



Pedagogická  
fakulta  
Faculty  
of Education

Jihočeská univerzita  
v Českých Budějovicích  
University of South Bohemia  
in České Budějovice

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích  
Pedagogická fakulta  
Katedra matematiky

Bakalářská práce

# Řešení vybraných úloh z deskriptivní geometrie

Vypracovala: Sabina Římková  
Vedoucí práce: Mgr. Roman Hašek, Ph.D.

České Budějovice 2023

## **Prohlášení**

Prohlašuji, že svoji bakalářskou práci na téma Řešení vybraných úloh z deskriptivní geometrie jsem vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

Prohlašuji, že v souladu s § 47b zákona č. 111/1998 Sb. v platném znění souhlasím se zveřejněním své bakalářské práce, a to v nezkrácené podobě, elektronickou cestou ve veřejně přístupné části databáze STAG provozované Jihočeskou univerzitou v Českých Budějovicích na jejích internetových stránkách, a to se zachováním mého autorského práva k odevzdanému textu této kvalifikační práce. Souhlasím dále s tím, aby toutéž elektronickou cestou byly v souladu s uvedeným ustanovením zákona č. 111/1998 Sb. zveřejněny posudky školitele a oponentů práce i záznam o průběhu a výsledku obhajoby kvalifikační práce. Rovněž souhlasím s porovnáním textu mé kvalifikační práce s databází kvalifikačních prací Theses.cz provozovanou Národním registrem vysokoškolských kvalifikačních prací a systémem na odhalování plagiátů.

V Českých Budějovicích 3. července 2023

.....

(podpis)

## **Poděkování**

Ráda bych tímto poděkovala svému vedoucímu bakalářské práce panu Mgr. Romanu Haškovi, Ph.D. za odborné vedení, trpělivost, ochotu a cenné rady.

## **Abstrakt**

Cílem této bakalářské práce je vytvoření sbírky řešených úloh z deskriptivní geometrie. Stěžejní částí mé práce je sbírka úloh, která je vytvořena v programu GeoGebra. Ta je propojena s textem práce pomocí hypertextového odkazu a QR kódu. Sbíрка obsahuje celkem dvanáct řešených úloh, kdy ke každé z nich je přiložen postup řešení a PDF soubor určený k vytištění a ručnímu rýsování. Sbíрка bude sloužit především k podpoře kurzu deskriptivní geometrie v bakalářském studiu matematiky, mohla by však najít uplatnění i na středních školách ve výuce deskriptivní geometrie a stereometrie.

## **Abstract**

The aim of this bachelor's thesis is to create a collection of solved problems in descriptive geometry. The core part of my work is a collection of problems created in the GeoGebra software. It is linked to the text of the thesis through a hypertext link and a QR code. The collection includes a total of 12 solved problems, each accompanied by a solution procedure and a PDF file intended for printing and manual drawing. The collection will primarily serve to support the course of descriptive geometry in the Bachelor's degree program in Mathematics at the Faculty of Education. However, it could also be useful in high schools for teaching descriptive geometry and solid geometry.

## Obsah

1 ÚVOD .....	6
2 REŠERŠE ZDROJŮ .....	8
2.1 Učebnice .....	8
2.2 Internetové zdroje .....	8
3 PROGRAM GEOGEBRA PRO VÝUKU GEOMETRIE .....	9
3.1 GeoGebra .....	9
3.2 Využití programu GeoGebra .....	9
4 ŘEŠENÍ VYBRANÝCH ÚLOH Z DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE .....	11
4.1 Kótované promítání .....	12
Úloha 1 .....	12
Úloha 2 .....	16
Úloha 3 .....	19
Úloha 4 .....	22
Úloha 5 .....	25
Úloha 6 .....	28
4.2 Mongeovo promítání .....	31
Úloha 7 .....	31
Úloha 8 .....	34
Úloha 9 .....	38
Úloha 10 .....	43
Úloha 11 .....	48
Úloha 12 .....	52
5 ZÁVĚR .....	57
6 SEZNAM LITERATURY A INTERNETOVÝCH ODKAZŮ .....	58
7 SEZNAM OBRÁZKŮ .....	60

# 1 ÚVOD

Tato bakalářská práce přináší sbírku řešených úloh z deskriptivní geometrie. Konkrétně obsahuje dvanáct různých úloh z oblasti kótovaného a Mongeova promítání. Toto téma jsem si vybrala, jelikož jsem zde mohla zúročit své zkušenosti z hodin deskriptivní geometrie na střední škole.

Bakalářská práce je členěna do tří kapitol. První kapitola se věnuje konkrétním učebnicím a internetovým odkazům, které jsem využívala k psaní této práce. Dále jsou zde uvedena témata, která jsem v těchto zdrojích vyhledávala.

Ve druhé kapitole představuji software GeoGebra a možnosti jeho využívání při tvorbě interaktivních materiálů a využití při výuce geometrie. Součástí této kapitoly je také ukázka vybraných výukových materiálů tvořených právě v tomto programu. Tyto materiály jsou propojené s textem práce pomocí QR kódu a klasického hypertextového odkazu.

Obsahem třetí kapitoly je vlastní sbírka řešení vybraných úloh z deskriptivní geometrie. Sbíрка je tvořena z celkem dvanácti různých úloh z oblasti kótovaného a Mongeova promítání. Každá úloha je tvořena slovním zadáním, grafickým zadáním, slovním postupem a PDF souborem se zadáním dané úlohy. Všechny úlohy jsou zpracované ve formě GeoGebra appletu s geometrickým zápisem konstrukce. Applety jsou tvořeny stylem krok za krokem. Pod každým appletem se nachází slovní postup, který je v souladu s geometrickým zápisem konstrukce. U každé úlohy je k dispozici PDF soubor se zadáním dané úlohy. Ten je určený k vytištění a ručnímu rýsování. Všechny úlohy jsou pak seskupeny do GeoGebra knihy (Římáková 2023) dostupné na odkazu <https://www.geogebra.org/m/pfxqdgau>.

Se sbírkou se dá pracovat různými způsoby. V této práci se vyskytují QR kódy a hypertextové odkazy. Pomocí nich si může student vyhledat danou úlohu přímo v GeoGebra knize a využít možnosti přehrání postupu konstrukce krok za krokem. Může také pracovat se samotnou prací, kde má k dispozici zadání úlohy, náhled řešení a slovní postup nebo si může vytisknout PDF soubor se zadáním dané úlohy a rýsovat ručně.

Sbírka je určena především k podpoře úvodního kurzu deskriptivní geometrie v bakalářském studiu matematiky, mohla by však najít uplatnění také na středních školách ve výuce deskriptivní geometrie a stereometrie.

## 2 REŠERŠE ZDROJŮ

### 2.1 Učebnice

V České republice vyšla řada kvalitních učebnic deskriptivní geometrie. Nejvíce jsem využívala učebnice Deskriptivní geometrie pro střední školy (Pomykalová 2010), Deskriptivní geometrie I (Drábek et al. 1978), Deskriptivní geometrie I. (Urban 1965), Deskriptivní geometrie pro technické školy vysoké, vyšší a střední (Kargerová 1997). V těchto učebnicích jsou velmi dobře zpracované kapitoly ohledně kótovaného a Mongeova promítání. V těchto učebnicích jsem zároveň vyhledávala příklady do GeoGebra knihy.

Dále jsem využívala učebnice Atlas geometrie, Geometrie krásná a užitečná (Voráčová et al. 2012), Umění vidět v matematice (Kuřina 1989), 10 pohledů na geometrii (Kuřina 1996), 10 geometrických transformací (Kuřina 2002) a Matematika pro gymnázia: stereometrie (Pomykalová 1995).

V souvislosti s psaním bakalářské práce jsem se nejvíce zaměřovala na témata sklápění roviny, otáčení roviny, osová afinita, vzájemná poloha dvou přímek, vzájemná poloha dvou rovin, zobrazení kružnice v Mongeově promítání, řez hranolu rovinou, řez rotačního tělesa rovinou a zobrazení mnohostěnu v Mongeově promítání.

### 2.2 Internetové zdroje

Pro vyhledávání informací ohledně kótovaného a Mongeova promítání jsem využívala internetové zdroje Základy geometrie a Geometrie (Doležal 2007) a Geometrie III (Hašek 2022).

Samotná sbírka je tvořena v internetovém softwaru GeoGebra (GeoGebra 2023c) dostupném na <https://www.geogebra.org/>. Návody, jak vytvořit samotné aktivity a GeoGebra knihu, jsou dostupné na <https://www.geogebra.org/a/14?lang=cs>. (GeoGebra 2023b)



## **3 PROGRAM GEOGEBRA PRO VÝUKU GEOMETRIE**

### **3.1 GeoGebra**

Mezi nejznámější softwary podporující výuku nejen geometrie patří bezpochyby program GeoGebra. Jakýkoli uživatel se může bezplatně registrovat a vytvořit si účet zadáním své e-mailové adresy a vytvořením hesla na oficiálních stránkách programu GeoGebra <https://www.geogebra.org/>. Výhodou je, že uživatelé nejsou limitováni technologiemi, které podporují tento program. Mohou si ho totiž stáhnout do svého počítače, chytrého telefonu či tabletu. V takovém případě ho mohou všichni využívat téměř kdykoli a kdekoli, jestliže mají přístup k internetu. (GeoGebra 2023c)

Pokud je uživatel úplný nováček a nikdy se s programem GeoGebra neseťkal, může využít návody v českém i anglickém jazyce, které jsou dostupné na tomto internetovém odkazu <https://www.geogebra.org/a/14?lang=cs>. (GeoGebra 2023b)

### **3.2 Využití programu GeoGebra**

Uživatel má mnoho možností, jak GeoGebra využívat. Může vytvářet dynamické applety, ve kterých může spustit automatické přehrávání jednotlivých kroků nebo nastavit, aby se jednotlivé objekty různě pohybovaly. Každý objekt je možno barevně odlišit od ostatních. Program GeoGebra umožňuje uživatelům řešit úlohy nejenom z 2D, ale také z 3D prostoru. V jednotlivých appletech je také možnost přidávat text či obrázky pro vytvoření vizuálně zajímavějšího obsahu. Každý applet má uživatel možnost uložit jako soukromý nebo ho může ponechat veřejný a sdílet ho s ostatními uživateli GeoGebry. Sdílet je může např. pomocí odkazů, čehož je využito i v této bakalářské práci.

Při vytváření appletů je možno využít nástrojový panel, který výrazně usnadňuje realizování geometrické konstrukce v tomto programu. Mimo jiné může uživatel skrýt pomocné prvky, např. pomocné čáry či pomocné body, které by mohly narušovat celkový vizuál výsledného appletu.

Na svém profilu má pak uživatel prostor vytvářet aktivity, do kterých může vkládat již vytvořené applety, text, obrázky, videa, PDF soubory či různé otázky. Je zde možnost zpětně applety, i veškeré aktivity, upravovat a vylepšovat. Tato funkce lze využít

i pro úpravu kopií appletů ostatních uživatelů. Ti je však musí mít veřejně dostupné. V této sbírce jsem využila možnosti přidání textů a PDF souboru k appletu.

Program GeoGebra nabízí možnost vytvoření GeoGebra knihy. Tato funkce umožňuje uživateli seskupit jednotlivé aktivity, týkající se určitého tématu, do jednoho souboru. Z tohoto důvodu je také sbírka Řešení vybraných úloh z deskriptivní geometrie (Římáková 2023) ve formě GeoGebra knihy, jelikož jsou všechny jednotlivé úlohy pohromadě a zároveň přehledně uspořádané.

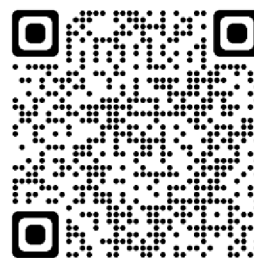
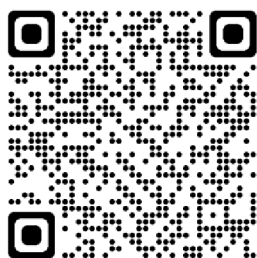
Mezi učiteli je často využívána funkce GeoGebra Classroom. Učitelé studentům zadají různé úkoly ve formě předem připravených aktivit a sdílí je s nimi pomocí speciálních kódů. Učitel může v reálném čase na své obrazovce sledovat studenty, jak pracují a řeší jednotlivé úlohy. Učitel může zvolit možnost anonymity, tudíž každý student, který se do GeoGebra Classroom připojí, bude vidět pouze pod číslem a ne pod svým skutečným jménem.

Na ukázkou jsem vybrala dva konkrétní materiály jiných autorů, které jsou vytvořené v programu GeoGebra, pro podporu výuky deskriptivní geometrie. První applet ukazuje zobrazení čtverce v kótovaném promítání. Ve druhém appletu je vyobrazen vznik kuželoseček pomocí řezu na kuželové ploše v Mongeově promítání.

<https://www.geogebra.org/m/zSGQqxE>

<https://www.geogebra.org/m/r4ujvejp>

W



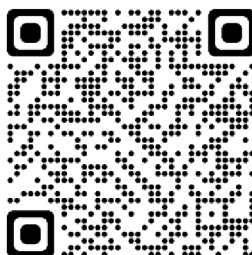
## 4 ŘEŠENÍ VYBRANÝCH ÚLOH Z DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE

Tato sbírka úloh ve formě GeoGebra knihy (Římáková 2023) je určena jako opora při studiu úvodního kurzu deskriptivní geometrie v bakalářském studiu matematiky.

Ve sbírce se nachází celkem 12 různých úloh, 6 úloh týkajících se kótovaného promítání a 6 úloh zaměřených na Mongeovo promítání. Každá z nich je vzorově vyřešena formou animace krok za krokem a následně se pod každou úlohou vyskytuje slovní postup řešení odkazující ke konkrétním krokům postupu v appletu. Zároveň pod každou úlohou naleznete PDF soubor se zadáním, který je určený k vytištění a následnému ručnímu rýsování.

Odkaz na sbírku:

<https://www.geogebra.org/m/pfxqdgau>



#### 4.1 Kótované promítání

Kótovanému promítání se podrobně věnuje Pomykalová (2010, s. 70-106). Toto téma dále dobře vysvětluje Drábek et al. (1978, s. 117-124) nebo Urban (1965, s. 116-139). Téma kótované promítání také dobře vysvětluje Hašek (2022, s. 45-52).

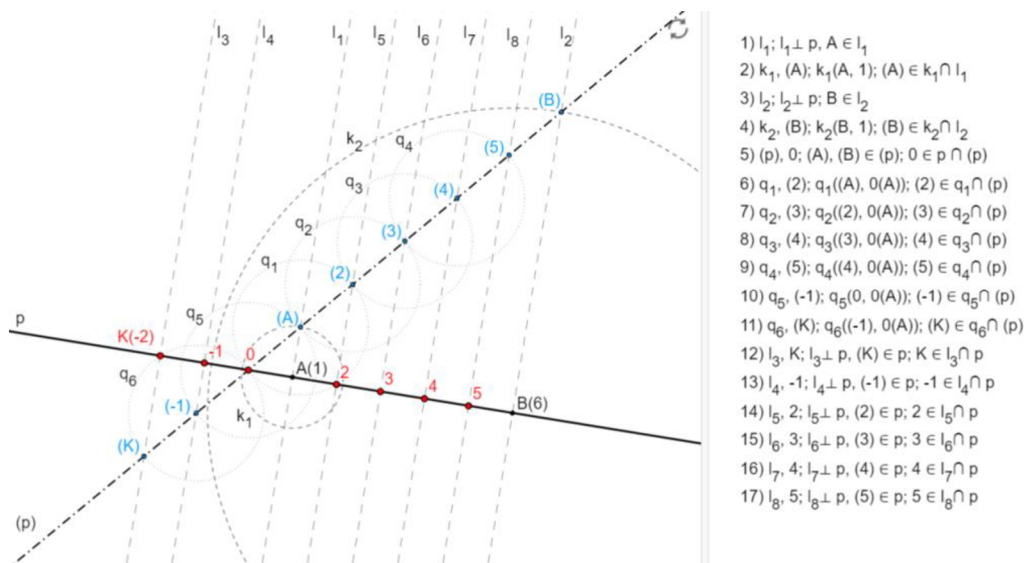
Kótované promítání je nadále v textu uváděno pod zkratkou KP.

