45-52).

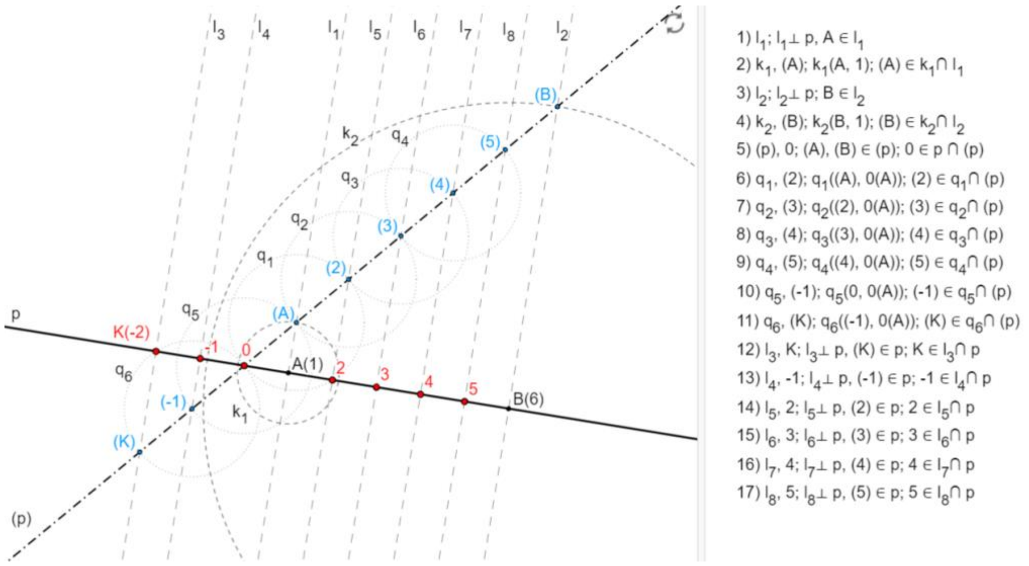
Kótované promítání je nadále v textu uváděno pod zkratkou KP.

Úloha 1: V KP vystupňujte přímku *p* a zobrazte na ní bod *K* s kótou -2, jsou-li zadané body *A* a *B* o různých kótách, které leží na přímce *p*.



Obrázek 1: Zadání Úlohy 1

Náhled řešení:



Obrázek 2: Řešení Úlohy 1

Postup konstrukce:

Tuto úlohu budeme řešit pomocí sklopení kolmé promítací roviny přímky *p*. Detailnějšímu výkladu na téma stupňování přímky se věnuje Hašek (2022, s. 50-52). Nejdříve sklopíme bod *A*. Bodem *A* vedeme kolmici l_1 na přímku *p*. Kolem bodu *A* opíšeme kružnici k_1 o poloměru 1. Kružnice k_1 protne kolmici l_1 ve dvou bodech. Jeden z nich si vybereme a pojmenujeme ho jako sklopený bod *(A)*.

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 1, 2)

Následně sklopíme bod *B*. Bodem *B* vedeme kolmici l_2 na přímku *p*. Kolem bodu *B* opíšeme kružnici k_2 o poloměru 6. Kružnice k_2 protne kolmici l_2 ve dvou bodech. Bod *A* i bod *B* mají kladnou kótu. Bod *B* sklopíme do stejné poloroviny, která je ohraničená přímkou *p*, jako bod *A*. Zvolíme tedy průsečík, který se nachází ve stejné polorovině jako sklopený bod *(A)* a označíme ho jako sklopený bod *(B)*. Sestrojíme sklopenou přímku *(p)*. Sklopená přímka *(p)* prochází sklopenými body *(A)* a *(B)*. Přímka *p* se protíná se sklopenou přímkou *(p) v* bodě *0*. Bod *0* je stopníkem přímky *p*.

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 3 - 5)

Nyní vyznačíme na sklopené přímce *(p)* body, které mají celočíselnou kótu. Tomuto procesu se říká stupňování přímky. Kolem bodu *(A)* opíšeme kružnici q_1 o poloměru *(A)0*. Bodem, ve kterém protne kružnice q_1 přímku *(p)*, je bod *(2)*. Bod *(2)* leží ve stejné polorovině jako body *(A)* a *(B)*. Následně kolem bodu *(2)* opíšeme kružnici q_2 o poloměru *(A)0*. Kružnice q_2 protne přímku *(p)* v bodě *(3)*. Sestrojíme kružnici q_3 středem v bodě *(3)* a poloměrem *(A)0*. Kružnice q_3 protne přímku *(p)* v bodě *(4)*. Následně sestrojíme kružnici q_4 se středem v bodě *(4)* o poloměru *(A)0*. Kružnice q_4 protne přímku *(p)* v bodě *(5)*.

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 6 - 9)

Pro nalezení bodu *(-1)* opíšeme kolem bodu *0* kružnici q_5 o poloměru *(A)0*. Kružnice q_5 a přímka *(p)* se protnou v bodě *(-1)*. Následně opíšeme kružnici q_6 kolem bodu *(-1)* o poloměru *(A)0*. Průsečíkem kružnice q_6 a přímky *(p)* je bod *(K)*.

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 10, 11)

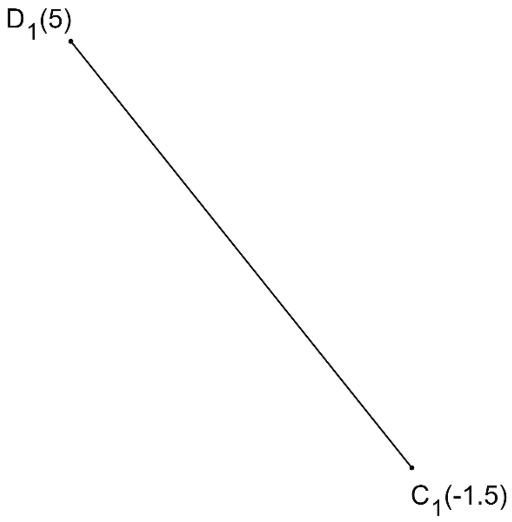
Nyní zobrazíme všechny sklopené body zpět do původního zadání. Bodem *(K)* vedeme kolmici l_3 na přímku *p*. Bod, ve kterém kolmice l_3 protne přímku *p*, označíme jako bod *K*. Bodem *(-1)* vedeme kolmici l_4 na přímku *p*. Přímka *p* a kolmice l_4 se protnou v bodě *-1*. Pro nalezení bodu *2* vedeme bodem *(2)* kolmici l_5 na přímku *p*. Přímka *p* a kolmice l_5 se protnou v bodě *2*. Následně vedeme kolmici l_6 na přímku *p* bodem *(3)*. Bod, ve kterém se přímka *p* protne s kolmicí l_6, je bod *3*. Dále vedeme kolmici l_7 na přímku *p* bodem *(4)*. Přímka *p* a kolmice l_7 se protínají v bodě *4*. Na závěr vedeme bodem *(5)* kolmici l_8 na přímku *p*. Kolmice l_8 protne přímku *p* v bodě *5*. Dostáváme vystupňovanou přímku *p*.

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 12 - 17)

Úloha 1 je dostupná zde:

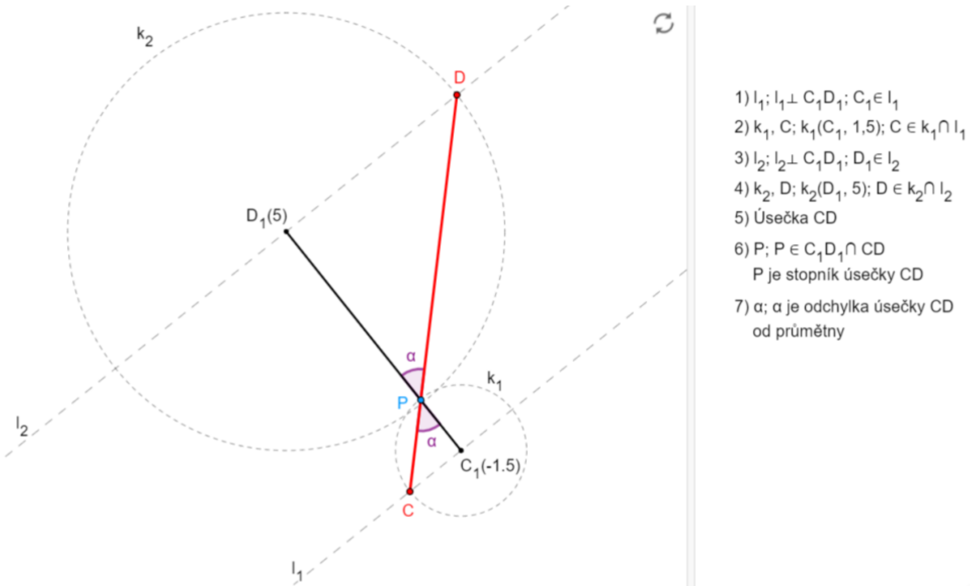
https://www.geogebra.org/m/pfxqdguu#material/zannxkg2

Úloha 2: V KP určete skutečnou velikost úsečky *CD,* je-li zadán její průmět, úsečka C_1D_1. Zobrazte její stopník a odchylku α od průmětny.



Obrázek 3: Zadání Úlohy 2

Náhled řešení:



Obrázek 4: Řešení Úlohy 2

Postup konstrukce:

Tato úloha se řeší sklopením kolmé promítací roviny úsečky *CD*. Tématu sklápění roviny se detailně věnuje Urban (1965, s. 120-125). Nejdříve sklopíme bod C_1. Bodem C_1 vedeme kolmici l_1 na úsečku C_1D_1. Kolem bodu C_1 opíšeme kružnici k_1 o poloměru 1,5. Kružnice k_1 protne přímku l_1 ve dvou bodech, jeden z nich si vybereme a označíme ho jako sklopený bod *C*.

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 1, 2)

Nyní sklopíme bod D_1. Bodem D_1 vedeme kolmici l_2 na úsečku C_1D_1. Kolem bodu D_1 opíšeme kružnici k_2 o poloměru 5. Kružnice k_2 protne přímku l_2 také ve dvou bodech. Tentokrát zvolíme bod, který je sklopený na opačnou stranu než bod *C* (body D_1 a C_1 mají opačná znaménka u svých kót). Dostáváme sklopený bod *D*.

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 3, 4)

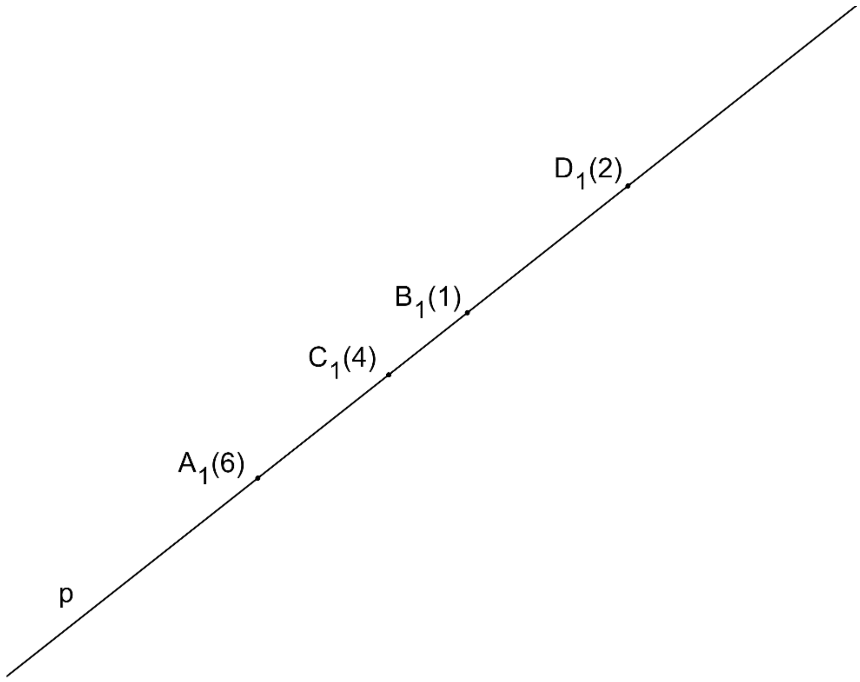
Sestrojíme úsečku *CD* a získáváme její skutečnou velikost. Bod *P*, ve kterém úsečka *CD* protne úsečku C_1D_1, je stopníkem úsečky *CD*. Odchylka α je úhel mezi úsečkou *CD* a průmětnou (resp. úsečkou C_1D_1). Zpravidla se volí menší z dvojice úhlů, které mezi sebou úsečka *CD* a úsečka C_1D_1 svírají.