**Úloha 1:** V KP vystupňujte přímku  $p$  a zobrazte na ní bod  $K$  s kótou  $-2$ , jsou-li zadané body  $A$  a  $B$  o různých kótách, které leží na přímce  $p$ .



*Obrázek 1: Zadání Úlohy 1*

Náhled řešení:



Obrázek 2: Řešení Úlohy 1

Postup konstrukce:

Tuto úlohu budeme řešit pomocí sklopení kolmé promítací roviny přímkou  $p$ . Detailnějšímu výkladu na téma stupňování přímky se věnuje Hašek (2022, s. 50-52). Nejdříve sklopíme bod  $A$ . Bodem  $A$  vedeme kolmici  $l_1$  na přímkou  $p$ . Kolem bodu  $A$  opišeme kružnici  $k_1$  o poloměru 1. Kružnice  $k_1$  protne kolmici  $l_1$  ve dvou bodech. Jeden z nich si vybereme a pojmenujeme ho jako sklopený bod  $(A)$ .

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 1, 2)

Následně sklopíme bod  $B$ . Bodem  $B$  vedeme kolmici  $l_2$  na přímkou  $p$ . Kolem bodu  $B$  opišeme kružnici  $k_2$  o poloměru 6. Kružnice  $k_2$  protne kolmici  $l_2$  ve dvou bodech. Bod  $A$  i bod  $B$  mají kladnou kótu. Bod  $B$  sklopíme do stejné poloroviny, která je ohraničená přímkou  $p$ , jako bod  $A$ . Zvolíme tedy průsečík, který se nachází ve stejné polorovině jako sklopený bod  $(A)$  a označíme ho jako sklopený bod  $(B)$ . Sestrojíme sklopenou přímkou  $(p)$ . Sklopená přímka  $(p)$  prochází sklopenými body  $(A)$  a  $(B)$ . Přímka  $p$  se protíná se sklopenou přímkou  $(p)$  v bodě  $0$ . Bod  $0$  je stopníkem přímkou  $p$ .

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 3 - 5)

Nyní vyznačíme na sklopené přímce ( $p$ ) body, které mají celočíselnou kótu. Tomuto procesu se říká stupňování přímky. Kolem bodu ( $A$ ) opíšeme kružnici  $q_1$  o poloměru  $(A)O$ . Bodem, ve kterém protne kružnice  $q_1$  přímku ( $p$ ), je bod (2). Bod (2) leží ve stejné polorovině jako body ( $A$ ) a ( $B$ ). Následně kolem bodu (2) opíšeme kružnici  $q_2$  o poloměru  $(A)O$ . Kružnice  $q_2$  protne přímku ( $p$ ) v bodě (3). Sestrojíme kružnici  $q_3$  středem v bodě (3) a poloměrem  $(A)O$ . Kružnice  $q_3$  protne přímku ( $p$ ) v bodě (4). Následně sestrojíme kružnici  $q_4$  se středem v bodě (4) o poloměru  $(A)O$ . Kružnice  $q_4$  protne přímku ( $p$ ) v bodě (5).

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 6 - 9)

Pro nalezení bodu ( $-1$ ) opíšeme kolem bodu  $O$  kružnici  $q_5$  o poloměru  $(A)O$ . Kružnice  $q_5$  a přímka ( $p$ ) se protnou v bodě ( $-1$ ). Následně opíšeme kružnici  $q_6$  kolem bodu ( $-1$ ) o poloměru  $(A)O$ . Průsečíkem kružnice  $q_6$  a přímky ( $p$ ) je bod ( $K$ ).

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 10, 11)

Nyní zobrazíme všechny sklopené body zpět do původního zadání. Bodem ( $K$ ) vedeme kolmici  $l_3$  na přímku  $p$ . Bod, ve kterém kolmice  $l_3$  protne přímku  $p$ , označíme jako bod  $K$ . Bodem ( $-1$ ) vedeme kolmici  $l_4$  na přímku  $p$ . Přímka  $p$  a kolmice  $l_4$  se protnou v bodě  $-1$ . Pro nalezení bodu 2 vedeme bodem (2) kolmici  $l_5$  na přímku  $p$ . Přímka  $p$  a kolmice  $l_5$  se protnou v bodě 2. Následně vedeme kolmici  $l_6$  na přímku  $p$  bodem (3). Bod, ve kterém se přímka  $p$  protne s kolmicí  $l_6$ , je bod 3. Dále vedeme kolmici  $l_7$  na přímku  $p$  bodem (4). Přímka  $p$  a kolmice  $l_7$  se protínají v bodě 4. Na závěr vedeme bodem (5) kolmici  $l_8$  na přímku  $p$ . Kolmice  $l_8$  protne přímku  $p$  v bodě 5. Dostáváme vystupňovanou přímku  $p$ .

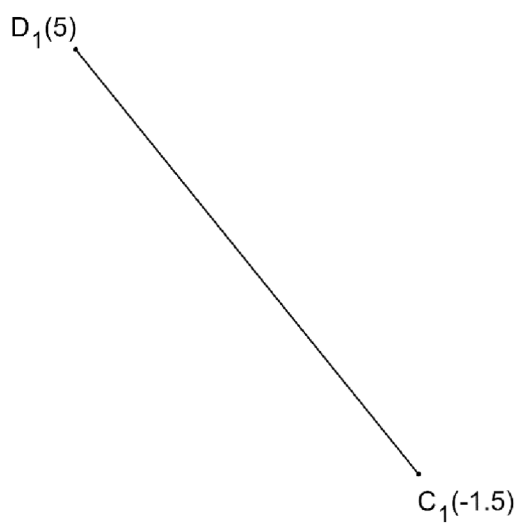
(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 12 - 17)

Úloha 1 je dostupná zde:

<https://www.geogebra.org/m/pfxqdguu#material/zannxkg2>



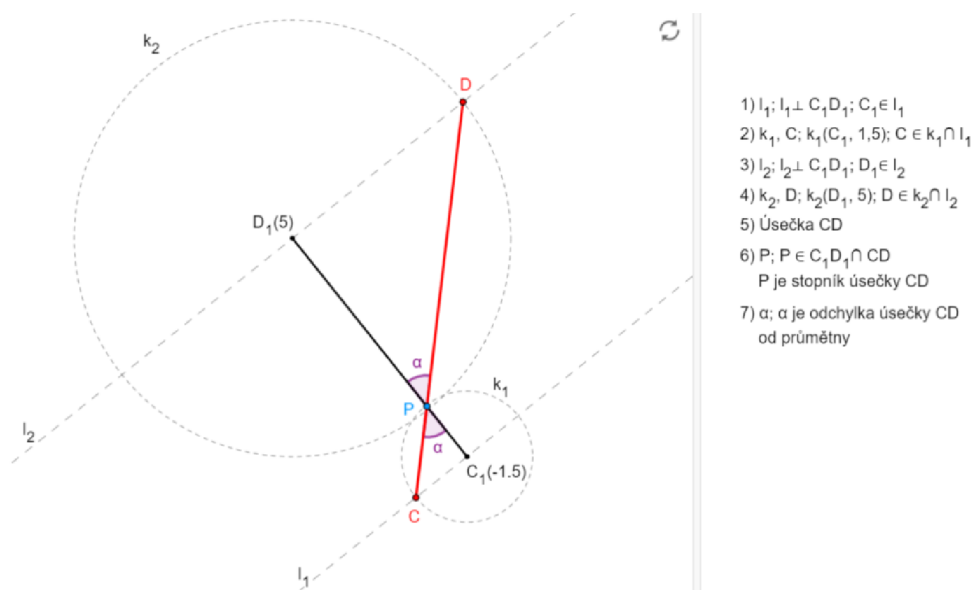
**Úloha 2:** V KP určete skutečnou velikost úsečky  $CD$ , je-li zadán její průmět, úsečka  $C_1D_1$ . Zobrazte její stopník a odchylku  $\alpha$  od průmětny.



*Obrázek 3: Zadání Úlohy 2*



Náhled řešení:



- 1)  $l_1; l_1 \perp C_1D_1; C_1 \in l_1$
- 2)  $k_1, C; k_1(C_1, 1,5); C \in k_1 \cap l_1$
- 3)  $l_2; l_2 \perp C_1D_1; D_1 \in l_2$
- 4)  $k_2, D; k_2(D_1, 5); D \in k_2 \cap l_2$
- 5) Úsečka  $CD$
- 6)  $P; P \in C_1D_1 \cap CD$   
 $P$  je stopník úsečky  $CD$
- 7)  $\alpha; \alpha$  je odchylna úsečky  $CD$  od průmětny

Obrázek 4: Řešení Úlohy 2

Postup konstrukce:

Tato úloha se řeší sklopením kolmé promítací roviny úsečky  $CD$ . Tématu sklápění roviny se detailně věnuje Urban (1965, s. 120-125). Nejdříve sklopíme bod  $C_1$ . Bodem  $C_1$  vedeme kolmici  $l_1$  na úsečku  $C_1D_1$ . Kolem bodu  $C_1$  opišeme kružnici  $k_1$  o poloměru 1,5. Kružnice  $k_1$  protne přímku  $l_1$  ve dvou bodech, jeden z nich si vybereme a označíme ho jako sklopený bod  $C$ .

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 1, 2)

Nyní sklopíme bod  $D_1$ . Bodem  $D_1$  vedeme kolmici  $l_2$  na úsečku  $C_1D_1$ . Kolem bodu  $D_1$  opišeme kružnici  $k_2$  o poloměru 5. Kružnice  $k_2$  protne přímku  $l_2$  také ve dvou bodech. Tentokrát zvolíme bod, který je sklopený na opačnou stranu než bod  $C$  (body  $D_1$  a  $C_1$  mají opačná znaménka u svých kót). Dostáváme sklopený bod  $D$ .

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 3, 4)

Sestrojíme úsečku  $CD$  a získáváme její skutečnou velikost. Bod  $P$ , ve kterém úsečka  $CD$  protne úsečku  $C_1D_1$ , je stopníkem úsečky  $CD$ . Odchylna  $\alpha$  je úhel mezi

úsečkou  $CD$  a průmětnou (resp. úsečkou  $C_1D_1$ ). Zpravidla se volí menší z dvojice úhlů, které mezi sebou úsečka  $CD$  a úsečka  $C_1D_1$  svírají.

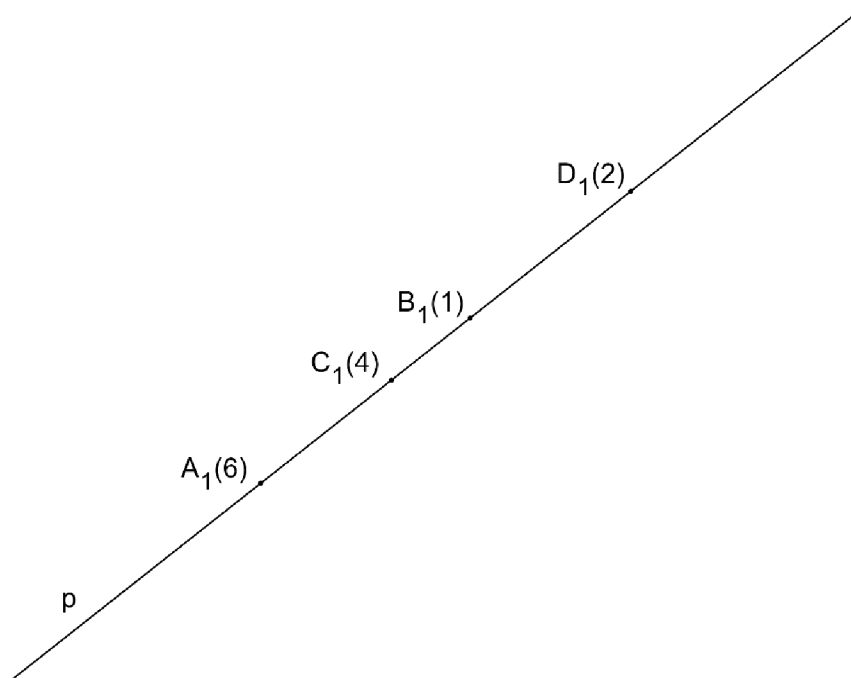
(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 5 - 7)

Úloha 2 je dostupná zde:

<https://www.geogebra.org/m/pfxqdguu#material/warxxnyk>

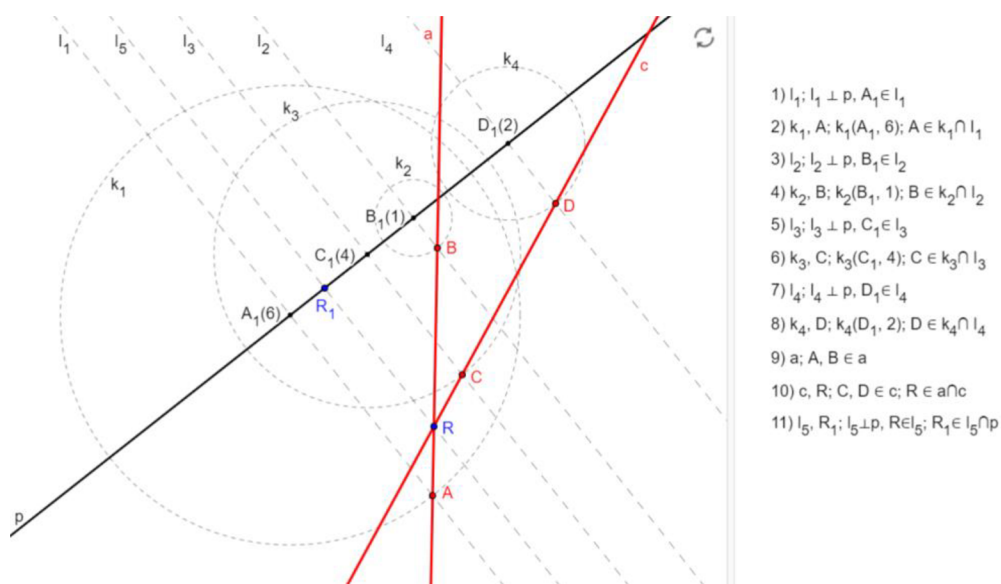


**Úloha 3:** V KP rozhodněte o vzájemné poloze přímek  $a$  a  $c$ . Přímka  $a$  je určena body  $A$  a  $B$ , přímka  $c$  je určena body  $C$  a  $D$ .



*Obrázek 5: Zadání Úlohy 3*

Náhled řešení:



Obrázek 6: Řešení Úlohy 3

Postup konstrukce:

Tuto úlohu budeme řešit sklápěním kolmé promítací roviny přímky  $a$  a kolmé promítací roviny přímky  $c$ . Téma vzájemné polohy přímek pěkně vysvětluje Pomykalová (2010, s. 80-83). Průměty přímek  $a$  a  $c$  splývají v přímku  $p$ . Bodem  $A_1$  vedeme kolmici  $l_1$  na přímku  $p$ . Opíšeme kružnici  $k_1$  kolem bodu  $A_1$  o poloměru 6. Kružnice  $k_1$  protne kolmici  $l_1$  ve dvou bodech. Jeden z nich vybereme a označíme ho jako sklopený bod  $A$ . Následně bodem  $B_1$  vedeme kolmici  $l_2$  na přímku  $p$ . Opíšeme kružnici  $k_2$  kolem bodu  $B_1$  o poloměru 1. Sklopený bod  $B$  je průsečíkem kružnice  $k_2$  a kolmice  $l_2$ . Všechny body mají kladnou kótu, proto všechny sklápíme do stejné poloroviny s hraniční přímkou  $p$ . Bodem  $C_1$  vedeme kolmici  $l_3$  na přímku  $p$ . Sestrojíme kružnici  $k_3$  se středem v bodě  $C_1$  a o poloměru 4. Kružnice  $k_3$  protne kolmici  $l_3$  v bodě  $C$ . Následně sestrojíme kolmici  $l_4$  na přímku  $p$  bodem  $D_1$ . Kolem bodu  $D_1$  opíšeme kružnici  $k_4$  o poloměru 2. Bod  $D$  je průsečíkem kolmice  $l_4$  a kružnice  $k_4$ .