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 5 - 7)

Úloha 2 je dostupná zde:

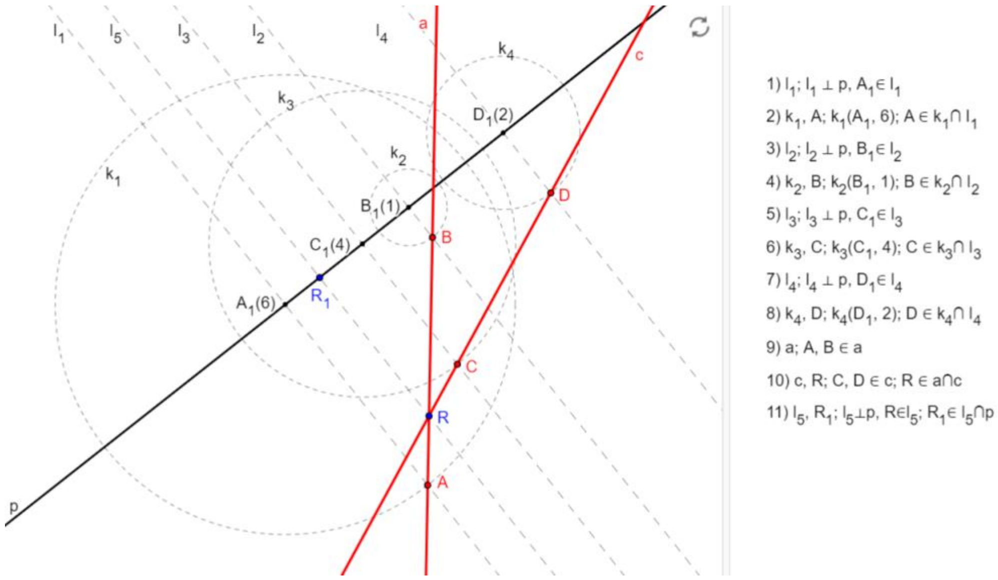
https://www.geogebra.org/m/pfxqdguu#material/warxxnyk

Úloha 3: V KP rozhodněte o vzájemné poloze přímek *a* a *c*. Přímka *a* je určena body *A* a *B*, přímka *c* je určena body *C* a *D*.



Obrázek 5: Zadání Úlohy 3

Náhled řešení:



Obrázek 6: Řešení Úlohy 3

Postup konstrukce:

Tuto úlohu budeme řešit sklápěním kolmé promítací roviny přímky *a* a kolmé promítací roviny přímky *c*. Téma vzájemné polohy přímek pěkně vysvětluje Pomykalová (2010, s. 80-83). Průměty přímek *a* a *c* splývají v přímku *p*. Bodem A_1 vedeme kolmici l_1 na přímku *p*. Opíšeme kružnici k_1 kolem bodu A_1 o poloměru 6. Kružnice k_1 protne kolmici l_1 ve dvou bodech. Jeden z nich vybereme a označíme ho jako sklopený bod *A*. Následně bodem B_1 vedeme kolmici l_2 na přímku *p*. Opíšeme kružnici k_2 kolem bodu B_1 o poloměru 1. Sklopený bod *B* je průsečíkem kružnice k_2 a kolmice l_2. Všechny body mají kladnou kótu, proto všechny sklápíme do stejné poloroviny s hraniční přímkou *p*. Bodem C_1 vedeme kolmici l_3 na přímku *p*. Sestrojíme kružnici k_3 se středem v bodě C_1 a o poloměru 4. Kružnice k_3 protne kolmici l_3 v bodě *C*. Následně sestrojíme kolmici l_4 na přímku *p* bodem D_1. Kolem bodu D_1 opíšeme kružnici k_4 o poloměru 2. Bod *D* je průsečíkem kolmice l_4 a kružnice k_4.

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 1 - 8)

Přímka *a* je určena body *A* a *B*. Bodem *A* a bodem *B* vedeme přímku. Dostáváme sklopenou přímku *a*. Přímka *c* je určena body *C* a *D*. Bodem *C* a bodem *D* vedeme přímku. Získáváme sklopenou přímku *c*. Je jasné, že přímky *a* a *c* jsou různoběžné. Průsečík sklopené přímky *a* a sklopené přímky *c* je sklopený bod *R*.

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 9, 10)

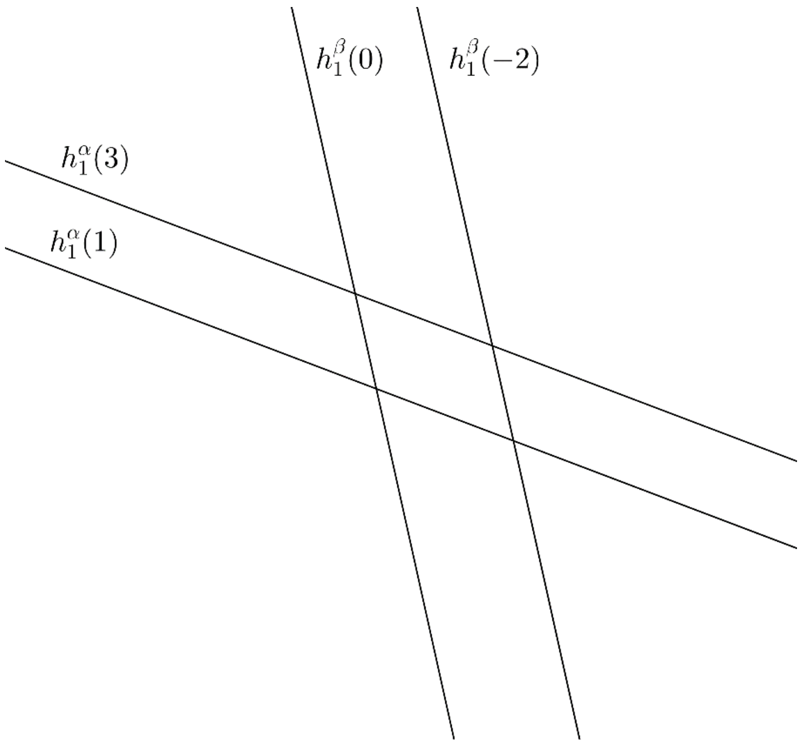
Jako poslední krok zobrazíme sklopený bod *R* do původního zadání. Bodem *R* vedeme kolmici l_5 na přímku *p*. Bod R_1 je průsečíkem kolmice l_5 a přímky *p*.

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 11)

Úloha 3 je dostupná zde:

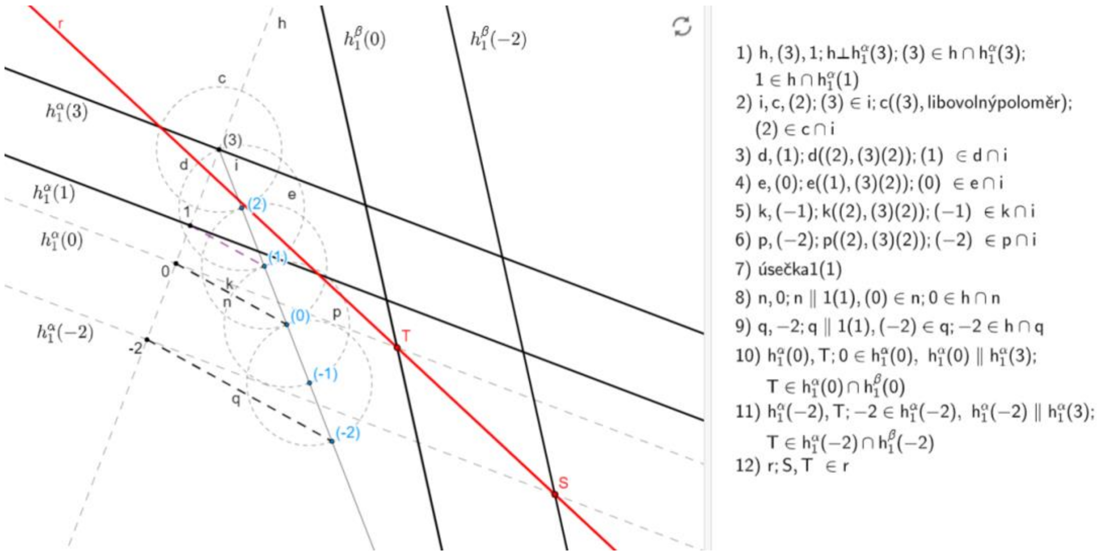
https://www.geogebra.org/m/pfxqdguu#material/cmxnpe9w

Úloha 4: V KP narýsujte průsečnici rovin α a β, je-li každá z nich zadána dvojicí hlavních přímek o různých kótách.



Obrázek 7: Zadání Úlohy 4

Náhled řešení:



Obrázek 8: Řešení Úlohy 4

Postup konstrukce:

Abychom mohli tuto úlohu vyřešit, musíme sestrojit hlavní přímky roviny α, které budou mít stejnou kótu jako zadané hlavní přímky roviny β. Téma průsečnice rovin dobře popsuje Pomykalová (2010, s. 94-99). Vedeme libovolnou kolmici h na hlavní přímku roviny α $h_1^\alpha(3)$. Přímka h a hlavní přímka roviny α $h_1^\alpha(3)$ se protínají ve sklopeném bodě *(3)*. Přímka h se protíná s hlavní přímkou roviny α $h_1^\alpha(1)$ *v* bodě *1*.

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 1)

Z bodu *(3)* vedeme libovolnou polopřímku i s počátkem v bodě *(3)*. Opíšeme kružnici c kolem bodu *(3)* o libovolném poloměru. Kružnice c protne polopřímku i ve sklopeném bodě *(2)*. Kolem bodu *(2)* opíšeme kružnici d o poloměru *(3)(2)*. Kružnice d protne polopřímku i v bodě *(1)*. Následně sestrojíme kružnici e se středem v bodě *(1)* o poloměru *(3)(2)*. Průsečíkem kružnice e a polopřímky i je bod *(0)*. Kolem bodu *(0)* opíšeme kružnici k o poloměru *(3)(2)*. Kružnice k protne polopřímku i v bodě *(-1)*. Sestrojíme kružnici p se středem v bodě *(-1)* a s poloměrem *(3)(2)*. Průsečíkem kružnice p a polopřímky i je bod *(-2)*.

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 2 - 6)

Sestrojíme úsečku *1(1)*. Bodem *(0)* vedeme rovnoběžku *n* s úsečkou *1(1). P*římka *n* protne přímku *h* v bodě *0*. Bodem *(-2)* vedeme rovnoběžku *q* s úsečkou *1(1)*. Průsečíkem přímky *q* a přímky *h* je bod -*2*.

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 7 - 9)

Bodem *0* vedeme rovnoběžku $h_1^{\alpha}(0)$ s hlavní přímkou roviny α o kótě 3 (resp. o kótě 1). Rovnoběžka $h_1^{\alpha}(0)$ je hlavní přímkou roviny α s kótou 0. Průsečíkem přímky $h_1^{\alpha}(0)$ s přímkou $h_1^{\beta}(0)$ je bod *T*. Následně vedeme bodem -*2* rovnoběžku $h_1^{\alpha}(-2)$ s hlavní přímkou roviny α o kótě 3. Průsečíkem přímky $h_1^{\alpha}(-2)$ a přímky $h_1^{\beta}(-2)$ je bod *S*.

(Kroky postupu u konstrukce: 10, 11)

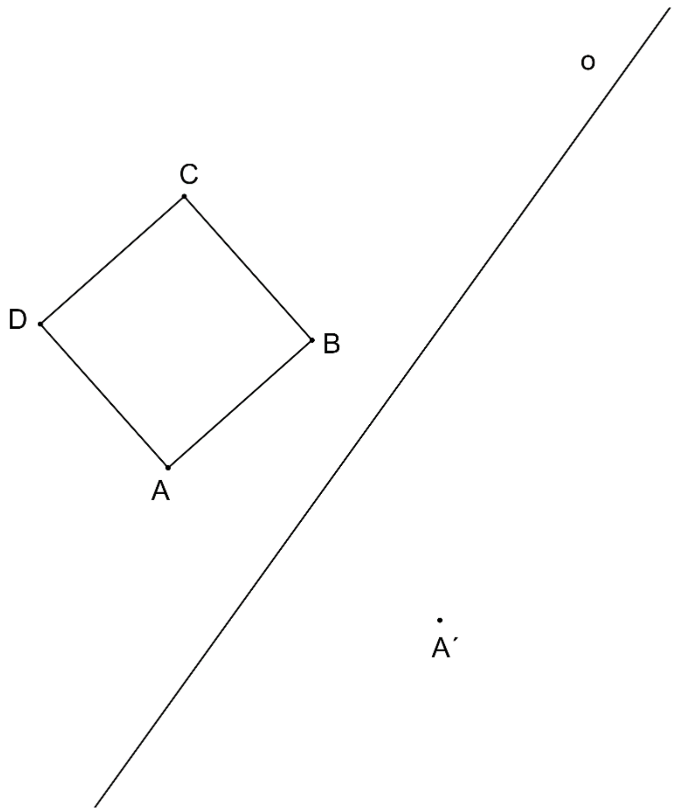
Bodem *T* a bodem *S* vedeme přímku *r*. Přímka *r* je průsečnicí rovin α a β.

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 12)

Úloha 4 je dostupná zde:

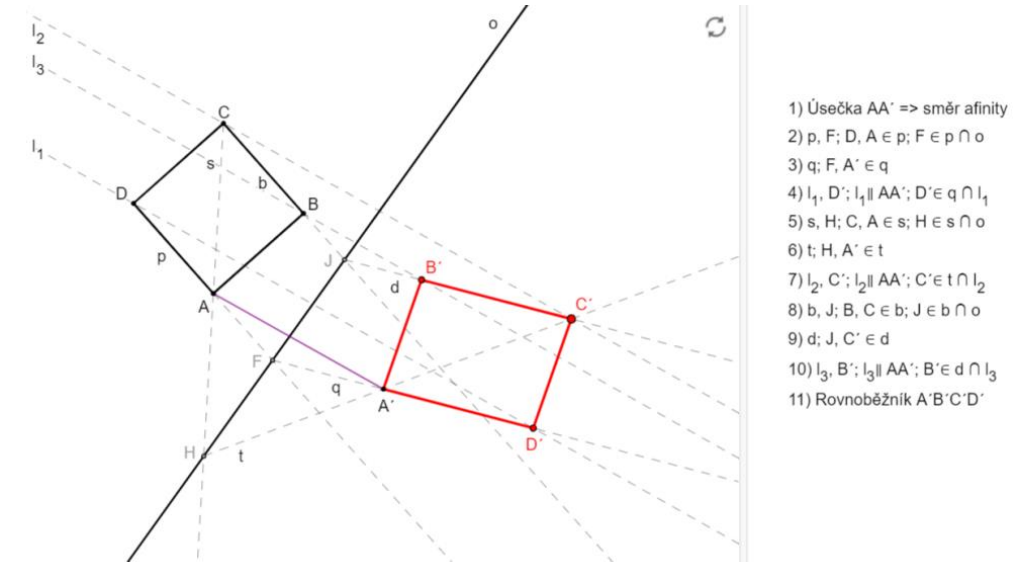
https://www.geogebra.org/m/pfxqdguu#material/rhamhaqh

Úloha 5: V KP zobrazte čtverec *ABCD* ležící v rovině ρ, jsou-li dány body *ABCD,* osa afinity *o* a bod *A´,* který je obrazem bodu *A*.



Obrázek 9: Zadání Úlohy 5

Náhled řešení:



Obrázek 10: Řešení Úlohy 5

Postup konstrukce:

Pro sestrojení obrazu čtverce v osové afinitě musíme nejdříve znát směr afinity. Sestrojíme úsečku *AA´*. Úsečka *AA´* určuje směr osové afinity. Tématu osové afinity se podrobně věnuje Pomykalová (2010, s. 31-34).

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 1)

Sestrojíme polopřímku *DA*. Průsečíkem polopřímky *DA* s osou afinity *o* je bod *F*. Sestrojíme polopřímku *FA´*. Následně bodem *D* vedeme rovnoběžku l_1 se směrem afinity. Přímka l_1 a polopřímka *FA´* se protnou v bodě *D´*. Bod *D´* je obrazem bodu *D*.

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 2 - 4)

Sestrojíme polopřímku *CA*. Polopřímka *CA* se protne s osou afinity *o* v bodě *H*. Následně sestrojíme polopřímku *HA´*. Bodem *C* vedeme rovnoběžku l_2 se směrem afinity. Přímka l_2 protíná polopřímku *HA´* v bodě *C´*. Bod *C´* je obrazem bodu *C*.

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 5 - 7)

Sestrojíme polopřímku *CB*. Bod, ve kterém se polopřímka *CB* protne s osu afinity *o* je bod *J*. Sestrojíme polopřímku *JC´*. Následně vedeme rovnoběžku l_3 bodem *B* se směrem afinity. Průsečíkem polopřímky JC' a přímky l_3 je bod B'. Bod B' je obrazem bodu B.

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 8 - 10)

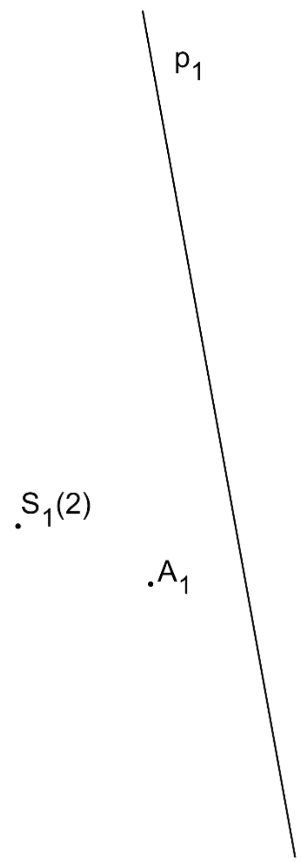
Sestrojíme úsečky $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$ a $D'A'$. Získáváme obraz čtverce $ABCD$ v afinitě.

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 11)

Úloha 5 je dostupná zde:

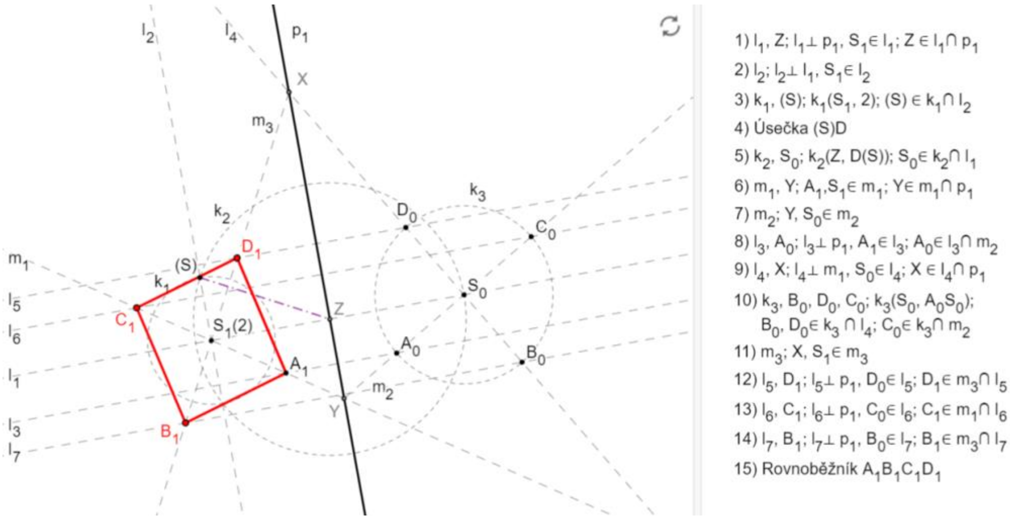
https://www.geogebra.org/m/pfxqdguu#material/tc88454e

Úloha 6: V KP zobrazte čtverec *ABCD*, který leží v rovině ρ, je-li dána stopa p_1 roviny ρ, vrchol čtverce A_1 a střed čtverce S_1 s kótou 2.



Obrázek 11: Zadání Úlohy 6

Náhled řešení:



Obrázek 12: Řešení Úlohy 6

Postup konstrukce:

Téma otáčení roviny dobře popisuje Urban (1965, s. 125-130). V první řadě potřebujeme otočit rovinu ρ tak, abychom viděli čtverec ve skutečné velikosti. Stopa p_1 roviny ρ je osou otáčení. Vedeme kolmici l_1 na stopu roviny p_1, která prochází bodem S_1. Kolmice l_1 protne stopu roviny p_1 v bodě Z. Následně bodem Z vedeme kolmici l_2 na přímku l_1. Opíšeme kružnici k_1 kolem bodu S_1 o poloměru 2. Kružnice k_1 protne kolmici l_2 ve dvou bodech. Zvolíme si jeden z nich a označíme ho jako sklopený bod (S). Opíšeme kružnici k_2 kolem bodu Z o poloměru $Z(S)$. Kružnice k_2 protne přímku l_1 ve dvou bodech. Jeden z nich si vybereme a označíme ho jako otočený bod S_0. (Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 1 - 5)

Bodem S_1 a bodem A_1 vedeme přímku m_1. Přímka m_1 protne stopu roviny p_1, v bodě Y. Sestrojíme polopřímku YS_0. Bodem A_1 vedeme kolmici l_3 na stopu roviny p_1. Průsečíkem kolmice l_3 a polopřímky YS_0 je otočený bod A_0.
(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 6 - 8)

Bodem S_0 vedeme kolmici l_4 na polopřímku YS_0. Opíšeme kružnici k_3 kolem bodu S_0 o poloměru A_0S_0. Kružnice k_3 protne polopřímku YS_0 ve dvou bodech, v bodě A_0

a v bodě C_0. Kružnice k_3 protne přímku l_4 také ve dvou bodech, v bodě B_0 a v bodě D_0. Nyní vidíme čtverec ve skutečné velikosti.

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 9, 10)

Následně sestrojíme body D_1, C_1 a B_1. Přímka l_4 protíná stopu roviny p_1 v bodě X. Sestrojíme polopřímku XS_1. Bodem D_0 vedeme kolmici l_5 na stopu roviny p_1. Přímka l_5 protíná polopřímku XS_1 v bodě D_1. Následně vedeme bodem C_0 kolmici l_6 na stopu roviny p_1. Průsečíkem přímky l_6 a přímky m_1 je bod C_1. Nakonec vedeme bodem B_0 kolmici l_7 na stopu roviny p_1. Přímka l_7 protíná polopřímku XS_1 v bodě B_1.

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 11 - 14)

Sestrojíme úsečky A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1 a D_1A_1. Získáváme čtverec, který leží v rovině ρ.

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 15)

Úloha 6 je dostupná zde:

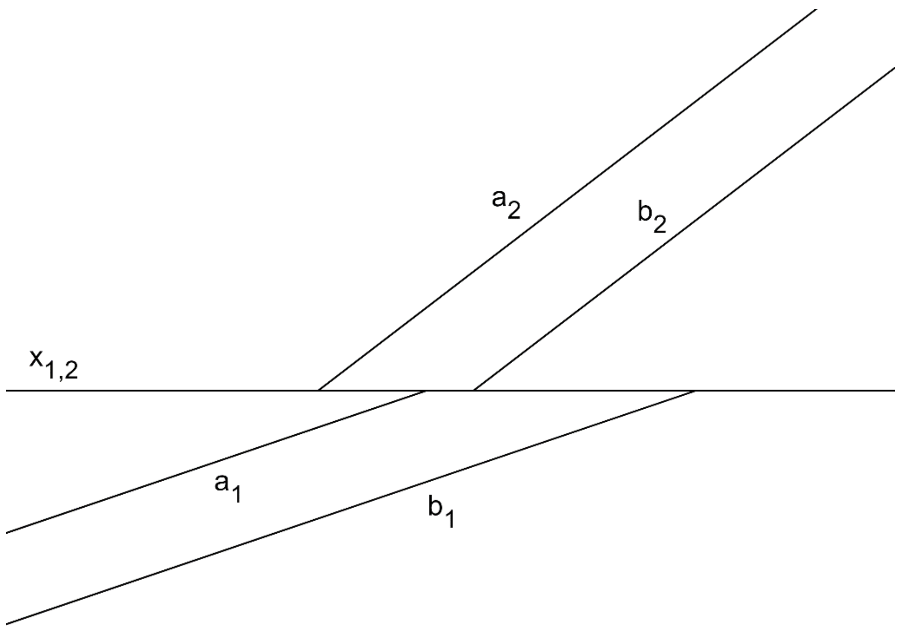
https://www.geogebra.org/m/pfxqdguu#material/sbesvu3q

4.2 Mongeovo promítání

Základy Mongeova promítání pěkně rozebírá Pomykalová (2010, s. 117-182). Dále Pomykalová (2010, s. 234-294) podrobně rozebírá téma rotačních těles v Mongeově promítání. Zobrazení mnohostěnů v Mongeově promítání dobře popisuje Urban (1965, s. 184-198). Tématu Mongeova promítání se také věnuje Drábek et al. (1978, s. 85-98).