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 1 - 8)

Přímka  $a$  je určena body  $A$  a  $B$ . Bodem  $A$  a bodem  $B$  vedeme přímku. Dostáváme sklopenou přímku  $a$ . Přímka  $c$  je určena body  $C$  a  $D$ . Bodem  $C$  a bodem  $D$

vedeme přímku. Získáváme sklopenou přímku  $c$ . Je jasné, že přímký  $a$  a  $c$  jsou různoběžné. Průsečík sklopené přímký  $a$  a sklopené přímký  $c$  je sklopený bod  $R$ .

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 9, 10)

Jako poslední krok zobrazíme sklopený bod  $R$  do původního zadání. Bodem  $R$  vedeme kolmici  $l_5$  na přímku  $p$ . Bod  $R_l$  je průsečíkem kolmice  $l_5$  a přímký  $p$ .

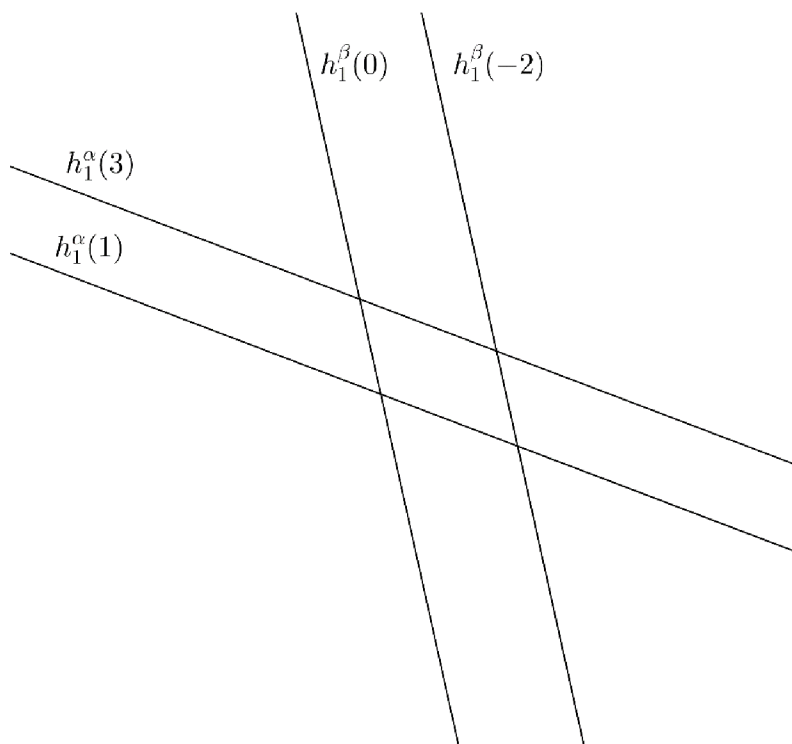
(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 11)

Úloha 3 je dostupná zde:

<https://www.geogebra.org/m/pfxqdguu#material/cm xnpe9w>

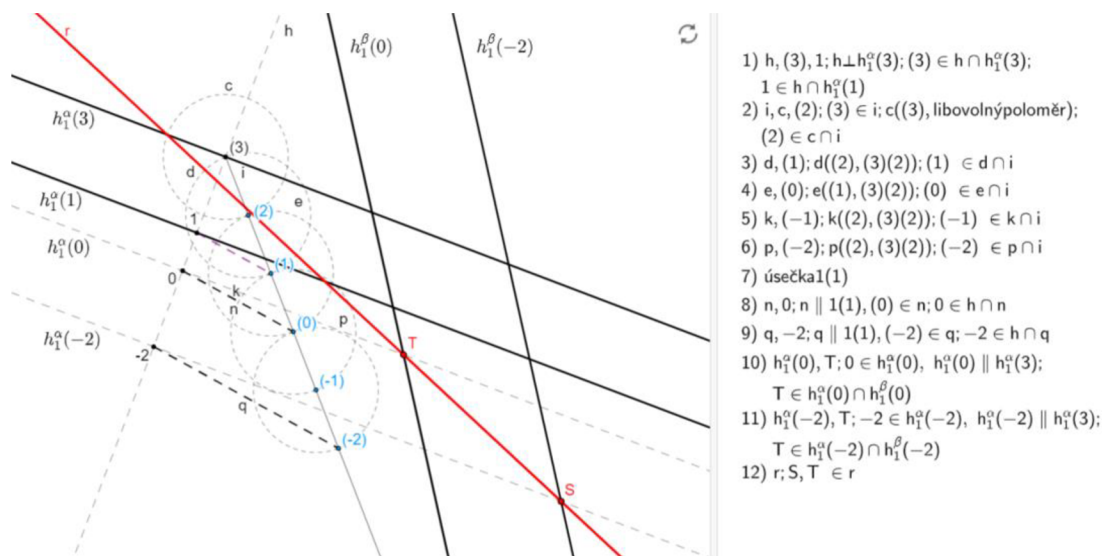


**Úloha 4:** V KP narýsujte průsečnici rovin  $\alpha$  a  $\beta$ , je-li každá z nich zadána dvojicí hlavních přímek o různých kótách.



*Obrázek 7: Zadání Úlohy 4*

Náhled řešení:



Obrázek 8: Řešení Úlohy 4

Postup konstrukce:

Abychom mohli tuto úlohu vyřešit, musíme sestrojít hlavní přímky roviny  $\alpha$ , které budou mít stejnou kótu jako zadané hlavní přímky roviny  $\beta$ . Téma průsečnice rovin dobře popisuje Pomykalová (2010, s. 94-99). Vedeme libovolnou kolmici  $h$  na hlavní přímku roviny  $\alpha$   $h_I^\alpha(3)$ . Přímka  $h$  a hlavní přímka roviny  $\alpha$   $h_I^\alpha(3)$  se protínají ve sklopeném bodě  $(3)$ . Přímka  $h$  se protíná s hlavní přímkou roviny  $\alpha$   $h_I^\alpha(1)$  v bodě  $1$ .

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 1)

Z bodu  $(3)$  vedeme libovolnou polopřímku  $i$  s počátkem v bodě  $(3)$ . Opíšeme kružnici  $c$  kolem bodu  $(3)$  o libovolném poloměru. Kružnice  $c$  protne polopřímku  $i$  ve sklopeném bodě  $(2)$ . Kolem bodu  $(2)$  opíšeme kružnici  $d$  o poloměru  $(3)(2)$ . Kružnice  $d$  protne polopřímku  $i$  v bodě  $(1)$ . Následně sestrojíme kružnici  $e$  se středem v bodě  $(1)$  o poloměru  $(3)(2)$ . Průsečíkem kružnice  $e$  a polopřímky  $i$  je bod  $(0)$ . Kolem bodu  $(0)$  opíšeme kružnici  $k$  o poloměru  $(3)(2)$ . Kružnice  $k$  protne polopřímku  $i$  v bodě  $(-1)$ . Sestrojíme kružnici  $p$  se středem v bodě  $(-1)$  a s poloměrem  $(3)(2)$ . Průsečíkem kružnice  $p$  a polopřímky  $i$  je bod  $(-2)$ .

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 2 - 6)

Sestrojíme úsečku  $I(I)$ . Bodem  $(0)$  vedeme rovnoběžku  $n$  s úsečkou  $I(I)$ . Přímka  $n$  protne přímku  $h$  v bodě  $0$ . Bodem  $(-2)$  vedeme rovnoběžku  $q$  s úsečkou  $I(I)$ . Průsečíkem přímky  $q$  a přímky  $h$  je bod  $-2$ .

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 7 - 9)

Bodem  $0$  vedeme rovnoběžku  $h_I^\alpha(0)$  s hlavní přímkou roviny  $\alpha$  o kótě 3 (resp. o kótě 1). Rovnoběžka  $h_I^\alpha(0)$  je hlavní přímkou roviny  $\alpha$  s kótou 0. Průsečíkem přímky  $h_I^\alpha(0)$  s přímkou  $h_I^\beta(0)$  je bod  $T$ . Následně vedeme bodem  $-2$  rovnoběžku  $h_I^\alpha(-2)$  s hlavní přímkou roviny  $\alpha$  o kótě 3. Průsečíkem přímky  $h_I^\alpha(-2)$  a přímky  $h_I^\beta(-2)$  je bod  $S$ .

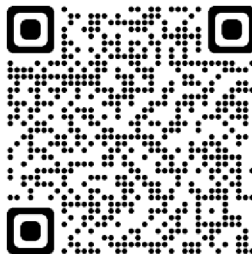
(Kroky postupu u konstrukce: 10, 11)

Bodem  $T$  a bodem  $S$  vedeme přímku  $r$ . Přímka  $r$  je průsečnicí rovin  $\alpha$  a  $\beta$ .

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 12)

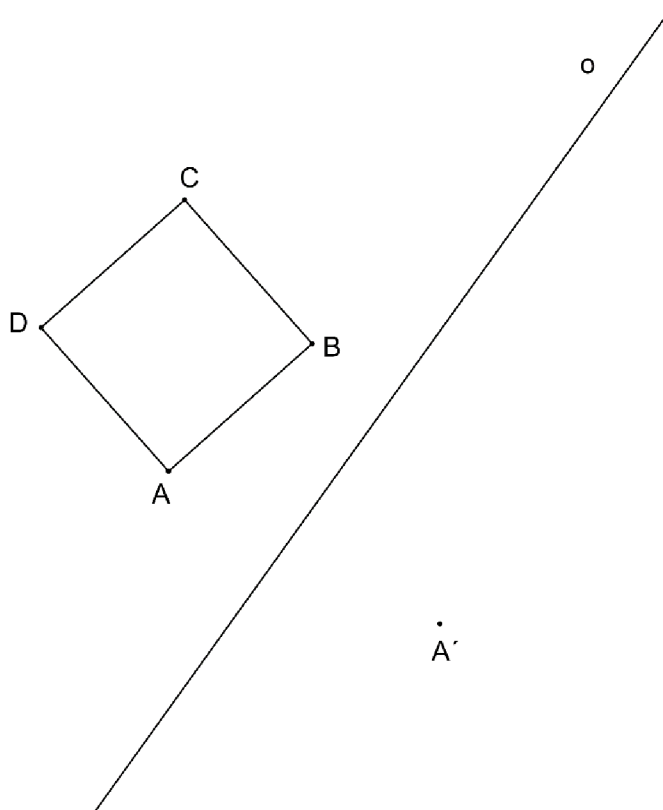
Úloha 4 je dostupná zde:

<https://www.geogebra.org/m/pfxqdguu#material/rhamhaqh>



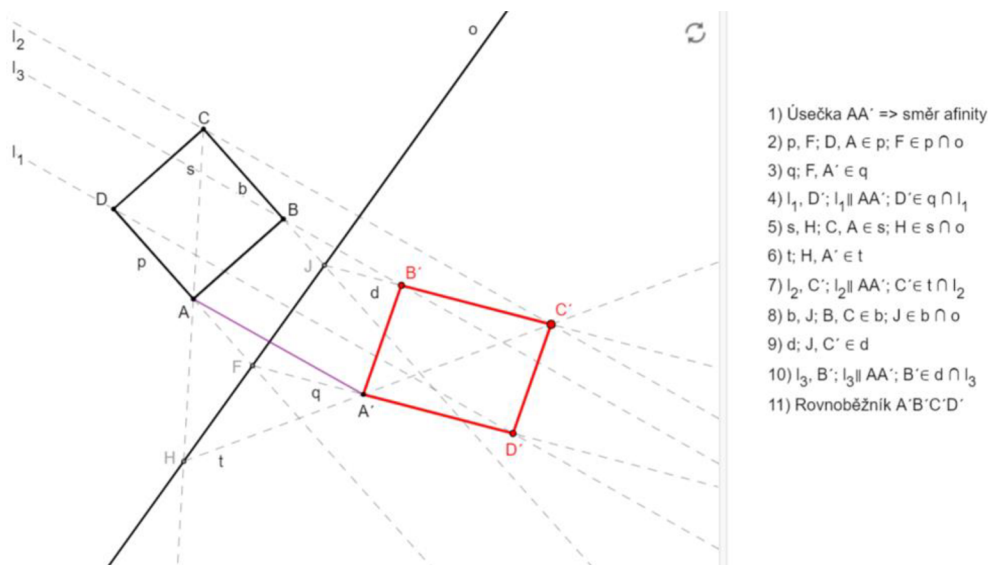


**Úloha 5:** V KP zobrazte čtverec  $ABCD$  ležící v rovině  $\rho$ , jsou-li dány body  $ABCD$ , osa afinity  $o$  a bod  $A'$ , který je obrazem bodu  $A$ .



*Obrázek 9: Zadání Úlohy 5*

Náhled řešení:



Obrázek 10: Řešení Úlohy 5

Postup konstrukce:

Pro sestavení obrazu čtverce v osové afinitě musíme nejdříve znát směr afinity. Sestrojíme úsečku  $AA'$ . Úsečka  $AA'$  určuje směr osové afinity. Tématu osové afinity se podrobně věnuje Pomykalová (2010, s. 31-34).

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 1)

Sestrojíme polopřímku  $DA$ . Průsečíkem polopřímky  $DA$  s osou afinity  $o$  je bod  $F$ . Sestrojíme polopřímku  $FA'$ . Následně bodem  $D$  vedeme rovnoběžku  $l_1$  se směrem afinity. Přímka  $l_1$  a polopřímka  $FA'$  se protnou v bodě  $D'$ . Bod  $D'$  je obrazem bodu  $D$ .

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 2 - 4)

Sestrojíme polopřímku  $CA$ . Polopřímka  $CA$  se protne s osou afinity  $o$  v bodě  $H$ . Následně sestrojíme polopřímku  $HA'$ . Bodem  $C$  vedeme rovnoběžku  $l_2$  se směrem afinity. Přímka  $l_2$  protíná polopřímku  $HA'$  v bodě  $C'$ . Bod  $C'$  je obrazem bodu  $C$ .

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 5 - 7)

Sestrojíme polopřímku  $CB$ . Bod, ve kterém se polopřímka  $CB$  protne s osou afinity  $o$  je bod  $J$ . Sestrojíme polopřímku  $JC'$ . Následně vedeme rovnoběžku  $l_3$  bodem  $B$

se směrem afinity. Průsečíkem polopřímky  $JC'$  a přímky  $l_3$  je bod  $B'$ . Bod  $B'$  je obrazem bodu  $B$ .

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 8 - 10)

Sestrojíme úsečky  $A'B'$ ,  $B'C'$ ,  $C'D'$  a  $D'A'$ . Získáváme obraz čtverce  $ABCD$  v afinitě.

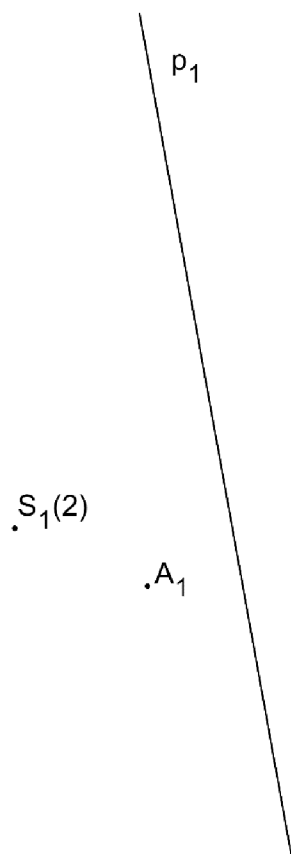
(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 11)

Úloha 5 je dostupná zde:

<https://www.geogebra.org/m/pfxqdguu#material/tc88454e>

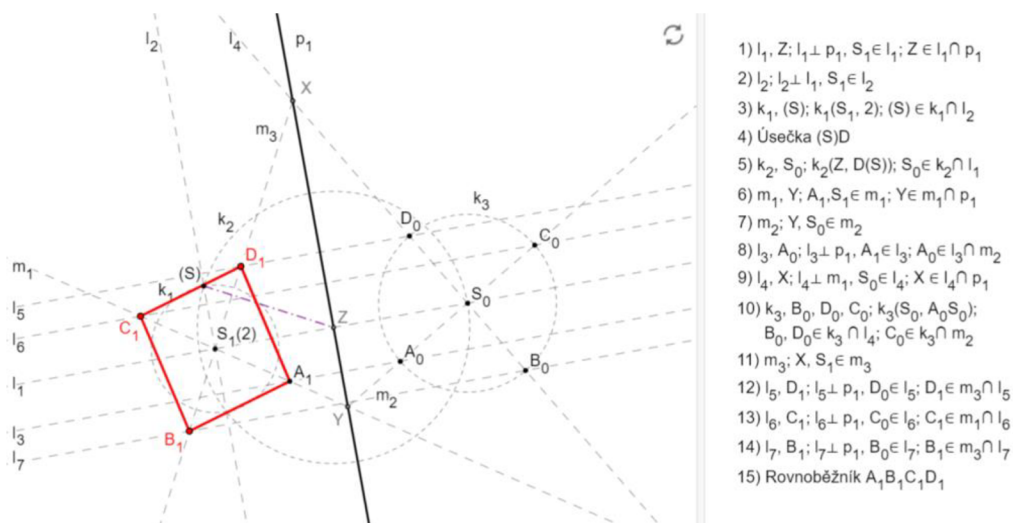


**Úloha 6:** V KP zobrazte čtverec  $ABCD$ , který leží v rovině  $\rho$ , je-li dána stopa  $p_l$  roviny  $\rho$ , vrchol čtverce  $A_l$  a střed čtverce  $S_l$  s kótou 2.



Obrázek 11: Zadání Úlohy 6

Náhled řešení:



Obrázek 12: Řešení Úlohy 6

Postup konstrukce:

Téma otáčení roviny dobře popisuje Urban (1965, s. 125-130). V první řadě potřebujeme otočit rovinu  $\rho$  tak, abychom viděli čtverec ve skutečné velikosti. Stopa  $p_1$  roviny  $\rho$  je osou otáčení. Vedeme kolmici  $l_1$  na stopu roviny  $p_1$ , která prochází bodem  $S_1$ . Kolmice  $l_1$  protne stopu roviny  $p_1$  v bodě  $Z$ . Následně bodem  $Z$  vedeme kolmici  $l_2$  na přímku  $l_1$ . Opíšeme kružnici  $k_1$  kolem bodu  $S_1$  o poloměru 2. Kružnice  $k_1$  protne kolmici  $l_2$  ve dvou bodech. Zvolíme si jeden z nich a označíme ho jako sklopený bod  $(S)$ . Opíšeme kružnici  $k_2$  kolem bodu  $Z$  o poloměru  $Z(S)$ . Kružnice  $k_2$  protne přímku  $l_1$  ve dvou bodech. Jeden z nich si vybereme a označíme ho jako otočený bod  $S_0$ . (Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 1 - 5)

Bodem  $S_1$  a bodem  $A_1$  vedeme přímku  $m_1$ . Přímka  $m_1$  protne stopu roviny  $p_1$ , v bodě  $Y$ . Sestrojíme polopřímku  $YS_0$ . Bodem  $A_1$  vedeme kolmici  $l_3$  na stopu roviny  $p_1$ . Průsečíkem kolmice  $l_3$  a polopřímky  $YS_0$  je otočený bod  $A_0$ .

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 6 - 8)

Bodem  $S_0$  vedeme kolmici  $l_4$  na polopřímku  $YS_0$ . Opíšeme kružnici  $k_3$  kolem bodu  $S_0$  o poloměru  $A_0S_0$ . Kružnice  $k_3$  protne polopřímku  $YS_0$  ve dvou bodech, v bodě  $A_0$

a v bodě  $C_0$ . Kružnice  $k_3$  protne přímkou  $l_4$  také ve dvou bodech, v bodě  $B_0$  a v bodě  $D_0$ . Nyní vidíme čtverec ve skutečné velikosti.

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 9, 10)

Následně sestrojíme body  $D_1$ ,  $C_1$  a  $B_1$ . Přímkou  $l_4$  protíná stopu roviny  $p_1$  v bodě  $X$ . Sestrojíme polopřímku  $XS_1$ . Bodem  $D_0$  vedeme kolmici  $l_5$  na stopu roviny  $p_1$ . Přímkou  $l_5$  protíná polopřímku  $XS_1$  v bodě  $D_1$ . Následně vedeme bodem  $C_0$  kolmici  $l_6$  na stopu roviny  $p_1$ . Průsečíkem přímky  $l_6$  a přímky  $m_1$  je bod  $C_1$ . Nakonec vedeme bodem  $B_0$  kolmici  $l_7$  na stopu roviny  $p_1$ . Přímkou  $l_7$  protíná polopřímku  $XS_1$  v bodě  $B_1$ .

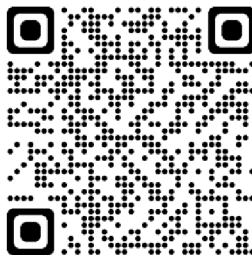
(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 11 - 14)

Sestrojíme úsečky  $A_1B_1$ ,  $B_1C_1$ ,  $C_1D_1$  a  $D_1A_1$ . Získáváme čtverec, který leží v rovině  $\rho$ .

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 15)

Úloha 6 je dostupná zde:

<https://www.geogebra.org/m/pfxqdguu#material/sbesvu3q>

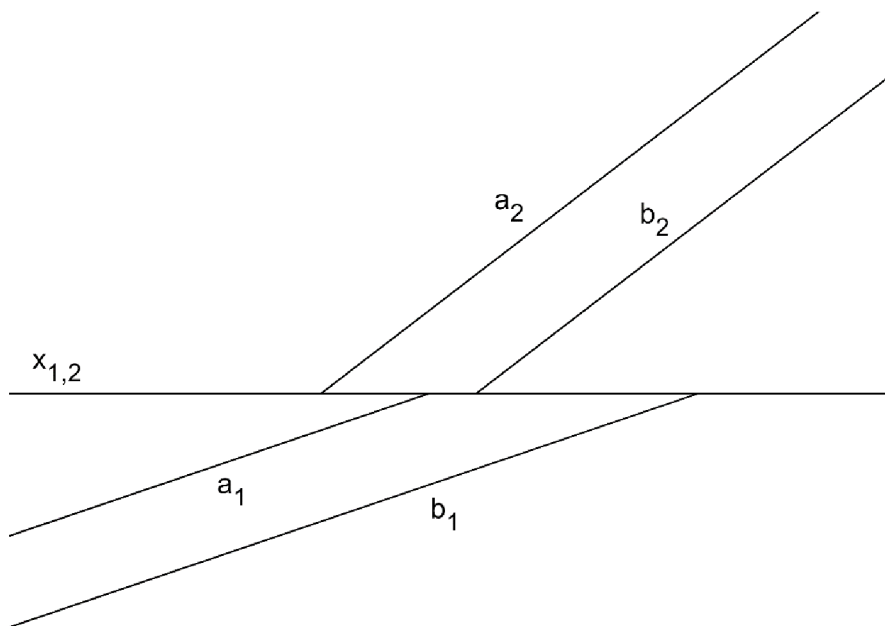


## 4.2 Mongeovo promítání

Základy Mongeova promítání pěkně rozebírá Pomykalová (2010, s. 117-182). Dále Pomykalová (2010, s. 234-294) podrobně rozebírá téma rotačních těles v Mongeově promítání. Zobrazení mnohostěnů v Mongeově promítání dobře popisuje Urban (1965, s. 184-198). Tématu Mongeova promítání se také věnuje Drábek et al. (1978, s. 85-98).

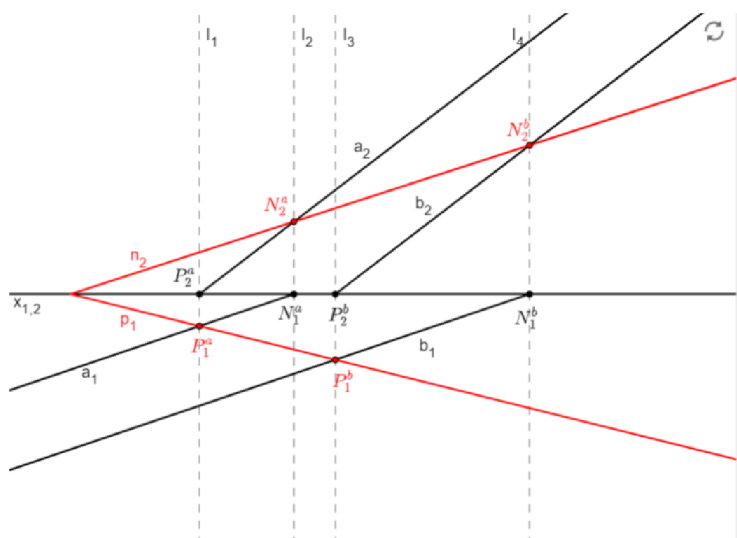
Mongeovo promítání je dále v textu uváděno pod zkratkou MP.

**Úloha 7:** V MP zobrazte stopy roviny  $\rho$ , která je určena dvěma rovnoběžnými přímkami  $a$  a  $b$ .



Obrázek 13: Zadání Úlohy 7

Náhled řešení:



- 1)  $P_2^a, P_2^b \in a_2 \cap x_{1,2}$
- 2)  $N_1^a, N_1^b \in a_1 \cap x_{1,2}$
- 3)  $P_2^a, P_2^b \in b_2 \cap x_{1,2}$
- 4)  $N_1^a, N_1^b \in b_1 \cap x_{1,2}$
- 5)  $l_1, P_1^a: l_1 \perp x_{1,2}, P_2^a \in l_1; P_1^a \in l_1 \cap a_1$
- 6)  $l_2, N_2^a: l_2 \perp x_{1,2}, N_1^a \in l_2; N_2^a \in l_2 \cap a_2$
- 7)  $l_3, P_1^b: l_3 \perp x_{1,2}, P_2^b \in l_3; P_1^b \in l_3 \cap b_1$
- 8)  $l_4, N_2^b: l_4 \perp x_{1,2}, N_1^b \in l_4; N_2^b \in l_4 \cap b_2$
- 9)  $p_1, n_2; P_1^a, P_1^b \in p_1; N_2^a, N_2^b \in n_2$

Obrázek 14: Řešení Úlohy 7

Postup konstrukce:

Řešení podobné úlohy najdeme dobře vysvětlené v příkladu 7.7 na str. 140 v (Pomykalová 2010). Pro vyřešení této úlohy musíme zjistit stopníky přímek  $a$  a  $b$ . Přímka  $a_2$  protíná základnici  $x_{1,2}$  v bodě  $P_2^a$ . Bod  $P_2^a$  je nárys půdorysného stopníku přímky  $a$ . Přímka  $a_1$  protíná základnici  $x_{1,2}$  v bodě  $N_1^a$ . Bod  $N_1^a$  je půdorys nárysného stopníku přímky  $a$ . Přímka  $b_2$  protíná základnici  $x_{1,2}$  v bodě  $P_2^b$ . Bod  $P_2^b$  je nárys půdorysného stopníku přímky  $b$ . Přímka  $b_1$  protíná základnici  $x_{1,2}$  v bodě  $N_1^b$ . Bod  $N_1^b$  je půdorys nárysného stopníku přímky  $b$ .

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 1 – 4)

Následně vedeme bodem  $P_2^a$  kolmicí  $l_1$  na základnici  $x_{1,2}$ . Průsečíkem přímky  $l_1$  a přímky  $a_1$  je bod  $P_1^a$ . Bod  $P_1^a$  je půdorys půdorysného stopníku přímky  $a$ . Bodem  $N_1^a$  vedeme kolmicí  $l_2$  na základnici  $x_{1,2}$ . Přímka  $a_2$  a přímka  $l_2$  se protínají v bodě  $N_2^a$ . Bod  $N_2^a$  je nárysem nárysného stopníku přímky  $a$ . Bodem  $P_2^b$  vedeme kolmicí  $l_3$  na základnici  $x_{1,2}$ . Bod  $P_1^b$  je průsečíkem přímky  $l_3$  a přímky  $b_1$ . Bod  $P_1^b$  je půdorysem půdorysného stopníku přímky  $b$ . Následně bodem  $N_1^b$  vedeme kolmicí  $l_4$  na základnici  $x_{1,2}$ . Bod  $N_2^b$  je průsečíkem přímky  $l_4$  a přímky  $b_2$ . Bod  $N_2^b$  je nárys nárysného stopníku přímky  $b$ .

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 5 – 8)



Bodem  $P_1^a$  a bodem  $P_1^b$  vedeme přímku  $p_1$ . Příмка  $p_1$  je půdorysná stopa roviny  $\rho$ . Bodem  $N_2^a$  a bodem  $N_2^b$  vedeme přímku  $n_2$ . Příмка  $n_2$  je nárysňá stopa roviny  $\rho$ .

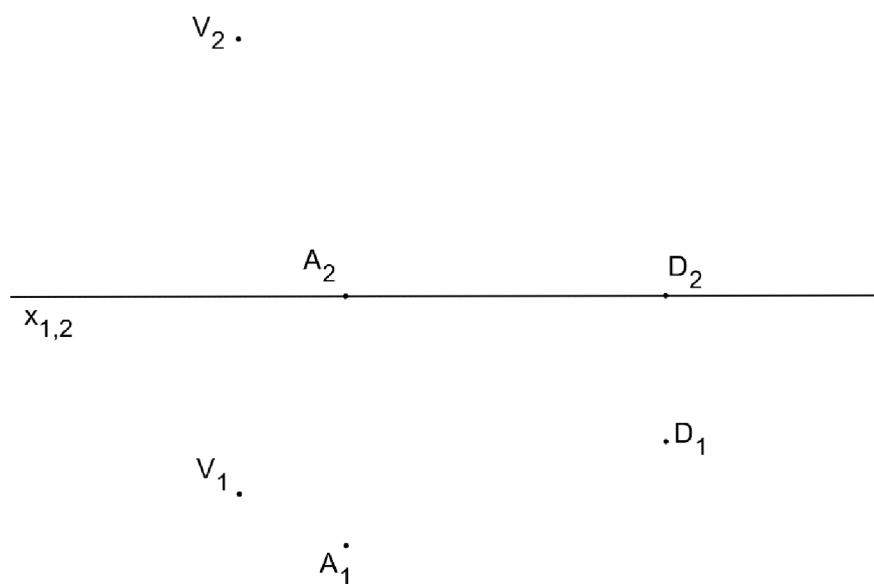
(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 9)

Úloha 7 je dostupňá zde:

<https://www.geogebra.org/m/pfxqdguu#material/adegfpgb>

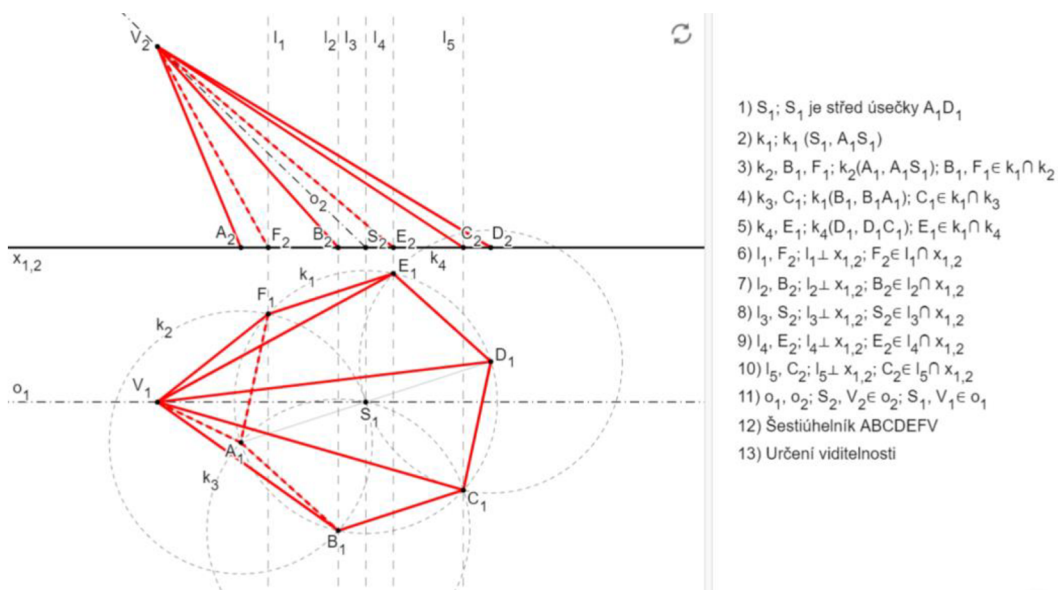


**Úloha 8:** V MP zobrazte pravidelný šestiboký jehlan  $ABCDEFV$ , jehož podstava leží v půdorysně. Dále jsou zadány oba průměty vrcholů podstavy  $A$  a  $D$  a oba průměty vrcholu jehlanu  $V$ . Určete viditelnost jeho hran.