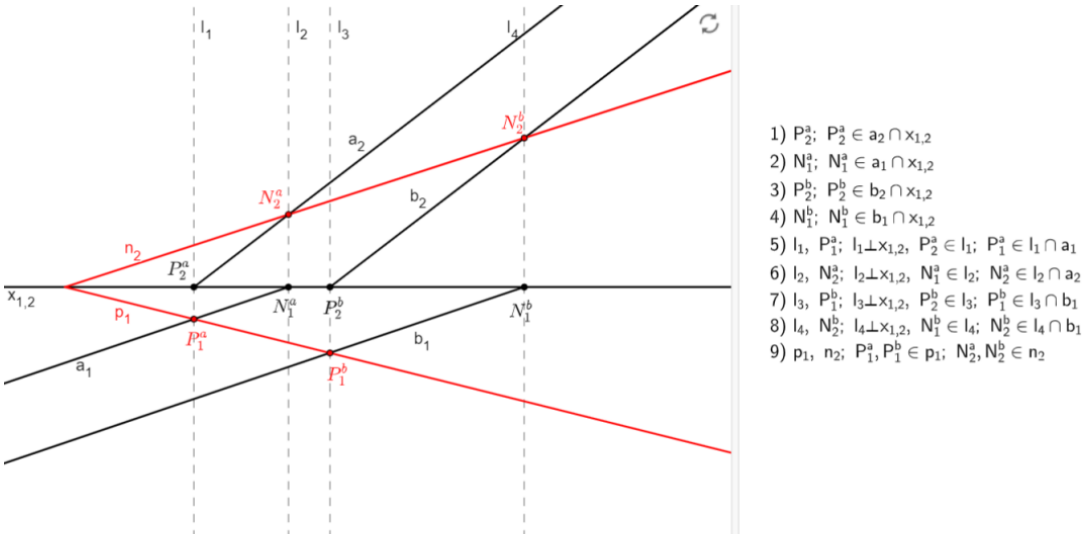
Mongeovo promítání je dále v textu uváděno pod zkratkou MP.

Úloha 7: V MP zobrazte stopy roviny ρ, která je určena dvěma rovnoběžnými přímkami a a b.



Obrázek 13: Zadání Úlohy 7

Náhled řešení:



Obrázek 14: Řešení Úlohy 7

Postup konstrukce:

Řešení podobné úlohy najdeme dobře vysvětlené v příkladu 7.7 na str. 140 v (Pomykalová 2010). Pro vyřešení této úlohy musíme zjistit stopníky přímek *a* a *b*. Přímka a_2 protíná základnici $x_{1,2}$ v bodě P_2^a . Bod P_2^a je nárys půdorysného stopníku přímky *a*. Přímka a_1 protíná základnici $x_{1,2}$ v bodě N_1^a. Bod N_1^a je půdorys nárysného stopníku přímky *a*. Přímka b_2 protíná základnici $x_{1,2}$ v bodě P_2^b. Bod P_2^b je nárys půdorysného stopníku přímky *b*. Přímka b_1 protíná základnici $x_{1,2}$ v bodě N_1^b. Bod N_1^b je půdorys nárysného stopníku přímky *b*.

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 1 – 4)

Následně vedeme bodem P_2^a kolmici l_1 na základnici $x_{1,2}$. Průsečíkem přímky l_1 a přímky a_1 je bod P_1^a. Bod P_1^a je půdorys půdorysného stopníku přímky *a*. Bodem N_1^a vedeme kolmici l_2 na základnici $x_{1,2}$. Přímka a_2 a přímka l_2 se protínají v bodě N_2^a. Bod N_2^a je nárysem nárysného stopníku přímky *a*. Bodem P_2^b vedeme kolmici l_3 na základnici $x_{1,2}$. Bod P_1^b je průsečíkem přímky l_3 a přímky b_1. Bod P_1^b je půdorysem půdorysného stopníku přímky *b*. Následně bodem N_1^b vedeme kolmici l_4 na základnici $x_{1,2}$. Bod N_2^b je průsečíkem přímky l_4 a přímky b_2. Bod N_2^b je nárys nárysného stopníku přímky *b*.

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 5 – 8)

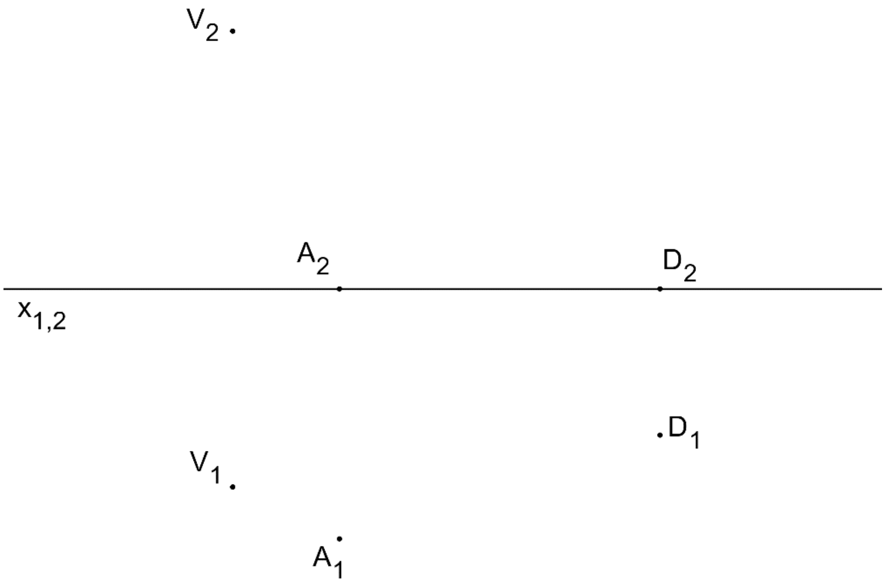
Bodem P_1^a a bodem P_1^b vedeme přímku p_1. Přímka p_1 je půdorysná stopa roviny ρ. Bodem N_2^a a bodem N_2^b vedeme přímku n_2. Přímka n_2 je nárysná stopa roviny ρ.

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 9)

Úloha 7 je dostupná zde:

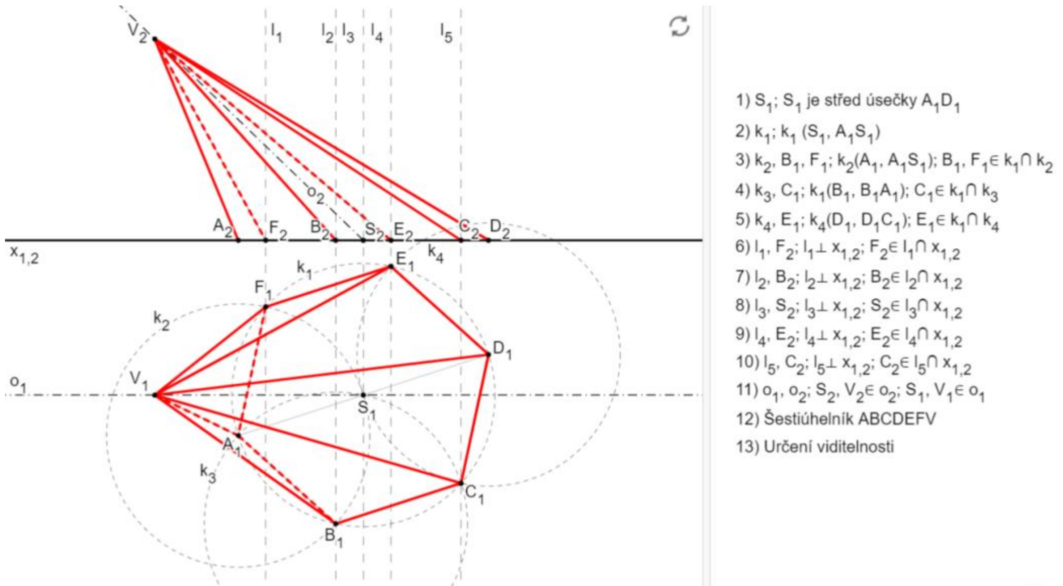
https://www.geogebra.org/m/pfxqdguu#material/adegfpgh

Úloha 8: V MP zobrazte pravidelný šestiboký jehlan *ABCDEFV*, jehož podstava leží v půdorysně. Dále jsou zadané oba průměty vrcholů podstavy *A* a *D* a oba průměty vrcholu jehlanu *V*. Určete viditelnost jeho hran.



Obrázek 15: Zadání Úlohy 8

Náhled řešení:



Obrázek 16: Řešení Úlohy 8

Postup konstrukce:

Podobnou úlohu najdeme vysvětlenou v příkladu 8.6 na str. 204 v (Pomykalová 2010). Nejdříve potřebujeme sestrojit podstavu jehlanu ve skutečné velikosti. Sestrojíme střed S_1 úsečky A_1D_1. Kolem bodu S_1 a opíšeme kružnici k_1 o poloměru A_1S_1. Následně kolem bodu A_1 opíšeme kružnici k_2 o poloměru A_1S_1. Kružnice k_2 protne kružnici k_1 v bodech B_1 a F_1. Opíšeme kružnici k_3 o poloměru A_1S_1 kolem bodu B_1. Kružnice k_3 protne kružnici k_1 v bodě C_1. Kolem bodu D_1 opíšeme kružnici k_4 o poloměru A_1S_1. Průsečíkem kružnice k_1 a kružnice k_4 je bod E_1.

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 1 - 5)

Nyní zobrazíme body B_1, C_1, E_1, F_1 a S_1 v nárysu. Bodem F_1 vedeme kolmici l_1 na základnici $x_{1,2}$. Průsečíkem přímky l_1 a základnice $x_{1,2}$ je bod F_2. Vedeme kolmici l_2 bodem B_1 na základnici $x_{1,2}$. Přímka l_2 protíná základnici $x_{1,2}$ v bodě B_2. Sestrojíme kolmici l_3 na základnici $x_{1,2}$, která prochází bodem S_1. Průsečíkem základnice $x_{1,2}$ a přímky l_3 je bod S_2. Bodem E_1 vedeme kolmici l_4 na základnici $x_{1,2}$. Přímka l_4 a základnice $x_{1,2}$ se protínají v bodě E_2. Následně sestrojíme kolmici l_5 na základnici $x_{1,2}$, která prochází bodem C_1. Přímka l_5 protíná základnici $x_{1,2}$ v bodě C_2.

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 6 - 10)

Bodem S_2 a bodem V_2 vedeme čerchovanou přímku o_2. Přímka o_2 je nárys osy pravidelného šestibokého jehlanu. Bodem S_1 a bodem V_1 vedeme čerchovanou přímku o_1. Přímka o_1 je půdorys osy pravidelného šestibokého jehlanu.

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 11, 12)

Hrany jehlanu V_2A_2, V_2D_2 v nárysně a hrany jehlanu V_1F_1, F_1E_1, E_1D_1, D_1C_1, C_1B_1 a B_1V_1 v půdorysně jsou viditelné a obtáhneme je plnou čarou. V půdorysně se překrývají hrany V_1E_1 a F_1A_1. K bodu, ve kterém se úsečky V_1E_1 a F_1A_1 protínají, přiložíme pravítko s ryskou. Ryska na pravítku splývá se základnicí $x_{1,2}$. Na ordinále (kolmice na základnici) si vyznačíme pomocný bod na úsečce F_2A_2 a pomocný bod na úsečce V_2E_2. Pomocný bod vyznačený na úsečce F_2A_2 leží blíže k základnici $x_{1,2}$ (resp. přímo na ní), oproti pomocnému bodu, který je vyznačený na úsečce V_2E_2. To znamená, že hrana F_1A_1 nebude v půdorysu vidět. Hranu jehlanu F_1A_1 obtáhneme čárkovanou čarou. Následně máme určenou viditelnost i zbylých hran jehlanu v půdorysu. Hrana jehlanu A_1B_1 bude obtažena čárkovaně. Hrana V_1A_1 bude také vyznačena čárkovanou čarou. Hrany jehlanu V_1E_1, V_1D_1 a V_1C_1 budou vytaženy plnou čarou. Tímto máme určenou viditelnost hran jehlanu v půdorysu.