Obrázek 15: Zadání Úlohy 8

Náhled řešení:



Obrázek 16: Řešení Úlohy 8

Postup konstrukce:

Podobnou úlohu najdeme vysvětlenou v příkladu 8.6 na str. 204 v (Pomykalová 2010). Nejdříve potřebujeme sestrojít podstavu jehlanu ve skutečné velikosti. Sestrojíme střed  $S_1$  úsečky  $A_1D_1$ . Kolem bodu  $S_1$  a opišeme kružnici  $k_1$  o poloměru  $A_1S_1$ . Následně kolem bodu  $A_1$  opišeme kružnici  $k_2$  o poloměru  $A_1S_1$ . Kružnice  $k_2$  protne kružnici  $k_1$  v bodech  $B_1$  a  $F_1$ . Opišeme kružnici  $k_3$  o poloměru  $A_1S_1$  kolem bodu  $B_1$ . Kružnice  $k_3$  protne kružnici  $k_1$  v bodě  $C_1$ . Kolem bodu  $D_1$  opišeme kružnici  $k_4$  o poloměru  $A_1S_1$ . Průsečíkem kružnice  $k_1$  a kružnice  $k_4$  je bod  $E_1$ .

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 1 - 5)

Nyní zobrazíme body  $B_1, C_1, E_1, F_1$  a  $S_1$  v nárysu. Bodem  $F_1$  vedeme kolmici  $l_1$  na základnici  $x_{1,2}$ . Průsečíkem přímky  $l_1$  a základnice  $x_{1,2}$  je bod  $F_2$ . Vedeme kolmici  $l_2$  bodem  $B_1$  na základnici  $x_{1,2}$ . Přímka  $l_2$  protíná základnici  $x_{1,2}$  v bodě  $B_2$ . Sestrojíme kolmici  $l_3$  na základnici  $x_{1,2}$ , která prochází bodem  $S_1$ . Průsečíkem základnice  $x_{1,2}$  a přímky  $l_3$  je bod  $S_2$ . Bodem  $E_1$  vedeme kolmici  $l_4$  na základnici  $x_{1,2}$ . Přímka  $l_4$  a základnice  $x_{1,2}$  se protínají v bodě  $E_2$ . Následně sestrojíme kolmici  $l_5$  na základnici  $x_{1,2}$ , která prochází bodem  $C_1$ . Přímka  $l_5$  protíná základnici  $x_{1,2}$  v bodě  $C_2$ .

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 6 - 10)

Bodem  $S_2$  a bodem  $V_2$  vedeme čerchovanou přímkou  $o_2$ . Příмка  $o_2$  je nárys osy pravidelného šestibokého jehlanu. Bodem  $S_1$  a bodem  $V_1$  vedeme čerchovanou přímkou  $o_1$ . Příмка  $o_1$  je půdorys osy pravidelného šestibokého jehlanu.

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 11, 12)

Hrany jehlanu  $V_2A_2, V_2D_2$  v nárysně a hrany jehlanu  $V_1F_1, F_1E_1, E_1D_1, D_1C_1, C_1B_1$  a  $B_1V_1$  v půdorysně jsou viditelné a obtáhneme je plnou čarou. V půdorysně se překrývají hrany  $V_1E_1$  a  $F_1A_1$ . K bodu, ve kterém se úsečky  $V_1E_1$  a  $F_1A_1$  protínají, přiložíme pravítko s ryskou. Ryska na pravítku splývá se základnicí  $x_{1,2}$ . Na ordinále (kolmice na základnici) si vyznačíme pomocný bod na úsečce  $F_2A_2$  a pomocný bod na úsečce  $V_2E_2$ . Pomocný bod vyznačený na úsečce  $F_2A_2$  leží blíže k základnici  $x_{1,2}$  (resp. přímo na ní), oproti pomocnému bodu, který je vyznačený na úsečce  $V_2E_2$ . To znamená, že hrana  $F_1A_1$  nebude v půdorysu vidět. Hranu jehlanu  $F_1A_1$  obtáhneme čárkovanou čarou. Následně máme určenou viditelnost i zbylých hran jehlanu v půdorysu. Hrana jehlanu  $A_1B_1$  bude obtažena čárkovaně. Hrana  $V_1A_1$  bude také vyznačena čárkovanou čarou. Hrany jehlanu  $V_1E_1, V_1D_1$  a  $V_1C_1$  budou vytaženy plnou čarou. Tímto máme určenou viditelnost hran jehlanu v půdorysu.

Pro určení viditelnosti hran  $V_2F_2, V_2B_2, V_2C_2$  a  $V_2E_2$  v nárysu se budeme řídit vzájemnou polohou bodů v půdorysu. Konkrétně budeme zkoumat polohou bodů  $F_1$  a  $B_1$  vůči bodu  $A_1$  a bodů  $C_1$  a  $E_1$  vůči bodu  $D_1$ . Body  $A_1$  a  $D_1$  jsou v nárysu nejkrajnější body. Bod  $F_1$  se nachází blíže k základnici  $x_{1,2}$  než bod  $A_1$ . To znamená, že hrana jehlanu  $V_2F_2$  nebude viditelná. Úsečka  $V_2F_2$  bude vytažena čárkovaně. Bod  $B_1$  se nachází dále od základnice  $x_{1,2}$  než bod  $A_1$ . Hrana jehlanu  $V_2B_2$  bude viditelná. Úsečka  $V_2B_2$  bude obtažena plnou čarou. Bod  $E_1$  se nachází blíže k základnici  $x_{1,2}$  než bod  $D_1$ . To znamená, že hrana jehlanu  $V_2E_2$  viditelná nebude. Úsečka  $V_2E_2$  bude vytažena čárkovaně. Bod  $C_1$  se nachází dále od základnice  $x_{1,2}$  než bod  $D_1$ . Hrana jehlanu  $V_2C_2$  bude viditelná a zvýrazníme ji plnou čarou. Tímto máme určenou viditelnost hran jehlanu v nárysu.

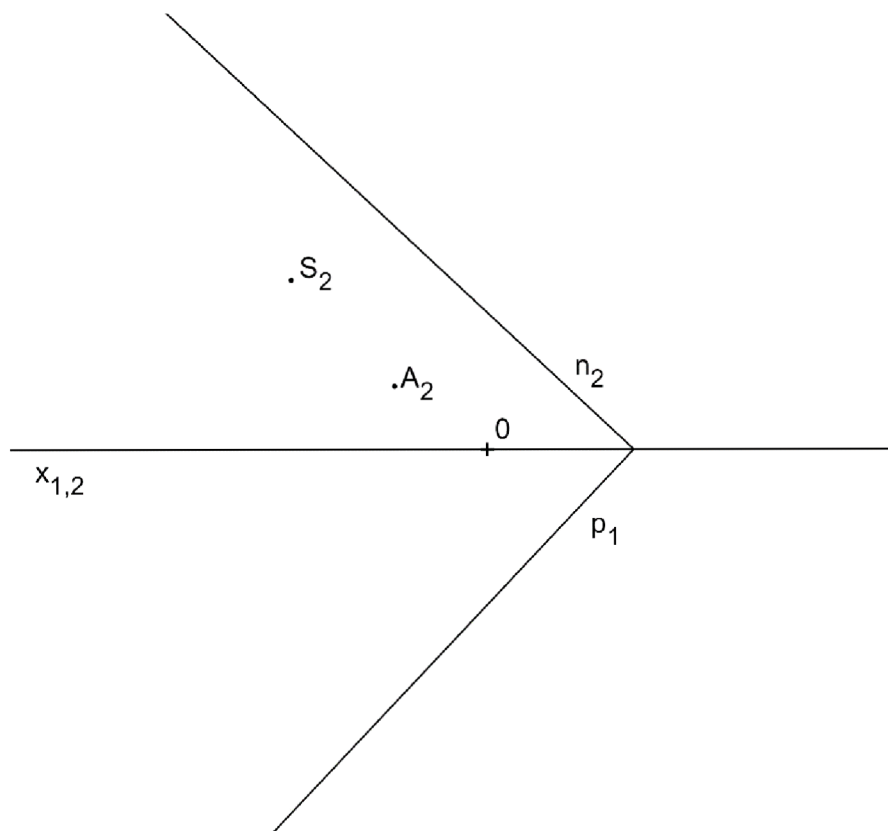
(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 13)

Úloha 8 je dostupná zde:

<https://www.geogebra.org/m/pfxqdguu#material/zhkfuynq>

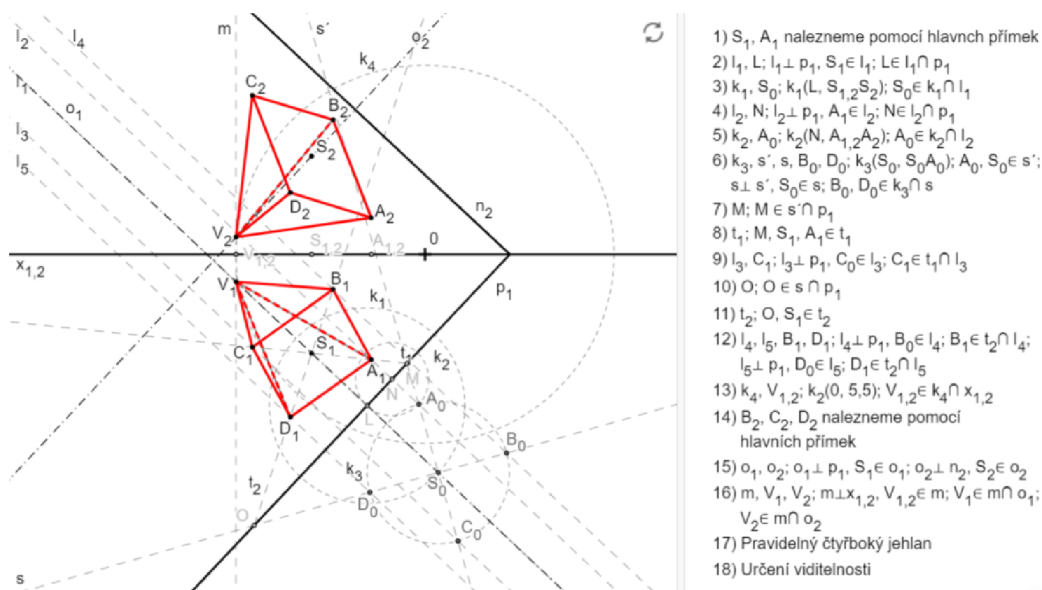


**Úloha 9:** V MP sestrojte pravidelný čtyřboký jehlan  $ABCDV$ , jehož podstava se středem  $S$  leží v rovině  $\rho$ , jsou-li zadány stopy roviny  $\rho$ , nárysy bodů  $S$  a  $A$ , počátek soustavy souřadnic  $0$ . Vrchol jehlanu  $V$  má souřadnice  $[-5,5, ?, ?]$ . Určete viditelnost jeho hran.



Obrázek 17: Zadání Úlohy 9

Náhled řešení:



Obrázek 18: Řešení Úlohy 9

Postup konstrukce:

Nejprve potřebujeme zjistit, kde se nachází půdorys bodu  $A$  a půdorys bodu  $S$ , abychom mohli otočit rovinu  $\rho$ . Po otočení roviny  $\rho$  uvidíme čtvercovou podstavu jehlanu ve skutečné velikosti. Téma otáčení roviny v MP dobře popisuje Kargerová (1997, s. 41-43). Urban (1965, s. 184-186) pěkně rozebírá zobrazení mnohostěňů v MP. Bodem  $S_2$  vedeme rovnoběžku  $h_{2S}$  se základnicí  $x_{1,2}$ . Bod, ve kterém protne hlavní přímka  $h_{2S}$  nárysnou stopu  $n_2$  roviny  $\rho$ , spustíme kolmo na základnici  $x_{1,2}$ . Tímto spuštěným bodem vedeme rovnoběžku  $h_{1S}$  s půdorysnou stopou  $p_1$  roviny  $\rho$ . Na přímce  $h_{1S}$  a zároveň na ordinále, která prochází bodem  $S_2$ , leží půdorys bodu  $S$ , bod  $S_1$ . Ordinála procházející bodem  $S_2$  protíná základnici  $x_{1,2}$  v bodě  $S_{1,2}$ . Bodem  $A_2$  vedeme rovnoběžku  $h_{2A}$  se základnicí  $x_{1,2}$ . Bod, ve kterém protne hlavní přímka  $h_{2A}$  nárysnou stopu  $n_2$  roviny  $\rho$ , spustíme kolmo na základnici  $x_{1,2}$ . Tímto spuštěným bodem vedeme rovnoběžku  $h_{1A}$  s půdorysnou stopou  $p_1$  roviny  $\rho$ . Na přímce  $h_{1A}$  a zároveň na ordinále, která prochází bodem  $A_2$ , leží půdorys bodu  $A$ , bod  $A_1$ . Ordinála procházející bodem  $A_2$  protíná základnici  $x_{1,2}$  v bodě  $A_{1,2}$ .

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 1)

Nyní můžeme rovinu  $\rho$  otočit. Půdorysná stopa  $p_1$  roviny  $\rho$  je zároveň osou otáčení. Bodem  $S_1$  vedeme kolmici  $l_1$  na půdorysnou stopu  $p_1$ . Přímka  $l_1$  protne půdorysnou stopu  $p_1$  v bodě  $L$ . Opíšeme kružnici  $k_1$  kolem bodu  $L$  o poloměru  $S_2S_{1,2}$ . Kružnice  $k_1$  protne kolmici  $l_1$  ve dvou bodech. Jeden z nich si vybereme a označíme ho jako otočený bod  $S_0$ . Bodem  $A_1$  vedeme kolmici  $l_2$  na půdorysnou stopu  $p_1$ . Přímka  $l_2$  protne půdorysnou stopu  $p_1$  v bodě  $N$ . Kolem bodu  $N$  opíšeme kružnici  $k_2$  o poloměru  $A_2A_{1,2}$ . Kružnice  $k_2$  protne kolmici  $l_2$ , ve dvou bodech. Zvolíme takový bod, který leží ve stejné polorovině s hraniční přímkou  $p_1$ , jako bod  $S_0$  (oba body mají kladnou kótu). Tento bod označíme jako bod  $A_0$ .