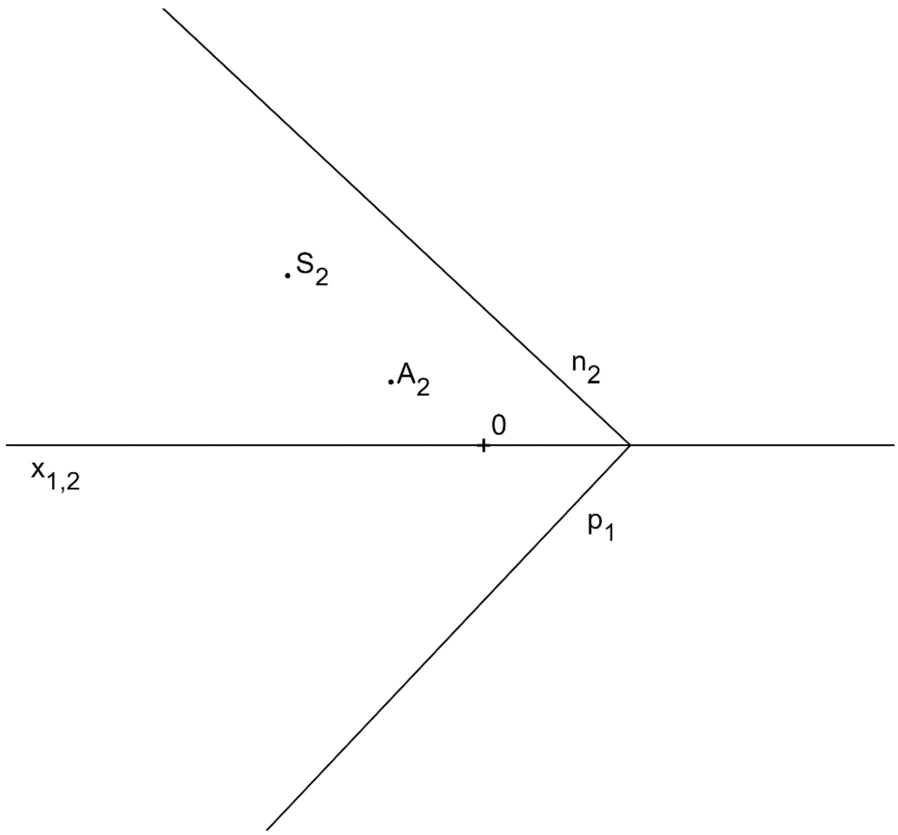
Pro určení viditelnosti hran V_2F_2, V_2B_2, V_2C_2 a V_2E_2 v nárysu se budeme řídit vzájemnou polohou bodů v půdorysu. Konkrétně budeme zkoumat polohou bodů F_1 a B_1 vůči bodu A_1 a bodů C_1 a E_1 vůči bodu D_1. Body A_1 a D_1 jsou v nárysu nejkrajnější body. Bod F_1 se nachází blíže k základnici $x_{1,2}$ než bod A_1. To znamená, že hrana jehlanu V_2F_2 nebude viditelná. Úsečka V_2F_2 bude vytažená čárkovaně. Bod B_1 se nachází dále od základnice $x_{1,2}$ než bod A_1. Hrana jehlanu V_2B_2 bude viditelná. Úsečka V_2B_2 bude obtažená plnou čarou. Bod E_1 se nachází blíže k základnici $x_{1,2}$ než bod D_1. To znamená, že hrana jehlanu V_2E_2 viditelná nebude. Úsečka V_2E_2 bude vytažená čárkovaně. Bod C_1 se nachází dále od základnice $x_{1,2}$ než bod D_1. Hrana jehlanu V_2C_2 bude viditelná a zvýrazníme ji plnou čarou. Tímto máme určenou viditelnost hran jehlanu v nárysu.

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 13)

Úloha 8 je dostupná zde:

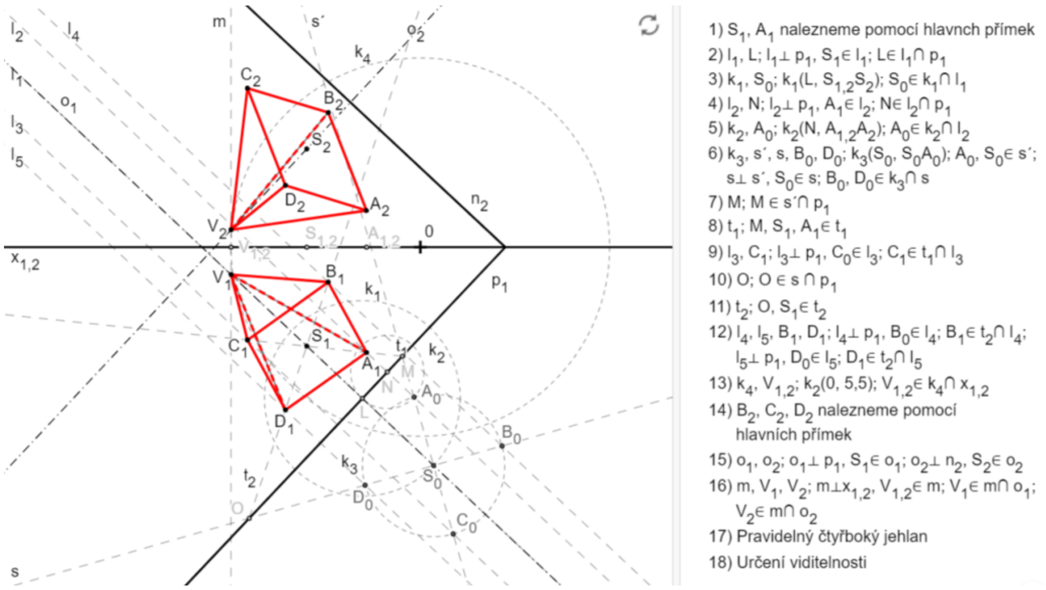
https://www.geogebra.org/m/pfxqdguu#material/zhkfuynq

Úloha 9: V MP sestrojte pravidelný čtyřboký jehlan *ABCDV*, jehož podstava se středem *S* leží v rovině ρ, jsou-li zadané stopy roviny ρ, nárysy bodů *S* a *A*, počátek soustavy souřadnic *0*. Vrchol jehlanu *V* má souřadnice [-5,5, ?, ?]. Určete viditelnost jeho hran.



Obrázek 17: Zadání Úlohy 9

Náhled řešení:



Obrázek 18: Řešení Úlohy 9

Postup konstrukce:

Nejprve potřebujeme zjistit, kde se nachází půdorys bodu *A* a půdorys bodu *S*, abychom mohli otočit rovinu ρ. Po otočení roviny ρ uvidíme čtvercovou podstavu jehlanu ve skutečné velikosti. Téma otáčení roviny v MP dobře popisuje Kargerová (1997, s. 41-43). Urban (1965, s. 184-186) pěkně rozebírá zobrazení mnohostěnů v MP. Bodem S_2 vedeme rovnoběžku h_{2S} se základnicí $x_{1,2}$. Bod, ve kterém protne hlavní přímka h_{2S} nárysnou stopu n_2 roviny ρ, spustíme kolmo na základnici $x_{1,2}$. Tímto spuštěným bodem vedeme rovnoběžku h_{1S} s půdorysnou stopou p_1 roviny ρ. Na přímce h_{1S} a zároveň na ordinále, která prochází bodem S_2, leží půdorys bodu *S*, bod S_1. Ordinála procházející bodem S_2 protíná základnici $x_{1,2}$ v bodě $S_{1,2}$. Bodem A_2 vedeme rovnoběžku h_{2A} se základnicí $x_{1,2}$. Bod, ve kterém protne hlavní přímka h_{2A} nárysnou stopu n_2 roviny ρ, spustíme kolmo na základnici $x_{1,2}$. Tímto spuštěným bodem vedeme rovnoběžku h_{1A} s půdorysnou stopou p_1 roviny ρ. Na přímce h_{1A} a zároveň na ordinále, která prochází bodem A_2, leží půdorys bodu *A*, bod A_1. Ordinála procházející bodem A_2 protíná základnici $x_{1,2}$ v bodě $A_{1,2}$.

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 1)

Nyní můžeme rovinu ρ otočit. Půdorysná stopa p_1 roviny ρ je zároveň osou otáčení. Bodem S_1 vedeme kolmici l_1 na půdorysnou stopu p_1. Přímka l_1 protne půdorysnou stopu p_1 v bodě L. Opíšeme kružnici k_1 kolem bodu L o poloměru $S_2S_{1,2}$. Kružnice k_1 protne kolmici l_1 ve dvou bodech. Jeden z nich si vybereme a označíme ho jako otočený bod S_0. Bodem A_1 vedeme kolmici l_2 na půdorysnou stopu p_1. Přímka l_2 protne půdorysnou stopu p_1 v bodě N. Kolem bodu N opíšeme kružnici k_2 o poloměru $A_2A_{1,2}$. Kružnice k_2 protne kolmici l_2, ve dvou bodech. Zvolíme takový bod, který leží ve stejné polorovině s hraniční přímkou p_1, jako bod S_0 (oba body mají kladnou kótu). Tento bod označíme jako bod A_0.

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 2 - 5)

Podstavou zadaného jehlanu je čtverec *ABCD*. Známe otočený střed čtverce S_0 a jeden jeho otočený vrchol A_0. Bodem A_0 a bodem S_0 vedeme přímku s'. Bodem S_0 vedeme kolmici s na přímku s'. Kolem bodu S_0 opíšeme kružnici k_3 o poloměru A_0S_0. Kružnice k_3 protne přímku s' *v* bodě C_0. Kružnice k_3 protne přímku s v bodech B_0 a D_0. Nyní vidíme podstavu jehlanu ve skutečné velikosti.

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 6)

Průsečíkem přímky s' s půdorysnou stopu p_1 je bod M. Sestrojíme polopřímku MS_1. Bod A_1 leží na polopřímce MS_1. Bodem C_0 vedeme kolmici l_3 na půdorysnou stopu p_1. Přímka l_3 protíná polopřímku MS_1 *v* bodě C_1. Průsečíkem přímky s a půdorysné stopy p_1 je bod O. Sestrojíme polopřímku OS_1. Bodem B_0 vedeme kolmici l_4 na půdorysnou stopu p_1. Následně vedeme bodem D_0 kolmici l_5 na půdorysnou stopu p_1. Přímka l_4 se protíná s polopřímkou OS_1 v bodě B_1. Průsečíkem přímky l_5 a polopřímky OS_1 je bod D_1.

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 7 - 12)

Nyní zjistíme, kde bude ležet vrchol jehlanu V. U něj známe pouze x-ovou souřadnici. Kolem bodu *0* (počátek soustavy souřadnic) opíšeme kružnici k_4 o poloměru 5,5. Kružnice k_4 protne základnici $x_{1,2}$ ve dvou bodech. Jelikož zadaná x-ová souřadnice vrcholu V je záporná, zajímá nás pouze průsečík kružnice k_4 a základnice $x_{1,2}$ nalevo od počátku soustavy souřadnic. Tento průsečík kružnice k_4 a základnice $x_{1,2}$ je bod $V_{1,2}$.

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 13)

Následně pomocí hlavních přímek nalezneme body B_2, C_2 a D_2. Bodem B_1 vedeme rovnoběžku h_{1B} s půdorysnou stopou p_1. Rovnoběžka h_{1B} protne základnici $x_{1,2}$ v bodě, který přeneseme pomocí ordinály na nárysnou stopu n_2. Následně vedeme tímto bodem rovnoběžku h_{2B} se základnicí $x_{1,2}$. Bod B_2 leží na přímce h_{2B} a zároveň na ordinále, která prochází bodem B_1. Bodem C_1 vedeme rovnoběžku h_{1C} s půdorysnou stopou p_1. Rovnoběžka h_{1C} protne základnici $x_{1,2}$ v bodě, který přeneseme pomocí ordinály na nárysnou stopu n_2. Následně vedeme tímto bodem rovnoběžku h_{2C} se základnicí $x_{1,2}$. Bod C_2 leží na přímce h_{2C} a zároveň na ordinále, která prochází bodem C_1. Bodem D_1 vedeme rovnoběžku h_{1D} s půdorysnou stopou p_1. Rovnoběžka h_{1D} protne základnici $x_{1,2}$ v bodě, který přeneseme pomocí ordinály na nárysnou stopu n_2. Následně vedeme tímto bodem rovnoběžku h_{2D} se základnicí $x_{1,2}$. Bod D_2 leží na přímce h_{2D} a zároveň na ordinále, která prochází bodem D_1.

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 14)

Pro zjištění půdorysu a nárysu bodu V potřebujeme sestrojit osu jehlanu. Bodem S_1 vedeme kolmici o_1 na p_1. Přímka o_1 je půdorys osy o jehlanu. Následně také vedeme kolmici o_2 bodem S_2. Přímka o_2 je nárys osy o jehlanu. Bodem $V_{1,2}$ vedeme kolmici m na základnici $x_{1,2}$. Přímka m protne přímku o_1 v bodě V_1. Přímka m protne přímku o_2 v bodě V_2. Nyní můžeme sestrojit v půdorysu i v nárysu všechny hrany hranolu $ABCDV$.

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 15 - 17)

Jako poslední krok nám zbývá určit viditelnost hran hranolu $ABCDV$ v půdorysu a v nárysu. V nárysu vyznačíme plnou čarou hrany jehlanu C_2V_2, V_2A_2, A_2B_2 a B_2C_2. V půdorysu budou určitě viditelné hrany jehlanu V_1C_1, C_1D_1, D_1A_1 a A_1V_1. Ty také obtáhneme plnou čarou. Pro určení viditelnosti zbylých hran jehlanu v nárysu se budeme řídit polohou jeho hran v půdorysu. V nárysu se překrývají hrany V_2B_2 a C_2D_2. Jedna z těchto dvou hran určitě bude viditelná. K bodu, kde se nám tyto úsečky V_2B_2 a C_2D_2 překrývají, přiložíme pravítko s ryskou. Ryska na pravítku splývá se základnicí $x_{1,2}$. Na ordinále si vyznačíme pomocný bod na úsečce V_1B_1 a následně si vyznačíme pomocný bod na úsečce C_1D_1. Nyní porovnáme polohu právě sestrojených pomocných bodů vzhledem k základnici $x_{1,2}$. Pomocný bod, který leží na úsečce V_1B_1 se nachází blíže k základnici $x_{1,2}$ než pomocný bod na úsečce C_1D_1. To znamená, že úsečka V_2B_2 nebude v nárysu viditelná. Hranu jehlanu V_2B_2 vyznačíme čárkovaně. Nyní máme jasně určenou viditelnost i zbylých hran v nárysu. Hrany C_2D_2, D_2A_2 a V_2D_2 budou viditelné a budou vytaženy plnou čarou.