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 2 - 5)

Podstavou zadaného jehlanu je čtverec  $ABCD$ . Známe otočený střed čtverce  $S_0$  a jeden jeho otočený vrchol  $A_0$ . Bodem  $A_0$  a bodem  $S_0$  vedeme přímkou  $s'$ . Bodem  $S_0$  vedeme kolmici  $s$  na přímkou  $s'$ . Kolem bodu  $S_0$  opíšeme kružnici  $k_3$  o poloměru  $A_0S_0$ . Kružnice  $k_3$  protne přímkou  $s'$  v bodě  $C_0$ . Kružnice  $k_3$  protne přímkou  $s$  v bodech  $B_0$  a  $D_0$ . Nyní vidíme podstavu jehlanu ve skutečné velikosti.

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 6)

Průsečíkem přímky  $s'$  s půdorysnou stopu  $p_1$  je bod  $M$ . Sestrojíme polopřímku  $MS_1$ . Bod  $A_1$  leží na polopřímce  $MS_1$ . Bodem  $C_0$  vedeme kolmici  $l_3$  na půdorysnou stopu  $p_1$ . Přímka  $l_3$  protíná polopřímku  $MS_1$  v bodě  $C_1$ . Průsečíkem přímky  $s$  a půdorysné stopy  $p_1$  je bod  $O$ . Sestrojíme polopřímku  $OS_1$ . Bodem  $B_0$  vedeme kolmici  $l_4$  na půdorysnou stopu  $p_1$ . Následně vedeme bodem  $D_0$  kolmici  $l_5$  na půdorysnou stopu  $p_1$ . Přímka  $l_4$  se protíná s polopřímku  $OS_1$  v bodě  $B_1$ . Průsečíkem přímky  $l_5$  a polopřímky  $OS_1$  je bod  $D_1$ .

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 7 - 12)

Nyní zjistíme, kde bude ležet vrchol jehlanu  $V$ . U něj známe pouze  $x$ -ovou souřadnici. Kolem bodu  $O$  (počátek soustavy souřadnic) opíšeme kružnici  $k_4$  o poloměru 5,5. Kružnice  $k_4$  protne základnici  $x_{1,2}$  ve dvou bodech. Jelikož zadaná  $x$ -ová souřadnice vrcholu  $V$  je záporná, zajímá nás pouze průsečík kružnice  $k_4$  a základnice  $x_{1,2}$  nalevo od počátku soustavy souřadnic. Tento průsečík kružnice  $k_4$  a základnice  $x_{1,2}$  je bod  $V_{1,2}$ .

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 13)



Následně pomocí hlavních přímek nalezneme body  $B_2$ ,  $C_2$  a  $D_2$ . Bodem  $B_1$  vedeme rovnoběžku  $h_{1B}$  s půdorysnou stopou  $p_1$ . Rovnoběžka  $h_{1B}$  protne základnici  $x_{1,2}$  v bodě, který přeneseme pomocí ordinály na nárysnu stopu  $n_2$ . Následně vedeme tímto bodem rovnoběžku  $h_{2B}$  se základnicí  $x_{1,2}$ . Bod  $B_2$  leží na přímce  $h_{2B}$  a zároveň na ordinále, která prochází bodem  $B_1$ . Bodem  $C_1$  vedeme rovnoběžku  $h_{1C}$  s půdorysnou stopou  $p_1$ . Rovnoběžka  $h_{1C}$  protne základnici  $x_{1,2}$  v bodě, který přeneseme pomocí ordinály na nárysnu stopu  $n_2$ . Následně vedeme tímto bodem rovnoběžku  $h_{2C}$  se základnicí  $x_{1,2}$ . Bod  $C_2$  leží na přímce  $h_{2C}$  a zároveň na ordinále, která prochází bodem  $C_1$ . Bodem  $D_1$  vedeme rovnoběžku  $h_{1D}$  s půdorysnou stopou  $p_1$ . Rovnoběžka  $h_{1D}$  protne základnici  $x_{1,2}$  v bodě, který přeneseme pomocí ordinály na nárysnu stopu  $n_2$ . Následně vedeme tímto bodem rovnoběžku  $h_{2D}$  se základnicí  $x_{1,2}$ . Bod  $D_2$  leží na přímce  $h_{2D}$  a zároveň na ordinále, která prochází bodem  $D_1$ .

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 14)

Pro zjištění půdorysu a nárysu bodu  $V$  potřebujeme sestrojít osu jehlanu. Bodem  $S_1$  vedeme kolmici  $o_1$  na  $p_1$ . Přímka  $o_1$  je půdorys osy  $o$  jehlanu. Následně také vedeme kolmici  $o_2$  bodem  $S_2$ . Přímka  $o_2$  je nárys osy  $o$  jehlanu. Bodem  $V_{1,2}$  vedeme kolmici  $m$  na základnici  $x_{1,2}$ . Přímka  $m$  protne přímku  $o_1$  v bodě  $V_1$ . Přímka  $m$  protne přímku  $o_2$  v bodě  $V_2$ . Nyní můžeme sestrojít v půdorysu i v nárysu všechny hrany hranolu  $ABCDV$ .

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 15 - 17)

Jako poslední krok nám zbývá určit viditelnost hran hranolu  $ABCDV$  v půdorysu a v nárysu. V nárysu vyznačíme plnou čarou hrany jehlanu  $C_2V_2$ ,  $V_2A_2$ ,  $A_2B_2$  a  $B_2C_2$ . V půdorysu budou určitě viditelné hrany jehlanu  $V_1C_1$ ,  $C_1D_1$ ,  $D_1A_1$  a  $A_1V_1$ . Ty také obtáhneme plnou čarou. Pro určení viditelnosti zbylých hran jehlanu v nárysu se budeme řídit polohou jeho hran v půdorysu. V nárysu se překrývají hrany  $V_2B_2$  a  $C_2D_2$ . Jedna z těchto dvou hran určitě bude viditelná. K bodu, kde se nám tyto úsečky  $V_2B_2$  a  $C_2D_2$  překrývají, přiložíme pravítko s ryskou. Ryska na pravítku splývá se základnicí  $x_{1,2}$ . Na ordinále si vyznačíme pomocný bod na úsečce  $V_1B_1$  a následně si vyznačíme pomocný bod na úsečce  $C_1D_1$ . Nyní porovnáme polohu právě sestrojených pomocných bodů vzhledem k základnici  $x_{1,2}$ . Pomocný bod, který leží na úsečce  $V_1B_1$  se nachází blíže k základnici  $x_{1,2}$  než pomocný bod na úsečce  $C_1D_1$ . To znamená, že úsečka  $V_2B_2$  nebude v nárysu viditelná. Hranu jehlanu  $V_2B_2$  vyznačíme čárkovaně. Nyní máme jasně určenou

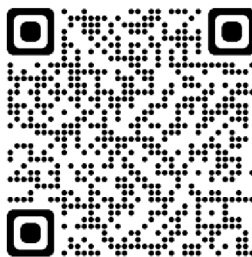
viditelnost i zbylých hran v nárysu. Hrany  $C_2D_2$ ,  $D_2A_2$  a  $V_2D_2$  budou viditelné a budou vytaženy plnou čarou.

V půdorysu se překrývají hrany  $V_1A_1$  a  $C_1B_1$ . Jedna z nich určitě bude viditelná. K bodu, kde se nám úsečky  $V_1A_1$  a  $C_1B_1$  překrývají, přiložíme pravítko s ryskou. Ryska na pravítku opět musí splývat se základnicí  $x_{1,2}$ . Pomocí ordinály si vyznačíme pomocný bod na úsečce  $V_2A_2$  a následně i pomocný bod na úsečce  $C_2D_2$ . Nyní opět porovnáme polohu těchto dvou naposledy sestrojených bodů vzhledem k základnici  $x_{1,2}$ . Pomocný bod, který leží na úsečce  $V_2A_2$  je k základnici  $x_{1,2}$  blíže než pomocný bod na úsečce  $C_2D_2$ . To znamená, že hrana  $V_1A_1$  v půdorysu viditelná nebude. Obtáhneme proto hranu jehlanu  $V_1A_1$  čárkovaně. Nyní máme opět jasně danou viditelnost zbylých hran jehlanu v půdorysu. Hrana  $V_1D_1$  nebude v půdorysu viditelná. Hrana  $B_1C_1$  v půdorysu viditelná bude.

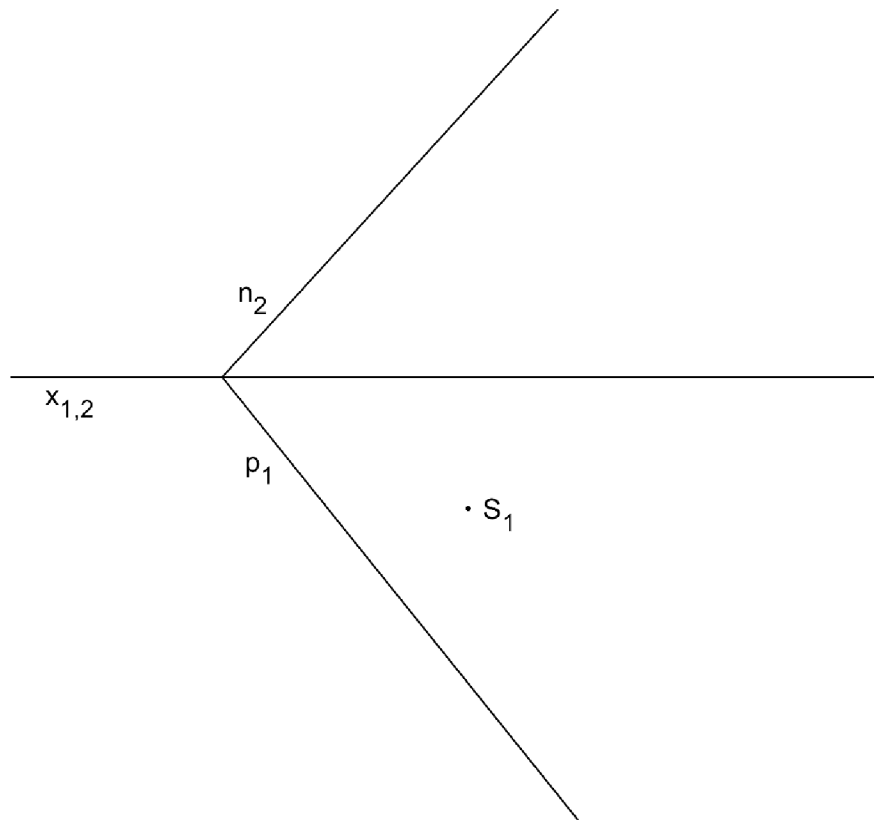
(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 18)

Úloha 9 je dostupná zde:

<https://www.geogebra.org/m/pfxqdguu#material/r7qdaxrq>



**Úloha 10:** V MP zobrazte průmět kružnice, která leží v rovině  $\rho$ , jsou-li zadány stopy roviny  $\rho$ , půdorys středu kružnice  $S_1$  a poloměr kružnice  $r = 3$ .



*Obrázek 19: Zadání Úlohy 10*



Nyní budeme otáčet rovinu  $\rho$ , abychom viděli zadanou kružnici ve skutečné velikosti. Osou otáčení je v tomto případě přímka  $p_1$ . Kolem bodu  $S_1$  opišeme kružnici  $k_2$  o poloměru  $S_2S_{1,2}$ . Kružnice  $k_2$  protne přímku  $f_1$  ve dvou bodech. Jeden z nich si vybereme a označíme ho jako bod  $S_{01}$ . Sestrojíme polopřímku  $HS_{01}$ . Kolem bodu  $S_{01}$  opišeme kružnici  $k_3$  o poloměru 3. Kružnice  $k_3$  protíná polopřímku  $HS_{01}$  ve dvou bodech. Jeden z nich označíme jako bod  $C_{01}$ , druhý označíme jako bod  $D_{01}$ . Následně vedeme bodem  $C_{01}$  kolmicí  $j_1$  na přímku  $l_1$ . Průsečíkem přímky  $j_1$  a přímky  $l_1$  je bod  $C_1$ . Bodem  $D_{01}$  vedeme kolmicí  $j_2$  na přímku  $l_1$ . Bod, ve kterém přímka  $j_2$  protne přímku  $l_1$ , je bod  $D_1$ . Body  $C_1$  a  $D_1$  jsou vedlejšími vrcholy elipsy.

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 4 - 7)

Hlavní a vedlejší vrcholy elipsy v půdorysu už známe. Můžeme se tedy soustředit na nalezení hlavních a vedlejších vrcholů elipsy v nárysu. Bodem  $S_2$  vedeme rovnoběžku  $f_2$  s nárysnou stopou  $n_2$ . Kolem bodu  $S_2$  opišeme kružnici  $k_4$  o poloměru 3. Kružnice  $k_4$  protíná přímku  $f_2$  ve dvou bodech. Jeden z nich označíme jako bod  $K_2$  a druhý jako bod  $L_2$ . Body  $K_2$  a  $L_2$  jsou hlavními vrcholy elipsy. Následně vedeme bodem  $S_2$  kolmicí  $l_2$  na půdorysnou stopu  $n_2$ . Průsečíkem přímky  $l_2$  a půdorysné stopy  $n_2$  bod  $J$ .

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 8 - 10)

Nyní budeme opět otáčet rovinu  $\rho$ . Tentokrát je osou otáčení přímka  $n_2$ . Kolem bodu  $S_2$  opišeme kružnici  $k_5$  o poloměru  $S_1S_{1,2}$ . Kružnice  $k_5$  protne přímku  $f_2$  ve dvou bodech. Jeden z nich si vybereme a nazveme ho bodem  $S_{02}$ . Sestrojíme polopřímku  $JS_{02}$ . Kolem bodu  $S_{02}$  opišeme kružnici  $k_6$  o poloměru 3. Body, ve kterých kružnice  $k_6$  protne polopřímku  $JS_{02}$  označíme jako body  $M_{02}$  a  $N_{02}$ . Následně bodem  $M_{02}$  vedeme kolmicí  $j_3$  na přímku  $l_2$ . Průsečíkem přímky  $l_2$  a přímky  $j_3$  je bod  $M_2$ . Bodem  $N_{02}$  vedeme kolmicí  $j_4$  na přímku  $l_2$ . Přímka  $j_3$  protíná přímku  $l_2$  v bodě  $N_2$ .

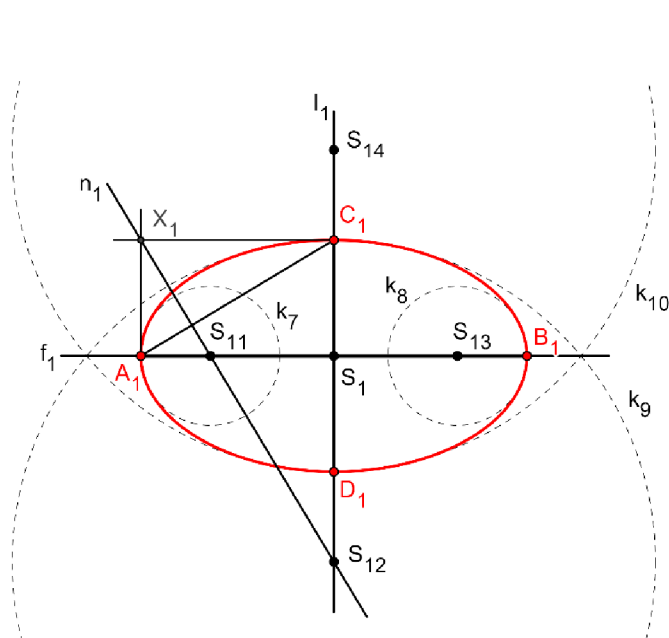
(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 11 - 14)

Již známe hlavní a vedlejší vrcholy elipsy v půdorysu i v nárysu. Elipsu můžeme sestavit pomocí hyperoskulačních kružnic nebo ji můžeme načrtnout od ruky. Téma elipsy je pěkně vysvětluje Pomykalová (2010, s. 36-46).