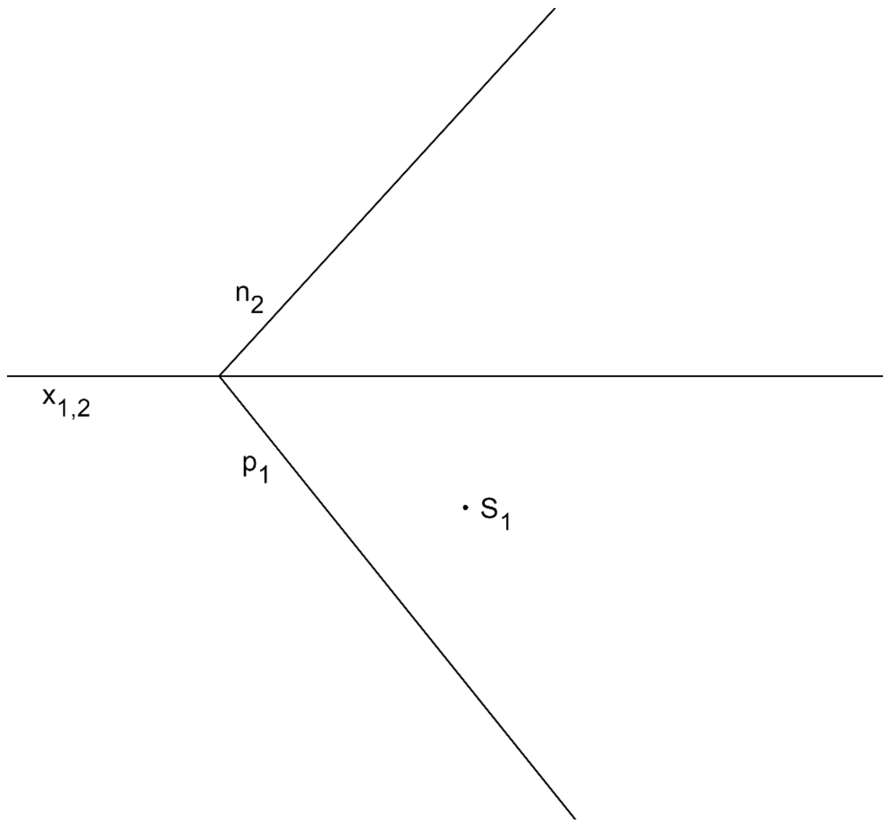
V půdorysu se překrývají hrany V_1A_1 a C_1B_1. Jedna z nich určitě bude viditelná. K bodu, kde se nám úsečky V_1A_1 a C_1B_1 překrývají, přiložíme pravítko s ryskou. Ryska na pravítku opět musí splývat se základnicí $x_{1,2}$. Pomocí ordinály si vyznačíme pomocný bod na úsečce V_2A_2 a následně i pomocný bod na úsečce C_2D_2. Nyní opět porovnáme polohu těchto dvou naposledy sestrojených bodů vzhledem k základnici $x_{1,2}$. Pomocný bod, který leží na úsečce V_2A_2 je k základnici $x_{1,2}$ blíže než pomocný bod na úsečce C_2D_2. To znamená, že hrana V_1A_1 v půdorysu viditelná nebude. Obtáhneme proto hranu jehlanu V_1A_1 čárkovaně. Nyní máme opět jasně danou viditelnost zbylých hran jehlanu v půdorysu. Hrana V_1D_1 nebude v půdorysu viditelná. Hrana B_1C_1 v půdorysu viditelná bude.

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 18)

Úloha 9 je dostupná zde:

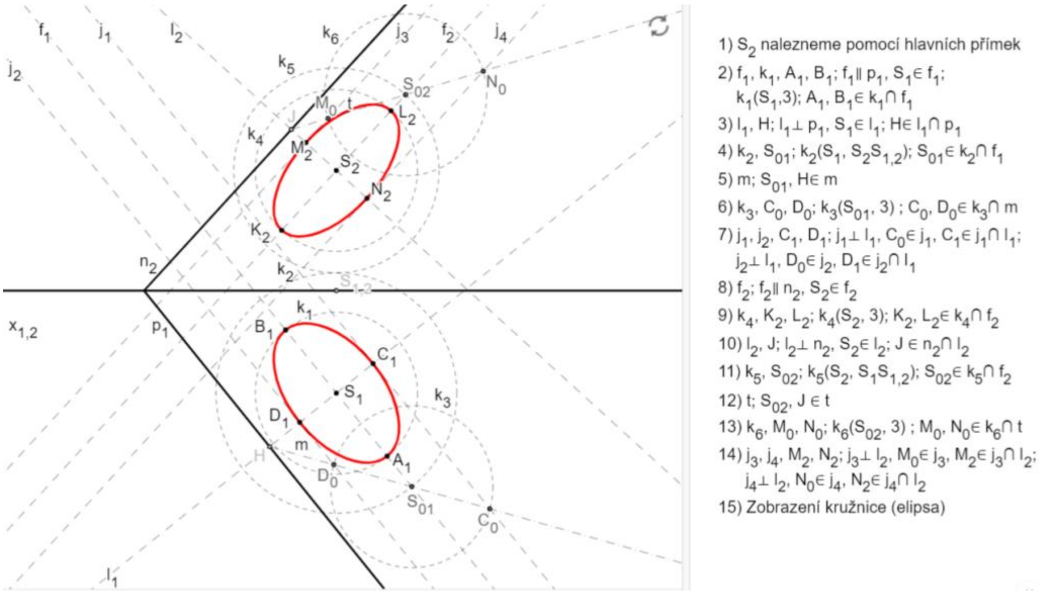
https://www.geogebra.org/m/pfxqdguu#material/r7qdaxrq

Úloha 10: V MP zobrazte průmět kružnice, která leží v rovině ρ, jsou-li zadané stopy roviny ρ, půdorys středu kružnice S_1 a poloměr kružnice r = 3.



Obrázek 19: Zadání Úlohy 10

Náhled řešení:



Obrázek 20: Řešení Úlohy 10

Postup konstrukce:

Drábek et al. (1978, s. 96-97) pěkně vysvětluje téma zobrazení kružnice, která leží v obecné rovině, v MP. Nejdříve najdeme nárys středu kružnice *S*, abychom mohli otáčet rovinu ρ. Bodem S_1 vedeme rovnoběžku f_1 s půdorysnou stopou p_1. Bod, ve kterém protne přímka f_1 základnici $x_{1,2}$ přeneseme pomocí kolmice k základnici $x_{1,2}$ na nárysnou stopu n_2. Tímto bodem vedeme rovnoběžku h_2 se základnicí, $x_{1,2}$. Průsečíkem ordinály procházející bodem S_1 a přímky h_2 je bod S_2. Průsečíkem ordinály procházející bodem S_1 a základnice $x_{1,2}$ je bod $S_{1,2}$.

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 1)

Kolem bodu S_1 opíšeme kružnici k_1 o poloměru 3. Kružnice k_1 protne přímku f_1 v bodech A_1 a B_1. Body A_1 a B_1 jsou hlavními vrcholy elipsy. Půdorysná ani nárysná stopa roviny ρ není kolmá na základnici. Zadaná kružnice se proto v půdorysu i v nárysu zobrazí jako elipsa. Následně vedeme bodem S_1 kolmici l_1 na půdorysnou stopu p_1. Přímka l_1 protne půdorysnou stopu p_1 v bodě *H*.

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 2, 3)

Nyní budeme otáčet rovinu ρ, abychom viděli zadanou kružnici ve skutečné velikosti. Osou otáčení je v tomto případě přímka p_1. Kolem bodu S_1 opíšeme kružnici k_2 o poloměru $S_2S_{1,2}$. Kružnice k_2 protne přímku f_1 ve dvou bodech. Jeden z nich si vybereme a označíme ho jako bod S_{01}. Sestrojíme polopřímku HS_{01}. Kolem bodu S_{01} opíšeme kružnici k_3 o poloměru 3. Kružnice k_3 protíná polopřímku HS_{01} ve dvou bodech. Jeden z nich označíme jako bod C_{01}, druhý označíme jako bod D_{01}. Následně vedeme bodem C_{01} kolmici j_1 na přímku l_1. Průsečíkem přímky j_1 a přímky l_1 je bod C_1. Bodem D_{01} vedeme kolmici j_2 na přímku l_1. Bod, ve kterém přímka j_2 protne přímku l_1, je bod D_1. Body C_1 a D_1 jsou vedlejšími vrcholy elipsy.

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 4 - 7)

Hlavní a vedlejší vrcholy elipsy v půdorysu už známe. Můžeme se tedy soustředit na nalezení hlavních a vedlejších vrcholů elipsy v nárysu. Bodem S_2 vedeme rovnoběžku f_2 s nárysnou stopou n_2. Kolem bodu S_2 opíšeme kružnici k_4 o poloměru 3. Kružnice k_4 protíná přímku f_2 ve dvou bodech. Jeden z nich označíme jako bod K_2 a druhý jako bod L_2. Body K_2 a L_2 jsou hlavními vrcholy elipsy. Následně vedeme bodem S_2 kolmici l_2 na půdorysnou stopu n_2. Průsečíkem přímky l_2 a půdorysné stopy n_2 bod J.

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 8 - 10)

Nyní budeme opět otáčet rovinu ρ. Tentokrát je osou otáčení přímka n_2. Kolem bodu S_2 opíšeme kružnici k_5 o poloměru $S_1S_{1,2}$. Kružnice k_5 protne přímku f_2 ve dvou bodech. Jeden z nich si vybereme a nazveme ho bodem S_{02}. Sestrojíme polopřímku JS_{02}. Kolem bodu S_{02} opíšeme kružnici k_6 o poloměru 3. Body, ve kterých kružnice k_6 protne polopřímku JS_{02} označíme jako body M_{02} a N_{02}. Následně bodem M_{02} vedeme kolmici j_3 na přímku l_2. Průsečíkem přímky l_2 a přímky j_3 je bod M_2. Bodem N_{02} vedeme kolmici j_4 na přímku l_2. Přímka j_3 protíná přímku l_2 v bodě N_2.

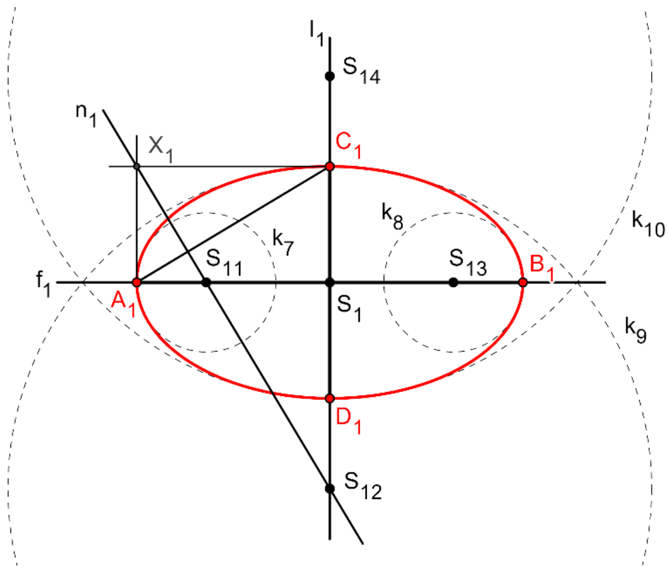
(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 11 - 14)

Již známe hlavní a vedlejší vrcholy elipsy v půdorysu i v nárysu. Elipsu můžeme sestrojit pomocí hyperoskulačních kružnic nebo ji můžeme načrtnout od ruky. Téma elipsy je pěkně vysvětluje Pomykalová (2010, s. 36-46).

Konstrukce elipsy pomocí hyperoskulačních kružnic:

Sestrojíme trojúhelník $A_1S_1C_1$. Trojúhelník $A_1S_1C_1$ doplníme na obdélník $A_1S_1C_1X_1$. Bodem X_1 vedeme kolmici n_1 na úsečku A_1C_1. Kolmice n_1 protne přímku f_1 v bodě S_{11} a přímku l_1 v bodě S_{12}. Podle středové souměrnosti se středem S_1 sestrojíme obrazy bodů S_{11} a S_{12}. Obraz bodu S_{11} označíme jako bod S_{13}, obraz bodu S_{12} označíme jako bod S_{14}. Následně sestrojíme kružnici k_7 se středem S_{11} a poloměrem $S_{11}A_1$. Opíšeme kružnici k_8 se středem S_{13} a poloměrem $S_{13}B_1$. Opíšeme kružnici k_9 kolem bodu S_{12} o poloměru $S_{12}C_1$. Sestrojíme kružnici k_{10} se středem v bodě S_4 o poloměru $S_{14}D_1$. Sestrojíme trojúhelník $L_2S_2N_2$. Trojúhelník $L_2S_2N_2$ doplníme na obdélník $L_2S_2N_2X_2$. Bodem X_2 vedeme kolmici n_2 na úsečku L_2N_2. Kolmice n_2 protne přímku f_2 v bodě S_{21} a přímku l_2 v bodě S_{22}. Podle středové souměrnosti se středem S_2 sestrojíme obrazy bodů S_{21} a S_{22}. Obraz bodu S_{21} označíme jako bod S_{23}, obrazem bodu S_{22} je bod S_{24}. Následně sestrojíme kružnici k_{11} se středem S_{21} a poloměrem $S_{21}L_2$. Opíšeme kružnici k_{12} se středem S_{23} a poloměrem $S_{23}K_2$. Opíšeme kružnici k_{13} kolem bodu S_{22} o poloměru $S_{22}M_2$. Sestrojíme kružnici k_{14} se středem v bodě S_{24} o poloměru $S_{24}N_2$.