Konstrukce elipsy pomocí hyperoskulačních kružnic:

Sestrojíme trojúhelník  $A_1S_1C_1$ . Trojúhelník  $A_1S_1C_1$  doplníme na obdélník  $A_1S_1C_1X_1$ . Bodem  $X_1$  vedeme kolmici  $n_1$  na úsečku  $A_1C_1$ . Kolmice  $n_1$  protne přímkou  $f_1$  v bodě  $S_{11}$  a přímkou  $l_1$  v bodě  $S_{12}$ . Podle středové souměrnosti se středem  $S_1$  sestrojíme obrazy bodů  $S_{11}$  a  $S_{12}$ . Obraz bodu  $S_{11}$  označíme jako bod  $S_{13}$ , obraz bodu  $S_{12}$  označíme jako bod  $S_{14}$ . Následně sestrojíme kružnici  $k_7$  se středem  $S_{11}$  a poloměrem  $S_{11}A_1$ . Opíšeme kružnici  $k_8$  se středem  $S_{13}$  a poloměrem  $S_{13}B_1$ . Opíšeme kružnici  $k_9$  kolem bodu  $S_{12}$  o poloměru  $S_{12}C_1$ . Sestrojíme kružnici  $k_{10}$  se středem v bodě  $S_4$  o poloměru  $S_{14}D_1$ . Sestrojíme trojúhelník  $L_2S_2N_2$ . Trojúhelník  $L_2S_2N_2$  doplníme na obdélník  $L_2S_2N_2X_2$ . Bodem  $X_2$  vedeme kolmici  $n_2$  na úsečku  $L_2N_2$ . Kolmice  $n_2$  protne přímkou  $f_2$  v bodě  $S_{21}$  a přímkou  $l_2$  v bodě  $S_{22}$ . Podle středové souměrnosti se středem  $S_2$  sestrojíme obrazy bodů  $S_{21}$  a  $S_{22}$ . Obraz bodu  $S_{21}$  označíme jako bod  $S_{23}$ , obrazem bodu  $S_{22}$  je bod  $S_{24}$ . Následně sestrojíme kružnici  $k_{11}$  se středem  $S_{21}$  a poloměrem  $S_{21}L_2$ . Opíšeme kružnici  $k_{12}$  se středem  $S_{23}$  a poloměrem  $S_{23}K_2$ . Opíšeme kružnici  $k_{13}$  kolem bodu  $S_{22}$  o poloměru  $S_{22}M_2$ . Sestrojíme kružnici  $k_{14}$  se středem v bodě  $S_{24}$  o poloměru  $S_{24}N_2$ .

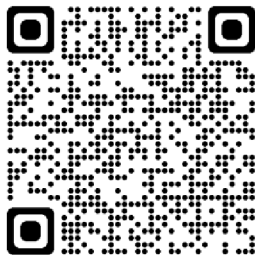
(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 15)



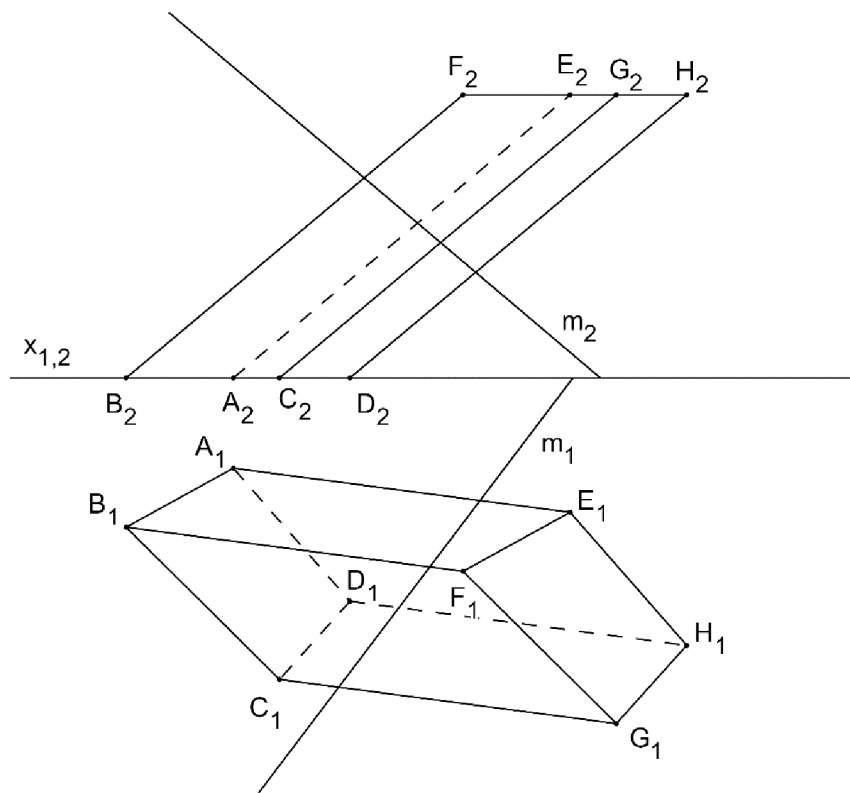
Obrázek 21: Hyperoskulační kružnice

Úloha 10 je dostupná zde:

<https://www.geogebra.org/m/pfxqdguu#material/rpmxfepk>



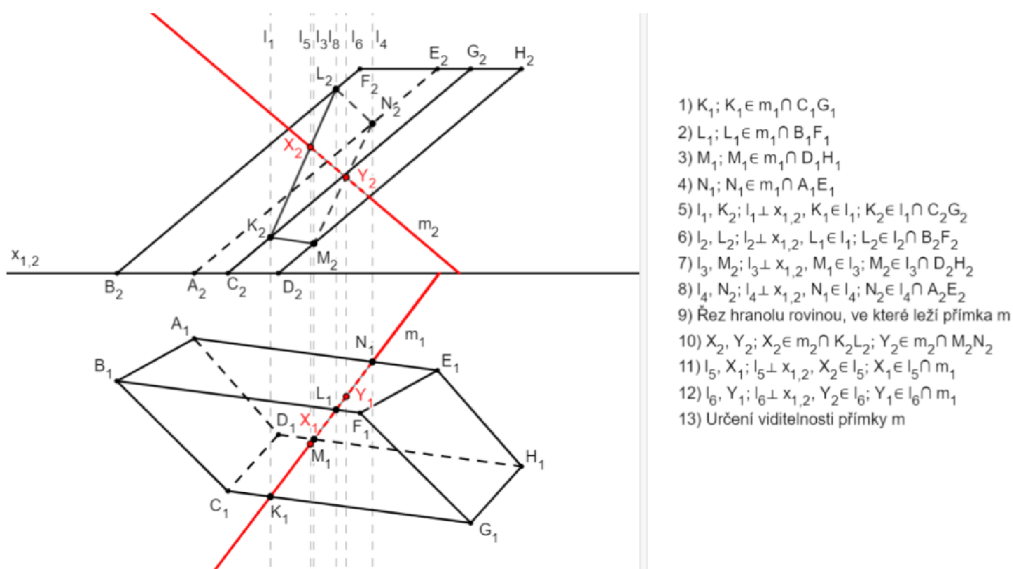
**Úloha 11:** V MP určete viditelnost přímky  $m$ , která prochází hranolem  $ABCDEFGH$ , je-li zadán hranol  $ABCDEFGH$  a přímka  $m$ . Určete body  $X$  a  $Y$ , ve kterých přímka protíná stěny hranolu.



Obrázek 22: Zadání Úlohy 11



Náhled řešení:



Obrázek 23: Řešení Úlohy 11

Postup konstrukce:

Řešení obdobné úlohy najdeme podrobně vysvětlené v příkladu 8.13 na str. 216 v (Pomykalová 2010). Kolmá promítací rovina přímky  $m_1$  je zároveň řeznou rovinou hranolu. V půdorysu řezná rovina splývá s přímkou  $m_1$ . Nejdříve potřebujeme zjistit, v jakých bodech protíná řezná rovina hrany hranolu. Řezná rovina protíná v bodě  $K_1$  hranu hranolu  $C_1G_1$ . V bodě  $L_1$  protíná řezná rovina hranu  $B_1F_1$ . V bodě  $M_1$  protíná řezná rovina hranu  $D_1H_1$ . Bod  $N_1$  je průsečíkem řezné roviny a hrany  $A_1E_1$ .

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 1 – 4)

Vedeme kolmici  $l_1$  bodem  $K_1$  na základnici  $x_{1,2}$ . Kolmice  $l_1$  protne úsečku  $C_2G_2$  v bodě  $K_2$ . Vedeme kolmici  $l_2$  na základnici  $x_{1,2}$  bodem  $L_1$ . Průsečíkem přímky  $l_2$  a úsečky  $B_2F_2$  bod  $L_2$ . Následně vedeme bodem  $M_1$  kolmici  $l_3$  na základnici  $x_{1,2}$ . V bodě  $M_2$  se protíná přímka  $l_3$  a úsečka  $D_2H_2$ . Bodem  $N_1$  vedeme kolmici  $l_4$  na základnici  $x_{1,2}$ . Průsečíkem přímky  $l_4$  a úsečky  $A_2E_2$  je bod  $N_2$ . Tyto body určují řez hranolu v nárysu řeznou rovinou.

Sestrojíme úsečky  $K_2L_2$ ,  $L_2N_2$ ,  $N_2M_2$  a  $M_2K_2$ . Úsečky  $L_2N_2$  a  $N_2M_2$  budou vytažené čárkovanou čarou, protože leží v neviditelných stěnách hranolu. Úsečky  $K_2L_2$  a  $M_2K_2$

budou vytaženy plnou čarou, jelikož leží ve viditelných stěnách hranolu. Tímto jsme získali řez hranolem  $ABCDEFGH$ .

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 5 – 9)

Nyní určíme body, ve kterých přímka  $m$  protíná stěny hranolu. Přímka  $m_2$  protne úsečku  $N_2M_2$  v bodě  $Y_2$ . Přímka  $m_2$  protne úsečku  $K_2L_2$  v bodě  $X_2$ . Následně vedeme kolmici  $l_5$  na základnici  $x_{1,2}$ , která prochází bodem  $X_2$ . Průsečíkem přímky  $l_5$  a přímky  $m_1$  je bod  $X_1$ . Bodem  $Y_2$  vedeme kolmici  $l_6$  na základnici  $x_{1,2}$ . Přímka  $l_6$  a přímka  $m_1$  se protínají v bodě  $Y_1$ .

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 10 – 12)

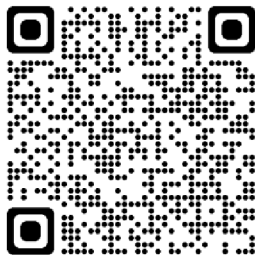
Viditelnost přímky  $m_2$  v nárysu určíme následovně. Nejdříve zjistíme, zda se body  $X_2$  a  $Y_2$  nachází ve viditelných stěnách hranolu. Bod  $X_2$  leží ve viditelné stěně hranolu. Bod  $Y_2$  se nachází v stěně hranolu, která není viditelná. Přímka  $m_2$  bude tedy obtažena plnou čarou od základnice  $x_{1,2}$  až k hraně hranolu  $D_2H_2$ . Od úsečky  $D_2H_2$  bude obtažena čárkovaně až k bodu  $X_2$ . Od bodu  $X_2$  bude přímka  $m_2$  opět viditelná. To znamená, že od bodu  $X_2$  bude obtažena plnou čarou.

Nyní určíme viditelnost přímky  $m_1$  v půdorysu. V půdorysu bod  $X_1$  náleží úsečce  $K_1L_1$ . Úsečka  $K_1L_1$  se nachází ve viditelné stěně hranolu. Bod  $Y_1$  náleží úsečce  $M_1N_1$ . Úsečka  $M_1N_1$  se nachází v neviditelné stěně hranolu. Přímka  $m_1$  bude obtažena plnou čarou od základnice  $x_{1,2}$  k bodu  $N_1$ . Od bodu  $N_1$  bude přímka  $m_1$  obtažena čárkovanou čarou až k bodu  $X_1$ . Od bodu  $X_1$  bude přímka  $m_1$  obtažena plnou čarou.

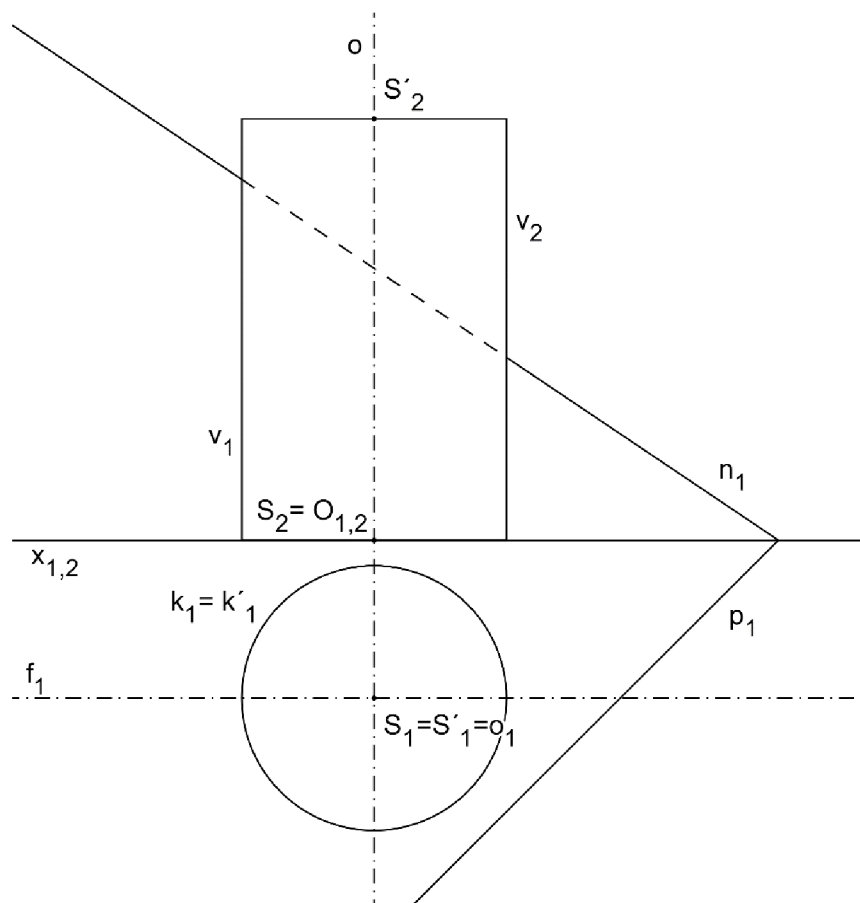
(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 13)

Úloha 11 je dostupná zde:

<https://www.geogebra.org/m/pfxqdguu#material/zmyu253c>

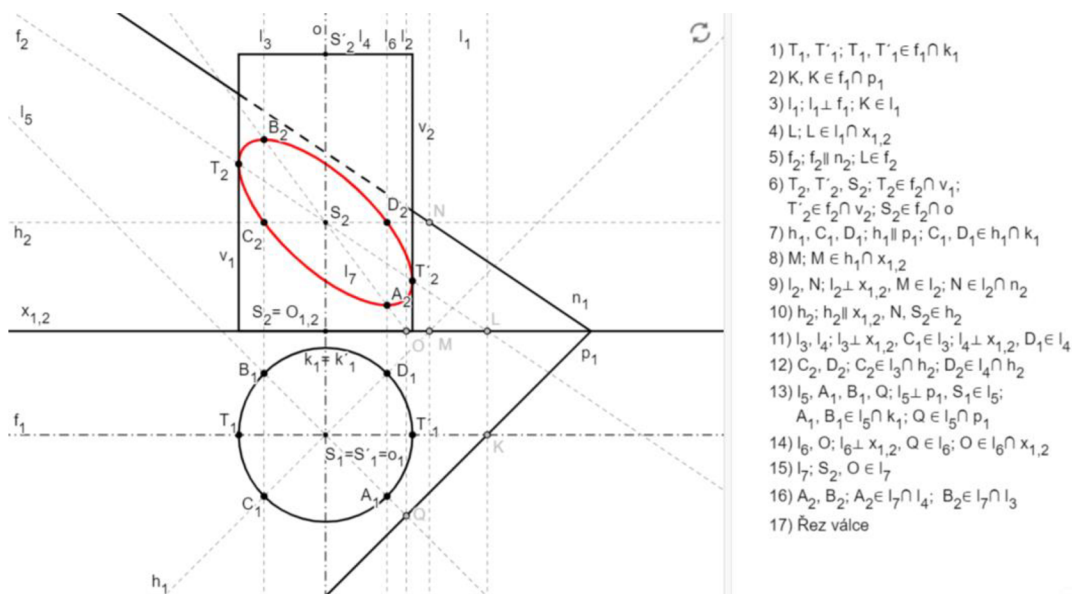


**Úloha 12:** V MP narýsujte řez válce, je-li dán válec, jehož podstava leží v půdorysně a stopy řezné roviny  $\rho$ .



Obrázek 24: Zadání Úlohy 12

Náhled řešení:



Obrázek 25: Řešení Úlohy 12

Postup konstrukce:

Řešení obdobné úlohy je dobře vysvětleno v příkladu 9.19 na str. 266 v (Pomykalová 2010). Řezem válce bude elipsa, jelikož půdorysná ani nárysna stopa rezné roviny  $\rho$  není kolmá na základnici  $x_{1,2}$ . Nejdříve zjistíme body dotyku  $T_2$  a  $T_2'$ . Úsečky  $v_1$  a  $v_2$  budou tečnami elipsy s body dotyku  $T_2$  a  $T_2'$ . Přímka  $f_1$  je rovnoběžná se základnicí  $x_{1,2}$ . Přímka  $f_1$  protíná kružnici  $k_1$  v bodě  $T_1$  a v bodě  $T_1'$ . Přímka  $f_1$  protíná půdorysnou stopu  $p_1$  v bodě  $K$ . Bodem  $K$  vedeme kolmici  $l_1$  na základnici  $x_{1,2}$ . Průsečíkem základnice  $x_{1,2}$  a přímky  $l_1$  je bod  $L$ . Bodem  $L$  vedeme rovnoběžku  $f_2$  s nárysnou stopou  $n_2$ . Přímka  $f_2$  protne stěnu válce  $v_2$  v bodě  $T_2'$ . Bodem, ve kterém přímka  $f_2$  protne stěnu válce  $v_1$ , je bod  $T_2$ . Bodem  $T_2$  a bodem  $T_2'$  bude procházet řez válce. Průsečíkem přímky  $f_2$  a osy válce  $o_2$  je bod  $S_2$ . Bod  $S_2$  je středem elipsy.

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 1 - 6)

Následně vedeme bodem  $S_1$  přímku  $h_1$  rovnoběžně s půdorysnou stopou  $p_1$ . Přímka  $h_1$  protne kružnici  $k_1$  ve dvou bodech, v bodě  $C_1$  a v bodě  $D_1$ . Přímka  $h_1$  zároveň protíná základnici  $x_{1,2}$  v bodě  $M$ . Bodem  $M$  vedeme kolmici  $l_2$  na základnici  $x_{1,2}$ . Průsečíkem přímky  $l_2$  a nárysné stopy  $n_2$  roviny  $\rho$  je bod  $N$ . Bodem  $N$  vedeme rovnoběžku

$h_2$  se základnicí  $x_{1,2}$ . Přímka  $h_2$  prochází zároveň bodem  $S_2$ . Dále vedeme bodem  $C_1$  kolmicí  $l_3$  na základnici  $x_{1,2}$ . Průsečíkem přímky  $l_3$  a přímky  $h_2$  je bod  $C_2$ . Následně vedeme bodem  $D_1$  kolmicí  $l_4$  na základnici  $x_{1,2}$ . Přímka  $l_4$  a přímka  $h_2$  se protnou v bodě  $D_2$ . Výsledná elipsa bude procházet body  $C_2$  a  $D_2$ .

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 7 - 12)

Nyní sestrojíme kolmicí  $l_5$  na přímku  $h_1$ , která prochází bodem  $S_1$ . Přímka  $l_5$  protne kružnici  $k_1$  ve dvou bodech, v bodech  $A_1$  a  $B_1$ . Přímka  $l_5$  protíná půdorysnou stopu  $p_1$  roviny  $\rho$  v bodě  $Q$ . Bodem  $Q$  vedeme kolmicí  $l_4$  na základnici  $x_{1,2}$ . Bod, ve kterém se přímka  $l_4$  a základnice  $x_{1,2}$  protnou, je bod  $O$ . Sestrojíme polopřímku  $OS_2$ . Bodem  $A_1$  vedeme kolmicí  $l_6$  na základnici  $x_{1,2}$ . Průsečíkem přímky  $l_6$  a polopřímky  $OS_2$  je bod  $A_2$ . Bodem  $B_1$  vedeme kolmicí  $l_3$  na základnici  $x_{1,2}$ . Průsečíkem přímky  $l_3$  a polopřímky  $OS_2$  je bod  $B_2$ . Výsledná elipsa bude procházet také body  $A_2$  a  $B_2$ .

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 12 - 16)

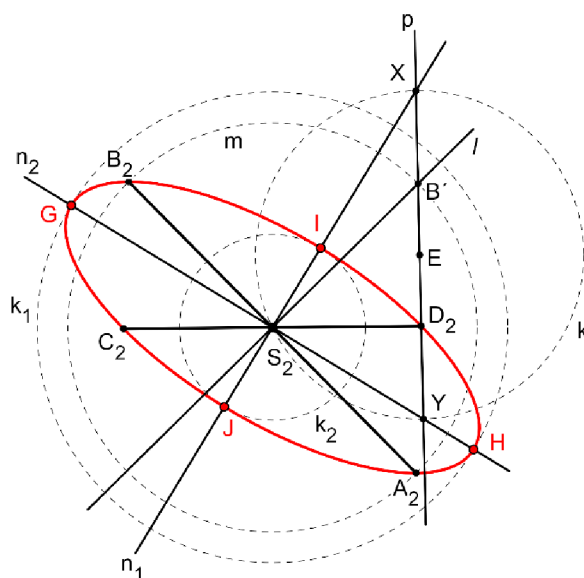
Nyní známe body, kterými elipsa prochází. Elipsu můžeme sestrojít pomocí Rytzovy konstrukce nebo ji můžeme načrtnout od ruky. Rytzovu konstrukci elipsy podrobně popisuje Pomykalová (2010, s. 50-52).

Rytzova konstrukce elipsy:

Bod  $S_2$  je středem úseček  $A_2B_2$  a  $C_2D_2$ . Body  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$ ,  $D_2$  náležejí elipse. Bodem  $S_2$  vedeme kolmicí na úsečku  $A_2B_2$ . Sestrojíme kružnici  $m$  se středem  $S_2$  a poloměrem  $A_2S_2$ . Kružnice  $m$  protne kolmicí  $l$  ve dvou bodech. Jeden z nich si vybereme a označíme ho jako bod  $B'$ . Body  $B'$  a  $D_2$  vedeme přímku  $p$ . Následně sestrojíme střed úsečky  $B'D$ , který označíme bodem  $E$ . Sestrojíme kružnici  $k$  se středem  $E$  a poloměrem  $ES_2$ . Kružnice  $k$  protne přímku  $p$  ve dvou bodech, v bodě  $X$  a v bodě  $Y$ . Bodem  $X$  a bodem  $S_2$  vedeme přímku  $n_1$ , která je zároveň vedlejší osou elipsy. Body  $Y$  a  $S_2$  vedeme přímku  $n_2$ , která je zároveň hlavní osou elipsy. Vzdálenost mezi body  $X$  a  $D_2$  je rovna velikosti hlavní poloosy  $a$ , vzdálenost mezi body  $D_2$  a  $Y$  je rovna velikosti vedlejší poloosy  $b$ . Sestrojíme kružnici  $k_1$  se středem  $S_2$  o poloměru  $a$ . Kružnice  $k_1$  protne přímku  $n_2$  v bodech  $G$  a  $H$ . Body  $G$  a  $H$  jsou hlavními vrcholy elipsy. Opíšeme kružnici  $k_2$  kolem bodu  $S_2$  o poloměru  $b$ . Kružnice  $k_2$  protne přímku  $n_1$  v bodech  $I$  a  $J$ . Body  $I$  a  $J$  jsou vedlejšími vrcholy elipsy. Nyní můžeme elipsu sestrojít pomocí hyperoskulačních kružnic.

Sestrojíme trojúhelník  $GS_2I$ . Trojúhelník  $GS_2I$  doplníme na obdélník  $GS_2IZ$ . Bodem  $Z$  vedeme kolmici  $c_1$  na úsečku  $GI$ . Bodem  $S_2$  vedeme kolmici  $d_1$  na přímku  $f_2$ . Kolmice  $c_1$  protne přímku  $f_2$  v bodě  $S_{21}$  a přímku  $d_1$  v bodě  $S_{22}$ . Podle středové souměrnosti se středem  $S_2$  sestrojíme obrazy bodů  $S_{21}$  a  $S_{22}$ . Obraz bodu  $S_{21}$  označíme jako bod  $S_{23}$ , obrazem bodu  $S_{22}$  je bod  $S_{24}$ . Následně sestrojíme kružnici  $k_2$  se středem  $S_{21}$  a poloměrem  $S_{21}G$ . Opíšeme kružnici  $k_3$  se středem  $S_{23}$  a poloměrem  $S_{13}H$ . Opíšeme kružnici  $k_4$  kolem bodu  $S_{22}$  o poloměru  $S_{12}I$ . Sestrojíme kružnici  $k_5$  se středem v bodě  $S_{24}$  o poloměru  $S_{24}J$ .

(Kroky v symbolickém zápisu konstrukce: 17)



Obrázek 26: Rytzova konstrukce elipsy

Úloha 12 je dostupná zde:

<https://www.geogebra.org/m/pfxqdguu#material/bke2e8ea>





## 5 ZÁVĚR

Sbírka je vytvořena v podobě GeoGebra knihy, která vytváří jednotné prostředí pro procházení jednotlivých úloh. S textem práce je propojena pomocí hypertextových odkazů a QR kódů. V každém appletu se nachází geometrický postup konstrukce. Pod každým appletem je k dispozici slovní postup, který je tvořen v souladu s geometrickým postupem konstrukce. Aby byl student schopný rýsovat ručně a ne pouze v počítačovém programu, nachází se u každé úlohy PDF soubor se zadáním téže úlohy. Tento soubor je určený k vytištění a ručnímu rýsování.

Práce má větší variabilitu použití, nabízí různé formy materiálů a přístupu k řešení daných úloh. Student může využít hypertextových odkazů a QR kódů. Pomocí nich vyhledá danou úlohu v GeoGebra knize, kde může využít možnost spuštění animace postupu formou krok za krokem. Dále má student možnost vytištění PDF souborů a rýsovat ručně. Student může také využít samotnou bakalářskou práci. V té má k dispozici zadání dané úlohy, náhled jejího řešení a příslušný slovní postup. Na tuto práci by se dalo navázat rozšířením sbírky o témata pravoúhlé axonometrie a kuželoseček. V rámci didaktického výzkumu by se mohlo zkoumat, jakou formu materiálů studenti nejvíce využívají a jak se jim s jednotlivými typy materiálů pracuje.

Tato práce může studentům pomoci porozumět řešení určitých úloh z deskriptivní geometrie a rozvinout jejich schopnost rýsování přímo na papír. Také může u studentů ovlivnit vnímání 3D prostoru a objektů v něm.

Vytváření sbírky bylo pro mě osobně přínosem. Především jsem se zdokonalila v práci s programem GeoGebra.

## 6 SEZNAM LITERATURY A INTERNETOVÝCH ODKAZŮ

DOLEŽAL, Jiří. *Základy geometrie a Geometrie* [online]. 2007. [cit. 9.6.2023]. Dostupné z <http://mdg.vsb.cz/portal/dg/StudOpory/Obsah.html>

GEOGEBRA. About GeoGebra [online]. 2023a. [cit. 28.4.2023]. Dostupné z: <https://www.geogebra.org/about>

GEOGEBRA. *GeoGebra Návody* [online]. 2023b. [cit. 28.4.2023]. Dostupné z: <https://www.geogebra.org/a/14?lang=cs>

GEOGEBRA. *O programu GeoGebra* [online]. 2023c. [cit. 28.4.2023]. Dostupné z: <https://www.geogebra.org/>

HAŠEK, Roman. *Geometrie III* [online]. 2022. [cit. 19.6.2023]. Dostupné z: [http://home.pf.jcu.cz/~hasek/7G3/Geometrie\\_III\\_\\_2022\\_9.pdf](http://home.pf.jcu.cz/~hasek/7G3/Geometrie_III__2022_9.pdf)

KARGEROVÁ, Marie. *Deskriptivní geometrie pro technické školy vysoké, vyšší a střední*. Praha: Monatex, 1997. IBSN 80-85780-68-2

KUŘINA, František. *Umění vidět v matematice*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1989. IBSN 80-04-23753-3

KUŘINA, František. *10 pohledů na geometrii*. Praha: Matematický ústav Akademie věd České republiky, 1996. IBSN 80-85823-21-7

KUŘINA, František. *10 geometrických transformací*. Praha: Prometheus, 2002. IBSN 80-7196-2317

POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia: stereometrie*. 2. vyd. Praha: Prometheus, 1995. IBSN 80-7196-079-9

POMYKALOVÁ, Eva. *Deskriptivní geometrie pro střední školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 2010. IBSN 978-80-7196-400-1

ŘÍMÁKOVÁ, Sabina. *Řešení vybraných úloh z deskriptivní geometrie* [online]. 2023. [cit. 25.6.2023]. Dostupné z: <https://www.geogebra.org/m/pfxqdguu>

URBAN, Alois. *Deskriptivní geometrie*. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1965. Bez IBSN

DRÁBEK, Karel; HARANT, František; SETZER, Ota. *Deskriptivní geometrie I*. Praha: Nakladatelství technické literatury, 1978. Bez IBSN

VORÁČOVÁ, Šárka a kol. *Atlas geometrie. Geometrie krásná a užitečná*. Praha: Academia, 2012. IBSN 978-80-200-1575-4

## 7 SEZNAM OBRÁZKŮ

Obrázek 1: Zadání Úlohy 1 .....	12
Obrázek 2: Řešení Úlohy 1 .....	13
Obrázek 3: Zadání Úlohy 2 .....	16
Obrázek 4: Řešení Úlohy 2 .....	17
Obrázek 5: Zadání Úlohy 3 .....	19
Obrázek 6: Řešení Úlohy 3 .....	20
Obrázek 7: Zadání Úlohy 4 .....	22
Obrázek 8: Řešení Úlohy 4 .....	23
Obrázek 9: Zadání Úlohy 5 .....	25
Obrázek 10: Řešení Úlohy 5 .....	26
Obrázek 11: Zadání Úlohy 6 .....	28
Obrázek 12: Řešení Úlohy 6 .....	29
Obrázek 13: Zadání Úlohy 7 .....	31
Obrázek 14: Řešení Úlohy 7 .....	32
Obrázek 15: Zadání Úlohy 8 .....	34
Obrázek 16: Řešení Úlohy 8 .....	35
Obrázek 17: Zadání Úlohy 9 .....	38
Obrázek 18: Řešení Úlohy 9 .....	39
Obrázek 19: Zadání Úlohy 10 .....	43
Obrázek 20: Řešení Úlohy 10 .....	44
Obrázek 21: Hyperoskulační kružnice .....	46
Obrázek 22: Zadání Úlohy 11 .....	48
Obrázek 23: Řešení Úlohy 11 .....	49
Obrázek 24: Zadání Úlohy 12 .....	52
Obrázek 25: Řešení Úlohy 12 .....	53
Obrázek 26: Rytzova konstrukce elipsy .....	55