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 15)

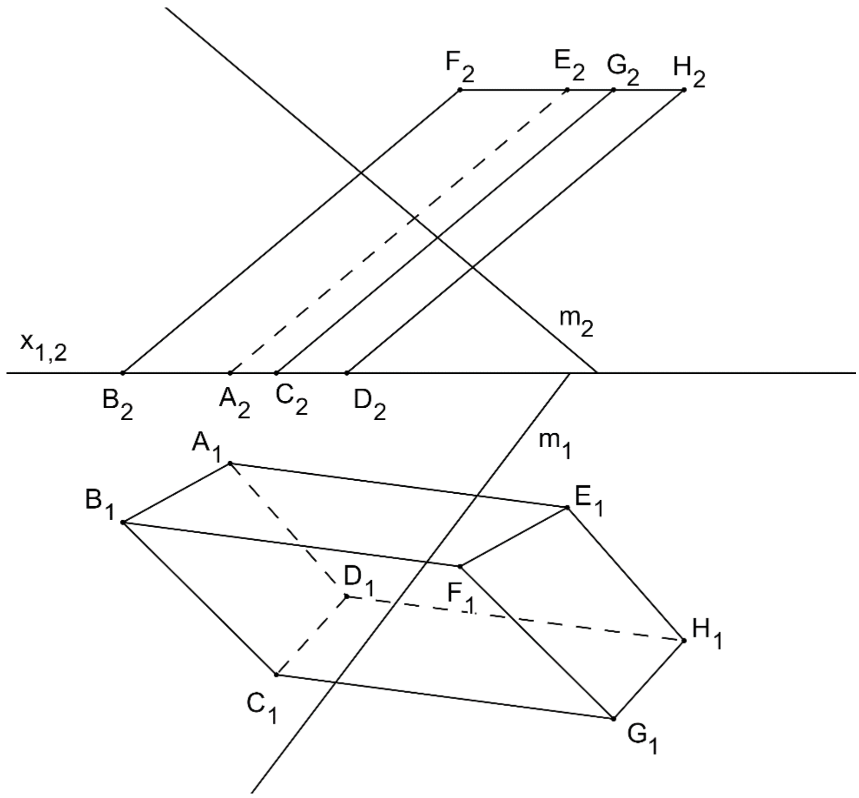


Obrázek 21: Hyperoskulační kružnice

Úloha 10 je dostupná zde:

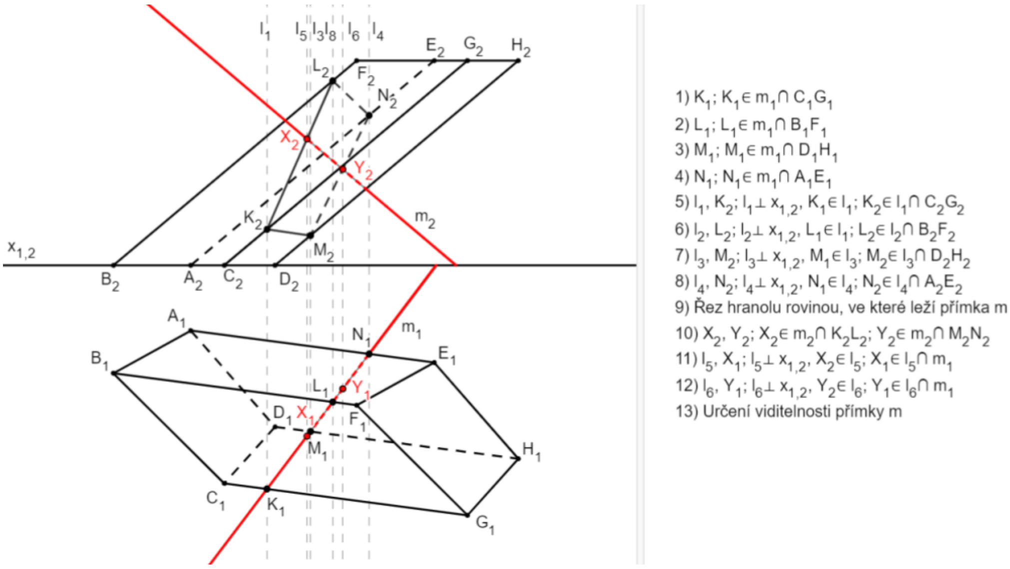
https://www.geogebra.org/m/pfxqdguu#material/rpmxfepk

Úloha 11: V MP určete viditelnost přímky *m*, která prochází hranolem *ABCDEFGH*, je-li zadán hranol *ABCDEFGH* a přímka *m*. Určete body *X* a *Y*, ve kterých přímka protíná stěny hranolu.



Obrázek 22: Zadání Úlohy 11

Náhled řešení:



Obrázek 23: Řešení Úlohy 11

Postup konstrukce:

Řešení obdobné úlohy najdeme podrobně vysvětlené v příkladu 8.13 na str. 216 v (Pomykalová 2010). Kolmá promítací rovina přímky m_1 je zároveň řeznou rovinou hranolu. V půdorysu řezná rovina splývá s přímkou m_1. Nejdříve potřebujeme jistit, v jakých bodech protíná řezná rovina hrany hranolu. Řezná rovina protíná v bodě K_1 hranu hranolu C_1G_1. V bodě L_1 protíná řezná rovina hranu B_1F_1. V bodě M_1 protíná řezná rovina hranu D_1H_1. Bod N_1 je průsečíkem řezné roviny a hrany A_1E_1.

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 1 – 4)

Vedeme kolmici l_1 bodem K_1 na základnici $x_{1,2}$. Kolmice l_1 protne úsečku C_2G_2 v bodě K_2. Vedeme kolmici l_2 na základnici $x_{1,2}$ bodem L_1. Průsečíkem přímky l_2 a úsečky B_2F_2 bod L_2. Následně vedeme bodem M_1 kolmici l_3 na základnici $x_{1,2}$. V bodě M_2 se protíná přímka l_3 a úsečka D_2H_2. Bodem N_1 vedeme kolmici l_4 na základnici $x_{1,2}$. Průsečíkem přímky l_4 a úsečky A_2E_2 je bod N_2. Tyto body určují řez hranolu v nárysu řeznou rovinou.

Sestrojíme úsečky K_2L_2, L_2N_2, N_2M_2 a M_2K_2. Úsečky L_2N_2 a N_2M_2 budou vytažené čárkovanou čarou, protože leží v neviditelných stěnách hranolu. Úsečky K_2L_2 a M_2K_2

budou vytaženy plnou čarou, jelikož leží ve viditelných stěnách hranolu. Tímto jsme získali řez hranolem *ABCDEFGH*.

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 5 – 9)

Nyní určíme body, ve kterých přímka m protíná stěny hranolu. Přímka m_2 protne úsečku N_2M_2 v bodě Y_2. Přímka m_2 protne úsečku K_2L_2 v bodě X_2. Následně vedeme kolmici l_5 na základnici $x_{1,2}$, která prochází bodem X_2. Průsečíkem přímky l_5 a přímky m_1 je bod X_1. Bodem Y_2 vedeme kolmici l_6 na základnici $x_{1,2}$. Přímka l_6 a přímka m_1 se protínají v bodě Y_1.

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 10 – 12)

Viditelnost přímky m_2 v nárysu určíme následovně. Nejdříve zjistíme, zda se body X_2 a Y_2 nachází ve viditelných stěnách hranolu. Bod X_2 leží ve viditelné stěně hranolu. Bod Y_2 se nachází v stěně hranolu, která není viditelná. Přímka m_2 bude tedy obtažená plnou čarou od základnice $x_{1,2}$ až k hraně hranolu D_2H_2. Od úsečky D_2H_2 bude obtažená čárkovaně až k bodu X_2. Od bodu X_2 bude přímka m_2 opět viditelná. To znamená, že od bodu X_2 bude obtažena plnou čarou.

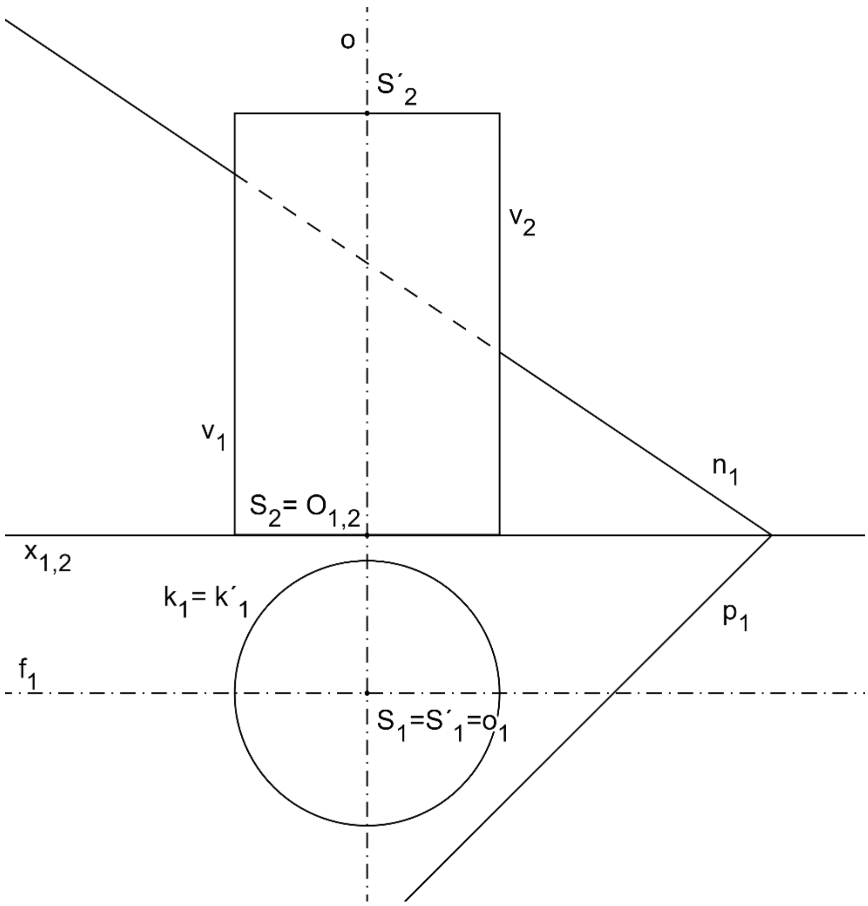
Nyní určíme viditelnost přímky m_1 v půdorysu. V půdorysu bod X_1 náleží úsečce K_1L_1. Úsečka K_1L_1 se nachází ve viditelné stěně hranolu. Bod Y_1 náleží úsečce M_1N_1. Úsečka M_1N_1 se nachází v neviditelné stěně hranolu. Přímka m_1 bude obtažená plnou čarou od základnice $x_{1,2}$ k bodu N_1. Od bodu N_1 bude přímka m_1 obtažena čárkovanou čarou až k bodu X_1. Od bodu X_1 bude přímka m_1 obtažena plnou čarou.

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 13)

Úloha 11 je dostupná zde:

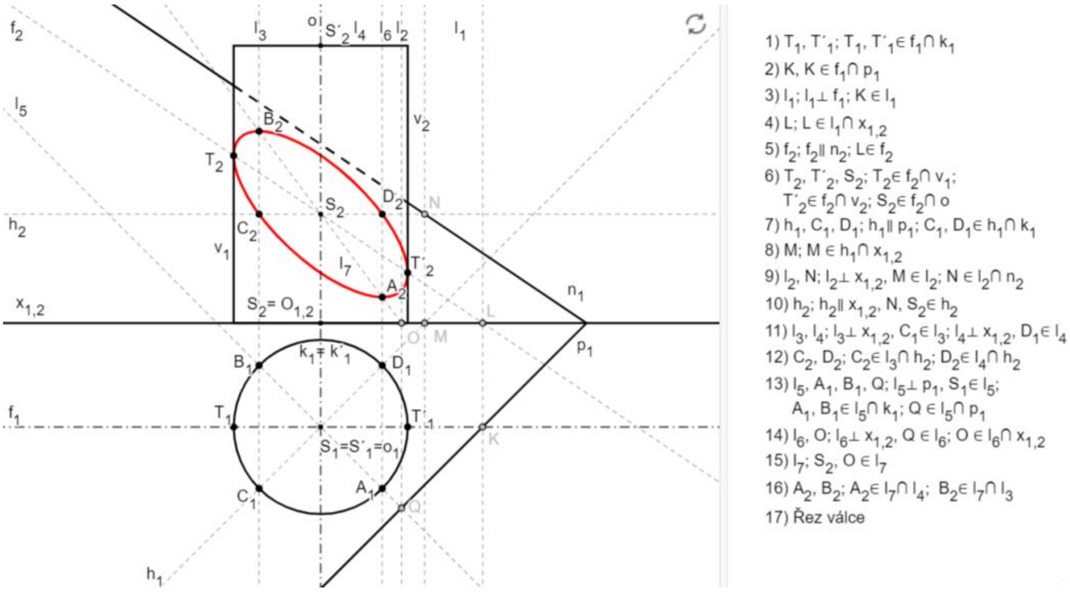
https://www.geogebra.org/m/pfxqdguu#material/zmyu253c

Úloha 12: V MP narýsujte řez válce, je-li dán válec, jehož podstava leží v půdorysně a stopy řezné roviny ρ.



Obrázek 24: Zadání Úlohy 12

Náhled řešení:



Obrázek 25: Řešení Úlohy 12

Postup konstrukce:

Řešení obdobné úlohy je dobře vysvětleno v příkladu 9.19 na str. 266 v (Pomykalová 2010). Řezem válce bude elipsa, jelikož půdorysná ani nárysná stopa řezné roviny ρ není kolmá na základnici $x_{1,2}$. Nejdříve zjistíme body dotyku T_2 a T_2'. Úsečky v_1 a v_2 budou tečnami elipsy s body dotyku T_2 a T_2'. Přímka f_1 je rovnoběžná se základnicí $x_{1,2}$. Přímka f_1 protíná kružnici k_1 v bodě T_1 a v bodě T_1'. Přímka f_1 protíná půdorysnou stopu p_1 v bodě K. Bodem K vedeme kolmici l_1 na základnici $x_{1,2}$. Průsečíkem základnice $x_{1,2}$ a přímky l_1 je bod L. Bodem L vedeme rovnoběžku f_2 s nárysnou stopou n_2. Přímka f_2 protne stěnu válce v_2 v bodě T_2'. Bodem, ve kterém přímka f_2 protne stěnu válce v_1, je bod T_2. Bodem T_2 a bodem T_2' bude procházet řez válce. Průsečíkem přímky f_2 a osy válce o_2 je bod S_2. Bod S_2 je středem elipsy.

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 1 - 6)

Následně vedeme bodem S_1 přímku h_1 rovnoběžně s půdorysnou stopou p_1. Přímka h_1 protne kružnici k_1 ve dvou bodech, v bodě C_1 a v bodě D_1. Přímka h_1 zároveň protíná základnici $x_{1,2}$ v bodě M. Bodem M vedeme kolmici l_2 na základnici $x_{1,2}$. Průsečíkem přímky l_2 a nárysné stopy n_2 roviny ρ je bod N. Bodem N vedeme rovnoběžku

h_2 se základnicí $x_{1,2}$. Přímka h_2 prochází zároveň bodem S_2. Dále vedeme bodem C_1 kolmici l_3 na základnici $x_{1,2}$. Průsečíkem přímky l_3 a přímky h_2 je bod C_2. Následně vedeme bodem D_1 kolmici l_4 na základnici $x_{1,2}$. Přímka l_4 a přímka h_2 se protnou v bodě D_2. Výsledná elipsa bude procházet body C_2 a D_2.

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 7 - 12)

Nyní sestrojíme kolmici l_5 na přímku h_1, která prochází bodem S_1. Přímka l_5 protne kružnici k_1 ve dvou bodech, v bodech A_1 a B_1. Přímka l_5 protíná půdorysnou stopu p_1 roviny ρ v bodě Q. Bodem Q vedeme kolmici l_4 na základnici $x_{1,2}$. Bod, ve kterém se přímka l_4 a základnice $x_{1,2}$ protnou, je bod O. Sestrojíme polopřímku OS_2. Bodem A_1 vedeme kolmici l_6 na základnici $x_{1,2}$. Průsečíkem přímky l_6 a polopřímky OS_2 je bod A_2. Bodem B_1 vedeme kolmici l_3 na základnici $x_{1,2}$. Průsečíkem přímky l_3 a polopřímky OS_2 je bod B_2. Výsledná elipsa bude procházet také body A_2 a B_2.

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 12 - 16)

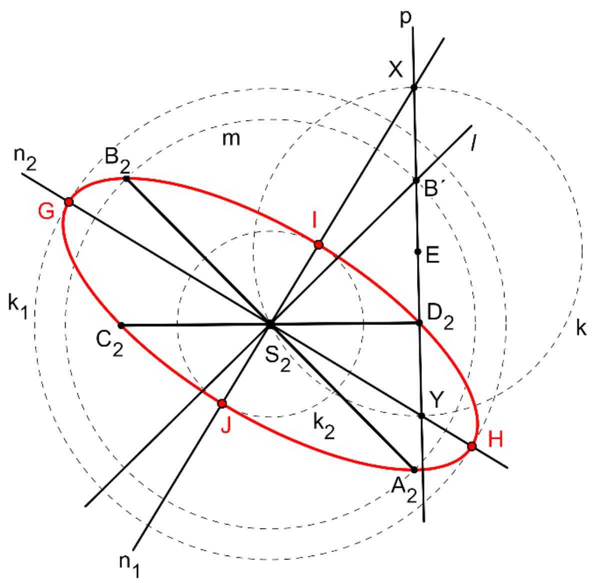
Nyní známe body, kterými elipsa prochází. Elipsu můžeme sestrojit pomocí Rytzovy konstrukce nebo ji můžeme načrtnout od ruky. Rytzovu konstrukci elipsy podrobně popisuje Pomykalová (2010, s. 50-52).

Rytzova konstrukce elipsy:

Bod S_2 je středem úseček A_2B_2 a C_2D_2. Body A_2, B_2, C_2, D_2 náleží elipse. Bodem S_2 vedeme kolmici na úsečku A_2B_2. Sestrojíme kružnici m se středem S_2 a poloměrem A_2S_2. Kružnice m protne kolmici l ve dvou bodech. Jeden z nich si vybereme a označíme ho jako bod B'. Body B' a D_2 vedeme přímku p. Následně sestrojíme střed úsečky $B'D$, který označíme bodem E. Sestrojíme kružnici k se středem E a poloměrem ES_2. Kružnice k protne přímku p ve dvou bodech, v bodě X a v bodě Y. Bodem X a bodem S_2 vedeme přímku n_1, která je zároveň vedlejší osou elipsy. Body Y a S_2 vedeme přímku n_2, která je zároveň hlavní osou elipsy. Vzdálenost mezi body X a D_2 je rovna velikosti hlavní poloosy a, vzdálenost mezi body D_2 a Y je rovna velikosti vedlejší poloosy b. Sestrojíme kružnici k_1 se středem S_2 o poloměru a. Kružnice k_1 protne přímku n_2 v bodech G a H. Body G a H jsou hlavními vrcholy elipsy. Opíšeme kružnici k_2 kolem bodu S_2 o poloměru b. Kružnice k_2 protne přímku n_1 v bodech I a J. Body I a J jsou vedlejšími vrcholy elipsy. Nyní můžeme elipsu sestrojit pomocí hyperoskulačních kružnic.

Sestrojíme trojúhelník GS_2I. Trojúhelník GS_2I doplníme na obdélník GS_2IZ. Bodem Z vedeme kolmici c_1 na úsečku GI. Bodem S_2 vedeme kolmici d_1 na přímku f_2. Kolmice c_1 protne přímku f_2 v bodě S_{21} a přímku d_1 v bodě S_{22}. Podle středové souměrnosti se středem S_2 sestrojíme obrazy bodů S_{21} a S_{22}. Obraz bodu S_{21} označíme jako bod S_{23}, obrazem bodu S_{22} je bod S_{24}. Následně sestrojíme kružnici k_2 se středem S_{21} a poloměrem $S_{21}G$. Opíšeme kružnici k_3 se středem S_{23} a poloměrem $S_{13}H$. Opíšeme kružnici k_4 kolem bodu S_{22} o poloměru $S_{12}I$. Sestrojíme kružnici k_5 se středem v bodě S_{24} o poloměru $S_{24}J$.

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 17)



Obrázek 26: Rytzova konstukce elipsy

Úloha 12 je dostupná zde:

https://www.geogebra.org/m/pfxqdguu#material/bke2e8ea

5 ZÁVĚR

Sbírka je vytvořena v podobě GeoGebra knihy, která vytváří jednotné prostředí pro procházení jednotlivých úloh. S textem práce je propojena pomocí hypertextových odkazů a QR kódů. V každém appletu se nachází geometrický postup konstrukce. Pod každým appletem je k dispozici slovní postup, který je tvořen v souladu s geometrickým postupem konstrukce. Aby byl student schopný rýsovat ručně a ne pouze v počítačovém programu, nachází se u každé úlohy PDF soubor se zadáním téže úlohy. Tento soubor je určený k vytištění a ručnímu rýsování.

Práce má větší variabilitu použití, nabízí různé formy materiálů a přístupu k řešení daných úloh. Student může využít hypertextových odkazů a QR kódů. Pomocí nich vyhledá danou úlohu v GeoGebra knize, kde může využít možnost spuštění animace postupu formou krok za krokem. Dále má student možnost vytištění PDF souborů a rýsovat ručně. Student může také využít samotnou bakalářskou práci. V té má k dispozici zadání dané úlohy, náhled jejího řešení a příslušný slovní postup. Na tuto práci by se dalo navázat rozšířením sbírky o témata pravoúhlé axonometrie a kuželoseček. V rámci didaktického výzkumu by se mohlo zkoumat, jakou formu materiálů studenti nejvíce využívají a jak se jim s jednotlivými typy materiálů pracuje.

Tato práce může studentům pomoci porozumět řešení určitých úloh z deskriptivní geometrie a rozvinout jejich schopnost rýsování přímo na papír. Také může u studentů ovlivnit vnímání 3D prostoru a objektů v něm.

Vytváření sbírky bylo pro mě osobně přínosem. Především jsem se zdokonalila v práci s programem GeoGebra.

6 SEZNAM LITERATURY A INTERNETOVÝCH ODKAZŮ

DOLEŽAL, Jiří. *Základy geometrie a Geometrie* [online]. 2007. [cit. 9.6.2023]. Dostupné z http://mdg.vsb.cz/portal/dg/StudOpory/Obsah.html

GEOGEBRA. About GeoGebra [online]. 2023a. [cit. 28.4.2023]. Dostupné z: https://www.geogebra.org/about

GEOGEBRA. *GeoGebra Návody* [online]. 2023b. [cit. 28.4.2023]. Dostupné z: https://www.geogebra.org/a/14?lang=cs

GEOGEBRA. *O programu GeoGebra* [online]. 2023c. [cit. 28.4.2023]. Dostupné z: https://www.geogebra.org/

HAŠEK, Roman. *Geometrie III* [online]. 2022. [cit. 19.6.2023]. Dostupné z: http://home.pf.jcu.cz/~hasek/7G3/Geometrie_III__2022_9.pdf

KARGEROVÁ, Marie. *Deskriptivní geometrie pro technické školy vysoké, vyšší a střední*. Praha: Monatex, 1997. IBSN 80-85780-68-2

KUŘINA, František. *Umění vidět v matematice*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1989. IBSN 80-04-23753-3

KUŘINA, František. *10 pohledů na geometrii*. Praha: Matematický ústav Akademie věd České republiky, 1996. IBSN 80-85823-21-7

KUŘINA, František. *10 geometrických transformací*. Praha: Prometheus, 2002. IBSN 80-7196-2317

POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia: stereometrie*. 2. vyd. Praha: Prometheus, 1995. ISBN 80-7196-079-9

POMYKALOVÁ, Eva. *Deskriptivní geometrie pro střední školy.* 1. vyd. Praha: Prometheus, 2010. IBSN 978-80-7196-400-1

ŘÍMÁKOVÁ, Sabina. *Řešení vybraných úloh z deskriptivní geometrie* [online]. 2023. [cit. 25.6.2023]. Dostupné z: https://www.geogebra.org/m/pfxqdguu

URBAN, Alois. *Deskriptivní geometrie*. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1965. Bez IBSN

DRÁBEK, Karel; HARANT, František; SETZER, Ota. *Deskriptivní geometrie I*. Praha: Nakladatelství technické literatury, 1978. Bez IBSN

VORÁČOVÁ, Šárka a kol. *Atlas geometrie. Geometrie krásná a užitečná*. Praha: Academia, 2012. IBSN 978-80-200-1575-4

7 SEZNAM OBRÁZKŮ